Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

Propuesta Didáctica para el aprendizaje del Bloque de Números en 1º de ESO, utilizando la Música como Recuso Didáctico

Presentado por: Enara Galbete Ahechu
Línea de investigación: 1.1.8. Métodos pedagógicos

Director/a: Juan José Prieto Gutiérrez

Ciudad: Donostia-San Sebastián
Fecha: 15/05/2015

Índice de contenidos

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

Este trabajo pretende ofrecer una propuesta didáctica, que utiliza la música como recurso didáctico, para impartir los contenidos del bloque de números de 1º de ESO que más difíciles resultan a los alumnos.

Tras la investigación bibliográfica, centrada en la evolución de las matemáticas, de la música y de la estrecha relación e influencia de ambas materias, se ha realizado un estudio de campo entre los alumnos y profesores implicados. En concreto, en dicho estudio se ha utilizado una combinación de metodología cuantitativa y cualitativa. La primera se ha basado en unos cuestionarios pasados a los alumnos de 1º de ESO y en su posterior análisis y la segunda, en cambio, en la realización de entrevistas a los profesores de matemáticas de dicho curso.

Tras conocer la realidad y características de los alumnos implicados y los múltiples beneficios de la música en el proceso de enseñanza aprendizaje, en general, y en el aprendizaje de matemáticas en particular, se ha diseñado una propuesta didáctica, basada en una metodología novedosa que aúna música y matemáticas, a la que se ha denominado metodología *musimática*.

Dado que el nivel de música de los alumnos implicados es bueno, que en general su gusto por dicha asignatura es notorio y que ha quedado probada la influencia de la música en el aprendizaje de matemáticas, se prevé que la metodología propuesta dé buenos resultados.

Palabras clave: Matemáticas, música, propuesta didáctica, estudio de campo.

Abstract

The present work aims to use music as a teaching resource to provide an educational proposal in order to teach the contents from arithmetic that are most difficult to students of the first year of secondary school (ESO).

After the literature search, which has been focused on the evolution of mathematics, music and the close relationship and influence of both areas, a field study has been done among students and teachers involved. Specifically, this study has used a combination of quantitative and qualitative methodology. The first has been based on questionnaires answered by students of the 1st year of secondary school (ESO) and the analysis of the collected data, and the second, however, on the interviews done to the teachers involved.

After knowing the reality and characteristics of students involved and the multiple benefits of music in the teaching-learning process in general, and in the learning of mathematics in particular, an educational proposal has been designed, based on a new methodology that combines music and mathematics, which has been called *musimatics* methodology.

Since the music level of the involved students is good, since they generally like the aforementioned area and that the influence of music in learning mathematics has been proved, it is expected that the proposed methodology will have good results.

Keywords: Mathematics, music, didactic proposal, field study.

1. Introducción

Según Leibniz, "la música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta que está contando" (Artacho, 2015). En esta célebre frase queda patente la estrecha conexión entre música y matemáticas (escala, compás, métrica, intervalos y acordes, ritmo…) de la que la educación puede valerse para impartir ambas materias de manera innovadora, que resulte más atractiva y motivadora para los alumnos.

1.1. Presentación del trabajo

El presente trabajo trata de proponer una metodología innovadora para la impartición de los aspectos más difíciles del bloque de números de la asignatura de matemáticas de 1º de ESO, mediante el uso de la música como recurso didáctico.

Para ello, se parte de una investigación bibliográfica que tiene como objetivo estudiar la relación entre la música y las matemáticas, así como los beneficios que puede producir la música en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos, en general, y su influencia en el aprendizaje de matemáticas, en particular.

A continuación, se realiza un estudio de campo, con el objetivo de corroborar la información obtenida de la investigación teórica, para que la propuesta didáctica sea lo más realista posible y se adapte a las características de los alumnos a los que va dirigida. Para ello, se ha utilizado tanto una metodología de investigación cualitativa (mediante entrevistas a los profesores, para detectar las principales dificultades de los alumnos), como cuantitativa (mediante cuestionarios a los alumnos, para intentar concluir si existe una relación significativa entre tener conocimientos musicales y obtener un buen nivel matemático).

Tras analizar los resultados obtenidos del estudio de campo y teniendo en cuenta la investigación bibliográfica realizada, se realiza una propuesta didáctica para la enseñanza de los contenidos más difíciles del bloque de números de 1º de ESO, en concreto, números enteros, fracciones y sus respectivas operaciones.

Por último, se interpretan los resultados obtenidos según la hipótesis (discusión), se exponen las conclusiones, así como las posibles líneas de investigación futura y la bibliografía consultada. En el apartado anexos se añade documentación complementaria utilizada para la realización de este trabajo.

1.2. Justificación

Las matemáticas están presentes en todos los ámbitos de nuestra vida cotidiana, por lo que es necesario tener unos conocimientos mínimos para poder desenvolverse con facilidad en ellos. De acuerdo con los artículos 24.1, 24.3 y 25.1 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, la asignatura de matemáticas constituye una de las materias obligatorias dentro del currículo de la ESO.

1º de la ESO suele ser un curso complicado, por el salto que supone el pasar de primaria a secundaria, tanto a nivel académico como personal. A muchos alumnos les cuesta adaptarse a la dinámica de clase y a las exigencias de la nueva etapa educativa, lo que, sumado a la adolescencia, puede desembocar en unos malos resultados académicos. Una de las áreas que más difíciles resultan a los alumnos es la de matemáticas, debido a diferentes razones. Según González-Pienda et al. (2003), el fracaso en la asignatura de matemáticas se debe especialmente a la falta de conocimientos previos, a aspectos cognitivos, a la falta de motivación, a una actitud negativa con respecto de la materia, al uso de una metodología inadecuada por parte del profesor y a la falta de implicación de los padres en el proceso de enseñanza-aprendizaje de sus hijos. A todo ello, yo añadiría la falta de trabajo personal y autónomo por parte de los alumnos, que resulta esencial para que se dé el aprendizaje. Sobre todo en matemáticas es imprescindible conocer los conceptos teóricos (lo que implica un estudio personal del alumno) para poder aplicarlos en situaciones y ejercicios prácticos.

La música, al igual que las matemáticas, está presente en nuestro día a día, en todos los grupos sociales y culturas. Especialmente, los jóvenes muestran un interés especial por ella; la escuchan a diario e incluso se suelen identificar con un tipo de música. La gran variedad de estilos musicales existentes hoy en día y los medios sociales (televisión, radio, reproductores de música, Internet…) favorecen la relación entre los jóvenes y la música. Por todo esto y por su naturaleza expresiva y creativa, la música les suele resultar una asignatura más atractiva y amena que las matemáticas.

Como se verá a continuación, existen muchos estudios que demuestran la relación entre música y matemáticas, es más, afirman que la primera influye positiva y significativamente en el aprendizaje de la segunda. Pero la música no sólo puede favorecer la adquisición de conceptos matemáticos, sino que existen muchos trabajos acerca de los beneficios que tiene en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en general. Según Giordanelli (2001) es tal la relación entre el conocimiento de música y el desarrollo intelectual de los alumnos, que habría que incorporar esta asignatura también en la impartición de otras materias.

Para lograr una enseñanza de calidad es imprescindible una responsabilidad compartida entre profesores y alumnos, que se resume en un trabajo personal de ambos. Un buen profesor debe actuar como guía de sus alumnos en la consecución de los objetivos y metas de su proceso de enseñanza aprendizaje, ofreciéndoles una educación personalizada que se adapte a las características y capacidades particulares de cada uno. Para ello es fundamental conocerlos (sus gustos e intereses, sus puntos fuertes, sus debilidades…) y poder adaptar una metodología adecuada a ellos. Los alumnos, por su parte, deben comprometerse a participar en el proceso de manera activa, con interés e implicación.

Considero importante impulsar una metodología atractiva para los alumnos, que despierte su interés en las matemáticas, materia que frecuentemente se asocia con una asignatura difícil, árida y poco interesante, pero que al mismo tiempo es tan importante para desenvolverse en la vida cotidiana. Para ello, me voy a basar en la música, que suele resultar atractiva, interesante y motivadora para los alumnos y a su vez ofrece múltiples beneficios en el aprendizaje, en general, y en el aprendizaje de matemáticas, en particular. En concreto, en el presente trabajo se busca diseñar una propuesta didáctica que ayude a los alumnos de 1º de ESO de matemáticas en el aprendizaje de aquellos contenidos del bloque de números que más difíciles les resultan (números enteros, fracciones y sus respectivas operaciones), utilizando la música como recurso didáctico.

2. Planteamiento del problema

Por todo lo señalado anteriormente, se pretende analizar si realmente la música influye en el aprendizaje de matemáticas de los alumnos. Concretamente, he centrado la investigación en los alumnos de 1º de ESO del centro de secundaria Lauaizeta Ikastola de Donostia (Guipúzcoa).

Aunque pueda parecer que no existe relación significativa entre estas dos materias tan dispares aparentemente, diversos estudios demuestran que sí la hay, cosa que ha quedado demostrada mediante el estudio de campo realizado.

2.1. Objetivos

El objetivo principal de este proyecto es:

Presentar una metodología didáctica para la enseñanza del bloque de números de 1º de ESO, utilizando la música como recurso didáctico.

Los objetivos específicos que se pretenden conseguir son:

- Conocer los principales conceptos correspondientes al bloque de números de 1º de ESO, especialmente aquellos que resultan más difíciles a los alumnos.
- Estudiar los antecedentes que relacionan la música y las matemáticas.
- Conocer y exponer las ventajas que ofrece el tener unos conocimientos musicales para el aprendizaje de las matemáticas.

2.2. Breve fundamentación de la metodología

En cuanto a la metodología, se parte de una investigación bibliográfica, que ha permitido centrar el tema y analizar los diversos beneficios de la música en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en la asignatura de matemáticas, en particular.

Una vez establecido el marco teórico, se ha utilizado una investigación cualitativa (mediante entrevistas a los profesores) y otra cuantitativa (mediante cuestionarios a los alumnos) para analizar estadísticamente la relación que existe entre las materias de música y matemáticas.

Tras sacar conclusiones del trabajo realizado y conocidas las características del grupo de alumnos al que se dirige, se ha diseñado una propuesta práctica para impartir los contenidos más difíciles del bloque de números de 1º de ESO utilizando la música como recurso didáctico.

3. Marco teórico

Toda propuesta didáctica debe estar fundamentada sobre una base teórica, por lo que es imprescindible investigar sobre el tema escogido. Tras una breve introducción sobre la matemática, y en concreto sobre la aritmética, el trabajo se centrará en la música, poniendo énfasis en la relación existente entre estas dos materias. Partiendo de una contextualización histórica en la que se hablará de los Pitagóricos, se analizará la influencia de la matemática en la música y viceversa.

3.1. La matemática

Según la definición del departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco "la Matemática es la ciencia que se ocupa de describir y analizar las cantidades, el espacio y las formas, los cambios y relaciones, así como la incertidumbre". Por tanto, se puede afirmar que las matemáticas están presentes en todos los ámbitos de la vida cotidiana, en mayor o menor medida, lo que requiere que los alumnos adquieran un dominio suficiente de las mismas en la escuela.

Tal y como afirma Montesinos (2010) las Matemáticas de la ESO tienen como objetivo formar al alumno para que desarrolle las capacidades que le permitan desenvolverse en cualquier situación de la vida diaria, así como para que aprenda a argumentar de manera racional, mediante una colaboración estrecha con otras disciplinas.

Las matemáticas han ido evolucionando y cambiando a lo largo de la historia, adaptándose a las necesidades y características de cada época, por lo que muchos profesores afirman que es conveniente relacionar cada contenido con sus antecedentes históricos y con otras materias.

Según Struik (1999) la matemática, como ciencia, surgió en las civilizaciones de Oriente: Egipto, India, Babilonia y China. Se trataba de conocimientos puramente prácticos, basados en la experiencia y que tenían como objetivo facilitar la vida diaria. Montesinos (2010) afirma que fue Tales de Mileto quien llevó la matemática egipcia a Grecia, donde se transformó en una ciencia puramente teórica, con una estructura deductiva formal, mediante la idealización de los entes geométricos.

Según el mismo autor, el descubrimiento de los inconmensurables (hoy llamados irracionales) hacia mediados del siglo V a.C. contradijo la teoría de las proporciones y la creencia pitagórica de que todas las cosas eran, en esencia, números. Otras figuras destacadas de la matemática griega fueron Zenón, conocido por inventar el método dialéctico mediante las paradojas que llevan su nombre; Hipócrates, quién cuadró por primera vez una figura curvilínea; Aristóteles, quien negaba la existencia del infinito actual, defendiendo el infinito potencial; o Euclides, autor de los *Elementos*, el libro de texto más influyente de todos los tiempos.

En la Edad Media el desarrollo matemático se limitó principalmente a la traducción y difusión de textos árabes, griegos, hindúes y chinos, según Sánchez y Narro, destacando la figura de Fibonacci y el descubrimiento de la famosa serie que lleva su nombre.

La invención de la imprenta facilitó la transmisión de los avances múltiples y significativos que se dieron en el campo de las matemáticas en el Renacimiento. Entre ellos, cabe destacar, la figura de Galileo Galilei, al que se le considera "el creador de la física moderna, de la física matematizada" (Montesinos, 2010, p.82). Según Montesinos (2010), su método se fundamenta en proporcionar una explicación de los fenómenos naturales, describiendo las leyes que los regulan, utilizando la experimentación y la abstracción matemática (que es, en esencia, geometría). Viète, por su parte, es considerado como uno de los precursores del álgebra, aunque su álgebra no era simbólica (como la de hoy en día) sino sincopada. Otra de las aportaciones importantes es la de la geometría analítica de Descartes y Fermat, que llegaron al mismo método, aunque desde un punto de vista distinto. Además, cabe destacar la invención del cálculo infinitesimal, cuyo descubrimiento se atribuye a Newton y Leibniz, aunque existen diversos trabajos previos sobre el tema. Los Bernoulli estudiaron las aplicaciones del cálculo infinitesimal, además de hacer notables aportaciones a la teoría de probabilidades.

Según Ausejo (1992) en el siglo XVII se realizaron muchos avances en los campos del álgebra, de la geometría analítica y el cálculo infinitesimal. Además, la aparición de revistas especializadas y academias, propició una mejor comunicación entre los entendidos, lo que produjo notables avances.

Montesinos (2010) apunta que durante los siglos XVIII y XIX los avances de épocas anteriores se fueron consolidando y el álgebra se constituyó como la rama principal de las matemáticas. En esta época la formalización y el rigor en los resultados y demostraciones matemáticas adquirieron una gran importancia. A comienzos del siglo XIX el centro neurálgico de la matemática se situó en París aunque a finales de ese siglo se desplazó a Alemania. Cabe destacar la figura de Gauss, considerado *Princeps Mathematicorum* y "el matemático más grande desde la antigüedad", quien realizó aportaciones importantes en muchos campos de la matemática y de la ciencia. Otras figuras importantes fueron Bolzano y su teorema, Riemann y su geometría riemanniana, Dedekind y sus aportaciones al álgebra y a la teoría de números, Weierstrass, a quien se le atribuye la creación del análisis moderno, y Brouwer, fundador de la escuela matemática intuicionista (Montesinos, 2010).

3.2. La música

Partiendo de la definición que proporciona la RAE (2001), la música es "el arte de combinar los sonidos de la voz humana o de los instrumentos, o de unos y otros a la vez, de suerte que produzcan deleite, conmoviendo la sensibilidad, ya sea alegre, ya tristemente".

Shah (2010) la identifica con el arte o ciencia que combina sonidos instrumentales o vocales (o ambos), para llegar a la armonía. En este sentido, constituye un aspecto cultural e histórico, al igual que las matemáticas. Proporciona un lenguaje para expresar emociones e ideas, por lo que permite reflejar la identidad y forma de ser de cada uno. Este autor define la teoría musical como el estudio de la música y de sus propiedades, pudiendo incluir el análisis de cualquier frase, creencia o concepción musical.

De acuerdo con el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, la música ocupa un lugar importante en la vida cotidiana, por su valor cultural y como lenguaje no verbal. Uno de los objetivos de la asignatura de Música en la ESO es relacionar los contenidos educativos que se imparten en el aula con la música presente fuera de ella, en los diferentes ámbitos de la vida. La materia se divide en dos bloques fundamentales, percepción y expresión, relacionados con las capacidades para la escucha e interpretación correcta de piezas musicales, que permiten adquirir una cultura musical básica y necesaria. Los jóvenes se sienten muy identificados con la música, por lo que existe un interés y motivación importante hacia la materia.

En cuanto a la historia de la música, cabe destacar su íntima relación en la época griega con la educación y la sociología (Sarget, 2000). Según esta autora, la música formaba parte de la vida cotidiana de los griegos y la utilizaban para diversos fines, como cultivar el espíritu, provocar diversos estados de ánimo en los oyentes o como entretenimiento. Según Valles (2009), la música se entendía como *paideia* o educación integral y la enseñanza musical se impartía individualmente, aunque podían estar presentes más alumnos, y se basaba en la imitación

En esta época tuvo mucha importancia la escuela pitagórica, que "asociaba la esencia divina a la técnica musical" (Valles, 2009, p. 221) y "fue la primera en plantear la relación existente entre los números y los intervalos musicales, creando una estrecha vinculación entre la música y el cosmos, lo racional y lo ético" (Sarget, 2000, p. 118). La vinculación entre la armonía musical y la armonía del universo hizo de la música un concepto abstracto, lejano al sonido producido por los instrumentos musicales (Fubini, 1997, citado en Valles, 2009).

Platón, por su parte, estaba convencido de los beneficios de la música, entendida como sabiduría máxima, para la educación, aunque estaba en contra de la innovación (Valles, 2009). Según esta misma autora, Platón consideraba la música y la gimnasia como remedio del cuerpo y del alma, por lo que abogaba por la combinación de ambas.

Aristóteles apoyaba la teoría platónica sobre la importancia de la música en la educación mediante el canto y la práctica instrumental, aunque dándole un enfoque social y psicológico (Valles, 2009).

En la época romana apenas se desarrolló la educación musical, aparte de la importancia de tener conocimientos de ritmo y melodía en la oratoria y como actividad lúdica (Valles, 2009). En las escuelas siguió estando presente la educación musical, como en Grecia (Sarget, 2000).

En la Edad Media la música volvió a convertirse en ámbito relevante, "como arte se consideraba superior a las demás y era muy valorada como disciplina científica formando parte del Quadrivium" (Valles, 2009, p. 224). Según esta autora, aunque en la baja Edad Media el interés por la música era fundamentalmente teórico, a comienzo de la alta Edad Media empezaron a estudiar la música práctica, llegando a considerarla fundamental (tanto la música teórica como la práctica) para la formación de la nobleza. Además, añade que debido al carácter monástico de la enseñanza, la educación musical se limitó al canto religioso, lo que hizo que emergieran nuevas escuelas de canto en monasterios y catedrales. Según Sarget (2000), en las universidades se implantó el estudio de las artes liberales (*trívium* y *cuadrivium*, del que formaba parte la música) y además se ofrecían otras actividades, como canto, danza y práctica instrumental.

En la educación renacentista, la música ocupó un lugar importante y la iglesia protestante consideraba muy importante el canto religioso. Pero la música no se limitó al aspecto religioso, sino que estaba presente en las escuelas y en las casas (Valles, 2009). Cabe destacar que fue en este siglo cuando la música se consolidó en las universidades, como apunta Sarget (2000). Además, Jorquera (2005) añade que la invención de la imprenta musical en 1500 favoreció la publicación de textos, lo que hizo que se afianzara la práctica instrumental.

En el siglo XVII, cabe destacar la especialización de la música y los programas propuestos por Comenius para primaria y secundaria, en los que la música ocupó un lugar relevante (Jorquera, 2005), aunque no se implementaron hasta el siglo XIX.

Según este autor, en el siglo XVIII las ideas de la ilustración fomentaron el valor educativo de la música, considerando sus beneficios en el aspecto social y psicológico, lo que hizo que aparecieran diferentes propuestas educativas. Una de esas propuestas fue la de Basedow, basada en el uso de canciones infantiles como método de aprendizaje en la escuela, por ejemplo para aprender las tablas de multiplicación (Jorquera, 2005).

A partir del XIX aparecieron nuevos estudios y técnicas influenciadas por las teorías educativas de Rousseau y Pestalozzi. Dichas teorías se basaban en el uso de la música como recurso en la educación, aprovechando los beneficios que produce (Valles, 2009).

Durante los siglos XX y XXI la educación musical ha vivido avances notables, influidos por diversos factores, como el gramófono, la radio o los conciertos para niños. Además, gracias a la innovación educativa musical han aparecido nuevos métodos de educación musical, que tienen como objetivo ofrecer una educación integral mediante la música. Otro de los avances importantes ha sido la introducción en las aulas de nuevos estilos musicales, además de la música clásica, que resultan interesantes y motivadores a los alumnos.

3.2.1 Beneficios de la música en el proceso educativo

Román (2003) expone que la función de los dos hemisferios del cerebro en el proceso de aprendizaje es complementaria, por lo que es conveniente que trabajen los dos al mismo tiempo. Por esta razón, una educación de calidad debería buscar el equilibrio entre ambos hemisferios, cosa que se puede lograr mediante la actividad musical.

Esta autora expone los resultados del experimento diseñado y desarrollado por el Profesor Hans Günten Bastian (2000) en escuelas de primaria de Berlín, con el objetivo de estudiar los beneficios a largo plazo de tener una educación musical, en concreto saber música y tocar un instrumento. Entre los resultados, se destacan los siguientes: la música favorece el desarrollo cognitivo de los chavales, ayuda a mejorar las habilidades sociales, la inteligencia, las capacidades musicales, creativas e interpretativas e influye positivamente en las asignaturas de geometría matemáticas e idiomas (en este caso, alemán e inglés).

Según Arca (2008), la inteligencia musical es la primera que desarrolla un niño y está íntimamente relacionada a las otras 7 inteligencias definidas por Gardner. Es más, "si pudiéramos explicar la música, podríamos encontrar la clave para todo el pensamiento humano" (Gardner, 1983, citado en Arca, 2000, párr.9).

La música "como recurso pedagógico, enriquece la formación integral del niño, no sólo por su aspecto formativo sino también por su aporte en el sano desarrollo del individuo, de su personalidad" (Conejo, 2012, p. 264). Este autor apunta que la música favorece el desarrollo intelectual, socioafectivo y psicomotor, el crecimiento personal y la formación y adquisición de hábitos. Las aportaciones al desarrollo intelectual que cita son, entre otras, el aumentar los niveles de atención, observación, concentración, memorización, experimentación, agilidad mental y creatividad, así como el enseñar a pensar o a evaluar resultados. En cuanto al aspecto socioafectivo, apunta que la música fomenta una mayor participación en el aula y favorece el trabajo grupal, enseñando a respetar, compartir, definir tareas y diferenciar roles. Además, produce satisfacción, motivación y seguridad, ofrece un nuevo medio de comunicación y expresión, mejora la autoestima y ayuda a relajarse y a expresar sentimientos. En lo referente al aspecto psicomotor, Conejo (2012) destaca su aportación al desarrollo de la psicomotricidad, de la autonomía y de la energía positiva. Conejo (2012) añade que también favorece el crecimiento personal, destacando, entre otros, el desarrollo del sentido de la justicia y la libertad, la disminución de la timidez y del miedo, el encauzamiento de la agresión, el desarrollo del autocontrol y su contribución a la toma de decisiones. Asimismo, favorece la adquisición de hábitos como el cumplimiento de normas, el respeto, el uso adecuado del tiempo o saber enfrentarse a las capacidades y puntos débiles de cada uno (Conejo, 2012).

Dickinson (1993) habla de los estudios recientes que demuestran la conexión entre la música y el rendimiento académico. En un estudio realizado en 17 países para medir la capacidad de los estudiantes de ciencias de 14 años, los mejores resultados se obtuvieron en Hungría, Países Bajos y Japón, países donde la música es parte del plan de estudios desde preescolar hasta secundaria. El rendimiento académico de los estudiantes húngaros, sobre todo en las asignaturas de ciencias y matemáticas es excepcional. Este mismo autor menciona el caso de la escuela de primaria Davidson en Augusta, Georgia, que gracias a su programa de música y artes, comenzado en 1981, ha logrado ser la que mejores resultados académicos logra del país. Además, menciona su experiencia personal cuando era director del Centro de Actividades Creativas de Seattle, cuando muchos niños que iban a clases de música y pintura comenzaron a sobresalir en matemáticas en la escuela, mientras que otros mejoraron significativamente en lengua y literatura.

Centrándonos en la materia de música (obligatoria en 1º-3º de ESO y optativa en 4º, según la LOE), Pérez (2014) apunta que favorece la adquisición de las 8 competencias básicas establecidas en el currículum. A continuación, se añade una propuesta para trabajar cada competencia básica, basada en la que concreta la autora mencionada:

- **Competencia cultural y artística.** Mediante un análisis musical en el que se contemplen diversas expresiones musicales, contextualizándolas histórica y socioculturalmente.
- **Competencia en comunicación lingüística.** Mediante la expresión verbal del análisis teórico de la música o de los sentimientos o percepciones que produce el escuchar una melodía, por ejemplo.
- **Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.** Mediante la capacidad de audición, que fomenta el establecimiento de conexiones con el mundo que nos rodea.
- **Tratamiento de la información y competencia digital.** Mediante el uso de diversos programas para escuchar o interpretar composiciones musicales.
- **Competencia social y ciudadana.** Mediante el trabajo grupal, tanto para interpretar una pieza musical como para crear pequeñas composiciones, fomentando el respeto y la colaboración.
- **Competencia para aprender a aprender.** Utilizando la música clásica para lograr una mejor concentración, así como para fomentar una actitud abierta y receptiva a la adquisición de nuevos conocimientos.
- **Competencia matemática.** Proponiendo actividades en las que los alumnos traten de reconocer elementos matemáticos presentes en la música (valor de las figuras, compás, distancia entre notas, ritmo...).

Giordanelli (2011) coincide con Dickinson (1993) en que la música se debería impartir de manera transversal en todas las asignaturas, pues puede favorecer el desarrollo intelectual, personal y moral del alumnado, mediante actividades diseñadas de manera adecuada. Por ello, Dickinson (1993) apuesta por que todos los profesores tengan unos conocimientos musicales suficientes y que hagan uso de materiales diseñados para tal fin, como la serie de videos "Your Musical Heritage" creada por la profesora de música Amanda Amend o la cinta de casette "Sing a Song of Science" de la profesora de ciencias Kathy Carrol.

3.2.2 Beneficios de la música en el aprendizaje matemático

En cuanto a la influencia de la música en el aprendizaje matemático, Arca (2008) menciona que según un estudio existe una relación significativa entre buenos resultados matemáticos y el conocimiento musical. Esta misma autora cita otro trabajo que demuestra que un buen nivel de lectura musical implica una lectura matemática de calidad y viceversa.

Según un estudio de Rauscher, Shaw y Ky (1993), conocido como el "Efecto Mozart", el escuchar durante unos minutos la música de este gran genio induce a una mejora de las capacidades espacio-temporales de los alumnos de la universidad en los 10-15 minutos posteriores, lo que resulta útil en los razonamientos matemáticos. Según otro experimento en el que participaron estudiantes de diferentes niveles y edades, existen similitudes entre la actividad cerebral y las notas musicales de las obras de Mozart (Jensen, 2007, citado en Arca, 2000), por lo que se puede deducir que la música influye en las conexiones neuronales del cerebro. Otro trabajo concluye que a pesar de que el escuchar música de Mozart antes de un examen beneficia el razonamiento espacio-temporal a corto plazo (durante 5-15 min), no es así durante la prueba, puesto que afecta en los patrones neuronales de encendido (incorporación del lenguaje eléctrico al cerebro) (Félix, 1993, citado por Arca, 2000). Según este estudio, el momento en el que se escucha la música de Mozart es relevante. Ordoñez, Sánchez, Sánchez, Romero y Bernal (2011) van más allá y afirman que entre los beneficios del Efecto Mozart se encuentran la mejora de la capacidad para comprender, plantear y resolver problemas matemáticos, del aprendizaje, de las capacidades sociales y de la memoria. Jensen (2000) apunta a que pueden ser los ritmos, tonos o patrones de la música los que provocan una mejora del aprendizaje, basándose en los resultados positivos obtenidos a partir de la escucha de otros compositores clásicos (distintos a Mozart). De todas formas, como en toda investigación científica, existen otros muchos trabajos que contradicen esta teoría, como el de Stough, Kerkin, Bates y Mangan (1994), o el de Steele, Ball y Runk (1999), entre otros.

3.3. La relación entre matemática y música

De las definiciones de matemáticas y música proporcionadas en el apartado anterior, se puede deducir que se trata de disciplinas muy distintas; mientras que la primera se identifica con una disciplina científica, exacta y rigurosa, la segunda se basa en la expresión y en la creatividad. De todas formas, existe un vínculo importante entre ellas; muchos aspectos musicales se basan en conceptos matemáticos y la influencia de la música en las matemáticas también es notable. Ejemplo de esta influencia mutua son ciertos conceptos que comparten las dos disciplinas, como números, ratios, proporciones, patrones, medidas, etc.

3.3.1 Los pitagóricos

Las primeras relaciones entre matemáticas y música se remontan a la antigua Grecia, en concreto a Pitágoras y a los Pitagóricos. En concreto, se interesaron por la base matemática de la música, que se recoge en el Tratado sobre la Música de Boecio del siglo VI d.C., tratado que sirvió como base en el desarrollo de la teoría musical desarrollada hasta la Edad Media (Tomasini, s.f).

A este filósofo se le atribuye el descubrimiento de la base matemática de la armonía musical, fundamentada en las proporciones ½, 2/3, 3/4, además de la relación existente entre los ángulos rectos y las proporciones 3-4-5 y 5-12-13 (que coinciden con las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo). Estos dos descubrimientos tuvieron una gran efecto en Pitágoras, lo que le llevó a generalizar que “todas las cosas son en esencia números” (Montesinos, 2010).

Entre los descubrimientos de la base matemática de la música se encuentran los siguientes:

- “El principio que relaciona la longitud de una cuerda vibrante con las notas de la escala musical”, donde longitudes pequeñas se identifican con tonos graves y longitudes altas con tonos agudos (Tomasini, s.f, p.16). En concreto, la frecuencia del sonido producido al pulsar una cuerda con extremos fijos es inversamente proporcional a su longitud (Losada, 2007).
- “La construcción de la escala musical descansa sobre ciertas relaciones de proporción existentes entre sus notas” (Tomasini, s.f. p.17). Este autor resume en la siguiente tabla (tabla 1) las relaciones que representan la media aritmética, la armónica y la geométrica, que se identifican con los intervalos musicales de quinta (relación entre do y sol), cuarta perfecta (relación entre

do y fa) y octava (relación entre do y DO), respectivamente. Además, el cociente entre la media aritmética y geométrica se identifica con el tono (distancia entre do y re, por ejemplo).

Nombre del intervalo	Valor del intervalo	Tipo de proporción	Expresión algebraica
Cuarta perfecta	$\frac{4}{3}$	*armónica*	$b=\frac{2ac}{a+c}$
Quinta	$\frac{3}{2}$	*aritmética*	$b=\frac{a+c}{2}$
Octava	$\frac{2}{1}$	*geométrica*	$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$
Tono	$\frac{9}{8}$	$\frac{\textit{aritmética}}{\textit{armónica}}$	$b=\frac{\frac{a+c}{2}}{\frac{2ac}{a+c}}$

Tabla 1. Relaciones matemáticas de la escala.
Fuente: Tomasini, p.21.

Además el pitagórico Filolago enunció la relación entre los tres intervalos estudiados como "la extensión de la octava es una cuarta más una quinta", tal y como se puede ver en el siguiente diagrama (Tomasini, s.f., p. 20).

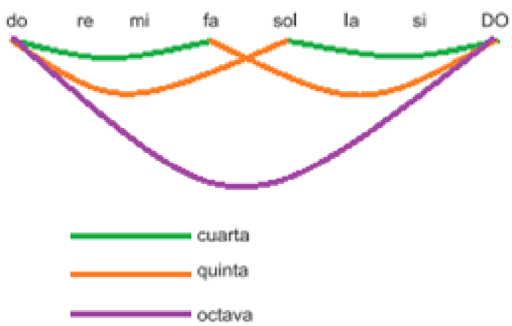


Imagen 1. Relación entre los intervalos de cuarta, quinta y octava.
Fuente: Tomasini, p.20.

- Los números 6, 8, 9 y 12 como representantes de las propiedades de la escala musical. Por una parte, la igualdad $\frac{6}{8}=\frac{9}{12}$ representa el intervalo de cuarta perfecta y por otra, mediante distintas combinaciones de 6, 8, 9 y 12 se pueden obtener los intervalos de quinta, octava y tono (Tomasini, s.f.).
- En cuanto a los tonos y semitonos, los griegos conocían perfectamente que cada octava está formada por cinco tonos y dos semitonos. Se dieron cuenta de la simetría de la distribución de tonos y semitonos respecto a la nota re.

re — mi ⌒ fa — sol — la — si ⌒ do — re — mi ⌒ fa — sol — la — si ⌒ do — re

Imagen 2. Simetría de la estructura tonal respecto a re.
Fuente: Tomasini, p.23.

Además, descubrieron que mientras que el intervalo de quinta siempre tiene la misma estructura (3 tonos y 1 semitono) el de cuarta puede ser perfecto (de dos tonos y un semitono: do-fa, re-sol, mi-la, sol-si, la-do, si-re) o aumentado (de tres tonos: fa-si)

- Pitágoras fue el primero en definir el silencio como música, por ser continuo y carente de intervalos. (Romero, s.f.)

Trasladando al Cosmos la relación existente entre las proporciones aritméticas geométricas y musicales (números, figuras y notas musicales), Pitágoras denominó "Música de las Esferas" a la melodía eterna formada por las notas musicales emitidas por los movimientos de los astros (González, s.f.). De esta manera, Pitágoras ratificaba la relación existente entre matemáticas y astronomía. Como el objetivo de los pitagóricos era poder entender la concordancia del universo mediante los números enteros, sus esfuerzos se centraron en comprender la armonía de los números.

3.3.2 Edad Media

La Música, la Astronomía y las disciplinas matemáticas de la Aritmética y la Geometría formaron el *Quadrivium* pitagórico, que junto con el *Trivium* (Gramática, Retórica y Dialéctica) constituía el currículum educativo de la época. En cuanto a las composiciones musicales de este periodo, se basaron en algunas de las relaciones entre música y matemáticas descubiertas por los pitagóricos; por ejemplo, en la elección de la nota re como punto de partida de la mayoría de las composiciones (por la simetría entre la estructura tonal) (Tomasini).

Según Romero, del siglo XII en adelante aparecieron nuevos estilos y tipos de música, alejados de la tradición pitagórica; el cálculo de intervalos de las nuevas afinaciones surgidas seguía sustentándose en las matemáticas, aunque no tanto en los fundamentos pitagóricos.

Estos nuevos descubrimientos y la necesidad de resolver los problemas de afinación, derivaron en la creación de la escala cromática (Romero). La particularidad de esta escala es que la distancia entre cada una de las notas comprendidas entre las notas consecutivas es siempre la misma, en concreto, de un semitono, lo que hace imprescindible el uso de sostenidos (#) y bemoles (b), como se aprecia en la imagen 3. La ventaja principal de este tipo de escala es que permite transportar una composición musical de una tonalidad a otra, sin tener que reajustar la afinación de los instrumentos musicales.

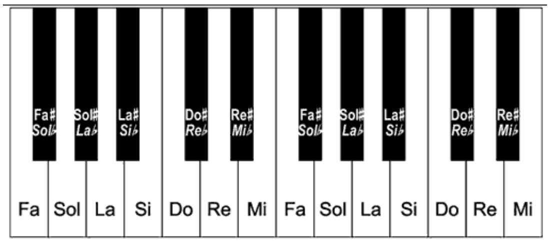


Imagen 3. Imagen que representa la escala cromática.
Fuente: Rueda Armónica.

3.3.3 Siglos XVII-XIX

El proceso de transición entre la escala pitagórica y la cromática fue lento y no fue hasta el siglo XVII cuando se generalizó su uso, gracias a las reglas de afinación de Mersenne, que hoy en día siguen vigentes (Romero). Según Losada (2007) a este matemático se le atribuye, entre otros, el descubrimiento, aunque no la demostración, de las relaciones entre la frecuencia del sonido producido por una cuerda y su longitud, su tensión, su densidad y su diámetro.

Descartes escribió el *Compendio de música*, retado por el físico matemático Isaac Beckman para que describiera y explicara "las proporciones matemáticas de las vibraciones armónicas de las cuerdas musicales" (Romero, s.f., p. 9). Romero destaca el análisis de Descartes de por qué la cuarta no suena tan bien como la quinta, basado en los descubrimientos de Pitágoras sobre que la escala musical se fundamenta en las proporciones entre sus notas.

Durante los siglos posteriores, grandes matemáticos trabajaron en la demostración del problema de la cuerda vibrante, tales como Brook Taylor, Jean, leRond D'Alembert, Daniel Bernoulli o Leonhard Euler (Losada, 2007). Tras siglos de trabajo y gran controversia, a principios del XIX Fourier proporcionó una solución que parecía correcta, basada en el uso de series trigonométricas (Losada, 2007). Según este mismo autor el resultado de Fourier también fue criticado por Lagrange, Laplace y Abel, porque se utilizaban series infinitas que no tenían por qué ser convergentes, lo que podía crear resultados no correctos. Losada (2007) concluye que con la definición proporcionada por Dirichlet sobre las condiciones de convergencia de las Series de Fourier el problema de la cuerda vibrante se dio finalmente por resuelto.

3.3.4 Siglos XX-XXI

A principios del siglo XX se empezaron a aplicar técnicas matemáticas, sobre todo conceptos de teoría de conjuntos, para la composición musical (Lara, 2008). Entre las nuevas corrientes y teorías musicales surgidas, Lara (2008) destaca el microtonalismo, el dodecafonismo, la música estocástica y la composición por algoritmos.

3.3.4.1 Microtonalismo

Según la página *Microtonal Projects,* la música microtonal se basa en la utilización de microtonos, intervalos igualmente espaciados que son menores que los semitonos, por lo que las composiciones microtonales se fundamentan en el uso de una gama más amplia de sonidos. Cabe destacar la figura del compositor Julián Carrillo y su teoría del sonido 13, basada en la división de un tono en 16 partes iguales, de los que nació el sonido nº 13. Fue capaz de reproducir en la nueva escala creada (de 96 sonidos) los doce sonidos iniciales, por lo que creó 84 nuevos (Martínez y Palomares-Sánchez). Según estos autores, para poder representar los nuevos sonidos creados Carrillo se basó en el uso de números, diseñando así un nuevo método de escritura musical.

3.3.4.2 Dodecafonismo

Como apunta Romero, el dodecafonismo parte de la escala cromática, dando a cada nota el mismo roll y sin establecer jerarquía alguna entre ellas (a diferencia de las escalas mayor y menor). Al contrario que en la escala tonal, no existen notas predominantes, por lo que para su escritura se parte de una nota cualquiera y las posteriores se fijan partiendo de la norma de que no se puede repetir una nota hasta que se hayan utilizado las once restantes (Romero). Según este autor, los criterios fijados para la creación de la serie (escala dodecafónica) por parte de su inventor, Arnold Schoenberg, son los siguientes:

- Serie fundamental, denotada mediante P. Por ejemplo:

Mi	Fa	Sol	Reb	Solb	Mib	Lab	Re	Si	Do	La	Sib

- Retrogradación, denotada mediante R. Se calcula invirtiendo el orden de la serie fundamental. Por ejemplo, la retrogradación de la serie fundamental escogida es:

Sib	La	Do	Si	Re	Lab	Mib	Solb	Reb	Sol	Fa	Mi

- Inversión, denotada mediante I. Se calcula invirtiendo la dirección de los intervalos (una quinta ascendente pasaría a ser quinta descendente). Por ejemplo, la inversión de la serie fundamental escogida es:

Mi	Re#	Do#	Sol	Re	Fa	Do	Fa#	La	Sol#	Si	Sib

- Inversión retrógrada, denotada mediante R. Es la retrogradación de la serie invertida. Por ejemplo, la inversión retrograda de la serie fundamental escogida es:

Sib	Si	Sol#	La	Fa#	Do	Fa	Re	Sol	Do#	Re#	Mi

3.3.4.3 Música estocástica

Se trata de la música producida a través de modelos. Cabe destacar la figura de Iannis Xenakis, quien utilizó modelos matemáticos tanto es sus obras musicales como arquitectónicas (Romero). Su música estocástica se basa en la modelización de ciertos parámetros musicales mediante la aplicación de la teoría de probabilidades, en concreto, de la duración de las notas, la densidad de la nube de alturas, la velocidad del glissando, las dinámicas y la instrumentación (Gómez, 2010). Partiendo del artículo de Gómez (2010), en la tabla 2 se resumen la definición y la representación gráfica de las funciones de densidad que formalizan los parámetros musicales mencionados.

3.3.4.4 Composición por algoritmos o composición algorítmica

Es una técnica de composición de obras musicales mediante algoritmos matemáticos. Por ejemplo, Moldaver, Merlino y Fernández (2014) se basan en el uso de algoritmos genéticos para “mezclar armonías y melodías de forma que se genere una composición musical de buen sonido para el oído”, es decir, se trata de no crear disonancias permanentes o, lo que es lo mismo, intervalos que resultan desagradables al oído. Cabe destacar también el trabajo de Chen y Miikkulainen (2001), quienes se basan en una red neuronal que maximiza la probabilidad de generar buenas melodías, usando las reglas sobre tonalidad y ritmo como función de actitud de la evolución, que sirve para evaluar la calidad de la melodía obtenida. Hoy en día existen diversos software libres para la composición musical algorítmica, AC Toolbox, cgMusic, FractMus o SoundHelix, entre otros.

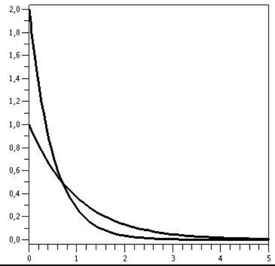
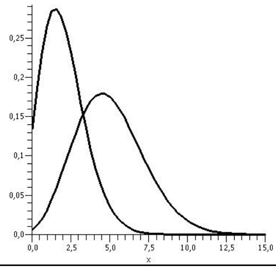
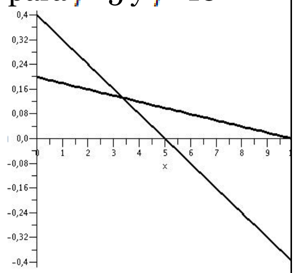
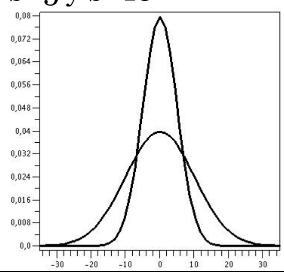
Parámetro musical	**Distribución**	**Función de densidad**	**Representación gráfica**
Duración de las notas	Exponencial	$f(x) = \delta e^{-\delta x}$ donde δ: densidad	Gráfica de f(x), para δ=1 y δ=2: 
Densidad de la nube de notas (número de notas que suenan en un determinado lapso de tiempo)	Poisson	$P(k) = \frac{\mu_0^k}{k!} e^{-\mu_0}$ donde μ_0: densidad media de las notas.	Gráfica de P(k), para k=2 y k=5 
Densidad de la nube de alturas (altura de las notas que suenan en un determinado lapso de tiempo)	Se parte de una altura generada aleatoriamente y se van generando intervalos aleatorios que cumplan la función de densidad	$\Theta(\gamma) = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{\gamma}{a}\right)$ donde a: máximo del intervalo especificado por el compositor	Gráfica de $\Theta(\gamma)$, para γ=5 y γ=10 
Velocidad del glissando (velocidad del paso de una nota a otra de forma continua)		$f(v) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2b^2}}$ donde b: temperatura resultante	Gráfica de f(v), para b=5 y b=10 
Dinámicas: ppp, p, f y ff.	Utiliza sucesiones de tamaño 3, aunque descarta algunas por razones musicales. Las dinámicas se obtienen mediante una distribución uniforme discreta de probabilidad (cada sucesión 1/44).		
Instrumentación:	Tras separar los instrumentos con un timbre similar, se calcula un porcentaje para cada tipo de instrumentos, siguiendo una distribución lineal. Dicho porcentaje marca la proporción de notas musicales que toca cada clase instrumental.		

Tabla 2. Modelización de ciertos parámetros musicales.
Fuente: elaboración propia.

4. Estudio de campo

4.1. Objetivos e hipótesis

Antes de plantear una propuesta didáctica es imprescindible analizar las características del alumnado al que va dirigida, con el fin de ajustarla lo más posible a la realidad del aula en cuestión. En este caso, se ha detectado que los alumnos de 1º de ESO de Lauaizeta Ikastola tienen dificultades con el bloque de números, por lo que se ha pensado presentar una metodología innovadora. Tal y como se explica en el marco conceptual, el uso de la música produce múltiples beneficios en el proceso de enseñanza-aprendizaje en general y en la asignatura de matemáticas en particular, además de resultar motivadora e interesante para la mayoría de los alumnos. Antes de plantear la propuesta, se propone un estudio de campo para analizar si se cumple la hipótesis de investigación, es decir, si el tener conocimientos musicales está correlacionado con un buen nivel matemático o por lo menos con no presentar dificultades en esta asignatura tan importante.

4.2. Metodología

Para llevar a cabo el estudio de campo, se ha utilizado una combinación de metodología cualitativa y cuantitativa. La primera está dirigida a los profesores responsables de la materia y tiene como objetivo la detección de las dificultades principales de los alumnos, así como el análisis de las posibles causas que pueden derivar en los malos resultados en la materia, en general, y en el bloque de números, en particular. La segunda, centrada en la figura de los alumnos implicados, trata de establecer si existe una relación significativa entre tener una base musical y obtener buenos resultados en matemáticas.

4.2.1 Metodología cualitativa. Entrevista con los profesores

4.2.1.1 Tipo de investigación

Para la detección de las principales dificultades de los alumnos de matemáticas de 1º de ESO y el análisis de las posibles causas de los malos resultados académicos en dicha asignatura, se ha utilizado una metodología cualitativa, basada en el uso de entrevistas semiestructuradas con las dos profesoras de la asignatura y los profesores ayudantes que entran en algunas clases para ofrecer una atención más personalizada.

4.2.1.2 Población y muestra

Dado que la población se limita, en este caso, a las dos profesoras titulares de la asignatura y a los otros dos docentes que asisten a algunas sesiones como apoyo, se realizarán las entrevistas a los cuatro. Al ser una población tan pequeña es viable que participen en la investigación los cuatro.

4.2.1.3 Instrumento de recogida de información

Para el diseño de la entrevista, que se añade en el anexo I, se han tenido en cuenta algunos de los factores que según González-Pienda et al. (2003) influyen en los altos índices de fracaso de la asignatura de matemáticas y otros aspectos que se han considerado importantes de analizar. En concreto, se han tratado los siguientes:

- Los conocimientos previos de los alumnos
- La actitud y motivación respecto a la materia
- La metodología del profesor
- El nivel de comprensión de la teoría.
- La capacidad para la aplicación práctica de los conceptos teóricos estudiados.

4.2.1.4 Tratamiento de datos

A continuación, se concretan las conclusiones extraídas de las entrevistas a los profesores:

- Los profesores entrevistados coinciden en que los conocimientos previos de la mayoría de los alumnos son adecuados para enfrentarse al aprendizaje de los nuevos contenidos que se imparten en la asignatura. Añaden que aunque los alumnos conocen los conceptos, les falta actitud y autonomía para fundamentar los nuevos contenidos en los aprendidos en primaria. A pesar de que esto se repite en todos los bloques de contenidos del curso, creen que el bloque de números tiene una gran importancia, puesto que todos los demás se fundamentan en él.
- En cuanto al interés que muestran los alumnos respecto a la asignatura en general y a la aritmética en particular, todos coinciden en que el problema principal es la falta de autonomía y el escaso trabajo personal. Además, algunos profesores creen que los alumnos generalmente están interesados por las matemáticas y particularmente por la aritmética, aunque otros dudan de ello.

- A principio de curso acordaron entre todos los profesores utilizar una metodología activa, que pretende impulsar el trabajo cooperativo y la autonomía de los estudiantes. Combinan el uso de la pizarra, las TIC y la plataforma virtual Moodle, la realización de ejercicios de manera individual y en pequeños grupos y el uso de los que han denominado "tratos de trabajo". Estos últimos son informes elaborados por los profesores, que contienen la teoría y ejercicios de cada tema, además de ejercicios adicionales de temas anteriores.
- Aunque hay profesores que no saben cómo se podría utilizar la música como recurso didáctico en sus clases por falta de conocimiento, a todos les parece una buena idea. Es más, una de las profesoras la utiliza; en las clases dedicadas a la resolución autónoma de ejercicios y problemas usa la música clásica (consensuada previamente entre todos los alumnos) como método de relajación y para controlar el volumen de la clase, que no debe impedir escuchar la música.
- El nivel de estudios musicales de los profesores es diferente: tres tienen el título elemental de música (solfeo) e instrumento, mientras que los conocimientos musicales del cuarto se reducen a lo estudiado en el colegio.
- Todos coinciden en que a los alumnos les resulta complicado comprender los conceptos matemáticos teóricos y algunos añaden que muchas veces esto se deriva de un problema de atención.
- En cuanto a la resolución de ejercicios, la mayoría coincide en que el problema principal es el no entender lo que se pide y el no leer dos veces las cosas antes de preguntar, en definitiva, la falta de comprensión y autonomía.
- Todos los profesores encuestados opinan que los contenidos más conflictivos del bloque de números de 1º de ESO son los números negativos, las fracciones y sus respectivas operaciones. Es más, una profesora, añade que estas dificultades se repiten en todos los cursos de ESO, cosa que he comprobado durante mis prácticas.

4.2.2 Metodología cuantitativa. Influencia de la música sobre la matemática

El objetivo de esta parte de la investigación es concluir si los chicos/as con estudios musicales tienen buenos resultados en matemáticas, para poder deducir si existe una relación significativa entre ambas asignaturas, como se concluye en los diversos estudios mencionados en el marco conceptual.

4.2.2.1 Tipo de investigación

En esta parte, se hará uso de una metodología cuantitativa, mediante el planteamiento de un cuestionario que se pasará a los alumnos y el posterior análisis estadístico de los resultados obtenidos. Para medir la fiabilidad del test se ha utilizado el método test-retest, es decir, se ha pasado el mismo test a los mismos individuos con una semana de diferencia. El coeficiente de fiabilidad test-retest obtenido, que mide la correlación entre los resultados de las dos mediciones, es de 0.98, lo que ratifica su fiabilidad.

4.2.2.2 Población y muestra

La población es, por definición, el número total de individuos objeto de la investigación. En este caso, se trata de 93 alumnos, divididos en cuatro clases, tal y como se muestra en la tabla 3.

Curso: 1º ESO	Nº de alumnos
Grupo A	24
Grupo B	23
Grupo C	23
Grupo D	23
TOTAL	93

Tabla 3. Distribución de la población de estudio.
Fuente: elaboración propia.

La muestra, en cambio, es un subconjunto representativo de la población, del que se concluyen características de ella. De los diversos métodos existentes para la elección de una muestra, se ha escogido el muestreo al azar, mediante el cual se han seleccionado 60 alumnos (de los cuatro grupos).

4.2.2.3 Instrumento de recogida de información

Se ha diseñado un cuestionario formado por preguntas cerradas, referentes a los conocimientos musicales y matemáticos de cada alumno (véase anexo II), así como a las notas obtenidas en las dos materias y al gusto e interés por ellas. A continuación se muestra una pequeña descripción del fichero de datos:

- Número de observaciones: 60.
- Número de variables: 8.
- Variables cualitativas:
    - Capacidad para leer música (*LectMus*) (0=No, 1=A medias, 2=Sí)

- Estudios musicales fuera de la escuela (*EstMus*) (0=Solfeo, 1=Instrumento, 2=Ambos, 3=Ninguno)
- Gusto por la asignatura de música (*GustoMus*) (0=No, 1=A medias, 2=Sí)
- Gusto por la aritmética (*GustoArit*) (0=No, 1=A medias, 2=Sí)
- Gusto por las matemáticas (*GustoMat*) (0=No, 1=A medias, 2=Sí)
- Nivel de esfuerzo para aprobar matemáticas (*EsfMat*) (0=Pequeño, 1=Medio, 2=Grande)

- Variables cuantitativas:
  - Nota media de música (*NotaMus*)
  - Nota media de matemáticas (*NotaMat*)

4.2.2.4 Tratamiento de datos

Para el análisis estadístico de los resultados obtenidos se ha utilizado el software libre R. Primeramente se ha llevado a cabo un análisis descriptivo de todas las variables, para posteriormente analizar las relaciones e interdependencias de algunas de ellas, mediante técnicas de estadística inferencial. En concreto, en esta segunda fase se tratará de estudiar si algunas de las variables analizadas son significativas en el aprendizaje de las matemáticas, mediante el ajuste de una regresión lineal múltiple.

Análisis descriptivo

- Variable *Capacidad para leer música (LectMus)*

Como se trata de una variable cualitativa con tres categorías, he creado un diagrama de barras (véase imagen 4), del que se deduce que la mayoría de los encuestados (90%) tienen, al menos, unos mínimos conocimientos musicales, mientras que el 10% admite su desconocimiento. Casi la mitad de los encuestados admite tener un buen nivel de música, que podría estar relacionado con estudios extraescolares o con el buen funcionamiento de la asignatura de música del centro.

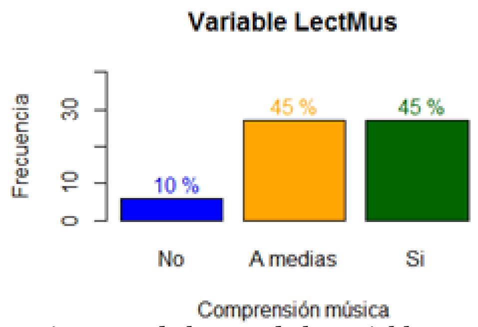


Imagen 4. Diagrama de barras de la variable *LectMus*.
Fuente: Elaboración propia.

- Variable *Estudios musicales fuera de la escuela (EstMus)*

Del diagrama de la imagen 5 se deduce que más de la mitad de los alumnos encuestados han estudiado música fuera de la escuela, ya sea solfeo, instrumento o ambos. Estos altos porcentajes permitirán posteriormente establecer si existe una relación significativa entre tener conocimientos musicales y el nivel de matemáticas.

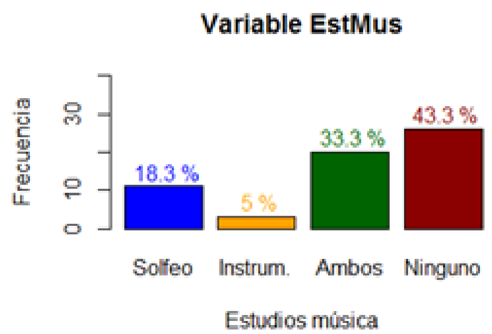


Imagen 5. Diagrama de barras de la variable *EstMus*.
Fuente: Elaboración propia.

- Variable *Gusto por la asignatura de música (GustoMus)*

Del diagrama de la imagen 6, destacaría el reducido porcentaje de alumnos a los que no les gusta la asignatura de música (11.7%). Tras hablar con los chicos/as, creo que el gusto general por la asignatura se puede deber a la profesionalidad e interés de los dos profesores encargados, que saben contagiar su pasión a los estudiantes.

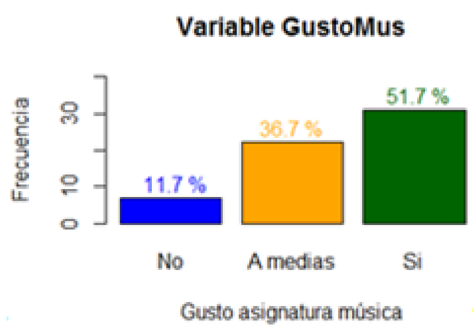


Imagen 6. Diagrama de barras de la variable *GustoMus*.
Fuente: Elaboración propia.

➢ Variable *Gusto por la aritmética (GustoArit)*

Me ha sorprendido el porcentaje tan alto de alumnos que admite que le gusta la aritmética (48.3%), sobre todo tras las entrevistas con los profesores, quienes afirman que es una de las ramas de la matemática que más dificultades les causa.

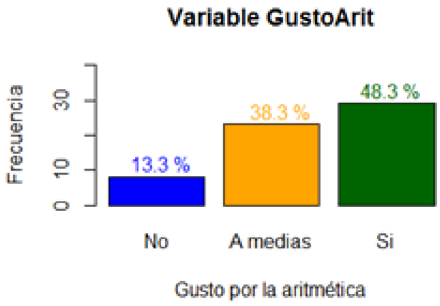


Imagen 7. Diagrama de barras de la variable *GustoArit*.
Fuente: Elaboración propia.

➢ Variable *Gusto por las matemáticas(GustoMat)*

En cuanto al gusto por las matemáticas, está más compensado: al 31.7% le gusta la asignatura, al 16.7% no y al 51.7% restante a medias (véase imagen 8). Comparando esta variable con la anterior, se podría decir que dentro de la asignatura, la aritmética es una de las ramas que más gusta a los chavales.

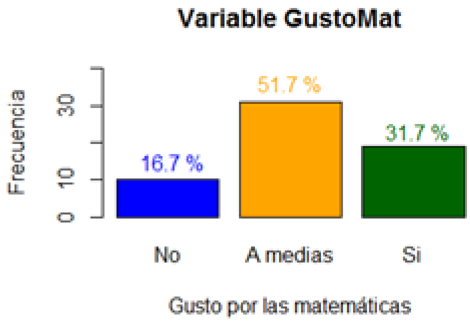


Imagen 8. Diagrama de barras de la variable *GustoMat*.
Fuente: Elaboración propia.

➢ Variable *Nivel de esfuerzo para aprobar matemáticas(EsfMat)*

El siguiente diagrama (imagen 9) ratifica una de las imágenes sociales más frecuentes de las matemáticas: la de asignatura difícil, que requiere un gran esfuerzo. Sólo el 15% de los alumnos encuestados admite que le requiere un esfuerzo pequeño, mientras que el 41.7% responde que realiza un gran esfuerzo para superar la asignatura.

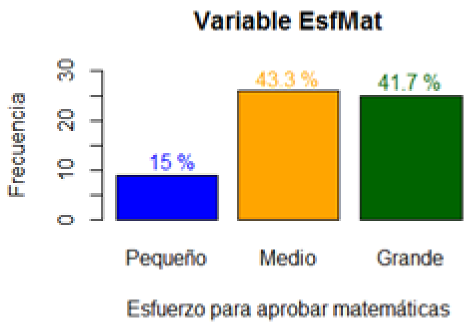
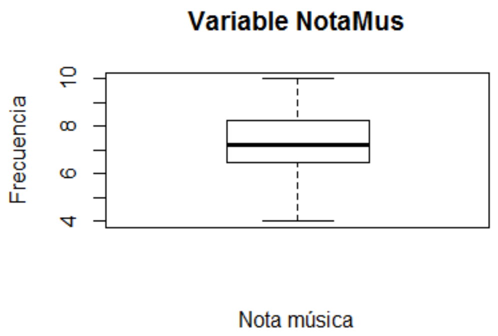


Imagen 9. Diagrama de barras de la variable *EsfMat*.
Fuente: Elaboración propia.

➢ Variable *Nota media de música(NotaMus)*

Tras comprobar mediante una tabla de frecuencias o mediante un diagrama de cajas (véase imagen 10) que se trata de una variable cuantitativa que no contiene valores atípicos, el gráfico más adecuado es el histograma, que permite ver gráficamente cuál es la distribución de la nota media de música.



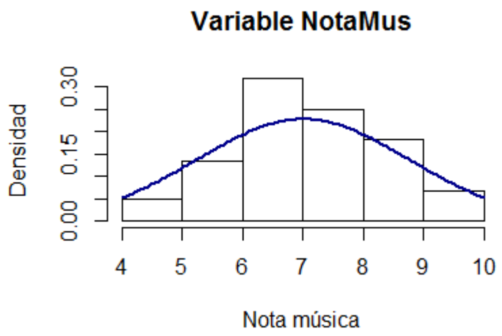


Imagen 10. Diagrama de cajas e histograma de la variable *NotaMus*.
Fuente: Elaboración propia.

Observando el histograma, parece que la distribución de la variable se asemeja a la normal, aunque con un ligero sesgo a la derecha. Para demostrar si realmente la variable analizada sigue o no una distribución normal, realizo la prueba de Kolmogorov-Smirnov, con la corrección de Lilliefors. Como el p-valor obtenido es de 0.0147 (>0.01), para un grado de significación (α) de 0.01 considero que la variable nota de música sigue una distribución normal.

En cuanto a los estadísticos, los más adecuados son la media y la desviación estándar, ya que la variable analizada no tiene valores atípicos. En la tabla siguiente añado también la mediana y el rango intercuartil:

Media	Desviación estándar	Mediana	Rango intercuatil
7.441667	1.343823	7.25	1.625

Tabla 4. Estadísticos descriptivos de la variable *NotaMus*.
Fuente: Elaboración propia.

Como la desviación estándar es bastante pequeña, comparada con la media, la dispersión de la distribución es bastante pequeña. Además, la pequeña diferencia entre la media y la mediana indica que la variable está bastante bien centrada, aunque ligeramente sesgada a la derecha, puesto que la mediana es menor.

- Variable *Nota media de matemáticas (NotaMat)*

Como se trata de una variable cuantitativa que no tiene valores atípicos (véase imagen 11), el gráfico más adecuado para analizar gráficamente cuál es la distribución de la nota media de matemáticas es el histograma.

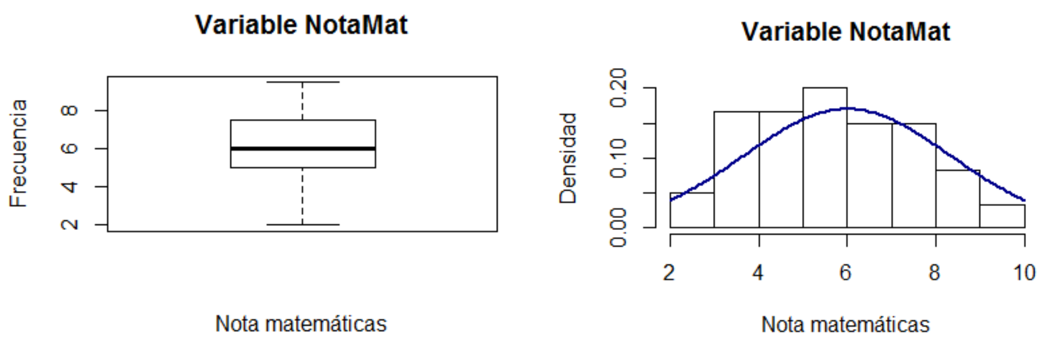


Imagen 11. Diagrama de cajas e histograma de la variable *NotaMat*.
Fuente: Elaboración propia.

Al igual que en el caso anterior, observando el histograma parece que la variable nota de matemáticas puede seguir una distribución normal, cosa que se corrobora mediante el test de Lilliefors, cuyo p-valor es de 0.07148 (>0.05).

Al no haber valores atípicos, los estadísticos más adecuados son la media y la desviación estándar, aunque también calculo la mediana y el rango intercuartil (véase tabla 5).

Media	Desviación estándar	Mediana	Rango intercuatil
6.091667	1.816804	6	2.5

Tabla 5. Estadísticos descriptivos de la variable *NotaMus*
Fuente: Elaboración propia.

La media es más de un punto menor que en el caso de la nota de música y la dispersión es mayor, como cabía esperar debido a la naturaleza de ambas asignaturas. Además, la pequeña diferencia entre la media y la mediana indica que la variable está bastante bien centrada, aunque ligeramente sesgada a la derecha, puesto que la mediana es menor.

Análisis inferencial

A continuación, se va a analizar la influencia que tienen las variables motivacionales y conceptuales relacionadas con la música y las matemáticas en la nota de esta última (que se puede considerar un indicador del aprendizaje de matemáticas de los alumnos). Primeramente se estudiará la relación una a una, para posteriormente analizar la relación conjunta.

- Relación entre las variables *Nota media de matemáticas (NotaMat)* y *Capacidad para leer música (LectMus)*

El diagrama de cajas (figura 12) sugiere que la comprensión de música puede ser un factor determinante para predecir el nivel de matemáticas. En concreto, la nota media de matemáticas de aquellos que no comprenden los conceptos básicos de música es significativamente menor que la de los que tienen un cierto nivel.

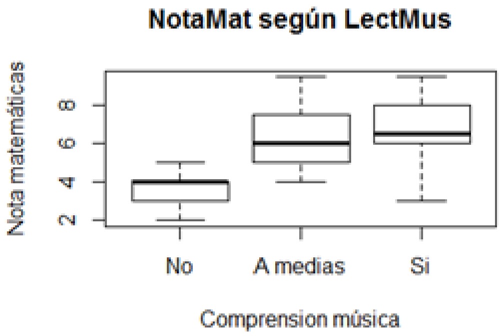


Imagen 12. Diagrama de cajas de la variable *NotaMat* según *LectMus*.
Fuente: Elaboración propia.

Para comprobar analíticamente si realmente existe una relación significativa entre las dos variables analizadas, utilizo el anova de un factor, puesto que permite contrastar la hipótesis nula de que las medias de la variable dependiente cuantitativa respecto de una variable independiente cualitativa de más de dos grupos o niveles son iguales. El estadístico F obtenido es de 8.234 con un p-valor de 0.000722, por lo que se rechaza la hipótesis nula y se asume que las medias de los tres grupos de la variable comprensión de música no son iguales, es decir, que existe una dependencia entre ésta y el nivel de matemáticas.

- Relación entre las variables *Nota media de matemáticas (NotaMat)* y *Estudios musicales fuera de la escuela (EstMus)*

Como en el caso anterior, el diagrama de cajas (véase imagen 13) sugiere que el haber estudiado música (solfeo, instrumento o ambos) influye significativamente en la nota de matemáticas. Es más, todos los que han suspendido matemáticas pertenecen al grupo que no ha asistido a clases extraescolares de música.

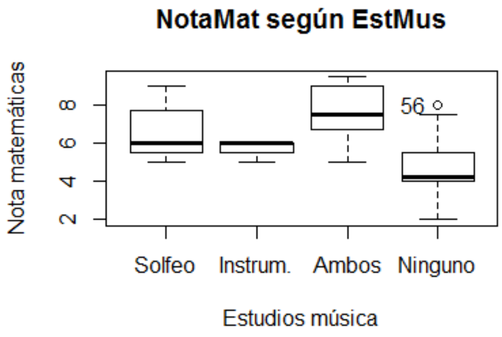


Imagen 13. Diagrama de cajas de la variable *NotaMat* según *EstMus*.
Fuente: Elaboración propia.

Mediante la prueba anova de un factor, obtengo un estadístico F con valor 17.51 con un p-valor asociado de $3.86 \cdot 10^{-8}$. Basándome en el p-valor rechazo la hipótesis nula, por lo que asumo que las medias de los cuatro grupos de la variable estudios de música son distintas, es decir que existe una relación de dependencia entre ésta y la nota de matemáticas.

- Relación entre las variables *Nota media de matemáticas (NotaMat)* y *Gusto por la asignatura de música (GustoMus)*

Del diagrama de cajas (imagen 14), se deduce que en los tres grupos de la variable gusto por la asignatura de música existen aprobados y suspensos en matemáticas. De todas formas, las peores notas se dan entre los que no les gusta la música y las mejores en el grupo opuesto. Tras realizar el anova de un factor queda probado que no existe una relación significativa entre las variables analizadas (valor de F: 1.099, p-valor: 0.34).

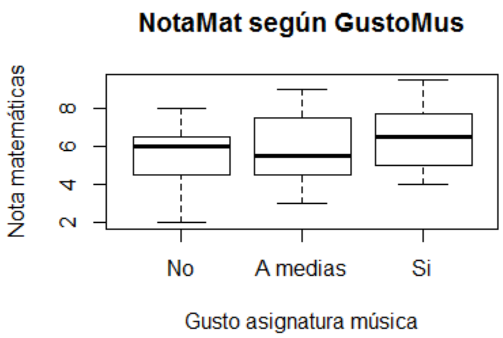


Imagen 14. Diagrama de cajas de la variable *NotaMat* según *GustoMus*.
Fuente: Elaboración propia.

- Relación entre las variables *Nota media de matemáticas (NotaMat)* y *Gusto por la aritmética (GustoArit)*

El diagrama de cajas (imagen 15) sugiere que el gusto por la aritmética (parte fundamental de la asignatura y que está relacionado con la motivación) influye significativamente en el aprendizaje de las matemáticas. Como puede parecer razonable, los que les gusta la aritmética aprueban la asignatura y la nota máxima de los que no les gusta es de 5. Por medio del anova de un factor, ratifico mi sospecha de la dependencia de las dos variables analizadas (valor F: 38.5; p-valor: $2.63 \cdot 10^{-11}$).

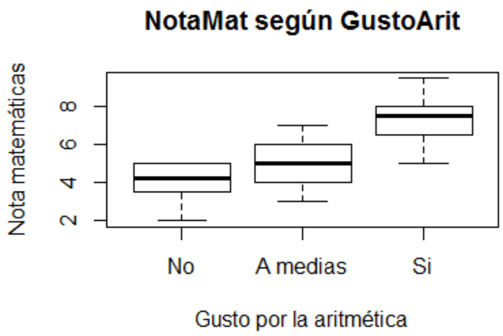


Imagen 15. Diagrama de cajas de la variable *NotaMat* según *GustoArit*.
Fuente: Elaboración propia.

- Relación entre las variables *Nota media de matemáticas (NotaMat)* y *Gusto por las matemáticas (GustoMat)*

Al igual que en el caso anterior, en el diagrama de cajas (imagen 16) se puede observar la influencia de la motivación y el gusto por la asignatura en la obtención de una buena nota. Cabe destacar el grupo de los que no les gusta la materia, en el que encontramos un amplio rango de notas, desde el 2 hasta el 6. Tras la prueba anova de un factor, queda probada la dependencia entre el gusto por las matemáticas y el obtener una buena nota en dicha asignatura (valor de F: 18.03; p-valor: $8.58 \cdot 10^{-7}$).

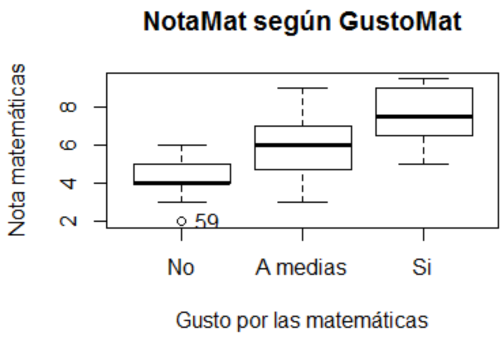


Imagen 16. Diagrama de cajas de la variable *NotaMat* según *GustoMat*.
Fuente: Elaboración propia.

➢ Relación entre las variables *Nota media de matemáticas (NotaMat)* y *Esfuerzo para aprobar matemáticas (EsfMat)*

Cabe destacar que los alumnos que mejores notas sacan en matemáticas admiten que no les cuesta mucho esfuerzo y en cambio los que sacan peores dicen que se esfuerzan mucho (véase gráfico de la imagen 17). Mediante el anova de un factor se demuestra la relación de dependencia entre el esfuerzo realizado en matemáticas y la nota obtenida (valor F: 6.848, p-valor: 0.00216).

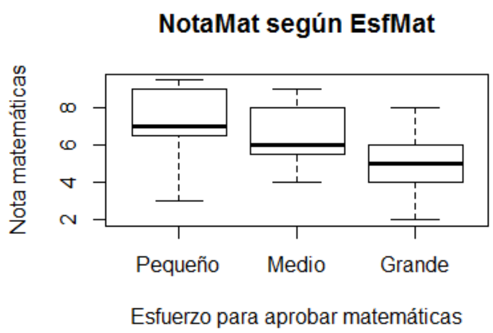


Imagen 17. Diagrama de cajas de la variable *NotaMat* según *EsfMat*.
Fuente: Elaboración propia.

➢ Relación entre las variables *Nota media de matemáticas (NotaMat)* y *Nota media de música (NotaMus)*

La relación entre dos variables cuantitativas debe explorarse gráficamente mediante un gráfico de dispersión, como se puede ver en la imagen 18.

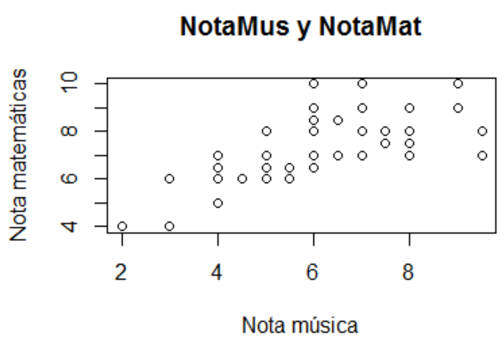


Imagen 18. Diagrama de dispersión de las variable *NotaMus* y *NotaMat*.
Fuente: Elaboración propia.

Aunque a simple vista no me parece que exista una relación lineal entre ellas, lo evaluaré inferencialmente. Como las dos siguen una distribución normal, utilizaré el test de correlación de Pearson. Según dicho test, el coeficiente de correlación es de 0.7138 y tiene un p-valor asociado de $1.535 \cdot 10^{-10}$ (< 0.005). Por tanto existe una correlación lineal importante entre las dos variables analizadas.

- Influencia conjunta de las variables analizadas en la variable *Nota media de matemáticas (NotaMat)*

Tras analizar la influencia de cada variable en el nivel de matemáticas, el siguiente paso es averiguar si existe una influencia conjunta. Es decir, se trata de predecir cuáles de las variables analizadas afectan a la nota de matemáticas, mediante el ajuste de una regresión lineal múltiple. Se trata, por tanto, de estimar una ecuación del tipo $\hat{Y}=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_1+\ldots+\beta_nX_n+\varepsilon$, que prediga el valor de la variable dependiente Y, conocidas las variables independientes X_1, X_2,..., X_n. El término ε denota el error cometido y cada coeficiente β_i mide la influencia de la variable X_i sobre la variable dependiente Y.

Al analizar las relaciones de dependencia entre la variable *NotaMat* y el resto, he concluido que ésta está relacionada con la capacidad para leer música (*LectMus*), los estudios musicales fuera de la escuela (*EstMus*), el gusto por la aritmética (*GustoArit*), el gusto por las matemáticas (*GustoMat*), el nivel de esfuerzo para aprobar matemáticas (*EsfMat*) y la nota media de música (*NotaMus*).

Por lo tanto, introduzco las variables mencionadas en el modelo lineal y consigo un modelo cuyo coeficiente de determinación (R^2) es de 0.8117 (p-valor: $3.645\cdot10^{-13}$) y cuyos coeficientes se muestran en la tabla 6.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
(Intercept)	3.3758	1.2435	2.715	0.00925	**
LectMusA medias	0.9734	0.4999	1.947	0.05752	.
LectMusSi	0.5623	0.5651	0.995	0.32484	
EstMusInstrum.	-0.5723	0.5978	-0.957	0.34322	
EstMusAmbos	0.7132	0.3539	2.015	0.04964	*
EstMusNinguno	-0.7063	0.3940	-1.793	0.07945	.
NotaMus	0.1557	0.1877	0.829	0.41104	
GustoAritA medias	-0.3241	0.4810	-0.674	0.50370	
GustoAritSi	1.1275	0.5466	2.063	0.04470	*
GustoMatA medias	0.3001	0.3733	0.804	0.42552	
GustoMatSi	1.1754	0.4526	2.597	0.01251	*
EsfMatMedio	0.1919	0.3796	0.505	0.61558	
EsfMatGrande	-0.1635	0.3990	-0.410	0.68384	

Tabla 6. Coeficientes del primer modelo de regresión lineal múltiple.
Fuente: Elaboración propia.

A continuación, crearé un nuevo modelo partiendo del anterior, del que eliminaré la variable explicativa no significativa según el modelo anterior (esfuerzo para aprobar matemáticas, *EsfMat*). Así, el coeficiente de determinación del nuevo modelo es de 0.8047, el p-valor de $4.024\cdot10^{-14}$ y sus coeficientes se resumen en la tabla 7.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)	
(Intercept)	2.9762	1.1657	2.553	0.0138	*
LectMusA medias	1.0214	0.4937	2.069	0.0438	*
LectMusSi	0.6114	0.5551	1.101	0.2761	
EstMusInstrum.	-0.4970	0.5928	-0.838	0.4059	
EstMusAmbos	0.7084	0.3362	2.107	0.0403	*
EstMusNinguno	-0.6578	0.3874	-1.698	0.0958	.
NotaMus	0.2001	0.1818	1.100	0.2765	
GustoAritA medias	-0.3386	0.4794	-0.706	0.4834	
GustoAritSi	1.1606	0.5408	2.146	0.0368	*
GustoMatA medias	0.3218	0.3714	0.867	0.3904	
GustoMatSi	1.1626	0.4401	2.642	0.0110	*

Tabla 7. Coeficientes del segundo modelo de regresión lineal múltiple.
Fuente: Elaboración propia.

Una vez obtenidos los dos modelos, hay que decidir cuál de los dos estima mejor la variable dependiente (*NotaMat*), para lo que calcularé el modelo anidado entre los dos. En la tabla 8 se resumen los resultados obtenidos.

	Res.Df	RSS	Df	Sum of Sq	F	Pr(>F)
1	47	36.674				
2	49	38.032	-2	-1.3577	0.87	0.4256

Tabla 8. Resultados del modelo anidado.
Fuente: Elaboración propia.

Según el p-valor obtenido, acepto la hipótesis nula de que el mejor modelo es el 'pequeño', es decir el segundo modelo obtenido.

Una vez ajustado un modelo de regresión, hay que evaluarlo o hacer su diagnóstico, es decir hay que verificar su calidad. Esto consiste en comprobar las hipótesis básicas del modelo construido, mediante los gráficos adecuados (véase imagen 19).

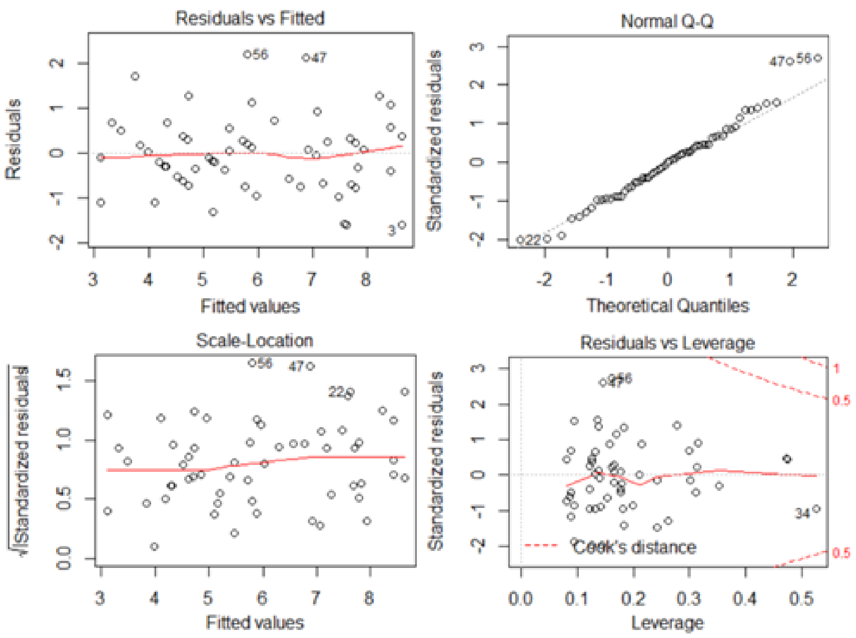


Imagen 19. Gráficos para la diagnosis del modelo.
Fuente: Elaboración propia.

Estas son las hipótesis básicas que tiene que cumplir el modelo construido:

Independencia de los errores. El primer gráfico es un gráfico de residuos estándar, en el que se muestra la relación entre los valores ajustados y los residuales. Parece razonable considerar que no existe ningún tipo de relación de dependencia entre los valores ajustados y los residuales, es decir, se puede asumir la independencia de los errores.

Normalidad. El segundo gráfico muestra la relación entre los residuos observados estandarizados y los residuos teóricos. La recta diagonal muestra los residuos esperados si los errores o residuales tuvieran una distribución normal. En este caso, excepto los dos extremos, los valores se ajustan bastante bien a la diagonal mencionada, por lo que puedo asumir la normalidad.

Variabilidad constante. El tercer gráfico muestra la relación entre los valores ajustados y la raíz cuadrada de los residuos estandarizados. A grandes rasgos, parece que se cumple la hipótesis de homocedasticidad, es decir, la varianza de los residuos es constante.

Individuos influyentes-valores extremos. En el último gráfico se puede observar la relación entre los residuales y los puntos leverage. Los puntos etiquetados representan casos que pueden ser valores influyentes en la regresión. Un individuo influyente es un valor extremo que puede condicionar demasiado el ajuste del modelo. Al eliminar los puntos etiquetados del conjunto de datos los resultados no varían significativamente, por lo que considero que no tiene valores influyentes.

4.3. Análisis de los resultados

Ha quedado demostrado que el nivel de conocimientos musicales (*LectMus*), el aprendizaje extraescolar de música (*EstMus*), la nota media de música (*NotaMus*), el gusto por la aritmética (*GustoArit*) y el gusto por las matemáticas (*GustoMat*) condicionan la nota de esta última asignatura (*NotaMat)*. En concreto, la ecuación del modelo de regresión lineal múltiple que mejor se ajusta a los datos es:

$$\begin{aligned}\hat{Y}=&2.98+1.02\cdot(\text{LectMus=Amedias})+0.61\cdot(\text{LectMus=Si})-0.5\cdot(\text{EstMus=Instrum.})+\\&+0.71\cdot(\text{EstMus=Ambos})-0.66\cdot(\text{EstMus=Ninguno})+0.2\cdot\text{NotaMus}+\\&-0.34\cdot(\text{GustoArit=Amedias})+1.16\cdot(\text{GustoArit=Si})+0.32\cdot(\text{GustoMat=Amedias})+\\&+1.1626(\text{GustoMat=Si})\end{aligned}$$

El modelo estimado se interpreta así:

- La nota media de matemáticas de los alumnos con conocimiento musical medio y bueno es 1.02 y 0.61 veces mayor, respectivamente, que la de los que no tienen conocimientos musicales (a igualdad del resto de variables).
- La nota media de los que han aprendido música (solfeo+instrumento) fuera del centro escolar es 0.71 veces mayor que la de los que sólo han estudiado solfeo. Los que han aprendido a tocar un instrumento fuera del centro y los que no han estudiado música, en cambio, tienen notas 0.5 y 0.66 veces menores, respectivamente, que los que sólo han estudiado solfeo (a igualdad del resto de variables).
- Por cada incremento de un punto en la nota de música, la nota de matemáticas aumenta en 0.2 puntos (a igualdad del resto de variables).
- La nota media de matemáticas de los alumnos a los que les gusta la aritmética a medias es 0.34 veces menor que la de aquellos que no les gusta. La nota de los que les gusta la aritmética, en cambio, es 1.16 veces mayor que la de los que no les gusta (a igualdad del resto de variables).
- La nota media de matemáticas de los alumnos a los que les gusta la asignatura a medias y mucho es 0.32 y 1.1626 veces mayor, respectivamente, que la de aquellos a los que no les gusta (a igualdad del resto de variables).

Además, como el coeficiente de determinación es de 0.8047, el modelo estimado explica el 80.47% de la nota de matemáticas, por lo tanto se trata de un modelo bastante fiable.

5. Propuesta didáctica

5.1. Introducción y justificación

En referencia a lo analizado en los apartados anteriores, se pretende realizar una propuesta didáctica y ofrecer una alternativa para impartir los contenidos del bloque de números de 1º de ESO que más difíciles resultan a los alumnos objeto de análisis, es decir, los números enteros, las fracciones y sus operaciones. Tanto en el marco teórico como en el estudio de campo se ha comprobado que existe una relación significativa entre música y matemática, por lo que se pretende diseñar una metodología novedosa que ayude a los alumnos a entender los conceptos matemáticos, usando la música como recurso didáctico.

Además, esta propuesta trabaja la interdisciplinariedad entre materias, que "favorece un enriquecimiento mutuo, ayudando a la elaboración de marcos conceptuales más generales en los que diferentes materias se ven implicadas y modificadas, permitiendo pasar a depender unas de otras" (Torres, 1996, citado en Fraile, 2012, p. 6). El hecho de que la asignatura de música les resulte interesante y atractiva a la mayoría de los alumnos, puede favorecer un aprendizaje de matemáticas significativo, permitiendo impartir esta asignatura, que suele resultar difícil y abstracta, de una manera novedosa y motivadora.

5.2. Destinatarios

Esta propuesta de actuación está centrada en los alumnos de matemáticas de 1º de ESO. De todas formas, basándose en las conclusiones obtenidas de las entrevistas a los profesores, se podría aplicar a cualquier otro curso de secundaria, ya que los contenidos que en ella se tratan crean dificultades en todos los niveles.

5.3. Objetivos y competencias

Las competencias que se van a trabajar son las siguientes:

C1. Competencia en comunicación lingüística.
C2. Competencia matemática.
C3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
C4. Competencia en el tratamiento de la información y competencia digital.
C5. Competencia social y ciudadana.
C6. Competencia cultural y artística.
C7. Competencia para aprender a aprender.

C8. Competencia para la autonomía e iniciativa personal.

Los objetivos se enumeran a continuación, relacionando cada uno con las competencias correspondientes:

O1. Identificar los números enteros, saber usarlos y establecer las relaciones entre ellos (C2, C7, C8).
O2. Saber realizar las operaciones básicas de suma y resta de números enteros, así como reconocer su presencia en situaciones cotidianas (C2, C4, C5).
O3. Saber operar (suma, resta, multiplicación y división) con fracciones (C2).
O4. Reconocer fracciones equivalentes (C2).
O5. Reconocer la presencia de elementos matemáticos en la música (C2).
O6. Mostrar interés para describir fenómenos del mundo físico mediante números enteros y fracciones (C1, C2, C3, C6, C7, C8).
O7. Saber seleccionar música adecuada para fomentar un buen clima de trabajo en clase (C4, C7, C8).

5.4. Contenidos

1. Números enteros:
   - 1.1 Representación de números enteros
   - 1.2 Suma y resta de números enteros
   - 1.3 Multiplicación y división de números enteros
2. Fracciones:
   - 2.1 Operaciones entre fracciones: suma, resta, multiplicación, división
   - 2.2 Fracciones equivalentes

5.5. Metodología

Se propone una metodología innovadora, denominada *musimática*, basada en la participación activa de los alumnos y en técnicas y actividades fundamentadas en la música. Además, se propone el uso de la música clásica en las sesiones dirigidas a la resolución individual de actividades, para valerse de los múltiples beneficios que ofrece, concretados en el marco conceptual (favorece el desarrollo cognitivo, la concentración, el razonamiento espacio-temporal, ayuda a mejorar la inteligencia, las capacidades creativas, las relaciones sociales…).

Metodología para trabajar con números enteros

1. Sistema de representación numérica basado en el piano

Se propone identificar las notas musicales con los números enteros, relacionando la primera nota de la escala de ReM (es decir, el Re) como el 0. Así las notas más agudas representarán los números naturales (enteros positivos) y las más graves los negativos, tal y como se muestra en la imagen 20. Este sistema se basa en la escala cromática (por ejemplo, la del piano), en la que la distancia entre cada par de notas es siempre la misma, es decir, de un semitono, y además, como se ha visto en el marco teórico, existe una simetría respecto al Re. De esta manera, Re actuaría como eje de simetría, como el 0 en el caso de los números enteros. Aunque proporciona una representación similar a la de la recta real, la diferencia es que se basa en las notas musicales, por lo que puede resultar más atractiva y novedosa para los alumnos.

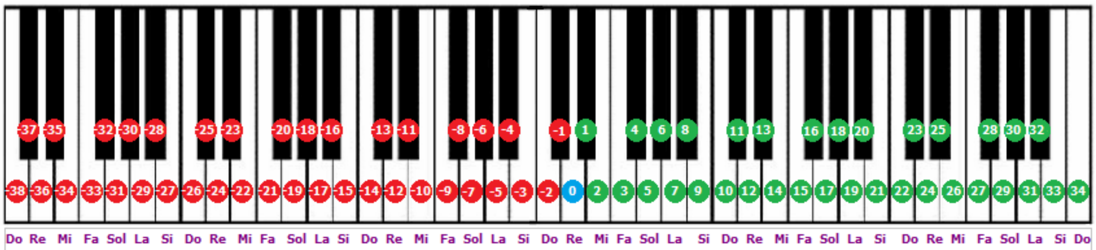


Imagen 20. Sistema de representación numérica basado en el piano.
Fuente: Elaboración propia.

También se puede utilizar para la suma y resta de números enteros. En concreto, el procedimiento a seguir para sumar a+b ($a,b \in \mathbb{Z}$) es el siguiente:

- Si $b>0$: se parte de la nota que se identifica con el número a, se mueve a la derecha tantas notas (o teclas en el caso del piano) como representa el número b y el resultado es el número con el que se identifica la nota (tecla) final.
- Si $b<0$: se parte de la nota que se identifica con el número a, se mueve a la izquierda tantas notas (o teclas, en el caso del piano) como representa el número b y el resultado es el número con el que se identifica la nota (tecla) final.

El procedimiento a seguir para la resta es similar al de la suma, teniendo en cuenta que toda resta se puede representar como suma, es decir, $a-b=a+(-b)$, para $a,b \in \mathbb{Z}$.

2. Sistema de representación numérica basado en las claves musicales

Es un sistema algo más complejo que el anterior, por lo que su uso dependerá del nivel de conocimiento musical de los alumnos/as con los que se vaya a utilizar. Parte de la representación de la nota sol en las diferentes claves y se basa en identificar el pentagrama con los números enteros, asociando un número a cada línea o espacio del mismo. Se tomará como punto de partida la clave de sol y por tanto la segunda línea, identificándola con el 0. Los espacios y líneas superiores tomarán valores positivos, mientras que los inferiores tomarán valores negativos, como se puede apreciar en la tabla 9.

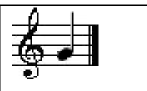
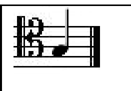
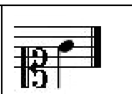
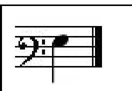
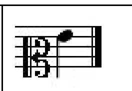
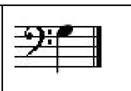
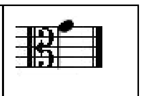
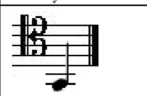
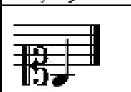
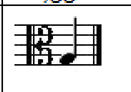
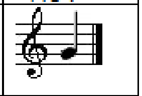
Sol, según claves							
Enteros asociados	0,±7,±14, ±21,±28…	1,8,15, 22, 29…	2,9,16, 23, 30…	3,10,17, 24,31…	4,11,18, 25,32…	5,12,19, 26,33…	6,13,20, 27,34…
Sol, según claves							
Enteros asociados	-6,-13,-20 -27,-34…	-5,-12,-19, -26,-33…	-4,-11,-18, -25,-32…	-3,-10,-17 -24,-31…	-2,-9,-16, -23,-30…	-1,-8,-15, -22,-29…	0,±7,±14, ±21,±28…

Tabla 9. Sistema de representación numérica basado en las claves musicales.
Fuente: Elaboración propia.

El procedimiento a seguir para la suma es parecido al caso anterior; es decir, para sumar a+b ($a,b \in \mathbb{Z}$):

- Si a>0, b>0: se parte de la celda de la fila 1 que se identifica con el número a, se cuenta a la derecha tantas posiciones como indica el número b (si se llega a la última celda se vuelve a la primera de la fila) y el resultado es el número que representa la celda de llegada. Como cada celda representa varios números, para calcular el resultado de la operación hay que tener en cuenta el número de partida y cuántas veces se ha recorrido toda la fila.
- Si a>0, b<0: se parte de la celda de la fila 1 que se identifica con el número a, se cuenta a la izquierda tantas posiciones como indica el número b y el resultado es el número que representa la celda de llegada. Hay que tener en cuenta el número de partida y cuántas veces se ha llegado a la primera celda, para saber si se debe pasar a la 3ª fila o no. Es decir, para calcular 8-10 se parte de la segunda celda y tras llegar por segunda vez a la primera celda habría que pasar a la última de la 3ª fila (que coincide con la primera de la 1ª fila) y seguir contando en dicha fila.
- Si a<0, b>0: se parte de la celda de la fila 3 que se identifica con el número a, se cuenta a la derecha tantas posiciones como indica el número b y el resultado

es el número que representa la celda de llegada. Hay que tener en cuenta el número de partida y cuántas veces se ha llegado a la última celda, para saber si se debe pasar a la 1ª fila o no. Es decir, para calcular -4+6 se parte de la tercera celda y tras llegar por primera vez a la última celda habría que pasar a la primera de la 1ª fila (que coincide con la última de la 3ª fila) y seguir contando en dicha fila.

- Si a<0, b<0: se parte de la celda de la fila 3 que se identifica con el número a, se cuenta a la izquierda tantas posiciones como indica el número b (si se llega a la primera celda se vuelve a la última de la fila) y el resultado es el número que representa la celda de llegada. Como cada celda representa varios números, para calcular el resultado de la operación hay que tener en cuenta el número de partida y cuántas veces se ha recorrido toda la fila.

3. Regla de las alteraciones

Es una regla alternativa a la regla de los signos, válida para realizar multiplicaciones o divisiones entre números enteros. Para realizar una multiplicación/división entre enteros, se realizará la operación de sus valores absolutos y esta regla determinará el signo de la misma. El signo (+) equivale a la alteración musical sostenido (#) y el signo (-) a la alteración bemol (b). Así, una multiplicación/división entre dos enteros positivos equivale a ## y una multiplicación/división entre negativos equivale a bb. Se parte de una nota cualquiera, se le aplican las alteraciones que corresponda en cada caso y si se obtiene una nota diferente a la de partida el resultado será positivo y en caso contrario negativo. El método se resume en la tabla 10:

Operación	**Regla de las alteraciones**	**Signo**
a·b ó a:b (a,b∈$\mathbb{Z}$, a>0, b>0)	Partiendo de Sol, ##Sol=La≠Sol	+
a·b ó a:b (a,b∈$\mathbb{Z}$, a>0, b<0)	Partiendo de Sol, b#Sol=Sol=Sol	-
a·b ó a:b (a,b∈$\mathbb{Z}$, a<0, b>0)	Partiendo de Sol, #bSol=Sol=Sol	-
a·b ó a:b (a,b∈$\mathbb{Z}$, a<0, b<0)	Partiendo de Sol, bbSol=Fa≠Sol	+

Tabla 10. Tabla que resume la regla de las alteraciones.
Fuente: Elaboración propia.

Metodología para trabajar con fracciones

1. Sistema para operar con fracciones basado en las figuras musicales

A cada figura musical se le asocia una fracción, tomando como punto de partida la redonda. En concreto, la redonda ocupa 4 pulsos y se le asocia el 1. Como cada redonda equivale a dos blancas, cada blanca ocupa 2 pulsos y se le asocia la fracción ½. Cada blanca, por su parte, equivale a dos negras y cada una ocupa 1 pulso, asociándosele la fracción ¼. Siguiendo el mismo procedimiento sucesivamente, con todas las figuras, se obtiene que a cada semigarrapatea se le asocia la fracción 1/256 (ocupa 1/64 pulsos). En la tabla 11 se resumen las equivalencias entre figuras musicales y fracciones.

NOMBRE	FIGURA y silencio	PULSOS	FRACCION ASOCIADA	EQUIVALENCIAS ENTRE FIGURAS MUSICALES
Redonda	𝅝..... 𝄻	4	1	𝅝
Blanca	𝅗𝅥..... 𝄼	2	1/2	𝅗𝅥 𝅗𝅥
Negra	♩....... 𝄽	1	¼	♩ ♩ ♩ ♩
Corchea	♪..... 𝄾	½	1/8	♫ ♫ ♫ ♫
Semicorchea	𝅘𝅥𝅯..... 𝄿	¼	1/16	𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯 𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯 𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯 𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯𝅘𝅥𝅯
Fusa	𝅘𝅥𝅰...... 𝅀	1/8	1/32	𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰 𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰 𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰 𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰𝅘𝅥𝅰
Semifusa	𝅘𝅥𝅱...... 𝅁	1/16	1/64	16×𝅘𝅥𝅱 16×𝅘𝅥𝅱 16×𝅘𝅥𝅱 16×𝅘𝅥𝅱
Garrapatea	𝅘𝅥𝅲..... 𝅂	1/32	1/128	32x 𝅘𝅥𝅲 32x 𝅘𝅥𝅲 32x 𝅘𝅥𝅲 32x 𝅘𝅥𝅲
Semigarrapatea	......	1/64	1/256	64x 64x 64x 64x

Tabla 11. Equivalencias entre figuras musicales y fracciones.
Fuente: Elaboración propia.

Así, para hacer operaciones entre fracciones basta con hacer operaciones entre figuras musicales. Por ejemplo, 1/4+1/8 equivale a ♩+♪=♪♪♪, y como a cada corchea se le asocia la fracción 1/8, se deduce que 1/4+1/8=3/8. Para la división o multiplicación entre un natural y una fracción se puede usar la tabla de la parte derecha, por ejemplo, ¼:2=♩:2=♪=1/8 y de ahí se deducirá el procedimiento para la división/multiplicación entre fracciones.

5.6. Recursos

Humanos	Materiales	Instalaciones
Profesor de matemáticas, con o sin la colaboración del profesor de música.	Fichas de actividades, música de relajación, cartulinas para hacer murales, tijeras, rotuladores, pegatinas rojas y verdes, partituras.	Aula ordinaria Aula de música

Tabla 12. Recursos para la implantación de la metodología *musimática*.
Fuente: Elaboración propia.

5.7. Actividades

<u>Actividad 1</u>: Metodología *musimática* (Anexo III)

Se pedirá a los alumnos que, por grupos, creen unos murales con las bases de la metodología *musimática* (imagen 20, tablas 9-11). Se valorará la creatividad y el trabajo en equipo, así como una actitud abierta y positiva.

Se trata de que los alumnos interioricen la nueva metodología propuesta y de tener unas pautas claras a la hora de trabajar con ella, ya que los murales se colocarán en clase como guía a seguir.

<u>Actividad 2</u>: La música de fondo (Anexo IV)

Los alumnos, en pequeños grupos de 3-4, deberán seleccionar música adecuada para trabajar en clase, así como rellenar pertinentemente la ficha técnica correspondiente.

Se trata de que sean conscientes del efecto Mozart, es decir, de los beneficios que el escuchar piezas de este compositor tiene en el estudio de matemáticas. Además, según algunos estudios, este fenómeno es extensible a cualquier composición de música clásica.

Esta actividad tendrá una doble finalidad: además de utilizar la música escogida como medio didáctico en clase, servirá posteriormente para analizar las matemáticas presentes en la partitura, mediante la metodología *musimática*.

<u>Actividad 3</u>: Matemáticas en la música I: números enteros (Anexo V)

Los alumnos buscarán números enteros presentes en un fragmento de partitura proporcionado por el profesor (que corresponderá a la pieza musical seleccionada por algunos de ellos). Una vez realizada la tarea, tratarán de establecer si existe algún tipo de patrón (relación) entre ellos.

El objetivo de esta actividad es trabajar los números enteros mediante la música, además de percatarse de la relación entre esta materia y las matemáticas.

<u>Actividad 4</u>: Operaciones mediante la música I: números enteros (Anexo VI)

Los alumnos realizarán sumas y restas entre números enteros, utilizando el sistema de representación numérica basado en el piano o el sistema de representación numérica basado en las claves musicales. Para hacer las divisiones y multiplicaciones utilizarán la regla de las alteraciones.

Esta actividad pretende que los alumnos interioricen las reglas para hacer operaciones entre números enteros, mediante ejercicios lúdicos relacionados con las notas.

Actividad 5: Matemáticas en la música II: fracciones (Anexo VII)

Los alumnos buscarán fracciones presentes en el fragmento de partitura proporcionado por el profesor (que corresponderá a la pieza musical seleccionada por algunos de ellos). Además, observando la estructura de diferentes compases, tratarán de obtener equivalencias entre sumas de fracciones.

Esta actividad pretende que los alumnos trabajen las fracciones mediante la música, además de introducirles en el concepto de fracción equivalente y en el procedimiento para realizar sumas entre fracciones.

Actividad 6: Operaciones mediante la música I: fracciones (Anexo VIII)

Los alumnos realizarán operaciones entre fracciones, utilizando el sistema para operar con fracciones basado en las figuras musicales.

Esta actividad pretende que los alumnos interioricen las reglas para hacer operaciones entre fracciones, mediante ejercicios lúdicos relacionados con las figuras musicales.

Actividad 7: Equivalencias musicales: fracciones (Anexo IX)

Los alumnos buscarán fracciones equivalentes, mediante el sistema para operar con fracciones basado en las figuras musicales. Además, tratarán de deducir qué condición deben cumplir este tipo de fracciones.

El objetivo de esta actividad es que los alumnos se familiaricen con el concepto de fracción equivalente y mediante diferentes ejemplos deduzcan la teoría.

5.8. Evaluación

Se plantea una evaluación continua, en la que se irán anotando los progresos y dificultades de cada alumno, además de realizar un control al final de la unidad didáctica. Se tendrán en cuenta el trabajo individual y en equipo, además de la capacidad para aplicar los conceptos musicales estudiados en el aprendizaje de matemáticas. En la tabla 13, se resume la manera de evaluar los contenidos impartidos mediante la metodología propuesta:

Tarea	% nota	Criterios de evaluación
Selección de música en equipo	10%	Consensuar una música adecuada, que cumpla los requisitos establecidos (tranquila y armoniosa) y rellenar correctamente la ficha técnica (véase Anexo IV)
Creación de murales con técnicas metodológicas basadas en la música	5%	Elaborar creativamente murales que contengan las técnicas metodológicas propuestas
Ejercicios y problemas con la metodología *musimática* Individuales En equipo	 15% 15%	Realizar correctamente los ejercicios propuestos, aplicando las técnicas de la metodología propuesta
Actitud de clase	5%	Mostrar una actitud adecuada en clase, participando activamente y cooperando con los compañeros. Valorar positivamente los nexos entre música y matemáticas.
Control	50%	Saber aplicar los conceptos estudiados en una prueba de evaluación escrita
Total	100%	

Tabla 13. Criterios para la evaluación de la metodología *musimática* propuesta.
Fuente: Elaboración propia.

6. Discusión

A pesar de los múltiples beneficios de la música en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en general, y en el aprendizaje de matemáticas en particular, como toda innovación, esta metodología requiere un reciclaje y actualización, sobre todo por parte del profesorado, aunque también por parte del alumnado. Los profesores tienen que tener unos conocimientos musicales suficientes y además tienen que buscar e incluso adaptar fragmentos de partituras propuestas por los alumnos. Estos últimos, por su parte, deben mostrar una actitud adecuada, abierta a aprender nuevos conocimientos o más bien a aplicar aquellos que la mayoría ya controlan (los relacionados con la música) en una materia que les puede parecer muy distinta, como las matemáticas, es decir, deben ser capaces de trabajar desde la interdisciplinariedad.

Para introducir una nueva metodología en cualquier institución educativa, es necesario realizar un estudio profundo sobre la realidad de la misma. En este caso, se ha realizado un estudio de campo en una muestra representativa de los alumnos de 1º de ESO de Lauaizeta Ikastola (60 alumnos de 93). Según los resultados obtenidos, se ha deducido que existe una relación significativa entre la nota de matemáticas y los conocimientos musicales. Además, gracias al buen nivel musical de los alumnos y a los conocimientos musicales que tienen la mayoría de profesores de matemáticas, creo que el uso de esta metodología podría ser viable.

De todas maneras, opino que es importante una buena planificación y preparación de la forma de trabajar antes de poner en práctica esta metodología, como cualquier otra, para que sea exitosa y productiva.

7. Conclusiones

Este trabajo gira en torno al objetivo principal de diseñar una metodología basada en la música para impartir el bloque de números de 1º de la ESO. En concreto, se ha focalizado en aquellos contenidos, que a juicio de los diferentes profesores entrevistados, resultan más difíciles a los alumnos, en concreto, en los números enteros, en las fracciones y en sus respectivas operaciones.

Para fundamentar la propuesta metodológica realizada, se ha llevado a cabo una revisión bibliográfica, en la que, tras analizar el desarrollo histórico de las dos materias y su estrecha relación, se han investigado los múltiples beneficios de la música en el aprendizaje de matemáticas y en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en general. Además, es importante que la metodología docente se adapte a las características particulares del grupo de alumnos en la que se pretende implantar, por lo que se ha realizado un estudio de campo, con un doble objetivo. Por una parte, se ha obtenido información acerca del nivel musical de los alumnos y por otra parte se ha demostrado empíricamente que el tener conocimientos musicales favorece el aprendizaje de matemáticas. En resumen, los objetivos específicos fijados han sido necesarios para el cumplimiento del objetivo principal.

La metodología *musimática* diseñada, que pretende facilitar la impartición de los contenidos más problemáticos del bloque de números, trata de abordar las matemáticas desde una perspectiva más lúdica y amena para los alumnos, valiéndose de los múltiples beneficios de la música, así como del gusto de los alumnos por esta materia, que ha quedado patente tras la realización del estudio de campo.

Como en todos los ámbitos de la sociedad, en la educación se requiere investigación e innovación, para ofrecer una respuesta a las necesidades de todos los alumnos y al mismo tiempo implicarles y motivarles en su proceso de enseñanza-aprendizaje. Para ello, es necesario el trabajo y compromiso de todos los docentes implicados, puesto que todo cambio requiere un proceso de planificación y preparación exhaustivo. En este caso, se trata la innovación educativa desde la interdisciplinariedad, valiéndose de la percepción positiva y atractiva de los alumnos hacia la música, para la impartición de una materia que socialmente tiene una imagen menos agradable, más difícil y más costosa. De todas formas, para poder aprovechar todas las potencialidades que ofrece la metodología propuesta (metodología *musimática)* es imprescindible que los docentes tengan una cierta preparación musical, además de interés por el tema, puesto que son quienes deben guiar el proceso educativo de sus alumnos.

Considerando todo lo expuesto anteriormente, se puede concluir que el poseer conocimientos musicales influye significativamente en el aprendizaje de matemáticas, lo que ha servido como punto de partida y justificación para la creación de la nueva metodología propuesta, a la que se ha denominado metodología *musimática*.

8. Limitaciones

Una de las limitaciones del presente trabajo es la derivada del estudio de campo realizado. Éste se ha llevado a cabo sólo en un centro concreto, por las limitaciones temporales, cosa que ha podido influir en los resultados obtenidos. Aunque la muestra escogida es representativa del centro, hubiera sido interesante haber ampliado el estudio a otros centros, para contrastar los resultados y conclusiones obtenidas.

Otra de las limitaciones puede ser el conocimiento musical de los profesores de matemáticas que vayan a implantar la nueva metodología propuesta. Es importante que tengan unos ciertos conocimientos musicales, para que puedan adaptar la metodología propuesta a las características de su grupo-clase. Aunque en este caso 3 de los 4 profesores responsables de primero tienen un buen nivel de música, puede ser que en otros centros no pase lo mismo, lo que requeriría una preparación extra por parte de los docentes implicados.

Por último, quisiera mostrar mi preocupación por el tratamiento que la nueva ley de educación, LOMCE, da a la asignatura de música. En concreto, según esta ley dejará de ser obligatoria, tanto en primaria como en secundaria, por lo que puede haber alumnos que no la cursen en toda la educación obligatoria y por tanto no se puedan aprovechar de los múltiples beneficios que proporciona la educación musical, citados a lo largo de este trabajo.

9. Líneas de trabajo futuras

La innovación educativa es necesaria, para adaptarse a las características de la sociedad actual y particularmente para poder ofrecer una respuesta educativa competente, adecuada a las características del alumnado. Por ello, los docentes deben estar continuamente formándose para poder adecuar la metodología al grupo de alumnos en particular.

La propuesta didáctica que se expone en este trabajo es una muestra de la innovación mencionada, que trata de valerse de la potencialidad de la música para el aprendizaje de las matemáticas. Por limitaciones temporales y espaciales la propuesta se centra en un curso (1º de ESO) y un bloque de contenidos (números), aunque en un futuro se podría ampliar el estudio a otros cursos y a otros bloques, como el álgebra, por ejemplo.

Además toda innovación debe ser evaluada y testada, para demostrar su efectividad y para poder proponer mejoras. Por ello, creo que habría que implementar la propuesta didáctica en diversos centros, para evaluarla y poder mejorarla. En este sentido opino que se deberían contrastar los resultados obtenidos mediante la metodología propuesta, denominada metodología *musimática*, con los obtenidos mediante otro tipo de metodología.

10. Bibliografía

[1] Arca Mena, P. (2008). *Blog de la Prof. Dra. Patricia Arca Mena*. Recuperado el 18 de abril de 2015, de http://arcamena.blogspot.com.es/2008/08/el-efecto-de-la-musica-en-nuestro.html

[2] Artacho, A. (2015). *matematicascercanas.com*. Recuperado el 27 de abril de 2015, de http://matematicascercanas.com/category/musica-y-matematicas-3/

[3] Ausejo Martínez, E. (1992). *Las matemáticas en el siglo XVII*. Madrid: Akal.

[4] Chun-Chi J., C., & Miikkulainen, R. (2001). Creating Melodies with Evolving Recurrent Neural Networks. *IEEE* .

[5] Conejo Rodríguez, P. A. (2012). El valor formativo de la Música para la educación en valores. *Dedica. Revista de Educação e Humanidades* (2), 263-278.

[6] Dickinson, D. (1993). *New Horizons for Learning*. Recuperado el 18 de abril de 2015, de http://education.jhu.edu/PD/newhorizons/strategies/topics/Arts%20in%20Education/dickinson_music.htm

[7] Eusko Jaurlaritza Gobierno Vasco. (s.f.). *Departamento de Educación, Universidades e Investigación*. Recuperado el 15 de abril de 2015, de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-2459/es/contenidos/informacion/dif10_curriculum_berria/es_5495/adjuntos/curriculum_2010/basica_refundido_2010/1_05_anexoIV_c.pdf

[8] Fraile Aranda, A. (2012). Evaluación formativa e interdisciplinariedad: Análisis de dos asignaturas con el mismo sistema de evaluación. *Psychology, Society, & Education , 4* (1), 5-16.

[9] Giordanelli, M. (2011). La música en educación, herramienta fundamental para la formación integral. *El astrolabio , 10*, 59-67.

[10] Gómez Martín, F. (2010) *Real Sociedad Matemática Española. divulgaMAT*. Recuperado el 20 de abril de 2015, de http://www.divulgamat.net/index.php?option=com_content&view=article&id=11360&directory=67

[11] González Urbaneja, P. M. (s.f.). *Real Sociedad Matemática Española. divulgaMAT*. Recuperado el 19 de abril de 2015, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&task=view&id=3326

[12] González-Pienda, J. A., Núñez, J. C., Álvarez, L., González, P., Gonzalez-Pumariega, S., & Roces, C. (2003). ¿Cómo explicar tanto fracaso en el aprendizaje de las matemáticas? *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación , 10*, 350-358.

[13] Jensen, E. (2007). *Brain-Based Learnign*. San Diego: The Brain Store.

[14] Jorquera Jaramillo, M. C. (2005). Educación musical: Aportes para su comprensión a partir del origen de la disciplina. *Investigación en la escuela* (58), 69-78.

[15] Lara Popoca, J. (2008). Al son de las matemáticas: Música y números. *Hypatia* (26).

[16] Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de *Educación*. Boletín Oficial del Estado, 106, de 4 de mayo de 2006.

[17] Losada, R. (2007). *Real Sociedad Matemática Española. divulgaMAT*. Recuperado el 20 de abril de 2015, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&task=view&id=8744&Itemid=46

[18] Martínez, J. R., & Palomares-Sánchez, S. (s.f.). *Sociedad Mexicana de Física*. Recuperado el 20 de abril de 2015, de http://www.smf.mx/boletin/Jul-96/articles/son13.html

[19] *Microtonal Projects*. (s.f.). Recuperado el 20 de abril de 2015, de http://www.microtonalprojects.co.uk/index.html

[20] Moldaver, E., Merlino, H., & Fernández, E. (2014). Composición Musical a traves del uso de Algoritmos Genéticos. *Revista Latinoamericana de Ingeniería de Software , 2* (3), 149-156.

[21] Montesinos Sirera, J. L. (2010). *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. Madrid: Síntesis.

[22] Ordoñez Morales, E., Sánchez Reinoso, J. S., Sánchez Maldonado, M. M., Romero Haro, C. E., & Bernal Iñiguez, J. D. (2011). Análisis del Efecto Mozart en el desarrollo intelectual de las personas adultas y niños. *Ingenius* (5), 45-54.

[23] Pérez García, M. (2014). La expresión musical al servicio de la integración del conocimiento: Música en Educación Secundaria y Currículum en Red. *Educación artística: revista de investigación (EARI)* (5), 139-155.

[24] Rauscher, F. H., Shaw, G. L., & Ky, C. N. (1993). Music and spatial task performance. *Nature , 365*, 611.

[25] Real Academia Española. (2015). Música. En. *Diccionario de la lengua española* (22.ª ed.). Recuperado el 16 de abril de 2015, de http://lema.rae.es/drae/?val=m%C3%BAsica

[26] Real decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que *se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Boletín Oficial del Estado, 5, de 5 de enero de 2007.

[27] Román García, M. S. (2003). Beneficios del aprendizaje musico-instrumental: Los paradigmas Suzuki y Yamaha. *Tavira: Revista de ciencias de la educación* (19), 81-96.

[28] Romero Redondo, R. (s.f.). *Universidad Autónoma de Madrid*. Recuperado el 19 de abril de 2015, de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Musica%20y%20Matematicas.pdf

[29] *Rueda Armónica*. (s.f.). Recuperado el 20 de abril de 2015, de http://www.ruedaarmonica.com/5.php

[30] Sanchez Guevara, I., & Narro Ramírez, A. E. (s.f). *Matemática medieval*. Recuperado el 17 de abril de 2015, de http://148.206.107.15/biblioteca_digital/articulos/8-212-2614uxj.pdf

[31] Sarget Ros, M. Á. (2000). Perspectiva histórica de la educación musical. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete* (15), 117-132.

[32] Shah, S. (2010). *An Exploration of the Relationship Between Mathematics and Music*. (Math30000, 3rd Year Proyect). University of Manchester, Manchester.

[33] Steele, K. M., Bass, K. E., & Crook, M. D. (1999). The mistery of the Mozart Effect: Failure to Replicate. *American Psychological Society , 10* (4), 366-369.

[34] Stough, C., Kerkin, B., Bates, T., & Mangan, G. (1994). Music and Spatial IQ. *Personality & Individual Differences , 17* (5), 695.

[35] Struik, D. J. (1999). *La matemática sus Orígenes y su Desarrollo*. Recuperado el 17 de abril de 2015, de www.elaleph.com

[36] Tomasini, M. C. (s.f.). *Universidad de Palermo*. Recuperado el 19 de abril de 2015, de http://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2003.pdf

[37] Valles del Pozo, M. J. (2009). La educación musical en la historia de occidente: apuntes para la reflexión. *Neuma* , 218-232.

11. Anexos

11.1. Anexo I: Preguntas de la entrevista a los profesores

1. ¿Cree que los conocimientos matemáticos previos de los alumnos son suficientes? ¿Y los conocimientos previos sobre el bloque de números?
2. ¿Cuál es la actitud de los alumnos respecto a la asignatura, en general, y al bloque de números en particular?
3. ¿Qué metodología utiliza en sus clases?
4. ¿Utilizaría la música como recurso didáctico en sus clases? ¿Cree que se podría usar?
5. ¿Cuál es su nivel de música?
6. ¿Cuál es el nivel de los alumnos, en cuanto a la comprensión de la teoría? ¿Dónde tienen más dificultades?
7. ¿Cuál es el nivel de capacidad de los alumnos para aplicar los conceptos teóricos estudiados en ejercicios y problemas prácticos? ¿Dónde tienen más dificultades?

11.2. Anexo II: Modelo de la encuesta realizada a los alumnos

ENCUESTA.

1. Comprendo los conceptos fundamentales de música, es decir, soy capaz de leer una partitura:

☐ No ☐ A medias ☐ Sí

2. He estudiado música fuera del centro escolar:

☐ Solfeo ☐ Instrumento ☐ Ambos
☐ Ninguno

3. Me gusta la asignatura escolar de música:

☐ No ☐ A medias ☐ Sí

4. Mi nota media en la asignatura de música es la siguiente:

5. Se me da bien la aritmética (rama de las matemáticas que estudia los números):

☐ No ☐ A medias ☐ Sí

6. Me gusta la asignatura de matemáticas:

☐ No ☐ A medias ☐ Sí

7. Mi nivel de esfuerzo para aprobar la asignatura de matemáticas es:

☐ Pequeño ☐ Medio ☐ Grande

8. Mi nota media de matemáticas es la siguiente:

11.3. Anexo III: Metodología musimática

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 1: Metodología musimática.</td><td colspan="2">Tipo de actividad: Iniciación e interiorización.</td></tr>
<tr><td>Duración: 1h.</td><td colspan="2">Agrupamiento: pequeños grupos de 3-4 alumnos.</td><td>Metodología: activa y participativa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contenidos:
1. Números enteros
1.1 Representación de números enteros.
1.2 Suma y resta de números enteros.
1.3 Multiplicación y división de números enteros.
2. Fracciones
2.1 Operaciones entre fracciones: suma, resta, multiplicación, división.
2.2 Fracciones equivalentes.</td><td colspan="2">Objetivos:
1. Ser conscientes de la influencia de la música en las matemáticas.
2. Interiorizar la metodología musimática.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Explicación de la actividad:
Tras una pequeña explicación por parte del profesor sobre la nueva metodología propuesta (metodología musimática), los alumnos, por grupos, crearán unos murales con las bases de la misma. Para ello, se ha creado una ficha (ficha 1, anexo 1), en la que se muestran las figuras y tablas en la que se basa esta metodología, con una pequeña explicación de cada una.
Se valorará la creatividad y el trabajo en equipo, así como una actitud abierta y positiva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materiales y recursos:
Cartulinas, tijeras, rotuladores, pegatinas rojas y verdes, ficha 1 o similar.</td><td colspan="2">Aula:
Aula ordinaria.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observaciones:
Ésta debe ser la primera actividad, puesto que debe servir para que los alumnos interioricen la metodología propuesta, así como para crear murales que contienen las bases de la misma, que servirán como guía en las actividades posteriores.</td></tr>
</table>

FICHA 1. METODOLOGÍA *MÚSIMÁTICA*

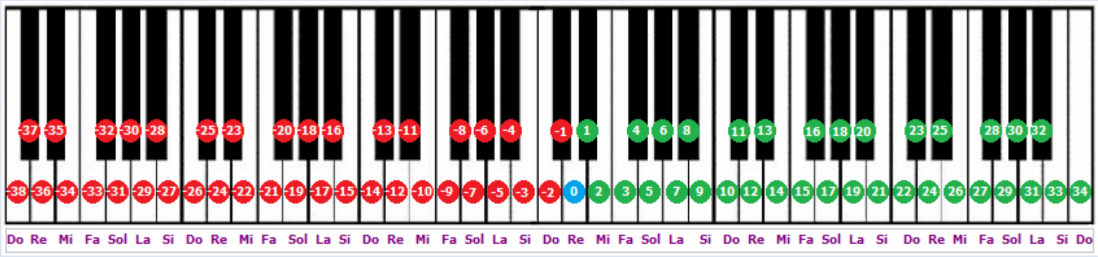
Vista la estrecha relación entre la música y las matemáticas, se propone una nueva metodología basada en la música para trabajar algunos de los contenidos que suelen resultar más difíciles a los alumnos de matemáticas de 1º de ESO, en concreto, los números enteros, las fracciones y sus operaciones.

La metodología mencionada se ha denominado metodología *musimática* y se basa en tres sistemas para la representación y las operaciones de los números enteros y en otro sistema para la representación y operaciones entre fracciones. Cada uno de los sistemas se resume mediante una imagen o una tabla, que tendréis que asimilar, para poder comprender la teoría y realizar los ejercicios prácticos. Además, realizaréis murales por cada una de las imágenes/tablas que resuman esta metodología, que servirán de guía a la hora de trabajar con ella.

Metodología para trabajar con números enteros

1. Sistema de representación numérica basado en el piano

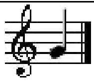
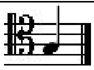
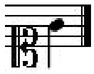
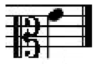
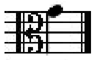
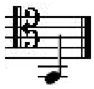
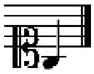
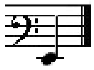
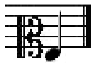
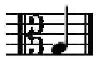
Se propone identificar las notas musicales con los números enteros, relacionando la primera nota de la escala de ReM (es decir, el Re) como el 0. Así las notas más agudas representarán los números naturales (enteros positivos) y las más graves los negativos, tal y como se muestra en la siguiente figura.



También se puede utilizar para la suma y resta de números enteros. En concreto, para sumar a+b (a,b$\in \mathbb{Z}$): se parte de la nota que se identifica con el número a, se mueve a derecha/izquierda (según b sea positivo o negativo, respectivamente) tantas notas (teclas) como representa el número b y el resultado es el número con el que se identifica la nota (tecla) final.

2. Sistema de representación numérica basado en las claves musicales

Es un sistema algo más complejo que el anterior, por lo que su uso dependerá del nivel de conocimiento musical de los alumnos a con los que se vaya a utilizar. Parte de la representación de la nota sol en las diferentes claves y se basa en identificar el pentagrama con los números enteros, asociando un número a cada línea o espacio del mismo. Se tomará como punto de partida la clave de sol y por tanto la segunda línea, identificándola con el 0. Los espacios y líneas superiores tomarán valores positivos, mientras que los inferiores tomarán valores negativos, como se puede apreciar en la siguiente tabla.

Sol, según claves							
Enteros asociados	0,±7,±14, ±21,±28…	1,8,15, 22, 29…	2,9,16, 23, 30…	3,10,17, 24,31…	4,11,18, 25,32…	5,12,19, 26,33…	6,13,20, 27,34…
Sol, según claves							
Enteros asociados	-6,-13,-20 -27,-34…	-5,-12,-19, -26,-33…	-4,-11,-18, -25,-32…	-3,-10,-17 -24,-31…	-2,-9,-16, -23,-30…	-1,-8,-15, -22,-29…	0,±7,±14, ±21,±28…

El procedimiento a seguir para la suma es parecido al caso anterior; es decir, para sumar a+b ($a,b\in\mathbb{Z}$) se parte de la celda de la fila 1 o 3 (según a sea positivo o negativo, respectivamente), se cuenta a derecha/izquierda (si b es positivo/negativo) tantas posiciones como indica el número b y el resultado es el número que representa la celda de llegada. Como cada celda representa varios números, hay que tener en cuenta el número de partida y el número de veces que se ha recorrido toda la fila. Además si en las celdas 1/7 de las líneas 1/3 se llega al 0, habrá que cambiar a la celda 1/7 de la línea 1/3.

3. Regla de las alteraciones

Es una regla alternativa a la regla de los signos, válida para realizar multiplicaciones o divisiones entre números enteros. Para realizar una multiplicación/división entre enteros, se realizará la operación de sus valores absolutos y esta regla determinará el signo de la misma. El signo (+) equivale a la alteración musical sostenido (#) y el signo (-) a la alteración bemol (b). Se parte de una nota cualquiera, se le aplican las alteraciones que corresponda en cada caso y si se obtiene una nota diferente a la de partida el resultado será positivo y en caso contrario negativo. El método se resume en la siguiente tabla:

Operación	**Regla de las alteraciones**	**Signo**
a·b ó a:b ($a,b\in\mathbb{Z}$, a>0, b>0)	Partiendo de Sol, ##Sol=La≠Sol	+
a·b ó a:b ($a,b\in\mathbb{Z}$, a>0, b<0)	Partiendo de Sol, b#Sol=Sol=Sol	-
a·b ó a:b ($a,b\in\mathbb{Z}$, a<0, b>0)	Partiendo de Sol, #bSol=Sol=Sol	-
a·b ó a:b ($a,b\in\mathbb{Z}$, a<0, b<0)	Partiendo de Sol, bbSol=Fa≠Sol	+

Metodología para trabajar con fracciones

1. Sistema para operar con fracciones basado en las figuras musicales

A cada figura musical se le asocia una fracción, tomando como punto de partida la redonda. En concreto, la redonda ocupa 4 pulsos y se le asocia el 1. Como cada redonda equivale a dos blancas, cada blanca ocupa 2 pulsos y se le asocia la fracción ½. Cada blanca, por su parte, equivale a dos negras, cada una de las cuales ocupa 1 pulso, por lo que se le asocia la fracción ¼. Siguiendo el mismo procedimiento sucesivamente, con todas las figuras, se obtiene que a cada semigarrapatea se le asocia la fracción 1/256 (ocupa 1/64 pulsos). En la siguiente tabla se resumen las equivalencias entre figuras musicales y fracciones.

NOMBRE	FIGURA y silencio	PULSOS	FRACCION ASOCIADA	EQUIVALENCIAS ENTRE FIGURAS MUSICALES			
Redonda		4	1				
Blanca		2	1/2				
Negra		1	¼				
Corchea		½	1/8				
Semicorchea		¼	1/16				
Fusa		1/8	1/32				
Semifusa		1/16	1/64				
Garrapatea		1/32	1/128	32x	32x	32x	32x
Semigarrapatea		1/64	1/256	64x	64x	64x	64x

Así, para hacer operaciones entre fracciones basta con hacer operaciones entre figuras musicales. Por ejemplo, 1/4+1/8 equivale a ♩+♪=♩♫, y como a cada corchea se le asocia la fracción 1/8, se deduce que 1/4+1/8=3/8. Para la división o multiplicación entre un natural y una fracción se puede usar la tabla de la parte derecha, por ejemplo, ¼:2=♩:2=♪=1/8 y de ahí se deducirá el procedimiento para la división/multiplicación entre fracciones.

11.4. Anexo IV: La música de fondo

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 2: La música de fondo.</td><td colspan="2">Tipo de actividad: Relajación y creación de un ambiente adecuado de trabajo.</td></tr>
<tr><td>Duración: Se utilizará en cada sesión, durante la realización de los ejercicios propuestos.</td><td colspan="2">Agrupamiento: toda la clase. Se trabajará individualmente o en parejas.</td><td>Metodología: activa y participativa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contenidos:

Depende de los contenidos que se trabajen en la sesión correspondiente.</td><td colspan="2">Objetivos:

1. Saber escoger música apropiada para utilizar en clase de matemáticas.
2. Saber aprovechar los beneficios de la música clásica en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en las clases de matemáticas, en particular.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Explicación de la actividad:

Los alumnos, en pequeños grupos de 3-4, deberán seleccionar música adecuada para trabajar en clase, así como rellenar pertinentemente la ficha técnica correspondiente (véase ficha 2).

Se trata de que sean conscientes del efecto Mozart, es decir, de los beneficios que el escuchar piezas de este compositor tiene en el estudio de matemáticas. Además, según algunos estudios, este fenómeno es extensible a cualquier composición de música clásica.

Esta actividad tendrá una doble finalidad: además de utilizar la música escogida como medio didáctico en clase, servirá posteriormente para analizar las matemáticas presentes en la partitura, mediante los distintos sistemas de la metodología musimática.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materiales y recursos:

TIC, CDs, ficha 2 o similar.</td><td colspan="2">Aula:

Aula ordinaria.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observaciones:

Es necesario en todo momento escuchar la música de fondo, por lo que además de permitir que los alumnos se favorezcan de los beneficios de la música clásica, servirá como indicador de si su volumen de voz es adecuado o no.</td></tr>
</table>

FICHA 2. LA MÚSICA DE FONDO

Se denomina "Efecto Mozart" a la mejora de las capacidades espacio-temporales producida durante los 10-15 minutos posteriores a la escucha de música de este compositor o de otros compositores clásicos. Además, existen estudios que demuestran que entre los beneficios de escuchar música clásica se encuentran la mejora de la capacidad de comprensión, de la concentración, del aprendizaje, de la resolución de problemas matemáticos, de la memoria o de las capacidades sociales, entre otros.

Debido a los múltiples beneficios que produce la escucha de música clásica durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, se utilizará este recurso durante las sesiones de resolución de ejercicios o problemas en clase. La única condición es que en todo momento se debe escuchar la música de fondo.

Seréis vosotros mismos quienes, en pequeños grupos, os encarguéis de la selección de música, así como de rellenar la ficha técnica que se añade a continuación. Esta misma música será de utilidad para actividades que se realicen más adelante.

FICHA TÉCNICA DE LA MÚSICA ESCOGIDA	
Título	
Compositor	
Tipo de música	
País de origen del compositor	
Año en el que se compuso	
Duración	
Otras 3 composiciones de este autor	

11.5. Anexo V: Matemáticas en la música I: números enteros

<table>
<tr><td colspan="3">Actividad 3: Matemáticas en la música I: números enteros.</td><td colspan="2">Tipo de actividad: Puesta en práctica de los conceptos teóricos estudiados.</td></tr>
<tr><td>Duración: 2h.</td><td colspan="2">Agrupamiento: toda la clase. Se trabajará individualmente o en parejas.</td><td colspan="2">Metodología: activa y participativa.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Contenidos:
1. Números enteros
1.1 Representación de números enteros.</td><td colspan="2">Objetivos:
1. Saber representar los números enteros.
2. Trabajar con números enteros mediante la música.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Explicación de la actividad:
Partiendo de la pieza de música clásica seleccionada por un grupo de alumnos, el profesor se encargará de proporcionar un fragmento de la partitura de la misma.
La tarea de los alumnos será buscar números enteros presentes en dicha partitura, utilizando la metodología músimática (bien mediante el sistema de representación numérica basado en el piano o bien mediante el sistema de representación numérica basado en las alteraciones).
Una vez finalizada la tarea, tratarán de establecer si existe algún tipo de patrón (relación) entre los números enteros obtenidos de la partitura.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Materiales y recursos:
Partituras, murales de la metodología musimática, ficha 3 o similar.</td><td colspan="2">Aula:
Aula ordinaria o aula de música.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Observaciones:
Aunque según las encuestas realizadas el 90% de los alumnos admite que tiene unos conocimientos mínimos musicales, se añadirá debajo de cada nota su nombre, para que todos puedan realizar la actividad sin problema.</td></tr>
</table>

FICHA 3. MATEMÁTICAS EN LA MÚSICA I: NÚMEROS ENTEROS

La pieza de música clásica escogida por un grupo de alumnos de clase es el concierto nº3 de Mozart.

A continuación se añade un fragmento de la partitura de dicha obra, en la que deberéis identificar números naturales, utilizando las pautas de la metodología *musimática* (bien mediante el sistema de representación numérica basado en el piano o bien mediante el sistema de representación numérica basado en las alteraciones).

Al terminar la tarea, debéis establecer si existe algún tipo de patrón (relación) entre los números enteros obtenidos del fragmento de partitura.

11.6. Anexo VI: Operaciones mediante la música I: números enteros

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 4: Operaciones mediante la música I: números enteros.</td><td colspan="2">Tipo de actividad: Puesta en práctica de los conceptos teóricos estudiados.</td></tr>
<tr><td>Duración: 2h.</td><td colspan="2">Agrupamiento: toda la clase. Se trabajará individualmente o en parejas.</td><td>Metodología: activa y participativa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contenidos:
1. Números enteros
1.1 Representación de números enteros.
1.2 Suma y resta de números enteros.
1.3 Multiplicación y división de números enteros.</td><td colspan="2">Objetivos:
1. Saber representar los números enteros.
2. Saber operar con números enteros.
3. Trabajar con números enteros mediante la música.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Explicación de la actividad:
Se repartirá una ficha para que los alumnos realicen operaciones entre números enteros.
Para realizar sumas y restas podrán valerse de cualquiera de los dos sistemas de representación propuestos (el del piano o el de las claves musicales).
Para realizar multiplicaciones y divisiones, en cambio, utilizarán la regla de los signos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materiales y recursos:
Fichas de actividades, murales de la metodología musimática, ficha 4 o similar.</td><td colspan="2">Aula:
Aula ordinaria.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observaciones:
Aunque existe un 10% de alumnos que admite que no tiene conocimientos musicales suficientes, el mural correspondiente al sistema de representación basado en el piano les ayudará a realizar las sumas y restas sin problemas. Para la multiplicación y división se pueden valer de la tabla que representa la regla de las alteraciones. Es importante que el profesor esté un poco más pendiente de este tipo de alumnos, para ayudarles sobre todo al principio.</td></tr>
</table>

FICHA 4. OPERACIONES MEDIANTE LA MÚSICA I: NÚMEROS ENTEROS

El objetivo de la siguiente actividad es coger soltura en el uso de la metodología *musimática*, para realizar operaciones entre números enteros. Para la realización de las actividades propuestas, os será de gran utilidad basaros en los murales realizados al comienzo de la unidad.

Sumas y restas de números enteros			
Operación	**Nota (celda) de partida**	**Nota (celda) de llegada**	**Resultado (valor nota (celda) llegada)**
(-15)+7	Si (2ª octava)	Fa# (3ª octava)	-8
2-10			
2+(-3)			
-4-7			
11+(-4)			
-3+8			
-11+2			
6-10			
3-12			
(-5)-15			
(-2)+11			
-8-2			
-6+(-5)			
-9-11			
-2+10			
10+3			
3-(-3)			
7-4			
5-11			
(-2)-(-3)			
-6+5			
15-30			
-20+4			
-7-10			
-5+2			
(-2)-(-7)			

Multiplicaciones y divisiones de números enteros				
Operación	**Resultado (valor abs.)**	**Nota de partida**	**Nota de llegada →Signo**	**Resultado real**
(-5)·7	35	Sol	#bSol=Sol → (-)	-35
2·10				
2·(-3)				
(-4)·(-5)				
2·5				
7·(-3)				
8:(-1)·				
(-4)·(-5)				
10:(-2)				
(-3)·5				
(-2):(-1)				
7·5				
5·(-9)				
(-6):(-3)				
12:(-4)				
(-5):(-1)				
3·(-7)				
2·(-15)				
(-8):2				
8:(-2)				
8:2				
9·(-3)				
(-10)·(-5)				
4:(-2)				
4·(-2)				
(-5)·(-3)				
(-15):3				
(-7)·(-2)				
14:(-2)				
5·(-8)				
(-20):(-2)				
(-2)·(-7)				

11.7. Anexo VII: Matemáticas en la música II: fracciones

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 5: Matemáticas en la música II: fracciones.</td><td colspan="2">Tipo de actividad: Puesta en práctica de los conceptos teóricos estudiados.</td></tr>
<tr><td>Duración: 1h.</td><td colspan="2">Agrupamiento: toda la clase. Se trabajará individualmente o en parejas.</td><td>Metodología: activa y participativa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contenidos:
2. Fracciones.</td><td colspan="2">Objetivos:
1. Reconocer fracciones en la música.
2. Reconocer equivalencias entre sumas de fracciones, observando los compases.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Explicación de la actividad:
Partiendo de la pieza de música clásica seleccionada por un grupo de alumnos, el profesor se encargará de proporcionar un fragmento de la partitura de la misma.
La tarea de los alumnos será buscar fracciones presentes en dicha partitura, utilizando la metodología músimática. Es importante recordar que los silencios tienen el mismo valor que su figura correspondiente, y por tanto, la misma fracción asociada.
Además, observando la estructura de diferentes compases tratarán de obtener equivalencias entre sumas de fracciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materiales y recursos:
Partituras, murales de la metodología musimática, ficha 5 o similar.</td><td colspan="2">Aula:
Aula ordinaria o aula de música.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observaciones:
Aunque según las encuestas realizadas el 10% admite que no tiene conocimientos musicales suficientes, basándose en los murales creados no deberían tener dificultades en reconocer las diferentes figuras musicales y silencios, ni de identificarlos con su fracción asociada.</td></tr>
</table>

FICHA 5. MATEMÁTICAS EN LA MÚSICA II: FRACCIONES

La pieza de música clásica escogida por un grupo de alumnos de clase es el concierto nº3 de Mozart.

A continuación se añade un fragmento de la partitura de dicha obra, en la que deberéis identificar fracciones, utilizando las pautas de la metodología *musimática*.

Además, observando las diferentes formas existentes para completar un compás, deberéis reconocer distintas equivalencias entre sumas de fracciones. Tened en cuenta que los silencios se asocian con la misma fracción que su figura correspondiente. Por ejemplo, observando los compases sexto y octavo, se obtiene que 1/2+1/2=1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8.

11.8. Anexo VIII: Operaciones mediante la música II: fracciones

Actividad 6: Operaciones mediante la música II: fracciones.		**Tipo de actividad**: Puesta en práctica de los conceptos teóricos estudiados.
Duración: 2h.	**Agrupamiento**: toda la clase. Se trabajará individualmente o en parejas.	**Metodología**: activa y participativa.
Contenidos: 2. Fracciones 2.1 Operaciones entre fracciones: suma, resta, multiplicación, división.		**Objetivos:** 1. Saber operar con fracciones. 2. Trabajar con fracciones mediante la música.
Explicación de la actividad: Se repartirá una ficha para que los alumnos realicen operaciones entre fracciones, utilizando la metodología *musimática*. Mediante este sistema sólo se identifican ciertas fracciones (1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256), por lo que el objetivo entre esta actividad y la siguiente es que deduzcan el procedimiento para realizar cualquier suma, resta, multiplicación o división entre fracciones.		
Materiales y recursos: Fichas de actividades, murales de la metodología *musimática*, ficha 6 o similar.		**Aula:** Aula ordinaria.
Observaciones: Para esta actividad es necesario saber la duración de cada figura y su silencio y por tanto su fracción asociada, aunque los alumnos no deberían tener problemas especiales, puesto que dichos datos aparecen en los murales creados sobre la metodología *musimática*.		

FICHA 6. OPERACIONES MEDIANTE LA MÚSICA II: FRACCIONES

El objetivo de la siguiente actividad es coger soltura en el uso de la metodología *musimática,* para realizar operaciones entre fracciones. Para la realización de las actividades propuestas, os será de gran utilidad basaros en los murales realizados al comienzo de la unidad.

Operación	**Operación de figuras**	**Figura resultado de la operación**	**Fracción resultado**
1/4+1/8	♩+♪		3/8
¼-1/8			
1/8·2			
1/16:2			
1/64·4			
1/128:2			
1/64-1/256			
¼+1/16			
1/2:2			
¼:4			
2·2/8			
1/16-1/128			
1/32+1			
4·1/8			
2/4+1/8			
½-1/4			
8·1/16			
½:8			
¼+1/8			
4·1/4			
1/256:4			
1-1/2			
1/2:8			
1/2·4			
1/256+1/128			
1/8-1/16			
1/4:4			
1/2·8			

Basándote en las operaciones anteriores, reflexiona acerca de las siguientes cuestiones:

- ¿Al realizar una suma/resta entre dos fracciones cuál es el denominador de la suma, el más pequeño o el más grande? ¿Existe alguna relación de multiplicidad entre los denominadores de los sumandos y del resultado?
- ¿Al realizar la multiplicación entre un natural y una función, cuál es el denominador del resultado? ¿Y el numerador?
- Considerando que cualquier número natural n, se puede escribir de manera fraccionaria como n/1, ¿Cuál crees que será el resultado de a/b·c/d? O expresado de otra manera, ¿cuál crees que será el resultado de 1/2·1/3, por ejemplo?
- Considerando que cualquier número natural n, se puede escribir de manera fraccionaria como n/1, ¿Cuál crees que será el resultado de a/b:c/d? O expresado de otra manera, ¿cuál crees que será el resultado de 1/2:1/3?

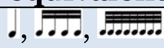
11.9. Anexo IX: Equivalencias musicales: fracciones

<table>
<tr><td colspan="3">Actividad 7: Equivalencias musicales: fracciones.</td><td colspan="3">Tipo de actividad: Puesta en práctica de los conceptos teóricos estudiados.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Duración: 1h.</td><td colspan="2">Agrupamiento: toda la clase. Se trabajará individualmente o en parejas.</td><td colspan="2">Metodología: activa y participativa.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Contenidos:
2. Fracciones
2.1 Operaciones entre fracciones: suma, resta, multiplicación, división.
2.2 Fracciones equivalentes.</td><td colspan="3">Objetivos:
1. Reconocer fracciones equivalentes y saber obtenerlas.
2. Trabajar con fracciones mediante la música.
3. Deducir el procedimiento para realizar cualquier suma/resta entre fracciones.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Explicación de la actividad:
Se repartirá una ficha para que los alumnos busquen fracciones equivalentes, mediante el sistema para operar con fracciones basado en figuras musicales. Además, tratarán de deducir qué condición deben cumplir este tipo de fracciones.
Una vez deducida la condición para que dos fracciones sean equivalentes, y teniendo en cuenta los resultados de las distintas sumas/restas de fracciones de la ficha 6 (anexo VIII), tratarán de deducir el procedimiento para realizar la suma/resta de dos fracciones cualesquiera.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Materiales y recursos:
Partituras, murales de la metodología musimática, ficha 7 o similar.</td><td colspan="3">Aula:
Aula ordinaria o aula de música</td></tr>
<tr><td colspan="6">Observaciones:
Es importante que además de reconocer fracciones equivalentes según las figuras musicales, aprendan a generalizar a cualquier tipo de fracción. La actividad prevista estará diseñada para dicho fin.</td></tr>
</table>

FICHA 7. EQUIVALENCIAS MUSICALES: FRACCIONES

El objetivo de la siguiente actividad es ser capaces de identificar fracciones equivalentes, basándose en la metodología *musimática,* para poder luego generalizar a cualquier tipo de fracciones.

Además, partiendo de las conclusiones obtenidas sobre las fracciones equivalentes y teniendo en cuenta las diferentes sumas/restas de fracciones realizadas en la ficha 6 (anexo VIII), trataréis de deducir el procedimiento para realizar sumas/restas de dos fracciones cualesquiera.

Fracción	**Figura**	**Figuras equivalentes**	**Fracciones equivalentes**
2/8		...	1/4, 4/16, 8/32...
1/2			
1/4			
2/256			
1/8			
1			
2/4			
4/16			
8/8			
2/32			
4/32			
4/8			
8/16			
3/4			
3/2			

Basándote en las operaciones anteriores, reflexiona acerca de las siguientes cuestiones:

- ¿Existe alguna relación entre los numeradores y los denominadores de dos fracciones equivalentes?
- Considerando las fracciones equivalentes y la suma entre dos fracciones, ¿qué crees que habría que hacer para resolver una suma/resta entre dos fracciones cualesquiera? Por ejemplo, ¿cómo harías 3/5+1/3? (Pista: considera las fracciones equivalentes y la condición que cumple el denominador de 1/2+1/4, por ejemplo).