EL DISEÑO FACTORIAL 2×2 EN LA INVESTIGACION PSICODIDACTICA

Los métodos científicos para el estudio psicodidáctico se han perfeccionado para aprovechar al máximo las situaciones experimentales. A los ya tradicionles: caso único, grupos equivalentes y rotación se añaden los procedimientos factoriales, latinos, greco-latinos, balanceados, etc. Se intenta aprovechar al máximo las situaciones experimentales y agotar todas las inferencias posibles a partir de los datos iniciales.

En el campo de la Didáctica puede interesar no sólo determinar cuáles son los efectos de un método sino apreciar diferentes variaciones en dichos caminos. Puede preocuparnos también no sólo averiguar los efectos de un método debidamente variado, sino los efectos a corto plazo y a largo plazo. No debemos suponer que el mejor método sería el que produjese los máximos resultados una vez concluida la actividad discente sino el que ha conseguido una mayor integración manifiesta por el dominio y comprensión de las cuestiones pasado un tiempo prudencial.

Supuesto el planteo fortuito de la experiencia y supuesta la existencia de pruebas de confianza para efectuar con seguridad las comparaciones oportunas procede seguir el procedimiento apoyado en el análisis de varianza. Su utilización nos facilita encontrar no sólo los efectos de cada método y de cada variante sino la interacción entre los métodos y variantes. No necesitamos repetir experiencias y nuevas situaciones como en el proceder tradicional para inferir consecuencias rigurosas.

Así si quisiéramos determinar no sólo la superioridad de la enseñanza de una materia escolar por simple exposición magistral y toma de notas del alumno y, por otra parte, la enseñanza magistral ayudada por gráficos en el encerado, plantearíamos el problema factorial introduciendo a lo menos dos variantes para cada método: examen inmediato y examen al cabo de cierto número de días. Podríamos ampliar las variantes (duplicar, cuadruplicar, etc). con pensar en los siguientes aspectos: mitad del tiempo de aprendizaje dedicado a la recitación por parte del alumno o todo el tiempo en recepción, etc. En el primer caso tendríamos un diseño factorial 2 × 2; en el segundo, otro de 2 × 2 × 2.

Para simplificar el proceso comprensivo nos referiremos al primer proceso, al factorial 2 × 2. Una vez hechos los exámenes finales de dos experiencias 2 × 2 (la mentada y otra referida a comprensión y velocidad lectoras en textos seleccionados a dos autores contemporáneos) nos encontramos con los siguientes cuadros-resumen de los valores medios:

TABLA I.—Cuadro-resumen de lectura de textos.

Autor \ Modalidad	Comprensión	Velocidad	Media	Diferencia
A	58,58	64,42	61,50	+ 5,84
B	61,50	66,33	63,92	+ 4,83
Media	60,04	65,38	62,71	
Diferencia	+ 2,92	+ 1,91		

TABLA II.—Cuadro-resumen de explicación magistral.

Recuerdo \ Modalidad Explic.	Sin gráficos	Con gráficos	Media	Diferencia
Demorado	48	67,5	57,75	+ 19,5
Inmediato	57,5	69,9	63,70	+ 12,4
Media	52,75	68,7	60,73	
Diferencia	+ 9,5	+ 2,4		

En ellas advertimos la superioridad del autor B sobre el A en cuanto a la inteligibilidad de su textos (lecturabilidad) y en cuanto a la velocidad lectora. Tambien se advierten diferencias entre los resultados de velocidad y comprensión (bajo el supuesto de equivalencia comparativa).

Son mucho mayores las diferencias ante la explicación sin gráficos y la explicación con gráficos (en nuestra hipótesis de trabajo) o entre la prueba inmediata y la prueba demorada.

Pero en ambos casos es necesario determinar si las diferencias encontradas son solamente atribuibles a los influjos del azar o responden a una distinción real conseguida por el texto leído o por el procedimiento empleado.

Para resolver del modo más rápido este primer problema es necesario, mejor dicho conveniente, verificar las pruebas de homogeneidad de las medias obtenidas. Si los resultados confirman la existencia de dicha homogeneidad hemos de atribuir las diferencias a las variaciones fortuitas, si los resultados nos obligan a rechazar el supuesto de la homogeneidad empezaremos a suponer que algunos de

TABLA III.—Comprensión y velocidad lectoras en dos textos de autores contemporáneos.

Autor A		Autor B		Cuadrados			
Compresión	Velocidad	Compresión	Velocidad				
X_1	X_2	Y_1	Y_2	X_1^2	X_2^2	Y_1^2	Y_2^2
50	62	58	67	2 500	3.844	3.364	4.489
61	69	63	75	3.721	4.761	3.969	5.625
48	51	48	52	2.304	2.601	2.304	2.704
76	71	78	75	5.776	5.041	6.084	5.625
64	78	69	72	4.096	6.084	4.761	5.184
37	46	40	42	1 369	2.116	1.600	1.764
72	70	70	73	5.184	4.900	4.900	5.329
59	65	62	76	3 481	4 225	3.844	5.776
63	71	64	72	3.969	5.041	4.096	5.184
58	68	63	69	3.364	4.624	3.969	4.761
49	52	49	50	2.401	2.704	2.401	2.500
66	70	74	73	4.356	4.900	5.476	5.329
$\Sigma =$ 703	773	738	796	42.521	50.841	46.768	54 270
$(\Sigma)^2$ 494.209	597.529	544.644	633.616	$\Sigma\ \Sigma x_1, y_1, x_2, y_2 = 3.010$			

los procedimientos, textos o autores son científicamente superior a otro u otros.

A efectos de mejor aclaración del procedimiento ofrecido en esta nota, presentamos en las tablas tres y cuatro los valores obtenidos en los cuatro grupos de doce sujetos empleados para estudiar la prueba. Los ofrecemos sin ninguna variación aunque indiquemos la conveniencia de transformar los datos originales mediante restas que faciliten las elevaciones al cuadrado cuando deseemos hacerlo sin tabla ni máquinas de calcular.

Los números 40, 50 ó 60 serían los empleados, según los casos para facilitar las operaciones. (V. Tabla III en la pág. anterior.)

Veamos el procedimiento empleado en la tabla III para determinar la homogeneidad de las medias. 1.º Se totalizan los resultados de los sujetos sometidos a las diferentes pruebas (elección aleatoria).

Nos da las diferentes sumas Σ : 703, 773, 738 y 796. 2.º Se hallan las medias de cada grupo (Tabla I) para evitar operaciones complejas en caso de práctica igualdad. 3.º Se elevan al cuadrado tanto las puntuaciones de cada sujeto como los totales de columnas 4.º Se totalizan todas las columnas de cuadrados (42.521; 50.841; 46.768 y 54.270). 5.º Se totaliza la suma de los cuadrados de los totales de las columnas de puntuación (494.209; 597.529; 544 644 y 633.616). 6.º Se eleva al cuadrado la suma de todas las puntuaciones obtenidas $(3.010^2) = 9.060.100$.

Con estos valores obtenidos se procede a la determinación de la homogeneidad de las medias con el siguiente proceder:

1.º Se determina la suma de cuadrados total (es decir la suma de los cuadrados de las diferencias entre todas las puntuaciones y la puntuación media general). Para ellos el procedimiento que da lugar a menos divisiones es el siguiente: Se totalizan todos los cuadrados de las puntuaciones obtenidas:

$$50^2 + 61^2 + \ldots + 62^2 + \ldots + 58^2 + \ldots + 67^2 + \ldots + 73^2 = 194.400$$

(Lo que podríamos haber obtenido sumando los totales de las cuatro columnas 42.521 + ... + 54.270). Al total se le resta el cociente de dividir el cuadrado de la suma de todas las puntuaciones obtenidas entre el número de sujetos (9.060.100 : 48) = 187.652,08. Obtenemos así 194.400 — 187.652,08 = 6.747,92.

2.º Se determina la suma de cuadrados entre las medias. (Suma de cuadrados de las diferencias entre las puntuaciones medias de cada columna y la media general por el número de sujetos en cada grupo). Esto se puede llevar a cabo con los datos de la tabla III y sin más que introducir la siguiente serie de operaciones: Suma de los cuadrados de los totales de las columnas originales (494.209 + ... + 633.616) y división del total entre 12 = 189.166,5. Resta del mismo número $3.010^2 : 48$. Lo que nos da: 414,42.

3.º Determinación de la suma de cuadrados dentro de cada grupo de textos (total de la suma de los cuadrados de las diferencias entre las puntuaciones de cada grupo y su media particular). Se averigua de modo sencillo por la diferencias entre la suma de cuadrados total y la suma de cuadrados entre las medias. Se contrasta o comprueba calculando la suma de cuadrado para cada grupo y sumando los totales. En nuestro caso el proceso ordinario sería

$$6.747,92 - 414,42 = 6.333,50$$

4.º Preparar la tabla IV para el estudio fácil de las varianzas.

TABLA IV.—Análisis de varianza en el estudio de la homogeneidad de las medias sobre lectura de textos.

Origen de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Hipótesis
Entre grupos.....	414,42	3	138,14		Aceptada
Dentro de los grupos	6.333,50	44	143,99	1,04	
Total.....	6.747,92	47			

Para reducir el sesgo muestral se determina la varianza dividiendo entre los grados de libertad. Los grados de libertad entre las medias son 3 y dentro de los grupos N — k, es decir, 44.

5.º Se comparan los cuadrados medios entre grupos o medias y los internos a los grupos en la inteligencia de que su igualdad estadística supone indiferenciación entre las medias. En nuestro caso la F toma sentido contrario y de escaso valor por lo que se acepta la hipótesis de igualdad de medias aritmética. F es el cociente entre los dos cuadrados medios y ha de ser mayor que 1 (igual en una sola posibilidad) conforme las tablas elaboradas por Snedecor.

De nuestro estudio concluímos la inconveniencia de seguir los análisis ya que las diferencias entre las cuatro medias son atribuibles a las variaciones aleatorias propias de la diversidad muestral. Luego en principio no existe superioridad entre los diversos componentes a estudios; autores, comprensión y velocidad.

Aunque las diferencias de la tabla II son mayores a las de la ta-

TABLA V.—Enseñanza sin y con gráficos.

Sin gráficos		Con gráficos		Cuadrados			
Demorado	Inmediato	Demorado	Inmediato				
X_1	X_2	Y_1	Y_2	X_1^2	X_2^2	Y_1^2	Y_2^2
39	65	53	68	1.521	4 225	2.809	4.624
51	73	59	77	2 601	5.329	3.481	5.929
36	55	46	53	1.296	3.025	2.116	2.809
65	77	73	79	4.225	5.929	5.329	6.241
52	80	65	78	2 704	6.400	4.225	6.084
28	46	37	45	784	2 116	1.366	2.025
61	72	66	76	3.721	5.184	4.356	5 776
49	68	58	81	2.401	4.624	3.364	6.561
52	76	60	80	2.704	5.776	3.600	6.400
48	71	58	73	2.304	5.041	3 364	5 329
40	53	45	52	1 600	2 809	2 025	2 704
55	74	70	77	3.025	5.476	4 900	5 929
$\Sigma =$ 576	810	690	839	28 886	55 934	40.938	60.411
$(\Sigma)^2$=331.776	656.100	476.100	703.921	$\Sigma\ \Sigma x_1, y_1, x_2, y_2 = 2.915$			

Total = 186.169 — 177.025,52 = 9.143,48
Entre = 180.658,09 — 177.025,52 = 3.632,57
Dentro = 9.143,48 — 3.632,57 = 5.510,91

bla I deben ser contrastadas por el mismo camino. En las tablas V y VI ofrecemos los datos originales y el análisis de varianza aplicado a las medias. Los cálculos son similares y la F obtenida es 9,63. Más con una F que nos da $n_1 = 3$ y $n_2 = 44$ (n_1 y n_2 son los grados de libertad de los cuadrados medios comparados y con numerador el de mayor cuantía) los niveles al 5 y al 1 °/₀ son 2,82 y 4,26. Luego podemos rechazar la hipótesis de homogeneidad de medias.

TABLA VI.—Análisis de varianza en el estudio de la homogeneidad de las medias sobre enseñanza con y sin gráficos.

Origen de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Hipótesis
Entre grupos.....	3.632,57	3	1.210,86	9,67	Rechazada
Dentro de los grupos...........	5.510,91	44	125,25		
Total.....	9.143,48	47			

Científicamente sabemos que alguna de las medias obtenidas es francamente diferenciable del promedio general. (Tablas V y VI.)

Más si a la diferencia de media se une heterogeneidad de varianzas no estamos capacitados para intentar el análisis del experimento con las conclusiones pertinentes.

Partimos para su determinación de la suma de cuadrados dentro de los grupos obtenida como contraste de la resta. En nuestro caso se actuaría así: 28.886 — (331.776 : 12) nos da suma de cuadrados

TABLA VII.—Homogeneidad de varianzas en la enseñanza sin y con gráficos.

Grupo	n	n - 1	s^2	Log. s^2
1	12	11	112,55	2,05135
2	12	11	114,45	2,05864
3	12	11	114,82	2,06008
4	12	11	159,17	2,20187
			500,99	8,37194

$$\frac{\Sigma\, s^2}{r} = \frac{500,99}{4} = 125,25 \qquad \log.\ 125,25 = 2,09776$$

$$2,09776 \times 4 = 8,39104$$

$$8,39104 - 8,37194 = 0,01910$$

$2,3026 \times 11 \times 0,0191 = 0,50578$ (No es necesario aplicar fórmula de corrección).

en primera columna. La diferencia entre 11 (grados de libertad) da 112,55.

Repetido el proceso de las cuatro columnas obtenemos el siguiente cuadro estadístico para determinar la homogeneidad de varianza. A pesar de que en nuestro caso es claramente apreciable debemos actuar de un modo riguroso. (Tabla VII.)

Los pasos a seguir en esta tabla son:

1.° Determinar la varianza de cada grupo o procedimiento. Suma de cuadrados entre grados de libertad: 112,55···

2.° Hallar el logaritmo decimal de las varianzas (2,05135···).

3.° Totalizar las varianzas y los logaritmos. (500,99; 8,37194).

4.° Hallar el logaritmo de: suma de varianzas — entre número de grupos (2,09776).

5.° Multiplicar dicho logaritmo por el número de grupos (8,39104).

6.° Restar este producto de la suma de logaritmos anterior. (0,01910).

7.° Multiplicación de dicha diferencia por 2,3026 (log. 10) y por el número de elementos en cada grupo menos 1 (0,50578).

8.° Para evaluar el resultado de la χ^2 hallada se considerará con un número de grados de libertad igual al número de grupos menos 1 (Niveles al 5 y 1 °/o : 7,815 y 11,345).

9.° Si el valor es significativo se corrige con la fórmula:

$$\chi^2 = \chi^2 \,/\, 1 + \frac{4+1}{3 \times 4 \times 11} = \chi^2 \,/\, 1{,}038$$

En su expresión matemática es:

$$\chi^2 \,/\, 1 + \frac{r+1}{3\,r\,(n-1)}$$

De este modo comprobamos que la variación de los valores de las varianzas de los diferentes grupos cae dentro del margen atribuido al muestreo fortuito.

Estos resultados nos permiten continuar el análisis de las varianzas. En este análisis se intenta determinar la superioridad de un método sobre otro y la superioridad en recuerdos inmediatos sobre los demorados. Igualmente se busca el influjo interactivo de método y duración.

Para averiguar el influjo del modo de presentación (sin gráficos y con gráficos) se determinan la suma de cuadrados correspondientes al modo de presentación:

$$\frac{(\Sigma X_{1+2})^2}{2 \times 12} + \frac{(\Sigma Y_{1+2})^2}{2 \times 12} - \frac{(\Sigma X)^2}{N} = \frac{(576 + 810)^2}{24} + \frac{(690 + 839)}{24} -$$

$$- \frac{(2915)^2}{48} = 426{,}02.$$

Para terminar el influjo de la duración entre enseñanza y prueba: Se aplica la misma fórmula con diferentes totales:

$$\frac{(576 + 690)^2}{24} + \frac{(810 + 839)^2}{24} - \frac{2.915^2}{48} = 3.056{,}02$$

La interacción se calcula fácilmente por simple resta:

Al total de la suma de cuadrados entre grupos o medias (3.632,57) se le resta la suma de las dos anteriores (426,02 + 3056,02).

La comprobación interactiva se realiza del siguiente modo:

$$\frac{[(576 + 839) - (802 + 690)]^2}{48}$$

Con estos resultados preparamos la tabla completa de análisis de varianza VIII.

TABLA VIII.—Análisis de varianza completo sobre la explicación con y sin gráfico.

Origen de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Hipótesis
Modo presentación	426,02	1	426,02	3,40	Aceptada
Intervalo prueba. .	3.056,02	1	3.056,02	24,40	Rechazada
Interacción: modo × intervalo.	150,53	1	150,53	1,20	Aceptada
Dentro de los grupos	5.510,91	44	125,25		
Total.	9.143,48	47			

En esta tabla advertimos tres elementos no existentes en las que hemos resumido para la homogeneidad de medias y cada uno con un grado de libertad mientras se mantiene la correspondiente a «dentro de los grupos». Se mantiene porque el cuadrado medio dentro de los grupos representa el término apropiado para probar la significación de los otros cuadrados medios (algunas excepciones pudieran ser consideradas, pero ahora está fuera de lugar su mención).

Al interpretar esta tabla concluiríamos:

1.° Aunque el modo de presentación parece ser favorable a la enseñanza con gráfico, el valor encontrado de F no es suficiente para justificar científicamente la superioridad de un método sobre otro. (4,06 y 7,24 son los niveles al 5 y al 1 %).

2.° Puede afirmarse que la retención del material aprendido cuando se deja un lapso de tiempo considerable es normalmente menor.

3.° El influjo de la interacción (modo de presentación-tiempo) no es significativo.

De este modo y con pocos sujetos en cada una de las formas hemos podido llevar a efecto un estudio que con sistema antiguo exigiría una serie de experimentos con mayor coste y retraso en las conclusiones.

El diseño factorial favorece de este modo las indagaciones psicodidácticas. Por otra parte puede ser aumentado a más factores con tal de seguir una marcha que en esencia es la que hemos indicado para el conjunto 2 × 2. Siempre las agrupaciones se realizan de modo que coincidan los resultados de situaciones similares. El número de interacciones aumenta conforme se acrecenta el número de matices o variantes factoriales.

JOSÉ FERNÁNDEZ HUERTA
Colaborador Científico en Ciencias Filosóficas
del C. S. I. C.