



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

Enseñanza de Geometría
en 4º de ESO usando
GeoGebra como recurso
didáctico

Presentado por: Marcos García Navarro
Línea de investigación: Métodos pedagógicos (Matemáticas)
Director/a: Pedro Viñuela Villa

Ciudad: Getafe
Fecha: 5 de junio de 2014

Resumen

El presente trabajo desarrolla una propuesta didáctica basada en *GeoGebra* para la enseñanza de Geometría a los alumnos de Matemáticas de 4º de la ESO opción B. Para ello, en el marco teórico, se analiza en primer lugar el estado actual de los conocimientos matemáticos de los alumnos de educación secundaria en España, a través de la revisión de diversos informes internacionales y se revisa el currículo de la asignatura atendiendo a la legislación nacional y autonómica de la Comunidad de Madrid. En segundo lugar se profundiza en aspectos relativos al bloque de Geometría, la importancia que tienen en la adquisición de las competencias básicas y las dificultades que se observan en su aprendizaje. A continuación, por medio de un estudio de campo realizado mediante un cuestionario a profesores de un centro público y otro concertado se trata, por un lado, de confirmar los aspectos teóricos anteriores y, por otro, de averiguar el grado de utilización de recursos basados en las TIC, como *GeoGebra*, y si su empleo ayuda a resolver las dificultades de aprendizaje citadas. La propuesta didáctica se centra en los contenidos en los que según el estudio de campo se producen más dificultades, utilizando *GeoGebra* como complemento a los recursos tradicionales para resolverlas. Finalmente, se señalan como líneas de investigación futura el hacer extensiva esta metodología a otros bloques de la asignatura y a otros cursos.

Palabras clave: educación secundaria, geometría, recursos educativos, TIC, problemas de aprendizaje.

Abstract

This work develops an educational proposal for teaching Geometry to Math students of 4th grade of secondary education, option B, using *GeoGebra*. To do this, in the theoretical framework, it is first analyzed the present state of mathematical knowledge of secondary students in Spain, through the review of various international reports. The curriculum of the course is reviewed as well, taking into account the state and regional legislation of the Community of Madrid. Secondly, it focuses on issues relating to Geometry, the importance they have to acquire basic skills and the difficulties encountered in their learning. Then, by means of a field study using a questionnaire to teachers of a public and a state-subsidized school is, first, to confirm the above theoretical aspects and secondly, to ascertain the degree of utilization of ICT based resources, such as *GeoGebra*, and whether their use helps solve the above mentioned learning difficulties. The proposal focuses on teaching the content in which the field study shows more difficulties, using *GeoGebra* as a complement to traditional resources. Finally, extending this methodology to other blocks of the course and other courses are indicated as lines for future research.

Keywords: secondary education, geometry, educational resources, ICT tools, learning problems.

Índice de contenidos

1.	Introducción.....	6
2.	Planteamiento del problema.....	8
2.1.	Objetivos.....	8
2.2.	Metodología.....	9
2.3.	Justificación de la bibliografía utilizada.....	10
3.	Marco teórico.....	12
3.1.	Situación de las Matemáticas en España.....	12
3.1.1.	El informe PISA.....	12
3.1.2.	El informe TIMSS.....	15
3.2.	Marco legislativo.....	18
3.2.1.	La Ley Orgánica de Educación (LOE).....	18
3.2.2.	La Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)	19
3.2.3.	El Real Decreto 1631/2006.....	19
3.2.4.	El Decreto 23/2007.....	20
3.3.	Geometría.....	22
3.3.1.	Importancia de la Geometría.....	22
3.3.2.	Dificultades en el aprendizaje de la Geometría.....	24
3.4.	GeoGebra.....	25
3.4.1.	¿Qué es GeoGebra?.....	25
3.4.2.	Evolución de GeoGebra.....	26
3.4.3.	Breve descripción del modo de empleo del programa.....	29
3.5.	Otras aplicaciones similares.....	31
3.5.1.	Wiris.....	31
3.5.2.	Cabri.....	33
4.	Estudio de campo.....	35
4.1.	Introducción.....	35
4.2.	Contextualización.....	35
4.3.	Metodología.....	36
4.3.1.	Justificación del cuestionario propuesto.....	36
4.4.	Resultados del estudio de campo.....	39
4.4.1.	Distribución de los profesores encuestados.....	39
4.4.2.	Distribución de los profesores encuestados por sexos en cada tipo de centro.....	39
4.4.3.	Dedicación a los distintos contenidos del bloque de Geometría... 40	
4.4.4.	Contenidos del bloque de Geometría más trabajados en clase..... 41	
4.4.5.	Valoración media sobre los contenidos del bloque de Geometría que más cuesta trabajar en clase.....	42
4.4.6.	Contenidos del bloque de Geometría que más cuesta trabajar en clase.....	42
4.4.7.	Valoración media sobre los contenidos del bloque de Geometría que más cuesta aprender a los alumnos.....	43
4.4.8.	Contenidos del bloque de Geometría que más cuesta aprender a los alumnos.....	44
4.5.	Análisis de los resultados.....	45
5.	Propuesta didáctica.....	47
5.1.	Introducción.....	47
5.2.	Objetivos.....	47
5.3.	Metodología.....	50
5.3.1.	Contenidos.....	50
5.3.2.	Recursos metodológicos y materiales.....	50
5.3.3.	Actividades y temporalización.....	51
6.	Aportaciones del trabajo.....	54
7.	Discusión.....	55

8.	Conclusiones	56
9.	Limitaciones del trabajo.....	58
10.	Líneas de investigación futuras.....	59
11.	Referencias bibliográficas	60
11.1.	Referencias bibliográficas	60
11.2.	Bibliografía complementaria	62
12.	Anexos.....	63
12.1.	Actividad de la 6ª sesión de la propuesta didáctica.....	63
12.2.	Actividad de la 11ª sesión de la propuesta didáctica.....	66
12.3.	Cuestionario	68
12.4.	Tabulación de los resultados del cuestionario	70

Índice de tablas

Tabla N° 1. Rendimiento medio en matemáticas.	13
Tabla N° 2. Rendimiento medio en las distintas sub-áreas de matemáticas en el informe PISA 2003.	14
Tabla N° 3. Rendimiento medio en matemáticas entre los participantes de PISA 2012 a nivel nacional y regional en el informe PISA 2012.	15
Tabla N° 4. Distribución del rendimiento matemático (4º grado).	16
Tabla N° 5. Rendimiento en las distintas áreas de contenido matemático (4º grado).	17
Tabla N° 6. Competencias básicas.	20
Tabla N° 7. Contribución de las matemáticas a la adquisición de las competencias básicas.	21
Tabla N° 8. Contenidos del bloque de Geometría en 4º de ESO, opción B... ..	22
Tabla N° 9. Tipos de tareas a desarrollar en Geometría.	25
Tabla N° 10. Habilidades a desarrollar en Geometría.	25
Tabla N° 11. Versiones de GeoGebra y principales características.	27
Tabla N° 12. Justificación del cuestionario propuesto.	37
Tabla N° 13. Objetivos curriculares de la propuesta.	48
Tabla N° 14. Objetivos didácticos de la propuesta según las competencias básicas.	49
Tabla N° 15. Contenidos de la unidad didáctica de Geometría analítica.	50
Tabla N° 16. Organización del grupo clase.	51
Tabla N° 17. Recursos materiales.	51

Índice de figuras

Figura N° 1. Interfaz del programa GeoGebra..	29
Figura N° 2. Representación gráfica de objetos y su correspondencia algebraica..	30
Figura N° 3. Elementos de la barra de herramientas de GeoGebra 4.4 desplegados.	30
Figura N° 4. Interfaz habitual de Wiris.	32
Figura N° 5. Interfaz de Wiris con varias ventanas gráficas abiertas.	33
Figura N° 6. Interfaz habitual de Cabri.	34
Figura N° 7. Definición de los vectores.	63
Figura N° 8. Vector suma.	64
Figura N° 9. Construcción gráfica del vector suma.	65
Figura N° 10. Posición relativa de las rectas en el caso a).....	66
Figura N° 11. Posición relativa de las rectas en el caso b).....	67

Índice de gráficos

Gráfico N° 1. Distribución de los profesores encuestados por sexo y tipo de centro.	39
Gráfico N° 2. Distribución de los profesores encuestados por sexo en cada tipo de centro.	39
Gráfico N° 3. Dedicación a los distintos contenidos del bloque de Geometría.	40
Gráfico N° 4. Contenidos del bloque de Geometría más trabajados en clase.	41
Gráfico N° 5. Valoración media sobre los contenidos del bloque de Geometría que más cuesta trabajar en clase.	42
Gráfico N° 6. Contenidos del bloque de Geometría que más cuesta trabajar en clase.	42
Gráfico N° 7. Valoración media sobre los contenidos del bloque de Geometría que más cuesta aprender a los alumnos.	43
Gráfico N° 8. Contenidos del bloque de Geometría que más cuesta aprender a los alumnos.	44

1. Introducción

Los resultados de numerosos estudios e informes reflejan las dificultades que los alumnos españoles de secundaria encuentran en el aprendizaje de las matemáticas. Así, los informes PISA (Programme for International Student Assessment) correspondientes a los años 2003 y 2012 arrojan unos resultados en competencia matemática prácticamente invariables de 485 y 484 puntos, respectivamente, por debajo de la media de los países de la OCDE. Conclusiones similares se extraen del informe TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) de 2011, pues si bien España no participó en las pruebas para alumnos de 2º de la ESO, se puede extrapolar el resultado para alumnos de 4º de Educación Primaria en competencia matemática que se sitúa en 482 puntos, siendo la media de los países participantes en el estudio de 500 puntos.

En apartados posteriores de este trabajo se hace referencia a datos concretos de estos informes y de los análisis que sobre ellos se han realizado, intentando exponer las causas de estas dificultades. No obstante, como avance se puede decir que, de acuerdo con el informe PISA de 2012, la motivación de los alumnos para aprender matemáticas está en la media, pero su interés es bajo y pocos disfrutan estudiando la materia. Otros datos interesantes aportados por el informe son que el porcentaje de alumnos que se pone nervioso resolviendo problemas de matemáticas es del 41% frente al 30% en el conjunto de los países de la OCDE y que un 74% piensan que cuando fallan es porque no se les dan bien las matemáticas frente a un 58% en los países de la OCDE. Así pues, el aprendizaje se ve dificultado por la ansiedad y la falta de confianza.

De acuerdo con algunos autores (Skemp, 1986, Human, Oliver y Murray, 1991, citados en Mato Vázquez, 2010), debido a la naturaleza acumulativa del conocimiento matemático, un alumno que no tiene éxito durante la educación primaria, tiene pocas posibilidades de tenerlo en la Educación Secundaria. Por tanto, la falta de una base sólida, impide que los aprendizajes posteriores sean significativos y a medida que se asciende en los cursos escolares, el interés por la asignatura decrece (Mato Vázquez, 2010).

Por otra parte, parece probable que la metodología empleada para impartir la asignatura, consistente, por lo general, en la explicación de los conceptos en la pizarra tradicional y la realización de ejercicios del libro en clase y/o en casa, y la posterior resolución de los mismos en el encerado por parte del profesor o de algún alumno, no sea motivadora, o en palabras de la propia Mato Vázquez (2010) “hoy, utilizar el libro de texto, la libreta, el lápiz, la pizarra y la tiza no resulta motivador

para unos alumnos, que tienen ante sí materiales y tecnologías que les ofrecen otras posibilidades y alternativas” (p. 24).

Es por ello que, dado el interés que los alumnos muestran por los dispositivos móviles y las nuevas tecnologías, se ha pensado proponer una metodología didáctica basada en el uso de *GeoGebra*, “un software matemático dinámico libre y multiplataforma para todos los niveles de educación que une en un único paquete fácil de usar geometría, álgebra, tablas, gráficos, estadística y cálculo” (International GeoGebra Institute, 2013, p. 1), en ordenadores y tabletas para abordar los contenidos del bloque de Geometría de la opción B de Matemáticas de 4º de la ESO.

2. Planteamiento del problema

Como ha quedado expuesto en el apartado anterior, los resultados de los alumnos españoles en Matemáticas, en general, y en el bloque de Geometría específicamente distan de la media de los países más desarrollados. Por tanto, como profesores, debemos plantearnos qué acciones podemos poner en práctica para mejorar esta situación.

Los niños nacidos hoy en día son nativos digitales. Las formas de aprendizaje y la reproducción de los conocimientos están cambiando continuamente y ello debido en buena parte a la irrupción de las TIC.

Basándonos en la naturalidad con que los alumnos manejan los soportes digitales, ¿podemos pensar que el uso de estas tecnologías y en concreto de aplicaciones como *GeoGebra* pueden facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría? ¿Pueden resultar estas herramientas motivadoras para los alumnos?

El objeto de este trabajo es tratar de responder a estas cuestiones, a partir de la identificación de los problemas que los alumnos encuentran para aprender los contenidos curriculares dados por la legislación, comprobando la versatilidad de aplicaciones matemáticas como *GeoGebra*.

2.1. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es:

Desarrollar y fundamentar una metodología didáctica para la enseñanza del bloque de Geometría a los alumnos de la opción B de Matemáticas de 4º de ESO basada en el uso de GeoGebra.

Como objetivos específicos, el presente trabajo tiene los que se relacionan a continuación:

- Analizar la situación actual del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y valorar la incorporación de cambios metodológicos para facilitar dicho proceso
- Describir los contenidos específicos que integran el bloque de Geometría de 4º de ESO, opción B de acuerdo a la normativa estatal y de la Comunidad Autónoma de Madrid.
- Estudiar las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en 4º de la ESO.

- Comparar los contenidos y prestaciones de la aplicación *GeoGebra* con los de otros softwares similares (Wiris, Cabri) para la unidad didáctica de Geometría.

2.2. Metodología

En la realización de este trabajo se ha empleado una metodología que se apoya en primer lugar en una investigación bibliográfica y en segundo término en un trabajo de campo consistente en la realización de entrevistas a profesores de matemáticas de institutos públicos y centros concertados de la Comunidad de Madrid para obtener información sobre su experiencia docente, en especial, sobre los problemas que encuentran en la enseñanza de la Geometría, las dificultades de aprendizaje que observan en los alumnos y sus experiencias, si las tuvieran, con el software propuesto o con otros similares, de modo que nos sirva de base para la elaboración y fundamentación adecuada de la propuesta didáctica.

La revisión bibliográfica, que queda reflejada en el Marco teórico, ha tenido como fuentes principales la biblioteca de la UNIR y el buscador Google Académico. También se ha revisado el catálogo de la Red de Bibliotecas Públicas de Getafe y el de la Universidad Carlos III de esta localidad. Esta revisión bibliográfica se ha centrado en tres puntos clave para el desarrollo del trabajo:

- a) Situación actual de la enseñanza de las matemáticas en España. Para ello se han revisado los principales informes internacionales, en concreto, los informes PISA correspondientes a los años 2003 y 2012 y el informe TIMSS de 2011. Asimismo, se han revisado artículos y textos sobre los problemas del aprendizaje de las matemáticas para tener por un lado una visión de la situación de las matemáticas en nuestro país y por otro, de las causas que la provocan.
- b) Marco legislativo de la Educación Secundaria. Se ha partido de la legislación más general: LOE y LOMCE de la que se toman los principios generales y los objetivos y principios metodológicos, para llegar a la más concreta en cuanto a contenidos curriculares, competencias y objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria tanto a nivel estatal como autonómico de la Comunidad de Madrid. Se han revisado el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria y el Decreto 23/2007, de 10 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.
- c) Por último, se ha revisado bibliografía específica referida a la Geometría, las TIC y su uso para abordar este bloque y, específicamente, a *GeoGebra*,

la aplicación matemática en la que se basa la propuesta, en la doble vertiente de la descripción del software y de su uso en la práctica docente, mediante experiencias concretas en diversos centros. En este sentido cabe destacar la valiosa aportación de blogs de profesores de educación secundaria que comparten su trabajo a través de la red.

En cuanto al trabajo de campo, éste ha consistido en la realización de una encuesta a los profesores de matemáticas de un instituto público y de un colegio concertado: el IES Mariano José de Larra de Madrid y el colegio La Inmaculada de Getafe, ambos situados en la Comunidad de Madrid. Se trata de un sencillo cuestionario que recoge información sobre los contenidos del bloque de Geometría, el conocimiento de software matemático, y el uso del mismo para impartir este bloque, en particular de la aplicación objeto de este trabajo, la valoración que los docentes hacen de ella y el impacto que tiene en el aprendizaje de los alumnos y en su motivación. La elección de un cuestionario con preguntas cerradas como método para esta investigación se ha debido a la facilidad para realizar este tipo de encuestas, la comodidad para los encuestados a la hora de responderlas y la concreción de los resultados obtenidos para su posterior tratamiento estadístico. En el apartado correspondiente se aportan más detalles sobre el proceso de realización de las encuestas: cuándo se hicieron, cómo se facilitaron los formularios a los profesores, cómo se realizó la recogida, etc.

2.3. Justificación de la bibliografía utilizada

Para la realización de este trabajo, primero se ha estudiado la realidad de la educación de las matemáticas en nuestro país a partir de los resultados de informes internacionales. En concreto se han revisado los informes PISA (Program for International Student Assessment) 2003 y 2012, años en los que el foco de los mismos estuvo puesto en las matemáticas, y el informe TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) correspondiente al año 2011.

En segundo lugar se ha recabado información sobre la normativa referente a los contenidos curriculares, objetivos y competencias que se desarrollan en la asignatura de Matemáticas de 4º de la ESO, opción B, y en concreto en el bloque de Geometría. Para ello se han revisado la LOE (Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación), la LOMCE (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa), el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria para el conjunto del Estado y el Decreto 23/2007 de 10 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

En tercer lugar, ha sido importante documentarse sobre aspectos de la didáctica de la geometría para lo que se han consultado los trabajos *La enseñanza de la geometría* de García Peña y López Escudero (2008), *Caracterización de las actividades de geometría que proponen los textos de matemáticas* de Abrate, Delgado y Pochulu (2006) y *Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza* de Pérez y Soler (2008). Para las matemáticas en general se ha acudido a *Mejorar las actitudes hacia las matemáticas* de Mato Vázquez (2010). Estos trabajos han permitido ver las tendencias actuales en la docencia de la geometría y los problemas para su aprendizaje.

En cuarto lugar, en relación con las TIC y con el software matemático, en especial con *GeoGebra*, se ha revisado el siguiente material: *Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra* de Hohenwarter, Jones (2007), *GeoGebra: la eficiencia de la intuición* de Losada (2007) y *Experiencias docentes. Visualización de lugares geométricos mediante el uso de software de geometría dinámica GeoGebra* de Sánchez Muñoz (2011). A través de estos textos así como de los tutoriales de los programas analizados se ha podido profundizar en estas aplicaciones.

3. Marco teórico

Como ya se ha comentado en apartados anteriores, la situación de las matemáticas en España se encuentra por debajo de los niveles medios de los países de la OCDE. Así pues, dentro del marco teórico conviene en primer lugar presentar los resultados de los informes internacionales que avalan esta afirmación.

Por otra parte, puesto que el objeto de este trabajo es la Geometría de 4º de la ESO y la aplicación de una metodología basada en *GeoGebra* para su enseñanza, otros dos son los aspectos que deben contemplarse dentro de este apartado: el primero es la normativa que determina los principios, objetivos, contenidos y competencias que deben desarrollar los alumnos en la enseñanza secundaria y el segundo, el que hace referencia a las metodologías didácticas basadas en TIC, especialmente *GeoGebra*. Por tanto, se incluye una descripción de esta aplicación y de sus principales características, así como ejemplos de experiencias llevadas a cabo con este software.

3.1. Situación de las Matemáticas en España

3.1.1. El informe PISA

El Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes o informe PISA es un estudio llevado a cabo por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) cada 3 años, en el que mediante la realización de unas pruebas estandarizadas a alumnos de 15 años se analiza su rendimiento en competencias consideradas clave: lectora, matemática y científica. La elección de alumnos de esta edad responde a la experiencia que ya tienen en el sistema educativo.

España viene participando en este programa desde el primer estudio realizado en el año 2000, que se centró en la competencia lectora. No obstante los datos que aquí se presentan son los de los informes correspondientes a los años 2003 y 2012, años en los que el foco del informe estuvo puesto en las matemáticas, con el objeto de ver la evolución de los resultados y establecer comparaciones.

Como se observa en la Tabla N° 1 adjunta, el rendimiento medio de España en matemáticas en 2003 se situó en 485 puntos, lo que la situaba en el puesto 26 de 41 participantes, 15 puntos por debajo de la media de los países de la OCDE.

Tabla N° 1. Rendimiento medio en matemáticas.

	Media	E.T.	S.		Media	E.T.	S.	
1	Hong Kong-China*	550	(4,5)	^	21	Eslovaquia	498 (3,3)	-
2	Finlandia	544	(1,9)	^	22	Noruega	495 (2,4)	-
3	Corea	542	(3,2)	^		Cataluña	494 (4,7)	-
4	Holanda	538	(3,1)	^	23	Luxemburgo	493 (1,0)	-
5	Liechtenstein*	536	(4,1)	^	24	Polonia	490 (2,5)	-
6	Japón	534	(4,0)	^	25	Hungría	490 (2,8)	-
7	Canadá	532	(1,8)	^	26	España	485 (2,4)	-
8	Bélgica	529	(2,3)	^	27	Letonia*	483 (3,7)	-
9	Macao-China*	527	(2,9)	^	28	Estados Unidos	483 (2,9)	-
10	Suiza	527	(3,4)	^	29	Rusia*	468 (4,2)	v
11	Australia	524	(2,1)	^	30	Portugal	466 (3,4)	v
12	Nueva Zelanda	523	(2,3)	^	31	Italia	466 (3,1)	v
13	República Checa	516	(3,5)	^	32	Grecia	445 (3,9)	v
14	Islandia	515	(1,4)	^	33	Serbia*	437 (3,8)	v
15	Dinamarca	514	(2,7)	^	34	Turquía	423 (6,7)	v
16	Francia	511	(2,5)	^	35	Uruguay*	422 (3,3)	v
17	Suecia	509	(2,6)	^	36	Tailandia*	417 (3,0)	v
18	Austria	506	(3,3)	^	37	México	385 (3,6)	v
	Castilla y León	503 (4,0)	^		38	Indonesia*	360 (3,9)	v
19	Alemania	503	(3,3)	^	39	Túnez*	359 (2,5)	v
20	Irlanda	503	(2,4)	^	40	Brasil*	356 (4,8)	v
	Pais Vasco	502 (2,8)	^			Promedio OCDE	500 (0,6)	

E.T. Error típico

S. Significatividad de la diferencia con España

^

más alta

v

más baja

Los países con asterisco no son miembros de la OCDE

Nota: Rendimiento medio en matemáticas. Informe PISA 2003. Fuente: MEC (2003).

Las sub-áreas matemáticas evaluadas en dicho informe fueron: espacio y forma (Geometría), cambio y relaciones (Álgebra), cantidad (Aritmética) e incertidumbre (Estadística). En la Tabla N°2 se presentan los resultados en cada una de estas sub-áreas y se observa que es precisamente en Geometría donde los resultados de España son más bajos, cifrándose en 476 puntos frente a los 496 de la media de los países de la OCDE.

Tabla N° 2. Rendimiento medio en las distintas sub-áreas de matemáticas en el informe PISA 2003.

Espacio y forma	Cambio y relaciones			Cantidad			Incertidumbre					
	Media	E.T.	S.	Media	E.T.	S.	Media	E.T.	S.			
1 Hong Kong-China*	558	(4,8)	^	1 Holanda	551 (3,1)	^	1 Finlandia	549 (1,8)	^	1 Hong Kong-China* 558	(4,6)	^
2 Japón	553	(4,3)	^	2 Corea	548 (3,5)	^	2 Hong Kong-China*	545 (4,2)	^	2 Holanda	549 (3,0)	^
3 Corea	552	(3,8)	^	3 Finlandia	543 (2,2)	^	3 Corea	537 (3,0)	^	3 Finlandia	545 (2,1)	^
4 Suiza	540	(3,5)	^	4 Hong Kong-China*	540 (4,7)	^	4 Liechtenstein*	534 (4,1)	^	4 Canadá	542 (1,8)	^
5 Finlandia	539	(2,0)	^	5 Liechtenstein*	540 (3,7)	^	5 Macao-China*	533 (3,0)	^	5 Corea	538 (3,0)	^
6 Liechtenstein*	538	(4,6)	^	6 Canadá	537 (1,9)	^	6 Suiza	533 (3,1)	^	6 Nueva Zelanda	532 (2,3)	^
7 Bélgica	530	(2,3)	^	7 Japón	536 (4,3)	^	7 Bélgica	530 (2,3)	^	7 Macao-China*	532 (3,2)	^
8 Macao-China*	528	(3,3)	^	8 Bélgica	535 (2,4)	^	8 Holanda	528 (3,1)	^	8 Australia	531 (2,2)	^
9 República Checa	527	(4,1)	^	9 Nueva Zelanda	526 (2,4)	^	9 Canadá	528 (1,8)	^	9 Japón	528 (3,9)	^
10 Holanda	526	(2,9)	^	10 Australia	525 (2,3)	^	10 República Checa	528 (3,5)	^	10 Islandia	528 (1,5)	^
11 Nueva Zelanda	525	(2,3)	^	11 Suiza	523 (3,7)	^	11 Japón	527 (3,8)	^	11 Bélgica	526 (2,2)	^
12 Australia	521	(2,3)	^	12 Francia	520 (2,6)	^	12 Australia	517 (2,1)	^	12 Liechtenstein*	523 (3,7)	^
13 Canadá	518	(1,8)	^	13 Macao-China*	519 (3,5)	^	13 Dinamarca	516 (2,6)	^	13 Irlanda	517 (2,6)	^
14 Austria	515	(3,5)	^	14 República Checa	515 (3,5)	^	14 Alemania	514 (3,4)	^	14 Suiza	517 (3,3)	^
15 Dinamarca	512	(2,8)	^	15 Islandia	509 (1,4)	^	15 Suecia	514 (2,5)	^	15 Dinamarca	516 (2,8)	^
16 Francia	508	(3,0)	^	16 Dinamarca	509 (3,0)	^	16 Islandia	513 (1,5)	^	16 Noruega	513 (2,6)	^
17 Eslovaquia	505	(4,0)	^	17 Alemania	507 (3,7)	^	17 Austria	513 (3,0)	^	17 Suecia	511 (2,7)	^
18 Islandia	504	(1,5)	^	18 Irlanda	506 (2,4)	^	18 Eslovaquia	513 (3,4)	^	Castilla y León	510 (3,9)	^
19 Alemania	500	(3,3)	^	19 Suecia	505 (2,9)	^	País Vasco	511 (2,9)	^	Francia	506 (2,4)	^
20 Suecia	498	(2,6)	^	20 Austria	500 (3,6)	^	Nueva Zelanda	511 (2,2)	^	País Vasco	503 (2,9)	^
Castilla y León	498	(4,4)	^	País Vasco	499 (2,9)	^	Castilla y León	508 (4,1)	^	República Checa	500 (3,1)	-
País Vasco	493	(2,5)	^	Castilla y León	498 (4,7)	^	Francia	507 (2,5)	^	Cataluña	496 (5,0)	-
21 Polonia	490	(2,7)	^	21 Hungría	485 (3,1)	^	Cataluña	506 (4,4)	^	20 Austria	494 (3,1)	-
22 Luxemburgo	488	(1,4)	^	22 Eslovaquia	494 (3,5)	^	21 Irlanda	502 (2,5)	-	21 Polonia	494 (2,3)	-
23 Letonia*	486	(4,0)	-	23 Noruega	488 (2,6)	-	22 Luxemburgo	501 (1,1)	^	22 Alemania	493 (3,3)	-
24 Noruega	483	(2,5)	-	Cataluña	488 (5,4)	-	23 Hungría	496 (2,7)	-	23 Luxemburgo	492 (1,1)	-
Cataluña	482 (4,8)	-	24 Letonia*	487 (4,4)	-	24 Noruega	494 (2,2)	-	24 Estados Unidos	491 (3,0)	-	
25 Hungría	479 (3,3)	-	25 Luxemburgo	487 (1,2)	-	25 España	492 (2,5)	-	25 Hungría	489 (2,6)	-	
26 España	476 (2,6)	-	26 Estados Unidos	486 (3,0)	-	26 Polonia	492 (2,5)	-	26 España	489 (2,4)	-	
27 Irlanda	476 (2,4)	-	27 Polonia	484 (2,7)	-	27 Letonia*	482 (3,6)	-	27 Eslovaquia	476 (3,2)	v	
28 Rusia*	474 (4,7)	-	28 España	481 (2,8)	-	28 Estados Unidos	476 (3,2)	-	28 Letonia*	474 (3,3)	v	
29 Estados Unidos	472 (2,8)	-	29 Rusia*	477 (4,6)	-	29 Italia	475 (3,4)	-	29 Portugal	471 (3,4)	v	
30 Italia	470 (3,1)	-	30 Portugal	468 (4,0)	-	30 Rusia*	472 (4,0)	-	30 Italia	463 (3,0)	v	
31 Portugal	450 (3,4)	v	31 Italia	452 (3,2)	v	31 Portugal	466 (3,5)	v	31 Grecia	458 (3,5)	v	
32 Grecia	437 (3,8)	v	32 Grecia	436 (4,3)	v	32 Serbia*	456 (3,8)	v	32 Turquía	443 (6,2)	v	
33 Serbia*	432 (3,9)	v	33 Turquía	423 (7,6)	v	33 Grecia	446 (4,0)	v	33 Rusia*	436 (4,0)	v	
34 Tailandia*	424 (3,3)	v	34 Serbia*	419 (4,0)	v	34 Uruguay*	430 (3,2)	v	34 Serbia*	428 (3,5)	v	
35 Turquía	417 (6,3)	v	35 Uruguay*	417 (3,6)	v	35 Tailandia*	415 (3,1)	v	35 Tailandia*	423 (2,5)	v	
36 Uruguay*	412 (3,0)	v	36 Tailandia*	405 (3,4)	v	36 Turquía	413 (6,8)	v	36 Uruguay*	419 (3,1)	v	
37 México	382 (3,2)	v	37 México	364 (4,1)	v	37 México	394 (3,9)	v	37 México	390 (3,3)	v	
38 Indonesia*	361 (3,7)	v	38 Tónex*	337 (2,8)	v	38 Tónex*	364 (2,8)	v	38 Indonesia*	385 (2,9)	v	
39 Tónex*	359 (2,6)	v	39 Indonesia*	334 (4,6)	v	39 Brasil*	360 (5,0)	v	39 Brasil*	377 (3,9)	v	
40 Brasil*	350 (4,1)	v	40 Brasil*	333 (6,0)	v	40 Indonesia*	357 (4,3)	v	40 Tónex*	363 (2,3)	v	
Promedio OCDE	496	(0,6)		Promedio OCDE	499	(0,7)	Promedio OCDE	501	(0,6)	Promedio OCDE	502	(0,6)

E.T. Error típico

S. Significatividad de la diferencia con España ^ más alta v más baja

Los países con asterisco no son miembros de la OCDE

Nota: Rendimiento medio en las distintas sub-áreas de matemáticas en el informe PISA 2003. Fuente: MEC (2003).

En 2012, el informe PISA tuvo como foco nuevamente la competencia matemática. El número de participantes se elevó a los 34 miembros de la OCDE más otros 31 países, que representaban en total el 80% de la economía mundial. En la Tabla N°3 de la página siguiente se observa que el rendimiento de España en matemáticas en 2012 permanece prácticamente invariable respecto al de 2003, alcanzando un resultado de 484 puntos, significativamente por debajo de los 494 puntos de la media de los países de la OCDE.

Tabla N° 3. Rendimiento medio en matemáticas entre los participantes de PISA 2012 a nivel nacional y regional en el informe PISA 2012.

Mathematics performance among PISA 2012 participants, at national and regional levels [Part 2/2]

	Mean score	Range of ranks			Mean score	Range of ranks	
		All countries/economies				All countries/economies	
		Upper rank	Lower rank			Upper rank	Lower rank
Italy	485	30	35	Espírito Santo (Brazil)	414		
Spain	484	31	36	Nayarit (Mexico)	414		
Perm Territory region (Russian Federation)	484			Mexico	413	53	54
Russian Federation	482	31	39	San Luis Potosí (Mexico)	412		
Slovak Republic	482	31	39	Guanajuato (Mexico)	412		
United States	481	31	39	Tlaxcala (Mexico)	411		
Lithuania	479	34	40	Tamaulipas (Mexico)	411		
Sweden	478	35	40	Sinaloa (Mexico)	411		
Puglia (Italy)	478			Fujairah (United Arab Emirates)	411		
Tasmania (Australia)	478			Quintana Roo (Mexico)	411		
Hungary	477	35	40	Yucatán (Mexico)	410		
Abruzzo (Italy)	476			Montenegro	410	54	56
Balearic Islands (Spain)	475			Uruguay	409	53	56
Lazio (Italy)	475			Zacatecas (Mexico)	408		
Andalusia (Spain)	472			Mato Grosso do Sul (Brazil)	408		
Croatia	471	38	41	Rio Grande do Sul (Brazil)	407		
Wales (United Kingdom)	468			Costa Rica	407	54	56
Florida (United States)	467			Hidalgo (Mexico)	406		
Israel	466	40	41	Manizales (Colombia)	404		
Molise (Italy)	466			São Paulo (Brazil)	404		
Basilicata (Italy)	466			Paraná (Brazil)	403		
Dubai (UAE)	464			Ajman (United Arab Emirates)	403		
Murcia (Spain)	462			Minas Gerais (Brazil)	403		
Extremadura (Spain)	461			Veracruz (Mexico)	402		
Sardegna (Italy)	458			Umm Al Quwain (United Arab Emirates)	398		
Greece	453	42	44	Campeche (Mexico)	396		
Campania (Italy)	453			Paraíba (Brazil)	395		
Northern territory (Australia)	452			Albania	394	57	59
Serbia	449	42	45	Medellín (Colombia)	393		
Turkey	448	42	46	Bogotá (Colombia)	393		
Sicilia (Italy)	447			Brazil	391	57	60
Romania	445	43	47	Rio de Janeiro (Brazil)	389		
Cyprus ^{1,2}	440	45	47	Argentina	388	57	61
Sharjah (United Arab Emirates)	439			Tunisia	388	57	61
Bulgaria	439	45	49	Jordan	386	59	62
Aguascalientes (Mexico)	437			Piauí (Brazil)	385		
Nuevo León (Mexico)	436			Sergipe (Brazil)	384		
Jalisco (Mexico)	435			Rondônia (Brazil)	382		
Querétaro (Mexico)	434			Rio Grande do Norte (Brazil)	380		
United Arab Emirates	434	47	49	Goiás (Brazil)	379		
Kazakhstan	432	47	50	Cali (Colombia)	379		
Calabria (Italy)	430			Tabasco (Mexico)	378		
Colima (Mexico)	429			Ceará (Brazil)	378		
Chihuahua (Mexico)	428			Colombia	376	62	64
Distrito Federal (Mexico)	428			Qatar	376	62	64
Thailand	427	49	52	Indonesia	375	62	65
Durango (Mexico)	424			Bahia (Brazil)	373		
Chile	423	50	52	Chiapas (Mexico)	373		
Morelos (Mexico)	421			Mato Grosso (Brazil)	370		
Abu Dhabi (United Arab Emirates)	421			Peru	368	64	65
Malaysia	421	50	52	Guerrero (Mexico)	367		
Coahuila (Mexico)	418			Tocantins (Brazil)	366		
Ciudad Autónoma de Buenos Aires (Argentina)	418			Pernambuco (Brazil)	363		
Mexico (Mexico)	417			Roraima (Brazil)	362		
Federal District (Brazil)	416			Amapá (Brazil)	360		
Ras Al Khaimah (United Arab Emirates)	416			Pará (Brazil)	360		
Santa Catarina (Brazil)	415			Acre (Brazil)	359		
Puebla (Mexico)	415			Amazonas (Brazil)	356		
Baja California (Mexico)	415			Maranhão (Brazil)	343		
Baja California Sur (Mexico)	414			Alagoas (Brazil)	342		

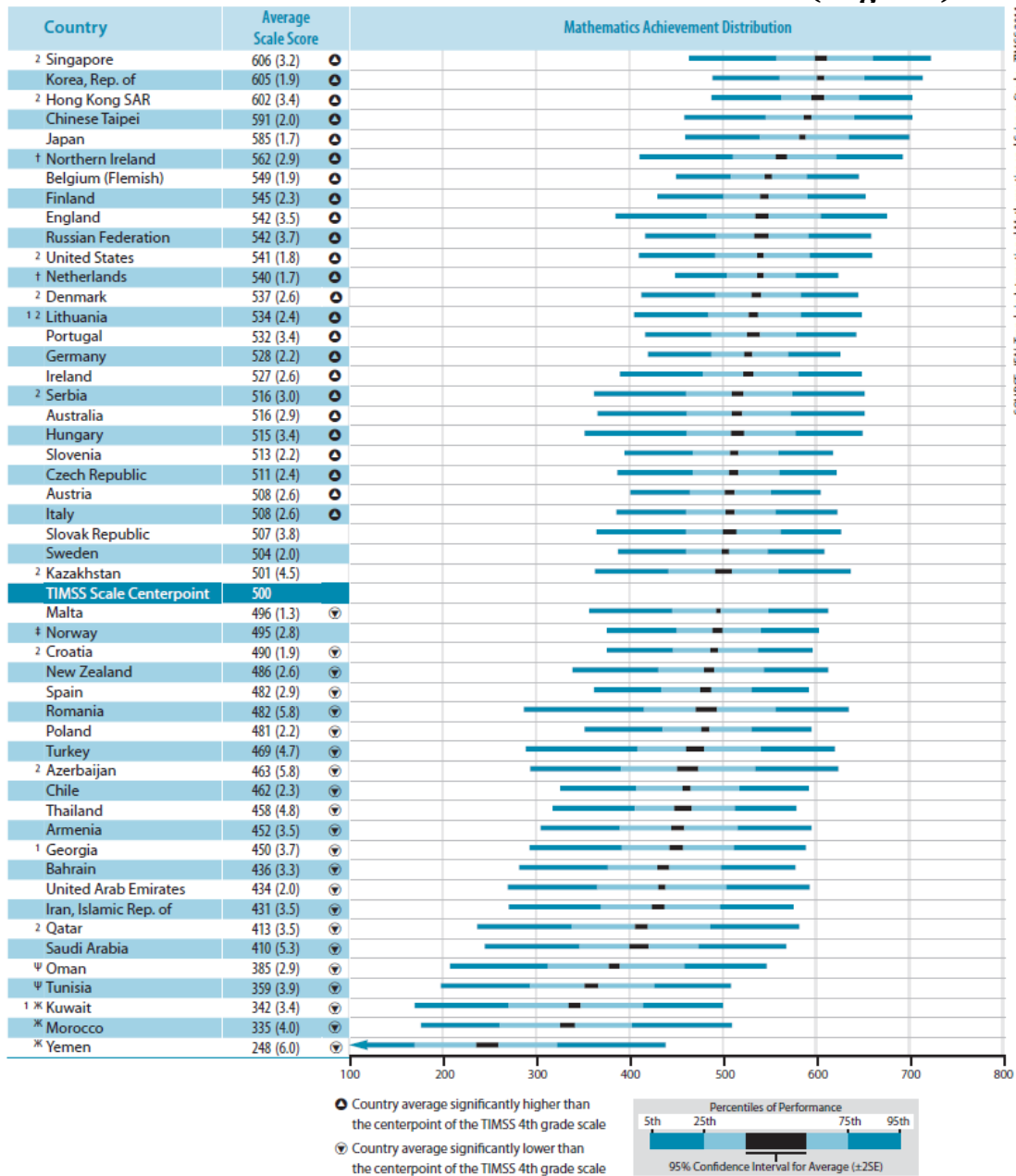
Nota: Rendimiento medio en matemáticas entre los participantes de PISA 2012 a nivel nacional y regional en el informe PISA 2012. Fuente: OECD (2013).

3.1.2. El informe TIMSS

El Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias o informe TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) es una evaluación realizada cada cuatro años a los alumnos de 4º y 8º grado, equivalentes a 4º de primaria y 2º de ESO, sobre conocimientos de las asignaturas de matemáticas y ciencias. La Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA) es el organismo que se encarga de realizar este informe. Esta asociación está formada por agencias gubernamentales e instituciones dedicadas a la investigación de los cerca de setenta países que la componen.

En la siguiente tabla se presentan los resultados en matemáticas de los alumnos de 4º de educación primaria en el informe TIMSS correspondiente al año 2011.

Tabla N° 4. Distribución del rendimiento matemático (4º grado).



Nota: Distribución del rendimiento matemático (4º grado). Fuente: IEA (2011).

España no participó en las pruebas para alumnos de 2º de la ESO en esta convocatoria, pero asumiendo los resultados de los alumnos de 4º de primaria como representativos de la media de los alumnos españoles, se observa que, al igual que en el informe PISA, los resultados de nuestros estudiantes quedan por debajo de la media de los participantes que se establece en 500 puntos, obteniendo un resultado de 482 puntos.

Tabla N° 5. Rendimiento en las distintas áreas de contenido matemático (4° grado).

Country	Overall Mathematics Average Scale Score	Number		Geometric Shapes and Measures		Data Display	
		Average Scale Score	Difference from Overall Mathematics Score	Average Scale Score	Difference from Overall Mathematics Score	Average Scale Score	Difference from Overall Mathematics Score
² Singapore	606 (3.2)	619 (3.4)	13 (0.8) ●	589 (3.6)	-17 (1.5) ☹	588 (3.4)	-18 (1.7) ☹
Korea, Rep. of	605 (1.9)	606 (2.0)	1 (1.6)	607 (1.7)	2 (1.4)	603 (1.9)	-2 (2.0)
² Hong Kong SAR	602 (3.4)	604 (3.3)	3 (1.0) ●	605 (3.4)	3 (0.9) ●	593 (3.6)	-8 (2.1) ☹
Chinese Taipei	591 (2.0)	599 (2.0)	8 (1.2) ●	573 (2.1)	-19 (1.3) ☹	600 (2.6)	9 (1.6) ●
Japan	585 (1.7)	584 (1.6)	-1 (0.9)	589 (2.0)	4 (1.1) ●	590 (2.9)	4 (2.9)
[†] Northern Ireland	562 (2.9)	566 (2.9)	4 (1.6) ●	560 (3.3)	-2 (2.1)	555 (3.0)	-8 (1.5) ☹
Belgium (Flemish)	549 (1.9)	552 (2.2)	2 (1.4)	552 (2.0)	3 (1.0) ●	536 (3.0)	-13 (2.0) ☹
Finland	545 (2.3)	545 (2.3)	0 (0.9)	543 (2.9)	-2 (2.2)	551 (3.5)	5 (3.2)
England	542 (3.5)	539 (3.7)	-3 (1.1) ☹	545 (3.9)	3 (1.6)	549 (4.6)	7 (2.9) ●
Russian Federation	542 (3.7)	545 (3.3)	3 (1.4) ●	542 (4.3)	-1 (1.5)	533 (4.1)	-9 (2.3) ☹
² United States	541 (1.8)	543 (2.0)	2 (0.9) ●	535 (2.2)	-6 (0.8) ☹	545 (1.8)	4 (1.1) ●
[†] Netherlands	540 (1.7)	543 (1.7)	3 (1.1) ●	524 (2.9)	-16 (2.6) ☹	559 (2.9)	19 (1.7) ●
² Denmark	537 (2.6)	534 (2.4)	-3 (0.9) ☹	548 (3.0)	11 (2.0) ●	532 (3.0)	-5 (1.5) ☹
^{1 2} Lithuania	534 (2.4)	537 (2.4)	4 (1.1) ●	531 (3.0)	-3 (1.9)	526 (3.0)	-7 (2.0) ☹
Portugal	532 (3.4)	522 (3.7)	-10 (1.6) ☹	548 (4.4)	16 (2.2) ●	548 (2.8)	16 (2.0) ●
Germany	528 (2.2)	520 (2.3)	-8 (0.7) ☹	536 (2.6)	8 (1.1) ●	546 (2.8)	18 (1.6) ●
Ireland	527 (2.6)	533 (2.6)	5 (1.4) ●	520 (3.1)	-7 (1.6) ☹	523 (2.8)	-4 (2.0) ☹
² Serbia	516 (3.0)	529 (3.0)	13 (1.4) ●	497 (3.8)	-19 (1.6) ☹	503 (3.8)	-13 (2.0) ☹
Australia	516 (2.9)	508 (3.2)	-8 (1.0) ☹	534 (3.0)	18 (1.6) ●	515 (3.1)	-1 (2.2)
Hungary	515 (3.4)	515 (3.2)	0 (1.2)	520 (3.6)	5 (1.3) ●	510 (4.2)	-5 (1.7) ☹
Slovenia	513 (2.2)	503 (2.7)	-10 (2.0) ☹	526 (2.3)	13 (1.6) ●	532 (2.6)	19 (1.8) ●
Czech Republic	511 (2.4)	509 (2.5)	-2 (1.3)	513 (3.0)	2 (1.4)	519 (3.1)	8 (1.4) ●
Austria	508 (2.6)	506 (2.5)	-2 (1.1)	512 (3.4)	4 (1.4) ●	515 (3.1)	7 (1.6) ●
Italy	508 (2.6)	510 (2.7)	2 (1.6)	513 (3.1)	5 (1.0) ●	495 (3.1)	-13 (1.8) ☹
Slovak Republic	507 (3.8)	511 (3.7)	5 (1.5) ●	500 (4.3)	-7 (1.5) ☹	504 (4.6)	-3 (2.1)
Sweden	504 (2.0)	500 (2.2)	-4 (0.8) ☹	500 (2.4)	-4 (1.3) ☹	523 (3.0)	20 (1.9) ●
² Kazakhstan	501 (4.5)	515 (4.1)	14 (1.1) ●	491 (5.3)	-10 (1.8) ☹	476 (5.7)	-25 (1.9) ☹
Malta	496 (1.3)	498 (1.9)	2 (1.7)	487 (1.5)	-9 (1.5) ☹	498 (1.6)	2 (2.0)
[†] Norway	495 (2.8)	488 (3.1)	-7 (1.9) ☹	507 (3.0)	12 (1.7) ●	494 (3.2)	-1 (2.3)
² Croatia	490 (1.9)	491 (1.8)	1 (0.9)	490 (2.5)	0 (1.3)	488 (2.7)	-2 (2.1)
New Zealand	486 (2.6)	483 (2.5)	-3 (0.8) ☹	483 (2.5)	-3 (1.5) ☹	491 (2.7)	5 (1.2) ●
Spain	482 (2.9)	487 (3.0)	4 (1.1) ●	476 (3.0)	-6 (1.3) ☹	479 (3.6)	-3 (2.0)
Romania	482 (5.8)	497 (5.6)	15 (2.1) ●	469 (5.7)	-14 (1.9) ☹	457 (6.8)	-26 (3.5) ☹
Poland	481 (2.2)	480 (2.2)	-1 (1.1)	475 (2.7)	-6 (1.3) ☹	489 (2.9)	7 (1.7) ●
Turkey	469 (4.7)	477 (4.5)	7 (0.9) ●	447 (5.0)	-22 (1.3) ☹	478 (5.2)	9 (1.4) ●
² Azerbaijan	463 (5.8)	491 (5.3)	28 (1.3) ●	437 (7.3)	-26 (2.1) ☹	407 (6.4)	-55 (1.9) ☹
Chile	462 (2.3)	462 (2.7)	0 (1.6)	455 (3.0)	-6 (1.5) ☹	465 (2.5)	4 (1.8) ●
Thailand	458 (4.8)	464 (4.5)	6 (1.2) ●	437 (5.6)	-21 (2.0) ☹	467 (5.1)	9 (2.5) ●
Armenia	452 (3.5)	484 (3.2)	32 (1.4) ●	424 (4.2)	-28 (1.7) ☹	386 (4.9)	-66 (2.8) ☹
¹ Georgia	450 (3.7)	473 (3.1)	23 (1.5) ●	411 (4.3)	-39 (2.3) ☹	433 (4.0)	-18 (1.4) ☹
Bahrain	436 (3.3)	439 (3.0)	3 (1.1) ●	422 (3.9)	-14 (2.5) ☹	442 (4.1)	6 (2.0) ●
United Arab Emirates	434 (2.0)	438 (2.1)	4 (0.8) ●	418 (2.3)	-16 (0.7) ☹	437 (1.9)	3 (1.1) ●
Iran, Islamic Rep. of	431 (3.5)	440 (3.3)	9 (1.3) ●	435 (3.9)	4 (1.3) ●	397 (4.3)	-33 (2.0) ☹
² Qatar	413 (3.5)	417 (3.3)	4 (1.8) ●	399 (3.9)	-14 (2.5) ☹	416 (4.6)	3 (3.2)
Saudi Arabia	410 (5.3)	410 (5.7)	0 (2.1)	404 (6.4)	-6 (2.7) ☹	403 (6.0)	-7 (4.2)
^ψ Oman	385 (2.9)	384 (3.1)	-1 (1.3)	376 (3.3)	-9 (1.4) ☹	381 (3.1)	-4 (1.5) ☹
^ψ Tunisia	359 (3.9)	390 (3.7)	31 (1.7) ●	329 (4.6)	-30 (3.2) ☹	300 (5.5)	-60 (3.1) ☹
^{1 *} Kuwait	342 (3.4)	333 (4.1)	-9 (2.4) ☹	321 (4.2)	-21 (2.8) ☹	347 (3.8)	5 (2.2) ●
* Morocco	335 (4.0)	340 (3.8)	6 (2.5) ●	350 (4.0)	15 (1.5) ●	271 (4.7)	-64 (1.7) ☹
* Yemen	248 (6.0)	261 (6.4)	13 (2.7) ●	193 (6.5)	-55 (2.9) ☹	204 (6.0)	-44 (2.2) ☹

● Subscale score significantly higher than overall mathematics score

☹ Subscale score significantly lower than overall mathematics score

Nota: Rendimiento en las distintas áreas de contenido matemático (4° grado). Fuente: IEA (2011).

La tabla anterior muestra también que la peor nota se alcanza en el área de Geometría, calcando prácticamente los resultados del informe PISA.

A la vista de los resultados que los informes internacionales arrojan sobre el bloque de Geometría se ha considerado procedente realizar la propuesta metodológica sobre esta área, cuya inserción en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria se muestra en los siguientes apartados.

3.2. Marco legislativo

En este capítulo se revisan las disposiciones normativas por las que se rige la enseñanza en España, comenzando por las Leyes Orgánicas y concretándose el análisis en los Reales Decretos y Decretos referentes a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Madrid.

En el rubro de las leyes orgánicas se revisa también la LOMCE, a pesar de que su entrada en vigor para 4º de ESO no está prevista hasta el curso 2015-2016.

3.2.1. La Ley Orgánica de Educación (LOE)

En el capítulo III, artículo 6º, la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, define el currículo como “el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente Ley” (BOE núm. 106,2006, p. 17166).

Los principios generales de la Educación Secundaria Obligatoria están orientados a la adquisición por parte de los alumnos de los elementos básicos de la cultura en distintos ámbitos, entre otros en el científico y tecnológico (BOE núm. 106, 2006, p. 17169). En cuanto a los contenidos pedagógicos, se emplearán métodos que, teniendo en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje de los alumnos, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos (BOE núm. 106, 2006, p. 17170). Entre los objetivos que la Ley cita en su artículo 23, se encuentra “adquirir una preparación básica en el uso de las tecnologías” (BOE núm. 106, 2006, p. 17169).

La metodología que se presenta en este trabajo responde a los principios generales y pedagógicos así como a los objetivos mencionados.

Finalmente, junto con los objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación, se introducen con esta Ley las competencias básicas, cuyo origen se remonta a los informe Delors y DeSeCo (Definición y Selección de Competencias). Estas se analizan en el apartado correspondiente al Real Decreto 1631/2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

3.2.2. La Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) consiste en una modificación limitada de la Ley Orgánica de Educación atendiendo a las recomendaciones de la OCDE sobre las necesidad de plantear reformas de los sistemas educativos sobre la base de un marco de estabilidad de estos sistemas (BOE núm. 295, 2013, p. 97862).

El apartado XI del preámbulo de la Ley hace referencia a la tecnología como integrante histórica de la educación pero también como base para afrontar los retos educativos futuros. Considera que la incorporación de las TIC al sistema educativo “permitirá personalizar la educación y adaptarla a las necesidades y al ritmo de cada alumno o alumna” (BOE núm. 295, 2013, p. 97865), sirviendo de refuerzo y apoyo en casos de rendimiento bajo o permitiendo expandir los conocimientos de los alumnos con mejor rendimiento. Y más adelante, en la misma página concluye “las Tecnologías de la Información y la Comunicación serán una pieza fundamental para producir el cambio metodológico que lleve a conseguir el objetivo de mejora de la calidad educativa” (BOE núm. 295, 2013, p. 97865).

Las citas anteriores demuestran que la LOMCE apuesta decididamente por las Tecnologías de la Información y Comunicación y para ello añade un artículo dedicado a éstas, el 111 bis, en el que se hace referencia a entornos virtuales de aprendizaje que faciliten la aplicación de planes educativos específicos que contribuyan a la consecución de los objetivos específicos del currículo y a la extensión del concepto de aula tanto en el tiempo como en el espacio (BOE núm. 295, 2013, p. 97899).

3.2.3. El Real Decreto 1631/2006

El Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, establece las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. En la regulación de dichas enseñanzas son especialmente relevantes las competencias básicas que el alumnado debe alcanzar al finalizar la ESO. Además, el Real Decreto establece para cada materia el modo en que contribuye para el desarrollo de dichas competencias. (BOE núm. 5, 2007, p. 678).

Según se recoge en el Anexo I de este Real Decreto, estas competencias son las que los alumnos deben haber desarrollado “al finalizar la enseñanza obligatoria para poder lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida” (BOE. núm. 5, 2007, p. 685). El Real Decreto considera las ocho competencias básicas que se indican en la Tabla N° 6 siguiente.

Tabla N° 6. Competencias básicas.

Competencia	Alcance
1. <i>Competencia en comunicación lingüística.</i>	Se refiere a la utilización del lenguaje como elemento de comunicación oral y escrita, al tiempo que herramienta de comprensión y representación de la realidad.
2. <i>Competencia matemática.</i>	Se trata de la habilidad para el empleo de los números mediante sus operaciones básicas y el uso de símbolos y razonamientos matemáticos para producir e interpretar información y resolver problemas cotidianos.
3. <i>Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.</i>	Incorpora habilidades para desenvolverse de forma autónoma y con iniciativa propia en distintos ámbitos del mundo físico, tanto en sus aspectos naturales como generados por el hombre.
4. <i>Tratamiento de la información y competencia digital.</i>	Hace referencia a las habilidades para buscar, obtener, procesar y comunicar la información, transformándola en conocimiento.
5. <i>Competencia social y ciudadana.</i>	Son las habilidades de cooperación, convivencia y ejercicio democrático de la ciudadanía que hacen posible la comprensión de la realidad social en que se vive y contribuyen a su mejora.
6. <i>Competencia cultural y artística.</i>	Consiste en apreciar los hechos cultural y artístico mediante el conocimiento, la comprensión y la valoración crítica de sus manifestaciones, disfrutándolas y entendiéndolas como patrimonio de los pueblos. Tiene que ver con la iniciativa, la imaginación y la creatividad.
7. <i>Competencia para aprender a aprender.</i>	Disponer de habilidades para iniciarse en el aprendizaje y continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma en función de las propias necesidades y objetivos. Implica tener conciencia de las propias capacidades y de la competencia personal, así como curiosidad y perseverancia.
8. <i>Autonomía e iniciativa personal.</i>	Se refiere por un lado a la adquisición y aplicación de un conjunto de actitudes y valores como la responsabilidad, la perseverancia, la autocrítica y autoconocimiento, y por otro a la capacidad de elegir por uno mismo, de imaginar proyectos y de desarrollar planes tanto en el ámbito personal, como social y laboral.

Nota: Competencias básicas. Fuente: Elaboración propia a partir de BOE núm. 5 (2007, p. 685-690).

En cuanto a los fines y objetivos de la ESO expresados en este Real Decreto son coincidentes, como no puede ser de otra manera, con los de la LOE.

3.2.4. El Decreto 23/2007

De acuerdo con el Decreto 23/2007 de 10 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, esta etapa debe servir para que “los alumnos dominen las destrezas fundamentales del cálculo matemático, los fundamentos del desarrollo tecnológico o las lenguas” (BOCM núm. 126, 2007, p.48).

Como en el Real Decreto expuesto en el apartado anterior, los fines y objetivos de la educación secundaria obligatoria propuestos en el Decreto 23/2007 de 10 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, coinciden con los de la LOE (BOCM núm. 126, 2007, p.49).

Según se expone en el Anexo a este Decreto, en los cuatro cursos que componen la Educación Secundaria Obligatoria, la asignatura de matemáticas se divide en cinco bloques, además de un bloque de contenidos comunes que incluye la resolución de problemas, la capacidad de verbalizar los procesos que se siguen y la autoconfianza necesaria para interpretar, valorar y tomar decisiones sobre situaciones que requieren de soporte matemático. Los cinco bloques mencionados son: Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas y Estadística y probabilidad.

Este Decreto considera que la Geometría no consiste sólo en un conjunto de definiciones y fórmulas para calcular superficies y volúmenes, sino, sobre todo, en describir y analizar propiedades y relaciones y en clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas (BOCM núm. 126, 2007, p. 117).

Como se ha dicho en el punto anterior, uno de los principales objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria es la adquisición de las competencias básicas allí citadas. Atendiendo al Decreto 23/2007, desde el área de matemáticas se pueden abordar todas estas competencias como se expone en la tabla siguiente.

Tabla Nº 7. Contribución de las matemáticas a la adquisición de las competencias básicas.

Competencia	Contribución de las matemáticas
1. <i>Competencia en comunicación lingüística.</i>	Mediante su concepción como un área de expresión oral y escrita en la formulación y exposición de las ideas y a través de la consideración del propio lenguaje matemático como medio de transmisión de ideas en el que destacan la precisión de sus términos y su carácter sintético, simbólico y abstracto.
2. <i>Competencia matemática.</i>	Como es obvio, todo el currículo de la materia contribuye al desarrollo de esta competencia.
3. <i>Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.</i>	Esta es una de las competencias donde la Geometría, base de este trabajo, tiene mayor aportación, que queda plasmada a través de las relaciones y estructuras geométricas, la discriminación de las formas y la capacidad para transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio.
4. <i>Tratamiento de la información y competencia digital.</i>	Por medio de la incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico, tal y como se pretende demostrar con este trabajo.
5. <i>Competencia social y ciudadana.</i>	A través del uso de las matemáticas en la descripción de los fenómenos sociales y mediante la valoración de los puntos de vista ajenos cuando se enfocan con espíritu constructivo los errores cometidos en la resolución de problemas.
6. <i>Competencia cultural y artística.</i>	Además de que el mismo conocimiento matemático supone una expresión universal de la cultura, también en esta competencia, la Geometría juega un papel destacado al formar parte integral de la expresión artística de la humanidad.
7. <i>Competencia para aprender a aprender.</i>	Mediante el uso de técnicas heurísticas que constituyen modelos generales del tratamiento de la información y de razonamiento.
8. <i>Autonomía e iniciativa personal.</i>	A través de los procesos de resolución de problemas, pues se requiere una planificación y se utilizan estrategias que implican la toma de decisiones y la asunción de riesgos.

Nota: Contribución de las matemáticas a la adquisición de las competencias básicas. Fuente: Elaboración propia a partir de BOCM núm. 126 (2007, p. 118).

La materia de matemáticas se divide en 4º curso en dos opciones, A y B, siendo esta última más exigente al presentar contenidos más abstractos y tratar los temas con mayor profundidad, dando menos peso a la estadística y la probabilidad.

La propuesta que se hace en este trabajo se refiere a la Geometría de esta opción, cuyos contenidos de acuerdo al Decreto 23/2007 y al Real Decreto 1631/2006 se indican en la siguiente tabla.

Tabla N° 8. Contenidos del bloque de Geometría en 4º de ESO, opción B.

Real Decreto 1631/2006	Decreto 23/2007
Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	Figuras y cuerpos semejantes: razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras semejantes.
	Teorema de Tales. Aplicación al cálculo de medidas indirectas.
Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.	Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Resolución de triángulos rectángulos.
Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.	Uso de la calculadora para la obtención de ángulos y razones trigonométricas.
Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.	Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medidas de longitudes, áreas y volúmenes.
	Iniciación a la geometría analítica plana: coordenadas de un punto; distancia entre dos puntos. Representación de las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Nota: Contenidos del bloque de Geometría en 4º de ESO, opción B. Fuente: Elaboración propia a partir de BOE. núm. 5 (2007, p. 759) y BOCM núm. 126 (2007, p. 125).

3.3. Geometría

Tras mostrar los contenidos del bloque de Geometría de 4º de ESO opción B en el punto anterior, en este apartado se indica la importancia de la geometría y las dificultades que encuentran los alumnos en su aprendizaje.

3.3.1. Importancia de la Geometría

Etimológicamente, *geometría* significa medida de la tierra. Así pues, su origen fue eminentemente práctico, relacionado con la agrimensura. Sin embargo, a partir de los griegos su estudio ha pasado de tener únicamente esa función práctica a un alcance mucho mayor.

Dicho alcance y la importancia que se concede a la Geometría en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria quedan expuestos en el Decreto 23/2007 (BOCM núm. 126, 2007, p.126), donde al abordar la contribución de las matemáticas a la adquisición de las competencias básicas se hace referencia expresa a esta disciplina en varias ocasiones. En concreto, “el desarrollo de la visión espacial

y la capacidad para transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio” (BOCM núm. 126, 2007, p.118) contribuyen a profundizar en la competencia 3ª *Conocimiento e interacción con el mundo físico*. Por otra parte, “la incorporación de herramientas tecnológicas como recurso para el aprendizaje” tal como se pretende demostrar con este trabajo y “la interacción entre los distintos tipos de lenguaje” (BOCM núm. 126, 2007, p.118), concretamente el geométrico y el algebraico en nuestro caso a través del programa *GeoGebra*, son una manera de incidir en la competencia 4ª *Tratamiento de la información y competencia digital*. Asimismo, el lenguaje matemático con un “léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto” (BOCM núm. 126, 2007, p.118) favorece la competencia 1ª *Comunicación lingüística*, si bien ese carácter abstracto propio también de la Geometría supondrá, como veremos más adelante, una de las principales dificultades para su aprendizaje. Las matemáticas en general pero la Geometría en particular, son “parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras que ha creado” (BOCM núm. 126, 2007, p.118), fomentando la competencia 6ª *Cultural y artística*. Por último, huelga decir que todo el currículo y por tanto también el bloque de Geometría contribuye a la adquisición de la competencia 2ª *Matemática*.

Además de la contribución a la adquisición de las competencias básicas citadas en el Decreto 23/2007, García Peña y López Escudero (2008) citan otras razones para enseñar Geometría como la imbricación de esta ciencia con el entorno que nos rodea o la oportunidad de emprender un viaje hacia formas de pensamiento superiores a quien la aprende. Asimismo, resaltan que los aspectos informativos, caracterizados en los procesos de pensamiento que los alumnos desarrollan al aprender Geometría son tan importantes como los meramente formativos.

Alsina, Fortuny y Pérez (1997, citados en García Peña y López Escudero, 2008) expresan la importancia de esta disciplina mediante las respuestas a la pregunta de por qué enseñar Geometría que recogemos a continuación:

- Para conocer una rama de las Matemáticas más instructivas.
- Para cultivar la inteligencia.
- Para desarrollar estrategias de pensamiento.
- Para descubrir las propias posibilidades creativas.
- Para aprender una materia interesante y útil.
- Para fomentar una sensibilidad hacia lo bello.
- Para trabajar Matemáticas experimentalmente.
- Para agudizar la visión del mundo que nos rodea.
- Para gozar de sus aplicaciones prácticas.
- Para disfrutar aprendiendo y enseñando. (p. 31).

3.3.2. Dificultades en el aprendizaje de la Geometría

Como se constata en el estudio de Pérez y Guillén (2007) realizado sobre un grupo de 19 profesores, aquellos que manifestaron que no les gustaba la Geometría se referían a la dificultad que conlleva su enseñanza y aprendizaje como causa de esta opinión.

Según los profesores encuestados, parte de esta dificultad tiene su origen en la falta de conocimientos previos que los alumnos traen de la educación primaria. También señalan que no se estudia suficientemente en las aulas, en parte por su ubicación en el temario, más bien hacia el final del curso.

Además, en lugar de utilizar contextos cotidianos para su explicación y utilizar recursos para suavizar los problemas de imaginación espacial, como por ejemplo *GeoGebra*, la enseñanza de la Geometría cada vez se centra más en el “estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, y en construcciones de tipo mecanicista y completamente descontextualizadas” (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006, p. 1).

En este sentido, Ojeda, Medina y Peralta (citados en Abrate et al., 2006), “expresan que cualquier propuesta que se precie de ser efectiva para la enseñanza de la Geometría, debe considerar que el vínculo entre la visualización, la experimentación, el razonamiento lógico, la argumentación (comunicación matemática) y aplicación es insoluble” (p. 7), separándose de lo que se conoce como enseñanza ostensiva:

Mediante esta última expresión se alude a una cierta presentación de los objetos de enseñanza en la que todos los elementos y relaciones constitutivas de la noción prevista son proporcionados de un solo golpe por el profesor o el libro de texto. (Ratsimba-Rajohm, 2006, p.63).

De aquí, a nuestro modo de ver, la importancia del uso de las TIC y en particular de una aplicación como *GeoGebra*, con la que se facilitará la realización de las tareas, indicadas en la siguiente tabla, que a juicio de García Peña y López Escudero (2008) deben llevarse a cabo en clase para que los alumnos desarrollen su razonamiento geométrico, en particular de las dos primeras.

Tabla N° 9. Tipos de tareas a desarrollar en Geometría.

Tareas	Descripción
De conceptualización	<ul style="list-style-type: none">• Conceptualización de objetos geométricos.• Construcción de conceptos y relaciones geométricas.
De investigación	<ul style="list-style-type: none">• Indagación sobre características, propiedades y relaciones de los objetos geométricos.• Construcción de conocimiento significativo mediante la resolución de problemas.
De demostración	<ul style="list-style-type: none">• Elaboración de conjeturas o procedimientos para la resolución de problemas.• Demostración o explicación argumental sobre la veracidad de dichas conjeturas y procedimientos.

Nota: Tipos de tareas a desarrollar en Geometría. Fuente: Elaboración propia a partir de García Peña y López Escudero (2008, p. 32-47).

A través de las tareas anteriores se pueden desarrollar también una serie de habilidades que se recogen en la siguiente tabla.

Tabla N° 10. Habilidades a desarrollar en Geometría.

Habilidades	Descripción
Visuales	<ul style="list-style-type: none">• Visualización: primer contacto con el espacio físico.• La generalización de propiedades y caracterización de figuras no puede darse sólo a través de la visualización.
De comunicación	<ul style="list-style-type: none">• Interpretación, entendimiento y comunicación de la información geométrica de forma oral, escrita o gráfica.• Ciertas palabras del lenguaje geométrico pueden tener diferente significado en el uso cotidiano.
De dibujo	<ul style="list-style-type: none">• Reproducciones o construcciones gráficas de los objetos geométricos.• Riqueza didáctica de las actividades de trazo de figuras geométricas al promover la capacidad de análisis y la búsqueda de relaciones y propiedades en su construcción.
Lógicas o de razonamiento	<ul style="list-style-type: none">• Aprender a razonar y desarrollar el razonamiento.• Abstracción, argumentación, justificación, conjetura y demostración, hacer deducciones lógicas e identificar razonamientos no lógicos.
De aplicación o transferencia	<ul style="list-style-type: none">• Aplicación de lo aprendido a otros conceptos y disciplinas.

Nota: Habilidades a desarrollar en Geometría. Fuente: Elaboración propia a partir de García Peña y López Escudero (2008, p. 47-68).

3.4. GeoGebra

3.4.1. ¿Qué es GeoGebra?

En International GeoGebra Institute (2013), la página oficial de *GeoGebra*, se indica que *GeoGebra* es un software libre de matemática, para todos los niveles educativos, disponible en múltiples plataformas. Como se intuye por su propio nombre, combina la geometría y el álgebra simultáneamente, mediante representaciones gráficas y algebraicas de los objetos en dos ventanas que aparecen

en su interfaz: la vista algebraica, en la que aparecen las ecuaciones algebraicas y la vista geométrica, en la que se representa el objeto geométrico correspondiente.

Creado por Markus Hohenwarte, en 2001 en la Universidad de Salzburgo, actualmente lo continúa en la Universidad de Atlantic, en Florida.

Losada (2007) clasifica los programas matemáticos en dos categorías: la conocida como Sistemas de Álgebra Computacional (en inglés, CAS), en los que los comandos se introducen fundamentalmente a través del teclado, y la que denominaríamos Sistemas de Geometría Dinámica (DGS, en inglés), que permiten una introducción gráfica de objetos y su representación dinámica. En la primera categoría se incluyen programas como Derive, Mapple, Mathematica y MathLab mientras que en la segunda se encuentran Cabri o Cindirella.

GeoGebra une ambos sistemas de forma conjunta, y es aquí donde radica su principal ventaja pues la presentación simultánea de las representaciones gráficas y simbólicas le dota de un gran valor añadido.

Si bien se está preparando una versión 5.0 que permitirá construcciones tridimensionales de geometría espacial, actualmente se limita a la geometría plana, con la que se pueden realizar construcciones en la ventana gráfica mediante objetos iniciales (puntos, rectas, círculos, etc.) a los que se pueden agregar otros objetos dependientes (mediatrices, bisectrices o lugares geométricos en general).

Funcionando como Sistema de Algebra Computacional (CAS), "*Geogebra* es modesto, pues no hay que olvidar que la finalidad de este programa es facilitar el aprendizaje escolar" (Losada, 2007, sección 2, párr. 1). No obstante, se pueden introducir directamente expresiones numéricas, puntos, vectores, ecuaciones de rectas y cónicas, y funciones, a partir de las cuales, el programa es capaz de resolver sistemas, hallar las raíces de una función, o representar la función derivada y una primitiva. Aunque se pueden introducir los datos de este modo, *GeoGebra* no permite la representación simbólica de los resultados, que quedan reducidos a aproximaciones decimales. En cualquier caso, la verdadera potencia didáctica de este software se encuentra en la visualización simultánea de dos tipos diferentes de representación: la simbólica y la gráfica.

3.4.2. Evolución de GeoGebra

En la siguiente tabla se muestran las principales características de las distintas versiones de *GeoGebra* a partir de la información recopilada en International GeoGebra Institute (2013), la página oficial de *GeoGebra*.

Tabla N° 11. Versiones de GeoGebra y principales características.

Versión	Fecha de lanzamiento	Idiomas	Características matemáticas	Características tecnológicas
<i>GeoGebra 1.0</i>	2002	Inglés y alemán	<ul style="list-style-type: none"> Objetos disponibles: punto, vector, ángulo, número, recta sección cónica. 	<ul style="list-style-type: none"> Muestra/Ocultar objetos. Zoom de Acercamiento/Alejamiento. Modos: desplazamiento, relación, movimiento de zona gráfica. Menús contextuales para los objetos. Construcciones con el ratón. Selección de comandos de teclado. Opciones: unidad angular, gráficos.
<i>GeoGebra 2.0</i>	2004		<ul style="list-style-type: none"> Derivadas. Integrales. Función de traslación $f(x)$. Tangente de $f(x)$ en $x=a$. Funciones hiperbólicas (cosh, senh, tanh, acosh, asenh, atanh). Coordenadas de funciones $x()$, $y()$. 	<ul style="list-style-type: none"> Funciones de x (graficación). Mejor diagramación de ecuaciones. Mejor zoom.
<i>GeoGebra 3.0</i>	2009 (marzo)	39 idiomas	<ul style="list-style-type: none"> Polígonos regulares, curvas paramétricas, listas, casillas de controles. Nuevas herramientas: área, pendiente, longitud y perímetro. Secuencias e interpolaciones polinomiales. Numerosos comandos nuevos: Mín, Resto, Curvatura. 	<ul style="list-style-type: none"> Herramientas / Funciones de usuarios y determinación de la barra de herramientas. Facilidades para la exportación de páginas web, incluyendo barra de herramientas y de menús. Exportación de imágenes a pdf, svg, emf, pstricks. Ajuste almacenables, nuevas propiedades de diálogo.
<i>GeoGebra 3.2</i>	2009 (junio)	45 idiomas	<ul style="list-style-type: none"> Nuevas herramientas: compás, inversión circular, cónicas, mejor ajuste lineal, registro a hoja de cálculo. Comandos de funciones estadísticas y gráficos. Matrices y números complejos. 	<ul style="list-style-type: none"> Vista de Hoja de Cálculo (ver menú de "Vistas"). Animación automática de deslizadores (clic derecho para ordenar este comando al deslizador). Capas y colores dinámicos. Exporta a PGF/TikZ.

<i>GeoGebra 4.0</i>	2011	50 idiomas	<ul style="list-style-type: none"> • Nuevas Herramientas: análisis de datos, diagramación interactiva, calculadora de probabilidad, inspección de funciones. • Inecuaciones y ecuaciones implícitas. • Animación de puntos sobre rectas y curvas, límites dinámicos para deslizadores y ejes. 	<ul style="list-style-type: none"> • GeoGebraTube: para compartir con agilidad bocetos de trabajo (ver el menú "Archivo"). • GeoGebraPrim: interfaz especial para alumnos de primaria. • Interfaz de Uso: arrastre y desplaza, barra de estilo, apariencias, accesibilidad. • Copiar y Pegar, dos Vistas Gráficas. • Herramientas de texto ampliadas y disposición de ecuaciones mejorada. • Opciones de sombreado con rayados, texturas y/o imágenes. • Botones, casillas de entrada, guiones. • Exportación de GIF animados.
<i>GeoGebra 4.2</i>	2012	Nuevos Idiomas: Árabe (Túnez), Filipino, Indonesio, Idish, variantes del alemán de Bélgica y Países Bajos	<ul style="list-style-type: none"> • Vista CAS: nueva vista simbólica para operar con fracciones y variables literales. • Posibilidad de arrastrar una parábola conservando fijo su vértice al mantener pulsada la tecla Alt. • Vista CAS: nueva vista simbólica para operar con fracciones y variables literales. 	<ul style="list-style-type: none"> • Perspectivas barra lateral para adaptar con agilidad la interfaz de GeoGebra. • Velocidad: al reescribir extensos tramos de GeoGebra se le impuso una aceleración notoria. • GeoGebraTube: se pueden ejecutar las hojas dinámicas en tabletas vía iPad, Android y Chromebooks. • Herramientas nuevas y/o mejoradas como la del lápiz, mano alzada, borrador, polígono rígido, entre otras.
<i>GeoGebra 4.4</i>	2013	Idiomas anteriores + latviano	<ul style="list-style-type: none"> • Vista CAS más potente y ágil. 	<ul style="list-style-type: none"> • Conexión identificada para buscar y compartir materiales en GeoGebraTube. • Las aplicaciones web ahora cuentan también con Propiedades de Objetos y segunda Vista Gráfica. • GeoGebraTube respalda también materiales tanto privados y a compartir como los públicos y HTML5 aplicaciones-applets con múltiples vistas.

Nota: Versiones de GeoGebra y principales características. Fuente: Elaboración propia a partir de International GeoGebra Institute (2013).

3.4.3. Breve descripción del modo de empleo del programa

Como se ha comentado en apartados anteriores, *GeoGebra* es a un tiempo un sistema de álgebra computacional y un sistema de geometría dinámica. Por ello, su interfaz inicial se presenta de la siguiente forma:



Figura N^o 1. Interfaz del programa GeoGebra. Fuente: Elaboración propia.

Al arrancar el programa se presentan dos tipos de vistas por defecto:

- *Vista algebraica*: En ella se representan las ecuaciones o funciones así como las coordenadas de los elementos que aparecen en la vista gráfica.
- *Vista gráfica*: Es la ventana en el que se construyen los elementos gráficos como pueden ser puntos, rectas, cónicas, funciones, etc.

Por encima de estas dos vistas aparecen las barras de Menú y de Herramientas, mientras que por debajo puede ubicarse la de Navegación. También se pueden añadir otras vistas como la de cálculo simbólico (CAS) o la de hoja de cálculo.

Dependiendo de la ventana en la que nos encontremos, los datos se introducen de diferente forma. Así, en la Vista Gráfica, los datos se introducen por interacción del ratón en los elementos de la Barra de Herramientas, quedando

reflejadas las ecuaciones o las coordenadas que definen dichos elementos en la vista algebraica.

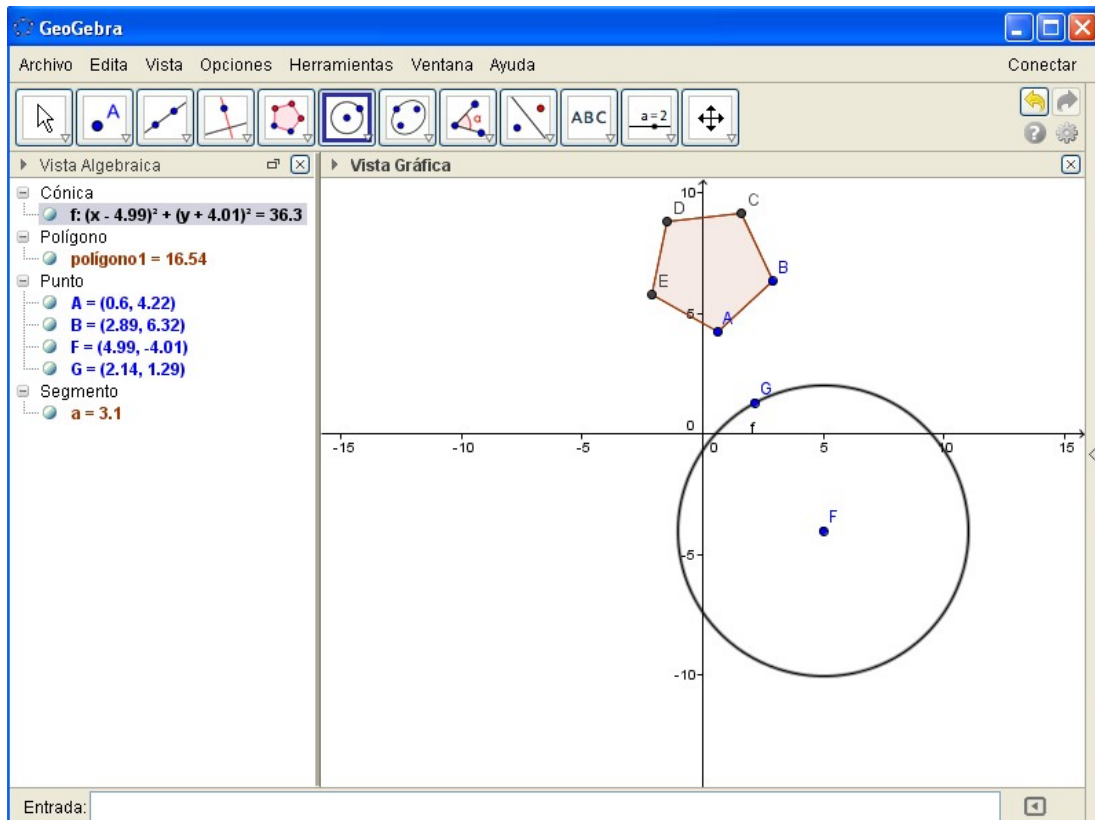


Figura N ° 2. Representación gráfica de objetos y su correspondencia algebraica.
Fuente: Elaboración propia.

Las herramientas se organizan por la índole de los objetos resultantes o por su funcionalidad. Cada icono de la Barra de Herramientas encabeza una colección de útiles semejantes, como se puede observar en la siguiente figura:

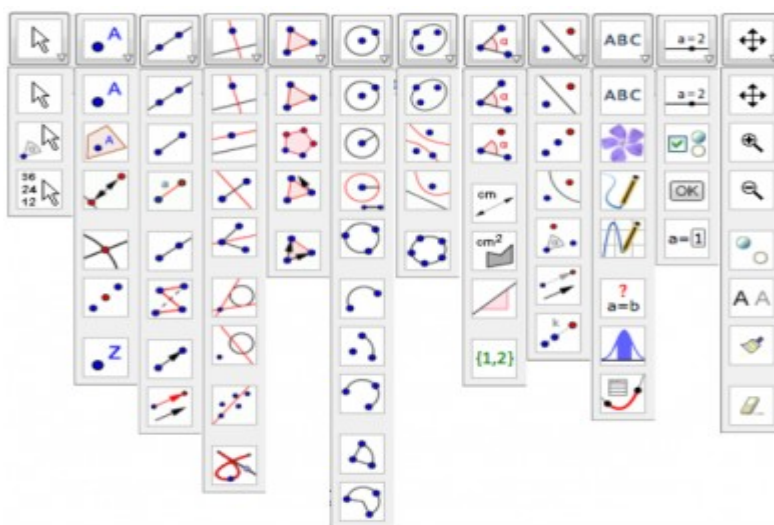


Figura N ° 3. Elementos de la barra de herramientas de GeoGebra 4.4 desplegados.
Fuente: International GeoGebra Institute (2013).

Otra forma de introducir datos en el programa es mediante el uso del teclado en la Barra de Entrada. Las coordenadas, ecuaciones, comandos o funciones escritos en esta barra pasarán directamente a las vistas gráfica y algebraica al pulsar *Intro*.

Por último, en la vista de hoja de cálculo, se pueden introducir mediante el teclado las coordenadas de cualquier punto, y las funciones o comandos que representen cualquier objeto matemático soportado por *GeoGebra*.

Las múltiples posibilidades y la sencillez del manejo del programa los sitúan como una herramienta muy útil para la enseñanza de las matemáticas. Como concluye Losada (2007):

Geogebra es un programa pensado para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, intuitivo, fácil de usar, de estética cuidada, con grandes posibilidades pedagógicas y en continuo desarrollo. Para el profesorado y el alumnado de educación secundaria puede ser más que un recurso. Puede ser una gozada (sección 13, párr. 1).

3.5. Otras aplicaciones similares

3.5.1. Wiris

En Maths for More (s.f.), la página oficial de Wiris, se dice que la calculadora Wiris es una plataforma en línea para cálculos matemáticos que dispone también de una versión autónoma, Wiris desktop, que no requiere conexión a internet. Se trata de un sistema CAS (computer algebra system) que incluye un DGS (dynamic geometry system). En una página HTML convencional se puede tener acceso a una potente barra de herramientas que permite calcular integrales y límites, representar funciones en 2D y 3D, así como manipular matrices, entre otras cosas, cubriendo todos los temas matemáticos desde la educación primaria a la universitaria.

En cuanto a la geometría propiamente dicha, dispone de las siguientes herramientas:

- Creación de figuras geométricas: puntos, segmentos, rectas, planos, circunferencias, arcos, cónicas, triángulos, poligonales, curvas, superficies.
- Operaciones con figuras geométricas: intersección, transformación afín, distancia, etc.
- Conversión automática de ecuaciones a objetos geométricos.
- Conversiones entre las diferentes ecuaciones de la recta: explícita, implícita, punto-pendiente, etc.

No obstante, de acuerdo con Ancochea (2011), si bien Wiris es una herramienta matemática más potente que *GeoGebra*, la interrelación entre las

ventanas gráfica y de cálculos no es muy ágil, requiriendo la introducción de una instrucción o pequeño programa, que puede incluirse en una librería, para que las modificaciones en la ventana gráfica tengan reflejo en la algebraica.

La interfaz usual de Wiris es la que se muestra en la siguiente figura.

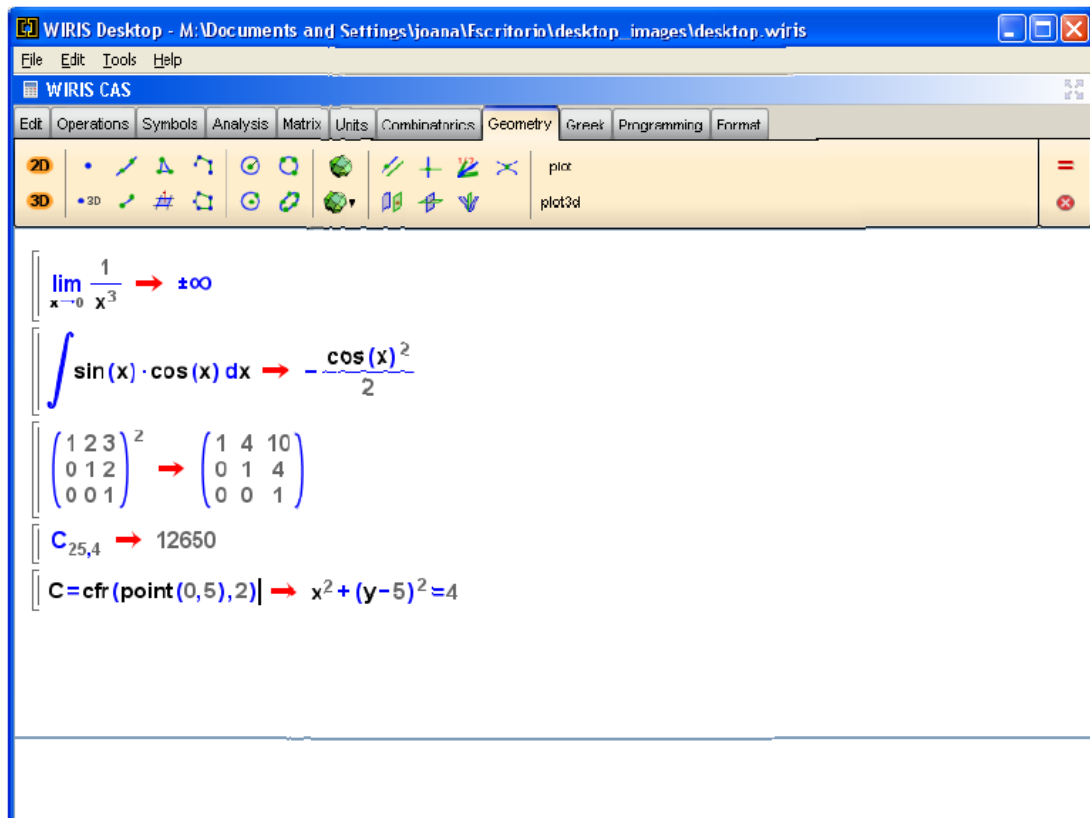


Figura N° 4. Interfaz habitual de Wiris. Fuente: Maths for More (s.f.).

Sin embargo, la visualización de ambas ventanas, gráfica y de cálculos, a diferencia de lo que ocurre con *GeoGebra*, no es automática por defecto, por lo que cuando el usuario pide un gráfico el programa abre una nueva ventana y la ubica, redimensionando el resto de ventanas abiertas. El usuario puede ajustar el tamaño de cada ventana moviendo los separadores de las mismas.

Igualmente, el usuario puede lanzar diversas ventanas de gráficos simultáneamente, así como navegar a través de las mismas mediante los botones de maximizar, restablecer y minimizar.

También es posible arrastrar y soltar (drag 'n drop) las ventanas; Wiris Desktop reajustará hábilmente todas las ventanas para que se ajusten al espacio disponible. (Manual Wiris 2.2, 2007).

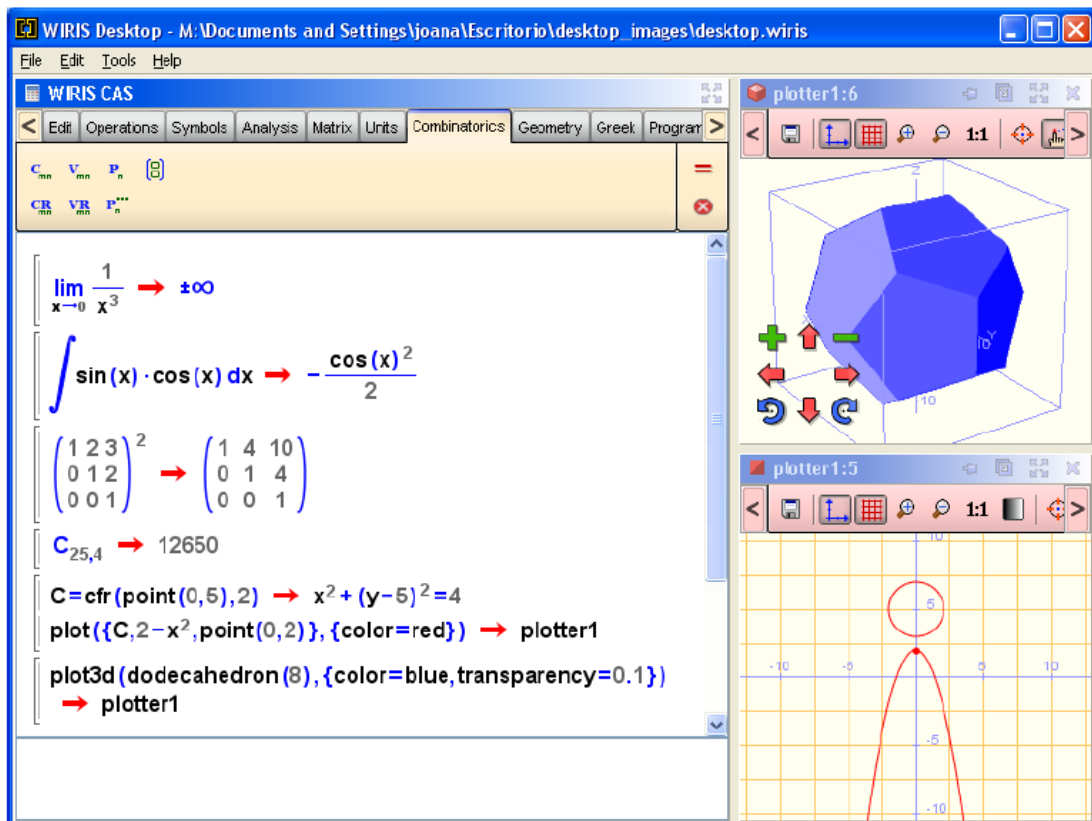


Figura N^o 5. Interfaz de Wiris con varias ventanas gráficas abiertas. Fuente: Maths for More (s.f.).

3.5.2. Cabri

Es un software comercial desarrollado por la compañía francesa Cabrilog para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y la trigonometría. Para ello, según indican Arias Cabezas y Maza Sáez (2006), permite el dibujo de puntos, segmentos, vectores, rectas, semirrectas, triángulos, cuadriláteros, polígonos, circunferencias, arcos y cónicas. Además es capaz de trazar paralelas, perpendiculares, puntos medios, mediatrices y bisectrices y de dibujar traslaciones, giros, simetrías axial y central, homotecias e inversiones. De todo ello calcula coordenadas y ecuaciones, y mide longitudes, áreas, pendientes y ángulos.

La apariencia de la interfaz de este software se puede observar en la figura siguiente. En ella, una vez dibujados los objetos mediante interacción del ratón con los elementos de la barra de herramientas, se pueden generar las expresiones algebraicas de dichos elementos.

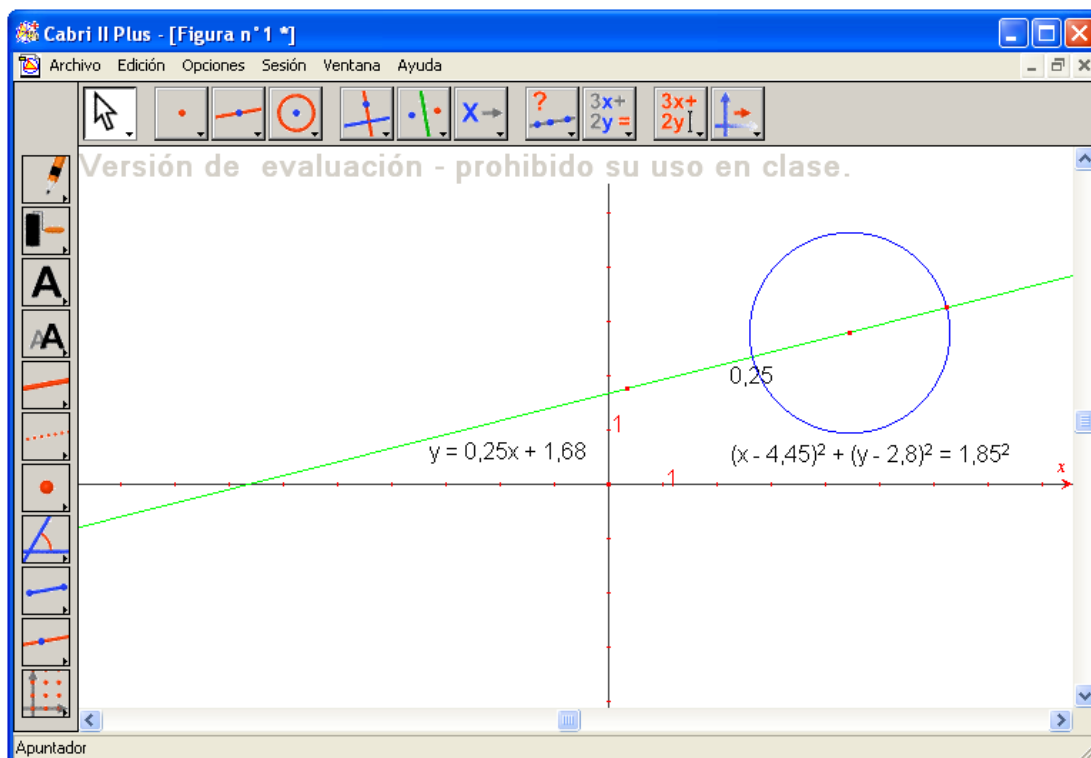


Figura N° 6. Interfaz habitual de Cabri. Fuente: elaboración propia.

En Cabrilog SAS (2007), la página oficial de Cabri, se indica que las ventajas de Cabri estriban en su simplicidad, precisión y confiabilidad, facilidad de iniciación y utilización así como en su aporte didáctico y pedagógico. Además, aunque en la actualidad *GeoGebra* está desarrollando una versión tridimensional, Cabri ya permite actualmente el tratamiento en tres dimensiones, a través de Cabri 3D, v.2. Asimismo, el que sea un software exclusivo de geometría, es al tiempo una ventaja (especializado en este tema en concreto) y un inconveniente (limitado al mismo tema).

Sin embargo, Cabri presenta otros inconvenientes frente a *GeoGebra*, entre ellos que se trata de un programa comercial y como tal tiene un coste, mientras que *GeoGebra* es totalmente libre y gratuito. Además Cabri sólo está disponible para las plataformas Windows y Mac OS, en tanto que *GeoGebra*, al tratarse de un software basado en Java, se convierte en multiplataforma, funcionando en cualquier sistema operativo, incluyendo Linux, así como en ciertos teléfonos móviles.

4. Estudio de campo

4.1. Introducción

Tras el análisis del marco teórico efectuado en el apartado anterior, se realiza un pequeño estudio de campo con el que se pretende poner de relieve aspectos de la enseñanza de la Geometría que permitan definir una propuesta didáctica adecuada.

Como se ha visto en los apartados precedentes, la Geometría es uno de los bloques de las matemáticas en el que los alumnos se encuentran con mayores dificultades. El presente estudio tratará de confirmar estos supuestos y profundizar en aspectos de la docencia de esta materia a partir de las respuestas de un conjunto de profesores a cuestiones relativas a:

- a) los contenidos del bloque de Geometría.
- b) las dificultades que encuentran para su enseñanza y las que detectan en los alumnos para su aprendizaje.
- c) el tiempo que se dedica a este bloque y la influencia que la temporalización del mismo en la programación general anual tiene en esas dificultades.
- d) la utilización de software matemático en clase y las ventajas o inconvenientes que su uso conlleva.

4.2. Contextualización

Por lo que respecta al espacio muestral, el cuestionario ha sido repartido en dos centros con los que el autor de este trabajo tiene relación: el primero de ellos es el IES Mariano José de Larra de Madrid, centro en el que el alumno ha realizado las prácticas correspondientes a este Máster. El segundo es el Colegio de la Inmaculada de los PP. Escolapios de Getafe, en el que los hijos del autor de este trabajo cursan sus estudios. Además, se ha tenido en cuenta el carácter público del primero de los centros y concertado, en la etapa educativa en la que se enmarca este trabajo, del segundo. El centro público se sitúa en Aluche, barrio del sureste de Madrid. El colegio concertado está en Getafe, municipio de la periferia sur de la capital. Ambos centros atienden a alumnos procedentes de familias de clase media, siendo las principales diferencia el componente religioso en el ideario del segundo de ellos y la mayor presencia de inmigrantes en el primero, si bien ninguno de estos aspectos influye en los resultados de este estudio.

El Departamento de Matemáticas del IES Mariano José de Larra está compuesto por siete profesores, cinco hombres y dos mujeres, mientras que en el

colegio de la Inmaculada son nueve los profesores que imparten matemáticas en educación secundaria, cinco de ellos mujeres.

4.3. Metodología

La metodología empleada en este estudio ha consistido en un cuestionario con preguntas cerradas que se incluye como Anexo N° 1 del presente trabajo. Se ha elegido esta metodología porque ofrece una mayor comodidad para los encuestados a la hora de contestar y porque facilita el tratamiento estadístico de los datos y, por ende, el análisis de los mismos y la obtención de conclusiones. Los cuestionarios han sido distribuidos a través del Jefe del Departamento en el primero de los casos y por el propio hijo del autor de este trabajo en el segundo. Las encuestas se llevaron a cabo a finales del mes de abril y principios de mayo.

4.3.1. Justificación del cuestionario propuesto

En el siguiente cuadro se presentan y justifican las preguntas y las posibles respuestas planteadas en los cuestionarios.

Tabla N° 12. Justificación del cuestionario propuesto.

Aspecto	N°	Preguntas y respuestas	Justificación
Caracterización de la muestra	1	Edad <input type="checkbox"/> Menos de 25 años <input type="checkbox"/> Entre 26 y 35 años <input type="checkbox"/> Entre 36 y 45 años <input type="checkbox"/> Entre 46 y 55 años <input type="checkbox"/> Entre 56 y 65 años <input type="checkbox"/> Más de 65 años	P. Se pretende saber la edad de los encuestados para caracterizar la muestra y correlacionarla con el conocimiento y uso de software matemático. R. Los rangos de edad posibles se presentan en grupos de 10 años.
	2	Sexo <input type="checkbox"/> Hombre <input type="checkbox"/> Mujer	P. Se pretende saber el sexo de los encuestados para caracterizar la muestra y correlacionarla con el conocimiento y uso de software matemático.
	3	Tipo de centro en el que imparte clase <input type="checkbox"/> Público <input type="checkbox"/> Concertado	P. Se pretende caracterizar la muestra y conocer la influencia que pueda tener el centro en el que se trabaja en el conocimiento y uso de software matemático. R. Se permiten las respuestas posibles dados los centros utilizados.
Temporalización del bloque de Geometría	4	¿En qué trimestre se imparte en su centro el bloque de Geometría? <input type="checkbox"/> 1 ^{er} trimestre <input type="checkbox"/> 2 ^o trimestre <input type="checkbox"/> 3 ^{er} trimestre	P. Se pretende conocer si la temporalización del bloque de Geometría en la programación anual del centro puede tener influencia en las dificultades que presentan los alumnos en su aprendizaje.
	5	¿Considera adecuado el tiempo dedicado a impartir el bloque de Geometría? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No	P. Se pretende conocer si los profesores encuestados consideran suficiente el tiempo del que disponen para explicar los contenidos del bloque de Geometría.
Contenidos del bloque de Geometría	6	¿Qué contenidos del bloque de Geometría trabaja más en sus clases? Por favor, ordene del 1 al 5, siendo 1 el menos trabajado y 5 el más trabajado. <input type="checkbox"/> Teorema de Tales. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Resolución de triángulos <input type="checkbox"/> Razones trigonométricas. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo y de distintos ángulos <input type="checkbox"/> Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos <input type="checkbox"/> Vectores. Operaciones con vectores. Producto escalar y módulo de vectores <input type="checkbox"/> Ecuaciones de la recta. Posición relativa de dos rectas	P. Se pretende saber qué contenidos son los más trabajados en clase por los docentes para correlacionarlos con la mayor o menor dificultad que encuentran los alumnos en su aprendizaje. R. Se consideran los contenidos curriculares de acuerdo con la legislación pidiendo a los encuestados que valoren del 1 al 5 del menos al más trabajado.
	7	¿Qué contenidos del bloque de Geometría encuentra más complicados de trabajar en clase? Por favor, ordene del 1 al 5, siendo 1 el menos complicado y 5 el más complicado. <input type="checkbox"/> Teorema de Tales. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Resolución de triángulos	P. Se pretende saber qué contenidos son los que los docentes encuentran más difíciles de trabajar en clase para correlacionarlos con el mayor o menor tiempo dedicado a los mismos y la mayor o menor dificultad que encuentran los alumnos en su aprendizaje.

Contenidos del bloque de Geometría		<input type="checkbox"/> Razones trigonométricas. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo y de distintos ángulos <input type="checkbox"/> Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos <input type="checkbox"/> Vectores. Operaciones con vectores. Producto escalar y módulo de vectores <input type="checkbox"/> Ecuaciones de la recta. Posición relativa de dos rectas	R. Se consideran los contenidos curriculares de acuerdo con la legislación pidiendo a los encuestados que valoren del 1 al 5 del menos al más complicado.
	8	¿Qué contenidos del bloque de Geometría les cuesta más comprender a los alumnos? Por favor, ordene del 1 al 5, siendo 1 el menos costoso y 5 el más costoso. <input type="checkbox"/> Teorema de Tales. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Resolución de triángulos <input type="checkbox"/> Razones trigonométricas. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo y de distintos ángulos <input type="checkbox"/> Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos <input type="checkbox"/> Vectores. Operaciones con vectores. Producto escalar y módulo de vectores <input type="checkbox"/> Ecuaciones de la recta. Posición relativa de dos rectas	P. Se pretende saber qué contenidos son los que los docentes consideran que les cuesta más comprender a los alumnos para correlacionarlos con las dificultades que los propios docentes experimentan al tratarlos en clase y con el mayor o menor tiempo que les dedican. R. Se consideran los contenidos curriculares de acuerdo con la legislación pidiendo a los encuestados que valoren del 1 al 5 del menos al más costoso.
Software matemático	9	¿Está familiarizado con algún software matemático? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No	P. Se pretende saber si los encuestados están familiarizados con este tipo de recursos educativos.
	10	En caso de haber respondido afirmativamente a la pregunta anterior señale con una X con cuál de ellos. <input type="checkbox"/> GeoGebra <input type="checkbox"/> Descartes <input type="checkbox"/> Regla y compás <input type="checkbox"/> Wiris <input type="checkbox"/> Derive <input type="checkbox"/> Otros <input type="checkbox"/> Cabri <input type="checkbox"/> MathLab	P. Se pretende saber qué aplicaciones son las más conocidas. R. Se facilitan una serie de aplicaciones matemáticas escogidas entre las más difundidas.
		11	¿Utiliza en clase algún software matemático para impartir el bloque de Geometría? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No
	12	En caso de haber respondido afirmativamente a la pregunta anterior señale con una X con cuál de ellos. <input type="checkbox"/> GeoGebra <input type="checkbox"/> Descartes <input type="checkbox"/> Regla y compás <input type="checkbox"/> Wiris <input type="checkbox"/> Derive <input type="checkbox"/> Otros <input type="checkbox"/> Cabri <input type="checkbox"/> MathLab	P. Se pretende saber qué aplicaciones son las utilizadas. R. Se facilitan una serie de aplicaciones matemáticas escogidas entre las más difundidas.
		13	¿Considera que el uso de software matemático es beneficioso para el proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque de Geometría? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No

Nota: Justificación del cuestionario propuesto. Fuente: Elaboración propia.

4.4. Resultados del estudio de campo

4.4.1. Distribución de los profesores encuestados



Gráfico N° 1. Distribución de los profesores encuestados por sexo y tipo de centro.
Fuente: Elaboración propia.

El número de profesores encuestados ha sido de 16. De ellos, las mujeres representan el 43,75% y los hombres el 56,25%. Respecto a la distribución de los profesores entre centros públicos y privados, el 43,75% de los encuestados trabaja en los primeros y el 56,25% en los segundos.

4.4.2. Distribución de los profesores encuestados por sexos en cada tipo de centro

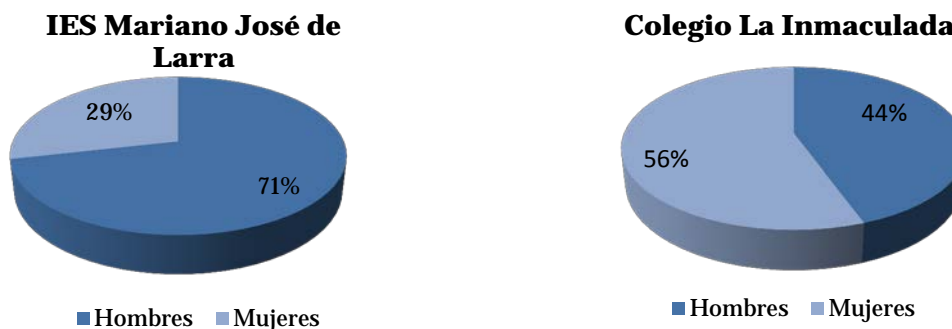


Gráfico N° 2. Distribución de los profesores encuestados por sexo en cada tipo de centro. Fuente: Elaboración propia.

Por tipos de centro, el porcentaje de mujeres es del 29% en el centro público y del 56% en el colegio concertado.

La unidad didáctica de Geometría se imparte en el 100 % de los casos en el 2º trimestre del curso.

En cuanto al tiempo que se dedica a impartir el bloque de Geometría, no existe acuerdo entre los profesores encuestados: un 44% considera que sí se pueden

desarrollar los contenidos del bloque en el tiempo previsto para el mismo, mientras que un 56% piensan que el tiempo para impartirlo es insuficiente.

4.4.3. Dedicación a los distintos contenidos del bloque de Geometría

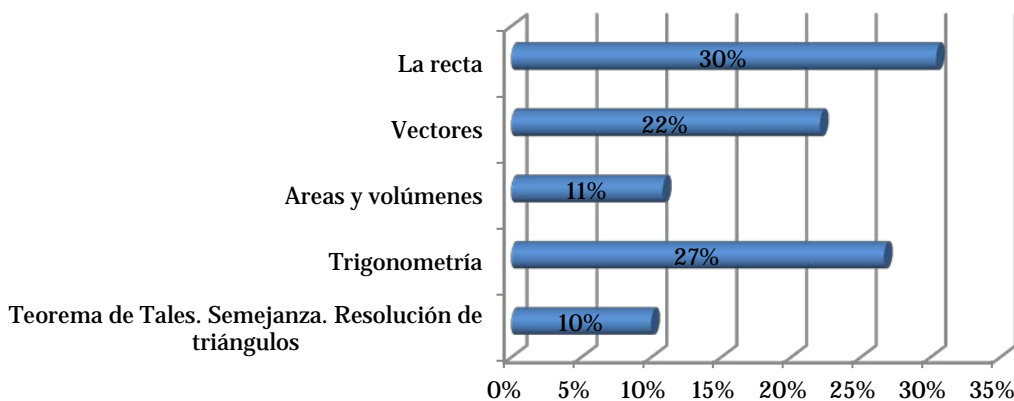


Gráfico N° 3. Dedicación a los distintos contenidos del bloque de Geometría. Fuente: Elaboración propia.

A la pregunta de los contenidos más trabajados en clase por los docentes, tal y como se puede observar en el Gráfico N° 3 anterior, las respuestas dadas indican que los contenidos sobre la recta (Ecuaciones de la recta. Posición relativa de dos rectas) con un 30% de dedicación son los más trabajados, seguidos de cerca (27%) por los contenidos relativos a la trigonometría (Razones trigonométricas. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo y de distintos ángulos). Le siguen los contenidos sobre vectores (Operaciones con vectores. Producto escalar y módulo de vectores) con un 22% y los que menos se trabajan con un 11% y un 10%, respectivamente, son las áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos y la resolución de triángulos.

4.4.4. Contenidos del bloque de Geometría más trabajados en clase

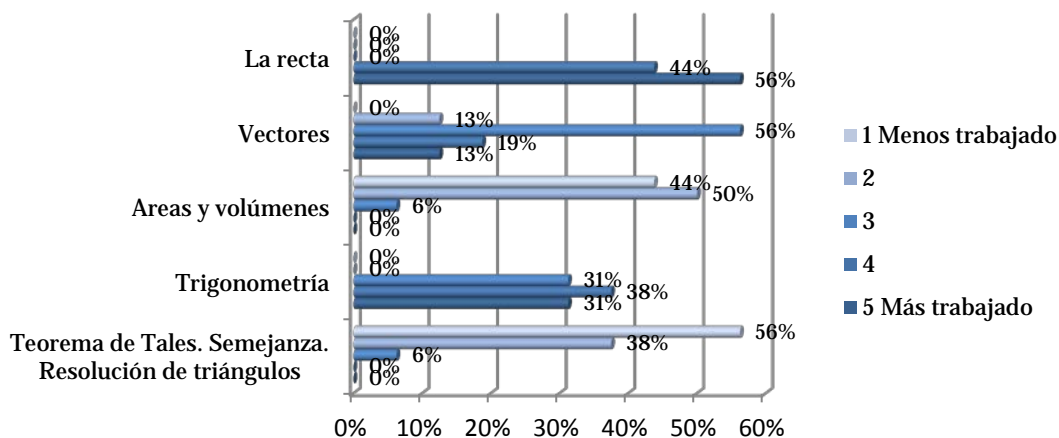


Gráfico N° 4. Contenidos del bloque de Geometría más trabajados en clase. Fuente: Elaboración propia.

Los contenidos relativos a la recta son considerados como los más trabajados por el 56% de los encuestados, mientras que un 44% piensa que son los segundos en orden de importancia. Respecto a la trigonometría, la opinión está más dividida: un 31% de los encuestados piensan que son los contenidos que más se trabajan, un 38% que es el segundo aspecto que más se trabaja y otro 31% que es el tema que se trabaja en tercer lugar en orden de importancia. Los vectores serían el tercer contenido en orden de importancia por la dedicación en clase según el 56% de los encuestados, aunque hay un 13% que considera que es el aspecto que más se trabaja en el aula. Finalmente, un 50% de los encuestados consideran el cálculo de las áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos como el segundo contenido que menos se trabaja mientras que un 38% piensan que este lugar lo ocupan el teorema de Tales, la semejanza y la resolución de triángulos. Aunque la opinión mayoritaria de los encuestados con un 56% de respuestas respaldando este hecho es que estos temas ocupan el último lugar en cuanto al trabajo realizado en clase sobre ellos. En el Gráfico N° 4 anterior se aprecian estos datos de forma más visual.

4.4.5. Valoración media sobre los contenidos del bloque de Geometría que más cuesta trabajar en clase

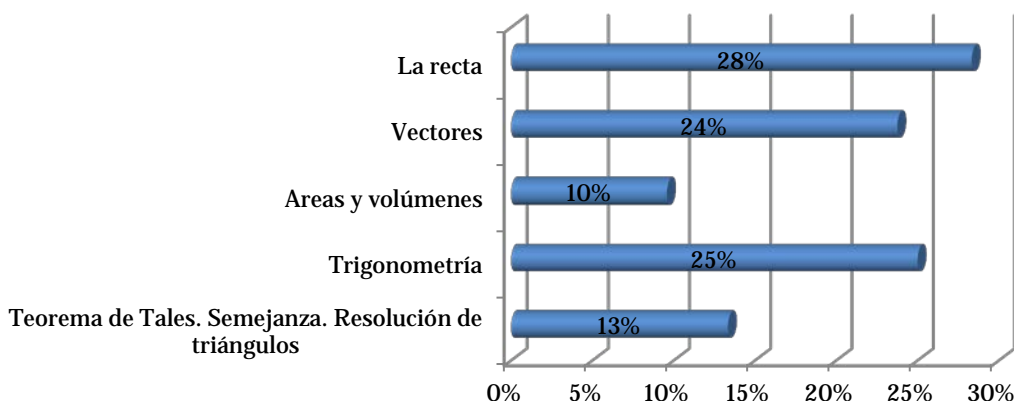


Gráfico N° 5. Valoración media sobre los contenidos del boque de Geometría que más cuesta trabajar en clase. Fuente: Elaboración propia.

En opinión de los docentes encuestados, tres son los contenidos que más cuesta trabajar en clase obteniendo puntuaciones muy similares de 28%, 25% y 24%, respectivamente. Estos contenidos, como se observa en el gráfico previo, son por orden los referidos a la recta, la trigonometría y los vectores. Lejos de las puntuaciones anteriores, se encuentran el teorema de Tales, la semejanza y la resolución de triángulos, con un 13% de los puntos, y el cálculo de las áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos con una puntuación del 10%.

4.4.6. Contenidos del bloque de Geometría que más cuesta trabajar en clase

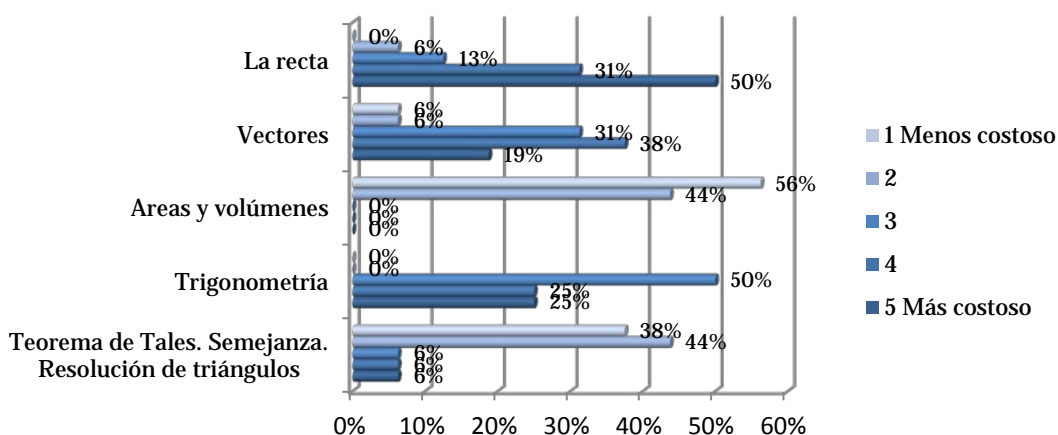


Gráfico N° 6. Contenidos del boque de Geometría que más cuesta trabajar en clase. Fuente: Elaboración propia.

En cuanto al orden que asignan los profesores encuestados a los distintos contenidos atendiendo a su dificultad para ser trabajados en clase, se muestra en el Gráfico N° 6. Un 50% piensa que la recta es el tema que más cuesta trabajar en el aula, mientras que un 31% lo sitúan en segundo lugar. Ninguno de los encuestados piensa que sea el contenido que menos cuesta trabajar. El segundo aspecto más difícil de trabajar en clase es para el 38% de los encuestados el tema de vectores, aunque como ya se ha indicado un 31% piensan que este lugar corresponde a la recta. Para el 50% el tercer lugar lo ocuparía la trigonometría a la que un 25% sitúa en primer lugar y otro 25% en segundo en cuanto a dificultad para explicarla en clase. Finalmente, un 44% colocan la resolución de triángulos y el teorema de Tales en cuarto lugar y un 56% piensa que el cálculo de áreas y volúmenes es el aspecto que con más facilidad se trabaja en el aula.

Para finalizar con los resultados referentes a los contenidos curriculares se preguntó a los docentes que indicaran cuáles eran a su juicio los contenidos que más costaba aprender a los alumnos. En los gráficos siguientes se muestran la valoración media sobre esta cuestión y la percepción que tienen del orden en cuanto a dificultad de aprendizaje de dichos contenidos.

4.4.7. Valoración media sobre los contenidos del bloque de Geometría que más cuesta aprender a los alumnos

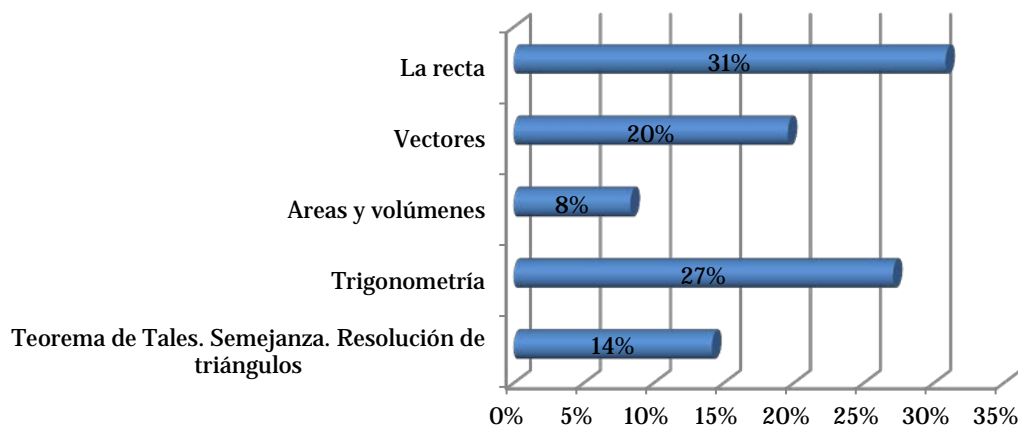


Gráfico N° 7. Valoración media sobre los contenidos del bloque de Geometría que más cuesta aprender a los alumnos. Fuente: Elaboración propia.

El Gráfico N° 7 muestra que los alumnos encuentran más dificultades en el aprendizaje de la recta (31%), seguido de cerca por la trigonometría (27%) y algo más lejos los vectores (20%). Los contenidos que aprenden con mayor facilidad o menos complicados para los alumnos son los referidos al cálculo de áreas y volúmenes (8%) y la resolución de triángulos (14%).

4.4.8. Contenidos del bloque de Geometría que más cuesta aprender a los alumnos

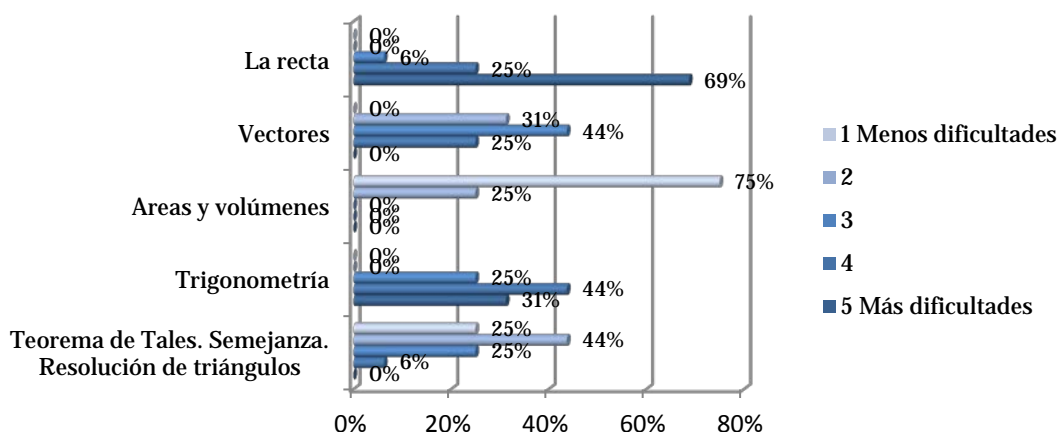


Gráfico N° 8. Contenidos del boque de Geometría que más cuesta aprender a los alumnos. Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico anterior se refleja la opinión de los encuestados respecto a qué contenidos piensan que entrañan más dificultad para los alumnos. Se aprecia claramente que una mayoría de los profesores que han respondido al cuestionario opinan que la recta es el tema en el que los alumnos encuentran más dificultades. El 68% es de esta opinión. Todavía se refleja con más claridad el tema que consideran que los alumnos aprenden con mayor facilidad. El 75% de los encuestados cree que el cálculo de áreas y volúmenes es el contenido del bloque de Geometría que los alumnos aprenden más fácilmente. Un 44% de los encuestados cree en los tres casos que la trigonometría es el segundo contenido más difícil de este bloque, los vectores el tercero y la resolución de triángulos el cuarto.

Para terminar con la exposición de los resultados del cuestionario, dedicaremos unas líneas a comentar las opiniones de los encuestados sobre softwares matemáticos. Únicamente uno de ellos declara no conocer ninguno (6%). De los quince restantes, sólo cuatro lo utilizan en sus clases (27%), todos en el centro público. No obstante, más de la mitad de los encuestados considera su uso beneficioso para el aprendizaje de la Geometría. Todos los encuestados que declararon conocer algún software matemático conocen *GeoGebra*. Además, trece conocen también *Wiris* y nueve, *Cabri*. *GeoGebra* es la aplicación utilizada por los cuatro que emplean algún tipo de software matemático en clase. Uno de ellos usa además *Wiris*. Por último, cabe indicar que un 56% considera beneficioso el uso de algún tipo de software matemático para explicar el bloque de Geometría.

Una tabulación de los datos obtenidos como respuesta a los cuestionarios se incluye en el Anexo N° 4.

4.5. Análisis de los resultados

Pese a lo reducido de la muestra, su distribución por sexo y por tipo de centro es bastante equilibrada, por lo que se puede considerar representativa del panorama educativo y docente más extendido, formado por centros públicos y concertados en su mayoría.

La media de edad de los encuestados se sitúa en los 47 años y medio, esto es, en el cuarto escalón de los seis en que se ha dividido la edad de los docentes, considerando decenas desde los 25 años hasta la edad de jubilación, 65 años. Esta media de edad es más elevada en el colegio público que en el concertado, algo más de 51 años frente a 45.

Respecto a los contenidos del bloque de Geometría y a sus dificultades en el proceso enseñanza-aprendizaje, se aprecia una correlación directa entre la valoración media de los contenidos más costosos de explicar en clase y aquellos en los que los alumnos encuentran más difíciles de aprendizaje. En función de estos valores medios, el orden de los contenidos sería el siguiente en ambos casos: recta, trigonometría, vectores, teorema de Tales/resolución de triángulos y cálculo de áreas y volúmenes. Sin embargo, respecto al puesto que estos contenidos ocupan en cuanto a cada uno de los aspectos anteriores (dificultad de enseñanza y dificultad de aprendizaje) se produce una variación en los puestos segundo y tercero. Así, la opinión de los profesores es que presenta más problemas la enseñanza de vectores que la de trigonometría, pero sin embargo, los alumnos tiene más dificultad para aprender esta última que la primera, tal y como se observa en los valores medios.

Esta última ordenación de los contenidos también se mantiene tanto en valores medios como en posición en relación a los aspectos más trabajados en clase para los tres primeros temas: recta, trigonometría y vectores, pero difiere en los dos últimos, trabajándose más el cálculo de áreas y volúmenes que la resolución de triángulos. Así pues, podemos decir que se trabajan más en clase aquellos temas más difíciles de aprender por los alumnos que, a su vez, son los que más cuesta explicar en clase.

Por lo que respecta al conocimiento y empleo de algún tipo de software matemático, lo más destacable es que la mayoría de los encuestados, el 94%, conoce alguna de estas aplicaciones y que más de la mitad, el 56%, considera beneficioso su uso en el aula.

El sexo del encuestado no predispone al empleo del software pero, en esta muestra al menos, sí que tiene influencia en su uso el tipo de centro en el que imparten clase, siendo nulo en el centro concertado. No obstante, el porcentaje de encuestados que considera beneficioso su uso es prácticamente idéntico por tipo de

centro y muy próximo a la media: 57,1% en el colegio público y 55,6% en el concertado.

En general, los profesores de más edad son los que consideran menos beneficioso el uso de las aplicaciones informáticas para la enseñanza del bloque de Geometría, siendo los más jóvenes los más favorables. Sin embargo, dos de los tres profesores de más edad de instituto son la excepción a esta regla y entienden que el uso de estas aplicaciones es beneficioso, pues ellos mismos la utilizan en clase. Salvo estos dos profesores y uno del centro concertado de 46 años de edad, todos los que se encuentran en las decenas de edad de 46 a 55 años y de 56 a 65 no encuentran beneficioso el uso de este tipo de recursos.

Para terminar con el análisis de los resultados, es relevante que todos los encuestados que declararon conocer algún tipo de software matemático conocieran *GeoGebra*, recurso en el que se basa la unidad didáctica propuesta en este trabajo.

5. Propuesta didáctica

5.1. Introducción

A continuación se propone una metodología para enseñar Geometría de 4º de la ESO opción B mediante el uso de *GeoGebra* como recurso didáctico.

En la definición de la propuesta se tienen en cuenta tanto el marco teórico como el estudio de campo anteriores. En el primero se han señalado los problemas que presenta la enseñanza de la geometría debido a la abstracción necesaria para comprender sus conceptos, la falta de conocimientos previos y, como resultado, la escasa de motivación del alumnado. También se ha destacado su importancia y, atendiendo a las disposiciones legales, los contenidos curriculares y las competencias básicas a desarrollar.

Por su parte, con el estudio de campo se ha comprobado qué contenidos son los que plantean más problemas tanto para ser enseñados por los docentes como para ser aprendidos por los alumnos. En ambos casos y a pesar de ser los capítulos a los que se dedica más tiempo en clase, los temas que ocupan los tres primeros lugares son los mismos: la recta, la trigonometría y los vectores.

Así pues, la propuesta, que contempla todo el bloque de Geometría correspondiente a la opción B de 4º de la ESO, se centrará específicamente en el empleo de *GeoGebra* como recurso didáctico que complemente la manera tradicional de explicar estos tres aspectos del bloque de Geometría, cubriendo las tareas que según García Peña y López Escudero (2008) deben llevarse a cabo en el aula: conceptualización, investigación y demostración.

5.2. Objetivos

Los objetivos que se buscan al establecer esta propuesta son de dos tipos: curriculares y didácticos. En la Tabla N° 13 siguiente se presentan los primeros.

Tabla N° 13. Objetivos curriculares de la propuesta.

Contenidos	Objetivos curriculares
Figuras y cuerpos semejantes: razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras semejantes.	1. Calcular longitudes, áreas y volúmenes aplicando el teorema de Tales y el concepto de razón de semejanza y los criterios de semejanza de triángulos.
Teorema de Tales. Aplicación al cálculo de medidas indirectas.	
Relaciones métricas en los triángulos. Resolución de triángulos rectángulos.	1. Resolver un triángulo rectángulo del que se conocen distintos elementos. 2. Resolver problemas en los que se aplica la resolución de triángulos rectángulos para la medida de distancias no accesibles, cálculo de áreas y cálculo de volúmenes.
Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Relaciones entre ellas.	1. Calcular las razones trigonométricas de un ángulo en un triángulo rectángulo. 2. Calcular las razones trigonométricas de un ángulo conociendo el valor de una de ellas y utilizando la calculadora y el valor de las razones de 30°, 45° y 60°. 3. Reducir al primer cuadrante las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. 4. Demostrar identidades trigonométricas utilizando la relación fundamental de la trigonometría y las derivadas de ellas. 5. Resolver ecuaciones trigonométricas sencillas utilizando la relación fundamental de la trigonometría y las derivadas de ellas. 6. Resolver problemas geométricos utilizando la trigonometría
Uso de la calculadora para la obtención de ángulos y razones trigonométricas.	
Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medidas de longitudes, áreas y volúmenes.	1. Resolver problemas geométricos utilizando los teoremas de Tales, del cateto, de la altura y de Pitágoras.
Iniciación a la geometría analítica plana: coordenadas de un punto; distancia entre dos puntos. Representación de las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.	1. Hallar el módulo y la pendiente de un vector y operar gráfica y analíticamente con vectores. 2. Hallar el vector definido por dos puntos. 3. Hallar las distintas ecuaciones de una recta e identifica sus elementos. 4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. 5. Estudiar la posición relativa de un punto y una recta. 6. Estudiar la posición relativa de dos rectas. 7. Encontrar rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada. 8. Calcular la distancia de dos puntos. 9. Resolver problemas de geometría analítica.

Nota: Objetivos curriculares de la propuesta. Fuente: Elaboración propia.

Los objetivos didácticos de la propuesta son aquellos que permiten alcanzar las competencias básicas fijadas en el Decreto 23/2007 para 4º curso de la ESO y que se presentan en el siguiente cuadro para cada tema del bloque.

Tabla N° 14. Objetivos didácticos de la propuesta según las competencias básicas.

Competencias	Objetivos				
	Semejanza. Tales	Trigonometría		Geometría analítica	
		Trigonometría	Áreas y volúmenes	Vectores	Recta
1. <i>Competencia en comunicación lingüística.</i>	Explicar, con claridad y concisión, procedimientos y resultados en los que se haya aplicado la semejanza.	Saber extraer la información trigonométrica que se encuentra en un texto dado.		Extraer la información geométrica de un texto dado.	
2. <i>Competencia matemática.</i>	Saber reconocer cuándo dos figuras son semejantes.	Dominar los conceptos de la trigonometría como herramienta básica en el estudio de la Geometría.		Dominar los elementos de la geometría analítica en el plano.	
3. <i>Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.</i>	Saber leer mapas y planos, haciendo uso de los conceptos de semejanza.	Saber usar la trigonometría para resolver problemas de la vida cotidiana.		Describir fenómenos del mundo con la ayuda de los conceptos geométricos aprendidos en esta unidad.	
4. <i>Tratamiento de la información y competencia digital.</i>		Aprender a utilizar la calculadora para obtener las razones trigonométricas de distintos ángulos.		Aprender a utilizar software matemático, GeoGebra en nuestro caso, para resolver problemas de geometría analítica.	
5. <i>Competencia social y ciudadana.</i>	Ser consciente de la utilidad de los conocimientos sobre semejanza para poder validar las informaciones que nos llegan.	Conocer las aplicaciones en de la trigonometría en campos como la ingeniería y la arquitectura.		Valorar el uso de la geometría en multitud de actividades humanas.	
6. <i>Competencia cultural y artística.</i>	Ser capaz de reconocer figuras semejantes en distintas manifestaciones artísticas: pintura, arquitectura, escultura.			Utilizar los conceptos geométricos estudiados en esta unidad para describir distintas manifestaciones artísticas.	
7. <i>Competencia para aprender a aprender.</i>	Ser capaz de ver, durante la resolución de un problema, que hay que utilizar la Semejanza para resolverlo.	Ser consciente de la utilidad de la trigonometría a la hora de describir multitud de fenómenos.		Ser consciente de las carencias en los conocimientos adquiridos en esta unidad.	
8. <i>Autonomía e iniciativa personal.</i>	Elegir la mejor estrategia a la hora de enfrentarse con problemas en los que interviene la semejanza de figuras.	Deducir multitud de fórmulas trigonométricas a partir de un pequeño conocimiento teórico.		Escoger una buena estrategia para resolver los problemas geométricos.	

Nota: Objetivos didácticos de la propuesta según las competencias básicas. Fuente: Elaboración propia.

5.3. Metodología

Ante la amplitud del bloque de Geometría de 4º de la ESO, la propuesta didáctica que se presenta se centra en la unidad de Geometría analítica, que comprende dos de los tres temas considerados más problemáticos de acuerdo con los resultados del estudio de campo: los vectores y la recta.

La metodología que se propone pretende ser activa, de modo que favorezca la participación de los alumnos. Para ello se presentarán situaciones cotidianas que requieran la aplicación de los conceptos aprendidos para la resolución de los problemas propuestos y que posibiliten el debate y la implicación de los alumnos. Esta contextualización de la unidad didáctica a través de los aspectos cotidianos favorecerá la motivación del alumnado. A su vez, esta motivación se pretende reforzar mediante el empleo de las TIC, en concreto en este caso mediante la realización de actividades con *GeoGebra*.

5.3.1. Contenidos

En la siguiente tabla se recogen los contenidos correspondientes a la unidad didáctica de Geometría analítica.

Tabla N° 15. Contenidos de la unidad didáctica de Geometría analítica.

Geometría analítica	
Vectores	Rectas
<ul style="list-style-type: none">• Vectores fijos y libres en el plano.• Operaciones con vectores libres.• Combinación lineal de vectores.• Producto escalar de dos vectores.• Aplicaciones del producto escalar de dos vectores.	<ul style="list-style-type: none">• Ecuaciones de la recta.• Posiciones relativas de dos rectas.

Nota: Contenidos de la unidad didáctica de Geometría analítica. Fuente: Elaboración propia a partir del Real Decreto 1631/2006 y del Decreto 23/2007.

5.3.2. Recursos metodológicos y materiales

Se pretende dotar a la propuesta didáctica de un enfoque competencial basado en un marco constructivista que a partir de los conocimientos previos de los alumnos les permita desarrollar nuevos conocimientos en distintos contextos, estimulando el desarrollo mediante la comprensión de los conceptos y el análisis de las actividades realizadas, valorando lo aprendido y fomentando el aprendizaje autónomo.

Para alcanzar dichos fines, el grupo clase se organizará de distintas maneras en función del tipo de actividad a realizar, siendo las más frecuentes las indicadas en el siguiente cuadro.

Tabla N° 16. Organización del grupo clase.

Tipo de agrupación	Actividad
Gran grupo	Exposiciones del profesor Coloquios Debates
Pequeño grupo	Resolución de problemas Trabajo con las TIC
Individual	Resolución de problemas Estudio

Nota: Organización del grupo clase. Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla N° 17 se relacionan los recursos materiales que se prevé utilizar y las actividades en las que está previsto su uso.

Tabla N° 17. Recursos materiales.

Recurso	Actividad
Libro de texto	Exposiciones del profesor Estudio Propuesta de actividades/problemas
Ordenador en casa o en el aula de informática	Resolución de problemas Trabajo con las TIC Búsquedas en internet
Software	Resolución de problemas Visualización de construcciones geométricas

Nota: Recursos materiales. Fuente: Elaboración propia.

5.3.3. Actividades y temporalización

La unidad didáctica Geometría analítica se impartirá en 12 sesiones de 55 minutos de duración cada una, la última de las cuales consistirá en un examen, impartidas a lo largo de tres semanas de acuerdo con la siguiente secuencia.

5.3.3.1. 1ª sesión. Introducción

Se introducirá la unidad didáctica mediante una clase magistral en la que se haga referencia al proceso histórico que ha seguido su desarrollo, a los principales matemáticos que han estudiado el tema y a los aspectos prácticos o cotidianos en los que se utilice. Tras esta introducción se establecerá un coloquio entre los alumnos para buscar ejemplos cotidianos del empleo de vectores y rectas.

5.3.3.2. 2ª sesión. Vectores fijos y libres en el plano

Explicación de los conceptos de vector fijo del plano, vector de posición, vectores equipolentes, vectores libres y coordenadas de un vector dado por dos puntos.

Realización de ejercicios por parejas del tipo:

- a) Obtener las coordenadas de uno de los extremos de un vector sabiendo las coordenadas de éste y del otro extremo.
- b) Dadas una serie de puntos bien por coordenadas bien situados en unos ejes cartesianos, calcular los vectores que los unen y señalar cuáles son equipolentes.

5.3.3.3. 3ª sesión. Operaciones con vectores libres. Combinación lineal de vectores

Expresión algebraica y explicación gráfica de la suma de vectores y del producto de un número por un vector. Combinación lineal de vectores y obtención del punto medio de un segmento.

Realización, por parejas o en pequeños grupos, de ejercicios como:

- a) Dados varios vectores, realizar las operaciones que se indiquen.
- b) Estudiar la dependencia o independencia de varios vectores dados.

5.3.3.4. 4ª y 5ª sesiones. Producto escalar de dos vectores. Aplicaciones

Introducción del concepto de módulo de un vector. Explicación del producto escalar de dos vectores a partir de sus módulos y el ángulo que forman o en función de sus coordenadas. Obtención del ángulo que forman dos vectores y de la distancia entre dos puntos.

Realización por parejas o individualmente de ejercicios como los siguientes:

- a) Cálculo del producto de dos vectores.
- b) Obtención del módulo de un vector.
- c) Determinación de la perpendicularidad o el paralelismo entre dos vectores.

5.3.3.5. 6ª sesión. Repaso de las operaciones con vectores mediante GeoGebra

Mediante el uso del ordenador de clase conectado al proyector se realizarán distintas operaciones con vectores en *GeoGebra*. En el Anexo N° 1 a este trabajo figuran capturas de imágenes de la actividad propuesta.

5.3.3.6. 7ª, 8ª y 9ª sesiones. Ecuaciones de la recta

A partir de la ecuación vectorial se obtendrán el resto de ecuaciones de la recta, en su orden lógico: la paramétrica, la continua y la general y, finalmente, la ecuación explícita y la ecuación punto-pendiente.

Se realizarán ejercicios individuales y por parejas del tipo de los siguientes:

- a) Escribir de todas las formas posibles la ecuación de una recta que pase por un punto dado y tenga la dirección de un vector también dado, o que pase por dos puntos conocidos.
- b) Determinar la pendiente de una recta o un punto de la misma a partir de distintas ecuaciones de la recta.

5.3.3.7. 10ª sesión. Posición relativa de dos rectas

Explicación de los conceptos de rectas secantes, paralelas y coincidentes. Relación en cada caso entre las pendientes y ordenadas en el origen si las rectas se definen mediante sus ecuaciones explícitas o entre los coeficientes si lo hacen mediante sus ecuaciones generales.

Se realizarán ejercicios individuales y por parejas del tipo siguiente:

- a) Estudiar la posición relativa de varios pares de rectas dadas y hallar su punto de corte en caso de ser secantes.

5.3.3.8. 11ª sesión. Obtención de las ecuaciones de una recta con GeoGebra. Posiciones relativas entre rectas y obtención del punto de corte, en su caso

En el aula de informática y trabajando por parejas, los alumnos determinarán las ecuaciones de la recta mediante el uso de *GeoGebra*. Igualmente determinarán las posiciones relativas entre dos rectas distintas y su punto de corte si lo hubiere. En el Anexo N° 2 a este trabajo se presentan capturas de imagen de la actividad propuesta.

5.3.3.9. 12ª sesión. Examen

Realización de un examen sobre los contenidos de la unidad. Los ejercicios serán similares a los realizados en clase y constarán de varios apartados con dificultad creciente.

6. Aportaciones del trabajo

La principal aportación del trabajo es mostrar los beneficios del uso de *GeoGebra* en la enseñanza de Geometría en 4º de la ESO, mediante la presentación de una propuesta didáctica que combine el uso de dicho software con las metodologías tradicionales y proponga un aprendizaje activo y participativo de los alumnos.

A través de la bibliografía consultada y de los informes analizados se han constatado las dificultades por las que atraviesa la enseñanza de las matemáticas y concretamente los contenidos del bloque de Geometría. Como se ha expuesto en el marco teórico, estas dificultades derivan en buena medida de la falta de motivación que experimentan los alumnos frente a la asignatura.

Esta propuesta didáctica trata de resultar motivadora para los alumnos a través del uso de las TIC y del empleo de una metodología participativa en el aula. Asimismo, pretende fomentar el aprendizaje significativo desde una perspectiva constructivista a partir de los conocimientos previos de los alumnos, favoreciendo el autoaprendizaje y la posibilidad de expandir sus conocimientos por medio del uso de un software libre y gratuito, no sólo en el aula, sino también en casa.

Por otra parte, los resultados del estudio de campo han confirmado la postura favorable de los docentes respecto a la utilización de las TIC para la enseñanza de las matemáticas.

Por tanto, consideramos que esta metodología se adapta a esa visión de los docentes y constituye una herramienta útil para tratar de mejorar los resultados de los alumnos en el aprendizaje de la Geometría de 4º de ESO.

7. Discusión

Lo indicado por Godino, Batanero y Font (2003) respecto al uso de materiales didácticos en la enseñanza de matemáticas en la educación primaria, es perfectamente extrapolable al caso de la secundaria, pues para ayudar a construir conocimientos matemáticos deben combinarse diversos factores en una secuencia de aprendizaje. Consideramos que la propuesta presentada da cumplimiento a todos los factores que Godino et al. (2003) enumeran:

- a) *Papel activo de los alumnos.* La propuesta metodológica fomenta el papel activo y el trabajo colaborativo de los alumnos.
- b) *Uso de materiales que ayuden a representar la propuesta.* En este caso ese papel lo asume el software *GeoGebra*.
- c) *Que la manipulación no sea silenciosa.* En la propuesta se consideran varios tipos de agrupamiento para la realización de las actividades, incidiendo en la participación y el trabajo colaborativo de los alumnos.
- d) *Ayudar a generalizar, a encontrar la norma, promoviendo experiencias similares.* *GeoGebra* es un recurso que se adecúa perfectamente a este objetivo al permitir la manipulación de objetos geométricos y observar los resultados de forma instantánea tanto gráfica como algebraicamente.
- e) *Importancia de la mecanización.* Las matemáticas deben practicarse para tener un dominio de las mismas economizando esfuerzos. La propuesta también incluye actividades tradicionales de resolución de ejercicios para cumplir con este factor.

Pese a lo afirmado por Abrate et al. (2006) respecto al empleo de los recursos tradicionales de forma mayoritaria, estamos de acuerdo con Resneir (2001, citado en Area, 2005, sección 5, párr. 4), y así lo corrobora la opinión de los encuestados en el estudio de campo, cuando dice que no considera que en el caso de Internet y las tecnologías digitales vaya a decaer el interés y el entusiasmo como ocurrió con otros medios educativos novedosos tales como los medios audiovisuales y los primeros ordenadores. A juzgar por el uso masivo que los dispositivos móviles tienen entre los adolescentes, su condición de nativos digitales nos lleva a pensar que cada vez las TIC tendrán más peso específico en las metodologías didácticas, sobre todo con la incorporación de docentes que tengan la dicha condición.

8. Conclusiones

El desarrollo de este trabajo ha permitido cumplir todos y cada uno de los objetivos planteados inicialmente. Estas son las conclusiones obtenidas a través de su realización:

1. En relación al objetivo *Analizar la situación actual del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y valorar la incorporación de cambios metodológicos para facilitar dicho proceso*, el análisis de varios informes y estudios internacionales han puesto de relieve dicha necesidad. Concretamente los informes PISA de los años 2003 y 2012, focalizados en las matemáticas han arrojado resultados similares por debajo de la media de los países de nuestro entorno, evidenciando que en dicho período no se ha producido ninguna mejoría, siendo el apartado de Geometría el que presenta peores resultados. Lo mismo cabe decir del informe TIMSS 2011, confirmando la necesidad de incorporar cambios metodológicos para invertir esta tendencia. Por tanto, el objetivo se ha cumplido.
2. Respecto al objetivo *Describir los contenidos específicos que integran el bloque de Geometría de 4º de ESO, opción B de acuerdo a la normativa estatal y de la Comunidad Autónoma de Madrid*, se han recopilado los contenidos y competencias básicas propuestos en Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen y las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria y en el Decreto 23/2007 de 10 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Con la información presentada en el marco teórico al estudiar dicha legislación se considera cumplido este objetivo.
3. En referencia al objetivo *Conocer las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en 4º de la ESO*, se han señalado la falta de conocimientos previos de los alumnos y la ubicación temporal dentro de la programación del curso, así como la falta de vinculación entre visualización, experimentación, razonamiento lógico y argumentación y el no emplear contextos cotidianos en su explicación, centrándose ésta en el estudio memorístico de áreas y volúmenes, como las principales dificultades. Además, el estudio de

campo ha resaltado qué contenidos son los más difíciles de enseñar y aprender en opinión de los profesores. Con todo ello se considera alcanzado este objetivo.

4. En cuanto al objetivo *Comparar los contenidos y prestaciones de la aplicación GeoGebra con los de otros softwares similares (Wiris, Cabri) para la unidad didáctica de Geometría*, se han presentado las principales características de las tres aplicaciones citadas valorando pros y contras de las mismas. Por su parte, en el estudio de campo se ha preguntado a los profesores encuestados por el conocimiento y uso de aplicaciones matemáticas, resultando las aquí citadas como las más conocidas y empleadas. Con los datos aportados en el marco teórico y en el estudio de campo se considera cumplido este objetivo.
5. Finalmente, como conclusión, se afirma que se ha cumplido el objetivo principal del presente trabajo que no ha sido otro que *Desarrollar una metodología didáctica para la enseñanza del bloque de Geometría a los alumnos de la opción B de Matemáticas de 4º de ESO basada en el uso de GeoGebra*. La propuesta didáctica está fundamentada en el marco teórico y en el estudio de campo, incidiendo en dos de los contenidos que más dificultades plantean tanto a alumnos como a profesores en el proceso enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Las sesiones preparadas combinan los recursos tradicionales con el uso de *GeoGebra* en dos de ellas, como quedan recogidas en los Anexos N° 1 y N° 2. En nuestra opinión, la metodología propuesta es aplicable no sólo a la Geometría sino también a otros contenidos matemáticos, por lo que se considera cumplido el objetivo principal.

9. Limitaciones del trabajo

Como casi todo en educación, el tiempo es el principal enemigo. El poco tiempo que se ha tenido para la realización de este Trabajo Fin de Máster ha constituido su principal limitación pues no ha permitido poner en práctica la propuesta presentada y valorar los resultados obtenidos de su aplicación. No obstante, las conclusiones del trabajo muestran que dicha propuesta es válida para la enseñanza del bloque de Geometría. La limitación del tiempo ha quedado reflejada también en el modo de obtener la información para el trabajo de campo: ha tenido que hacerse mediante cuestionarios en lugar de realizar entrevistas personales a los encuestados.

El tiempo también ha influido en la necesidad de acotar el trabajo a un bloque concreto y la propuesta a una unidad didáctica de dicho bloque. Sin embargo, lo que en principio es una limitación revierte en una mayor concreción en lo que al marco teórico y al estudio de campo se refiere, al no tener que extenderse a todo el currículo de la asignatura. Por el contrario, si bien de la literatura consultada y del propio manual del programa *GeoGebra* se extrae la conclusión de su versatilidad para la enseñanza de otros bloques, la limitación temporal a la que se alude no ha permitido constatarlo.

Que el estudio de campo únicamente recoja la opinión de los profesores supone otra limitación, agravada por lo reducido del tamaño de la muestra empleado en él. No obstante, el rango de edades de los encuestados, el equilibrio entre sexos y el hecho de que los profesores pertenezcan a un centro público y a otro concertado confiere a la muestra un carácter ciertamente universal.

Finalmente, también puede considerarse una limitación para la elaboración de este trabajo la falta de experiencia docente, pues puede comportar ciertos errores que en todo caso han tratado de evitarse a través de la consulta a docentes del centro en el que el autor del trabajo ha realizado las prácticas correspondientes a este Máster.

10. Líneas de investigación futuras

Par poder realizar una valoración más ajustada de la propuesta didáctica hubiera sido importante haberla puesto en práctica de modo que pudiera valorarse. Esto permitiría corregir aspectos que no cumplan lo esperado y añadir en futuras propuestas didácticas otros que se hayan soslayado en esta ocasión.

La propuesta se ciñe a una unidad didáctica concreta del bloque de Geometría de 4º de la ESO. Por tanto, se podrían realizar investigaciones futuras en otros bloques de este curso o en otros cursos. Además, puesto que se ha pretendido dotar a la propuesta de un enfoque competencial, se podría investigar en la incidencia que las TIC tienen en el desarrollo de las distintas competencias básicas.

Asimismo, y dado que además del enfoque competencial la propuesta pretende desarrollarse en un marco constructivista, otra línea de investigación interesante sería el estudio del impacto que el uso de las TIC en cursos anteriores tiene al llegar a un determinado curso.

Por otra parte, como quiera que el software matemático considerado en la propuesta ha sido *GeoGebra*, los nuevos trabajos de investigación podrían focalizarse en otras aplicaciones matemáticas que únicamente han sido esbozadas en éste o en la comparación entre varias aplicaciones.

11. Referencias bibliográficas

11.1. Referencias

- Abrate, R.S., Delgado, G.I. y Pochulu, M.D. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 39(1), 1-9. Recuperado el 18 de abril de 2014 de: <http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf>
- Ancochea, B. (2011). *Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria*. Material no publicado. Recuperado el 18 de mayo de 2014 de: <http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/Bernat-CITAD-III-2011.pdf>
- Area, M. (2004). Las tecnologías de la información y comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las líneas de investigación. *Revista Electrónica de investigación y evaluación educativa*, 11(1). Recuperado el 18 de abril de 2014 de: http://www.uv.es/RELIEVE/v11n1/RELIEVEv11n1_1.htm
- Arias Cabezas, J. M. y Maza Sáez, I. (2006). Uso de las tecnologías de la información y la comunicación en matemáticas para la ESO y los bachilleratos. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9.1, 223-243. Recuperado el 22 de abril de 2014 de: <http://www.infoymate.es/investiga/rsme/rsme.pdf>
- Ávila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México: Paidós.
- Cabrilog SAS (2007). *Cabrilog*. [Página de Internet]. Disponible en: web www.cabri.com/es/software-matematicas.html
- Decreto 23/2007, de 10 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 126, de 29 de mayo de 2007, p. 48-139.
- García Peña, S. y Pérez Escudero, O. L. (2008). *La enseñanza de la Geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Recuperado el 19 de abril de 2014 de: <http://www.oei.es/pdf2/ensenanza-geometria-mexico.pdf>
- Godino, J.D, Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. En Godino, J. D. (Dir.), *Matemáticas y su didáctica para maestros* (pp. 7-154). Recuperado el 24

- de mayo de 2014 de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf
- Hohenwarter, M. y Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. *BSRLM Geometry Working Group. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126-131. Recuperado el 21 de abril de 2014 de: <http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip27-3/BSRLM-IP-27-3-22.pdf>
- International GeoGebra Institute (2013a). *GeoGebra*. [Página de Internet]. Disponible en: web www.geogebra.org/cms/es/info
- International GeoGebra Institute (2013b). *GeoGebra*. [Página de Internet]. Disponible en: web www.geogebra.org/cms/es/roadmap
- International GeoGebra Institute (2013c). *GeoGebra*. [Página de Internet]. Disponible en: web <http://blog.geogebra.org>
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de *Educación*. Boletín Oficial del Estado, 106, de 4 de mayo de 2006, p. 17158-17207.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, *para la mejora de la calidad educativa*. Boletín Oficial del Estado, 295, de 10 de diciembre de 2013, p. 97858-97921.
- Losada Liste, R. (2007). Geogebra: la eficiencia de la intuición. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 10(1), 223-239. Recuperado el 20 de abril de 2014 de: http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/software/2005/geogebra/ayuda_para_Geogebra/geogebra.pdf
- Maths for More, S.L. (s.f.). *Wiris*. [Página de Internet]. Disponible en: web www.wiris.com/es/cas
- Mato Vázquez, M.D. (2010). Mejorar las actitudes hacia las matemáticas. *Revista galego-portuguesa de psicología e educación*, 18-1, 19-32.
- Ministerio de Educación y Ciencia. Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (2003). *Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España*. Recuperado el 22 de abril de 2014 de: <http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003resumenespana.pdf?documentId=0901e72b80110700>
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P. y Arora, A. (2011). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. Recuperado el 24 de abril de 2014 de:

http://timssandpirs.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf

OECD (2013). *PISA 2012 results in focus. What 15-year-olds know and what they can do with what they know*. Recuperado el 19 de abril de 2014 de: <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf>

Pérez, S. y Guillén, G. (2008). *Estudio exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria*. Comunicación en el simposio de investigación en educación matemática XII. Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Recuperado el 20 de abril de 2014 de: <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Com09PerezGuillen.pdf>

Pérez, S., y Soler, G. G. (2008). *Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza*. En Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007 (pp. 295-306). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Boletín Oficial del Estado, 5, de 5 de enero de 2007, p. 677-773.

Sánchez Muñoz, J. M. (2011). Experiencias Docentes. Visualización de Lugares geométricos mediante el uso de Software de Geometría Dinámica Geogebra. *Pensamiento matemático*, 1, 1-20. Recuperado el 25 de abril de 2014 de: http://www2.camino.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/lugares_geometricos_y_geogebra.pdf

Wiris (2007). *Manual Wiris 2.2*. Recuperado el 9 de mayo de 2014 de: <http://www.wiris.com/wiris/manual/es/>

11.2. Bibliografía complementaria

García Hoz, Víctor (1995). *Enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria*. Madrid: Rialp.

Goñi, Jesús María (coord.) (2011). *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar*. Barcelona: Editorial Graó.

12. Anexos

Los Anexos N° 1 y N° 2 desarrollan sendas actividades incluidas en la propuesta didáctica en las que se utiliza *GeoGebra* para desarrollar los temas de operaciones con vectores en el primer caso y las ecuaciones y posición relativa de dos rectas en el segundo.

En el Anexo N° 3 se incluye el cuestionario utilizado en el trabajo de campo, cuya justificación se ha incluido en el apartado 3.4.1.

Finalmente el Anexo N° 4 incluye una tabulación de las respuestas obtenidas en dicho cuestionario para facilitar su tratamiento estadístico.

12.1. Actividad de la 6ª sesión de la propuesta didáctica

Esta actividad se desarrollará en el aula mediante el ordenador conectado al proyector y en ella se va a proceder a la suma de dos vectores con *GeoGebra*. Para ello, en primer lugar se crearán dos vectores a partir de dos puntos dados A(1,3) y B(3,2).

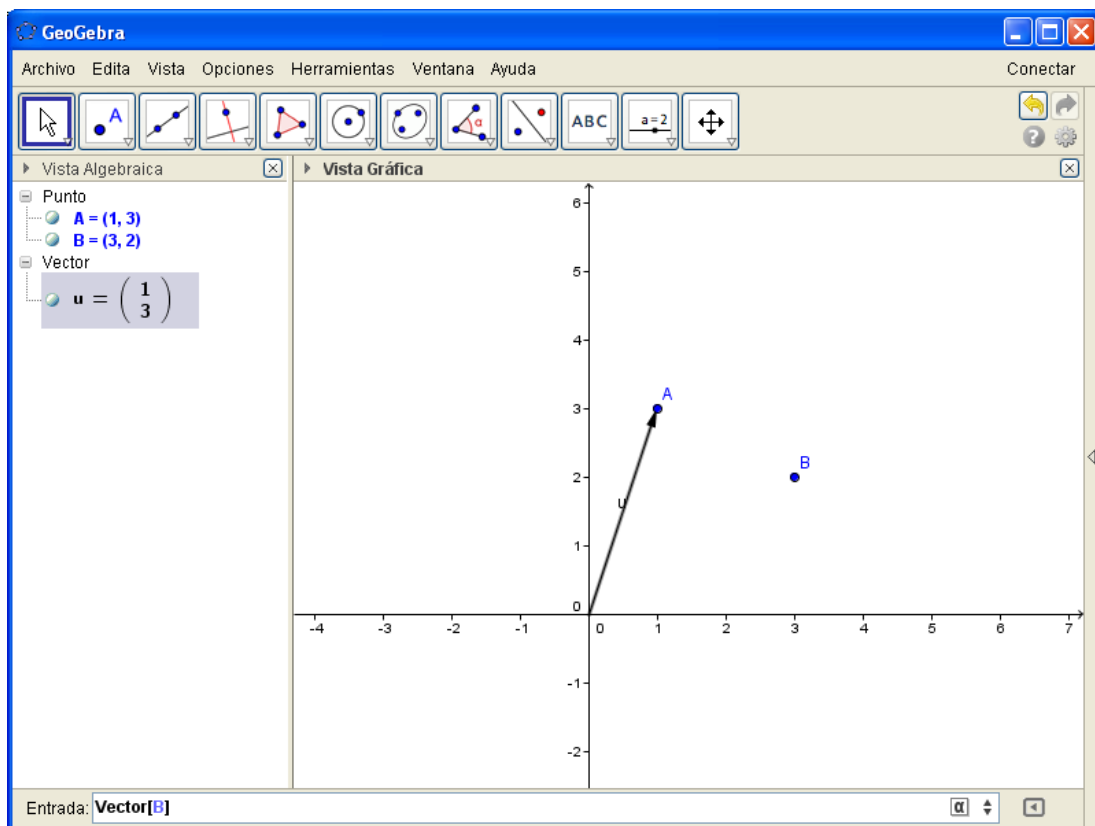


Figura N° 7. Definición de los vectores. Fuente: Elaboración propia.

La creación de los vectores se realiza en la barra de entrada mediante el comando *Vector* y la introducción del nombre del punto entre los corchetes. En la figura anterior ya hemos definido el vector u, cuyo origen es el (0,0) y su final el

punto $A(1,3)$, y tenemos preparado en la barra de entrada el comando para definir el vector v tras pulsar *Intro*.

La suma de los dos vectores se realizará introduciendo en la barra de entrada $u+v$ o bien el comando $Vector[A+B]$. El resultado es el que se muestra en la Figura N°8. Como se aprecia en la vista algebraica, las coordenadas del vector suma son la suma de las coordenadas de los vectores originales.

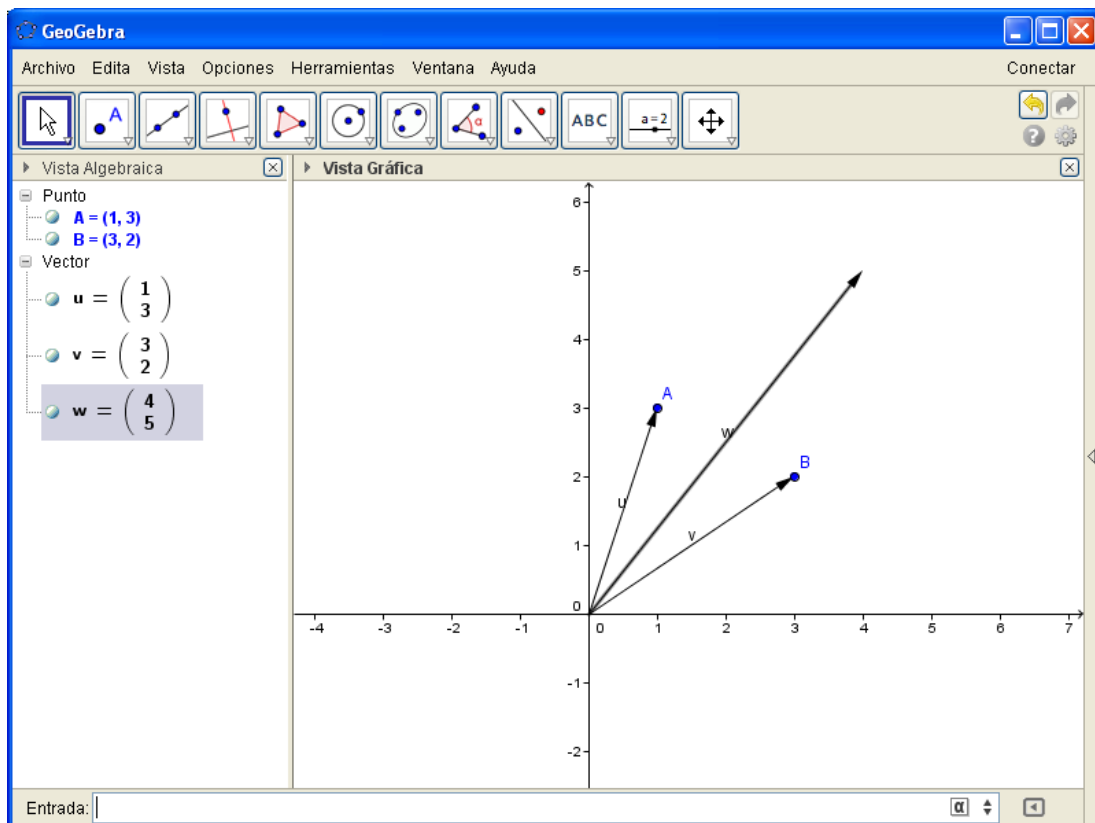


Figura N° 8. Vector suma. Fuente: Elaboración propia.

La construcción gráfica de se lleva a cabo formando el paralelepípedo que forman con los vectores dados dos rectas que pasan por el extremo de cada vector y llevan la dirección del otro. La intersección de dichas rectas será el extremo del vector suma y el origen será el origen de los vectores dados. Para crear estas rectas utilizamos el siguiente comando $Recta[\langle Punto \rangle, \langle Vector\ director \rangle]$. El resultado se observa en la Figura N°9.

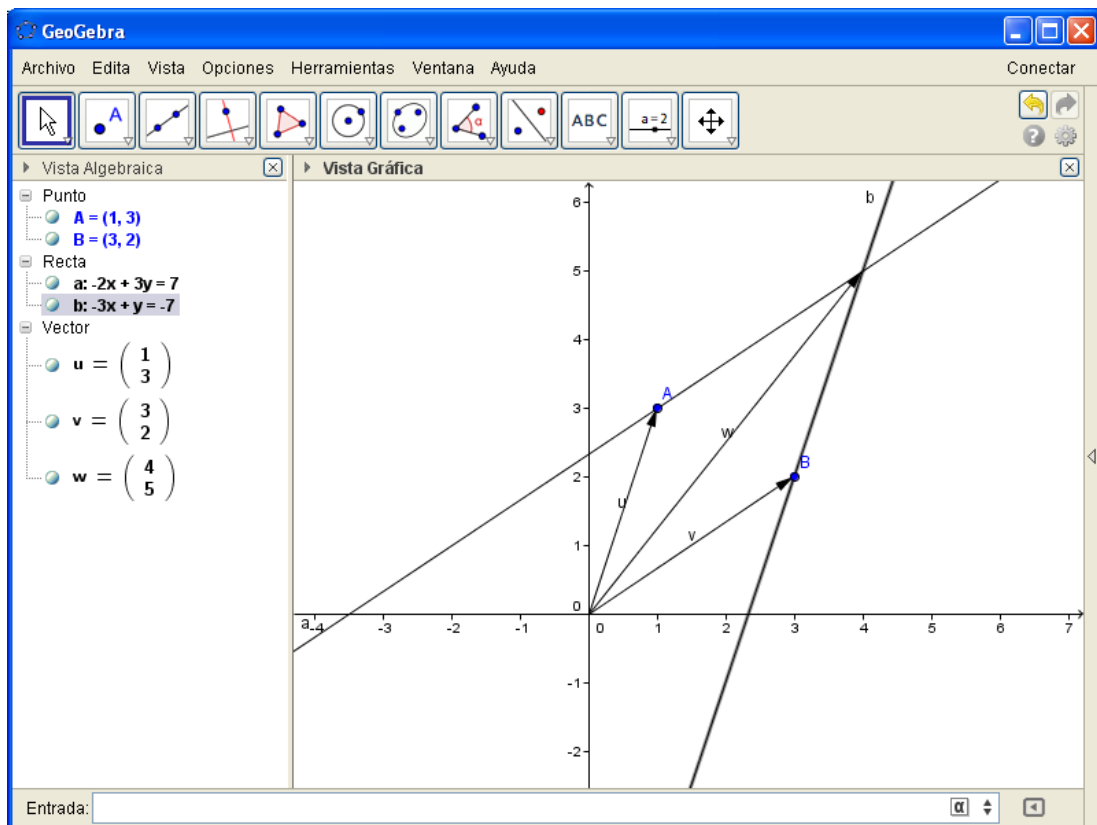


Figura N° 9. Construcción gráfica del vector suma. Fuente: Elaboración propia.

12.2. Actividad de la 11ª sesión de la propuesta didáctica.

Esta sesión se está previsto desarrollarla en el aula de informática y tiene como objetivo estudiar las posiciones relativas entre rectas y la obtención del punto de corte, en su caso.

Para ver la posición hay que comparar los coeficientes de las dos rectas que forman el sistema, pudiendo adoptar las rectas las tres posiciones siguientes:

Rectas secantes: $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$; *Rectas paralelas:* $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ y *Rectas coincidentes:* $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

Para el trabajo con *GeoGebra* se definirán dos rectas genéricas $r: ax+by=c$ y $s: dx+ey=f$ y se crearán deslizadores para los coeficientes a, b, c, d, e y f .

Una vez definidos los elementos anteriores se resolverán los siguientes casos concretos:

- a) $r: x+y=2$
 $s: x-2y=-4$
- b) $r: y=3x+5$
 $s: 3x-y=8$

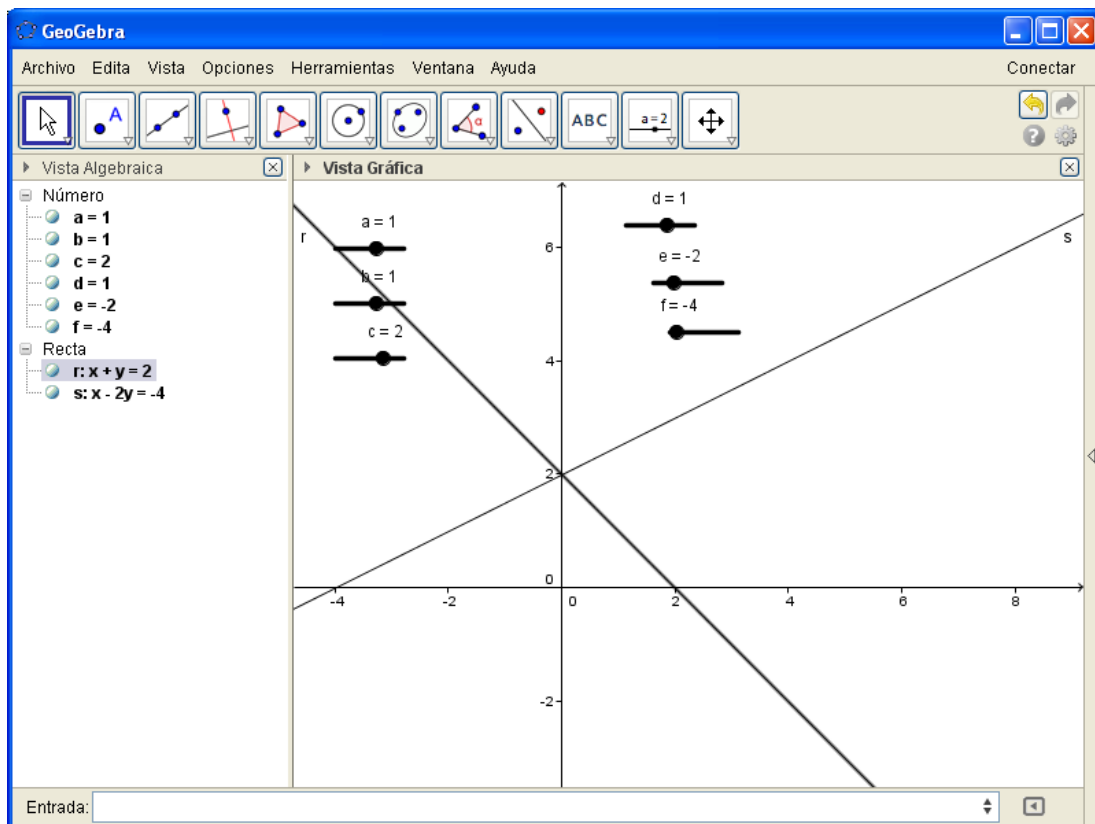


Figura N° 10. Posición relativa de las rectas en el caso a). Fuente: Elaboración propia.

En el caso a) se observa que $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} \equiv \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}$, y por tanto se trata de rectas secantes. La intersección de ambas rectas se produce en el punto (0,2) como se observa en la figura anterior. Este punto será la solución del sistema de ecuaciones formado por ambas rectas.

Para resolver el caso b), primero ordenaremos las ecuaciones para ver los coeficientes. Así tendremos:

$$r: -3x+y=5$$

$$s: 3x-y=8$$

Su representación en *GeoGebra* una vez dispuestos los coeficientes en los deslizadores se observa en la figura siguiente.

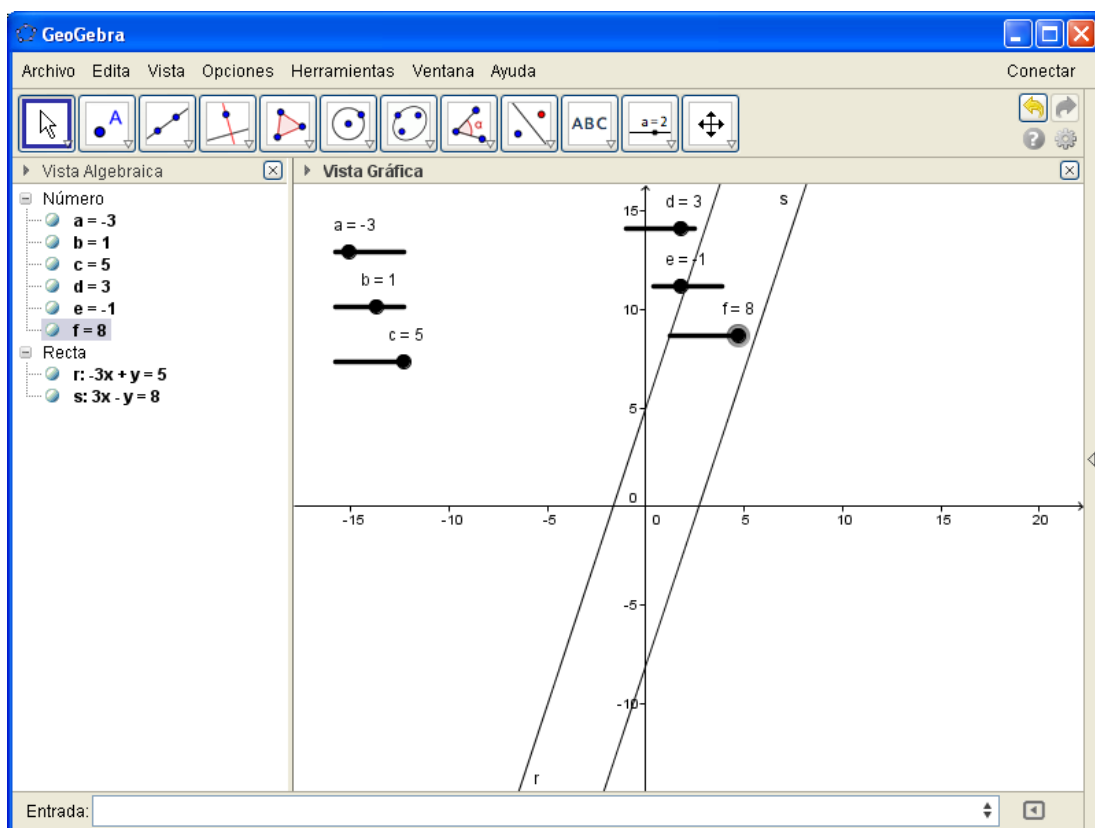


Figura N° 11. Posición relativa de las rectas en el caso b). Fuente: Elaboración propia.

En este caso, las rectas son paralelas pues $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \equiv \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1}$ y no comparten ningún punto.

12.3. Cuestionario

1. Edad

- Menos de 25 años Entre 46 y 55 años
 Entre 26 y 35 años Entre 56 y 65 años
 Entre 36 y 45 años Más de 65 años

2. Sexo

- Hombre Mujer

3. Tipo de centro en el que imparte clase

- Público Concertado

4. ¿En qué trimestre se imparte en su centro el bloque de Geometría?

- 1^{er} trimestre 2^o trimestre 3^{er} trimestre

5. ¿Considera adecuado el tiempo dedicado a impartir el bloque de Geometría?

- Sí No

6. ¿Qué contenidos del bloque de Geometría trabaja más en sus clases? Por favor, ordene del 1 al 5, siendo 1 el menos trabajado y 5 el más trabajado

- Teorema de Tales. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Resolución de triángulos
 Razones trigonométricas. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo y de distintos ángulos
 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos
 Vectores. Operaciones con vectores. Producto escalar y módulo de vectores
 Ecuaciones de la recta. Posición relativa de dos rectas

7. ¿Qué contenidos del bloque de Geometría encuentra más complicados de trabajar en clase? Por favor, ordene del 1 al 5, siendo 1 el menos costoso y 5 el más costoso

- Teorema de Tales. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Resolución de triángulos
 Razones trigonométricas. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo y de distintos ángulos
 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos
 Vectores. Operaciones con vectores. Producto escalar y módulo de vectores
 Ecuaciones de la recta. Posición relativa de dos rectas

8. ¿Qué contenidos del bloque de Geometría les cuesta más comprender a los alumnos? Por favor, ordene del 1 al 5, siendo 1 el menos costoso y 5 el más costoso
- Teorema de Tales. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Resolución de triángulos
 - Razones trigonométricas. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo y de distintos ángulos
 - Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos
 - Vectores. Operaciones con vectores. Producto escalar y módulo de vectores
 - Ecuaciones de la recta. Posición relativa de dos rectas
9. ¿Está familiarizado con algún software matemático?
- Sí No
10. En caso de haber respondido afirmativamente a la pregunta anterior señale con una X con cuál de ellos.
- GeoGebra Descartes Regla y compás
 - Wiris Derive Otros
 - Cabri MathLab
11. ¿Utiliza en clase algún software matemático para impartir el bloque de Geometría?
12. En caso de haber respondido afirmativamente a la pregunta anterior señale con una X con cuál de ellos.
- GeoGebra Descartes Regla y compás
 - Wiris Derive Otros
 - Cabri MathLab
- Sí No
13. ¿Considera que el uso de software matemático es beneficioso para el proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque de Geometría?
- Sí No

12.4. Tabulación de los resultados del cuestionario

	Sujeto 1	Sujeto 2	Sujeto 3	Sujeto 4	Sujeto 5	Sujeto 6	Sujeto 7	Sujeto 8	Sujeto 9	Sujeto 10	Sujeto 11	Sujeto 12	Sujeto 13	Sujeto 14	Sujeto 15	Sujeto 16
Edad																
Menos de 25																
26 a 35	32							34								
36 a 45		44							41							
46 a 55			50	54						46		39	38			
56 a 65					65	58	56							47	49	46
Más de 65																65
Sexo (Hombre/Mujer)	M	M	H	H	H	H	H	M	H	H	H	M	M	H	M	M
Tipo de centro (Público/Concertado)	P	P	P	P	P	P	P	C	C	C	C	C	C	C	C	C
Trimestre en el que se imparte Geometría	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Considera adecuado el tiempo dedicado a impartir Geometría	S	S	N	N	N	S	N	N	S	N	S	S	N	N	S	N
Contenidos más trabajados																
Teorema de Tales. Semejanza.																
Resolución de triángulos	1	1	3	1	2	2	1	2	1	1	2	1	1	1	2	2
Trigonometría	5	5	4	4	3	4	5	3	5	5	4	3	4	4	3	3
Áreas y volúmenes	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	3	2	1	1
Vectores	3	3	2	3	4	3	3	5	3	3	3	4	2	3	4	5
La recta	4	4	5	5	5	5	4	4	4	4	5	5	5	5	5	4
Contenidos más complicados de explicar																
Teorema de Tales. Semejanza.																
Resolución de triángulos	5	1	3	2	1	2	4	2	1	2	2	2	1	1	1	2
Trigonometría	4	3	4	5	3	5	3	3	3	5	3	3	3	4	5	4
Áreas y volúmenes	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2	2	1
Vectores	3	4	2	3	4	3	1	5	4	3	4	4	5	3	4	5
La recta	2	5	5	4	5	4	5	4	5	4	5	5	4	5	3	3
Contenidos más complicados de aprender																
Teorema de Tales. Semejanza.																
Resolución de triángulos	2	3	2	3	3	4	1	2	2	3	2	1	1	2	2	1
Trigonometría	4	4	3	5	5	3	4	4	4	5	3	4	5	4	3	5
Áreas y volúmenes	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2
Vectores	3	2	4	2	2	2	3	3	3	2	4	3	4	3	4	3
La recta	5	5	5	4	4	5	5	5	5	4	5	5	3	5	5	4
Conoce algún software matemático	S	S	S	S	S	S	S	S	S	N	S	S	S	S	S	S
Qué software matemático conoce																
GeoGebra	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
Wiris	1	1			1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
Cabri	1				1	1	1	1			1	1		1	1	
Descartes	1	1			1		1									
Derive		1			1			1							1	
Mathlab					1											
Regla y compás					1											
Otro					1											
Usa en clase algún software matemático	S	S	N	N	S	N	S	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Cuál																
GeoGebra	1	1			1		1									
Wiris					1											
Cabri																
Descartes																
Derive																
Mathlab																
Regla y compás																
Otro																
Considera beneficioso el uso de software matemático para el proceso enseñanza-aprendizaje	S	S	N	N	S	N	S	S	S	N	S	S	N	N	S	N