

Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

**Escuela Superior de Ingeniería y
Tecnología**

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Modelado y
simulación del
fenómeno de flutter
en los aviones
variando el aspecto
ratio

Trabajo Fin de Máster

presentado por: Gamba Torres Juan Carlos

Línea de investigación: Métodos numéricos y modelado y simulación

Director/a: Antolinez Garcia Alfonso

Resumen

Al realizar el análisis de estructuras en las aeronaves es importante determinar la influencia de las cargas, la velocidad de diseño, la geometría y forma del perfil, así como otros factores que contribuyen a la estabilidad de las aeronaves. La estabilidad dinámica, propiamente dicho es la interacción de las fuerzas inerciales de la estructura con las fuerzas aerodinámicas, que induce a una estructura a oscilar en frecuencias que no es capaz de soportar, lo que ocasiona que la estructura falle. Uno de los fenómenos aeroelásticos de inestabilidad dinámica más estudiados es el flutter, el cual ocurre cuando las fuerzas aerodinámicas asociadas con el movimiento causan que la estructura vibre y se alcance una velocidad crítica donde ocurre la falla. El objeto de este estudio es determinar para un modelo de ala rígido y otro flexible, si al variar parámetros propios del ala de una aeronave este efecto se minimiza o se presenta con menor influencia.

Palabras Clave: Aspect ratio, envergadura, cuerda, cuerda media aerodinámica, flutter.

Abstract

When to make a design of aircraft structures analysis is essentially establish the influence to have some parameters and variables as loads, design speeds, airfoil geometry and shape, for define the contribution to aircraft stability. Dynamical stability, mainly this is the way the aerodynamical forces in motion interact with the structure, because this perturbation induces to vibrate the wing in frequencies that structure not endure in this case occurs a failure. One of the instabilities aeroelastic phenomenon with major researches is the flutter, whom occurs when aerodynamical forces associated with motion cause several vibrations on the structure and then in a short period of time the structure reach the flutter speed limit and cause failure. The main objective of this study is defining a mathematical model for a rigid system and flexible system and change some parameters of the airplane, specifically parameters of the wing to notice if the effect of flutter reduces.

Keywords: Aspect ratio, span, chord, mean aerodynamical chord, flutter.

Índice de contenidos

Capítulo I: Introducción	5
1.1. Justificación del trabajo.....	6
1.2. Planteamiento del problema.....	7
1.3. Objetivos.....	8
Capitulo II: Revisión del estado del arte	9
2.1. Análisis de flutter en las alas de las aeronaves.....	9
2.2 Análisis de flutter, modelos matemáticos y simulación.....	13
Capitulo III: Metodología	16
3.1. Aeroelasticidad dinámica: Flutter.....	16
3.2. Movimiento armónico: La función de Theodorsen.....	18
3.2.1. Sustentación y momento aerodinámicos en un perfil para movimientos armónicos.....	21
3.2.2. Modelo aerodinámico inestable simplificado.....	22
3.3. Geometría y dimensionamiento inicial de perfiles alares.....	24
3.4. Variación de la relación de aspecto del ala.....	25
Capitulo IV: Resultados de la investigación	29
4.1. Modelo y código de simulación.....	29
4.2. Análisis y discusión de resultados.....	35
Capítulo V: Conclusiones	45
5.1. Prospectiva y actividades de mejora.....	46
Capítulo VI: Bibliografía	48
ANEXOS	

Índice de Figuras

1. Ventrakamani procedimiento experimental.....	8
2. Sección de ala.....	11
3. Comparación de frecuencias de flutter forma modal versus Ansys.....	14
4. Oscilaciones por flexión y torsión y efecto de desestabilización.....	19
5. Perfil en 2D bajo movimientos de rotación y traslación.....	21
6. Referencia ala trapezoidal.....	24
7. Perfil trapezoidal.....	25
8. Elipse.....	26
9. Cuerda media aerodinámica perfil trapezoidal.....	27
10. Frecuencia y amortiguamiento ala rectangular.....	36
11. Existencia de flutter con alto aspect ratio.....	37
12. Frecuencia y amortiguamiento ala trapezoidal.....	38
13. Ala trapezoidal flexible módulos bajo.....	39
14. Ala trapezoidal flexible módulos altos.....	40
15. Ala elíptica método de Stender.....	41
16. Ala elíptica método de Stender-flexible.....	42
17. Ala elíptica-sistema rígido.....	43
18. Ala elíptica-sistema flexible.....	44

CAPITULO I: INTRODUCCIÓN

El análisis de estructuras para aeronaves se ha convertido en uno de los campos de mayor interés durante los últimos años gracias a que con los avances tecnológicos, la implementación de nuevos materiales, y el auge económico, volar se ha convertido en una de las opciones más seguras, fiables y económicas para transportarse. Sin embargo, con el sacrificio de peso en algunas ocasiones se minimiza la seguridad, y con la implementación de nuevos materiales, ocurren fenómenos que son capaces de generar cargas excesivas sobre la estructura de una aeronave, que podrían ocasionar un accidente catastrófico. Entre estos fenómenos, se puede describir la fatiga que se ocasiona en los componentes debido al material, a excentricidades en la carga entre otras. Otro fenómeno poco estudiado en los últimos años se conoce como el fenómeno de flutter o el fenómeno de inestabilidad dinámica de un cuerpo elástico debido a la acción de las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre el ala. Básicamente el flutter es una vibración autoinducida en la cual la estructura extrae energía del aire circundante y provoca una falla sobre la estructura.

En alguna velocidad crítica, conocida como la velocidad de flutter la estructura sufre oscilaciones con una perturbación inicial. Este tipo de fenómeno envuelve diversos modos de interacción que se pueden presentar sobre el ala, como torsión/flexión, torsión/ superficies de control entre otros.

En el desarrollo de este trabajo se pretende desarrollar un modelo matemático y una simulación del flutter en las alas de las aeronaves variando la relación de aspecto, como una aproximación para determinar si las vibraciones podrían ocasionar una falla catastrófica sobre la estructura del ala.

1.1 Justificación del trabajo

El interés por investigar este tema surge de la necesidad de crear un modelo matemático y una simulación para casos reales donde se presentan vibraciones en las alas de las aeronaves debido al fenómeno del flutter. El flutter descrito anteriormente es un suceso por el cual se presenta inestabilidad dinámica gracias no solo a la forma y cuerpo del perfil de la aeronave sino a las velocidades y aceleraciones laterales y rotacionales que sobre el actúan[1].

Dicho esto, es fundamental determinar cómo este tipo de evento afecta la maniobrabilidad y el desempeño de las aeronaves, además, variando la relación de aspecto del ala, se puede llegar a inferir si es o no un factor determinante para que el suceso ocurra o no, y si es así, como se puede llegar a minimizar.

El aspecto ratio, es una característica geométrica que se aplica al diseño o performance de aeronaves, y básicamente se refiere a la capacidad de sustentación que puede generar un ala reduciendo la presión que se genera sobre el perfil. Si una aeronave tiene un aspecto ratio alto, tiende a generar menos vórtices en las puntas del perfil, que una con aspecto ratio bajo. Además, al tener una relación de aspecto alta, el ala no experimenta tantas pérdidas de sustentación[2].

Con estos indicios es vital determinar si la acción de las cargas en vuelo que se generan debido a las fuerzas aerodinámicas, junto con las características geométricas del ala son relevantes para que se genere flutter. Este estudio busca determinar por medio de un modelo matemático y una simulación determinar la relevancia y generación de flutter cuando se afectan las características geométricas del ala (Aspecto ratio).

1.2 Planteamiento del problema

Durante mucho tiempo uno de los grandes misterios para el hombre fue la necesidad de poder volar. A medida que la tecnología fue avanzando en este campo, se llegó a estudiar diversas ramas de la aeronáutica como lo es la aerodinámica, las estructuras, entre otras con el fin de determinar algunos fenómenos que ocurren sobre las aeronaves que décadas atrás era imposible de estudiar.

La aeroelasticidad es uno de ellos, y es un fenómeno que describe la interacción de la aerodinámica, la inercia y las fuerzas elásticas para una estructura flexible como el caso de un perfil alar. El primer estudio significativo realizado de flutter fue hecho, modelado y resuelto por Lanchester & Bairstow, los cuales investigaron porque ocurrían oscilaciones antisimétricas violentas sobre el fuselaje y la cola de un bombardero biplano de la primer guerra mundial[3].

Luego de esto diversos estudios en el campo de inestabilidad dinámica se han publicado con el objetivo de estudiar el flutter o cualquier otro fenómeno asociado a él. Sin embargo, es de vital importancia estudiar los efectos de diseño y performance que tienen que cumplir las aeronaves para volar, y como estos afectan la distribución de cargas y esfuerzos sobre la aeronave. Como es el caso del aspect ratio, que es una relación geométrica entre la envergadura del ala y la superficie. La cual considerando si esta relación es alta o baja, aumenta o disminuye significativamente el coeficiente de sustentación de la aeronave, y aumenta la resistencia al avance[4]. Como el flutter es un fenómeno que está asociado directamente con la inestabilidad dinámica que depende de las cargas y no solo del ángulo de ataque del ala, se puede entonces inferir que las características geométricas del perfil, su forma, y relaciones podrían afectar esta condición.

Conociendo este contexto la pregunta de investigación que surge es: ¿el fenómeno de flutter se ve afectado por la variación del aspect ratio? Esta es la pregunta que por medio de un modelo y simulación matemática se intentara resolver.

1.3 Objetivos

Tomando en cuenta las cuestiones planteadas en la justificación y planteamiento del problema, se presentan a continuación el objetivo general y los objetivos específicos.

1.3.1 Objetivo general

Definir y desarrollar un modelo matemático y simulación del fenómeno de flutter sobre las alas de las aeronaves variando el aspect ratio.

1.3.2. Objetivos específicos

- Determinar si la variación de relación de aspecto reduce las vibraciones y el fenómeno de flutter sobre la estructura del ala
- Obtener un modelo matemático para determinar el flutter sobre las aeronaves
- Simular mediante un software bajo diferentes condiciones el fenómeno de flutter y si existe u ocurre tratar de minimizarlo.

CAPITULO 2: REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE

“El flutter en las alas de las aeronaves es posiblemente uno de los fenómenos aeroelásticos con más dificultad para predecir. Esto debido a que es una vibración auto excitada en la cual la estructura extrae energía del aire circúndate y en algunos casos genera un fallo estructural catastrófico.”[5]

A continuación, se hará una revisión del estado del arte de algunos trabajos relacionados con el fenómeno de flutter.

2.1 Análisis de Flutter en las alas de las aeronaves

El flutter es un fenómeno peligroso el cual se presenta en estructuras flexibles que están sujetas a fuerzas aerodinámicas. Este se puede presentar en aeronaves, edificaciones en incluso puentes, y es el resultado de la interacción de fuerzas de inercia, rigidez y fuerzas aerodinámicas sobre la estructura. En las aeronaves en especial este suceso se presenta a que la velocidad del ala se incrementa y la estructura no es capaz de amortiguar el movimiento generado debido al incremento de la energía aerodinámica adicionada. Esta energía adicional puede producir vibraciones severas sobre la estructura que causan falla.

El flutter se inicia básicamente por la rotación del perfil, como las fuerzas que actúan en él se incrementan, esto ocasiona que el perfil se eleve, ocasionando que la rigidez torsional del perfil lo haga retornar a un ángulo de cero rotaciones. Aquí las fuerzas internas que interactúan en el perfil, como lo es la rigidez por flexión, intenta retornar ahora el perfil a su posición natural, pero en ese momento el perfil rota de nuevo, ese tipo de movimientos se incrementan con el tiempo y tienden a amortiguar el movimiento de caída del perfil, en cambio que el movimiento de rotación diverge. Si este tipo de movimiento es permitido y continua, las fuerzas debidas a la rotación causarían la falla estructural del sistema.[6]

Complementando esta información, el flutter clásico se asocia a flujo potencial y usualmente involucra el acople de dos o más grados de libertad. Para describir el fenómeno físico que se asocia se deben asumir ciertas hipótesis a la hora de evaluar el perfil alar en un túnel de viento,

la primera es que el perfil no tiene ángulo de barrido y no posee un alerón, además, debe tener un soporte rígido en la raíz. Todo esto con el fin de incrementar la velocidad en el túnel para incrementar la razón de oscilaciones de amortiguamiento sobre él. Al incrementar y decrecer la velocidad del viento sobre el perfil, las oscilaciones se incrementan violentamente, en estas instancias el perfil sufre una inestabilidad oscilatoria que es conocida como el fenómeno de flutter.

Los modelos matemáticos básicos pueden ser representados y realizados bajo frecuencias en el orden de 0-40 Hz, para aeronaves de largo alcance, 0-60 Hz para aeronaves comerciales pequeñas, y de 0-80 Hz para aeronaves militares, como lo describen Panda et al en su documento.[7]

Ventrakamani et al, llevaron experimentos a cabo en un túnel de viento para determinar como las fluctuaciones del flujo sobre un perfil aerodinámico incrementaban la inestabilidad dinámica sobre una estructura flexible. En su estudio experimental trabajaron con un perfil NACA 0012 simétrico, con una longitud de cuerda de 100 mm y 500 mm de envergadura. Para poder llevar a cabo el experimento el perfil fue expuesto a una velocidad máxima de 25 m/s y fue sujeto por resortes en las puntas para simular los movimientos oscilatorios (figura 1) a los que estaría sujeto el perfil. Después de evaluar las posibles respuestas los autores concluyen que al estar sujeto el perfil a perturbaciones del flujo, enseguida que aparece el flutter, aparece un régimen de intermitencia, en el cual hay entropía, y si esta, se identifica de forma efectiva se puede prevenir la aparición de flutter. [8].

Al evaluar la presencia de flutter en las alas se debe considerar tanto la geometría y forma del perfil, así como el tipo de perfil si es simétrico, asimétrico o elíptico en alguno de los casos. Bertrand et al, llevaron a cabo un estudio experimental para evaluar la velocidad crítica de flutter, bajo tres parámetros de vuelo pertinentes, el aspect ratio, el ángulo de ataque y el movimiento giratorio de la propela. En su estudio pudieron determinar que la velocidad crítica de flutter decrecía con el aumento del aspect ratio. Mientras que respecto a la evaluación de los otros dos parámetros al relacionar un aspect ratio alto, el ángulo de ataque es vital para retrasar la inestabilidad del ala debido al flutter.[9].

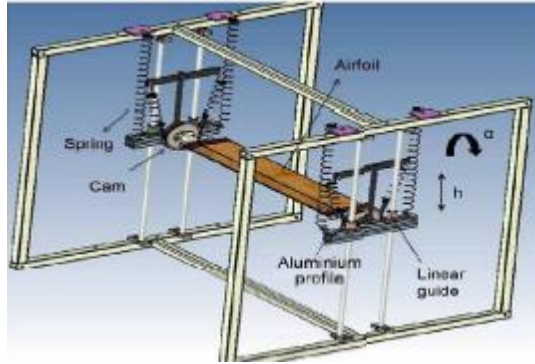


Figura 1. Ventrakamani procedimiento experimental[8]

Diversos experimentos han sido llevados a cabo para caracterizar el flutter y la divergencia, el estudio llevado a cabo por Sodja et al[10], fue una aplicación experimental para identificar las inestabilidades aeroelásticas. Este experimento se desarrolló con dos grados de libertad, montando un perfil alar en un túnel de viento. En este experimento descrito en la figura 2, el sistema tiene dos grados de libertad, uno en cabeceo y el otro en movimiento vertical, al cual se le aplica un método paramétrico de margen para determinar el flutter, en el cual la matriz del sistema contiene las variables de la masa estructural, el amortiguamiento y la matriz de rigidez, tomando en cuenta que la frecuencia va a depender de la matriz de coeficientes aerodinámicos. Los resultados de este estudio determinaron que, al utilizar este método, diferente del tradicional, se puede evidenciar que en la predicción del flutter apenas difiere de un 0.4% con respecto al método convencional, y debido a que la precisión del método es alta es de gran aporte al estado del arte para realizar pruebas de inestabilidades aeroelásticas.

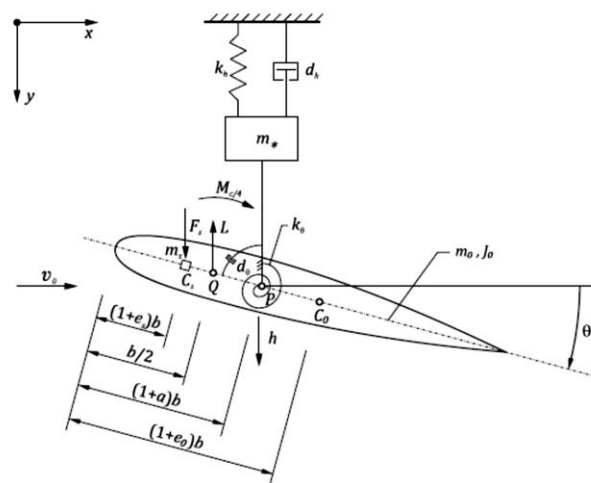


Figura 2. Sección de ala[10]

Otros estudios como el desarrollado por Banarjee et al[11], en el cual investigaron la influencia del flutter y las vibraciones para dos diferentes aspect ratio en alas de aeronaves fue presentado. En este trabajo asumieron un ala idealizada con un acople de flexión-torsión usando el método de rigidez dinámica, y para su solución lo hicieron por el algoritmo de Wattrick-Williams. El análisis fue realizado por medio del software FORTRAN, al cual le añaden un código llamado CALFUN (Calculation of flutter speed using normal modes) para diferentes tipos de aeronaves, incluidas aeronaves de transporte comercial, planeadores y el estudio concluyo que por medio del algoritmo se puede llegar a una velocidad de flutter cercana a la teórica, además, la relación de aspecto juega un papel importante en la predicción de la velocidad critica de flutter.

Evaluando diferentes configuraciones para aeronaves subsónicas, el aspect ratio es un factor determinante para la presencia de flutter sobre el ala, Balakrishnan et al[12] presentan una metodología para calcular las velocidades de flutter a altos aspect ratio, el modelo que utilizan posee dos grados de libertad uno en movimiento vertical flexión, y el otro en cabeceo y torsión, utilizando modelos dinámicos continuos, los cuales son de gran ayuda a la hora de realizar el análisis de flutter y mejoran la aproximación realizada por CFD. Los resultados del análisis confirman que se presenta inestabilidad dinámica para alas donde la envergadura es mayor a 200 pies y las velocidades están por debajo de 40 ft/s. Además, el modelo demuestra que al incorporar mas paneles y más puntos de masa el flutter decrece, sin embargo, no es relevante si aumentan las masas localizadas sobre la estructura, pues el efecto sobre la velocidad de flutter es pequeño si la envergadura permanece constante.

Algunas veces otros tipos de configuraciones geométricas pueden realizarse para determinar los efectos de flutter en las aeronaves. En la investigación realizada por Harmin et al[13] se propone variar la configuración de las costillas del ala para observar el impacto que produce en las características de aeroelasticidad. En el estudio se desarrolla un modelo por elementos finitos basados en el método P-k, en el cual desarrollan cinco diferentes configuraciones encontrando que la mejor configuración o disposición de las costillas es en ángulos de 45° , 0° y -45° , es decir una configuración en zigzag, todo el desarrollo del modelo se hizo mediante los softwares MATLAB y MSC NASTRAN.

Entre diversos estudios que se han realizado el de Fujino y Oyama[14] estudia las características de flutter en aeronaves de categoría transporte tipo bussiness jet, para hacer el estudio de estas características los autores desarrollaron un código computacional que consiste en un análisis de flutter, un análisis de vibraciones y un análisis de sensibilidad. Luego del análisis de resultados se puede concluir que las características de flutter en la configuración donde el motor es montado

sobre el ala se ve influenciada por las vibraciones que este produce sobre ella. La velocidad de flutter llega a ser alta cuando la frecuencia es cercana a 0.9 veces la frecuencia de torsión de ala, además, la solución por medio del código ERIN relacionado en este artículo es una buena aproximación para predecir el fenómeno de flutter en velocidades en régimen transónico.

Finalmente para concluir la primera revisión del estado del arte en modelos matemáticos sobre flutter en las aeronaves, es importante destacar la contribución de Moosavi et al[15] en el cual desarrollan un método para predecir la velocidad y la frecuencia a la cual ocurrirá la inestabilidad dinámica debido al flutter, este método es desarrollado con base al método Galerkin, usando tres grados de libertad, definiendo las condiciones de contorno y el problema de autovalor diferencial se puede llegar a una solución aproximada por el método de Galerkin. Los resultados de la investigación determinaron que cuando el fluido se trata como compresible, la velocidad y la frecuencia de flutter tienen una caída significativa tanto que si el fluido fuera incompresible.

2.2 Modelos matemáticos de flutter, vibraciones y simulación sobre aeronaves

Diversos modelos matemáticos y simulaciones por medio de software como Matlab, ansys entre otros han tratado de explicar el fenómeno de flutter que ocurre sobre las aeronaves, a continuación, se describirán algunos de estos estudios realizados.

En el estudio desarrollado por Peng y Jinglong[16], donde estudiaron el flutter sobre las aeronaves de transporte comercial con diferentes configuraciones en winglets y una configuración en C de wingtip, se simuló un método por medio de las ecuaciones de Euler en un software CFD, y las vibraciones fueron calculadas por dinámica estructural computacional, en la figura 3, se muestran algunos de los resultados de la investigación, en cuatro formas modales y a las frecuencias naturales, con el análisis realizado en las diferentes configuraciones se recalca que la presencia del wingtip en C reduce la estabilidad aeroelástica del ala, básicamente la adición de un winglet sobre el ala reduce la velocidad de flutter en un 14% y mejora la frecuencia de flutter en un 2%.

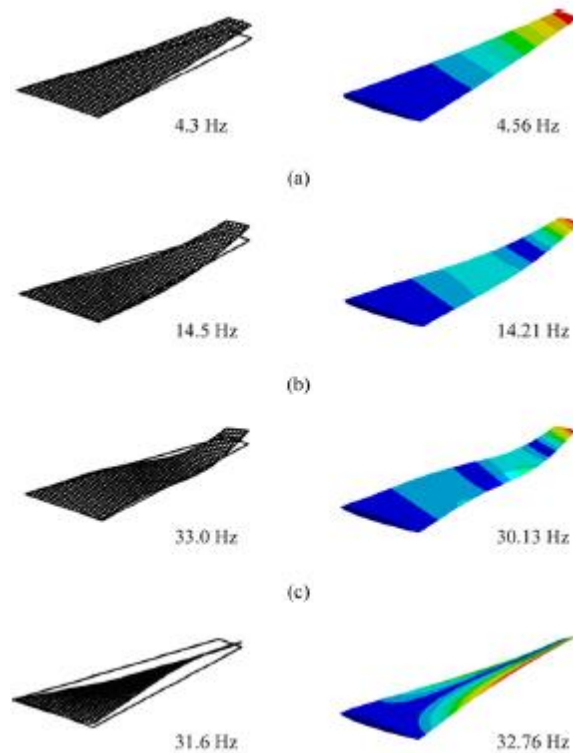


Figura 3 Comparación de frecuencias de flutter forma modal vs ANSYS[16]

Otro modelo similar de fluidos computacional y modelo de estructuras dinámico fue desarrollado para predecir el flutter. En su investigación Liu et al[17], realizaron un acople entre un modelo CFD que es basado en un algoritmo que rige las ecuaciones de Navier-Stokes y un modelo estructural que se rige bajo un modelo dinámico por medio de elementos finitos. Para el desarrollo de esta simulación se hizo una interfaz entre el CFD y el CSD por medio del software MSC Nastran, los resultados computacionales se hicieron para un modelo 2D en el cual se simulan movimientos de flexión y torsión, con dos grados de libertad, uno en cabeceo y el otro en movimiento vertical. Para poder obtener la precisión necesaria en la respuesta del sistema serían necesarios de 3 a 5 periodos de tiempo. Para el modelo 3D se utilizó un perfil AGARD 445.6, y los resultados de la prueba de flutter indicaron que se presenta un buen comportamiento para flujo subsónico y transónico.

Mukhopadhyay desarrollo un modelo para análisis de flutter como una etapa de diseño conceptual. El objetivo de este trabajo era estimar los límites de inestabilidad de flutter que se presentan en el ala, cuando no son conocidos a detalle los datos estructurales y aerodinámicos. Para este estudio utilizo códigos de software realizados en Mathcad y Matlab. El análisis inicial se basó en la geometría del ala, requiriendo datos de entrada como la cuerda de raíz, cuerda de

punta y la semi envergadura. Los resultados de esta investigación dejaron como conclusión que el código y el programa utilizados para definir las características de flutter fue optima, tomando como base el número de Regier (ecuación 1) y el número de flutter (ecuación 2) cuando no se conocen las condiciones iniciales[18][19].

$$R = \frac{w_r * b * \sqrt{\mu}}{a} \quad Ec. 1$$

Donde w_r es la frecuencia de referencia, b es la longitud de referencia, μ es la relación de masas y a es la velocidad del sonido.

El número de flutter por su parte está definido como:

$$F = \frac{Mach Flutter}{R} \quad Ec. 2$$

Otras investigaciones como la de Koreanshi [20] toman como referencia un nuevo tipo de tecnología conocida como alas tipo morphing, las cuales están fabricadas con polímeros especiales, y tienen la capacidad de recuperar su forma debido a que poseen memoria. En la investigación realizada se hizo el estudio para dos tipos de perfiles uno en material compuesto y el otro en aluminio convencional utilizado en aviación, además, las simulaciones se realizaron en el software MSC Nastran, el modelo desarrollado tiene elementos en 1D, 2D y 3D y para la solución de análisis de flutter se utiliza el método p-k, que ofrece el programa, finalmente los resultados arrojados por la investigación luego de hacer el respectivo análisis de las gráficas modales y de la simulación, se concluye que los materiales compuestos ofrecen una mínima influencia en las características aeroelasticas del ala.

Un estudio significativo fue el realizado por Prahbu y Srinivas, ellos investigaron la influencia que tendría la posición de los motores sobre el ala para el apareamiento de flutter, en su estudio utilizaron un modelo matemático de cuarto orden Runge-Kutta, para expresar las ecuaciones del sistema, después de realizar un análisis ANOVA de las variables que se involucran en el sistema, se encontró que la influencia de los motores es un parámetro de alta influencia para que el flutter se presente, seguido a ello, se pudo inferir luego del análisis de resultados que cuando los motores se posicionan en un 30% de longitud con respecto a la envergadura, es donde se presenta la inestabilidad dinámica y que el mejor método para predecir la velocidad de flutter es un análisis por red neuronal artificial (ANN) [21].

Irani y Sazesh, realizaron un nuevo análisis para predecir el flutter por medio de una aproximación estocástica, el análisis realizado se hizo para dos casos de estudio, el primero para un perfil en 2D para flujo subsónico y el segundo para condiciones no estacionarias en flujo incompresible basados en las propiedades de Goland. El análisis de flutter se realiza por los métodos convencionales, como el método p-k, y el método p, las ecuaciones del sistema se desarrollan por principio de trabajos virtuales mediante Lagrange, al comparar la velocidad de flutter por los diferentes métodos propuestos, con la aproximación estocástica se encuentra que este método da como resultado una buena aproximación comparada con los convencionales, gracias a que al utilizar probabilidades gaussianas reduce el gasto computacional de manera significativa[22][23].

CAPITULO III: METODOLOGIA

3.1 Aeroelasticidad dinámica: flutter

El flutter se define como la inestabilidad dinámica en un cuerpo elástico en una corriente de aire producida por las fuerzas aerodinámicas lo que resulta en la deflexión elástica del cuerpo.

Para determinar la frecuencia y modo de vibración de la estructura las ecuaciones que gobiernan estos fenómenos se describen en la ecuación 3 y 4:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \text{ sistema masa/resorte Ec. 3}$$

Donde k es la constante de rigidez del resorte.

La oscilación de la masa se da por:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \epsilon) \text{ Ec 4.}$$

Donde $\omega^2 = k/m$ y ϵ es el ángulo de fase.

El modo general para determinar las frecuencias y los modos normales se puede realizar bajo dos aproximaciones, una por desplazamientos y otra por rigidez, en las cuales el resorte o las fuerzas elásticas son expresadas en términos de parámetros de rigidez tal como K, y la flexibilidad o método de fuerza en el cual las fuerzas elásticas son expresadas en términos de δ de flexibilidad en el sistema elástico. Definido esto la ecuación de movimiento para el sistema masa-resorte es la que se presenta en la ecuación 5:

$$m\ddot{x} + \frac{x}{\delta} = 0 \text{ Ec. 5}$$

Con delta se estructura a el método de fuerza que expresa en términos de flexibilidad el sistema elástico. En problemas que involucran oscilación rotacional m es el momento de inercia de la masa y δ la rotación o desplazamiento por unidad de momento.

Referenciando lo anterior el sistema en modo normal oscila en un movimiento armónico, en donde la solución para la i-esimo modo toma la forma descrita en la ecuación 6 y se reemplaza y modifica en las ecuaciones 7 y 8.

$$x = x_i^0 \sin(\omega t + \varepsilon) \quad \text{Ec. 6}$$

Entonces:

$$\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i^0 \sin(\omega t + \varepsilon) = -\omega x_i \quad \text{Ec. 7}$$

El sistema masa resorte para un número finito n , de grados de libertad y un número i -ésimo de masas, queda como:

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{x}_j \delta_{ij} + x_i = 0 \quad \text{Ec. 8}$$

Modificando la ecuación 8 e incluyendo el modo normal para movimientos armónicos, el sistema masa-resorte queda definido por la ecuación 9 y la forma matricial se muestra en la ecuación 10.

$$-\omega^2 \sum_{j=1}^n m_j \ddot{x}_j \delta_{ij} + x_i = 0 \quad \text{Ec. 9}$$

Una solución no trivial para el sistema implica que $x_i \neq 0$ y el determinante sea cero. La solución del sistema queda como:

$$\begin{vmatrix} (\omega^2 m_1 \delta_{11} - 1) & \omega^2 m_2 \delta_{12} \dots & \omega^2 m_i \delta_{1i} \dots & \omega^2 m_n \delta_{1n} \\ \omega^2 m_1 \delta_{21} & (\omega^2 m_2 \delta_{22} - 1) & \omega^2 m_i \delta_{2i} \dots & \omega^2 m_n \delta_{2n} \\ \omega^2 m_1 \delta_{i1} & \omega^2 m_2 \delta_{i2} & (\omega^2 m_i \delta_{ii} - 1) \dots & \omega^2 m_n \delta_{in} \end{vmatrix} \quad \text{Ec. 10}$$

La solución de las ecuaciones del sistema anterior da las frecuencias normales de vibración.

El flutter ocurre a una velocidad crítica de flutter v_f la cual es definida como la velocidad aerodinámica más baja a la cual una estructura oscilara con un movimiento armónico sostenido simple. Volar a velocidades por encima o por debajo de la velocidad de flutter representa condiciones de oscilación estructural estable e inestable (lo que se conoce como divergencia).

Por lo general, un sistema elástico posee un solo grado de libertad a menos que en él se presente alguna característica mecánica extraña o irregular como por ejemplo una fuerza de un resorte negativa o una fuerza de amortiguamiento negativa. Sin embargo, es posible que un sistema posee más de un grado de libertad que en este caso se asocia a las fuerzas que con él interactúan causando oscilaciones divergentes en ciertos estados de fase. En el caso particular del ala de una aeronave, los modos de flexión y torsión son un claro ejemplo de este tipo de inestabilidad.

Considerando el ala en la figura 4 sometida a varias etapas de oscilación de flexión-torsión. En una posición a cero flexión el ala causa una incidencia geométrica positiva y las fuerzas aerodinámicas se generan en la misma dirección del movimiento del ala. Caso contrario se genera cuando la incidencia geométrica es negativa. Básicamente las fuerzas aerodinámicas que se producen debido a la incidencia efectiva del ala son opuestas al movimiento en todas las etapas, esas fuerzas aerodinámicas asociadas con la incidencia geométrica del ala generan un efecto de desestabilización. A la velocidad de flutter esa desestabilización se hace grande y las oscilaciones divergen.

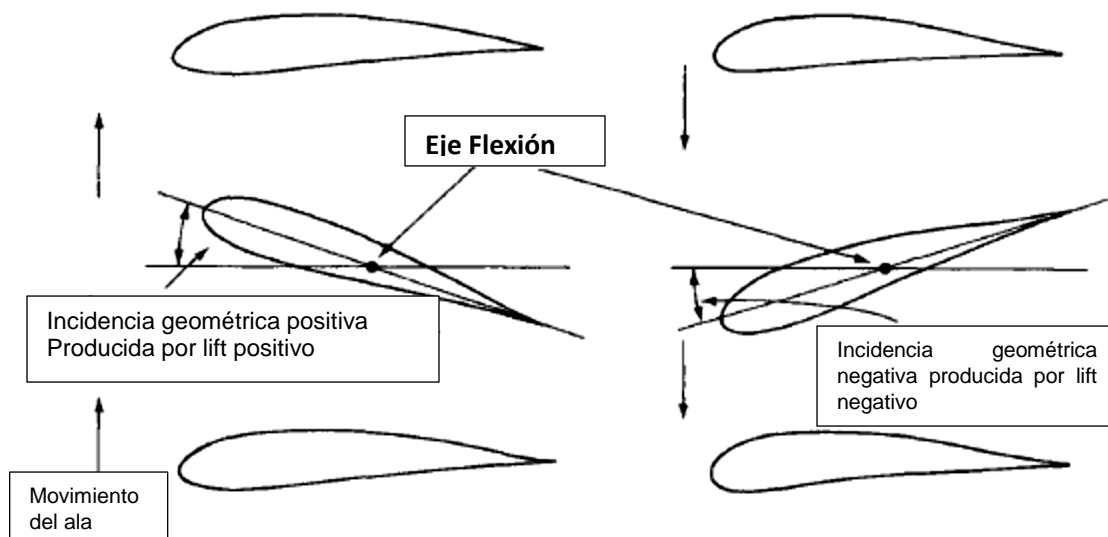


Figura 4 Oscilaciones por flexión y torsión y efecto de desestabilización[24]

3.2. Movimiento armónico- La función de Theodorsen

Cuando se trata de aerodinámica inestable, es más conveniente utilizar características de movimiento en función de la frecuencia. Con un perfil aerodinámico, el cual está oscilando a una frecuencia ω y aplicando la convolución por la función de Wagner se puede conocer la evolución temporal de la sustentación, es en este punto que se evalúa la variación de la frecuencia de oscilación. Como la frecuencia aumenta, la amplitud de la fuerza aerodinámica inestable disminuye, y hay un cambio en la fase (retraso).

La amplitud de la atenuación y el retraso de fase son función adimensional del parámetro de frecuencia v donde se describe por medio de la ecuación 11 así:

$$v = \frac{\omega c}{V} \quad \text{Ec. 11}$$

Lo cual se interpreta como el número de oscilaciones que sufre un perfil durante el tiempo en el cual el flujo de aire viaja a través de la cuerda, multiplicado por 2π .

Sin embargo, en algunas ocasiones se usa el parámetro de reducción de frecuencia κ , el cual es la relación geométrica de la semicuerda descrito en la ecuación 12.

$$\kappa = \frac{\omega b}{V} = \frac{\omega c}{2V} = \frac{v}{2} \quad \text{Ec. 12}$$

Para modelar la aerodinámica inestable se utiliza la función de Theodorsen, la función de Theodorsen se describe de la siguiente manera por medio de las ecuaciones 13, 14 y 15.

$$C(k) = F(k) + iG(k) \quad \text{Ec. 13}$$

En la cual $C(k)$ representa una cantidad compleja que requiere un cambio en la amplitud y fase.

La función de reducción de frecuencia es:

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} = \frac{K_1(ik)}{K_0(ik) + K_1(ik)} \quad \text{Ec. 14}$$

Donde los términos K_j son funciones de Bessel modificadas del segundo tipo y $H_n^{(2)}(k)$ son funciones de Hankel de segundo tipo. Una aproximación de la función $C(k)$ es[5]:

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.045}{k}i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.30}{k}i}, k \leq 0.5$$

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.041}{k}i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.32}{k}i}, k \geq 0.5 \quad \text{Ec. 15}$$

3.2.1 Sustentación y momento aerodinámicos en un perfil para movimientos armónicos

Si se considera un perfil simétrico en 2D, con un coeficiente de momento ($C_{M0} = 0$), con cuerda c , y con el eje de flexión posicionado a una distancia $ab(=ac/2)$ arriba de la cuerda media, como se muestra en la figura 5, el perfil sufre un movimiento armónico oscilatorio en translación y rotación, dado respectivamente por las ecuaciones 16 y 17.

$$\gamma = \gamma_0 e^{i\omega t} \quad \text{Ec. 16}$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{i\omega t} \quad \text{Ec. 17}$$

La solución clásica para la sustentación y el momento alrededor del eje de flexión, puede expresarse por unidad de envergadura [5],[24], la mejor descripción matemática de este fenómeno se puede visualizar por medio de las ecuaciones 18 y 19.

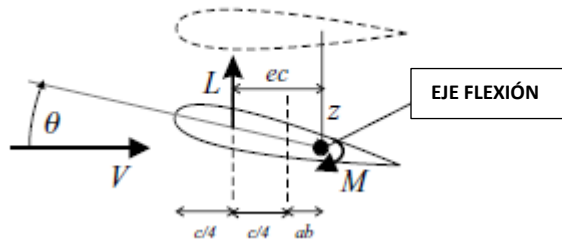


Figura 5 Perfil en 2D bajo movimientos de rotación y translación[5]

$$L = \pi\rho b^2[\dot{\gamma} + V\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}] + 2\pi\rho VC(k) \left[\dot{\gamma} + V\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] \quad \text{Ec. 18}$$

$$M = \pi\rho b^2 \left[\dot{\gamma} ba - Vb\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} - b^2\left(\frac{1}{8} + a^2\right)\ddot{\alpha} \right] + 2\pi\rho Vb^2\left(a + \frac{1}{2}\right)C(k) \left[\dot{\gamma} + V\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] \quad \text{Ec. 19}$$

Para realizar un análisis apropiado de un perfil en dos dimensiones es necesario verificar la ecuación 20, que muestra la relación que se da en la figura 5, con un eje de flexión posicionado a una distancia ec arriba del centro aerodinámico y a una distancia ab adelante de la cuerda media.

$$ec = \frac{c}{4} + ab = \frac{c}{4} + \frac{ac}{2} \quad \text{Ec. 20}$$

3.2.2 Modelo aerodinámico inestable simplificado

Para calcular la sustentación y el momento por unidad de envergadura es necesario determinar las derivadas y sustituir por la forma compleja con el teorema o la función de Theodorsen, derivando las ecuaciones 18 y 19 respectivamente, así se obtiene la solución en las ecuaciones 21 y 22.

$$L = \rho V^2 b \left[(L_\gamma + ikL_{\dot{\gamma}}) \frac{\gamma_0}{b} + [(L_\alpha + ikL_{\dot{\alpha}})\alpha_0] e^{i\omega t} \right] \text{ Ec. 21}$$

$$M = \rho V^2 b \left[(M_\gamma + ikM_{\dot{\gamma}}) \frac{\gamma_0}{b} + [(M_\alpha + ikM_{\dot{\alpha}})\alpha_0] e^{i\omega t} \right] \text{ Ec. 22}$$

Expresadas las ecuaciones, el siguiente paso es determinar el amortiguamiento y rigidez aerodinámicos.

Relacionando entonces las ecuaciones 11-17 e incluyendo

$$\dot{\alpha} = i\omega\alpha_0 e^{i\omega t}$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones 21 y 22 entonces se consigue el modelo matemático aerodinámico inestable presentado en las ecuaciones 23 a 26.

$$L = \rho V^2 b \left(L_\gamma \gamma + L_{\dot{\gamma}} \frac{b\dot{\gamma}}{V} + L_\alpha b\alpha + L_{\dot{\alpha}} \frac{b^2\dot{\alpha}}{V} \right) \text{ Ec. 23}$$

$$M = \rho V^2 b \left(M_\gamma b\gamma + L_{\dot{\gamma}} \frac{b^2\dot{\gamma}}{V} + M_\alpha b^2\alpha + M_{\dot{\alpha}} \frac{b^3\dot{\alpha}}{V} \right) \text{ Ec. 24}$$

Conociendo la solución de la sustentación y el momento, tomando en cuenta la hipótesis de un sistema cuasi-estacionario sustentación y momento se pueden expresar como:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 c a_1 \left(\alpha + \frac{\dot{\gamma}}{V} \right) \text{ Ec. 25}$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 e c^2 a_1 \left(\alpha + \frac{\dot{\gamma}}{V} \right) \text{ Ec. 26}$$

3.2.3 Determinación de la velocidad crítica de flutter

Para determinar la velocidad crítica de flutter se considera la sección de un ala con cuerda c y oscilando armónicamente en un flujo de aire de velocidad V y densidad ρ el cual tiene desplazamientos instantáneos, velocidades y aceleraciones de rotación $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ y translación $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$. Estas oscilaciones causan una reducción en la sustentación en estado estacionario, en efecto, la sustentación debido a las oscilaciones actúa hacia abajo. La sustentación hacia abajo corresponde a $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$. Las ecuaciones 27 a 29 describen este fenómeno.

$$l_{\alpha}\rho cV^2\alpha = L_{\alpha}\alpha \quad Ec. 27$$

$$l_{\dot{\alpha}}\rho c^2V\dot{\alpha} = L_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} \quad Ec. 28$$

$$l_{\ddot{\alpha}}\rho c^3\ddot{\alpha} = L_{\ddot{\alpha}}\ddot{\alpha} \quad Ec. 29$$

Donde $l_{\alpha}, l_{\dot{\alpha}}, l_{\ddot{\alpha}}$ son coeficientes adimensionales análogos a las curvas de sustentación para estado estacionario. Similarmente las fuerzas que se generan hacia abajo debido a la translación que ocurre en el ala son descritas por las ecuaciones 30 a 32.

$$l_{\gamma}\rho cV^2\gamma = L_{\gamma}\gamma \quad Ec. 30$$

$$l_{\dot{\gamma}}\rho c^2V\dot{\gamma} = L_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \quad Ec. 31$$

$$l_{\ddot{\gamma}}\rho c^3\ddot{\gamma} = L_{\ddot{\gamma}}\ddot{\gamma} \quad Ec. 32$$

Por lo tanto, la sustentación aerodinámica total debido al movimiento de oscilación en el ala se puede describir por la ecuación 33.

$$L = L_{\gamma}\gamma + L_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + L_{\ddot{\gamma}}\ddot{\gamma} + L_{\alpha}\alpha + L_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + L_{\ddot{\alpha}}\ddot{\alpha} \quad Ec. 33$$

Asimismo, el momento total en el ala está dado por la ecuación 34 y se relaciona de forma análoga a la sustentación total.

$$M = M_{\gamma}\gamma + M_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + M_{\ddot{\gamma}}\ddot{\gamma} + M_{\alpha}\alpha + M_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + M_{\ddot{\alpha}}\ddot{\alpha} \quad Ec. 34$$

3.3. Geometría y dimensionamiento inicial de perfiles aerodinámicos

La referencia general cuando se habla de perfiles alares es utilizar una geometría trapezoidal. Como se muestra en la figura 6[4].

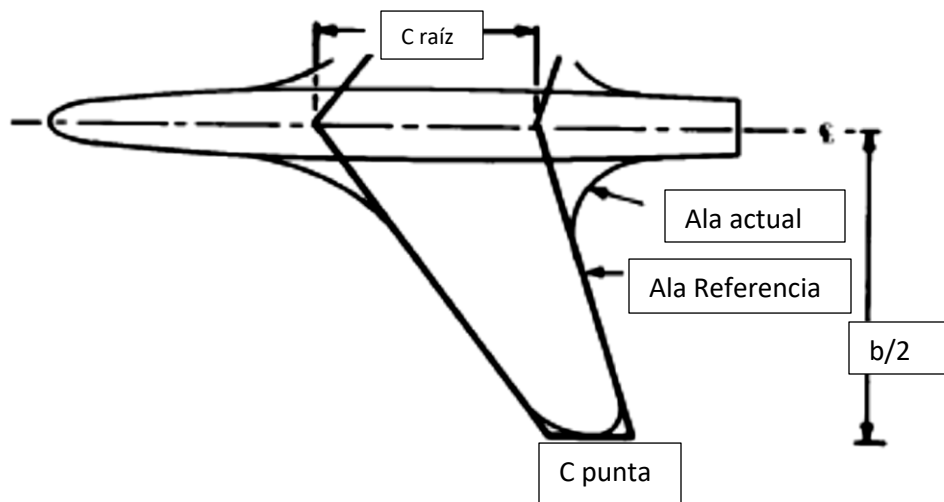


Figura 6 Referencia ala trapezoidal[4]

Para las aeronaves el ASPECT RATIO se define como la relación geométrica entre la envergadura de la aeronave y la superficie alar. El aspect ratio es un parámetro importante ya que se relaciona con la capacidad de sustentación que puede generar una aeronave, si el aspect ratio es alto, la capacidad de sustentación o el coeficiente de sustentación es mayor. La ecuación 35 describe de forma clara la relación de aspecto de un ala.

$$AR = \frac{b^2}{S} \quad \text{Ec. 35}$$

Donde b es la envergadura y S la superficie alar.

3.4 Variación de la relación de aspecto del ala

Los primeros modelos y análisis matemáticos para explicar la existencia de flutter sobre perfiles alares se basan en alas planas rectangulares como una placa, sin embargo, el objetivo de este estudio es variar la relación de aspecto del ala para diferentes tipos de perfiles. Si un ala es una placa plana rectangular, o un trapecoide o tiende a ser un perfil elíptico, en cualquiera de estas tres configuraciones la relación de aspecto se verá afectada por la disposición geométrica del perfil, como ya se había discutido en capítulos anteriores, el aspect ratio es la relación entre la envergadura y la superficie alar. Siendo así que, de acuerdo con la configuración del perfil que se seleccione, el aspect ratio se afectara. La figura 7 muestra un perfil trapezoidal convencional.

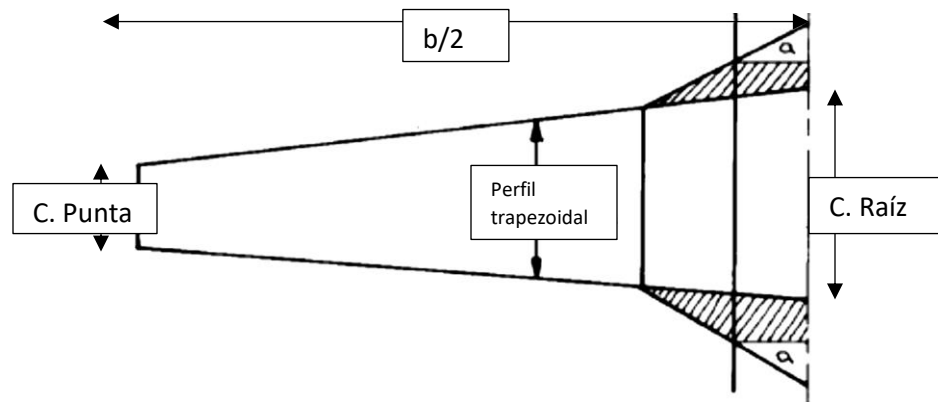


Figura 7 Perfil Trapezoidal[25]

Si se toma como referencia el perfil trapezoidal de la figura 7, el aspect ratio estará condicionado por:

$$AR = \frac{b^2}{S} \rightarrow$$

$$AR = \frac{b^2}{\frac{b}{2} * (Cr + Ct)}$$

$$AR = \frac{2 * b}{(Cr + Ct)} \quad Ec. 36$$

Donde b es la envergadura de la aeronave y Cr es la cuerda de raíz y Ct la cuerda de punta respectivamente.

Caso contrario sería si definimos un perfil elíptico. La relación de aspecto para un perfil elíptico está definida como:

$$AR = \frac{b^2}{S} \rightarrow$$

$$AR = \frac{b^2}{\frac{\pi}{4} * b * Cr}$$

$$AR = \frac{4 * b}{\pi * Cr} \quad Ec. 37$$

Dicho esto, la relación de aspecto se ve afectada principalmente por la geometría del perfil. Es decir, es un condicionante para determinar si se producirá una velocidad crítica de flutter.

Sin embargo, hay que considerar que, para determinar las posiciones de cuerda elíptica en un perfil, es necesario conocer la relación matemática de una elipse, la cual está dada por la relación de la ecuación 38.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ con } a > b \quad Ec. 38$$

Con esta disposición la elipse tendrá una disposición como se muestra en la figura 8:

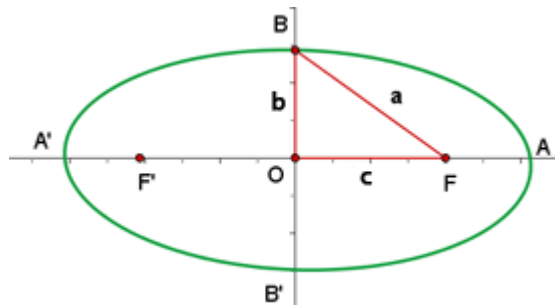


Figura 8 Elipse[26]

Conociendo la elipse y despejando la variable y de la ecuación 38 podemos deducir entonces las ecuaciones 39 y 40.

$$y = \sqrt{\frac{a^2 * b^2 - x^2 * b^2}{a^2}} \quad Ec. 39$$

Si, asumimos que, y es la cuerda para un ala elíptica, con centro en el origen entonces podemos decir que:

$$Ce = 2 * \sqrt{\frac{a^2 * b^2 - x^2 * b^2}{a^2}} \quad Ec. 40$$

Donde la cuerda elíptica se podrá calcular en cualquier posición x , a lo largo de la semi envergadura a , la cual en este caso es el eje mayor de la elipse, y entonces b será la cuerda en la raíz del perfil. Conocidos estos aspectos, se puede determinar el tamaño de cuerda elíptica en cualquier posición x a lo largo de la semi envergadura.

Con las condiciones iniciales es posible determinar las variaciones de aspect ratio para tres diferentes geometrías, perfil rectangular, trapezoidal y elíptico.

Aunque es importante destacar que para efectos de cálculo y mayor precisión es imprescindible determinar la cuerda media aerodinámica, pues es el punto en el cual se calcula el centro aerodinámico del perfil. Además, es un punto ideal para calcular los coeficientes de momento y cabeceo en el perfil.[25]

Es decir, la cuerda media aerodinámica para un perfil trapezoidal está dada por medio de la relación geométrica que se muestra en la figura 9.

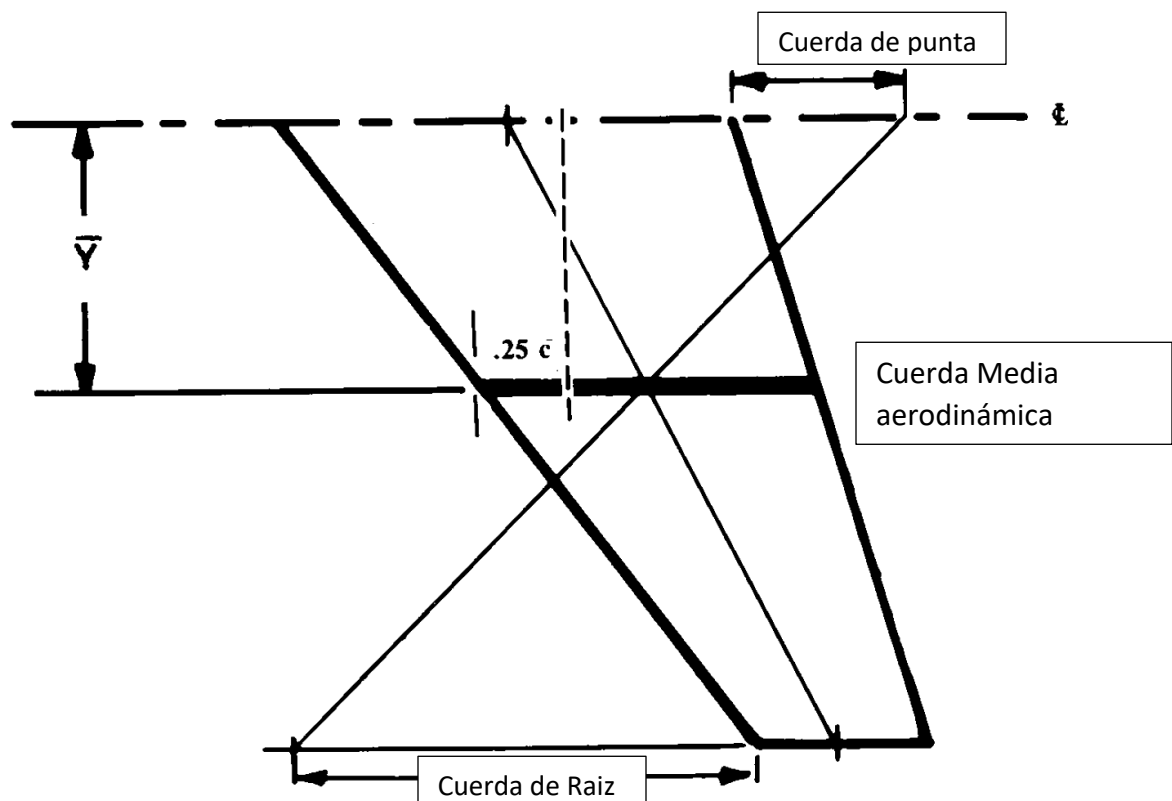


Figura 9 Cuerda media Aerodinámica perfil trapezoidal[4]

Es decir que la relación se puede determinar matemáticamente por medio de la ecuación 41, de la siguiente forma:

$$\tilde{c} = \frac{2}{3} * Craiz * \frac{(1 + \lambda + \lambda^2)}{1 + \lambda} \quad Ec. 41$$

Donde lambda se define como λ y es la relación geométrica entre la cuerda de punta versus la cuerda de raíz, o también conocida como el táper ratio. El cual afecta la distribución de sustentación a lo largo del perfil, sin embargo, se aplica principalmente a perfiles trapezoidales.

Si desea determinarse la cuerda media aerodinámica para un perfil elíptico se hace mediante la ecuación 42 así[27]:

$$Cme = 0.9055 * Craiz \quad Ec. 42$$

Con los datos iniciales definidos puede pasar a definirse el modelo matemático para determinar la aparición de flutter sobre las aeronaves.

CAPITULO IV: RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1 Modelo y simulación

El modelo matemático que se definió para la simulación se presenta a continuación:

El primer paso es asumir que la distribución de masa sobre el ala es uniforme, y que el eje de masa permanece sobre la cuerda media. El desplazamiento hacia abajo en el ala esta dado por la ecuación 42.

$$z(x, y, t) = yk(t) + (x - xf)\alpha(t) = \varphi_k k + \varphi_\alpha \alpha \quad \text{Ec. 42}$$

Tanto la energía cinética como la potencial son obtenidas a través de las ecuaciones de Lagrange, es decir, la energía cinética se representa por medio de la ecuación 43.

$$T = \int \frac{1}{2} dm \dot{z}^2 = \frac{m}{2} \int_0^s \int_0^c (y\dot{k} + (x - xf)\dot{\alpha})^2 dx dy \quad \text{Ec. 43}$$

Donde m es la masa por unidad de área. Y la energía potencial se determina por medio del amortiguamiento en la raíz en la ecuación 44.

$$U = \frac{1}{2} K_k k^2 + \frac{1}{2} K_\alpha \alpha^2 \quad \text{Ec. 44}$$

Donde para obtener la vibración por flexión y torsión para un ala flexible se redefine la energía potencial en la ecuación 45 como:

$$U = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right)^2 dy + \frac{1}{2} \int GJ \left(\frac{d\alpha}{dy} \right)^2 dy \quad \text{Ec. 45}$$

Donde EI representa la rigidez por flexión y GJ la rigidez por torsión para una estructura. La ecuación 46 de la lagrangiana que define el sistema es:

$$L = T - U \quad \text{Ec. 46}$$

Donde L representa la lagrangiana y T y U representan respectivamente la energía cinética y potencial del sistema. Al aplicar la ecuación de Lagrange-Euler el sistema queda definido como se muestra en la ecuación 47.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{Ec. 47}$$

Si se calcula el cuadrado de la ecuación 43 se obtiene la siguiente función expresada en la ecuación 48.

$$T = y^2 \dot{k}^2 + 2y\dot{k}(x - \dot{x}f)\dot{\alpha} + (x - xf)^2 \dot{\alpha}^2 \quad \text{Ec. 48}$$

La ecuación 47 es lo que se conoce como la ecuación de movimiento del sistema. Si se aplica la lagrangiana a el sistema en la ecuación 48 se tiene que:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{k}} \right) = 2y^2 \dot{k} + 2y(x - xf)\dot{\alpha}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = y^2 \dot{k}^2 + 2y\dot{k}(x - xf) + (x - xf)^2 \dot{\alpha}^2$$

Con el primer paso resuelto, el siguiente paso es aplicar la derivada con respecto al tiempo.

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{k}} \right) = 2y^2 \ddot{k} + 2y(x - xf)\ddot{\alpha}$$

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = 2y\dot{k}(x - xf) + 2(x - xf)^2 \ddot{\alpha}$$

Si se aplica la solución de las derivadas en el sistema de la ecuación 43 entonces se obtiene la ecuación 49, que da la solución de la lagrangiana.

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{k}} \right) = \frac{m}{2} \int_0^s \int_0^c 2y^2 \ddot{k} + 2y(x - xf)\ddot{\alpha} \, dx dy$$

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{m}{2} \int_0^s \int_0^c 2y\dot{k}(x - xf) + 2(x - xf)^2 \ddot{\alpha} \, dx dy \quad \text{Ec. 49}$$

Resolviendo las integrales dobles en cada punto se obtendrá la matriz de inercia del sistema.

Para \dot{k} , que se visualiza en las ecuaciones 50 a 52.

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{k}} \right) = \frac{m}{2} \int_0^s \int_0^c 2y^2 \ddot{k} + 2y(x - xf) \ddot{\alpha} \, dx dy$$

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{k}} \right) = m \int_0^s \int_0^c y^2 \ddot{k} + y(x - xf) \ddot{\alpha} \, dx dy$$

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{k}} \right) = \frac{m}{2} \int_0^s y^2 c \ddot{k} + y \left(\frac{c^2}{2} - xfc \right) \ddot{\alpha} \, dy$$

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{k}} \right) = m \left[\frac{s^3}{3} c \ddot{k} + \frac{s^2}{2} \left(\frac{c^2}{2} - xfc \right) \ddot{\alpha} \right] \quad \text{Ec. 50}$$

Para $\dot{\alpha}$,

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{m}{2} \int_0^s \int_0^c 2y\ddot{k}(x - xf) + 2(x - xf)^2 \ddot{\alpha} \, dx dy$$

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = m \int_0^s \int_0^c y\ddot{k}(x - xf) + (x - xf)^2 \ddot{\alpha} \, dx dy$$

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = m \int_0^s y\ddot{k} \left(\frac{c^2}{2} - xfc \right) \, dy + \iint_{00}^{sc} (x - xf)^2 \ddot{\alpha} \, dx dy$$

Resolviendo el cuadrado dentro de la integral,

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = m \int_0^s y\ddot{k} \left(\frac{c^2}{2} - xfc \right) \, dy + m \iint_{00}^{sc} (x^2 - 2x * xf + xf^2) \ddot{\alpha} \, dx dy$$

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = m \int_0^s y\ddot{k} \left(\frac{c^2}{2} - xfc \right) \, dy + m \int_0^s \left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^2}{2} xf + cxf^2 \right) \ddot{\alpha} \, dy$$

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = m \left[\frac{s^2}{2} \ddot{k} \left(\frac{c^2}{2} - xfc \right) + s \left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^2}{2} xf + cxf^2 \right) \ddot{\alpha} \right] \quad \text{Ec. 51}$$

Tomando en cuenta la energía potencial del sistema en la ecuación 44 y derivándola parcialmente con respecto a k y α , se obtiene entonces que:

$$\frac{\partial U}{\partial k} = K_k k, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha} = K_\alpha \alpha$$

Resueltas las ecuaciones la solución del sistema de forma generalizada quedan como se muestra en la ecuación 52.

$$\begin{bmatrix} \frac{ms^3}{3}c & \frac{ms^2}{2}\left(\frac{c^2}{2} - xfc\right) \\ \frac{ms^2}{2}\left(\frac{c^2}{2} - xfc\right) & ms\left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^2}{2}xf + cxf^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{k} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_k & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad Ec. 52$$

Como ya se había definido en las ecuaciones 25 y 26 el amortiguamiento y el momento de cabeceo para el modelo, ahora es necesario determinar el trabajo interno de las fuerzas aerodinámicas para flujo no estacionario que se generan sobre el ala en las ecuaciones 53 y 54.

$$\delta w = \int [dL(-y\delta k) + dM \delta\alpha] \quad Ec. 53$$

Así,

$$dL = \frac{1}{2}\rho V^2 ca_w dy \left(\alpha + \frac{\dot{k}}{V} \right) \quad Ec. 54$$

Sin embargo, como se habla de flujo aerodinámico no estacionario la mayor desventaja al utilizar relaciones de flujo cuasi-estacionario es que no se toma en cuenta los cambios asociados al tiempo y esto puede generar errores en el desarrollo del modelo. Es por eso por lo que la derivada para flujo no estacionario del momento de cabeceo de la aeronave se retiene o permanece como un importante efecto en las características de flujo no estacionario. La ecuación 55 muestra ese efecto.

$$dM = \frac{1}{2}\rho V^2 dy \left[ec^2 a_w \left(\alpha + \frac{\dot{k}}{V} \right) + M_\alpha \frac{\dot{\alpha}c}{4V} \right] \quad Ec. 55$$

Luego de determinar ese efecto las fuerzas a las que está sometido el sistema son respectivamente las que se muestran en las ecuaciones 56 y 57:

$$Q_k = \frac{\partial(\delta w)}{\partial(\delta k)} = - \int_0^s y dL = \int_0^s -\frac{1}{2}\rho V^2 ca_w y dy \left(\alpha + \frac{\dot{k}y}{V} \right)$$

Solucionando la integral se obtiene que:

$$Q_k = \frac{\partial(\delta w)}{\partial(\delta k)} = - \int_0^s y dL = -\frac{1}{2}\rho V^2 ca_w \int_0^s y dy \left(\alpha + \frac{\dot{k}y}{V} \right)$$

Multiplicando por y adentro de la integral se obtiene que:

$$Q_k = \frac{\partial(\delta w)}{\partial(\delta k)} = - \int_0^s y dL = - \frac{1}{2} \rho V^2 c a_w \int_0^s \left(y \alpha + \frac{\dot{k}}{V} y^2 \right) dy$$

Solucionando la integral para las fuerzas externas aerodinámicas ejercidas se tiene que:

$$Q_k = \frac{\partial(\delta w)}{\partial(\delta k)} = - \int_0^s y dL = - \frac{1}{2} \rho V^2 c a_w \frac{s^2}{2} \alpha + \frac{s^3}{3V} \dot{k} \quad \text{Ec. 56}$$

La fuerza externa ejercida por el momento puede ahora determinarse de modo similar por medio de la ecuación 55,

$$Q_\alpha = \frac{\partial(\delta w)}{\partial(\delta \alpha)} = \int_0^s dM = \int_0^s \frac{1}{2} \rho V^2 dy \left[e c^2 a_w \left(\alpha + \frac{\dot{k}}{V} \right) + M_\alpha \frac{\dot{\alpha} c}{4V} \right]$$

Como la integral solo está en términos de dy , entonces la solución de la misma queda como:

$$Q_\alpha = \frac{\partial(\delta w)}{\partial(\delta \alpha)} = \int_0^s dM = \frac{1}{2} \rho V^2 s \left[e c^2 a_w \left(\alpha + \frac{\dot{k} s}{2V} \right) + M_\alpha \frac{\dot{\alpha} c}{4V} \right] \quad \text{Ec. 57}$$

Ya con la formulación del modelo completo se puede escribir la matriz de fuerzas de amortiguamiento estructural y aerodinámico, junto con la matriz de inercia del sistema, en la ecuación 58 así:

$$\begin{bmatrix} I_k & I_{k\alpha} \\ I_{k\alpha} & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{k} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho V \begin{bmatrix} \frac{c s^3 a_w}{6} & 0 \\ -e c^2 s^2 a_w & -c^3 s M_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{k} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \left\{ \rho V^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{c s^2 a_w}{4} \\ 0 & -e c^2 s a_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_k & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} k \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 58}$$

Este modelo básico determina como calcular las velocidades críticas de flutter para cualquier aeronave, bajo ciertas condiciones.

La ecuación 58 describe un sistema de orden 2 para N grados de libertad. Si la reescribimos queda descrita en la ecuación 59.

$$A\ddot{q} + (\rho V B + D)\dot{q} + (\rho V^2 C + E)q = 0 \quad \text{Ec. 59}$$

Para poder determinar la solución del sistema se deben calcular los autovalores de la matriz global, la ecuación 60 muestra el sistema reescrito en forma general:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(\rho V^2 C + E) & -(\rho VB + D) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad Ec. 60$$

Juntando la matriz de inercias y la matriz de identidad dentro de la ecuación general se obtiene la ecuación 61, donde pueden calcularse los autovalores por medio de la diagonalización de la matriz y aplicándolo a sistemas dinámicos continuos, donde la solución general es de la forma:

$$\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}(\rho V^2 C + E) & -A^{-1}(\rho VB + D) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow x - Qx = 0 \quad Ec. 61$$

$$x(t) = ce^{\lambda t}$$

Para este paso se utilizará en el código de simulación la librería eig(A), de Matlab que proporciona la solución de los valores de lambda para el sistema.

El modelo matemático descrito en las ecuaciones 42 a 60, se relaciona para sistemas rígidos. Si, se considera un modelo para un ala asumiendo que es un cuerpo flexible, la ecuación 61 describe esta relación de la siguiente manera:

$$z = y^2 \dot{k} + y(x - x_f) \dot{\alpha} \quad Ec. 61$$

Realizando un procedimiento matemático similar para el ala flexible, la matriz de inercias y el sistema general del modelo que se genera de este proceso se describe en la ecuación 62.

$$\begin{bmatrix} \frac{ms^5}{5}c & \frac{ms^4}{4}\left(\frac{c^2}{2} - xfc\right) \\ \frac{ms^4}{4}\left(\frac{c^2}{2} - xfc\right) & \frac{ms^3}{3}\left(\frac{c^3}{3} - c^2xf + cxf^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{k} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho V \begin{bmatrix} \frac{cs^5 a_w}{10} & 0 \\ \frac{-ec^2 s^4 a_w}{8} & \frac{-c^3 s^3}{24} M_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \left\{ \rho V^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{cs^4 a_w}{8} \\ 0 & \frac{-ec^2 s^3 a_w}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GJ \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} k \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad Ec. 62$$

4.2 Código de simulación

El código de simulación se basó en un código existente proporcionado por Wright y Cooper[5] en el cual se realiza el pronóstico de la frecuencia y el amortiguamiento para la aparición de la

velocidad crítica de flutter para aeronaves de ala rectangular en condiciones de vuelo estándar. El código es descrito en el apartado de anexos, como código fuente.

El nuevo código permite determinar la velocidad crítica de flutter, y el porcentaje de amortiguamiento para la aparición de flutter para dos tipos de perfiles alares, el primero considerando si el ala de la aeronave es de tipo trapezoidal o elíptica, y por medio de eso y la modificación del aspect ratio determinar las condiciones para las cuales se produce flutter. En este caso en especial se considera que el ala es un cuerpo rígido. Además, se asume que hay existencia de amortiguamiento estructural. Sumado a ello, se determina si el movimiento de la posición del eje de flexión y masa podrían afectar las características del ala para la aparición de flutter.

Un código más es adjunto con características similares, aunque en él se considera que el ala es un cuerpo flexible.

En el siguiente capítulo se hará un análisis y discusión de resultados para los diferentes códigos considerando en cada uno el tipo de geometría, el aspect ratio y la existencia de flutter.

4.2 Análisis y discusión de resultados

Se inicia la simulación para una aeronave de ala rectangular, con cuerda constante c y semi envergadura s .

Para el estudio se escogió una aeronave pequeña tipo Piper "Cherokee 180" con las siguientes características y especificaciones[28]:

Cuerda=1.6 m

Superficie alar= 14.86 m²

$w/S=73.2\text{kg}/\text{m}^2$

$s=4.57$ m semi envergadura

con los datos iniciales se puede visualizar las gráficas de frecuencia y amortiguamiento para un ala rectangular. El primer análisis se hace con base al código fuente, el cual considera el ala como una placa plana, eso significa que en todos los puntos a lo largo de la semi envergadura la

cuerda no tendrá variación. Es decir, que la cuerda media aerodinámica será igual a la cuerda del perfil a lo largo de la semi envergadura. En los demás casos, para hacer la variación del aspect ratio no solo se condicionará por medio de aumentar la envergadura. Se considerarán dos tipos de perfiles utilizados en las aeronaves, como lo es el perfil trapezoidal convencional y el perfil elíptico, descritos anteriormente, ya que en este tipo de perfiles hay una clara variación de la cuerda a lo largo de la semi envergadura. Sin embargo, el perfil elíptico no es de gran uso gracias a que se hace difícil de manufacturar y en la actualidad son pocas o escasas las aeronaves que lo poseen. De igual modo se incluyó en este estudio para determinar los efectos de la aparición de flutter. El objetivo es determinar si la influencia del aspect ratio junto con la geometría y forma de perfil influye para la existencia de flutter y en cuál de estas características se presenta la mejor condición o la más favorable. En este análisis, el aspect ratio al ser esta un ala rectangular es simplemente la razón entre la envergadura del perfil y la cuerda. El aspect ratio de este perfil es de 5.7. La gráfica 10 muestra las condiciones críticas donde ocurrirá flutter para un ala rectangular, con las características y especificaciones del modelo matemático descrito. Es importante resaltar que, este modelo se describe para alas rígidas y flexibles.

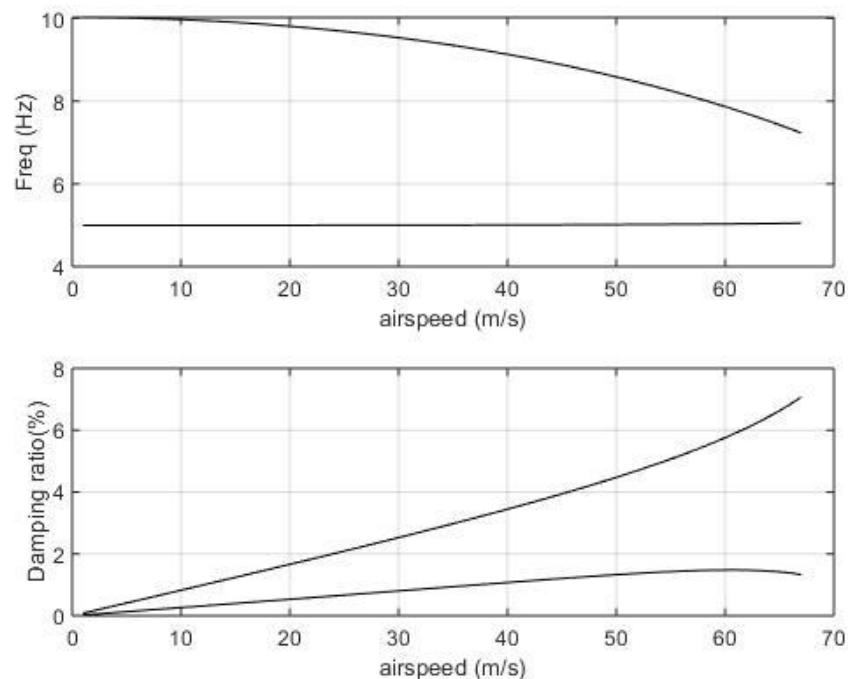


Figura 10 Frecuencia y Amortiguamiento ala rectangular

A medida que la velocidad tiende a aumentar las dos frecuencias tienden a juntarse, sin embargo, los dos modos de amortiguamiento permanecen en divergencia, esto quiere decir que el sistema

tiende a estar estable y no presenta flutter. Una de las razones obvias para la no existencia de flutter se debe básicamente a que la aeronave en cuestión no desarrolla velocidades elevadas, y las frecuencias o los modos de frecuencia iniciales son elevados y no afectan la condición de flutter. Aunque garantizar un aspect ratio elevado en un ala rectangular no es garantía de que no ocurra flutter. El aspect ratio puede variar simplemente con el aumento de la envergadura de la aeronave, es decir, que si pasamos de 4.57 m de semi envergadura a 7 m, el aspect ratio aumenta, es decir el aumento de aspect ratio es de un 53%. La figura 11 muestra la existencia de flutter con la variación de aspect ratio, ya que las frecuencias se juntan alrededor de los 60 m/s y la razón de amortiguamiento presenta una pequeña bifurcación alrededor de los 53 m/s, haciendo que esta sea menor que cero, lo que ocasiona que el sistema se vuelva inestable y se genere flutter.

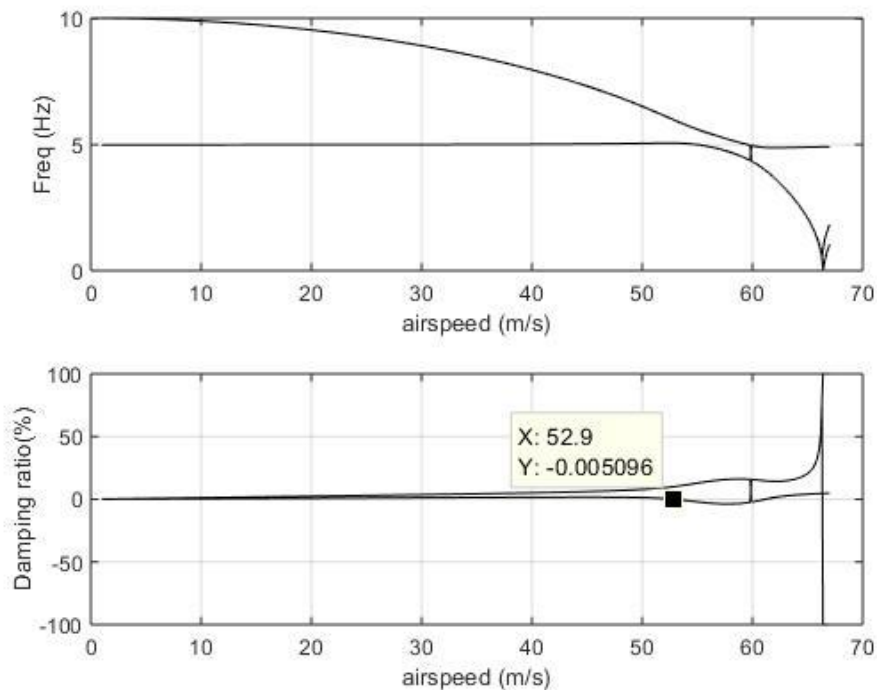


Figura 11 Existencia de Flutter con alto aspect ratio

Como ya se había discutido con anterioridad se desarrolló un modelo para determinar flutter en aeronaves con alas trapezoidales y elípticas. El Cessna Citation es un jet de negocios, el cual posee las siguientes características técnicas[29]:

$b=7.955$ m (semi envergadura)

superficie alar= 25 m²

velocidad máxima= 208 m/s

carga alar=223.82 kg/ m²

cuerda raíz= 2.833 m

cuerda de punta= 0.895 m

Sin embargo, cuando se consideran aspectos como la geometría y forma del perfil la variación del aspect ratio junto con estos parámetros puede influenciar la existencia de flutter y que la velocidad crítica de flutter se presente con mayor retraso o antelación. Debido a que el aspect ratio varía con relación a la envergadura y la superficie, se puede determinar cómo se describió en capítulos anteriores, que esta relación, se debe a la razón entre la envergadura y la cuerda media, así, el modelo matemático descrito se modifica en términos de cuerda media y se procede a investigar la existencia de flutter. La figura 12 describe las características en frecuencia y amortiguamiento estructural para el Cessna Citación el cual posee un ala trapezoidal.

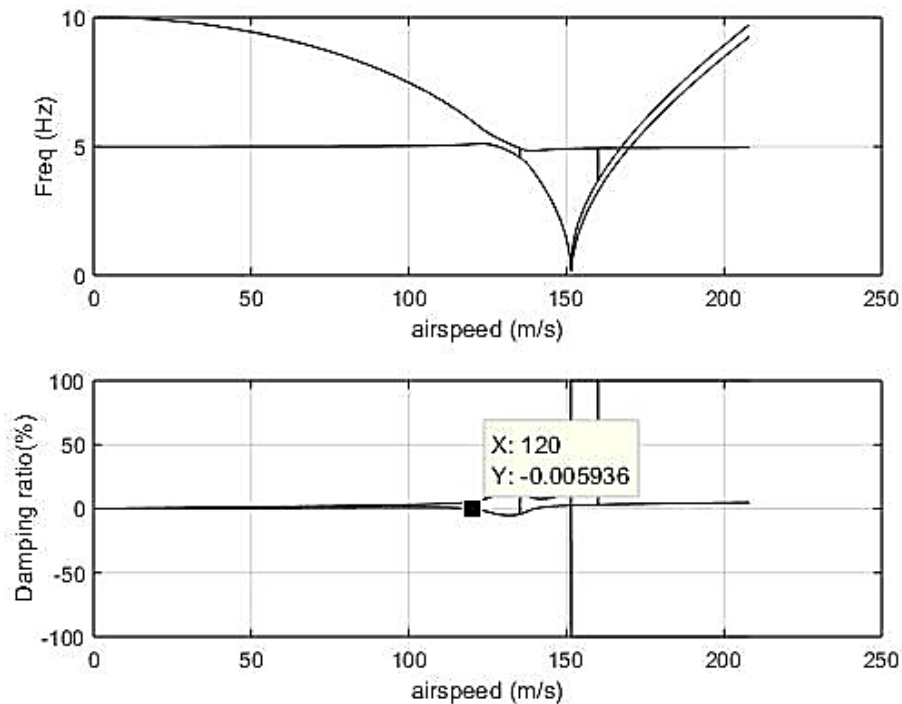


Figura 12 Frecuencia y amortiguamiento ala trapezoidal

Para un ala trapezoidal como en la figura 12 se puede determinar que el aspect ratio dadas las características del perfil es alta, aproximadamente 7.08, con estas características y considerando

la geometría y forma del perfil, se determina, analizando las gráficas en frecuencia que el flutter ocurre alrededor de los 129 m/s que es el punto en el cual las frecuencias de diseño tienden a juntarse en un mismo punto, es decir convergen. Asimismo, si se realiza el análisis en amortiguamiento, se puede observar que alrededor de los 120 m/s el porcentaje de amortiguamiento es menor que cero, lo que hace que se cree una bifurcación en ese punto, y el sistema se vuelva inestable. Si el sistema es inestable, ocurre flutter, así, luego de la bifurcación el sistema intente volver a su estado normal, ya con la ocurrencia de flutter a partir de ese punto no sería seguro volar.

Ahora si comparamos los datos obtenidos para la misma ala trapezoidal, considerando que el sistema es flexible, se deben considerar los parámetros del material, es decir el módulo de elasticidad, el momento de inercia y el módulo de rigidez por flexión y torsión. Donde EI es el módulo de rigidez por flexión y GJ el módulo de rigidez torsional. Al asumir que, el sistema es flexible y considerando estos parámetros se acerca el modelo a un caso más real, pues la velocidad crítica de flutter y la ocurrencia de flutter, aunque se ve afectada por la geometría del ala, se verá afectada por los módulos de rigidez de flexión y torsional que son debidos a el material del cual estén fabricados los perfiles. La figura 13 describe la existencia de flutter gracias a módulos bajos y la figura 14 muestra la existencia de flutter para módulos altos. Es decir, la incidencia de estos parámetros determinara la ocurrencia o no ocurrencia de flutter en el sistema.

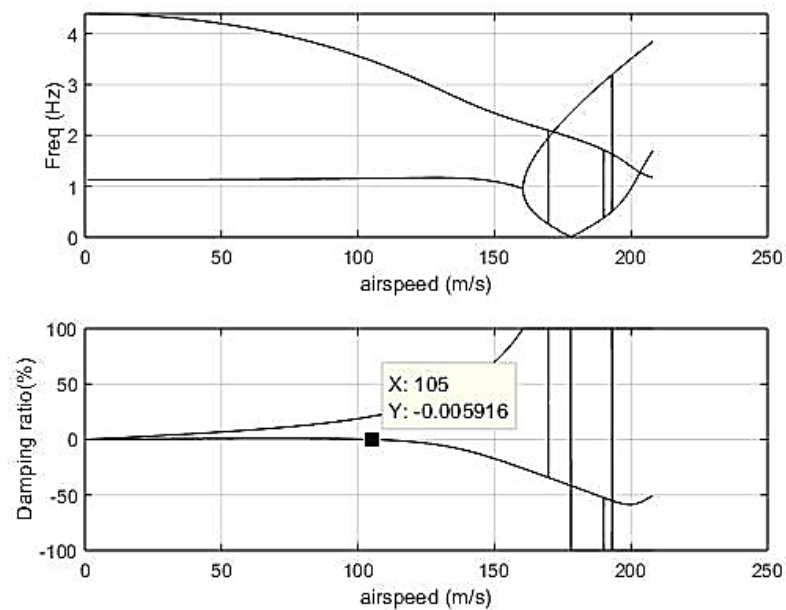


Figura 13 Ala trapezoidal Flexible Módulos bajos

La figura 13 muestra que, al llevar el sistema a un caso más real, y afectar los módulos a flexión y torsión, el sistema presenta una velocidad crítica de flutter alrededor de los 105 m/s es decir que considerando estas variables se afecta de gran manera la ocurrencia y existencia de flutter, ya que la divergencia en amortiguamiento es elevada, y la convergencia en frecuencia se desfasa incluso de las frecuencias de estudio, lo que hace que el sistema sea inestable. Pero esta afectación se debe básicamente a que el módulo de flexión se baja a la mitad.

Por el contrario en la figura 14, aunque hay ocurrencia de flutter, a medida que la velocidad aumenta, si se analiza la gráfica en amortiguamiento, aunque la divergencia es alta en torno a esa velocidad de 148.4 m/s el porcentaje de amortiguamiento es menor a cero, y el sistema se hace inestable, y observando la gráfica en frecuencia se puede observar que las frecuencias de estudio tienden a juntarse, es decir, a converger, después de los 200 m/s. Es decir, aunque el aspect ratio es el mismo, considerar aspectos típicos del material determina en mejor forma la ocurrencia de flutter. Sin embargo, es importante destacar que en este caso el módulo de rigidez por flexión es el doble del caso anterior. En el análisis de estos tres casos el aspect ratio permaneció constante en 7.08.

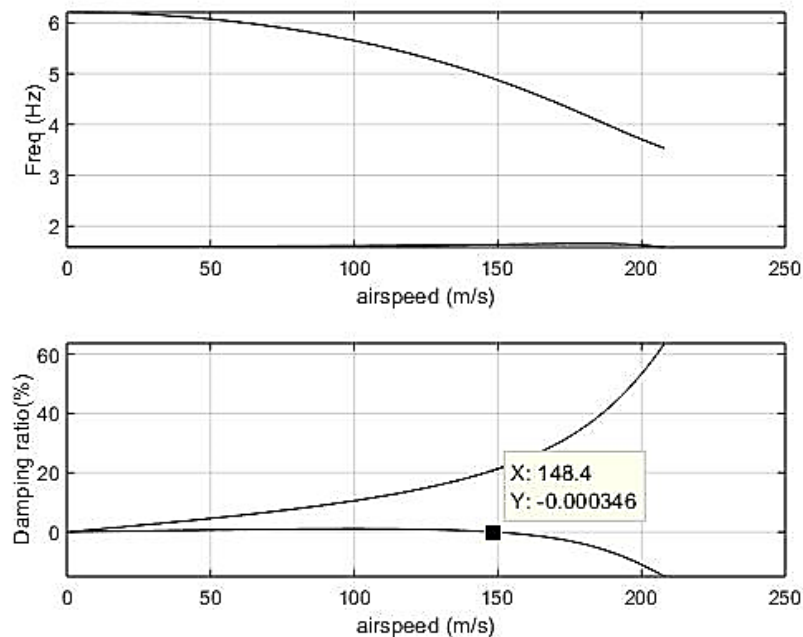


Figura 14 Ala trapezoidal Flexible Módulos altos

Podría entonces considerarse otro análisis, pero ahora asumiendo que el ala trapezoidal puede ser un ala elíptica, y asumiendo que el sistema es rígido. Esto se realiza por medio del método

de Stender[30], el cual asume que la superficie del ala trapezoidal es igual a la del ala elíptica, y se calcula la cuerda de Stender, con este método podría entonces asumirse un ala elíptica y determinar para la misma aeronave las condiciones de flutter. La figura 15 describe lo que sucede al asumir que el ala trapezoidal puede ser tratada ahora como un ala elíptica.

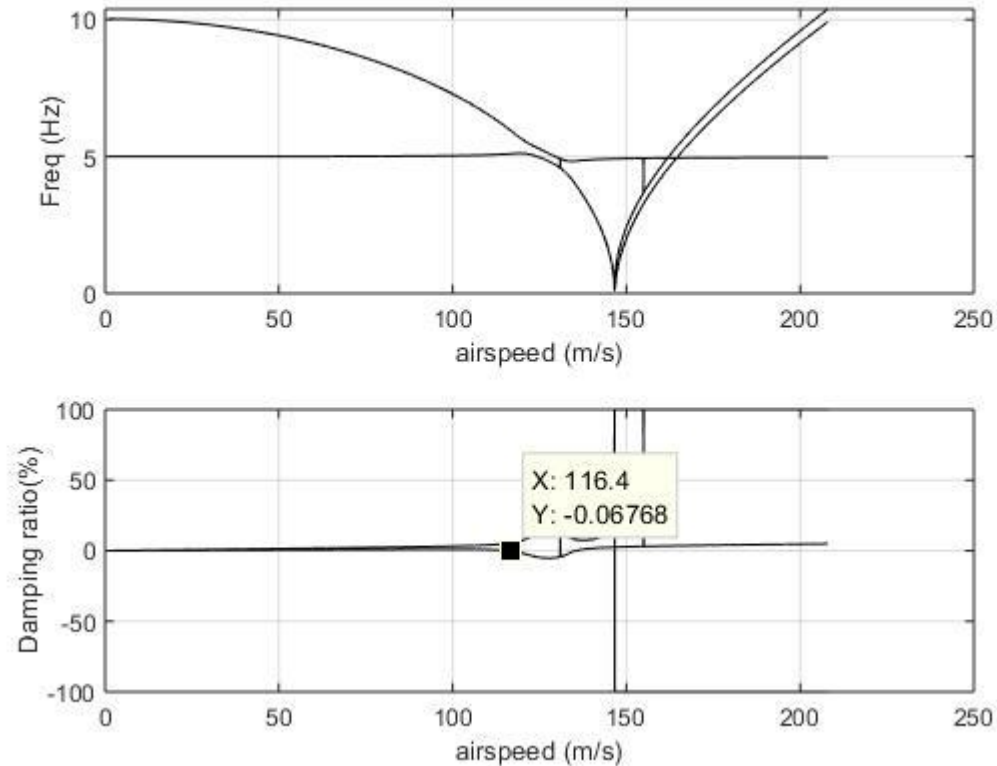


Figura 15 Ala elíptica método Stender

Si se compara el análisis de ala rígida trapezoidal para la aeronave Cessna Citation pero asumiendo la modificación por la cuerda de Stender lo primero a notar es que el aspect ratio aumenta, en un 35 % pues pasa de estar en 7.08 a casi 9.62, además, la velocidad crítica de flutter en comparación con la figura 12 aumenta en 4 m/s, es decir, el flutter ocurre de forma más rápida si el ala se toma como un ala elíptica.

Aunque el mismo análisis para un ala flexible como se discutió anteriormente se ve influenciado por los módulos de rigidez torsional y a flexión, puede sin embargo asumirse el mismo concepto del método de Stender para el modelo, y definir que el ala trapezoidal puede ser un ala elíptica. la figura 16 muestra los siguientes resultados, para un módulo a flexión de $6000000 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ y un módulo de rigidez de $\frac{2}{3} EI$.

El análisis para el ala flexible considerando ahora las condiciones del método de Stender muestra como resultado que aunque hay ocurrencia de flutter y la divergencia en amortiguamiento es alta, la velocidad crítica de flutter aumenta un 7% con respecto al ala trapezoidal flexible, es decir que esta condición mejoraría la aparición de la existencia de flutter pues retrasaría la ocurrencia del mismo. Cabe destacar, que cuando se hacen análisis en alas flexibles, las frecuencias de prueba cambian, y esto se debe a que el análisis involucra más variables, pues afecta la razón de amortiguamiento.

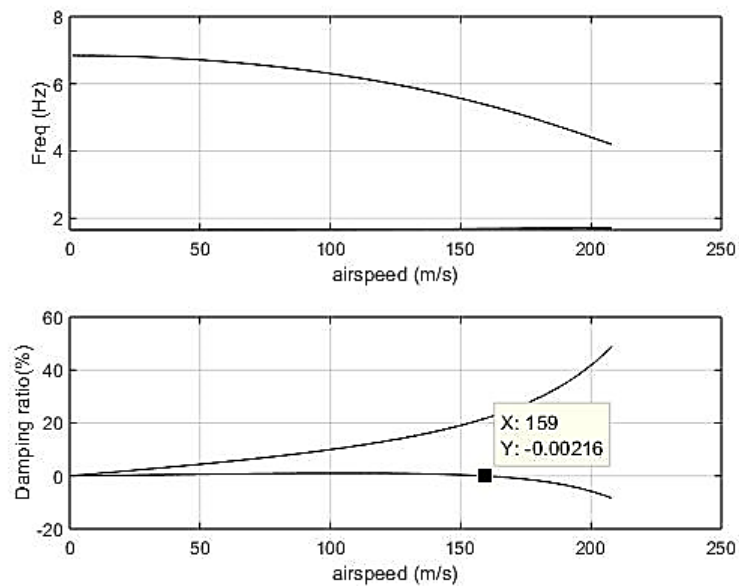


Figura 16 Ala elíptica Método Stender flexible

Finalmente puede realizarse un análisis para un perfil elíptico, la aeronave escogida en cuestión es Supermarine Spitfire el cual fue fabricado durante la segunda guerra mundial, al poseer ala de tipo elíptico presentaba ventajas en cuanto a performance y distribución de cargas a lo largo de la envergadura. Las características técnicas de esta aeronave son:

$b=5.165$ m (semi envergadura)

$V=158.33$ m/s (Máxima velocidad)

$w/s=122$ kg/m² (carga alar)

$s=22.5$ m² superficie alar

El análisis para un sistema rígido como es el caso del ala elíptica del Spitfire presenta las siguientes características en la figura 17 para la ocurrencia de flutter.

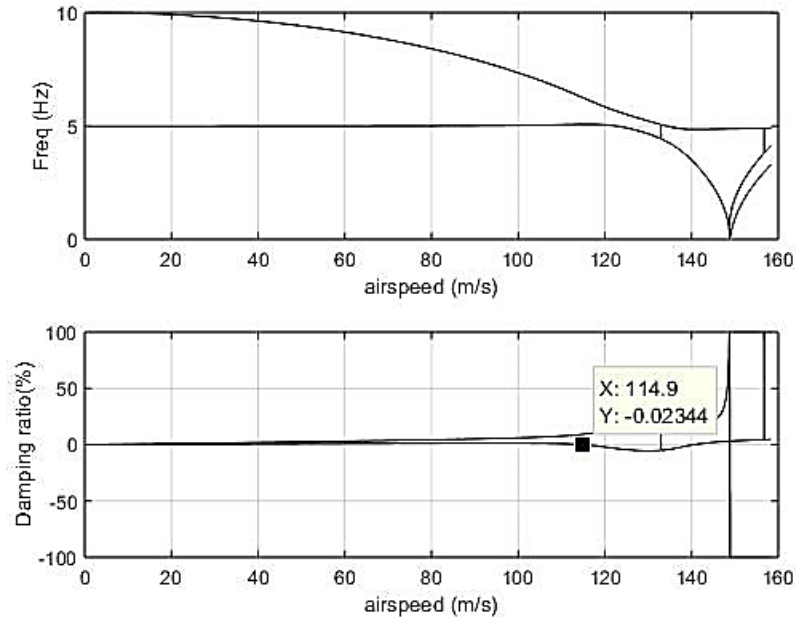


Figura 17 Ala Elíptica -Sistema rígido

Analizando las gráficas en frecuencia se observa que las dos frecuencias de prueba convergen hacia una velocidad de 120 m/s y después de ese punto el sistema se desestabiliza. Si se observa la gráfica en amortiguamiento puede notarse que a razón de una velocidad de 115 m/s el sistema entra en una bifurcación y el porcentaje de amortiguamiento pasa a ser menor de cero, es decir la estabilidad se pierde y en ese momento ocurre el flutter.

La gráfica 18 describe el comportamiento de un ala elíptica en presencia de flutter. Aunque si se observan las graficas tanto en amortiguamiento como en frecuencia, en ninguno de los dos casos hay presencia de flutter, ya que las curvas de frecuencia en los dos modos tanto en cabeceo como aleteo convergen, pero no se juntan, y en amortiguamiento la divergencia es alta y en ninguno de los dos modos tanto en cabeceo como aleteo el porcentaje de amortiguamiento es menor a cero. Por tanto, es un sistema estable, y se debe a que los módulos de rigidez en flexión y rigidez torsional son elevados.

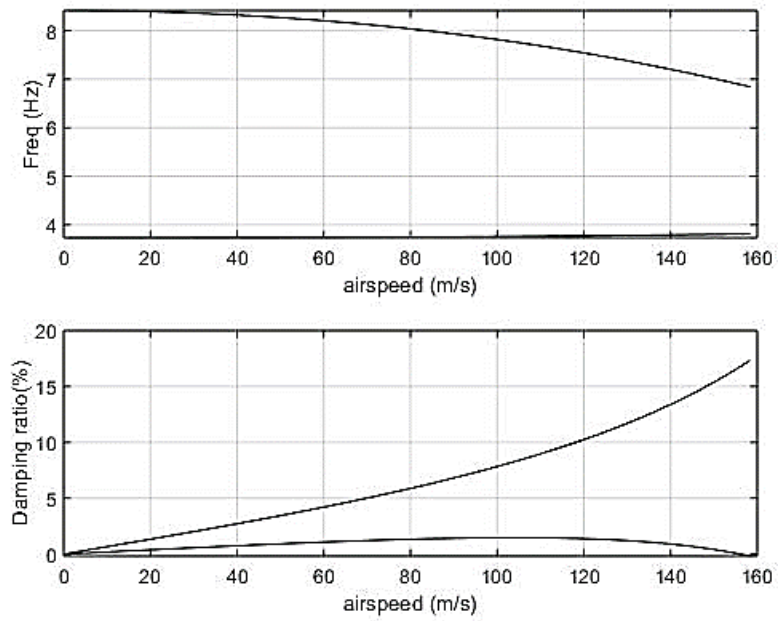


Figura 18 Ala Elíptica-Sistema flexible

CAPITULO V: CONCLUSIONES

De lo expuesto en este trabajo se infiere que de acuerdo a las condiciones iniciales que se ajusten para el análisis de la determinación de flutter, en sistemas rígidos donde no se tiene en consideración aspectos del material como elasticidad, momentos de inercia y módulos de rigidez a flexión y torsión, las curvas características para determinar la existencia de flutter y la velocidad crítica de flutter, tanto en los modos de cabeceo y aleteo, demuestran que las frecuencias de prueba permanecen estables, además, el aspect ratio influye en la existencia o aparición de flutter cuando aumenta. Es decir, a altos aspect ratio hay más probabilidad de que la velocidad crítica de flutter se encuentre cerca a la velocidad máxima que la aeronave puede desarrollar. Sin embargo, en los tres casos de estudio que se tomaron, se pudo evidenciar que, con el aumento de la envergadura, y el aspect ratio para aeronaves grandes como el Cessna Citation las condiciones de flutter luego de pasar la velocidad crítica de flutter tienden a ser inestables, que comparados con el caso de las aeronaves pequeñas. Asimismo, cuando se trata de aeronaves pequeñas de ala rectangular como es el caso del PIPER, al experimentar velocidades de diseño tan bajas no se encontró evidencia de flutter sobre la estructura.

Es bueno resaltar que la adición de un método de distribución de cargas como el método de Stender, donde se asume que el ala es elíptica, mostro resultados favorables en cuanto a la aparición de flutter sobre el sistema en los casos de estudio, pues evidentemente aumento el aspect ratio del ala y junto con la velocidad crítica de flutter en el mejor de los casos aumento en un 7% respecto del ala trapezoidal en el sistema rígido versus el sistema flexible.

En la mayoría de los casos donde el aspect ratio tenia valores altos superiores a 7 se evidencio un incremento en la velocidad crítica de flutter, es decir, la ocurrencia o aparición de flutter se da un poco más adelante que si el aspect ratio es bajo. Tan solo en uno de los casos donde no se puedo considerar esta hipótesis es comparando para el mismo tipo de perfil el sistema rígido y flexible, y específicamente para la aeronave Cessna Citation donde hubo un aumento de aspect ratio del 35 % respecto del ala trapezoidal normal, sin embargo, al considerar el método de Stender en este punto, la condición de velocidad crítica de flutter ocurría antes que si se tratara del ala trapezoidal convencional.

Al considerar un sistema de tipo flexible con movimiento del eje de masas, este tipo de modelo se acerca a un caso real, pero, hay que considerar que en este punto factores o parámetros determinantes como el material, forma del perfil, es decir, vigas, mamparos, etc., son significativamente relevantes y aunque no se tuvieron en cuenta en este estudio si pueden llegar a ser un factor determinante para predecir el flutter sobre las estructuras, y básicamente esto se debe a que al considerar módulos de rigidez por flexión y torsión, las condiciones de flutter fluctúan. Pues si estos módulos son bajos la existencia de flutter es evidente y a tempranas velocidades.

Mediante el análisis de las diferentes gráficas y los diferentes modelos se pudo determinar que las mejores relaciones se encontraron con perfiles elípticos, pues a elevados aspect ratio las condiciones críticas de flutter se encontraban a velocidades cerca al límite de velocidad. Las condiciones donde no se encontró flutter involucran dos aspectos importantes el primero velocidad, y el segundo módulos de rigidez de flexión y torsión. Es decir, que para minimizar el flutter se tendrá que hacer aeronaves con velocidades de diseño bajas o materiales con módulos altos, así, la aparición de flutter será tardía o en el mejor de los casos no existirá.

5.1 Prospectiva y actividades de mejora

Al realizar un análisis de flutter es vital conocer todos los aspectos y parámetros relacionados con el sistema en cuestión, de igual modo a futuro lo ideal sería comparar este tipo de estudio con experimentos reales en un banco de pruebas para determinar si las aproximaciones a las que se ha llegado por medio del software son fiables. El desarrollar una base experimental podrá dar veracidad a los resultados obtenidos.

Otro aspecto importante para resaltar es realizar un modelo que involucre todas las variables y parámetros para estudiar un caso de forma real, es decir, un modelo donde se pueda determinar de forma analítica y numérica los módulos de rigidez, para cualquier tipo de aeronave con una biblioteca de materiales amplia, así, no se tendrá incertidumbre al asumir este tipo de datos, y por ende podrá llegar a concluirse con eficacia la velocidad crítica de flutter para cualquier aeronave. Llegando así, a futuro, a no tener un margen de error de más del 5%.

Finalmente, un modelo en el cual se pueda analizar punto a punto el flutter sobre la estructura, independientemente del tipo y forma del perfil, ya que en los casos de estudio se analizaron las trapezoidales y elípticas, pero con base a la cuerda media por cuestiones de precisión en los datos, lo ideal sería desarrollar un modelo que involucre todas las posiciones y tamaños de cuerda cuando se habla de formas irregulares.

CAPITULO VI: BIBLIOGRAFIA

- [1] B. Donaldson, *Analysis of Aircraft Structures*. 2008.
- [2] Hale, "Aircraft Performance, Selection & Design.pdf." John Wiley & Sons,Ltd, p. 285, 1984.
- [3] I. E. Garrick and W. H. Reed III, "Historical Development of Aircraft Flutter," *J. Aircr.*, vol. 18, no. 11, pp. 897–912, 1981.
- [4] D. Raymer P., "Aircraft Design:A Conceptual Approach." American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington D.C., p. 745, 1992.
- [5] J. R. Wright, "Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads," 2007, p. 559.
- [6] C. Hebert, D. Cowan, C. Weiseman, and P. Attar, "Aerodynamic Flutter," *Nervenarzt*, vol. 42, no. 9, pp. 492–495, 1971.
- [7] C. Panda and S. R. P. Venkatasubramani, "Aeroelasticity - In general and flutter phenomenon," *2009 2nd Int. Conf. Emerg. Trends Eng. Technol. ICETET 2009*, no. March 2009, pp. 81–85, 2009.
- [8] J. Venkatramani, S. Sarkar, and S. Gupta, "Investigations on precursor measures for aeroelastic flutter," *J. Sound Vib.*, vol. 419, pp. 318–336, 2018.
- [9] J. Bertrand, H. Fellouah, and K. Alsaif, "Experimental Evaluation of the Critical Flutter Speed on Wings of Different Aspect Ratio," vol. 10, no. 6, pp. 1509–1514, 2017.
- [10] J. Sodja, F. Roizner, R. De Breuker, and M. Karpel, "Experimental characterisation of flutter and divergence of 2D wing section with stabilised response," *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 78, pp. 542–552, 2018.
- [11] H. I. Banerjee, J.R., Liu, X. & Kassem, "City Research Online City , University of London Institutional Repository," vol. 3, pp. 413–422, 2014.
- [12] A. V Balakrishnan, A. M. Tuffaha, I. Patino, and O. Melnikov, "Flutter analysis of an articulated high aspect ratio wing in subsonic air fl ow \$," *J. Franklin Inst.*, vol. 351, no. 8, pp. 4230–4250, 2014.

- [13] M. Y. Harmin, M. S. Othman, and F. I. Romli, "Parametric Study on the Flutter Characteristics of a Simple Rectangular Wing-Box Model with Varying Ribs Orientation," vol. 119, no. 15, pp. 3771–3777, 2018.
- [14] M. Fujino and H. Oyama, "AIAA 2003-1942," *AIAA*, no. April, pp. 1–12, 2003.
- [15] M. R. Moosavi, A. R. N. Oskouei, and A. Khelil, "Flutter of subsonic wing," vol. 43, pp. 617–627, 2005.
- [16] C. Peng and H. Jinglong, "Prediction of flutter characteristics for a transport wing with wingtip devices," *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 23, no. 1, pp. 461–468, 2012.
- [17] F. Liu, J. Cai, and Y. Zhu, "Calculation of Wing Flutter by a Coupled Fluid-Structure Method," vol. 38, no. 2, 2001.
- [18] V. Mukhopadhyay, "A CONCEPTUAL WING FLUTTER ANALYSIS TOOL FOR," pp. 1–12.
- [19] H. J. Dunn and R. V Doggett, "The Use of the Regier Number Structural Design With Flutter in the Constraints," 2018.
- [20] A. Koreanschi *et al.*, "Flutter Analysis of a Morphing Wing Technology Demonstrator : Numerical Simulation and Wind Tunnel Testing a," vol. 8, no. 1, pp. 99–124, 2016.
- [21] L. Prabhu and J. Srinivas, "Engineering Science and Technology , an International Journal Modeling of flutter stability margins in an aerofoil cantilever wing with multiple engines mounts under inherent structural nonlinearities," *Eng. Sci. Technol. an Int. J.*, vol. 21, no. 5, pp. 1034–1046, 2018.
- [22] S. Irani and S. Sazesh, "A new flutter speed analysis method using stochastic approach," *J. Fluids Struct.*, vol. 40, pp. 105–114, 2013.
- [23] H. Hesse and R. Palacios, "Model Reduction in Flexible-Aircraft Dynamics with Large Rigid-Body Motion Model Reduction in Flexible-Aircraft Dynamics with Large Rigid-Body Motion," no. April, 2013.
- [24] M. T.H.G, "Elementary Aeroelasticity," in *Aircrfat Structures for engineering students*, 1999, pp. 540–576.
- [25] D. Stinton, *The Design of the Aeroplane*. 2001.

- [26] Ditutor, “https://www.ditutor.com/geometria_analitica/ecuacion_elipse.html,” 2015. .
- [27] J. Paul K., “www.airfieldmodels.com,” 2003. .
- [28] S. Images, “Piper PA-28-180 ‘Cherokee 180.’” [Online]. Available:
http://www.skytamer.com/Piper_PA-28-180_Cherokee_180.html.
- [29] “Cessna Citation Jet/M2,” 2018. [Online]. Available:
https://en.wikipedia.org/wiki/Cessna_CitationJet/M2.
- [30] V. Tita, “Aula 3 Cargas de Vôo e de Solo,” São Carlos, Brasil, 2011.

ANEXOS

Código Fuente

<https://drive.google.com/file/d/131LoNsh5JCt5n2TqE1GzvhkKjp9MMap1B/view?usp=sharing>

[g\[5\]](#)

código Ala rígida

```

%%Análisis de Flutter Variando Aspect ratio-Sistema rigido
% Inicializando variables
clear; clf;
% Parametros del sistema
%%FLUTTER
%Inicializando las variables
clear; clf
% parametros del sistema
b=input('ingrese el valor de la semienvergadura')
prompt='1 para ce o 2 para ct o 3 para cs' % ce=cuerda eliptica, ct=cuerda
trapezoidal
c=input(prompt)
if c==1
    suf=input('ingrese el valor de la superficie') % superficie en m^2
    B=suf/(b*pi); % Calculo de la semicuerda del perfil eliptico
    x=0:1:b;
    c=2*sqrt((b^2*B^2 - x.^2*B^2)/(b^2))
    cm=0.9055*c(1);
    AR=(8*b)/(pi*cm);
elseif c==2;
    ctip=input('ingrese cuerda de punta');
    croot=input('ingrese cuerda de raiz');
    cm=(2/3)*croot*(1+(ctip/croot)+(ctip/croot)^2)/(1+ctip/croot);
    AR=(2*b)/(cm);
else c==3;
    ctip=input('ingrese cuerda de punta');
    croot=input('ingrese cuerda de raiz');
    suf=input('ingrese el valor de la superficie') % superficie en m^2
    B=suf/(b*pi); % Calculo de la semicuerda del perfil eliptico
    x=0:1:b;
    c=2*sqrt((b^2*B^2 - x.^2*B^2)/(b^2));

cm=sqrt(((2/3)*croot*(1+(ctip/croot)+(ctip/croot)^2)/(1+ctip/croot))*0.9055*c(
1));
    AR=(8*b)/(pi*cm);
end
m=input('wing loading');
kappa_freq=5;
theta_freq=10;
xcm=0.5*cm;
xf=0.48*cm;
  
```

```

e=xf/cm - 0.25;
velin=1;
velfin=input('ingrese velocidad máxima');
velinc=0.1;
a=2*pi;
rho=1.225;
Mthetadot=-1.2;
M=(m*cm^2 - 2*m*cm*xcm)/(2*xcm)
damping_Y_N=1; %= 1 si existe amortiguamiento =0 si no hay
if damping_Y_N==1
    %adición de amortiguamiento estructural C=alpha+M+beta*K
    z1=0.0;
    z2=0.0;
    w1=2*2*pi;
    w2=14*2*pi;
    alpha=2*w1*w2*(-z2*w1 + z1*w2)/(w1*w1*w2*w2);
    beta=2*(z2*w2 - z1*w1)/(w2*w2 - w1*w1);
end
%
% Matriz de inercia
a11=(m*b^3*cm)/3 + M*b^3/3; % I kappa
a22=m*b*(cm^3/3 - cm^2*xf + xf^2*cm) + M.*(xf^2*b);%I theta
a12=m*b^2/2*(cm^2/2 - cm*xf) - M*xf*b^2/2;% I kappa theta
a21 = a12;
A=[a11,a12;a21,a22];
% Matriz de rigidez estructural
k1=(kappa_freq*pi^2).^2.*a11;
k2=(theta_freq*pi^2).^2.*a22;
E=[k1, 0; 0,k2];
icount=0;
for V=velin:velinc:velfin
    icount=icount + 1;
    if damping_Y_N==0;
        C=[0,0;0,0];
    else
        C=rho*V*[cm*b^3*a/6 ,0; -cm^2*b^2*e*a/4 , -cm^3*b*Mthetadot/8] +
alpha.*A + beta.*E;
    end

    K=(rho*V^2*[0,cm*b^2*a/4;0,-cm^2*b^2*e*a/2])+[k1,0;0,k2];
    Mat=[[0,0;0,0] ,eye(2); -A\K, -A\C];
    lambda=eig(Mat)
    % Frecuencias naturales y razon de amortiguamiento
    for jj=1:4
        im(jj)=imag(lambda(jj));
        re(jj)=real(lambda(jj));
        freq(jj,icount)=sqrt(re(jj)^2+im(jj)^2);
        damp(jj,icount)=-100*re(jj)/freq(jj,icount);
        freq(jj,icount)=freq(jj,icount)/(2*pi);
    end
    Vel(icount)=V;
end
%gráfica de frecuencias y amortiguamiento vs velocidad
figure(1)
subplot(2,1,1);plot(Vel,freq,'k');

```

```
vaxis=axis;xlim=[0 vaxis(2)];
xlabel('airspeed (m/s)');ylabel('Freq (Hz)'); grid
subplot(2,1,2);
plot(Vel,damp,'k')
xlim=[0 vaxis(2)]; axis([xlim ylim]);
xlabel('airspeed (m/s)'); ylabel('Damping ratio(%)'); grid
```

código ala flexible

```
%Análisis de Flutter Variando Aspect ratio Sistema Flexible
% Inicializando variables
clear; clf;
% Parametros del sistema
%%FLUTTER
%Inicializando las variables
clear; clf
% parametros del sistema
b=input('ingrese el valor de la semienvergadura')
prompt='1 para ce o 2 para ct o 3 para cuerda stender' % ce=cuerda eliptica,
ct=cuerda trapezoidal
c=input(prompt)
if c==1
    suf=input('ingrese el valor de la superficie'); % superficie en m^2
    B=suf/(b*pi); % Calculo de la semicuerda del perfil eliptico
    x=0:1:b;
    c=2*sqrt((b^2*B^2 - x.^2*B^2)/(b^2))
    cm=0.9055*c(1);
    AR=(8*b)/(pi*cm);

elseif c==2;
    ctip=input('ingrese cuerda de punta');
    croot=input('ingrese cuerda de raiz');
    cm=(2/3)*croot*(1+(ctip/croot)+(ctip/croot)^2)/(1+ctip/croot);
    AR=(2*b)/(cm);
else
    c==3;
    ctip=input('ingrese cuerda de punta');
    croot=input('ingrese cuerda de raiz');
    suf=input('ingrese el valor de la superficie') % superficie en m^2
    B=suf/(b*pi); % Calculo de la semicuerda del perfil eliptico
    x=0:1:b;
    c=2*sqrt((b^2*B^2 - x.^2*B^2)/(b^2));

cm=sqrt(((2/3)*croot*(1+(ctip/croot)+(ctip/croot)^2)/(1+ctip/croot))*0.9055*c(1));
    AR=(8*b)/(pi*cm);
end
m=input('wing loading');
kappa_freq=5;
theta_freq=10;
xcm=0.5*cm;
xf=0.48*cm;
e=xf/cm - 0.25;
```

```

velin=1;
velfin=input('ingrese velocidad máxima');
velinc=0.1;
a=2*pi;
rho=1.225;
Mthetadot=-1.2;
M=(m*cm^2 - 2*m*cm*xcm)/(2*xcm)
damping_Y_N=1; %= 1 si existe amortiguamiento =0 si no hay
if damping_Y_N==1
    %adición de amortiguamiento estructural C=alpha+M+beta*K
    z1=0.0;
    z2=0.0;
    w1=2*2*pi;
    w2=14*2*pi;
    alpha=2*w1*w2*(-z2*w1 + z1*w2)/(w1*w1*w2*w2);
    beta=2*(z2*w2 - z1*w1)/(w2*w2 - w1*w1);
end
%
% Matriz de inercia
a11=(m*b^5*cm)/5+ (M*b^3/3); % I kappa
a22=(m*b^3/3)*(cm^3/3 - cm^2*xf + xf^2*cm) + (M.*(xf^2*b));%I theta
a12=(m*b^4/4)*(cm^2/2 - cm*xf)- (M.*xf*b^2/2) ;% I kappa theta
a21 = a12;
A=[a11,a12;a21,a22];
% Matriz de rigidez estructural
k1=(kappa_freq*pi*2).^2.*a11;
k2=(theta_freq*pi*2).^2.*a22;
E=[k1, 0; 0,k2];
icount=0;
for V=velin:velinc:velfin
    icount=icount + 1;
    if damping_Y_N==0;
        C=[0,0;0,0];
    else
        C=rho*V*[cm*b^5*a/10 ,0; -cm^2*b^4*e*a/8 , -cm^3*b^3*Mthetadot/24]+
        alpha.*A + beta.*E;
    end
    EI=6000000;
    GJ=(2/3)*EI;

    K=(rho*V^2*[0,cm*b^4*a/8;0,-cm^2*b^3*e*a/6])+[4*EI*b,0;0,GJ*b];
    Mat=[[0,0;0,0] ,eye(2); -A\K, -A\C];
    lambda=eig(Mat)
    % Frecuencias naturales y razon de amortiguamiento
    for jj=1:4
        im(jj)=imag(lambda(jj));
        re(jj)=real(lambda(jj));
        freq(jj,icount)=sqrt(re(jj)^2+im(jj)^2);
        damp(jj,icount)=-100*re(jj)/freq(jj,icount);
        freq(jj,icount)=freq(jj,icount)/(2*pi);
    end
    Vel(icount)=V;
end
%gráfica de frecuencias y amortiguamiento vs velocidad
figure(1)

```

```
subplot(2,1,1);plot(Vel,freq,'k');  
vaxis=axis;xlim=[0 vaxis(2)];  
xlabel('airspeed (m/s)');ylabel('Freq (Hz)'); grid  
subplot(2,1,2);  
plot(Vel,damp,'k')  
xlim=[0 vaxis(2)]; axis([xlim ylim]);  
xlabel('airspeed (m/s)'); ylabel('Damping ratio(%)'); grid
```