



**Universidad Internacional de La Rioja**  
**Campus de Ingeniería**

---

# Nuevo método numérico de resolución de ecuaciones elípticas en derivadas parciales

---

Trabajo fin de máster presentado por:  
Titulación:  
Línea de investigación  
Director/a:

Alejandro Moysi Amieva  
Máster en ingeniería matemática y computación  
Investigación pura  
Dr. Alberto Magreñán Ruíz

Navalmoral de la Mata  
21 de septiembre de 2017  
Firmado por: Alejandro Moysi Amieva

## Resumen

El presente Trabajo Fin de Master plantea un método numérico para solucionar ecuaciones elípticas en derivadas parciales. Si bien ya existen métodos para resolver dichas ecuaciones, con este método se pretende simplificar el planteamiento y resolución de las mismas, así como facilitar la implementación de cambios o variaciones en los problemas desde el punto de vista de la programación en lenguaje matemático que se tiene que implementar, pudiendo suponer una mejora relevante en el lado hombre de la interfase hombre-máquina.

Al igual que el método clásico de resolución de ecuaciones elípticas, se trata de un método basado en la transformación por diferencias finitas pero la diferente gestión de los términos generados hace que se genere un método con importantes diferencias respecto al clásico.

**Palabras clave:** Ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones elípticas, diferencias finitas, método iterativo.

## Abstract

The aim of the present Master's dissertation is to set out an approach for solving elliptical partial differential equations (PDEs.). Multiple forms of simplifying the approach and resolution of them exist, but there is a need to improve the simplicity of changes or variations in the problems from the point of view of programming in mathematical language that has to be implemented, which may represent a relevant enhancement in the man-machine interface.

As with elliptic equations classical resolution method, it is a method based on transformation by finite differences, but the different management of the terms generated method with important differences with the classic one.

**Keywords:** Partial differential equations, elliptic equations, finite differences, iterative method.

## Prólogo y agradecimientos

El siguiente Trabajo Fin de Máster lleva el título de “Investigación sobre nuevos métodos numéricos de resolución de ecuaciones elípticas en derivadas parciales”, quedaría por tanto enmarcado dentro del ámbito de la investigación pura.

Un Trabajo Fin de Máster de investigación pura presenta muchas más dificultades para una persona profana en el ámbito de la investigación que un Trabajo Fin de Máster enfocado a un desarrollo práctico o a una aplicación real; no obstante, me incliné por la opción de la investigación pura puesto que creo que los conocimientos adquiridos en el máster han sido sólidos y me servirían de palanca para desarrollar una idea que se gestó hace unos meses en mí cabeza. Además, me es mucho más satisfactorio desde el punto de vista personal el poder realizar una pequeña contribución a los métodos numéricos, una gota de agua en un océano de métodos y conocimientos; pero una aportación, al fin y al cabo.

La finalización de este Trabajo Fin de Máster es el resultado del apoyo recibido por el director del trabajo, el Dr. Alberto Magreñán Ruiz, siempre diligente a la hora de prestarme apoyo y ayudándome a resolver dudas y dificultades.

Quiero agradecer a la Universidad Internacional de La Rioja la oportunidad que me ha brindado, gracias a su método docente flexible y de calidad; hace que las personas con compromisos laborales y disponibilidad de tiempo limitada, pero con ganas de seguir aprendiendo y desarrollándonos intelectualmente podamos seguir haciéndolo.

Por último, quiero agradecer a mis familiares la paciencia que han tenido conmigo por estar ausente o abstraído estos meses en los que he cursado el máster, en especial a mi esposa por su apoyo incondicional, dedicación y comprensión.

## Índice

1. Introducción .....	1
2. Estudios previos.....	9
3. Aplicación a un problema genérico .....	14
3.1. Aplicación del método clásico a un problema genérico .....	14
3.2. Aplicación del método propuesto a un problema genérico .....	17
4. Resolución de un problema concreto .....	22
4.1. Resolución con método clásico.....	22
4.2. Resolución con método propuesto.....	25
4.3. Algoritmo de programación del método propuesto .....	29
5. Conclusiones .....	31
5.1. Ventajas .....	31
5.2. Desventajas .....	31
5.3. Líneas de trabajo futuro .....	32
6. Bibliografía.....	33
7. Anexos.....	36
7.1. Anexo 1: Programas para la resolución numérica mediante el método clásico.....	36
7.2. Anexo 2: Programas para la resolución numérica mediante el método propuesto.....	37

## Índice de figuras y tablas

Figura 1. "Metodos numéricos de resolución de problemas de valor inicial".	3
Figura 2. "Métodos numéricos de resolución de problemas de contorno, EDO".	3
Figura 3. "Métodos numéricos de resolución en diferencias finitas de los principales tipos de EDP".	6
Figura 4. "Mallado resultante al aplicar el método clásico a un problema genérico".	16
Figura 5. "Mallado resultante al aplicar el método propuesto a un problema genérico".	20
Figura 6. "Mallado resultante al aplicar el método clásico al problema concreto".	23
Figura 7 "Mallado resultante al aplicar el método propuesto al problema concreto".	28
Figura 8. "Gráfico de distribución de temperatura".	29
Tabla 1. "Solución obtenida aplicando el método clásico".	24

# 1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que relacionan una función y una o varias de sus derivadas con respecto a sus variables independientes de manera no trivial.

Si en una ecuación diferencial únicamente aparecen derivadas con respecto a una de sus variables independientes, se denomina Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), siendo una expresión genérica de una EDO:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

En la EDO anterior 'y' representa la variable dependiente mientras que 't' representa la variable independiente

En las ecuaciones diferenciales es importante definir y aclarar dos características de las mismas que con frecuencia son confundidas, el grado y el orden de la ecuación diferencial:

- **Grado:** se denomina grado de una ecuación diferencial a la potencia a la que está elevada la variable dependiente de mayor orden.
- **Orden:** se denomina orden de una ecuación diferencial al grado de la derivada más alta.

Con las EDO se pueden plantear una gran cantidad de modelos matemáticos y representaciones de fenómenos físicos, pero si se quieren emplear estas ecuaciones para modelizar la realidad física generalmente hay que asumir simplificaciones, pues solo aparece una variable independiente sobre la que dependen todas las otras variables pertinentes.

Existen diversas técnicas de resolución analítica de ecuaciones diferenciales ordinarias, que se pueden aplicar o no teniendo en cuenta la estructura de las mismas.

Dentro de las de EDO de primer orden cabe destacar:

- **Ecuaciones de variables separadas:** Aquellas en las que se pueden separar los términos de las derivadas, presentan la forma:  $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ .

- **Ecuaciones homogéneas:** Son aquellas con la forma  $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , con  $f(tx, ty) = t \cdot f(x, y), \forall t \neq 0$ . Se resuelven mediante la aplicación del cambio de variable  $y = u \cdot x$ , convirtiendo la ecuación diferencial homogénea en una ecuación de variables separadas.
- **Ecuaciones lineales:** Presentan la forma  $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ , las cuales tienen por solución  $y(x) = e^{-\int P(x).dx} (C + \int Q(x)e^{\int P(x).dx} dx)$
- **Ecuación de Bernoulli:** Presenta la forma  $y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$ , se mediante el cambio de variable  $z = y^{n-1}$  y dividiendo la ecuación la ecuación de Bernoulli por  $y^n$ , se convierte la ecuación en lineal.
- **Ecuaciones de Ricatti:** Presentan la forma  $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ , mediante el cambio de variable  $y = y_1 + u$  se convierte en una ecuación de Bernoulli, siendo  $y_1$  una solución particular de la ecuación.

El listado anterior puede considerarse que aglutina las principales ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con solución analítica; aunque existen más tipos con solución analítica, como algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden implícitas. Pero las técnicas de resolución analíticas, si es que existen, son cada vez más complejas; sucediendo lo mismo con ecuaciones diferenciales ordinarias de órdenes superiores.

En los casos en los que es muy complejo o directamente no se puede recurrir a una solución analítica, se emplean los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los cuales permiten resolver tanto ecuaciones de primer orden, de órdenes superiores y sistemas de ecuaciones diferenciales.

A continuación, se presenta un organigrama con los métodos principales, basado en las técnicas descritas en el libro Burden, R. L., Faires, J. D. (1998) Análisis Numérico, Madrid, España: International Thompson Editores.

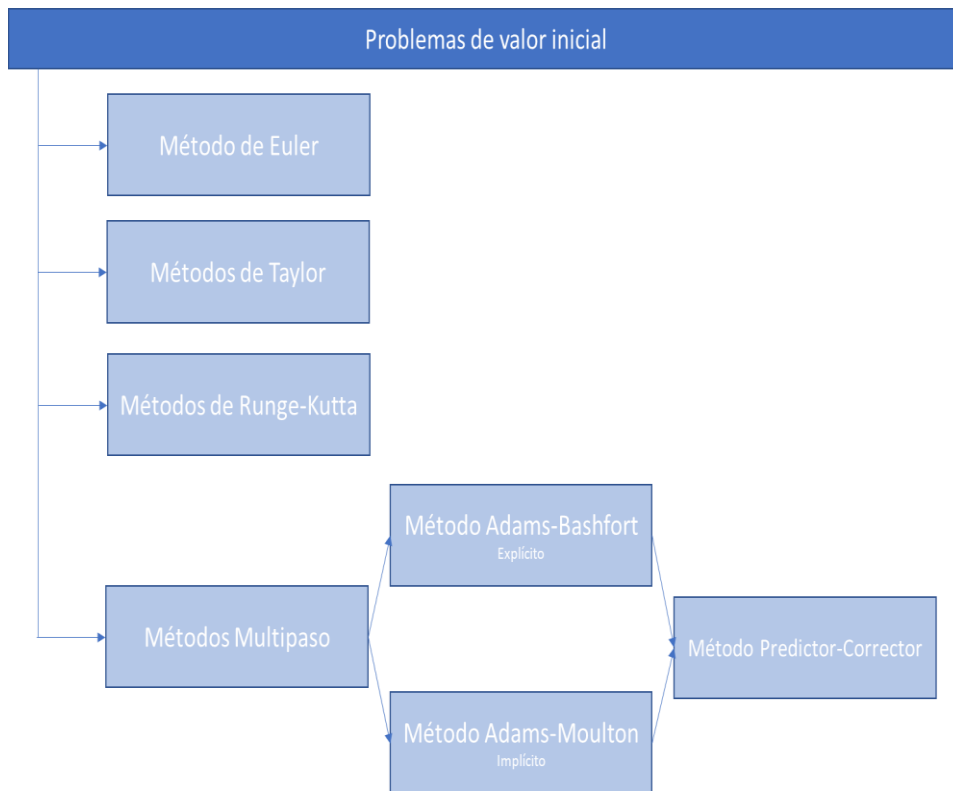


Figura 1. “Métodos numéricos de resolución de problemas de valor inicial”, Elaboración propia

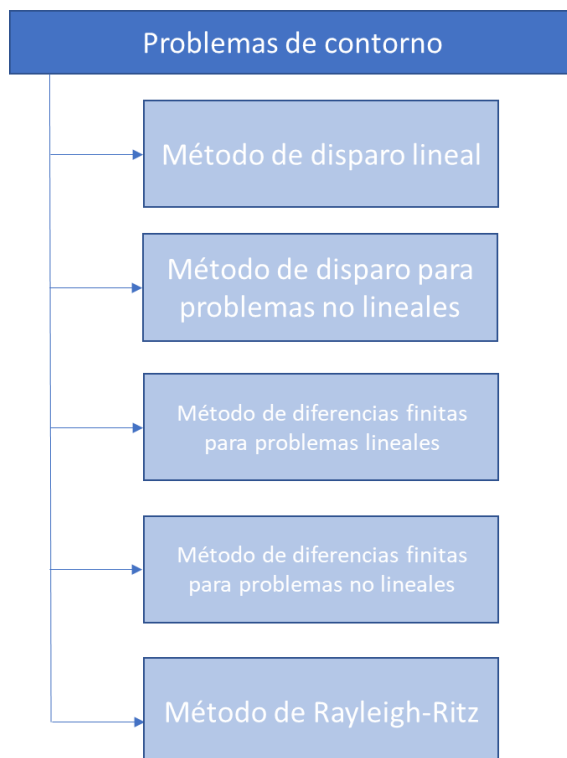


Figura 2. “Métodos numéricos de resolución de problemas de contorno, EDO”, Elaboración propia

Actualmente existen gran diversidad de métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y su estudio quedaría fuera de este Trabajo Fin de Máster,

pero se ha considerado relevante realizar una pequeña introducción de las EDO y los métodos de resolución existentes.

De manera equivalente a lo realizado con las EDO, realizaré una breve introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP), basándonos en Romero, S., Moreno, F.J. Rodríguez, I. M., (2001), Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP's), Huelva, España: Servicio de publicaciones Universidad de Huelva; Fernandez, L. A., (2016) Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. Cantabria, España: Universidad de Cantabria y en Burden, R. L., Faires, J. D. (1998) Análisis Numérico, Madrid, España: International Thompson Editores.

Para modelar un fenómeno físico en el que intervengan dos o más variables independientes matemáticamente nos lleva irremediablemente a la aparición de EDP.

En cuanto a la definición, una EDP de orden  $n$  es una ecuación en la que aparece una función desconocida que depende, al menos, de dos variables reales, junto a algunas de sus derivadas parciales hasta orden  $n$ .

De manera equivalente a las EDO, las EDP tienen orden, definido como: el orden superior de las derivadas parciales que figuran en la ecuación.

La forma más genérica de una EDP sería:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n}\right) = 0$$

Siendo  $x_i$  las variables independientes, con  $\forall i = 1, 2, \dots, n$

Y cumpliéndose que:  $k_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$  son enteros no negativos tales que:  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$

La clasificación más clásica de ecuaciones en derivadas parciales es la siguiente:

- **Ecuaciones hiperbólicas:** Aparecen en la modelización de fenómenos oscilatorios: vibraciones de cuerdas, oscilaciones electromagnéticas, etc. El ejemplo clásico de la ecuación de onda viene representado por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

- **Ecuaciones parabólicas:** Aparecen en la modelización de procesos de conductividad térmica y difusión. El ejemplo clásico de ecuación de calor es el siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

- **Ecuaciones elípticas:** Aparecen en la modelización de procesos estacionarios, como puede ser la distribución de temperatura en una placa en estado estacionario o la energía potencial de un punto en un plano sobre el que existen fuerzas gravitacionales. Un ejemplo tradicional de ecuación diferencial parcial elíptica es la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y)$$

La clasificación anterior está basada en los tipos de fenómenos que se describen. Como puede observarse todos los casos de la clasificación son EDP de orden 2, lo cual no quiere decir que no existan EDP de orden 1 o de órdenes superiores, simplemente que problemas habituales en física e ingeniería están regidos por EDP de orden 2.

En cuanto a la resolución de EDP, desde el punto de vista analítico existen algunos métodos para resolverlas, como pueden ser:

- El método de separación de variables.
- Resolución de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.
- Resolución de ecuaciones cuasilineales de primer orden.

Las EDP son mucho más complejas que las EDO, y aunque existen algunos métodos de resolución analítica como los anteriores, para aplicarlos las EDP deben tener una estructura y condiciones concretas. Para la mayoría de EDP no se pueden aplicar, no existiendo a día de hoy solución analítica para las mismas.

Por lo indicado anteriormente, para la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales se recurre habitualmente a los métodos numéricos.

Los métodos de resolución numéricos más habituales de ecuaciones en derivadas parciales están basados en la aproximación de las derivadas parciales mediante

diferencias finitas, ya sean progresivas, regresivas o centrales y la discretización del problema, con el fin de establecer un sistema de ecuaciones ordinarias, implícitas o explícitas, y resolverlos mediante otras técnicas numéricas como pueden ser el método de Jacobi, Gauss-Seidel o sobrerrelajación descritos en Burden, R. L., Faires, J. D. (1998) Análisis Numérico, Madrid, España: International Thompson Editores. A continuación, se presenta un organigrama en el que se recogen los métodos numéricos de resolución existentes basados en aproximaciones por diferencias finitas para los 3 tipos de EDP principales, sin entrar en detalles en su planteamiento y resolución:



Figura 3. “Métodos numéricos de resolución en diferencias finitas de los principales tipos de EDP”, Elaboración propia

Existen métodos no basados en diferencias finitas para la resolución de EDP, como el Método de los Elementos Finitos (MEF), el cual podría clasificarse como el método equivalente al de Rayleigh-Ritz para la resolución de problemas de contorno en EDO.

El MEF tiene una complejidad muy superior a la de los métodos basados en diferencias finitas, pero presenta la ventaja de que se pueden manejar de manera relativamente sencilla las condiciones de frontera. Los problemas físicos reales, con frecuencia tienen condiciones de frontera que incluyen derivadas y fronteras de forma irregular. Esta clase de condiciones resultan difíciles de manejar con métodos de diferencias finitas puesto que las condiciones de frontera con derivadas implican una aproximación mediante un cociente de diferencias en los puntos de la red y las formas irregulares de frontera dificultan la colocación de los puntos de la red. En el MEF se resuelven estos inconvenientes mediante la inclusión de las condiciones de frontera como integrales en una funcional que se minimiza.

Con independencia de la naturaleza física del problema, el MEF requiere de los siguientes pasos:

- Definición del problema y su dominio.
- Discretización del dominio en elementos finitos.
- Establecer las ecuaciones de los elementos
- Establecer la formulación del problema.
- Construir las funciones de aproximación de cada elemento.
- Ensamblaje de las ecuaciones de los elementos.
- Solución del conjunto de ecuaciones simultaneas.
- Interpretación de los resultados.

No se va a profundizar en el planteamiento matemático del MEF. Actualmente existe gran cantidad de programas computacionales que implementan MEF.

Con esta breve introducción se ha pretendido establecer una visión general sobre las ecuaciones diferenciales, sus tipos y las técnicas, principalmente las numéricas, de resolución existentes.

En este Trabajo Fin de Máster se pretende abarcar una parte muy pequeña del mundo de las ecuaciones diferenciales. En el cuerpo del Trabajo Fin de Máster se desarrolla una variación al método clásico de resolución de ecuaciones elípticas en

derivadas parciales mediante diferencias finitas, con la finalidad de facilitar el planteamiento y resolución de estos problemas.

En el capítulo 2 de este Trabajo Fin de Máster se ha revisado la investigación llevada a cabo en áreas coincidentes, con la finalidad de identificar si el método propuesto había sido previamente planteado por algún autor.

En el capítulo 3 se aplica tanto el método clásico de resolución de ecuaciones elípticas como el método propuesto a un problema genérico, con el fin de clarificar las diferencias conceptuales entre ellos.

En el capítulo 4 se aplica tanto el método clásico de resolución de ecuaciones elípticas como el método propuesto a un problema concreto de solución conocida, comparándose los resultados obtenidos.

En el capítulo 5 se exponen las conclusiones a las que se ha llegado tras la realización de este Trabajo Fin de Máster, las ventajas y desventajas que presenta el método propuesto; así como las líneas de trabajo futuro que quedan abiertas tras el trabajo.

En el capítulo 6 se cita toda la bibliografía que ha contribuido, en mayor o menor medida, a la finalización de este Trabajo Fin de Máster.

## 2. Estudios previos

Se ha realizado una búsqueda de estudios y trabajos previos realizados en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales, especialmente centradas en la aplicación de métodos basados en diferencias finitas. El número de estudios y publicaciones en este campo es muy amplio, si bien se han considerado de especial interés las siguientes publicaciones:

- Ahn, J., Kang, S., Kwon, Y., (2009), A Laplace transform finite difference method for the Black-Scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 (2010) 247-255. doi: 10.1016/j.mcm.2009.08.012: Se desarrolla un método numérico eficiente para resolver la ecuación de Black-Scholes. Basado en la transformada numérica adaptable de Laplace y la diferencia finita método, el sistema calcula los precios de las opciones europeas. Los costes computacionales para el método se reducen significativamente en comparación con los de los esquemas convencionales de marcha en el tiempo. La precisión y la eficiencia del método se muestran a través de las simulaciones numéricas.
- Al-Jawary, M., Hatif, S., (2017), A semi-analytical iterative method for solving differential algebraic equations, *Ain Shams Engineering Journal*. doi: 10.1016/j.asej.2017.07.004: Este trabajo presenta una nueva implementación de un método iterativo propuesto por Temimi y Ansari (TAM) para soluciones aproximadas de ecuaciones algebraicas diferenciales que surgen en muchas aplicaciones de ingeniería y ciencias aplicadas. La solución se obtiene con componentes fáciles calculados sin ningún supuesto restrictivo para tratar con los términos no lineales. Los resultados numéricos obtenidos por TAM son una mejor precisión y una convergencia más rápida en comparación con el método de perturbación de homotopía. El análisis de errores de la solución aproximada se estudia utilizando el error absoluto y se obtiene una alta convergencia.
- Antonietti, P., Verani, M., Zikatanov, L., (2015), A two-level method for mimetic finite difference discretizations of elliptic problems. *Computers and Mathematics with Applications*. doi: 10.1016/j.camwa.2015.06.010: E este trabajo se propone y analiza un método de dos niveles para las aproximaciones de las diferencias finitas miméticas de los problemas del

valor de los límites elípticos de segundo orden. Se prueba que el algoritmo de dos niveles es uniformemente convergente, es decir, el número de iteraciones necesarias para lograr la convergencia está uniformemente limitado.

- Beirão da Veiga, L., Lopez L., Vacca G (2017): Mimetic finite difference methods for Hamiltonian wave equations in 2D. *Computers and Mathematics with Applications*. doi: 0.1016/j.camwa.2017.05.022: En esta publicación se considera una solución numérica para la ecuación de onda Hamiltoniana en dos dimensiones espaciales. Se construye un procedimiento de dos pasos en el cual primero se discretiza el espacio por el método de diferencias finitas miméticas (MFD) y luego se emplea un esquema symplectico para integrar el sistema hamiltoniano semi-discreto. La principal característica de los métodos MFD, cuando se aplica a problemas estacionarios, es imitar propiedades importantes del sistema continuo. Este enfoque permite obtener un procedimiento adecuado para integrar los problemas hamiltonianos.
- Fornberg, B., (2009), A finite difference method for free boundary problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233 (2010) 2831-2840. doi: 10.1016/j.cam.2009.11.028. Fornberg y Meyer-Spasche propusieron hace algún tiempo una estrategia simple para corregir esquemas de diferencias finitas en presencia de un límite libre que atraviesa una rejilla cartesiana. En este trabajo se muestra cómo este procedimiento se puede combinar con un procedimiento de optimización basado en minimax para resolver rápidamente una amplia gama de problemas de valores límite libres de tipo elíptico.
- Gosse, L., (2017). Dirichlet-to-Neumann mappings and finite-differences for anisotropic diffusion. *Computers and Fluids*, 156 (2017) 58–65. doi: 10.1016/j.compfluid.2017.06.026: Una metodología general que consiste en derivar esquemas bidimensionales de diferencias finitas que implican flujos numéricos basados en mapas Dirichlet-Neumann. se aplica a varios tipos de ecuaciones de difusión, algunas de ellas débilmente anisotrópicas, dotadas de una fuente externa. Las discretiones de diferencia finita estándar se recuperan sistemáticamente, mostrando que, en ausencia de cualquier otro mecanismo, como p. convección y / o amortiguación (que llevan las funciones de Bessel y / o Mathieu dentro de ese tipo de flujos numéricos), estos esquemas bien conocidos logran un carácter multidimensional satisfactorio

- Pao, C.V., Wang Y.(2012) Numerical methods for fourth-order elliptic equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 292 (2016) 447–468 doi: 10.1016/j.cam.2015.07.018: Esta publicación es relativa a algunos métodos numéricos para ecuaciones elípticas de orden cuatro semilíneas con condiciones de contorno no locales. La ecuación de orden cuatro se formula como un sistema acoplado de dos ecuaciones de orden dos, las cuales son discretizadas por medio del método de las diferencias finitas. Se presentan tres esquemas iterativos monótonos para un sistema de diferencias finitas acopladas utilizando una solución superior o una solución inferior como iteración inicial. Estas secuencias de iteraciones monótonas, llamadas secuencia máxima y mínima, respectivamente, no sólo proporcionan algoritmos computacionales útiles, sino también la existencia de una solución máxima y una solución mínima del sistema de diferencias finitas. También se da una condición suficiente para la unicidad de la solución. Esta singularidad propiedad y la convergencia monótona de las secuencias máximas y mínimas conducen a una confiable y fácil de usar estimación de error para la solución calculada.
- Shao, X., Xue, G., Li, C., (2013), A conservative weighted finite difference scheme for regularized long wave equation. *Applied Mathematics and Computation*, 219 (2013)9202–9209. doi: 10.1016/j.amc.2013.03.068: En este trabajo, se considera un nuevo método de diferencia finita para el problema de valor límite inicial de la ecuación de onda larga regulada (RLW). Se proponen dos esquemas de distribución finita de conservación de la energía. Los resultados de experimentos numéricos muestran que la teoría es exacta y los esquemas son eficientes y fiables
- Ureña. F., Benito, J., J., Gavete, L., Saleté, E., Casasús, A. (2011), Estudio de la estabilidad y dispersión del problema de propagación de ondas sísmicas en 2-D, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*,27(4),269–277. doi: 10.1016/j.rimni.2011.08.001 : En este artículo se muestra la resolución del problema de propagación de ondas sísmicas en 2-D, mediante la utilización de esquemas explícitos en diferencias finitas generalizadas (GFD), lo que permite la utilización de mallas regulares e irregulares. Puesto que se utiliza un método explícito, es necesario obtener la condición de estabilidad, lo que se ha realizado mediante un análisis de Von Neumann. También se obtienen las relaciones

de dispersión en la estrella de las velocidades de fase para las ondas P y S, así como las de las velocidades de grupo. Dada la importancia en la aplicación del método tiene el control sobre la irregularidad de la malla, se han definido unos índices de irregularidad para la estrella y la malla, analizándose su relación con la dispersión y el paso del tiempo utilizado en los cálculos.

- Wang, H., Shi, B. Liang, H., Chai, Z., (2017), Finite-difference lattice Boltzmann model for nonlinear convection-diffusion equations. *Applied Mathematics and Computation*, 309 (2017) 334–349. doi: 10.1016/j.amc.2017.04.015: En esta publicación se propone un modelo enrejado de Boltzmann (LB) basado en diferencias finitas para ecuaciones isotrópicas y anisotrópicas de convección-difusión. A diferencia del modelo estándar de enrejado de Boltzmann, los pasos temporales y espaciales están desacoplados de tal manera que resulta conveniente estudiar el problema de convección-difusión con una red no uniforme. Además, también preserva la ventaja del modelo LB estándar de que la ecuación de convección-difusión de valor complejo puede ser resuelta directamente. El análisis de estabilidad de Von Neumann se realiza para discutir la región de estabilidad que se puede utilizar para determinar los parámetros libres aparecidos en el modelo. Para probar el rendimiento del modelo, una serie de simulaciones numéricas de algunos problemas clásicos, incluyendo la ecuación de difusión, la ecuación de conducción de calor no lineal, la ecuación de Sine-Gordon, el problema de Hill gaussiano, la ecuación de Burgers-Fisher y el Schrödinger no lineal ecuación, también se han llevado a cabo. Los resultados muestran que el presente modelo tiene una tasa de convergencia de segundo orden en el espacio, y generalmente es también más preciso que el modelo LB estándar.
- Xue, G., Zhang, L., (2013), A new finite difference scheme for generalized Rosenau-Burgers equation. *Applied Mathematics and Computation*, 222 (2013) 490–496. doi: 10.1016/j.amc.2013.07.052: En este trabajo se considera la solución numérica del problema de valores límite iniciales de la ecuación generalizada de Rosenau-Burgers. Se propone un nuevo esquema de diferencias finitas implícitas lineales de dos niveles. Y se obtiene la estimación previa de la solución de diferencias finitas. Se ha demostrado la solubilidad única de las soluciones numéricas. Se demuestra que el esquema

de diferencias finitas es convergente y estable. Los experimentos numéricos indican que el método es eficiente.

- Zapata, M., U., Itzá, R. (2017). High-order implicit finite difference schemes for the two-dimensional Poisson equation, *Applied Mathematics and Computation*, 309 (2017) 222–244. doi: 10.1016/j.amc.2017.04.006: En este trabajo, se propone una nueva familia de esquemas de diferencias finitas de alto orden para resolver la ecuación bidimensional de Poisson mediante fórmulas implícitas de diferencias finitas de  $(2M + 1)$  puntos de operación. La formulación implícita se obtiene a partir del análisis de la expansión de la serie de Taylor y de la teoría del plano de onda, y se construye a partir de unas pocas modificaciones de los esquemas de diferencia finita estándar. Las aproximaciones logran una precisión de orden  $(2M + 4)$  para los puntos de rejilla internos y hasta la precisión de octavo orden para los puntos de rejilla de límite. Utilizando un método Sucesivo de Sobre-Relajación, los esquemas implícitos de orden alto tienen una convergencia más rápida a medida que  $M$  aumenta, compensando el cálculo adicional de más puntos de operador. Por lo tanto, el solucionador propuesto resulta en un método atractivo, fácil de implementar, con una exactitud de orden superior pero casi el mismo coste de cálculo que los de la formulación explícita o compacta. Además, el caso particular  $M = 1$  produce un nuevo esquema compacto de diferencias finitas de sexto orden de precisión.

Tras la búsqueda de trabajos y publicaciones en campos coincidentes, no se ha encontrado ningún estudio que cubra o describa el método propuesto en este Trabajo Fin de Máster.

### 3. Aplicación a un problema genérico

Para una mayor claridad en las diferencias existentes entre el método clásico y el método propuesto se va a plantear la resolución detallada de un problema genérico con ambos métodos.

El método propuesto está basado, igualmente que el método clásico, en la transformación y discretización del problema mediante diferencias finitas. La diferencia estriba en la gestión realizada con los términos surgidos de las diferencias finitas. En el método clásico se establece un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve mediante algún método numérico de resolución de sistemas, mientras que en el método propuesto se plantea un sistema iterativo para alcanzar la solución, con una tolerancia máxima prefijada.

#### 3.1. Aplicación del método clásico a un problema genérico

Para el desarrollo de este apartado me basaré en el contenido de la asignatura “Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería, del Máster Ingeniería Matemática y Computación de la Universidad Internacional de la Rioja (UNIR).

Para el problema genérico se escoge una ecuación elíptica genérica en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \equiv f(x, y)$$

Con:

$$(x, y) \in R$$

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ para } (x, y) \in S$$

Donde  $R = \{(x, y): a < x < b; c < y < d\}$  y  $S$  es la frontera de  $R$

Para simplificar el desarrollo se va a utilizar la notación:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

Se realiza una transformación del problema mediante la aplicación de diferencias finitas, utilizando el tamaño de paso  $h$  para la componente  $x$  y el tamaño de paso  $k$

para la componente y, estableciéndose  $n_x$  y  $n_y$  subintervalos en los dominios de x e y respectivamente:

$$h = \frac{b - a}{n_x} \rightarrow x_i = a + i \cdot h \rightarrow i = 0, 1, \dots, n_x$$

$$k = \frac{d - c}{n_y} \rightarrow y_j = c + j \cdot k \rightarrow j = 0, 1, \dots, n_y$$

Realizando la aproximación por diferencias finitas de los términos en derivadas parciales, se obtiene:

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

Sustituyendo la aproximación de los términos anteriores en la ecuación (1) se obtiene una transformación y discretización del problema:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = f(x_i, y_j)$$

Agrupando los parámetros h y k en el término lambda,  $\lambda = \frac{h}{k}$  y reorganizado los términos de la ecuación, se obtiene:

$$2(\lambda^2 + 1) \cdot u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \lambda^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = -h^2 \cdot f(x_i, y_j)$$

Con:

$$i = 1, 2, \dots, n_x - 1$$

$$j = 1, 2, \dots, n_y - 1$$

Una vez transformado y discretizado el problema se recurre a las condiciones de contorno para establecer los puntos de solución conocida y poder calcular el valor de la solución en el resto de puntos. Partiendo de unas condiciones de contorno genéricas, representadas por una ecuación para cada contorno del dominio:

$$u_{0,j} = g(a, y_j), \quad u_{n_x,j} = g(b, y_j), \quad j = 0, 1, \dots, n_y$$

$$u_{i,0} = g(x_i, c), \quad u_{i,n_y} = g(x_i, d), \quad i = 0, 1, \dots, n_x$$

Con el planteamiento se obtiene un mallado de puntos representado por la siguiente figura:

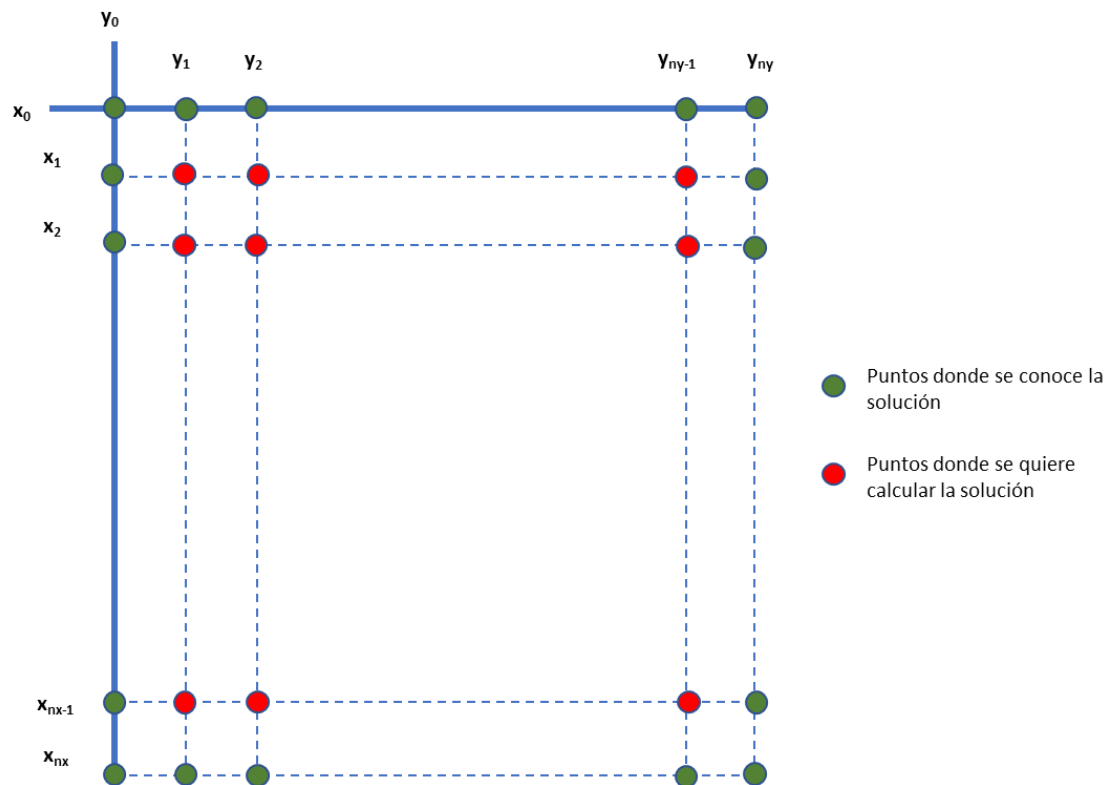


Figura 4. "Mallado resultante al aplicar el método clásico a un problema genérico", Elaboración propia.

En los puntos del contorno del dominio, representados en color verde, la solución es conocida por las condiciones de contorno dadas; es necesario determinar la solución en los puntos interiores del mallado, representados en color rojo.

Una vez el problema ha sido transformado, discretizado y aplicadas las condiciones de contorno, para obtener el valor de la solución en los puntos interiores del mallado es necesario establecer un sistema de ecuaciones con un número de ecuaciones igual al número de puntos en los que es necesario conocer la solución. Una vez planteado el sistema, dado el tamaño de los sistemas generados, lo habitual es recurrir a algún método de resolución de sistemas lineales: Jacobi, Gauss-Seidel, etc.

Con el método clásico se establecen sistemas de ecuaciones de tamaño  $[(nx - 1) \cdot (ny - 1)]$ ; lo cual son sistemas de ecuaciones muy grandes, incluso para un número bajo de subintervalos  $nx$  y  $ny$ . Los sistemas generados son difíciles y poco intuitivos para ser automatizados en un lenguaje de matemático de programación, especialmente en el caso de querer introducir modificaciones en el número de

subintervalos. Este es uno de los aspectos que se pretende solucionar con el método propuesto.

### 3.2. Aplicación del método propuesto a un problema genérico

Para la aplicación del método propuesto partimos de la misma ecuación genérica que la empleada en el subapartado anterior:

Se considera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \equiv f(x, y)$$

Con:

$$(x, y) \in R$$

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ para } (x, y) \in S$$

Donde  $R = \{(x, y): a < x < b; c < y < d\}$  y  $S$  es la frontera de  $R$

Para simplificar el desarrollo se va a utilizar la notación:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y) \quad (2)$$

Se realiza una transformación del problema mediante la aplicación de diferencias finitas, utilizando el tamaño de paso  $h$  para la componente  $x$  y el tamaño de paso  $k$  para la componente  $y$ , estableciéndose  $nx$  y  $ny$  subintervalos en los dominios de  $x$  e  $y$  respectivamente:

$$h = \frac{b - a}{nx} \rightarrow x_i = a + i \cdot h \rightarrow i = 0, 1, \dots, nx$$

$$k = \frac{d - c}{ny} \rightarrow y_j = c + j \cdot k \rightarrow j = 0, 1, \dots, ny$$

Realizando la aproximación por diferencias finitas de los términos en derivadas parciales, se obtiene:

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

Sustituyendo la aproximación de los términos anteriores en la ecuación (2) se obtiene una transformación y discretización del problema:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = f(x_i, y_j)$$

Agrupando los parámetros h y k en el término lambda,  $\lambda = \frac{h}{k}$  y reorganizado los términos de la ecuación, se obtiene:

$$2(\lambda^2 + 1) \cdot u_{i,j} - (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \lambda^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = -h^2 \cdot f(x_i, y_j)$$

Con:

$$i = 1, 2, \dots, nx - 1$$

$$j = 1, 2, \dots, ny - 1$$

Reagrupando términos y dejando a la izquierda los términos de mayor j:

$$\lambda^2 u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} + 2(1 + \lambda^2)u_{i,j} - u_{i+1,j} - \lambda^2 u_{i,j-1} - h^2 \cdot f(x_i, y_j)$$

Despejando el término de mayor j:

$$u_{i,j+1} = -\frac{2}{\lambda^2} u_{i-1,j} + \frac{2(1 + \lambda^2)}{\lambda^2} u_{i,j} - \frac{1}{\lambda^2} u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - \frac{h^2}{\lambda^2} \cdot f(x_i, y_j)$$

Simplificando el término que acompaña a la función f,  $\frac{h^2}{\lambda^2} = \frac{h^2}{h^2/k^2} = k^2$ , la expresión anterior se transforma en:

$$u_{i,j+1} = -\frac{2}{\lambda^2} u_{i-1,j} + \frac{2(1 + \lambda^2)}{\lambda^2} u_{i,j} - \frac{1}{\lambda^2} u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - k^2 \cdot f(x_i, y_j)$$

Se pueden agrupar todas las expresiones discretizadas por el método y expresarlo en forma matricial:

$$\mathbf{u}^{(j+1)} = \mathbf{A}\mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{u}^{(j-1)} - \mathbf{k}^2 \cdot \mathbf{f}^{(j)}$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2(1+\lambda^2)}{\lambda^2} & -\frac{1}{\lambda^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{2(1+\lambda^2)}{\lambda^2} & -\frac{1}{\lambda^2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{2(1+\lambda^2)}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

$$u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}$$

$$f^{(j)} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_j) \\ f(x_2, y_j) \\ \vdots \\ f(x_{nx-1}, y_j) \end{pmatrix}$$

Una vez transformado y discretizado el problema se recurre a las condiciones de contorno para establecer los puntos de solución conocida y poder calcular el valor de la solución en el resto de puntos. Partiendo de unas condiciones de contorno genéricas, representadas por una ecuación para cada contorno del dominio:

$$u_{0,j} = g(a, y_j), \quad u_{nx,j} = g(b, y_j), \quad j = 0, 1, \dots, ny$$

$$u_{i,0} = g(x_i, c), \quad u_{i,ny} = g(x_i, d), \quad i = 0, 1, \dots, nx$$

Como puede deducirse del planteamiento del método, para calcular los términos en (j+1) se utilizan términos de (j) y de (j-1); por lo tanto, para iniciar el método (j+1=2) deben utilizar los valores iniciales dados por las condiciones de contorno (j=0) y estimar/aproximar los valores en el valor siguiente de j (j=1). Es necesario partir de valores en dos columnas para iniciar el método, por lo que se será necesario comenzar el método con valores para  $u^{(0)}$  y valores para  $u^{(1)}$ :

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}; \text{ Valores conocidos por las condiciones de contorno del problema.}$$

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}; \text{ Valores no conocidos a priori, hay que partir de una estimación y}$$

ajustarlo hasta que se cumpla que  $u_{calculado}^{ny} \approx u_{Real}^{ny}$ ; con la tolerancia que sea establecida, siendo  $u_{Real}^{ny}$  un valor conocido por las condiciones de contorno del problema

Con los planteamientos anteriores, se obtendría el siguiente mallado de puntos:

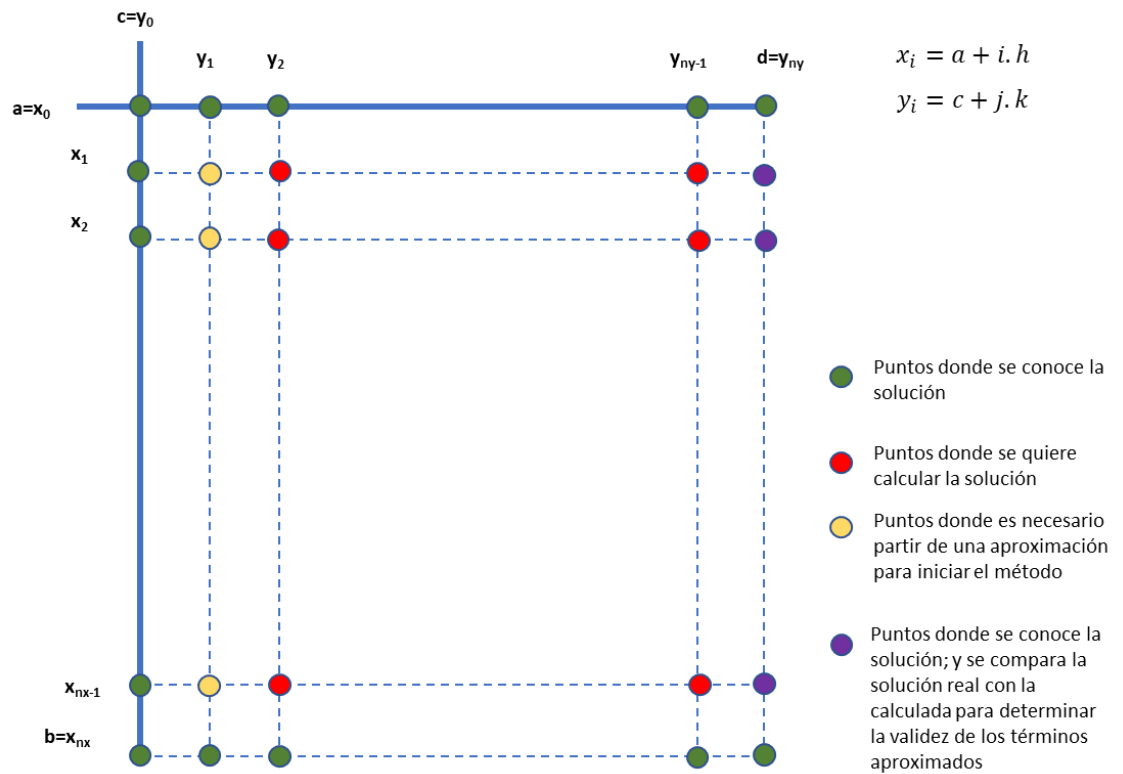


Figura 5. "Mallado resultante al aplicar el método propuesto a un problema genérico", Elaboración propia

Con el método propuesto no es necesario plantear un sistema de ecuaciones, pues el método es explícito y el valor en cada punto se determina de manera directa, evitando aplicar métodos numéricos de resolución de sistemas lineales, con los inconvenientes de convergencia y de requisitos de estructuras de matrices que implican. Adicionalmente, al ser explícito podría incluso aplicarse en el caso de que la estructura de las ecuaciones resultantes al transformar y discretizar el problema fuesen no lineales.

Las características y consideraciones que hay que tener en cuenta para el método son:

- El método es explícito; por lo que hay que tener en cuenta que podría haber valores de  $\lambda$  para los que no converja el método. Dado que el método es similar al utilizado en la resolución de ecuaciones hiperbólicas en derivadas parciales; con un valor de  $\lambda=1$  la convergencia del método debería estar asegurada.
- Es necesario arrancar el método con un valor aproximado de  $u^{(1)}$ , y repetir el proceso hasta obtener la tolerancia que se requiera:  $\left| u_{real}^{(ny)} - u_{calculado}^{(ny)} \right| \leq tol$ . El

valor  $u_{real}^{(ny)}$  es conocido por las condiciones de contorno. Es necesario modificar el valor de  $u^{(1)}$  en cada iteración hasta conseguir que se cumpla la tolerancia marcada.

- El orden de convergencia máximo de método será  $O(k^2 + h^2)$ ; ya que se usan diferencias finitas de orden dos para aproximar los términos.

## 4. Resolución de un problema concreto

En este apartado se tomará un problema concreto de la bibliografía y se resolverá, tanto por el método clásico como por el método propuesto, para verificar que las soluciones obtenidas son equivalentes, así como para evidenciar de la manera más clara posible las diferencias existentes.

### 4.1. Resolución con método clásico

Se aplica el método de resolución clásico a un problema concreto, en este caso el Ejemplo 1 de la página 676 del libro: Burden, R. L., Faires, J. D. (1998) Análisis Numérico, Madrid, España: International Thompson Editores:

“Considere el problema de determinar la distribución de calor en estado estable, en una placa cuadrada metálica delgada, con las dimensiones de 0.5m por 0.5m. Conservamos dos fronteras adyacentes a 0°C, mientras el calor en las otras dos fronteras aumenta linealmente de 0°C en una esquina a 100°C en el sitio donde ambos lados se encuentran.”

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Reescribiendo la ecuación en notación más compacta se obtiene:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

Con un dominio de x e y:

$$x \in [0, 0.5]; y \in [0, 0.5]$$

Con las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u(x, 0.5) = 200 \cdot x \\ u(0, y) = 0 \\ u(0.5, y) = 200 \cdot y \end{cases}$$

Se considera:

$$nx = 4 \rightarrow h = \frac{0.5 - 0}{nx} = \frac{0.5 - 0}{4} = 0.125$$

$$ny = 4 \rightarrow k = \frac{0.5 - 0}{ny} = \frac{0.5 - 0}{4} = 0.125$$

$$h = k$$

Aplicando diferencias finitas a la ecuación del problema se obtiene:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0; h^2 = k^2$$

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = h^2 \cdot 0$$

Reagrupando:

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 0 \quad (3)$$

A continuación, se plantea el mallado que se obtendría al subdividir el dominio con los tamaños de pasos h y k calculados:

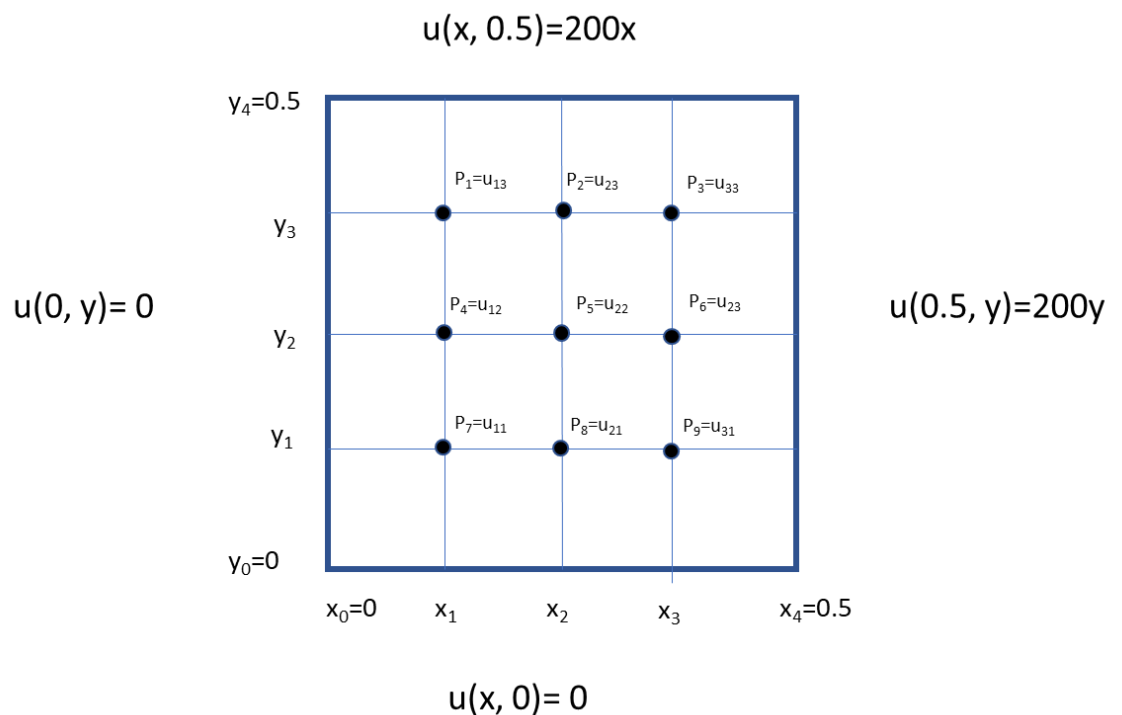


Figura 6. "Mallado resultante al aplicar el método clásico al problema concreto", Elaboración propia

Partiendo de la ecuación (3):

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 0 \text{ para todo } \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Aplicando la ecuación a cada punto del mallado se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u_{13}: P_1: 4u_1 - u_2 - u_4 = u_{0,3} + u_{1,4}$$

$$u_{23}: P_2: 4u_2 - u_3 - u_1 - u_5 = u_{2,4}$$

$$u_{33}: P_3: 4u_3 - u_2 - u_6 = u_{4,3} + u_{3,4}$$

$$u_{12}: P_4: 4u_4 - u_5 - u_1 - u_7 = u_{0,2}$$

$$u_{22}: P_5: 4u_5 - u_6 - u_2 - u_4 - u_8 = 0$$

$$u_{32}: P_6: 4u_6 - u_5 - u_3 - u_9 = u_{4,2}$$

$$u_{11}: P_7: 4u_7 - u_8 - u_4 = u_{0,1} + u_{1,0}$$

$$u_{21}: P_8: 4u_8 - u_9 - u_7 - u_5 = u_{2,0}$$

$$u_{31}: P_9: 4u_9 - u_8 - u_6 = u_{3,0} + u_{4,1}$$

Considerando las condiciones de frontera establecidas para el problema y planteando el sistema en forma matricial  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{b}$ , se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Obteniéndose la solución:

Tabla 1. "Solución obtenida aplicando el método clásico"

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_i$	18,75	37,50	56,25	12,50	25,00	37,50	6,25	12,50	18,75

La solución se obtiene mediante los programas en Octave (ElipticoClasico.m y Jacobi2.m), el código de los mismos se adjunta en el Anexo 1.

Una vez planteado el sistema, resolverlo es relativamente sencillo con la ayuda de software matemático; el método presenta las siguientes dificultades o inconvenientes:

- Dificultad en automatizar la programación de la matriz de coeficientes **A**.
- Dificultad de automatizar en la programación los cambios que se producen al modificar los tamaños de pasos  $h$  y  $k$ , especialmente en el vector de términos independientes **b**.
- Se obtienen sistemas de ecuaciones muy grandes, incluso en el caso de subdividir el dominio en pocos subintervalos. Los sistemas de ecuaciones son de tamaño  $(n_x-1) \cdot (n_y-1)$ ; para el problema utilizado de ejemplo  $n_x=n_y=4$ ; por lo que se obtiene un sistema de 9 ecuaciones. Para una división del dominio en más subintervalos crece de manera significativa el tamaño del sistema a resolver.
- Al recurrir a un método numérico de resolución de sistemas lineales, la matriz **A** debe de cumplir una serie de condicionantes, como ser diagonalmente dominante.

#### 4.2. [Resolución con método propuesto](#)

De manera equivalente a lo realizado para el método clásico resolución partimos del problema concreto descrito en este el Ejemplo 1 de la página 676 del libro Burden, R. L., Faires, J. D. (1998) Análisis Numérico, Madrid, España: International Thompson Editores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Reescribiendo la ecuación en notación más compacta se obtiene:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

Con un dominio de  $x$  e  $y$ :

$$x \in [a, b]; y \in [c, d]$$

$$a = 0; b = 0.5; c = 0; d = 0.5$$

$$x \in [0, 0.5]; y \in [0, 0.5]$$

Con las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u(x, c) = u(x, 0) = 0 \\ u(x, d) = u(x, 0.5) = 200 \cdot x \\ u(a, y) = u(0, y) = 0 \\ u(b, y) = u(0.5, y) = 200 \cdot y \end{cases}$$

Se considera:

$$nx = 4 \rightarrow h = \frac{0.5 - 0}{nx} = \frac{0.5 - 0}{4} = 0.125$$

$$ny = 4 \rightarrow k = \frac{0.5 - 0}{ny} = \frac{0.5 - 0}{4} = 0.125$$

$$h = k$$

Aplicando diferencias finitas a la ecuación del problema se obtiene:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0;$$

Considerando  $\lambda = \frac{h}{k}$ , la ecuación se estructura:

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + \lambda^2 u_{i,j+1} - 2\lambda^2 u_{i,j} + \lambda^2 u_{i,j-1} = 0$$

Reagrupando términos y dejando a la izquierda los términos de mayor j:

$$\lambda^2 u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} + 2(1 + \lambda^2)u_{i,j} - u_{i+1,j} - \lambda^2 u_{i,j-1}$$

Despejando el término de mayor j:

$$u_{i,j+1} = -\frac{2}{\lambda^2} u_{i-1,j} + \frac{2(1 + \lambda^2)}{\lambda^2} u_{i,j} - \frac{1}{\lambda^2} u_{i+1,j} - u_{i,j-1}$$

Expresando el sistema en forma matricial:

$$\mathbf{u}^{(j+1)} = \mathbf{A}\mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{u}^{(j-1)}$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2(1 + \lambda^2)}{\lambda^2} & -\frac{1}{\lambda^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{2(1 + \lambda^2)}{\lambda^2} & -\frac{1}{\lambda^2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{2(1 + \lambda^2)}{\lambda^2} \end{pmatrix};$$

Para las consideraciones de este problema, el valor de lambda es igual a 1, por lo que la matriz de coeficientes quedaría definida:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}$$

Como ya se ha expuesto con anterioridad, es necesario iniciar el método con valores de los términos  $u^{(0)}$  y  $u^{(1)}$ :

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}; \text{ Valores conocidos por las condiciones de contorno del problema.}$$

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}; \text{ Valores no conocidos a priori, sería necesario que partir de una}$$

estimación y ajustarlo hasta que se cumpla que  $u_{calculado}^{ny} \approx u_{Real}^{ny}$ ; con la tolerancia que sea establecida, siendo  $u_{Real}^{ny}$  un valor conocido por las condiciones de contorno del problema. Para la resolución del problema y verificar la validez del método, partiremos de los valores de  $u^{(1)}$  obtenidos al resolver el problema con el método clásico. Por lo tanto, teniendo en cuenta el número de subintervalos en los que se ha dividido el dominio, partiríamos de los siguientes valores de  $u^{(1)}$  para iniciar el método:

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.25 \\ 12.50 \\ 18.75 \end{pmatrix}$$

Los planteamientos anteriores se representan en el siguiente mallado de puntos:

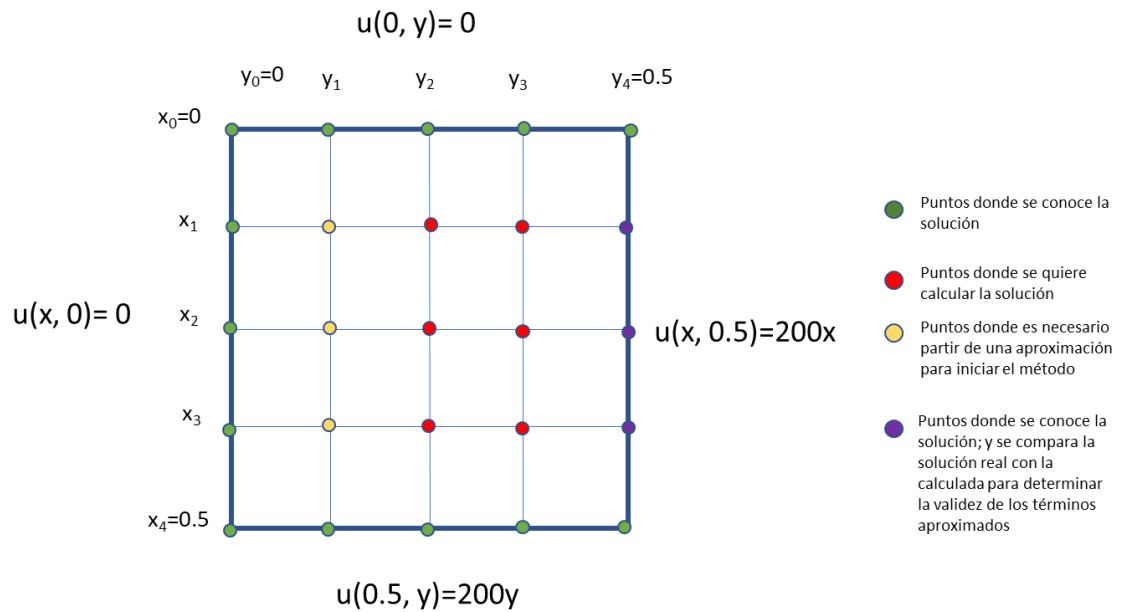


Figura 7 “Mallado resultante al aplicar el método propuesto al problema concreto” , Elaboración propia

La solución al problema se obtiene mediante los programas realizados en Octave, (incluidos en el anexo 2):

- ElipticoPropuesto.m; en el que se desarrolla el método propuesto.
- funcionCC1.m, funcionCC2.m, funcionCC3.m y funcionCC4.m; en los que se incluyen las condiciones de contorno del problema.

A continuación, se muestra la matriz de resultados de temperaturas en cada nodo obtenida al resolver el problema con el método propuesto:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.25 & 12.50 & 18.75 & 25 \\ 0 & 12.50 & 25 & 37.5 & 50 \\ 0 & 18.75 & 37.50 & 56.25 & 75 \\ 0 & 25 & 50 & 75 & 100 \end{pmatrix}$$

Se presenta el gráfico de distribución de temperaturas en la placa obtenido en al ejecutar el programa ExplicitoPropuesto.m:

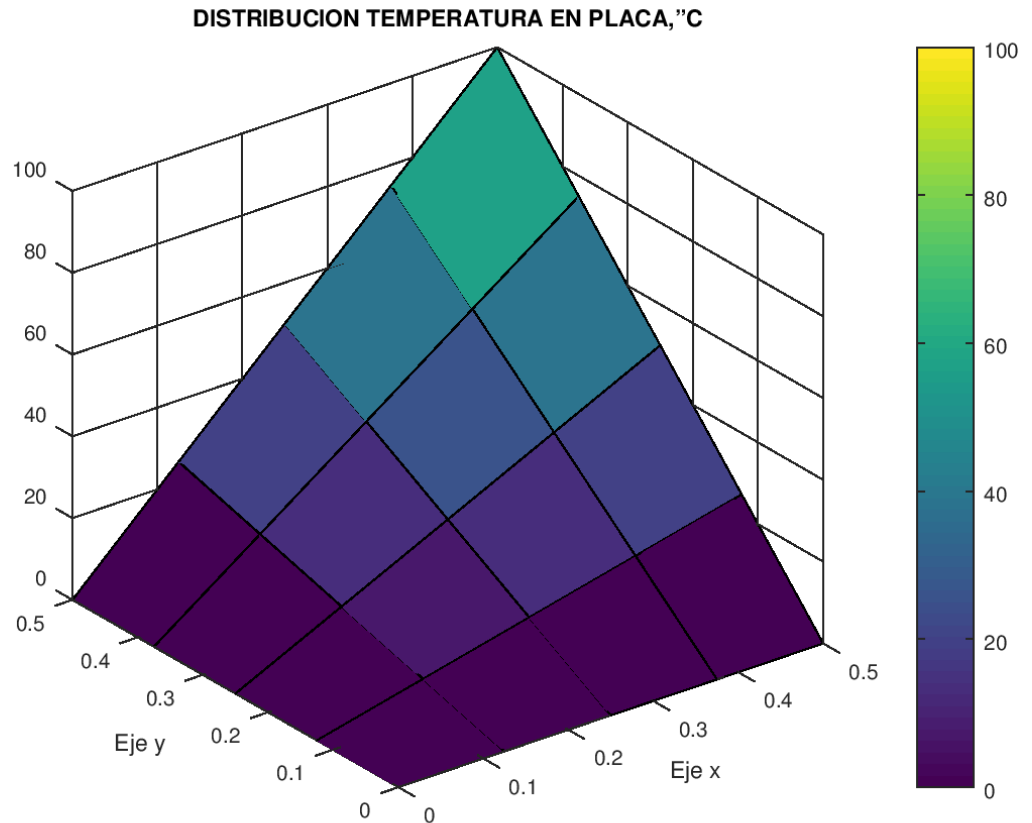


Figura 8. "Gráfico de distribución de temperatura", Elaboración propia

Como puede observarse en la matriz de temperaturas  $U$ , la solución obtenida para cada punto es la misma que la obtenida con el método clásico. Con lo que se verifica que con una aproximación suficientemente buena del término  $u^{(1)}$  con el método propuesto se obtienen resultados satisfactorios.

#### 4.3. [Algoritmo de programación del método propuesto](#)

A continuación, se indica de manera simplificada los pasos a seguir para implementar el método en un lenguaje de programación matemático:

- Definir los elementos  $h = \frac{b-a}{nx}$ ;  $k = \frac{d-c}{ny}$ ;  $\lambda = \frac{h}{k}$
- Utilizar condiciones de contorno para calcular:
  - $u(x_i, c); i = 1, 2, \dots, nx - 1$
  - $u(a, y_j); j = 0, 1, \dots, ny$
  - $u(b, y_j); j = 0, 1, \dots, ny$

- Utilizar la condición de contorno restante para calcular:

- $u(x_i, d) = u_{Real}^{(ny)}; i = 1, 2, \dots, nx - 1$

- Estimar mediante aproximación el valor  $u^{(1)}$ :

- Calcular la solución del resto de puntos:

- $u_{i,j+1} = -\frac{2}{\lambda^2}u_{i-1,j} + \frac{2(1+\lambda^2)}{\lambda^2}u_{i,j} - \frac{1}{\lambda^2}u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - k^2 \cdot f(x_i, y_j);$   
 $i = 1, 2, \dots, nx - 1; j = 1, 2, \dots, ny - 1$

Comparación del resultado:

- Si  $\left| u_{real}^{(ny)} - u_{calculado}^{(ny)} \right| \geq tol \rightarrow$  *modificar  $u^{(1)}$  y recalcular*
- Si  $\left| u_{real}^{(ny)} - u_{calculado}^{(ny)} \right| \leq tol \rightarrow$  *Método Finalizado*

## 5. Conclusiones

Tras el desarrollo del método propuesto para la resolución de ecuaciones elípticas; la aplicación del método a un caso genérico y la resolución de un problema concreto, se puede extraer la conclusión del que el método es viable para la resolución de ecuaciones elípticas, al menos para aquellas con dominios simples (rectangulares o cuadrados).

Estableciéndose una comparación con el método clásico de resolución pueden establecerse las siguientes ventajas y desventajas.

### 5.1. Ventajas

El método propuesto es explícito, por lo que no es necesario recurrir a ningún método numérico de resolución de sistemas lineales, no estableciéndose por tanto restricciones a la estructura de la matriz de coeficientes  $A$  resultante a la hora de transformar y discretizar el problema; como la necesidad de ser diagonalmente dominante, entre otras.

Al ser un método explícito y no recurrir a métodos numéricos de resolución de sistemas, podría ser aplicado a ecuaciones elípticas no lineales.

Un planteamiento más sencillo a la hora de programar el método desde el punto de vista del usuario, automatizando las condiciones de contorno en el sistema evitando así tener que realizar manipulaciones “a mano” del sistema de ecuaciones, como ha sido necesario hacer en el punto 6.1 en la resolución mediante el método clásico.

En el método clásico la programación en lenguaje matemático de la matriz de coeficientes  $A$  puede ser dificultosa, esta complicación se elimina con el método propuesto.

Una vez el método se ha programado es más sencillo introducir cambios en el mismo, ya sea en el número de subintervalos en los que se divide el dominio, o en las condiciones de contorno.

### 5.2. Desventajas

Para iniciar el método propuesto se necesita partir de los valores de dos columnas de nodos  $u^{(0)}$  y  $u^{(1)}$ , en lugar de solo una columna de nodos  $u^{(0)}$  como ocurre con el método clásico. Si los valores de  $u^{(1)}$  no son conocidos, como habitualmente sucede

en este tipo de problemas, será necesario estimar el valor de  $u^{(1)}$  y verificar si se cumplen los requisitos de tolerancia marcados, en caso contrario es necesario modificar los valores de  $u^{(1)}$  y volver a ejecutar el método hasta que cumpla la tolerancia.

Es necesario desarrollar un algoritmo que en cada iteración modifique los valores de  $u^{(1)}$  de manera que el proceso sea convergente a la solución.

Al tener que establecer un proceso iterativo, la eficacia y eficiencia del método dependerá de la eficacia del algoritmo de modificación de  $u^{(1)}$ , por lo que el coste computacional del método propuesto puede ser mayor respecto al método clásico.

### 5.3. [Líneas de trabajo futuro](#)

Una vez planteado y analizado, con sus ventajas e inconvenientes, el método de resolución de ecuaciones elípticas propuesto, se abren varias vías de trabajo posibles para continuar con la mejora y evolución del método, las cuales podrían condensarse en los siguientes puntos:

- Diseño e implementación de un algoritmo que modifique el término  $u^{(1)}$  en función del valor de la diferencia entre la condición de contorno real y la calculada de iterado anterior,  $|u_{real}^{(ny)} - u_{calculado}^{(ny)}|$ . La eficiencia del método dependerá de manera directa de la eficiencia del algoritmo converger a la solución.
- Adaptación del método para ampliar su rango de aplicación, llevándolo a su uso en ecuaciones tridimensionales o multidimensionales, de manera que no quede restringido a dos dimensiones, aumentando su aplicación en la resolución de problemas reales de la física o la ingeniería.
- Implementación del uso de un mallado de puntos no uniforme, permitiendo que la densidad de nodos pueda ser mayor en regiones que se estimen de interés, aumentando la eficiencia del método al disminuir cálculos en zonas de baja relevancia.
- Desarrollo de una variante del método para la resolución de ecuaciones diferenciales elípticas de orden superior, permitiendo su aplicación a un mayor número de modelos físicos y matemáticos.

## 6. Bibliografía

- Ahn, J., Kang, S., Kwon, Y., (2009), A Laplace transform finite difference method for the Black-Scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 (2010) 247-255. doi: 10.1016/j.mcm.2009.08.012.
- Al-Jawary, M., Hatif, S., (2017), A semi-analytical iterative method for solving differential algebraic equations, *Ain Shams Engineering Journal*. doi: 10.1016/j.asej.2017.07.004.
- Alonso, D. M. A. I., Álvarez, L. J. y Calzada, D. J. A. (2010). Ecuaciones diferenciales ordinarias: ejercicios y problemas resueltos. Madrid: Delta Publicaciones.
- Antonietti, P., Verani, M., Zikatanov, L., (2015), A two-level method for mimetic finite difference discretizations of elliptic problems. *Computers and Mathematics with Applications*. doi: 10.1016/j.camwa.2015.06.010.
- Bargueño, F. V. y Alonso, D. M. (2013). *Problemas de ecuaciones diferenciales: con introducciones teóricas*. Madrid: UNED - Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Beirão da Veiga, L., Lopez L., Vacca G (2017).: Mimetic finite difference methods for Hamiltonian wave equations in 2D. *Computers and Mathematics with Applications*. doi: 0.1016/j.camwa.2017.05.022.
- Blanes, Z. S., Ginestar, P. D. y Roselló, F. M. D. (2013). *Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales*. Valencia: Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia.
- Burden, R. L., Faires, J. D. (1998) *Análisis Numérico*, Madrid, España: International Thompson Editores
- Fernandez, L. A., (2016) *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. Cantabria, España: Universidad de Cantabria
- Fornberg, B., (2009), A finite difference method for free boundary problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233 (2010) 2831-2840. doi: 10.1016/j.cam.2009.11.028.

- García, H. A. (2014). Ecuaciones diferenciales. México, D.F: Larousse Grupo Editorial Patria.
- Gosse, L., (2017). Dirichlet-to-Neumann mappings and finite-differences for anisotropic diffusion. *Computers and Fluids*, 156 (2017) 58–65. doi: 10.1016/j.compfluid.2017.06.026.
- Lapidus, L., Pinder, G., (1999) Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, Ed. Wiley Interscience Publication, New York.
- Larsson, S., Thomée, V., (2009), Partial differential equations with numerical methods, Berlin, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Pao, C.V., Wang Y.(2012) Numerical methods for fourth-order elliptic equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 292 (2016) 447–468 doi: 10.1016/j.cam.2015.07.018.
- Romero, S., Moreno, F.J. Rodríguez, I. M., (2001), Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP's), Huelva, España: Servicio de publicaciones Universidad de Huelva.
- Sáez, E. Ecuaciones Diferenciales Parciales Cuasilineales de primer orden, Nociones Básicas.
- Shao, X., Xue, G., Li, C., (2013), A conservative weighted finite difference scheme for regularized long wave equation. *Applied Mathematics and Computation*, 219 (2013)9202–9209. doi: 10.1016/j.amc.2013.03.068.
- Ureña, F., Benito, J., J., Gavete, L., Saleté, E., Casasús, A. (2011), Estudio de la estabilidad y dispersión del problema de propagación de ondas sísmicas en 2-D. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*,27(4),269–277. doi: 10.1016/j.rimni.2011.08.001.
- Wang H., Shi, B. Liang, H., Chai, Z., (2017), Finite-difference lattice Boltzmann model for nonlinear convection-diffusion equations.*Applied Mathematics and Computation*, 309 (2017) 334–349. doi:10.1016/j.amc.2017.04.015.

- Xue, G., Zhang, L., (2013), A new finite difference scheme for generalized Rosenau-Burgers equation. *Applied Mathematics and Computation*, 222 (2013) 490–496. doi: 10.1016/j.amc.2013.07.052.
- Zapata, M., U., Itzá, R. (2017). High-order implicit finite difference schemes for the two-dimensional Poisson equation. *Applied Mathematics and Computation*, 309 (2017) 222–244. doi: 10.1016/j.amc.2017.04.006.

## 7. Anexos

### 7.1. Anexo 1: Programas para la resolución numérica mediante el método clásico

Fichero ElipticoClasico.m

El siguiente código resuelve el problema del punto 6 aplicando el método clásico de resolución de ecuaciones elípticas, apoyándose en el método de Jacobi para resolver el sistema de ecuaciones generado:

```
1 %Problema elíptico
2 %      uxx(x,y)+uyy(x,y)=0
3 %condiciones contorno u(x,0)=0 u(x,0.5)=200x u(0,y)=0 u(0.5,y)=200y
4 %Valores iniciales de x e y
5 x0=0;
6 xf=0.5;
7 y0=0;
8 yf=0;
9 %número de pasos en x e y
10 nx=4;
11 ny=4;
12 %tamaño de paso de x e y
13 h=(xf-x0)/nx;
14 k=(yf-y0)/ny;
15 %creamos la matriz de coeficientes A, como combinación de matrices
16 A3=[4,-1,0;-1,4,-1;0,-1,4];
17 I3=eye(3);
18 O3=zeros(3);
19 A=[A3,-I3,-O3;-I3,A3,-I3;O3,-I3,A3];
20 %Creamos el vector columna de resultados
21 b=[25;50;150;0;0;50;0;0;25];
22 %u=A\b;
23 %llamada a Jacobi2
24 X0=0*b;%vector de aproximación inicial
25 tol=0.001;
26 maxiter=500;
27 u=Jacobi2(A,b,X0,tol,maxiter);
28 %damos a la solución forma de matriz en lugar de vector
29 disp('Matriz A:');
30 disp(A);
31 disp('Solucion: ');
32 disp(u);
```

Fichero Jacobi2.m

El siguiente código implementa el método de Jacobi, necesario para ejecutar el código del fichero "ElipticoClasico.m):

```

1 function [Sol,residuo,iter]=Jacobi2(A,b,X0,tol,maxiter)
2 %A:Matriz, X0:aproximación inicial,tol:tolerancia, maxiter:iteraciones máximas
3 %Sistema Ax=b
4 %Jacobi transforma la matriz A A=L+D+U
5 %Creo matriz diagonal
6 %con esto obtengo el valor de la diagonal principal en un vector
7 d=diag(A);
8 %Creo la matriz diagonal
9 D=diag(d);
10 %Cálculo inversa D
11 Dinv=inv(D);
12 %Creo matriz triangular inferior estricta (le resto la diagonal)
13 L=tril(A)-D;
14 %creo matriz triangular superior estricta (le resto la diagonal)
15 U=triu(A)-D;
16 iter=1;
17 parada=iter+1;%valor para inicializar la tolerancia
18 while (parada>tol) && (iter<maxiter)
19     x=-Dinv*(L+U)*X0+Dinv*b;
20     residuo=max(abs(b-A*x));
21     parada=norm(x-X0,inf);
22     %parada=abs(X0-x);
23     iter=iter+1;
24     X0=x;
25 endwhile
26 Sol=X0;
27 return;
28 endfunction

```

## 7.2. [Anexo 2: Programas para la resolución numérica mediante el método propuesto](#)

Fichero ElipticoPropuesto.m

El siguiente código resuelve el problema del punto 6 aplicando el método propuesto:

```

1 %nx, subintervalos eje x
2 %ny, subintervalos eje y
3 %h, tamaño de paso en x, h=(b-a)/nx
4 %k, tamaño de paso en k; k=(d-c)/nt
5 a=0;
6 b=0.5;
7 c=0;
8 d=0.5;
9 h=0.125;
10 k=0.125;
11 tol=1;
12 maxiter=400;
13 iter=0;
14 err=tol+2;
15 nx=(b-a)/h;
16 ny=(d-c)/k;
17 x=a:h:b;
18 y=c:k:d;
19 L=h/k;
20 %Generamos la matriz de soluciones U (incluyendo nodos x0 y y0)
21 U=zeros(nx+1,ny+1);
22 %Generamos los nodos conocidos por condiciones de contorno
23 U(1,:)=feval("funcionCC1",y);
24 U(end,:)=feval("funcionCC2",y);
25 U(2:nx,1)=feval("funcionCC3",x(2:nx));
26 %Generamos un vector para almacenar la solución real conocida en el último nodo
27 %y utilizarla de comparación en el método, de nx-1 filas ya que el valor
28 %en nx=0 y nx=end no se usa en la comparación del método
29 UReal=zeros(nx-1,1);
30 UReal=feval("funcionCC4",x(2:nx)');
31 %Aproximamos el nodo y1 (componente eje y 2) valores del nodo y1 introducidos
32 %para probar la validez del método introducimos el valor real del nodo
33 %U(2:nx,2)=U(2:nx,1)+k*UReal;
34 U(2:nx,2)=[6.25,12.50,18.75];
35 disp("UReal");

```

```

36 disp(UReal);
37 disp("U(2)");
38 disp(U(2:nx,2));
39 %Bucle while para la calcular el resto de valores de U
40 while iter<=maxiter && err>tol
41 %Al ser explícito no hacemos matriz A de coeficientes, incluimos la solución
42 %directamente en cada U(i,j+1);
43     for j=2:ny%
44         for i=2:nx%
45             U(i,j+1)=(-1/L^2)*U(i-1,j)+(2/L^2)*(1+L^2)*U(i,j)-1/L^2*U(i+1,j)-U(i,j-1);
46         endfor
47     endfor
48 %se comparan los valores obtenidos en el último nodo con los reales
49 %si cumple la tolerancia se sale del bucle, sino se reestima U(2:nx,2)
50 dist=UReal-U(2:nx,end);
51 err=max(abs(dist));
52 iter=iter+1;
53 if err>tol%en esta parte se introduciría el algoritmo para modificar los valores
54 %en el segundo nodo de y y volver correr el método
55     %U(2:nx,2)=U(2:nx,2)+k*(UReal-U(2:nx,end));
56 endif
57 endwhile
58 disp("Numero iteraciones:");
59 disp(iter);
60 disp("Vector distancias nodo final:");
61 disp(dist);
62 disp("Matriz U:");
63 disp(U);
64 surf(x,y,U),title("DISTRIBUCION TEMPERATURA EN PLACA, °C"),xlabel("Eje x");
65 ylabel("Eje y"),colorbar;

```

Ficheros funcionCC1.m, funcionCC2.m, funcionCC3.m y funcionCC4.m

Estos códigos implementan las condiciones de contorno del problema:

<pre> 1 function U=funcionCC1(y); 2     U=0; 3 endfunction </pre>	<pre> 1 function U=funcionCC2(y); 2     U=200*y; 3 endfunction </pre>
<pre> 1 function U=funcionCC3(x); 2     U=0; 3 endfunction </pre>	<pre> 1 function U=funcionCC4(x); 2     U=200*x; 3 endfunction </pre>