



Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

ESIT

**Máster en Ingeniería Matemática y
Computación**

Restauración de imágenes a
través del modelo de Perona y
Malik.

Trabajo Fin de Máster

presentado por: Suarez Villota, Ángela Paola.

Director/a: Chicharro López, Francisco Israel

Ciudad: Bogotá Colombia

Fecha: Marzo 2021

Resumen

En el siguiente trabajo se realizará un estudio descriptivo de la formulación del modelo de Perona-Malik para reducir el ruido en las imágenes, tomando como caso particular la ecuación de calor, se explicarán las características más importantes del desarrollo del modelo y se realizará un análisis de la solución de la ecuación de calor mediante la convolución usando la transformada de Fourier, para tal efecto se estudiará la convolución bidimensional discreta, dado que la solución de la ecuación de calor está dada por la convolución entre la condición inicial y el kernel gaussiano. Finalmente, se analizará la aplicación de la solución de la ecuación de calor al procesamiento de imágenes digitales, específicamente el proceso de restauración y suavizado de una imagen, mediante una implementación en Matlab usando imágenes de prueba tomadas por el semillero de investigación en aeronaves no tripuladas de la Escuela de Comunicaciones, con el propósito de apoyar la investigación en fotogrametría, en la que se pretende usar imágenes tomadas por drones para fortalecer la seguridad de las bases fijas del Ejército Nacional.

Palabras Clave: procesamiento de imágenes, Convolución, Kernel Gaussiano, Ecuación de Calor, modelo de Perona y Malik

Abstract

In the following work, a descriptive study of the formulation of the Perona-Malik model will be carried out to reduce noise in the images, taking the heat equation as a particular case, the most important characteristics of the development of the model will be explained and an analysis will be carried out. of the solution of the heat equation through the convolution using the Fourier transform, for this purpose the discrete two-dimensional convolution will be studied, since the solution of the heat equation is given by the convolution between the initial condition and the Gaussian kernel. Finally, the application of the heat equation solution to digital image processing will be analyzed, specifically the process of restoring and smoothing an image, through an implementation in Matlab using test images taken by the research hotbed in unmanned aircraft of the School of Communications, with the purpose of supporting research in photogrammetry, in which it is intended to use images taken by drones to strengthen the security of the fixed bases of the National Army.

Keywords: image processing, Convolution, Gaussian Kernel, Heat Equation, Perona and Malik model.

Contenido

Resumen	2
Abstract.....	3
Contenido	4
Tabla de Ilustraciones.....	6
Capítulo 1. Introducción.....	8
1.1. Motivación.....	9
1.2. Planteamiento del trabajo.....	10
1.3. Objetivos	10
1.4. Estructura del trabajo.	11
Capítulo 2. Contexto y Estado del Arte.....	12
Capítulo 3. Marco Teórico.	21
3.1. Modelo de Perona y Malik.....	21
3.1.1. La difusión isotrópica y anisotrópica.....	22
3.1.2. La ecuación de Calor	22
3.2. Convolución: Definición e interpretación geométrica:	31
Capítulo 4. Metodología.....	38
Capítulo 5. Aplicación a imágenes de prueba.....	40
5.1 Aplicación del filtro gaussiano.	42
5.2. Aplicación con otros coeficientes de difusión.	52
Coeficiente dado por la función de Lorentz.....	53
Coeficiente de difusión dado por la función de Leclerc	55
Coeficiente de Tsitsios y Petrou	57
Aplicación usando un nuevo coeficiente de difusión	60
5.3. Análisis de los resultados.....	62
Capítulo 6. Conclusiones y líneas futuras.....	70
6.1. Conclusiones	70
6.2. Líneas futuras de trabajo.....	71

Referencias73

Tabla de Ilustraciones

Ilustración 1 Proceso de binarización de una imagen por restaurar y localización de las regiones de daño, recuperada de [18]	15
Ilustración 2 (a) imagen original, (b) imagen con ruido gaussiano (c) Restauración con $\Delta t=0.1$. (d) Restauración con $\Delta t=0.5$ (e) Restauración con $\Delta t=1$. (f) Restauración con $\Delta t=3$, recuperada de [22]	17
Ilustración 3. Funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$	32
Ilustración 4. $f_2(x-t)$ y $f_1(t)$	32
Ilustración 5. Producto de $f_1(t)$ y $f_2(x-t)$	33
Ilustración 6. Resultado de la convolución entre f_1 y f_2	33
Ilustración 7 Convolución entre dos matrices	35
Ilustración 8 Producto entre las dos matrices $f(x, y)$ y $g(x, y)$	36
Ilustración 9. Etapas de la convolución bidimensional entre dos gaussianas, vista en tres dimensiones.	36
Ilustración 10 Imagen de 8x8 pixeles, $f(x,y)$	41
Ilustración 11 Matriz de pixeles asociada al fragmento de la imagen de la flor	41
Ilustración 12. Extensión de u_0 a \mathbb{R}^2 por simetría y periodicidad.	42
Ilustración 13 Filtro gaussiano bidimensional	43
Ilustración 14 Matriz G_1 rotada	45
Ilustración 15 Transposición de la matriz G_1 sobre la matriz u_0	45
Ilustración 16 Producto de las matrices G_1 y u_0	46
Ilustración 17 Imagen original $u_0(x, y)$,	46
Ilustración 18 Comportamiento de la desviación típica en el tiempo: $\sigma = 2t$	47
Ilustración 19 Imagen original y filtro gaussiano con $\sigma = 2,3,4,5,6$ de tamaño 5x5	47
Ilustración 20 Imágenes filtradas con G_1, G_2, G_3 de tamaños 3 y 9	48
Ilustración 21 Imágenes filtradas con G_2 ($\sigma = 2$) de tamaño 2,4,6,8,10,12,14,16 y 18 ..	49
Ilustración 22 Imágenes filtradas con G_σ , $\sigma = 3,6,9,12,15,18,21$ y 24 y máscara de tamaño 9x9	50
Ilustración 23 Grafica de G_σ dependiendo de σ tomando $x = 1$	51
Ilustración 24 Suavizado en diferentes direcciones.	51
Ilustración 25 Vista tridimensional del suavizado de la imagen con G_2, G_6, G_{10}	52
Ilustración 26 Coeficiente de difusión dado por la función de Lorentz y su flujo.	54
Ilustración 27 Imagen original a escala de grises, tomada por un dron.	54
Ilustración 28 Procesamiento de la imagen usando el coeficiente de Lorentz	55

Ilustración 29 Coeficiente de difusión dado por la función de Leclerc y su función de flujo.
56

Ilustración 30 Procesamiento de la imagen usando el coeficiente de Leclerc57

Ilustración 31 Coeficiente de Tsitsios y Petrou cTP y su flujo, recuperado de [31].58

Ilustración 32 Imagen procesada con el Coeficiente de Tsitsios y Petrou59

Ilustración 33 Coeficiente de difusión propuesto y su función de flujo.....60

Ilustración 34. Imagen procesada con el coeficiente de difusión propuesto.61

Ilustración 35 Imágenes procesadas con el filtro gaussiano63

Ilustración 36. Imagen procesada con el filtro Gaussiano de tamaño 3x3 y diferentes
 valores de sigma64

Ilustración 37. Imágenes con mejores resultados en las pruebas objetivas y su evaluación
 subjetiva para cada filtro.....69

Capítulo 1. Introducción.

Una imagen es una representación en dos dimensiones de la percepción visual que los seres humanos tenemos de lo que nos rodea sea real o imaginario, estas se pueden representar a través de un dibujo, una pintura, un video o una fotografía. Así las imágenes nos permiten mostrar expresiones culturales, artísticas e históricas, y al mismo tiempo nos permiten realizar estudios del entorno. En el presente trabajo se usan las imágenes digitales, las cuales se obtienen a través de cámaras fotográficas para luego ser procesadas como una función que depende de dos variables espaciales y cuyos valores representan la intensidad o nivel de gris de la imagen en cada punto de tal forma que estos valores son discretos y finitos. En el caso de imágenes a color generalmente se utiliza un espacio RGB donde cada pixel es la combinación de la intensidad de tres colores distintos: rojo, azul y verde, por lo tanto, tenemos una función para cada tipo de color, con lo cual podemos decir que el proceso en una imagen a color será una generalización del realizado en una imagen a escala de gris.

Las imágenes digitales se utilizan en diferentes campos de la ciencia y la tecnología, como en la medicina, en la astronomía, la geografía, la geología, la física, las comunicaciones, entre otras ramas, por lo cual es importante el estudio del procesamiento y tratamiento de imágenes digitales, que permite extraer información de las imágenes y mejorar la calidad de estas eliminando distorsiones o ruido. Actualmente en el grupo de investigación en aeronaves no tripuladas (SIVRT) de la Escuela de Comunicaciones, se está generando un proyecto a través del cual se pretende crear un prototipo de un sistema de aeronave no tripulada con vuelos autónomos para el reconocimiento y vigilancia en bases fijas del Ejército Nacional, en este proyecto se usan cámaras Foxer Falkor 2 Mini Estándar, la cual, a pesar de ser una cámara pequeña y ligera, su nivel de resolución no es óptimo, y dado que no hay mucho presupuesto para el proyecto que permita mejorar la inversión en las cámaras, se ha propuesto analizar las imágenes tomadas por los drones a través de diferentes filtros que permitan mejorar la calidad de las mismas y en algunos casos realizar procesos de restauración.

Por lo cual, el presente proyecto pretende analizar diferentes filtros aplicándolos a las imágenes en escala de gris, tomadas por los drones del grupo de investigación SIVRT, para luego escoger los que tienen mejores resultados. El estudio principalmente se centra en el trabajo realizado por [1] de tal forma que se inicia resolviendo el problema de Perona

y Malik usando el coeficiente de difusión igual a 1, que da como resultado la solución de la ecuación de calor, obteniendo finalmente la convolución entre el kernel Gaussiano y la imagen inicial, para luego usar diferentes coeficientes de difusión y analizando los resultados obtenidos poder aplicarlos al procesamiento de las imágenes, para posteriormente comparar los resultados y realizar una evaluación general de cada caso.

1.1. Motivación.

Las imágenes digitales son usadas en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería, son un instrumento importante en el análisis de objetos, cuerpos o elementos y en general del entorno. Se pueden aplicar en la medicina, la geografía, las comunicaciones, la seguridad entre otras, en particular, el grupo de investigación en aeronaves no tripuladas (SIVRT) de la Escuela de Comunicaciones, hace uso de estas en uno de sus proyectos de seguridad, a través del cual se pretende crear un prototipo de un sistema de aeronave no tripulada con vuelos autónomos para el reconocimiento y vigilancia en bases fijas del Ejército Nacional, donde se realizan tomas aéreas de las bases para luego analizar si hay alguna inconsistencia que pueda vulnerar la seguridad de las bases. En este proceso se ha observado que las imágenes tomadas suelen tener una baja calidad y hay algunas imágenes distorsionadas o con mucho ruido que resultan difícil de analizar. Por este motivo se ha planteado el presente proyecto de aplicación, en el cual se pretende procesar estas imágenes con el fin de mejorar su calidad y disminuir el ruido en estas.

En el desarrollo del procesamiento de imágenes se han utilizado diferentes métodos para restaurar imágenes entre ellos los modelos estocásticos, el análisis espectral y los métodos basados en las ecuaciones diferenciales parciales. En este trabajo se estudia el modelo planteado por Perona y Malik, el cual es la base de la difusión anisotrópica ya que pretende generar un suavizado intrarregional en vez de un suavizado entre regiones, usando un coeficiente de difusión determinado. Un caso particular de este modelo es la ecuación de calor cuya solución proporciona lo que se llama el filtro gaussiano, el cual se estudiará a fondo y se revisarán otros casos particulares tomando diferentes coeficientes de difusión como los propuestos por [2] para finalmente aplicar los diferentes filtros a imágenes de prueba con el propósito de comparar los resultados y determinar el mejor filtro.

1.2. Planteamiento del trabajo.

Las ecuaciones diferenciales parciales estudian el comportamiento o variación de fenómenos del mundo real. Estas se aplican como modelos matemáticos para resolver problemas del calor n-dimensionales y en particular para el caso bidimensional con el análisis de imágenes. El objetivo es analizar la restauración de una imagen de prueba, tomada por un dron del semillero de investigación en aeronaves no tripuladas de la Escuela de Comunicaciones; mediante la aplicación de las ecuaciones diferenciales y en particular la ecuación de calor, usando el modelo de Perona y Malik, inicialmente se pretende analizar el coeficiente de difusión igual a 1 y luego analizar otros coeficientes de difusión que cumplan con ciertas características para que la ecuación diferencial tenga solución y al mismo tiempo realizar un procesamiento efectivo en las imágenes, con el propósito de mejorar la calidad de estas.

1.3. Objetivos

Las ecuaciones diferenciales parciales estudian el comportamiento o variación de fenómenos del mundo real. Estas se aplican como modelos matemáticos para resolver diferentes problemas, un caso particular es el modelo de Perona y Malik que permite el análisis y procesamiento de imágenes.

El objetivo general de este trabajo es restaurar las imágenes tomadas con drones por el semillero de investigación en aeronaves no tripuladas (SIVRT) de la Escuela de Comunicaciones.

Para llevarlo a cabo, se plantea los siguientes objetivos específicos:

- Analizar el modelo de Perona y Malik para la restauración de imágenes y en particular el suavizado mediante la ecuación de calor.
- Analizar mediante imágenes de prueba la correspondencia entre la variable tiempo t y el parámetro de escala σ del kernel Gaussiano. Para llevar a cabo tal análisis se hará uso del software Matlab.
- Analizar las imágenes de prueba en diferentes escalas.
- Implementar en Matlab la convolución bidimensional entre una imagen vista como superficie y la función Gaussiana.
- Interpretar la acción del kernel en el dominio frecuencial.

- Aplicar diferentes coeficientes de difusión en la ecuación diferencial planteada por Perona y Malik para el procesamiento de imágenes, evaluar y analizar los resultados para finalmente obtener el mejor filtro.

1.4. Estructura del trabajo.

En el capítulo 1 se desarrolla la introducción donde se presenta la motivación, el planteamiento del trabajo y los objetivos para su desarrollo.

En el capítulo 2 se encuentra el contexto y el estado del arte del procesamiento de imágenes y específicamente del modelo de Perona y Malik [1], donde se describe la aplicación de las ecuaciones diferenciales en la difusión de imágenes, observando algunos modelos presentados antes de este, además en este capítulo se revisarán los principales aportes realizados al modelo de Perona y Malik.

En el capítulo 3 se expone el marco teórico, donde se estudiará con mayor profundidad el modelo propuesto por Perona y Malik, revisando los resultados obtenidos en [1], e identificando las propiedades de la difusión isotrópica y anisotrópica, para luego tomar como caso particular la ecuación de calor mostrando su solución y finalmente revisar otros coeficientes de difusión anisotrópica. Además, se desarrolla una descripción de la convolución bidimensional continua y discreta que será uno de los factores más importantes en el procesamiento de imágenes, ya que la solución de la ecuación de calor resulta ser igual a la convolución entre el kernel gaussiano y la condición inicial que en este caso será la imagen original.

En el capítulo 4 se presenta la metodología aplicada al desarrollo del proyecto, en el cual se describen las diferentes características que se analizarán en el capítulo 5 y se presenta las herramientas de evaluación que serán usadas para el análisis de la aplicación.

En el capítulo 5 se mostrará la aplicación de la ecuación de calor en una imagen a escala de grises tomada por drones del grupo de Investigación de la Escuela de Comunicaciones, de tal forma que se observará los resultados del modelo planteado por Perona y Malik usando diferentes coeficientes de difusión para comparar efectos generados en la imagen de prueba al generar una difusión anisotrópica y finalmente se realizará una evaluación y análisis de los resultados para escoger el mejor filtro.

Y en el capítulo 6 se realizarán las conclusiones y se plantearán las líneas de trabajo futuras.

Capítulo 2. Contexto y Estado del Arte.

El procesamiento de imágenes digitales tiene como objetivos fundamentales la compresión, el muestreo, la restauración y el análisis o extracción de información, nuestro estudio está enfocado en la restauración de imágenes, donde la imagen restaurada es una adaptación de la imagen original en una escala espacial, de tal forma que la imagen u está inmersa en un proceso de evolución [3], que se visualizará como una familia de imágenes que denotamos como $u(*, t)$, cuando t es cero, $u(*, 0) = u_0(*)$ se refiere a la imagen original, la cual es transformada a través de un proceso que se puede describir en forma general como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + F(x, u(t, x), \nabla u(t, x), \nabla^2 u(t, x)) = 0, \quad \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

donde F es un operador diferencial de segundo orden. En otras palabras, la evolución de u depende de sus derivadas en diferentes órdenes.

Entre los modelos propuestos para el suavizado de imágenes podemos encontrar el modelo de Rudin en [4] donde muestra un modelo de difusión inversa con el cual obtiene una imagen de estado estable, este modelo se describe a través de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{sign}(\Delta u)|Du|. \quad (2.2)$$

Más adelante se encuentra un filtro no lineal propuesto por Kramer [5] que suaviza imágenes a escala de gris reemplazando el valor del nivel de gris en un punto por el valor máximo o mínimo de niveles de gris que se encuentran en una vecindad del punto, usando

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{sign}(D^2 u(Du, Du))|Du|. \quad (2.3)$$

En 1987 Perona y Malik [1] presentaron un modelo de difusión anisotrópica a través del cual se puede hacer detección de bordes y suavizado de imágenes, este modelo se representa a través de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \operatorname{div}(c(|\nabla u|^2)\nabla u), \quad (2.4)$$

donde c es el coeficiente de difusión. Se han desarrollado múltiples estudios del modelo de Perona y Malik que han permitido el avance en el desarrollo del procesamiento de imágenes digitales, entre los que se encuentra el artículo publicado por Gerig y Kubler [6] en 1992 donde se realizó la primera implementación práctica del modelo de Perona y Malik en imágenes de resonancia magnética. Por otra parte en [7] se presenta una versión del modelo de Perona y Malik para detección de bordes donde se conserva las ventajas del modelo original y muestran que para obtener una solución única de la ecuación de Perona y Malik debe cumplirse que la función $c(s)$ la cual representa el coeficiente de difusión, multiplicada por s debe ser no decreciente, de esta forma reemplazan el gradiente ∇u en la función c por el estimador $DG_\sigma * u$ que en la práctica se puede reemplazar por un filtro paso-bajo generado por el kernel Gaussiano. La ecuación propuesta queda representada por la ecuación (2.5)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c(|\nabla G_\sigma * u|) \nabla u), \quad u(0) = u_0, \quad (2.5)$$

En [8] se muestra una solución de la ecuación de difusión presentando esquemas semi-implícitos que son más estables para cualquier paso de tiempo, este esquema es una discretización de la ecuación de difusión, desde otra perspectiva, en el trabajo realizado por Mescheder y Lorenz en [9] se relaciona el modelo de Perona y Malik con un modelo probabilístico utilizando diferentes mezclas a escala gaussiana donde se modela la varianza de la suavidad, en este modelo se proponen diferentes algoritmos que permiten inferir información de las imágenes de forma semejante al esquema de difusividad del modelo de Perona y Malik, además en el trabajo de Mescheder y Lorenz se muestra cómo se puede obtener un procedimiento eficiente para obtener el muestreo del modelo probabilístico, este algoritmo funciona mejor para restaurar áreas texturizadas y bordes difusos que el algoritmo sin modificar. En [10] Kewei Zhang demuestra la existencia de infinitas soluciones para la versión unidimensional del modelo de Perona y Malik, con valores iniciales no constantes. En [11] se combina las propiedades del filtrado isotrópico y anisotrópico de tal forma que se elimina el ruido preservando la estructura local de la imagen y se conservan los bordes aplicando el proceso a imágenes en 2D y 3D en escala de grises y en color.

En 2014 Yifei en [12] presentó cuatro modelos de eliminación de ruido multiescala basados en ecuaciones diferenciales parciales fraccionadas donde se estudia su estabilidad y convergencia, lo cual muestra la capacidad de eliminar ruido y de conservar información de la imagen mejorando los detalles de textura los cuales son mejores que los algoritmos tradicionales.

En [13] se presenta un modelo que depende del tiempo para solucionar el problema de optimización de variación total no lineal que permite disminuir el ruido en imágenes presentado por Rudin y Osher, el modelo propuesto se basa en el movimiento de ajuste de nivel que a través de pruebas numéricas se muestra que es estable.

Por otra parte, en [14] se genera un algoritmo de suavizado que conserva los bordes y la información valiosa para cualquier proceso de segmentación usando el modelo de Perona y Malik y obteniendo una estimación del coeficiente de difusión tomando una partición de la imagen y usando mínimos cuadrados. En 2017 Karami [15] escribió un artículo en el cual plantea un método numérico del problema de Perona y Malik este método se obtiene usando el operador p -laplaciano de tal forma que la ecuación propuesta está dada por

$$u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u). \quad (2.6)$$

Nótese que para $p = 2$ resulta ser el caso particular de la ecuación de Perona y Malik, donde el coeficiente de difusión es igual a 1 y se obtiene como resultado la ecuación de calor, que es el caso específico en el cual se centrará la aplicación que se hará en el capítulo 5.

En [16] podemos observar la aplicación del suavizado en imágenes capturadas por medio de un microscopio óptico en donde se mejora la calidad de la imagen y se prepara para el proceso de clasificación y segmentación, para este proceso se utilizó técnicas de filtrado morfológico que permiten eliminar pequeños detalles que no son de interés, preservando los bordes sin afectar mucho la estructura dentro de la imagen. Por otra parte en [17] se desarrolló un modelo de restauración basado en la detección de bordes y propagación de texturas en donde se busca obtener un equilibrio entre la propagación del color y los bordes, es decir que se busca una estabilización entre la textura y la estructura para poder obtener un mejor resultado, para resolver este problema se planteó una función de probabilidad que identifica el orden de restauración de la zona objetivo y genera el equilibrio entre la propagación de la textura y la estructura. El procesamiento de imágenes en donde se identifica el nivel de intensidad en un punto respecto a sus

vecinos es llamado proceso de "bajo nivel" y en cambio cuando se tiene en cuenta los objetos presentes en la imagen el proceso es de "alto nivel". En nuestro caso se hace un estudio de bajo nivel ya que la solución de la ecuación de calor realiza un barrido punto a punto y normalizando la intensidad de cada punto teniendo en cuenta los pixeles vecinos.

En [18] se establece un método que identifica regiones dañadas de la imagen y realiza un proceso de restauración mediante ecuaciones diferenciales parciales, mejorando la calidad de la imagen y eliminando o compensando las distorsiones, ya que durante el proceso de captura de la imagen se puede tener efectos no deseados como distorsiones o ruido. Para lograr conservar los bordes una técnica que se utiliza en [18] es la binarización. Por ejemplo, podemos observar la Ilustración 1, en la que se representan los bordes con el color blanco y el resto de la imagen con color negro. Este método fue propuesto en [19] que junto con la ecuación de calor permite mejorar considerablemente el aspecto de las imágenes conservando los bordes y rellenando las regiones donde se ha perdido información teniendo en cuenta la información suministrada por los pixeles vecinos para luego suavizar la imagen y obtener mejores resultados.

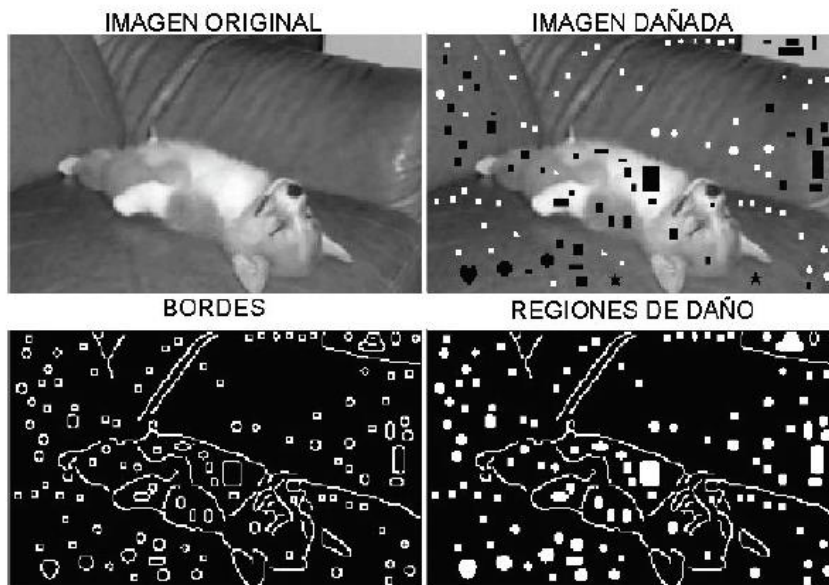


Ilustración 1 Proceso de binarización de una imagen por restaurar y localización de las regiones de daño, recuperada de [18]

Se pueden observar algunas aplicaciones del suavizado de imágenes en diferentes áreas como por ejemplo en medicina donde se aplica el modelo de Perona y Malik en imágenes de resonancia magnética como se describe en [20] donde se muestra cómo se utilizan las imágenes para mapear de forma no invasiva las áreas de actividad del cerebro,

determinando así las áreas o regiones correlacionadas como respuesta a un estímulo dado, y se propone un método en dos etapas de segmentación donde se utiliza la difusión anisotrópica y se utiliza como coeficiente de difusión el propuesto por Black en [21] quien utilizó la teoría de estimación robusta para obtener el siguiente coeficiente llamado también función Turkey

$$c(x) = \begin{cases} \left[1 - \frac{x^2}{5\sigma^2}\right], & \text{si } \frac{x^2}{5} \leq \sigma^2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Al usar esta función el proceso de difusión se denomina Difusión Anisotrópica Robusta, la solución del modelo de Perona y Malik con este coeficiente de difusión es dada por.

$$u(s, t + 1) = u(s, t) + \frac{\lambda}{|\eta_s|} \sum g|\nabla u_{s,p}(t)| \nabla u_{s,p}(t), \quad (2.8)$$

donde

$$g|\nabla u_{s,p}(t)| = \frac{1}{1 + |\nabla u_{s,p}(t)|^2}$$

Y $u(s, t)$ es la imagen muestreada, s es la posición de cada pixel, λ es la constante que determina la difusión (en general toma como valor la unidad), y η_s representa los nodos vecinos de s . La ventaja de usar la función Turkey (2.7) es que el proceso de difusión converge mucho más rápido y genera bordes más agudos.

En [22] se realiza una aplicación de restauración de imágenes para dispositivos móviles con el objetivo de corregir los defectos observados en imágenes tomadas por teléfonos móviles, los principales defectos que se tratan en [22] son el ruido y elementos indeseados o deterioro en la imagen, para solucionar estos dos problemas se usa la difusión anisotrópica y el repintado de imágenes, en cuanto al proceso de difusión anisotrópica se muestra que cuanto menor es el coeficiente de difusión más se preservan los detalles de la imagen de tal forma que la difusión se realiza en dirección perpendicular al gradiente en cada punto y entonces se remarcan los bordes, pero en caso contrario cuanto mayor sea el valor del coeficiente de difusión los bordes se empiezan a difuminar eliminando los detalles más insignificantes. En cuanto al paso temporal (ver la ilustración 2) que estaría relacionado con el valor de σ en [22] se muestra que este parámetro indica

el avance de la ecuación de difusión en cada iteración, por lo tanto, cuanto mayor sea este parámetro en las áreas planas se igualará mucho más rápido la textura, además se observa que en las esquinas con un ángulo bastante acentuado estas se van difuminando hasta casi perderse y entonces las puntas se curvan y finalmente al incrementar el número de iteraciones los resultados son similares que al hacer el cambio en el paso temporal pero teniendo en cuenta que al aumentar el número de iteraciones el costo computacional es mayor, resulta mejor hacer cambio en el paso temporal, ya que el tiempo total será igual al número de iteraciones multiplicado por el paso temporal.

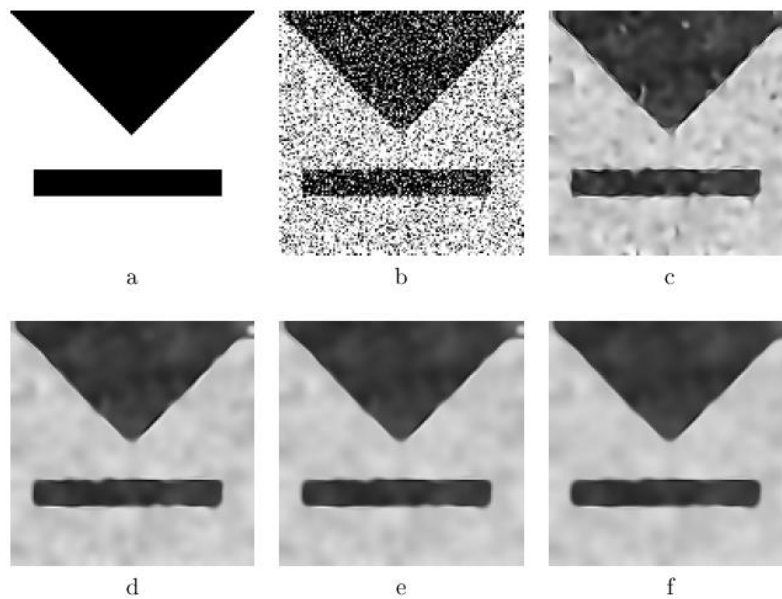


Ilustración 2 (a) imagen original, (b) imagen con ruido gaussiano (c) Restauración con $\Delta t=0.1$. (d) Restauración con $\Delta t=0.5$ (e) Restauración con $\Delta t=1$. (f) Restauración con $\Delta t=3$, recuperada de [22]

Otra aplicación del modelo de Perona y Malik podemos encontrarlo en [23] donde se utiliza la difusión anisotrópica en la evolución de algunos contornos activos, combinando la difusión directa en la curva de nivel con una difusión inversa en la componente normal, este método está basado en la evolución de las superficies por flujos geométricos cuya solución al final del contorno muestra los límites del objeto segmentado, para luego definir una métrica que tiene en cuenta los aspectos radiométricos de la imagen la cual depende del módulo del gradiente, esta atrae el contorno hacia los bordes del objeto, sin embargo esta puede que sea incapaz de frenar el contorno en las frontera del objeto a segmentar así que para mitigar esto se realiza un realce de la imagen antes de aplicar el método aumentando el contraste entre los objetos y suavizándolos interiormente y es aquí donde

el modelo de Perona y Malik juega un papel importante, y a partir de una familia uniparamétrica de difusividades dada por [24] donde se establece el coeficiente de difusión como

$$c(|u_x|) = \frac{1}{|u_x|^p}, p \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Cuando $p = 1$ se tiene el modelo de variación total, para $p < 1$ se tiene una difusión directa y para $p > 1$ se tiene una difusión inversa, donde finalmente se muestra que para valores de p entre 1 y 2 se obtiene un buen comportamiento entre el realce, la eliminación del ruido y el agrupamiento no supervisado de píxeles.

La segmentación es el procedimiento a través del cual se realiza la partición de la imagen en diferentes regiones, la cual se basa generalmente en las características de los píxeles de la imagen, de modo que se puede identificar el borde de una región al observar que hay cambios bruscos o discontinuidades abruptas en una vecindad de píxeles, otra forma de definir una región es a través de la textura y los valores del color. El proceso de segmentación hace parte fundamental en el análisis de las imágenes debido a que este permite extraer información significativa de la imagen, de tal forma sea posible contar o medir las propiedades de los objetos, identificar los colores, las propiedades y las formas de cada región en la imagen y reconocer los bordes en la misma.

Podemos encontrar varios métodos de segmentación que se pueden clasificar según sus propiedades. En [25] podemos observar una descripción de varios de estos métodos entre los que destacamos los siguientes algoritmos.

- ▶ **Algoritmos basados en umbrales.** Permiten separar los tonos de gris correspondientes a una determinada región, este algoritmo se aplica a una imagen completa y se puede combinar con otras técnicas en el pre o post procesamiento para obtener mejores resultados. El objetivo inicialmente es binarizar la imagen generando una operación de reasignación para los valores de los píxeles $v(x, t)$ comparándolos con el valor del umbral t , la cual definimos como

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & v(x, y) < t, \\ 0, & v(x, y) \geq t. \end{cases} \quad (2.10)$$

- ▶ **Algoritmos basados en clustering.** Se agrupan los píxeles que tienen características semejantes bajo un criterio determinado.

- ▶ **Algoritmos basados en el crecimiento de regiones.** En esta técnica se parte desde el centro de un objeto y se va aumentando el número de píxeles que lo rodean hasta encontrar los bordes que lo limitan y se repite el mismo procedimiento con cada objeto que se encuentra en la imagen, por lo cual se requiere información de los objetos que se encuentran en la imagen.

Así se genera una partición de la imagen, es decir que se divide a la imagen en regiones conexas mutuamente excluyentes cuya unión representa la imagen completa y por lo tanto si $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ es una partición de R entonces se cumplen las propiedades

- $\cup_{i=1}^n R_i = R.$
- $R_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ es una región conexas.
- $R_i \cap R_j = \emptyset \forall i \neq j.$
- $P(R_i) = Verdadero.$
- $P(R_i \cap R_j) = Falso, \forall i \neq j,$

donde P es un predicado lógico, así se asegura que cada píxel pertenece a una sola región y que los píxeles se encuentran conectados de alguna manera ya que pertenecen a una misma región u objeto. Se puede empezar usando un conjunto de píxeles que sería una semilla a partir de la cual se agrupan los píxeles vecinos que contienen las mismas propiedades en cuanto a la intensidad de los píxeles y su varianza, una de sus desventajas es que si en la imagen se encuentran objetos con intensidades parecidas se identificarían como el mismo objeto y obtendríamos una región errónea.

- ▶ **Algoritmos basados en borde.** Se encuentran los límites de cada región o segmento en la imagen detectando los bordes para así definir los objetos en la imagen.
- ▶ **Algoritmos basados en multiumbrales.** Son una generalización de los algoritmos basados en umbrales ya que en este proceso no se utiliza un solo umbral para separar los objetos del fondo, sino que se utilizan varios umbrales que cumplen distintas tareas, para escoger los valores de los umbrales se puede usar el histograma de la imagen donde se identifican los picos y valles de los valores de los píxeles y así asociar a cada valle un valor umbral, así la operación de reasignación quedaría definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & v(x, y) < t_1, \\ 1, & t_1 \leq v(x, y) < t_2, \\ 2, & t_1 \leq v(x, y) < t_2, \\ \vdots & \vdots \\ n, & t_n \leq v(x, y), \end{cases} \quad (2.11)$$

donde cada intervalo s_i corresponde a una región u objeto en la imagen que se desea analizar. Otra forma de escoger los umbrales es identificando los valores aceptables de los tonos de gris y asignarles un valor de probabilidad igual a

$$P_v = \frac{N^{\circ} \text{ de puntos con tono } \lambda}{\text{Total de puntos en la imagen}}. \quad (2.12)$$

Otro ejemplo del procesamiento de imágenes se puede ver en [26] donde se detalla el proceso realizado a imágenes pancromáticas digitalizadas con el propósito de analizar las posibilidades de trabajo de las variables textuales para caracterizar unidades de vegetación ya sean naturales o cultivos, para este proceso se extraen zonas de ensayo de ambos tipos de vegetación y se realizan comparaciones de los resultados, y a partir de las matrices de coocurrencias de niveles de gris se calculan las variables de textura, para luego realizar una clasificación supervisada teniendo en cuenta las características de densidad y distribución de la vegetación, así se puede describir la distribución de los niveles de gris relativa al vecindario de cada pixel usando parámetros estadísticos como la variabilidad, el contraste, el valor medio entre otros, que permiten obtener nuevas bandas de textura que se pueden usar de forma aislada o conjunta para clasificar las imágenes originales. Uno de los problemas que se pueden presentar en este proceso son los errores en las zonas de frontera entre clases ya que el valor de cada pixel depende de la distribución de los pixeles vecinos. Así el proceso en general está basado en la matriz de coocurrencias de niveles de gris, filtros de energía y densidad de los bordes, dentro de los filtros de energía, se hizo uso de los filtros descritos en [27] donde se destacan el de media ponderada, el gradiente, de forma, ondulación, rugosidad, oscilación, y el laplaciano de un filtro gaussiano. Finalmente se observó que este proceso es una buena alternativa cuando las clases informacionales son heterogéneas o cuando no se dispone de imágenes multiespectrales o se tiene poca resolución.

Capítulo 3. Marco Teórico.

3.1. Modelo de Perona y Malik

El modelo de Perona y Malik [1] es un modelo de difusión, el cual es utilizado para reducir el ruido de las imágenes manteniendo los bordes y tratando de conservar la mayor cantidad de información posible de la imagen, este proceso de difusión es una transformación no lineal espacio-variante de la imagen original y un filtro, definido como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \text{div}(c(|\nabla u|^2)\nabla u), \quad (3.1)$$

en el que $c(\cdot)$ es el coeficiente de difusión, el cual es una función de $c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde n es la dimensión del campo escalar de u , de tal forma que su valor es prácticamente cero en los bordes y cercano a 1 en los valores donde la imagen tiene el mismo potencial. Cuando $c(\cdot)$ es constante el modelo es isotrópico; de lo contrario el modelo de difusión será anisotrópico [28]. La función $c(\cdot)$ se fija para que la ecuación se mantenga parabólica. En el caso particular, tomando $x \in \mathbb{R}^2$, donde $x = (x_1, x_2)$, entonces $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2})$, y la función $c(|\nabla u|^2) = c(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)$. por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{div}(c(|\nabla u|^2)\nabla u) &= \text{div}(c(|\nabla u|^2)(u_{x_1}, u_{x_2})) \\ &= \text{div}(c(|\nabla u|^2)u_{x_1}, c(|\nabla u|^2)u_{x_2}) \\ &= \nabla \cdot (c(|\nabla u|^2)u_{x_1}, c(|\nabla u|^2)u_{x_2}) \\ &= (c(|\nabla u|^2)u_{x_1})_{x_1} + (c(|\nabla u|^2)u_{x_2})_{x_2} \\ &= c(|\nabla u|^2)u_{x_1x_1} + c'(|\nabla u|^2)(2u_{x_1}u_{x_1x_1} + 2u_{x_2}u_{x_2x_1})u_{x_1} \\ &\quad + c(|\nabla u|^2)u_{x_2x_2} + c'(|\nabla u|^2)(2u_{x_1}u_{x_1x_2} + 2u_{x_2}u_{x_2x_2})u_{x_2} \\ &= c(|\nabla u|^2)(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + c'(|\nabla u|^2)(2u_{x_1}u_{x_1}u_{x_1x_1} + 2u_{x_2}u_{x_1}u_{x_2x_1} + 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + 2u_{x_2}u_{x_2}u_{x_2x_2}) \\ &= c(|\nabla u|^2)(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + 2c'(|\nabla u|^2)(u_{x_1}^2u_{x_1x_1} + 2u_{x_2}u_{x_1}u_{x_2x_1} + u_{x_2}^2u_{x_2x_2}), \end{aligned}$$

luego entonces (3.1) queda descrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \text{div}(c(|\nabla u|^2)\nabla u) \\ \Leftrightarrow u_t &= c(|\nabla u|^2)(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + 2c'(|\nabla u|^2)(u_{x_1}^2u_{x_1x_1} + 2u_{x_2}u_{x_1}u_{x_2x_1} + u_{x_2}^2u_{x_2x_2}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.1.1. La difusión isotrópica y anisotrópica

En [29] Koenderin propone la necesidad de buscar un modelo matemático que tenga en cuenta la percepción visual donde la imagen original es procesada sin necesidad de añadir más información, y como respuesta se obtuvo la ecuación de calor la cual no es la única ecuación diferencial que cumple con las expectativas, se han presentado más ecuaciones diferenciales no lineales que no difunden el flujo de manera uniforme, estas ecuaciones diferenciales generan filtros de difusión anisotrópica.

Los modelos de difusión anisotrópica disminuyen el ruido de las imágenes manteniendo los bordes y los detalles importantes para la interpretación de la imagen, generando una familia de imágenes parametrizadas cuya imagen procesada es la combinación de la imagen original y un filtro que obedece de la información local de la imagen [30].

El modelo de difusión anisotrópica de Perona y Malik casi se comporta como el filtro de difusión lineal, es más, es isotrópico para el caso en el que el coeficiente de difusión es constante en ese caso la difusión es homogénea es decir que se realiza igual para todas las direcciones, pero en los bordes se encuentra inhibido es decir que en los bordes no se puede eliminar el ruido y por esto los conserva, estos modelos se basan en los siguientes criterios [31]:

- ▶ **Causalidad.** El modelo no debe generar nuevos detalles en la imagen al disminuir la resolución.
- ▶ **Localización inmediata.** Se debe mantener los bordes que representan los límites de las regiones, de tal forma que sean iguales a los de la imagen original.
- ▶ **Suavizado según la zona.** El suavizado es menor cerca a los límites de las regiones y mayor dentro de las regiones de la imagen.

3.1.2. La ecuación de Calor

Si tomamos como caso particular $c(s) = 1$ en (3.2), obtenemos

$$u_t = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}, \quad (3.3)$$

que equivale a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0. \quad (3.4)$$

Esta es la famosa ecuación de calor [32], donde $F = -\Delta u(t, x)$. Con lo cual queda demostrado que la ecuación de calor es un caso particular de las ecuaciones diferenciales parciales usadas para el suavizado de imágenes, es decir que es un caso particular del modelo de Perona y Malik. Una de las propiedades importantes de la ecuación (3.4) es su equivalencia con una convolución gaussiana, un filtro pasa bajo notado por $G_\sigma(x)$, donde $G_\sigma(x) > 0$ y $\int_{\mathbb{R}^2} G_\sigma(x) dx = 1$; además de algunas invariancias del operador lineal T_t con $t > 0$, definido por $(T_t u_0)(x) = u(t, x)$, donde $u(t, x)$ es la solución única de la ecuación de calor [32], por lo que T_t representa una familia de imágenes correspondientes a la evolución de u_0 , que para nuestro caso es la convolución gaussiana. Veamos entonces algunas propiedades de T_t :

► **Invarianza en la translación.**

$$T_t(\tau_h u_0) = \tau_h(T_t u_0),$$

donde τ_h es la translación dada por

$$\tau_h(f)(x) = f(x + h).$$

► **Invarianza escalar.**

$$T_t(H_\lambda u_0) = H_\lambda(T_t u_0)$$

con $t' = t\lambda^2$, donde

$$(H_\lambda f)(x) = f(\lambda x).$$

► **Invarianza isométrica.**

$$T_t(Ru_0) = R(T_t u_0)$$

para una transformación ortogonal R de \mathbb{R}^2 donde

$$(Rf)(x) = f(Rx).$$

► **Principio de comparación.** Si $u_0 \leq v_0$ entonces

$$(T_t u_0) \leq (T_t v_0).$$

► **Conservación del valor promedio.**

$$T_t(Mu_0) = M(T_t u_0),$$

donde

$$Mf = \int_C f(x) dx.$$

► **Propiedad de semigrupo.**

$$T_{t+s} u_0 = T_t(T_s u_0).$$

Estas propiedades de invarianza son una forma natural de analizar una imagen desde diferentes puntos de vista, por ejemplo, la invarianza en la escala de grises indica que el análisis debe ser independiente del rango de brillo de la imagen original [3]. Las otras propiedades geométricas expresan la invarianza del análisis de la imagen en cuanto a las posiciones capturadas en la imagen inicial y su percepción, además se puede estimar que la suavidad es isotrópica es decir que es la misma en todas las direcciones. En las siguientes secciones nos centraremos entonces en el estudio de la ecuación de calor, su solución y aplicación a las imágenes digitales.

Solución de la ecuación de Calor

Antes de presentar la solución de la ecuación de calor es necesario establecer que la condición inicial que denotamos como $u_0(x)$ pertenece a $L^1_{\#}(C)$, lo que significa que $u_0(x)$ definida por ejemplo en $R = [0,1] \times [0,1]$, es extendida a un conjunto cualquiera digamos $C = [-1,1] \times [-1,1]$ de \mathbb{R}^2 , y además verifica que $\int_C |u_0(x)|dx < \infty$; entonces decimos que u_0 es una extensión integrable de Lebesgue o que $u \in L^1_{\#}(C)$ [3].

Solución de la ecuación de calor por el método de separación de variables

Teniendo en cuenta [33] el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

se desea buscar soluciones de la forma:

$$u(x, t) = \varphi(x)\omega(t),$$

Donde $\varphi(x)$ y $\omega(t)$ son funciones definidas en una sola variable diferente de cero en su dominio, para lo cual se verifica:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \\ \varphi(x)\omega'(t) &= \varphi''(x)\omega(t), \end{aligned} \tag{3.6}$$

o bien

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} = \lambda, \tag{3.7}$$

donde necesariamente λ ha de ser una constante. Por lo tanto, tomando λ fijo se tiene

$$\begin{cases} \omega'(t) = \omega(t)\lambda, \\ \varphi''(x) = \varphi(x)\lambda, \end{cases} \quad (3.8)$$

y sus soluciones son

$$\begin{cases} \omega(t) = a_1 e^{\lambda t}, \\ \varphi(x) = a_2 e^{\sqrt{\lambda}x} + a_3 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \end{cases} \quad \text{si } \lambda \neq 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \omega(t) = a_1, \\ \varphi(x) = a_2 x + a_3, \end{cases} \quad \text{si } \lambda = 0. \quad (3.10)$$

Luego las soluciones del problema son

$$\begin{aligned} u_\lambda(x, t) &= a_1 e^{\lambda t} (a_2 e^{\sqrt{\lambda}x} + a_3 e^{-\sqrt{\lambda}x}), \\ u_\lambda(x, t) &= e^{\lambda t} (c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}), \end{aligned} \quad \text{si } \lambda \neq 0, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= a_1 (x a_2 + a_3), \\ u_0(x, t) &= x c_1 + c_2, \end{aligned} \quad \text{si } \lambda = 0, \quad (3.12)$$

donde $c_1 = a_1 a_2$ y $c_2 = a_1 a_3$.

De la familia de soluciones $u_\lambda(x, t)$, se buscan las que verifican las condiciones de frontera, es decir, que las constantes c_1 y c_2 deben satisfacer el sistema lineal

$$\begin{cases} e^{\lambda t} (c_1 + c_2) = 0, \\ e^{\lambda t} (c_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

puesto que para $\lambda = 0$ solo se encuentra la solución $c_1 = c_2 = 0$ que corresponde a la solución trivial del problema. Luego para $\lambda \neq 0$, la condición necesaria y suficiente para que la ecuación anterior tenga solución no trivial es que

$$e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0. \quad (3.14)$$

Evidentemente si $\lambda > 0$ no se verifica la ecuación. Sea $\lambda < 0$ y llamamos $-\mu^2 = \lambda$ para $\mu \in \mathbb{R}$. Entonces la ecuación es equivalente a

$$\sin(\mu L) = 0. \quad (3.15)$$

Es decir, que necesariamente

$$\mu L = k\pi, \quad k \in \mathbb{N},$$

lo que implica que

$$-\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, y los resultados anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} u_\lambda(x, t) &= e^{\lambda t} (c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}) \\ \leftrightarrow u_\lambda(x, t) &= e^{\lambda t} (c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}) \\ \leftrightarrow u_\lambda(x, t) &= c_1 e^{\lambda t} (e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}) \\ \leftrightarrow u_\lambda(x, t) &= 2i c_1 \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \\ \leftrightarrow u_\lambda(x, t) &= c_k u_k(x, t), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Con lo cual encontramos un sistema fundamental de soluciones lo que significa que la solución es combinación lineal de $\{u_k(x, t), k \in \mathbb{N}\}$ Ahora teniendo en cuenta la condición inicial

$$\begin{aligned} u_\lambda(x, 0) &= c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k \in \mathbb{N}, \\ u_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Finalmente usando los coeficientes de Fourier se tiene que

$$c_k = \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx, \quad (3.17)$$

de modo que la solución de la ecuación de calor es

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t}. \quad (3.18)$$

Solución de la ecuación de calor mediante convolución

Se desea obtener soluciones de la ecuación de calor como en [3] que sean singulares en el origen. Empezamos con el caso de dimensión uno haciendo uso de la transformada de Fourier que finalmente también nos permitirá obtener la solución fundamental en dimensiones mayores.

Solución unidimensional. Consideramos la ecuación de calor con condición inicial

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Para solucionar la ecuación diferencial, tenemos en cuenta que la transformada de Fourier de $u(x, t)$ aplicada a la variable espacial x esta dada por:

$$\mathcal{F}(u(\xi, t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} u(x, t) dx. \quad (3.19)$$

Así aplicando la transformada de Fourier a la ecuación diferencial tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_t(\xi, t)) - (2\pi i \xi)^2 \mathcal{F}(u(\xi, t)) &= 0, \\ \mathcal{F}(u(\xi, 0)) &= \mathcal{F}(u_0(\xi)). \end{aligned}$$

De tal forma que obtenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(u_t(\xi, t)) + 4\pi^2 \xi^2 \mathcal{F}(u(\xi, t)) &= 0, \\
 \mathcal{F}(u_t(\xi, t))e^{4\pi^2 \xi^2 t} + 4\pi^2 \xi^2 e^{4\pi^2 \xi^2 t} \mathcal{F}(u(\xi, t)) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{F}(u(\xi, t))e^{4\pi^2 \xi^2 t}) &= 0, \\
 \mathcal{F}(u(\xi, t))e^{4\pi^2 \xi^2 t} &= c(h\xi), \\
 \mathcal{F}(u(\xi, t)) &= c(\xi)e^{-4\pi^2 \xi^2 t},
 \end{aligned}$$

y haciendo uso de la condición inicial tenemos que

$$\mathcal{F}(u(\xi, t)) = \mathcal{F}(u_0(\xi))e^{-4\pi^2 \xi^2 t}. \tag{3.20}$$

Aplicando la transformada inversa encontramos $u(x, t)$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(u_0(\xi))e^{-4\pi^2 \xi^2 t} e^{2\pi i \xi x} d\xi, \\
 u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \mathcal{F}(e^{-4\pi^2 \xi^2 t} e^{2\pi i \xi x}) d\xi.
 \end{aligned}$$

Dado que la transformada de una gaussiana $G_a(x) = e^{-a\pi|x|^2}$ esta dada por

$$\mathcal{F}(G_a(\xi)) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi}{a}\xi^2}, \tag{3.21}$$

entonces la transformada de $G(x) = e^{-4\pi^2 x^2 t}$ es

$$\mathcal{F}(G(\xi)) = \frac{1}{2\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{1}{4t}\xi^2},$$

y, denotando $\mathcal{F}(G(\xi)) = G_\sigma(\xi)$, donde $\sigma^2 = 2t$, tenemos que

$$G_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\xi^2}. \tag{3.22}$$

Entonces la transformada de $(e^{-4\pi^2 \xi^2 t} e^{2\pi i \xi x})$ es

$$G_\sigma(x - \xi), \tag{3.23}$$

con lo cual obtenemos

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) G_{\sigma}(x - \xi) d\xi, \quad (3.24)$$

y, por lo tanto,

$$u(x, t) = (u_0 * G_{\sigma})(x). \quad (3.25)$$

Solución n-dimensional. Considerando la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \Delta u(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $u_0(\mathbf{x}) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es integrable y su integral es finita.

Luego aplicando la transformada de Fourier en las variables espaciales:

$$\mathcal{F}(u(\xi, t)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

se tiene

$$\mathcal{F}(u_t(\xi, t)) + 4\pi^2 |\xi|^2 \mathcal{F}(u(\xi, t)) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

$$\mathcal{F}(u(\xi, 0)) = \mathcal{F}(u_0(\xi)).$$

Resolviendo la ecuación ordinaria en t se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_t(\xi, t)) e^{4\pi^2 |\xi|^2 t} + 4\pi^2 |\xi|^2 e^{4\pi^2 |\xi|^2 t} \mathcal{F}(u(\xi, t)) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (\mathcal{F}(u(\xi, t)) e^{4\pi^2 |\xi|^2 t}) &= 0, \\ \mathcal{F}(u(\xi, t)) e^{4\pi^2 |\xi|^2 t} &= c, \\ \mathcal{F}(u(\xi, t)) &= c e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}, \\ \mathcal{F}(u(\xi, t)) &= \mathcal{F}(u_0(\xi)) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aplicando la transformada inversa a $\mathcal{F}(u(\xi, t)) = \mathcal{F}(u_0(\xi)) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \xi} \mathcal{F}(u(\xi, t)) d\xi, \\
 u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \mathcal{F}(u_0(\xi)) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} d\xi, \\
 u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \mathcal{F}(e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}) d\xi.
 \end{aligned}$$

Calculando la transformada de la gaussiana $G(\xi) = e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$, teniendo en cuenta el resultado obtenido en la ecuación (3.22) se tiene

$$\mathcal{F}(G(\xi)) = G_\sigma = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x|^2},$$

donde $\sigma = \sqrt{2t}$. Luego entonces

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}) = \mathcal{F}(e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} G(\xi)) = \mathcal{F}(G(x - \xi)) = G_\sigma(x - \xi).$$

Y finalmente tenemos que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\sigma(x - \xi) u_0(\xi) d\xi,$$

es decir,

$$u(x, t) = (G_\sigma * u_0)(x). \tag{3.28}$$

Con lo que concluimos que solución de la ecuación de calor está dada por la convolución entre la condición inicial y una gaussiana. Ahora bien, para asegurar la unicidad de $u(x, t)$ se presenta la siguiente proposición para el caso particular $n = 2$.

Proposición [3]

Sea u_0 en $L^1_{\#}(C)$ y $u(x, t)$ definida por (3.5) para $x \in \mathbb{R}^2$. Entonces para todo $t > 0$, $u(x, y)$ satisface la ecuación de calor con valor inicial u_0 :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \Delta u(t, x) \text{ y } \lim_{t \rightarrow 0} \int_C |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0$$

$u(x, t) \in L^1_{\#}(C)$ y $u \in C^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2)$ para todo $T > 0$.

Además, si t_1 es un número real positivo, entonces existe una constante $c(t_1)$ que depende de t_1 , tal que para $t \in [t_1, \infty)$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |u(t, x)| \leq c(t_1) |u_0|_{L^1_{\#}(C)} \tag{3.29}$$

Y si $u(x, t) \in L^1_{\#}(C)$ entonces tenemos el principio del máximo

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^2} u_0(x) \leq u(t, x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2} u_0(x) \tag{3.30}$$

Y así $u(t, x)$ dada por (3.28) es solución única de la ecuación de calor si satisface las ecuaciones (3.29) y (3.30).

3.2. Convolución: Definición e interpretación geométrica:

La convolución es un operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen f y una versión trasladada e invertida de g . Su expresión es

$$(f * g)(x) = \int f(t)g(x - t)dt. \tag{3.31}$$

La convolución es parte fundamental del desarrollo del presente trabajo dado que la solución de la ecuación de calor está dada en términos de la convolución entre una gaussiana y la condición inicial que llamamos $u_0(x)$ y es esta convolución la que finalmente aplicamos en el suavizado de las imágenes.

Una interpretación geométrica de la integral se puede obtener a través de un seguimiento gráfico del proceso de convolución. Eligiendo para ello dos funciones simples y de fácil representación, por ejemplo, las siguientes dos funciones conocidas, que se representan en la ilustración 3:

$$f_1(t) = X_{[0,1]} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \end{cases} \quad \text{y} \quad f_2(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0, & \text{en otra parte} \end{cases}$$

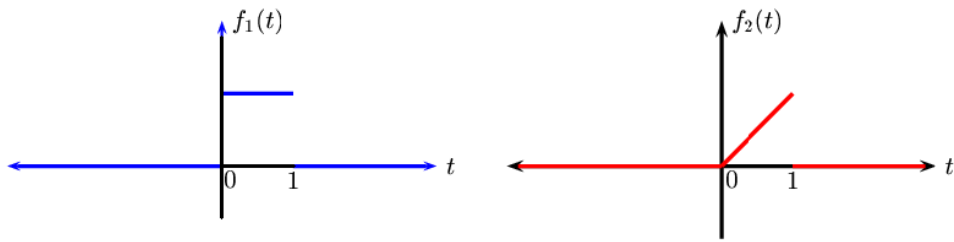


Ilustración 3. Funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$

El proceso pasa por las siguientes fases [34]:

- Primero se hace una reflexión respecto al eje vertical a una de las funciones, tomemos por ejemplo a $f_2(t)$, que toma la expresión $f_2(-t)$ y se le desplaza un intervalo de longitud x , obteniendo $f_2(x-t)$, como en la ilustración 4 y la otra función la dejamos igual.

$$f_2(x-t) = \begin{cases} x-t & \text{si } t \in [x-1, x] \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

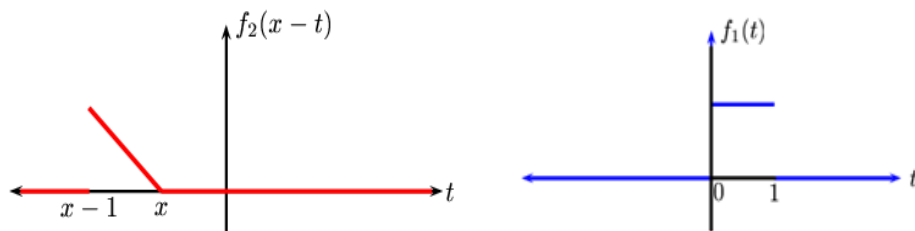


Ilustración 4. $f_2(x-t)$ y $f_1(t)$

A continuación $f_2(x-t)$ se multiplica por la otra función $f_1(t)$, deslizando el desplazamiento x a lo largo de todo el eje de tiempo desde $-\infty$ a ∞ . En este caso el producto es nulo desde $-\infty$ hasta 0. Durante el intervalo temporal $[0,1]$ donde $f_1(t)$ es diferente de cero, el producto se corresponde con puntos que

- forman los límites de las áreas sombreadas. Al final de este intervalo los productos vuelven a ser nulos, como se muestra en la ilustración 5.

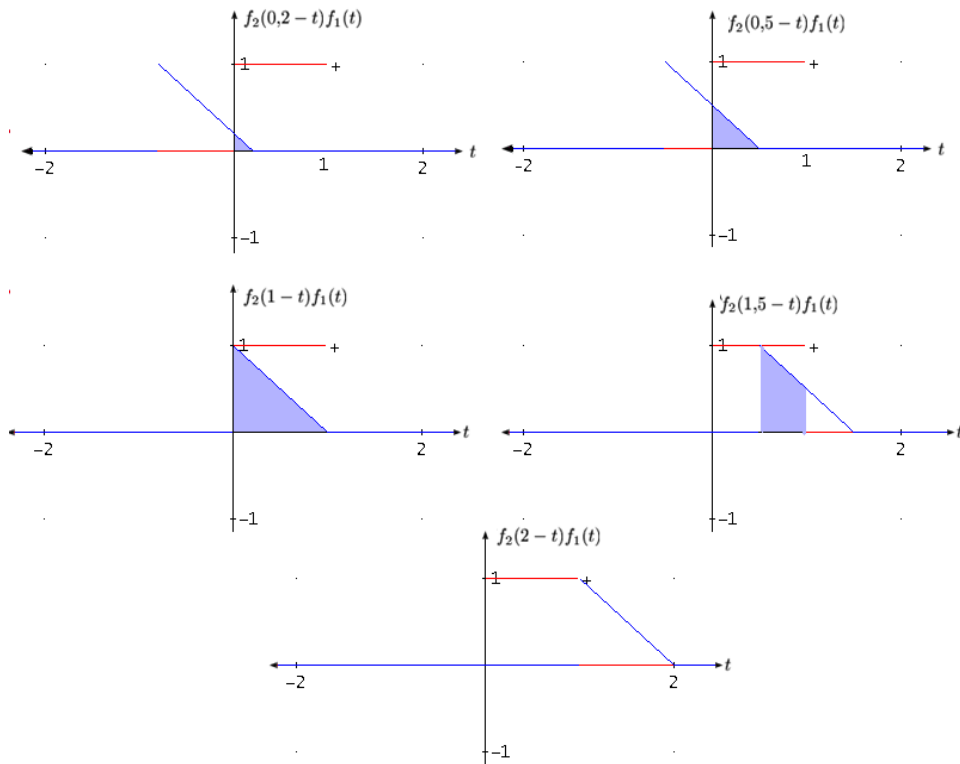


Ilustración 5. Producto de $f_1(t)$ y $f_2(x - t)$.

- La última fase, la integración de las áreas sombreadas, forman los puntos de la curva que corresponde a la función representada por la Integral de convolución, como se muestra en la ilustración 6

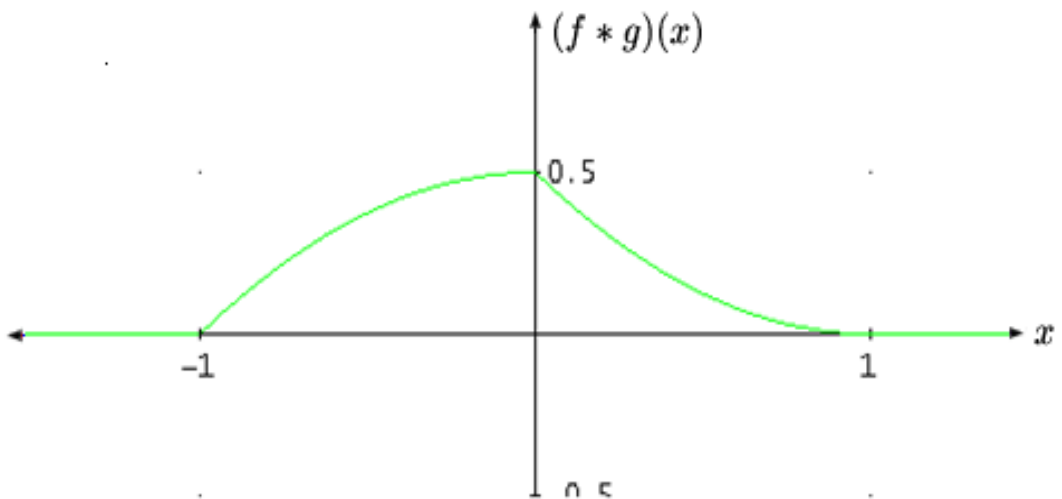


Ilustración 6. Resultado de la convolución entre f_1 y f_2

En nuestro trabajo utilizaremos la convolución discreta bidimensional, para ello se define cada función $f(x, y)$ y $g(x, y)$ como una matriz bidimensional de tamaño $(A + 1) \times (B + 1)$ y $(C + 1) \times (D + 1)$

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & \dots & f(0,B) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m,0) & \dots & f(m,B) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(A,0) & \dots & f(A,B) \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$$g(x, y) = \begin{bmatrix} g(0,0) & \dots & g(0,D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(m,0) & \dots & g(m,D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(C,0) & \dots & g(C,D) \end{bmatrix}$$

Suponiendo que son periódicas de periodo M y N , en dirección x y y respectivamente, los errores de superposición se evitan escogiendo:

$$M = A + C - 1$$

$$N = B + D - 1$$

Las sucesiones periódicas se forman extendiendo $f(x, y)$ y $g(x, y)$ de la siguiente forma:

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } 0 \leq x \leq A \quad y \quad 0 \leq y \leq B \\ 0 & \text{si } A + 1 \leq x \leq M - 1 \quad o \quad B + 1 \leq y \leq N - 1 \end{cases}$$

$$g_e(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{si } 0 \leq x \leq C \quad y \quad 0 \leq y \leq D \\ 0 & \text{si } C + 1 \leq x \leq M - 1 \quad o \quad D + 1 \leq y \leq N - 1 \end{cases}$$

Y así definimos la convolución entre f y g así [33]:

$$(f * g)(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N f_e(m, n)g_e(x - m, y - n) \tag{3.33}$$

Una forma sencilla de obtener la convolución $h(x, y) = (f * g)(x, y)$ donde $f(x, y)$ y $g(x, y)$ están dadas por (3.33) es siguiendo los siguientes pasos [35]:

- primero se debe rotar 180 grados la matriz $g(x, y)$ dejando fijo el elemento central, de tal forma que obtenemos la nueva matriz $g_r(x, y)$:

$$g_r(x, y) = \begin{bmatrix} g(C, D) & \dots & g(C, 0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(m, D) & \dots & g(m, 0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(0, D) & \dots & g(0, 0) \end{bmatrix}$$

Luego si por ejemplo queremos obtener el elemento $h(0,0)$ se desliza o se superpone el elemento central de la matriz $g_r(x, y)$ sobre el elemento $f(0,0)$ como se observa en la ilustración 7.

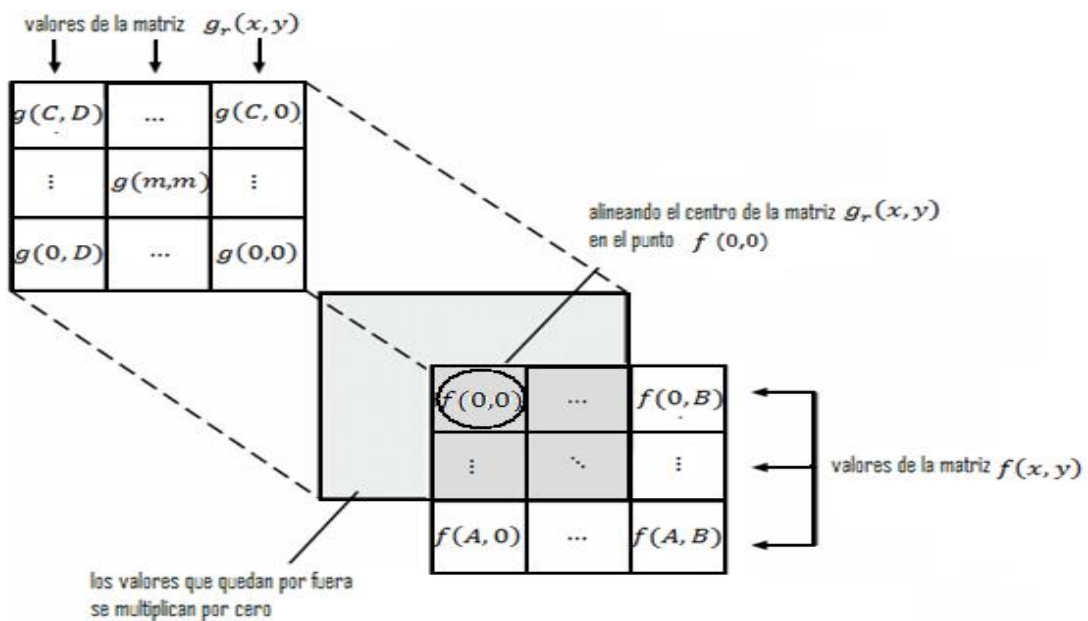


Ilustración 7 Convolución entre dos matrices.

Finalmente, como en la ilustración 8, se multiplican los elementos de $g_r(x, y)$ por los elementos de $f(x, y)$ que quedaron debajo y luego se suman.

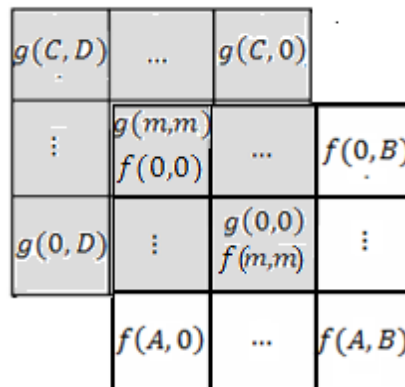


Ilustración 8 Producto entre las dos matrices $f(x, y)$ y $g_r(x, y)$.

$$h(0,0) = g(m, m)f(0,0) + \dots + g(0,0)f(m, m)$$

Una forma de visualizar la convolución bidimensional más claramente es en tres dimensiones donde las coordenadas están dadas por $(x, y, f(x, y))$, en la ilustración 9, se muestra una vista tridimensional de la convolución bidimensional entre dos gaussianas

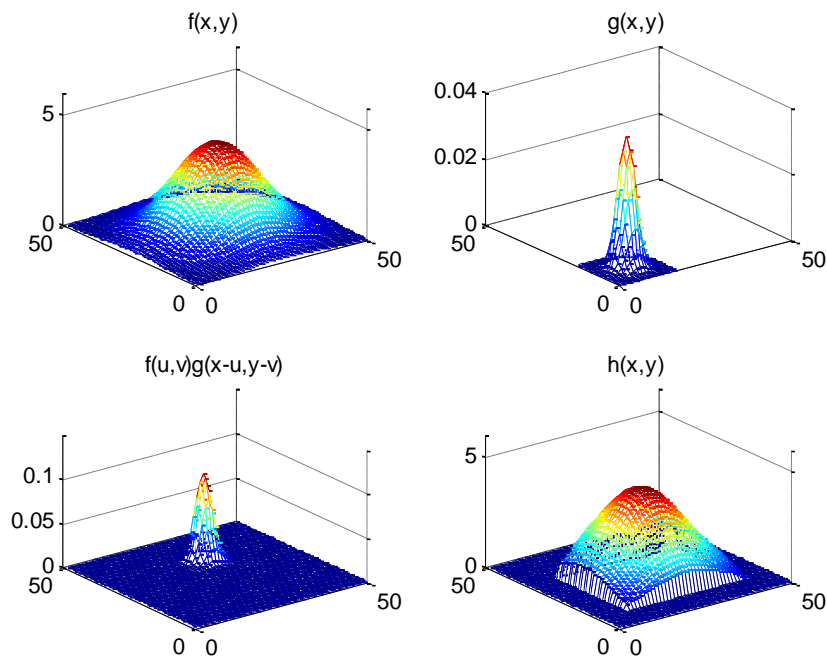


Ilustración 9. Etapas de la convolución bidimensional entre dos gaussianas, vista en tres dimensiones.

Este proceso bidimensional es utilizado en el procesamiento de imágenes dado que las imágenes digitales se pueden ver como matrices y al igual que en la gráfica anterior también se puede visualizar en tres dimensiones. De este proceso se hablará en el capítulo 5.

Capítulo 4. Metodología.

El desarrollo del proyecto está enfocado hacia la aplicación práctica del procesamiento de imágenes, inicialmente se realiza un estudio descriptivo del modelo propuesto por Perona y Malik que tiene como propósito reducir el ruido en las imágenes, para luego desarrollar la aplicación del mismo en el proceso de restauración y suavizado de imágenes digitales tomadas por el grupo de investigación en aeronaves no tripuladas de la Escuela de Comunicaciones, con el propósito de apoyar la investigación en fotogrametría, en la cual se pretende usar imágenes tomadas por drones para fortalecer la seguridad de las bases fijas del Ejército Nacional.

Iniciamos el proceso con la ecuación de calor que es un caso particular del modelo de Perona y Malik, a través de la cual se obtiene como solución del modelo la convolución gaussiana usando la transformada de Fourier, así que para la aplicación se estudia la convolución bidimensional discreta, ya que las imágenes se pueden describir a través de matrices bidimensional en las cuales cada elemento de la matriz representa el valor de la intensidad de color en escala de grises, dado que la solución de la ecuación de calor está dada por la convolución entre la condición inicial y el kernel gaussiano que depende del valor de la desviación y el tamaño del filtro gaussiano, para el análisis del filtro tomamos diferentes valores de desviación y diferentes tamaños de la máscara.

Luego se estudian diferentes desarrollos del modelo de Perona y Malik usando otros coeficientes de difusión, que hacen que el procesamiento de las imágenes sea anisotrópico, es decir que la difusión conserva los bordes y suaviza el interior de las regiones. Para este proceso realizamos una implementación en Matlab que nos permite observar las diferencias entre cada coeficiente.

Posteriormente se plantea un nuevo coeficiente de difusión que cumpla con las características planteadas por [31] de tal manera que el modelo de Perona y Malik se conserve parabólico y permita generar una difusión anisotrópica, este coeficiente también es implementado en Matlab con el propósito de observar los resultados obtenidos en las imágenes de prueba.

Y finalmente se plantean diferentes funciones descritas en Matlab para evaluar los resultados obtenidos con el filtro gaussiano, los coeficientes de difusión planteados por Perona y Malik y el coeficiente de difusión planteado en el presente trabajo de grado. De

esta manera se realiza el análisis de los resultados y se identifica el mejor modelo para el procesamiento de imágenes.

Capítulo 5. Aplicación a imágenes de prueba

Una imagen se puede definir como una función bidimensional $f(x, y)$ donde x y y son coordenadas espaciales y la amplitud de f en cada par de coordenadas (x, y) es llamada la intensidad o nivel de gris de la imagen en cada punto [36], cuando x y y son cantidades discretas y los valores de la amplitud son finitos, nosotros llamamos la imagen una imagen digital, luego una imagen digital está compuesta por un numero finito de elementos, cada uno de ellos tiene una localización y un valor particular, estos elementos son llamados pixeles. Lo cual nos permite fácilmente representar una imagen digital por medio de una matriz de números reales de M filas y N columnas, donde $0 < x < M - 1$ y $0 < y < N - 1$ luego entonces $f(x, y)$ se puede representar así:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0, N - 1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & \dots & f(M - 1, N - 1) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Generalmente una imagen a escala de grises tiene asociada una matriz ordenada donde cada pixel tiene un valor de 0 (negro) a 255 (blanco). En el caso de las imágenes a color RGB, estas tienen tres matrices a escala de azules, rojos y verdes, para nuestro trabajo solo utilizaremos imágenes en escala de grises.

Por ejemplo, una imagen pequeña de 8x8 pixeles se muestra en la ilustración 10, la cual es descrita por la siguiente matriz:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 92 & 74 & 64 & 69 & 67 & 56 & 56 & 68 \\ 45 & 50 & 48 & 42 & 45 & 54 & 53 & 44 \\ 54 & 59 & 55 & 47 & 54 & 72 & 78 & 70 \\ 78 & 74 & 80 & 99 & 121 & 237 & 150 & 160 \\ 91 & 90 & 93 & 104 & 117 & 126 & 126 & 125 \\ 82 & 96 & 95 & 93 & 125 & 183 & 212 & 207 \\ 103 & 110 & 97 & 85 & 121 & 193 & 237 & 240 \\ 107 & 103 & 97 & 104 & 138 & 187 & 221 & 233 \end{bmatrix}$$



Ilustración 10 Imagen de 8x8 pixeles, $f(x,y)$.

O por ejemplo en la ilustración 11 que tiene 499×357 pixeles, podemos ver un pequeño fragmento de la matriz:

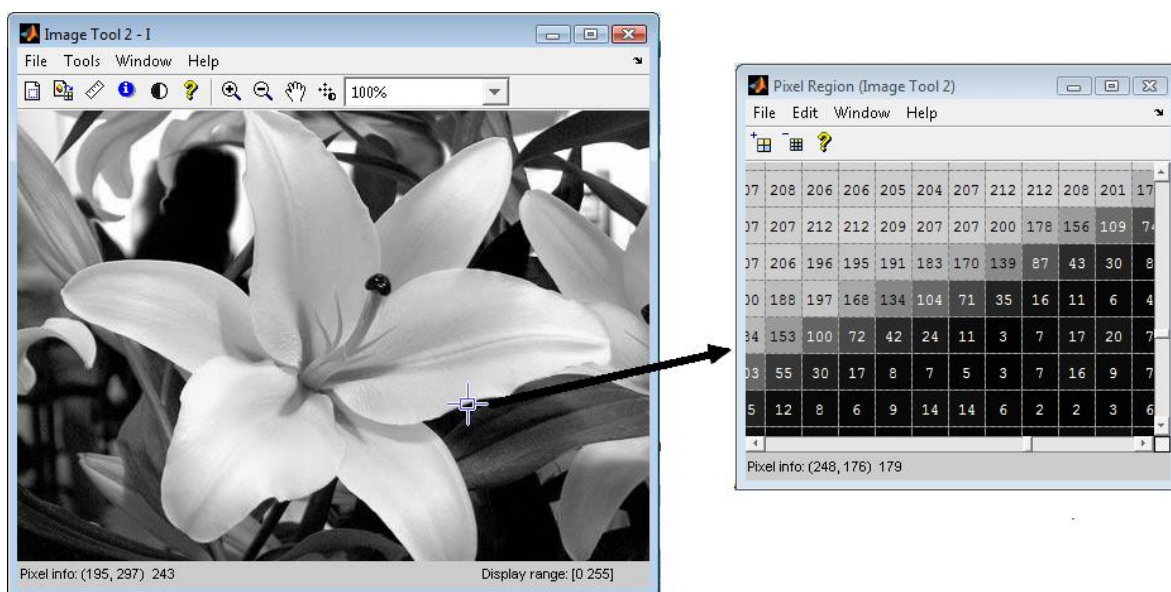


Ilustración 11 Matriz de pixeles asociada al fragmento de la imagen de la flor

Esta forma de representación nos permite un manejo sencillo de las imágenes. En lo que sigue se pretende utilizar la solución discreta bidimensional de la ecuación de calor para obtener el suavizado de imágenes.

La extensión de $u_0(x)$ definida en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ a todo el plano \mathbb{R}^2 se realiza por propiedades de simetría a $C = [-1,1] \times [-1,1]$ inicialmente, y luego por periodicidad a todo \mathbb{R}^2 (ver ilustración 12).

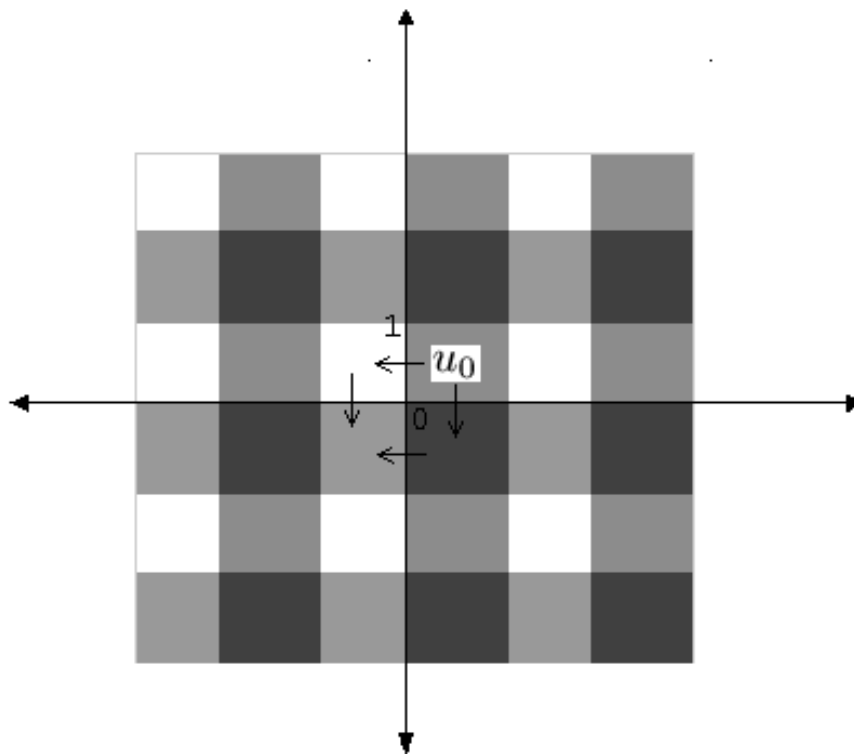


Ilustración 12. Extensión de u_0 a \mathbb{R}^2 por simetría y periodicidad.

5.1 Aplicación del filtro gaussiano.

En nuestro caso la matriz de la imagen original será nuestra condición inicial $u_0(x)$, y el kernel gaussiano discreto para el caso bidimensional está dado por la ecuación (5.2) el cual se representa en la ilustración 13:

$$G_\sigma(i,j) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(i^2+j^2)/2\sigma^2} \tag{5.2}$$

$$G_{\sigma} = \begin{bmatrix} G_{-a,-c} & \dots & G_{-a,0} & \dots & G_{-a,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{0,-c} & \dots & G_{0,0} & \dots & G_{0,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{b,-c} & \dots & G_{b,0} & \dots & G_{b,d} \end{bmatrix}$$

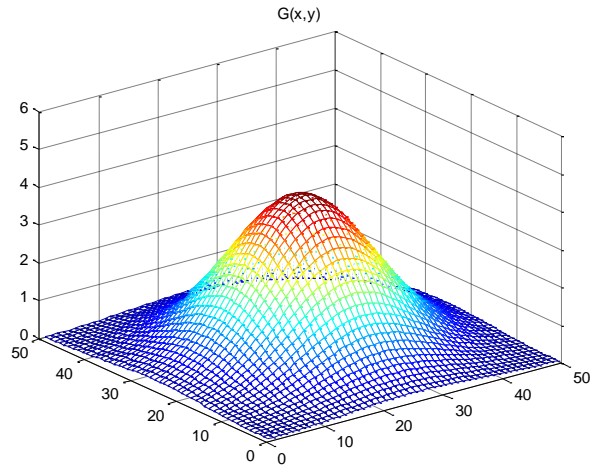


Ilustración 13 Filtro gaussiano bidimensional

Así la convolución discreta con u_0 queda definida por:

$$u(i, j) = u_0(m, n) * G_{\sigma}(i, j) = \sum_{m=-a}^b \sum_{n=-c}^d u_0(m, n) G_{\sigma}(i - m, j - n) \quad (5.3)$$

Veamos por ejemplo la convolución de una matriz de 3×3 con el kernel gaussiano también llamado filtro gaussiano de 3×3 para $\sigma = 1$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.0751 & 0.1238 & 0.0751 \\ 0.1238 & 0.2042 & 0.1238 \\ 0.0751 & 0.1238 & 0.0751 \end{bmatrix}$$

$$u_0 = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde por ejemplo $u(0,0) = G_1(m, n) * u_0(0,0)$ es:

$$u(0,0) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 u_0(m, n) G_1(0 - m, 0 - n)$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
 u(0,0) = & G_1(-1, -1)u_0(0 - 1, 0 - 1) + G_1(-1,0)u_0(0 - 1,0) + G_1(-1,1)u_0(0 - 1,0 + 1) \\
 & + G_1(0, -1)u_0(0,0 - 1) + G_1(0,0)u_0(0,0) + G_1(0,1)u_0(0,0 + 1) \\
 & + G_1(0, -1)u_0(0,0 - 1) + G_1(0,0)u_0(0,0) + G_1(0,1)u_0(0,0 + 1) \\
 & + G_1(0, -1)u_0(0,0 - 1) + G_1(0,0)u_0(0,0) + G_1(0,1)u_0(0,0 + 1) \\
 & + G_1(1, -1)u_0(0 + 1,0 - 1) + G_1(1,0)u_0(0 + 1,0) + G_1(1,1)u_0(0 + 1,0 + 1)
 \end{aligned}$$

Remplazando, y teniendo en cuenta que hay valores que se salen de la matriz, los cuales toman valor cero se tiene:

$$\begin{aligned}
 u(0,0) = & 0.2042 * 9 + 0,1238 * 3 + 0,1238 * 1 + 0.0751 * 8 \\
 u(0,0) = & 2.9339
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Para el caso $i = 1, j = 1$ tenemos:

$$u(1,1) = G_1(m, n) * u_0(1,1) = \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 G_1(m, n)u_0(1 - m, 1 - n)$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
 u(1,1) = & G_1(-1, -1)u_0(1 - 1,1 - 1) + G_1(-1,0)u_0(1 - 1,1) + G_1(-1,1)u_0(1 - 1,1 + 1) \\
 & + G_1(0, -1)u_0(1,1 - 1) + G_1(0,0)u_0(1,1) + G_1(0,1)u_0(1,1 + 1) \\
 & + G_1(0, -1)u_0(1,1 - 1) + G_1(0,0)u_0(1,1) + G_1(0,1)u_0(1,1 + 1) \\
 & + G_1(0, -1)u_0(1,1 - 1) + G_1(0,0)u_0(1,1) + G_1(0,1)u_0(1,1 + 1) \\
 & + G_1(1, -1)u_0(1 + 1,1 - 1) + G_1(1,0)u_0(1 + 1,1) + G_1(1,1)u_0(1 + 1,1 + 1)
 \end{aligned}$$

y remplazando

$$\begin{aligned}
 u(1,1) = & 0.0751 * 9 + 0.1238 * 3 + 0.0751 * 5 + 0.1238 * 1 + 0.2042 * 8 \\
 & + 0.1238 * 9 + 0.0751 * 2 + 0.1238 * 8 + 0.0751 * 1 \\
 u(1,1) = & 5.5110
 \end{aligned}$$

Aunque hay otra forma más sencilla de obtener la convolución entre dos matrices, para nuestro caso si se desea obtener el elemento $u(0,0)$ se deben seguir los siguientes pasos:

- primero se debe rotar 180 grados la matriz G_1 dejando fijo el elemento central, de tal forma que obtenemos la nueva matriz que se observa en la ilustración 14:

0.0751	0.1238	0.0751
0.1238	0.2042	0.1238
0.0751	0.1238	0.0751

Ilustración 14 Matriz G_1 rotada

- Luego se desliza o se superpone el elemento central de la matriz G_1 rotada sobre el elemento $u_0(0,0)$ como en la ilustración 15

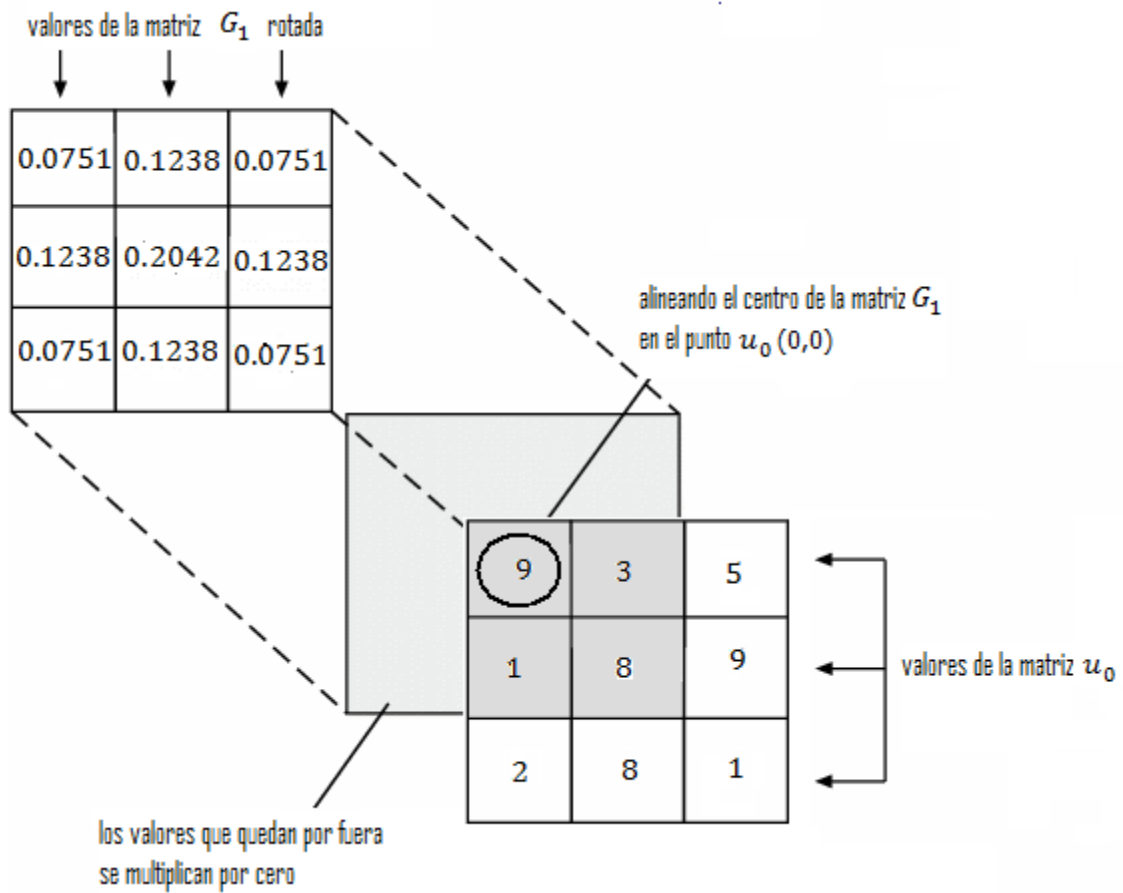


Ilustración 15 Transposición de la matriz G_1 sobre la matriz u_0

Finalmente, en la ilustración 16, se multiplican los elementos de u_0 por los elementos de G_1 que quedaron debajo y luego se suman

0.0751	0.1238	0.0751	
0.1238	0.2042 9	0.1238 3	5
0.0751	0.1238 1	0.0751 8	9
	2	8	1

Ilustración 16 Producto de las matrices G_1 y u_0

$$u(0,0) = 9 * 0.2042 + 3 * 0.1238 + 1 * 0.1238 + 8 * 0.0751$$

$$u(0,0) = 2.9339$$

Luego comparando este resultado con (5.4) vemos que son iguales, y haciendo el mismo procedimiento para cada i, j entre 0 y 2 obtenemos:

$$u(i, j) = \begin{bmatrix} 2.9339 & 4.0882 & 3.1079 \\ 3.3834 & 5.5110 & 4.3976 \\ 2.1238 & 3.7468 & 2.9104 \end{bmatrix}$$

Veamos ahora la aplicación en imágenes utilizando diferentes σ . Tomemos para ello la ilustración 17 a escala de grises tomada por un dron del SIVRT:



Ilustración 17 Imagen original $u_0(x, y)$,

La cual será nuestra imagen inicial $u_0(x, y)$, veamos entonces su suavizado con el filtro gaussiano tomando diferentes sigmas, en la ilustración 18 se muestra la relación entre el parámetro de desviación típica de la gaussiana σ y el tiempo t , y en la ilustración 19 se muestra los cambios que sufre la imagen original luego hacer la convolución con cada filtro G_σ de tamaño 5×5 .

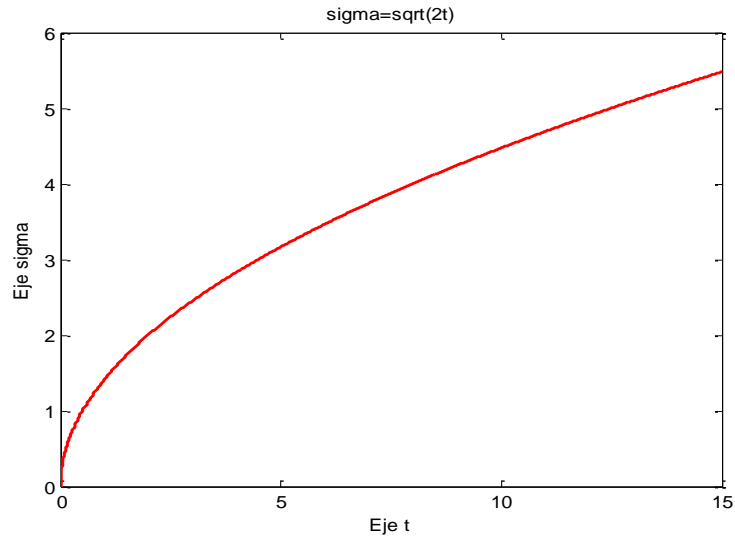


Ilustración 18 Comportamiento de la desviación típica en el tiempo: $\sigma = \sqrt{2t}$

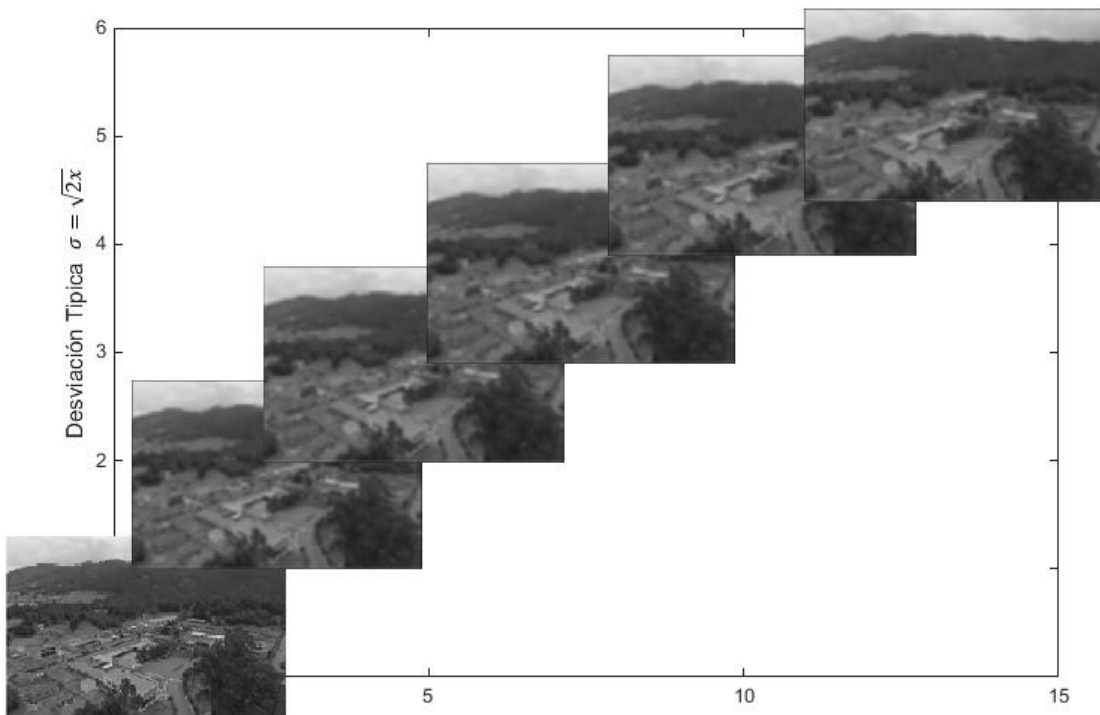


Ilustración 19 Imagen original y filtro gaussiano con $\sigma = 2,3,4,5,6$ de tamaño 5×5

El tamaño de la máscara también influye en la rapidez del suavizado por ejemplo en la ilustración 20 vemos el suavizado de la imagen usando diferentes tamaños y cambiando el valor de sigma.

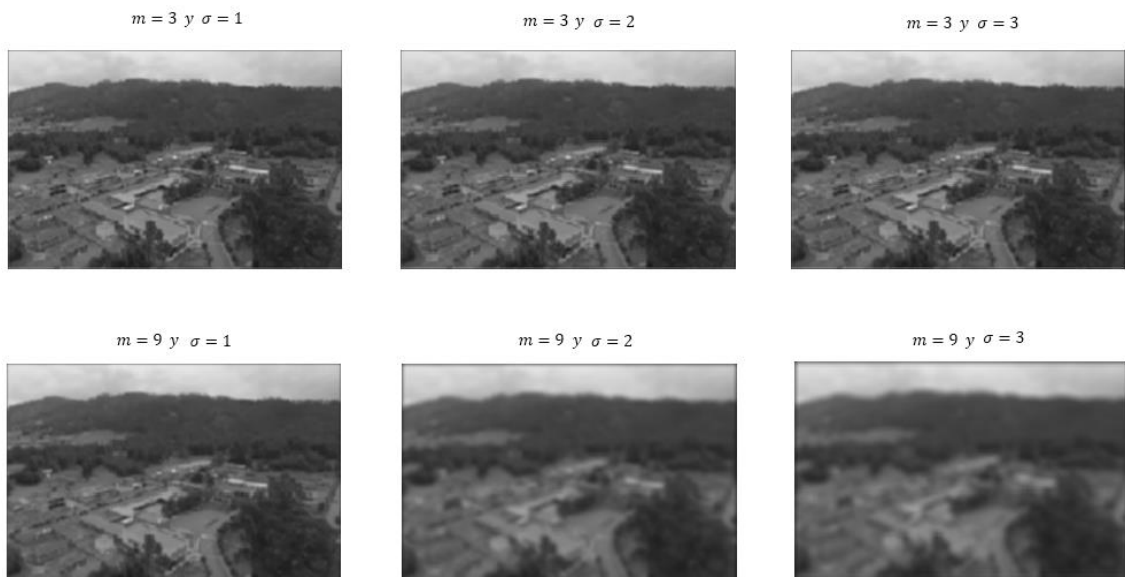


Ilustración 20 Imágenes filtradas con G_1, G_2, G_3 de tamaños 3 y 9

En la primera fila de imágenes presentadas en la ilustración 20 el tamaño de la máscara es de 3x3 y en la segunda fila el tamaño de la máscara es de 9x9 y los valores de sigma son 1,2,3 en ambas filas respectivamente, por lo tanto, si comparamos las imágenes podemos ver que cuanto más grande sea la máscara la imagen pierde brillo más rápidamente.

Para ver más claro el cambio veamos una sucesión de imágenes con el mismo valor de sigma ($\sigma = 2$) y diferentes tamaños de máscaras en la ilustración 21. A pesar de que sigma es pequeño el brillo de la imagen filtrada con la máscara de tamaño 2x2 es mayor que el de la imagen filtrada con la máscara de tamaño 18x18 y la imagen empieza a verse borrosa con un filtro de tamaño 8x8 y sin embargo la mejor imagen es la procesada.

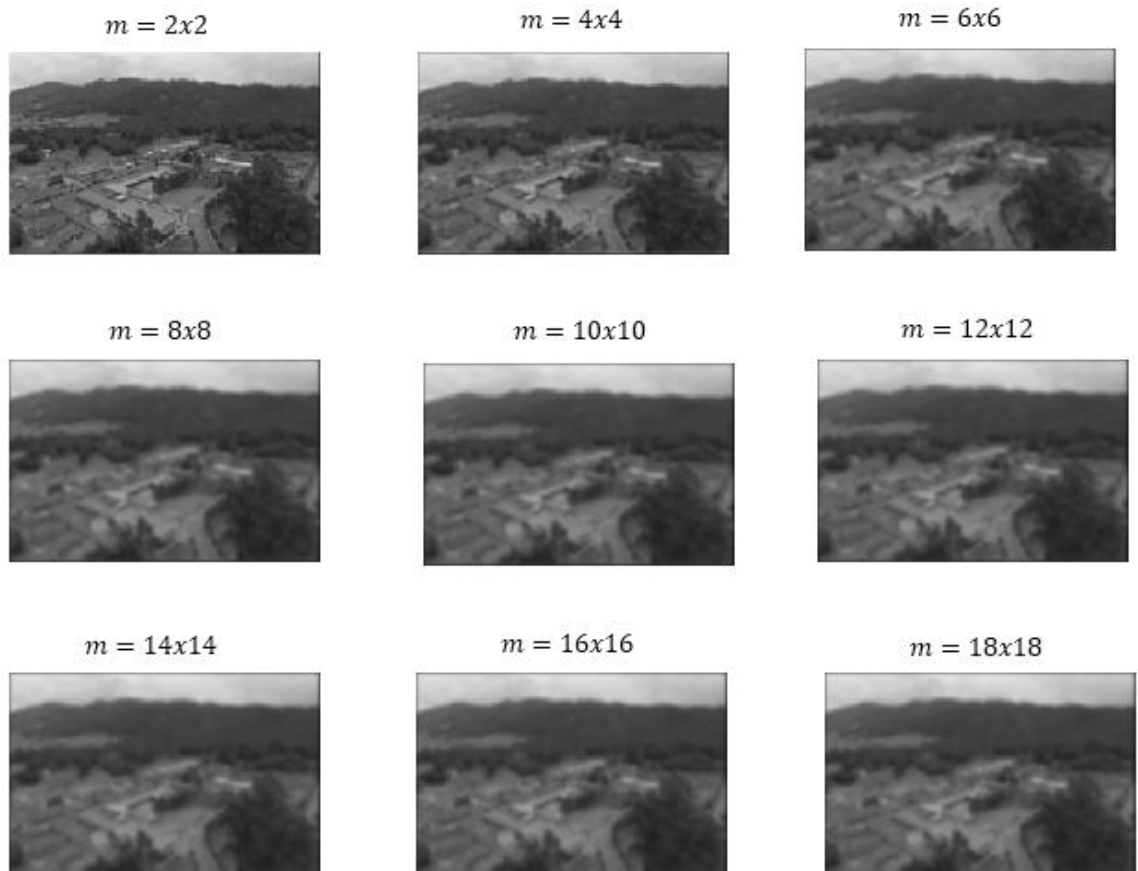


Ilustración 21 Imágenes filtradas con G_2 ($\sigma = 2$) de tamaño 2,4,6,8,10,12,14,16 y 18

Ahora veamos los cambios que sufre la imagen original al cambiar los valores de sigma $\sigma = 3,6,9,12,15,18,21$ y 24 con una máscara de tamaño 9×9 en la ilustración 22, vemos que combinando un tamaño de mascara grande con cualquier valor de sigma se pierde brillo rápidamente, en este caso la imagen original se ve bastante difuminada con tan solo tomar el valor de sigma igual a 3 y para valores mayores el brillo se ha perdido mucho más rápido, cuando $\sigma = 24$ los bordes de la imagen se empiezan a perder, dado que esta es una difusión isotrópica, y por lo tanto, al aplicar el filtro gaussiano no se conservan los bordes es decir que se difuminan todos los pixeles por igual, lo que finalmente hace que la imagen se vea mas borrosa.

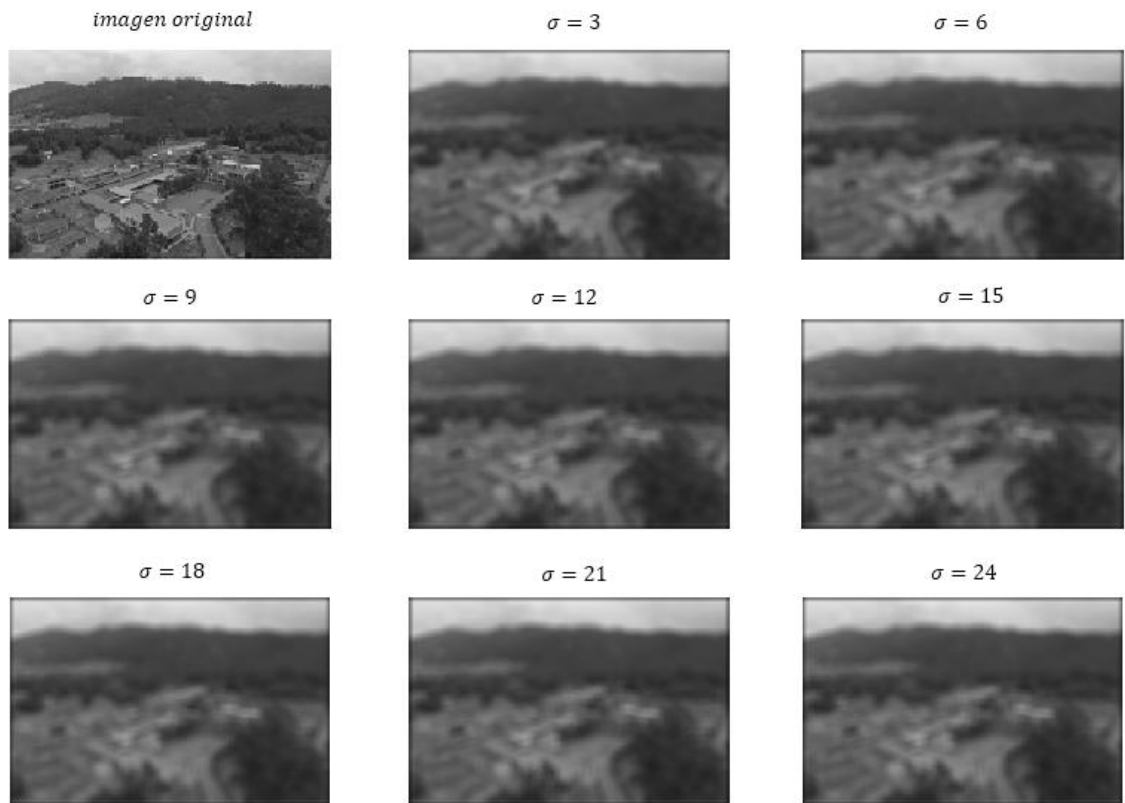


Ilustración 22 Imágenes filtradas con G_σ , $\sigma = 3,6,9,12,15,18,21$ y 24 y máscara de tamaño 9×9

Por otra parte, si analizamos el filtro gaussiano descrito en (5.2) con respecto a sigma vemos que G_σ tiende a cero cuando $\sigma \rightarrow \infty$ (obsérvese la ilustración 23)

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} G_\sigma(i, j) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(i^2+j^2)/2\sigma^2},$$

$$= 0$$

lo que explica el por qué las imágenes van perdiendo brillo y se van oscureciendo a medida que el valor de sigma aumenta. En la ilustración 25 vemos una vista tridimensional en la cual se puede observar más claramente el proceso de suavizado de la imagen, de tal forma que al realizar la convolución entre la imagen original u_0 y el filtro gaussiano los pixeles en la imagen se empiezan a homogenizar y la superficie se torna mucho más suave, además se puede ver que el suavizado es isotrópico es decir que es el mismo en todas direcciones y no depende de la imagen.

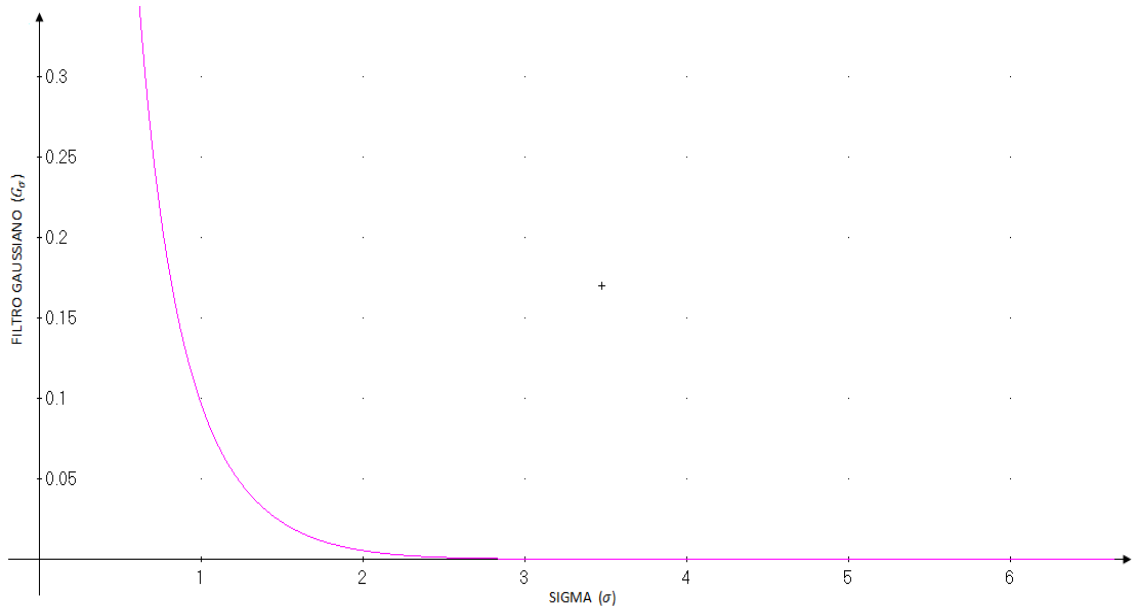


Ilustración 23 Grafica de G_σ dependiendo de σ tomando $|x| = 1$

Por lo tanto, si tomamos dos direcciones ortonormales arbitrarias D_1 y D_2 , como en la ilustración 24, el laplaciano es $\Delta u = u_{D_1 D_1} + u_{D_2 D_2}$ y si reescribimos esta ecuación tomando $D_1 = N = \nabla u / |\nabla u|$ y $D_2 = T$, con $T \cdot N = 0$, $|T| = 1$ tenemos $\Delta u = u_{NN} + u_{TT}$, entonces las dos ecuaciones son equivalentes en las dos direcciones. Que es lo que se quiere expresar con la isotropía.

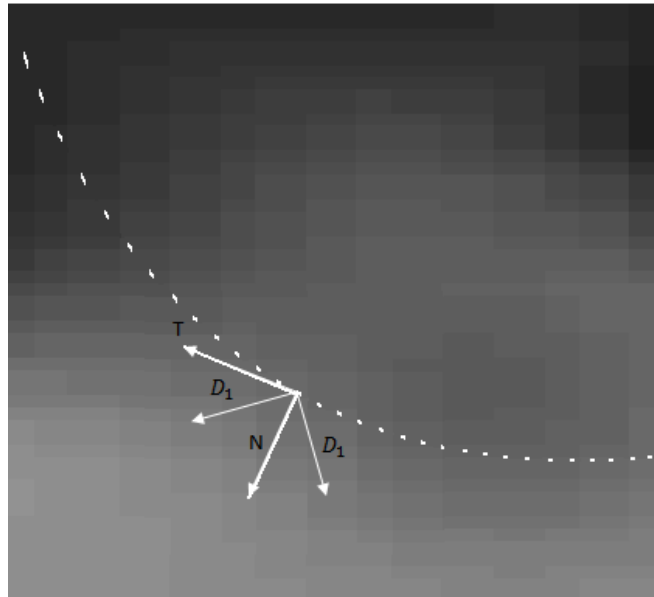


Ilustración 24 Suavizado en diferentes direcciones.

En la ilustración 25 se puede observar el efecto del filtro gaussiano en la imagen de prueba vista en tres dimensiones, usando valores de desviación $\sigma = 2, 6, y 10$.

Inicialmente en la ilustración 25 a) vemos que la imagen original tiene altos niveles de ruido los cuales hacen que la imagen se vea distorsionada, luego en la ilustración 25 b) al aplicarle el filtro gaussiano con desviación $\sigma = 2$ se empieza a suavizar la superficie y al aplicar el filtro con un valor mayor de desviación la imagen se suaviza aún más (Ilustración 25 c) y d)) obteniendo así una superficie más uniforme.

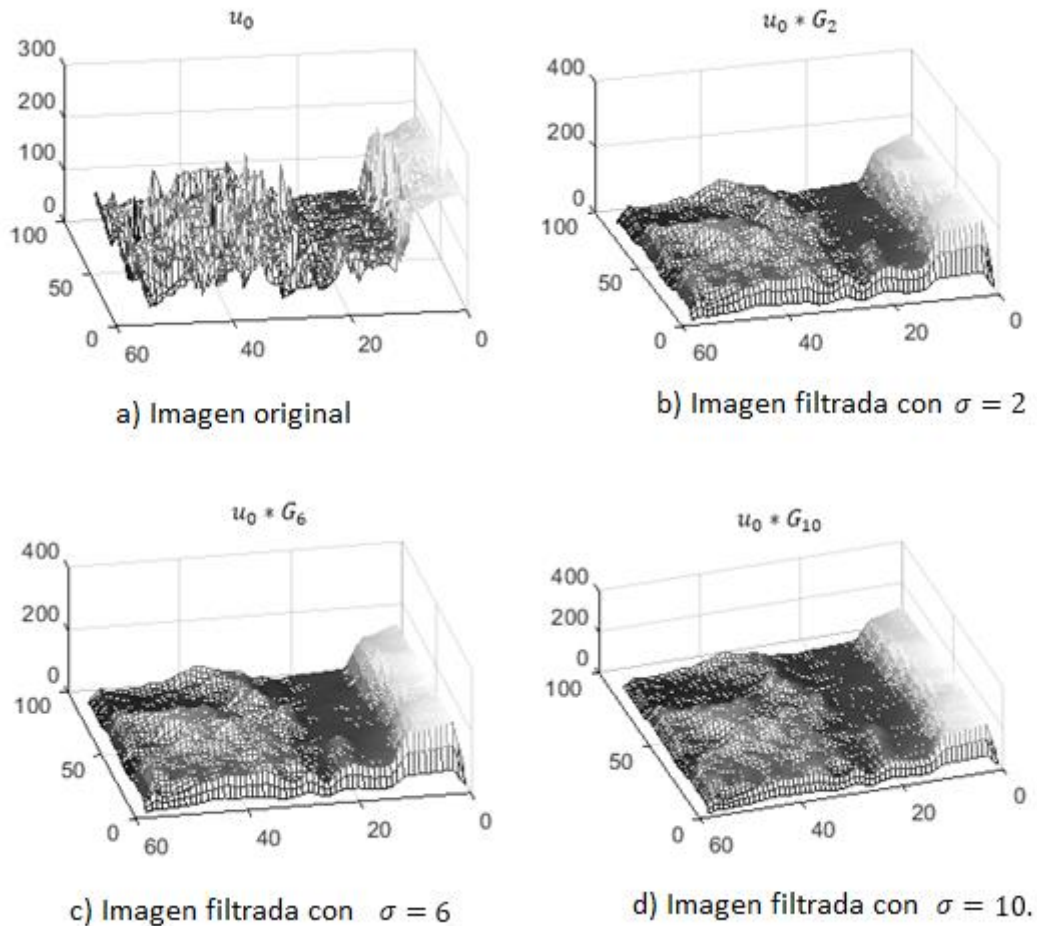


Ilustración 25 Vista tridimensional del suavizado de la imagen con G_2, G_6, G_{10}

5.2. Aplicación con otros coeficientes de difusión.

El modelo de Perona y Malik para la difusión anisotrópica presenta un suavizado multiescala que preserva los bordes teniendo en cuenta tres criterios básicos [31]: el criterio de causalidad, el cual significa que no se pueden generar detalles nuevos en una imagen al disminuir la resolución; el criterio de localización inmediata, que consiste en que los bordes de la imagen procesada deben coincidir con los de la imagen original y el criterio de suavizado según la zona, es decir que el suavizado debe ser mayor dentro de una región que en su borde o frontera. Así el problema se describe como

$$\begin{cases} u_t = \text{div}(c(\|\nabla u\|)\nabla u), \\ u(x, y, 0) = u_0, \end{cases}$$

donde u_0 es la imagen inicial, u_t es el cambio de la imagen con respecto al tiempo y $c(x, y, t)$ es el coeficiente de difusión, que para el caso anterior se tomó igual a uno, sin embargo se puede obtener otros coeficientes de difusión dados por funciones, que controlan el flujo en los píxeles de la imagen, de tal forma que se conserven los bordes, estos coeficientes deben tener las siguientes características descritas por [31] de tal forma que la ecuación diferencial (3.1) se conserve parabólica, las características básicas son

- ▶ la función $c(\cdot)$ debe ser C^∞ , es decir infinitamente diferenciable;
- ▶ $c(\cdot)$ debe ser monótonamente decreciente de 1 a 0 cuando $|\nabla u_0|^2$ varía entre 0 a ∞ , es decir $\lim_{x \rightarrow 0} c(x) \approx 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = 0$; y
- ▶ la función de flujo definida por $\phi(x) = x c(x)$ donde $x = |\nabla u_0|$ tiene un máximo en \mathbb{R}^+ .

Los siguientes son algunos de los coeficientes propuestos para el modelo de Perona y Malik que hacen la difusión anisotrópica,

Coficiente dado por la función de Lorentz

Este coeficiente fue propuesto por Perona y Malik en [1] dado por

$$c_L(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{K}\right)^2}, \tag{5.5}$$

donde K representa el límite de difusión que controla la velocidad de difusión y sirve como un umbral suave, favorece a las regiones más grandes sobre las más pequeñas. Esta constante K se puede elegir usando el estimador de ruido descrito por Canny [37], que consiste en realizar un histograma del gradiente de la imagen y tomar el valor de K como el 90% de la suma acumulada de los valores absolutos del gradiente de la imagen en el histograma.

En la ilustración 26 se puede observar que el coeficiente de difusión tiende a cero cuando x tiende a infinito y además su valor máximo es 1 lo que implica una difusión máxima en este punto, en la función de flujo se puede observar que el valor máximo se obtiene en el valor de K .

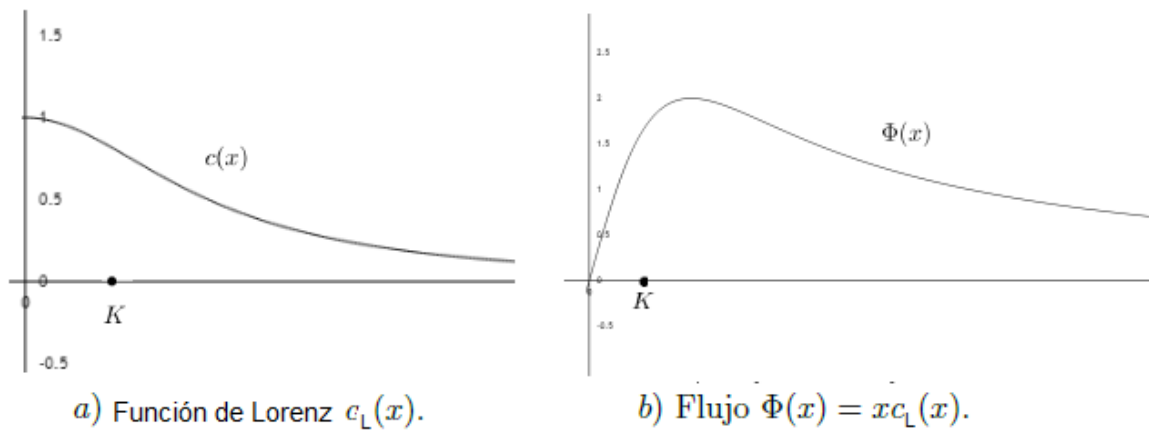


Ilustración 26 Coeficiente de difusión dado por la función de Lorentz y su flujo.

Ahora usando la misma imagen usada con el filtro gaussiano (ilustración 27) podemos observar las diferencias en los resultados usando este coeficiente:



Ilustración 27 Imagen original a escala de grises, tomada por un dron.

Para realizar la aplicación en Matlab se usa la imagen distorsionada como la condición inicial, luego se obtiene el gradiente de la imagen en cada una de las direcciones deseadas, para después calcular el coeficiente de difusión en este y obtener u_{t+1} que es el cambio de la imagen en t+1, este procedimiento se puede repetir varias veces, hasta obtener los resultados deseados. Para nuestro análisis aplicamos el coeficiente de difusión con cinco iteraciones y diferentes valores de K, los resultados de este proceso se observan en la ilustración 28:

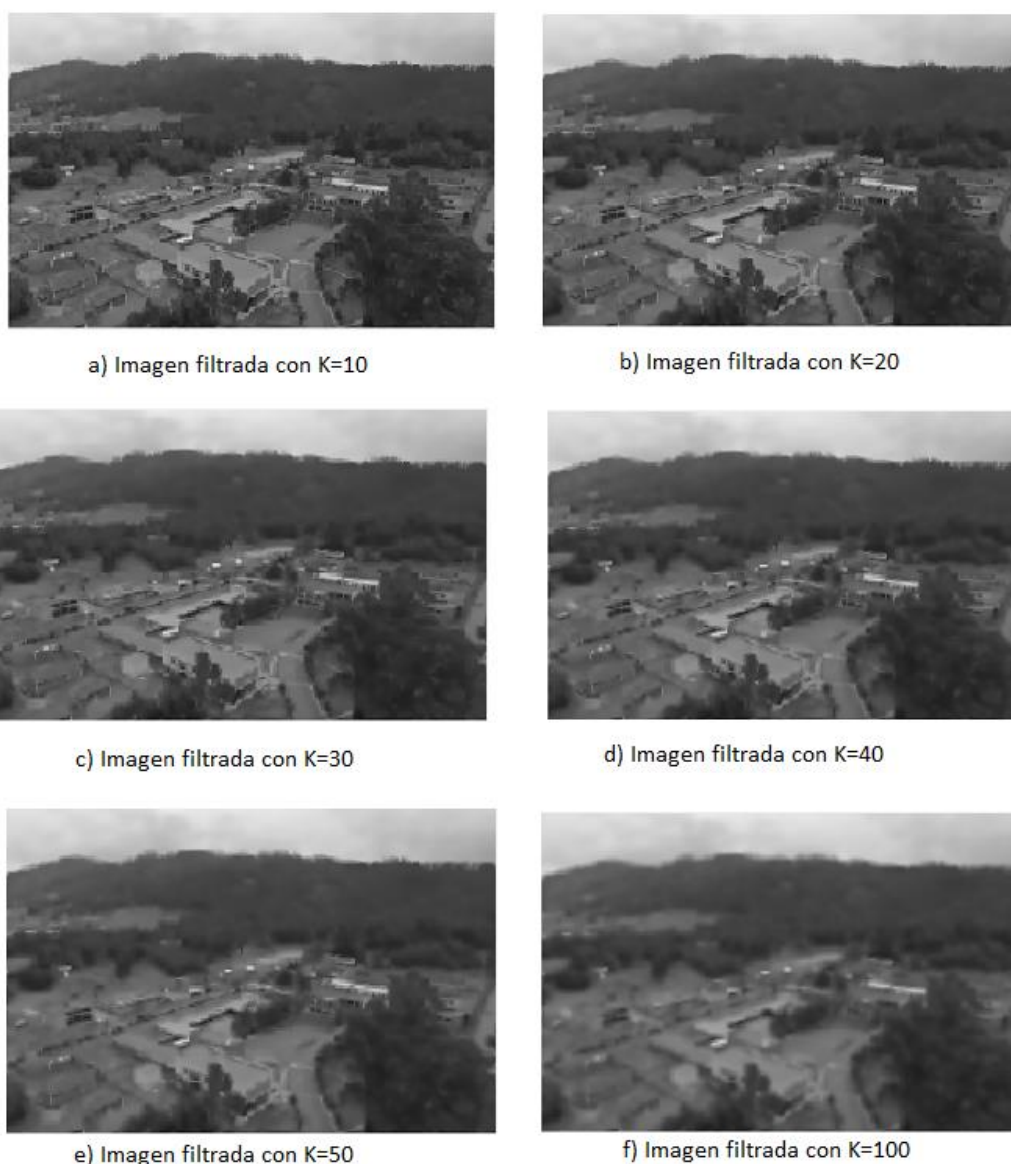


Ilustración 28 Procesamiento de la imagen usando el coeficiente de Lorentz

En este caso vemos que con $K=40$ se ha obtenido un excelente resultado, la imagen ha mejorado notablemente su nitidez, conservando al mismo tiempo los bordes; y para valores mayores, como el caso de $k=50$ y $K=100$ el suavizado es mucho mayor, pero se va perdiendo nitidez.

Coeficiente de difusión dado por la función de Leclerc

Este coeficiente fue propuesto por Perona y Malik en [1], y viene dado por

$$c_{Le}(x) = e^{-\frac{x}{2K^2}}. \tag{5.6}$$

Esta ecuación favorece a las regiones de alto contraste sobre las de bajo contraste, como se evidencia en la ilustración 29 el coeficiente de difusión decrece rápidamente a cero al igual que la función de flujo.

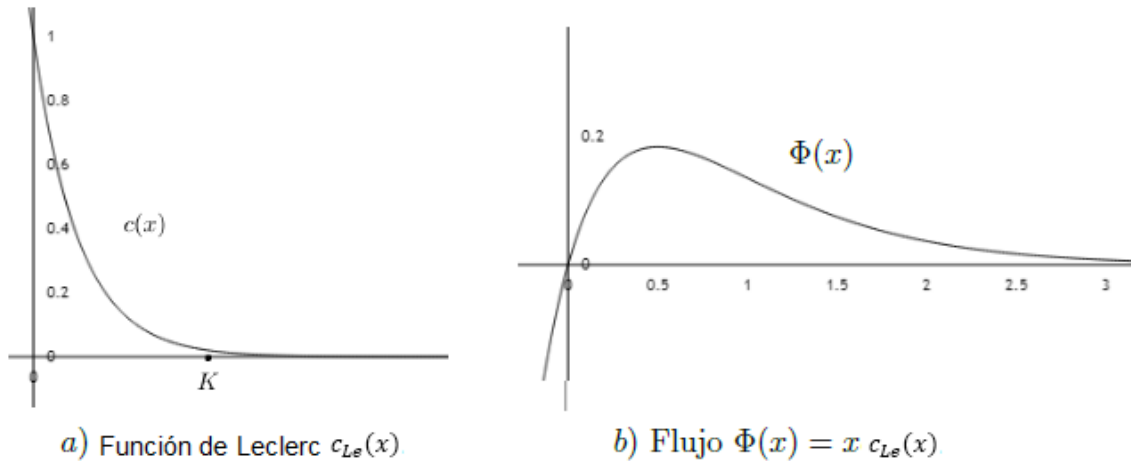


Ilustración 29 Coeficiente de difusión dado por la función de Leclerc y su función de flujo.

Debido a que el flujo decrece rápidamente se puede intuir que el suavizado de la imagen se realiza bastante rápido, como podemos observar en la ilustración 30 el valor de K no requiere ser muy alto para obtener un buen resultado, con solo $K = 4$ los resultados obtenidos son buenos y se puede observar que para valores mayores como $K = 5$ y $K = 10$ se empieza a perder nitidez.

En comparación con el procesamiento realizado con la función de Lorentz con este coeficiente parece ser que los bordes se conservan menos y la imagen se difumina mucho más rápido, en el análisis al igual que en el caso anterior se usó cinco iteraciones con diferentes valores de K , sin embargo, rápidamente se observa como con $K = 5$ la imagen se suaviza hasta los bordes con lo cual se deja de generar una difusión anisotrópica para convertirse en una difusión isotrópica, en la cual se van afectando también los bordes, así que con este coeficiente el mejor resultado se obtiene al aplicar el valor de $K = 4$, en el cual aún no se pierden los bordes y se disminuye el ruido considerablemente.



a) Imagen procesada con K=1



b) Imagen procesada con K=2



c) Imagen procesada con K=3



d) Imagen procesada con K=4



e) Imagen procesada con K=5



f) Imagen procesada con K=10

Ilustración 30 Procesamiento de la imagen usando el coeficiente de Leclerc

Coeficiente de Tsotsios y Petrou

Este coeficiente se describe en [38] y se encuentra dado por la ecuación (5.7)

$$c_{TP}(x) = \begin{cases} 0,67 \left(1 - \left(\frac{x}{\sqrt{5} K} \right)^2 \right)^2, & \text{si } x \leq \sqrt{5} K, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.7)$$

En este coeficiente como en los anteriores, se tiene en cuenta la función de flujo, el parámetro de umbral de gradiente o límite de difusión y el parámetro de detección de forma que mide el tiempo de parada del proceso iterativo.

Este coeficiente cumple en cierta forma las características descritas por [31], ya que es infinitamente diferenciable, tiende a cero cuando x tiende a infinito, y cuando x tiende a cero la función tiende a 0,67 y además tiene un máximo en $x = K$, en la ilustración 31 podemos observar el comportamiento del coeficiente de difusión y su función de flujo, donde se puede inferir que a pesar que la difusión nos sea máxima dentro de las regiones tiene un buen nivel de difusión, ya que $\lim_{x \rightarrow 0} c(x) = 0,67$, además también se puede ver que la difusión no se aplica para valores mayores a $\sqrt{5}K$ ya que la función después de este valor es cero.

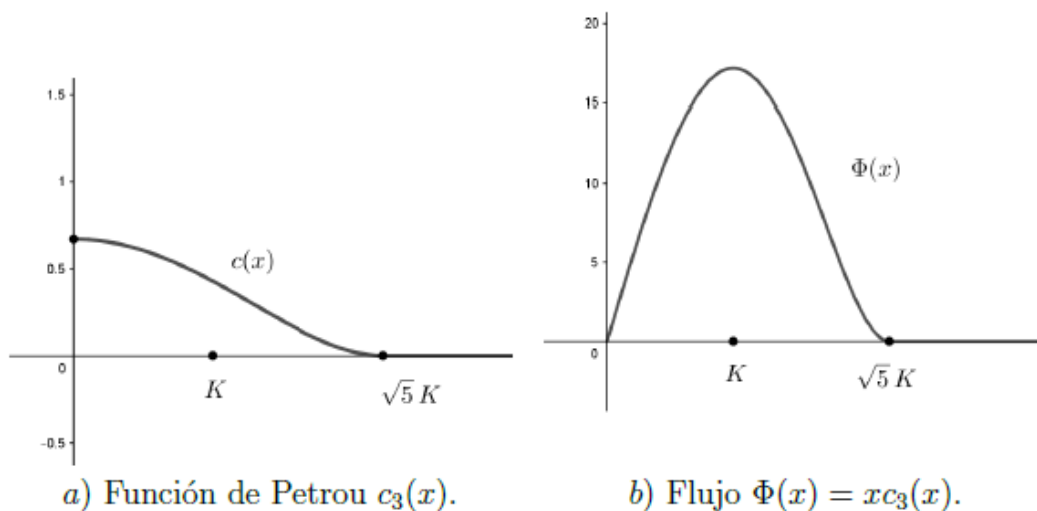


Ilustración 31 Coeficiente de Tsiotsios y Petrou c_{TP} y su flujo, recuperado de [31].

La ventaja de este coeficiente es que al tener un parámetro que determina el límite en la difusión se afecta solamente los pixeles que cumplen con el límite de difusión y de esta forma los bordes se mantienen mucho mejor.

En la ilustración 32 se puede observar que no hay cambios considerables en la imagen para valores pequeños de K , pero en $K = 20$ y $K = 40$ la imagen empieza a suavizarse bastante bien y aún se conserva los bordes, inclusive para $K = 50$ la difusión de la imagen funciona bien, y ya para $K = 60$ la difusión es mucho mayor y se empieza a afectar los bordes perdiéndose así la nitidez, para valores aún mayores de 60 vemos que por ejemplo

que para $K = 80$ y $K = 100$ la imagen va perdiendo nitidez en los bordes y se van difuminando más. En comparación con los anteriores coeficientes el valor de K para el cual se obtiene mejores resultados es $K = 50$, con el cual el límite de difusión es $\sqrt{5}K = 111,80$ así no todos los pixeles son afectados, solo aquellos que están por debajo de este umbral.



a) Imagen procesada con $K=5$



b) Imagen procesada con $K=10$



c) Imagen procesada con $K=20$



d) Imagen procesada con $K=40$



e) Imagen procesada con $K=50$



f) Imagen procesada con $K=60$



g) Imagen procesada con $K=80$



h) Imagen procesada con $K=100$

Ilustración 32 Imagen procesada con el Coeficiente de Tsiotsios y Petrou

Aplicación usando un nuevo coeficiente de difusión

Teniendo en cuenta que el coeficiente de difusión controla el flujo entre los pixeles de la imagen, se trata de obtener un coeficiente que cumpla con las características requeridas para mantener los bordes o las fronteras de la imagen, con lo cual se plantea el coeficiente de difusión

$$c(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{K} + \frac{\pi}{2}\right), & \text{si } x \leq K/2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este coeficiente de difusión es infinitamente diferenciable, es decir que es C^∞ , y cumple las condiciones

- ▶ $\lim_{x \rightarrow 0} c(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi x}{K} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$

Además, se puede observar en la ilustración 33 que el coeficiente propuesto es monótono decreciente y la función de flujo $\phi(x) = x c(x)$ donde $x = |\nabla u_0|$ tiene un máximo en \mathbb{R}^+ .

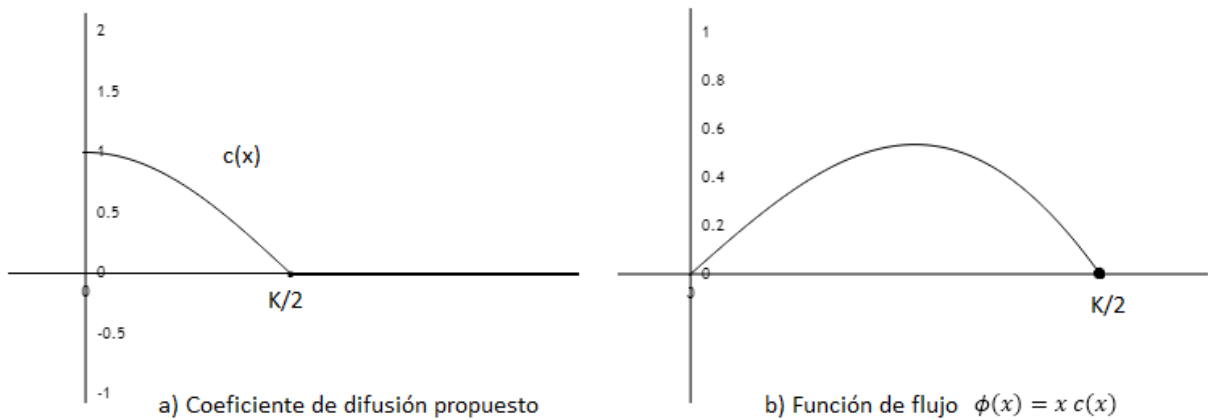


Ilustración 33 Coeficiente de difusión propuesto y su función de flujo.

En la ilustración 34 podemos observar que con este coeficiente de difusión se conserva mucho mejor los bordes, y solo al tomar valores muy grandes de K como $K = 100$ y $K = 120$ se empieza perder nitidez en la imagen, en los valores para $K = 40$ y $K = 60$ se puede observar buenos resultados ya que aún se mantienen los bordes y la imagen se ha mejorado considerablemente.



a) Imagen procesada con K=5



b) Imagen procesada con K=10



c) Imagen procesada con K=20



d) Imagen procesada con K=40



e) Imagen procesada con K=60



f) Imagen procesada con K=80



g) Imagen procesada con K=100



h) Imagen procesada con K=120

Ilustración 34. Imagen procesada con el coeficiente de difusión propuesto.

5.3. Análisis de los resultados

A la hora de evaluar la calidad de una imagen procesada, se puede realizar de manera subjetiva u objetiva, cuando se habla del análisis subjetivo se refiere a la percepción humana ante el resultado obtenido en el procesamiento, que es básicamente lo que se ha realizado en el análisis presentado al aplicar cada uno de los diferentes coeficientes de difusión en el apartado 5.1 y 5.2, sin embargo con el propósito de obtener un análisis más objetivo de los resultados haremos una evaluación usando diferentes métodos propuestos por [39], estos métodos se utilizan principalmente para medir los impactos técnicos en la calidad de la imagen. La evaluación objetiva de las imágenes procesadas se puede clasificar en tres categorías:

- ▶ **Medición de la calidad con referencia completa:** Donde se compara la imagen procesada con la imagen original sin distorsiones.
- ▶ **Medición de la calidad con referencia reducida:** evalúa la calidad de la imagen procesada con algunas características de la imagen original sin distorsiones.
- ▶ **Medición de la calidad sin referencia:** es una tarea un poco más complicada que las dos categorías anteriores debido a que se evalúa la calidad únicamente con la imagen procesada ya que la imagen original sin distorsiones no se encuentra disponible.

En nuestro caso la categoría en la cual podemos evaluar los resultados del procesamiento de la imagen tomada será la medición sin referencia ya que no contamos con la imagen original sin distorsiones, para este proceso Matlab cuenta con tres funciones que permiten medir diferentes características de las imágenes procesadas, entre las que se encuentra la función *brisque* que evalúa la calidad espacial de la imagen, esta función está formada por una base de datos de imágenes con distorsiones conocidas y a partir de estas hace comparaciones con la imagen evaluada, un valor pequeño en la puntuación dada por la función corresponde a una buena calidad de la imagen, la función *niqe* que trata de evaluar la calidad de la imagen con cualquier tipo de distorsión, no utiliza puntuaciones de calidad subjetivas por lo cual no tiene en cuenta si las percepciones de calidad son perceptibles al ojo humano, la base de datos que utiliza son imágenes de escenas naturales y al igual que con la función *brisque* una puntuación pequeña indica mejor calidad y por último se tiene la función *piqe* que evalúa la calidad de las imágenes basándose en la percepción, evalúa imágenes con distorsión arbitraria, y estima la varianza de las regiones con distorsiones perceptibles. En [40] podemos observar una descripción más detallada de estas funciones.

Iniciaremos el análisis con el filtro gaussiano y luego se analizará cada uno de los coeficientes presentados en el apartado anterior, para finalmente verificar cuál de los métodos genera un mejor procesamiento.

Para el análisis usando el filtro gaussiano tomaremos el valor de $\sigma = 2$ y diferentes tamaños de máscara como en la ilustración 21 ya que en esta se observan cambios considerables en el procesamiento de la imagen

Tabla 1 Análisis del filtro gaussiano con diferentes tamaños de máscara

ANÁLISIS DEL FILTRO GAUSSIANO $\sigma = 2$				
Imagen Procesada I_r	Tamaño de máscara	Brisque	Niqa	Piqa
u_1	2x2	37.1966	5.7083	40.0671
u_2	4x4	45.7834	5.5746	59.3352
u_3	6x6	49.5515	5.9451	78.4631
u_4	8x8	52.0624	6.5077	84.9692
u_5	10x10	53.0026	6.5834	86.5734

En la tabla 1 podemos observar que según la prueba brisque y piqa la imagen con mejor calidad espacial y percepción es la procesada con el filtro gaussiano de tamaño 2x2 y $\sigma = 2$ y en cuanto a la prueba niqa la mejor imagen es la procesada con el filtro gaussiano de tamaño 4x4 y $\sigma = 2$. En la ilustración 35 se puede observar las dos imágenes:



a. Imagen procesada con mascara de tamaño 2x2 y $\sigma = 2$



b. Imagen procesada con mascara de tamaño 4x4 y $\sigma = 2$

Ilustración 35 Imágenes procesadas con el filtro gaussiano

Ahora tomando un valor fijo en el tamaño de la máscara y cambiando el valor de σ , en la tabla 2 encontramos que si dejamos fijo el tamaño 3×3 que es el valor intermedio de los tamaños que generaron mejores puntuaciones en las pruebas anteriores y tomamos valores de la desviación entre 1 y 5, teniendo en cuenta la tabla 2, la imagen procesada con mejores resultados es la procesada con $\sigma = 1$, la cual tuvo la mejor puntuación con la prueba brisque y Niqe, aunque con la prueba piqe la que mejor puntuación obtuvo fue la procesada con $\sigma = 4$, sin embargo, teniendo en cuenta las condiciones dadas por [41] vemos que el puntaje obtenido en la prueba piqe no es muy buena en comparación con los resultados obtenidos usando la prueba niqe y brisque, en la ilustración 36 se puede observar visualmente los resultados del procesamiento de la imagen usando el filtro gaussiano de tamaño 3×3 con los diferentes valores de desviación.

a) Imagen original u_0 b) Imagen procesada con $\sigma = 1$ c) Imagen procesada con $\sigma = 2$ d) Imagen procesada con $\sigma = 3$ e) Imagen procesada con $\sigma = 4$ f) Imagen procesada con $\sigma = 5$

Ilustración 36. Imagen procesada con el filtro Gaussiano de tamaño 3×3 y diferentes valores de sigma

Tabla 2. Análisis del filtro gaussiano con diferentes valores de desviación.

ANÁLISIS DEL FILTRO GAUSSIANO 3x3				
Imagen procesada I_p	Valor de σ	Brisque	Niqe	Piqe
u_1	1	32.5063	5.4170	52.0467
u_2	2	39.3702	5.4199	50.6145
u_3	3	40.3459	5.6325	50.6131
u_4	4	40.8311	5.7055	50.5944
u_5	5	40.9781	5.7371	50.9304

Ahora evaluamos los resultados obtenidos con los diferentes coeficientes de difusión planteados en el apartado 5.2 teniendo en cuenta los diferentes valores de K aplicados en las ilustraciones 28, 30, 32, y 34. Iniciamos con el coeficiente de Lorentz, cuyos resultados se presentan en la tabla 3, donde observamos que con el coeficiente de Lorentz la imagen con mejores puntuaciones con la prueba de brisque y piqe es la procesada con $K = 1$, sin embargo, con la prueba de niqe la imagen que obtuvo mejor puntuación es la procesada con $K = 100$.

Tabla 3 Análisis del filtro con el coeficiente de Lorentz

ANÁLISIS DEL COEFICIENTE DADO POR LORENTZ			
K	Brisque	Niqe	Piqe
10	41.7226	6.5576	46.2839
20	49.3256	7.0103	60.5591
30	50.7316	6.9008	67.1613
40	49.8545	6.6986	70.5808
50	49.0801	6.6986	77.8853
100	50.3306	6.0805	77.7990

Ahora aplicando el análisis usando el coeficiente de Leclerc obtenemos los resultados presentados en la tabla 4, donde la imagen con mejor puntuación es la procesada con $K=1$ usando la prueba brisque y piqe y la imagen procesada con $K = 2$ según la prueba niqe.

Tabla 4 Análisis del filtro con el coeficiente de Leclerc

ANÁLISIS CON EL COEFICIENTE DE LECLERC			
K	Brisque	Niqe	Piqe
1	15.1427	6.2982	40.2432
2	16.4435	6.1355	42.7499
3	44.5183	6.8275	51.8212
4	49.0911	6.8239	59.9391
5	49.3695	6.5043	66.9368
6	48.5991	6.2543	74.6655

Si ahora analizamos las imágenes procesadas usando el coeficiente de Tsotsios Petrou vemos en la tabla 5 que las imágenes con mejor puntuación son la procesada con $K = 10$ según las pruebas brisque y piqe y $K = 100$ según la prueba niqe.

Tabla 5 Análisis del filtro con el coeficiente de Tsotsios Petrou

ANÁLISIS CON EL COEFICIENTE DE TSIOTSIOS PETROU			
K	Brisque	Niqe	Piqe
5	29.3830	6.1220	42.3963
10	25.3499	6.6765	42.2764
20	44.3838	7.2790	50.0781
40	46.9227	6.9988	59.0508
50	46.7544	6.6080	61.1332
60	47.0765	6.2465	63.3770
80	49.0222	5.7923	68.0289
100	50.2067	5.6721	69.5541

Y finalmente analizando el coeficiente de difusión propuesto en este trabajo vemos que en la tabla 6 buenos resultados para la imagen procesada con $K = 20$ según la prueba brisque, $K = 10$ según la prueba niqe y $K = 5$ según la prueba piqe.

Tabla 6 Análisis del filtro con el coeficiente propuesto.

ANÁLISIS CON EL COEFICIENTE PROPUESTO			
K	Brisque	Niqe	Piqe
5	10.2648	6.5559	10.2648
10	26.6023	6.0453	39.8311
20	9.6726	6.4903	42.8971
40	44.3162	7.9020	49.0684
60	50.0376	8.7882	53.8344
80	53.6136	8.8954	61.5441
100	54.2993	9.1063	66.2479
120	53.9141	9.1743	69.7445

Al comparar todos los resultados obtenidos, podemos ver en la tabla 7, que con la prueba brisque la imagen que obtuvo mejor puntuación fue la procesada con el coeficiente propuesto y $K = 20$, con la prueba niqe la que obtuvo mejor puntuación es la procesada con el filtro gaussiano de tamaño 3×3 y desviación de $\sigma = 1$, y con la prueba piqe la imagen con mejor puntuación es la procesada con el filtro propuesto y $K = 5$. Así que podemos concluir que el mejor filtro es el generado por el coeficiente propuesto al final del apartado 5.2, sin embargo, los resultados obtenidos en este análisis, el cual representa una evaluación objetiva de las imágenes, no tienen mucha relación con el análisis subjetivo que se realizó anteriormente, por lo cual podemos deducir que a pesar de que estos métodos de evaluación tienen presente la varianza y la disposición espacial de la imagen, no tienen en cuenta las puntuaciones subjetivas en las que se analiza la percepción del ojo humano en lo referente a la calidad de la imagen, es por esto que en la ilustración 37 se muestra una comparación visual de las mejores imágenes según la evaluación objetiva y subjetiva, teniendo en cuenta el filtro gaussiano y en general los filtros generados por el modelo de Perona y Malik con los diferentes coeficientes de difusión presentados en el apartado 5.2, donde además se resaltan las imágenes que han

obtenido mayor puntuación en cada una de las pruebas aplicadas para evaluar la calidad de estas de manera objetiva. Al analizar la ilustración 37 podemos observar que la mayoría de las imágenes que obtuvieron puntuaciones altas en la evaluación objetiva no perdieron brillo a excepción de la imagen procesada con el coeficiente de Petrou y $K=100$ y la imagen procesada con el coeficiente de Lorentz y $K=100$, donde en ambos casos se tomó un límite de difusión alto y por lo tanto la velocidad de difusión y el umbral de suavidad es mucho mayor, sin embargo estas imágenes no hacen parte de las tres imágenes con mayores puntuaciones en cada uno de las pruebas aplicadas. En el caso de la prueba piqe vemos que la imagen con mayor puntuación fue la procesada con el coeficiente propuesto al final del apartado 5.2 y $K=5$, en esta imagen no hay pérdida de brillo y ha conservado bastante bien los bordes, aunque se puede observar todavía un poco de ruido, en la prueba niqe la imagen que obtuvo mejor puntuación fue la procesada con el filtro gaussiano de tamaño 3×3 y $\sigma = 1$, en esta imagen no hay pérdida de brillo debido a que el valor de desviación aplicada es pequeño y por lo tanto la varianza también es pequeña, si el valor de la desviación fuese mayor con este filtro la pérdida de brillo se genera rápidamente, y con la prueba brisque la imagen que obtuvo mejor puntuación es la procesada con el coeficiente propuesto y $K=20$ donde al igual que en el caso de $K=5$ no hay mayor pérdida de brillo y se ha conservado bastante bien los bordes de la imagen, sin embargo en esta imagen se ha disminuido mucho más el ruido que en el caso de la imagen procesada con $K=5$ y en cuanto a la evaluación subjetiva se puede observar que para el filtro gaussiano con $\sigma = 2$ el análisis concuerda con la prueba niqe en que la mejor imagen es generada por el filtro de tamaño 4×4 , además la evaluación subjetiva también concuerda con la prueba piqe en que filtro gaussiano de tamaño 3×3 y $\sigma = 4$ es la mejor imagen de esa serie donde se dejó fijo el tamaño y se varió la desviación.

Tabla 7. Comparación de los resultados obtenidos con los diferentes coeficientes.

COMPARACIÓN DE RESULTADOS						
Filtro	Prueba brisque		Prueba Niqe		Prueba Piqe	
	Propiedad	Puntuación	Propiedad	Puntuación	Propiedad	Puntuación
Gauss $\sigma = 2$	$T=2 \times 2$	37.1966	$T=4 \times 4$	5.5746	$T=2 \times 2$	40.0671
Gauss 3×3	$\sigma = 1$	32.5063	$\sigma = 1$	5.4170	$\sigma = 4$	50.5944
Lorentz	$K=10$	41.7226	$K=100$	6.0806	$K=10$	46.2839
Leclerc	$K=1$	15.1427	$K=2$	6.1355	$K=1$	40.2432
Petrou	$K=10$	25.3499	$K=100$	5.6721	$K=10$	42.2764
Propuesto	$K=20$	9.6726	$K=10$	6.0453	$K=5$	10.2648

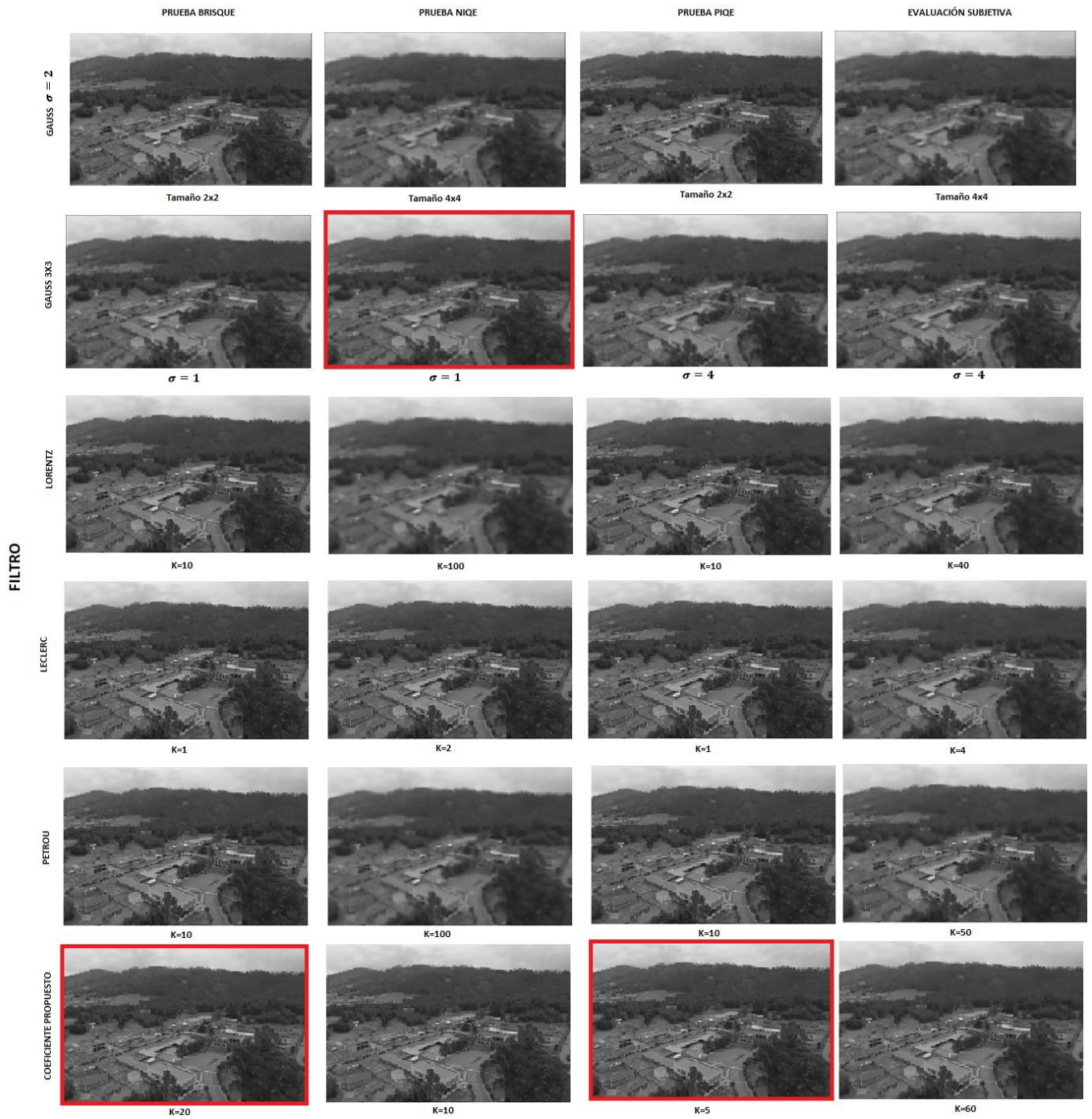


Ilustración 37. Imágenes con mejores resultados en las pruebas objetivas y su evaluación subjetiva para cada filtro.

Capítulo 6. Conclusiones y líneas futuras.

6.1. Conclusiones

Al comparar las imágenes de prueba podemos ver que, en el suavizado, usando la solución de la ecuación de calor, intervienen dos variables importantes en el kernel Gaussiano que son el tamaño de la máscara y el valor de sigma, puesto que al comparar el suavizado de una imagen con diferentes sigmas y una máscara de tamaño fijo y el suavizado con un valor de sigma fijo y máscaras de diferentes tamaños se ve que la evolución es similar (ver ilustraciones 20, 21 y 22), además teniendo en cuenta la ilustración 25 podemos observar que al aplicar la ecuación de calor se migra información de los pixeles a los pixeles más cercanos homogenizando la superficie.

La ecuación de calor como modelo matemático puede verse como un proceso de evolución a través del cual $u(x, t)$ es transformada. Dentro de esta transformación puede analizarse la restauración de imágenes y en particular el suavizado de estas.

En el caso en el que el coeficiente de difusión es igual a 1 se demostró como la ecuación de calor resultó ser un caso particular del modelo $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \text{div}(c(|\nabla u|^2)\nabla u)$ introducido por Perona y Malink para el suavizado de imágenes, en el cual se produce una difusión isotrópica.

El valor de σ del kernel Gaussiano está relacionado con el tiempo por $\sigma = \sqrt{2t}$ esto quiere decir que a medida que el tiempo aumenta el valor de sigma también aumenta, pero en cambio el kernel Gaussiano dado por $G_\sigma = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x|^2}$ tiende a cero lo que hace que las imágenes pierdan brillo.

La acción del kernel Gaussiano es la de un filtro paso-bajo que inhibe las altas frecuencias (o las oscilaciones) en el dominio espacial permitiendo así el suavizado de las imágenes. En las imágenes de prueba se pudo comprobar que si la imagen elegida es de un alto contenido frecuencial entonces el costo computacional es mayor respecto aquellas de bajo contenido frecuencial.

Al aplicar otros coeficientes de difusión en el modelo de Perona y Malik que generan una difusión anisotrópica, observamos mejoras en el procesamiento de la imagen ya que en este tipo de difusión se conserva los bordes de la imagen y los resultados de la evaluación usando las funciones brisque, niqe y piqe muestran que el mejor coeficiente es el $\sigma = 1$ propuesto.

Al comparar la evaluación subjetiva con la evaluación objetiva se observa que estas concuerdan en que la mejor restauración es la realizada con el filtro gaussiano de tamaño 3×3 y $\sigma = 1$ y la realizada con el filtro gaussiano de tamaño 4×4 y $\sigma = 2$, sin embargo, debido a que el filtro gaussiano genera una difusión isotrópica resulta mejor utilizar el filtro propuesto en el apartado 5.2, el cual obtuvo la mejor evaluación objetiva en las pruebas brisque y piqe.

En cuanto al aporte realizado al semillero de investigación en aeronaves no tripuladas, se han expuesto los mejores filtros (el filtro gaussiano y el filtro propuesto), teniendo en cuenta la evaluación objetiva y se ha optado por utilizar el filtro propuesto al final del apartado 5.2 ya que este permite restaurar imágenes tomadas con drones, generando una difusión anisotrópica en la cual se conservan los bordes a diferencia del filtro gaussiano en el que se genera una difusión isotrópica. Es así como se obtiene una mejor restauración y en consecuencia un análisis correcto del entorno y las diferentes amenazas que podrían enfrentar las bases fijas del Ejército Nacional.

6.2. Líneas futuras de trabajo

Luego de revisar la aplicación de la ecuación de calor en el procesamiento de imágenes es posible continuar el estudio revisando los efectos sobre las imágenes usando otros coeficientes de difusión con las condiciones descritas en [31] en los cuales se podría usar otras funciones trigonométricas y exponenciales que permitan generar cambios en la velocidad de difusión y en el límite de difusión.

Además, se podría trabajar en el sistema de evaluación de imágenes sin referencia, en el que se puede combinar la evaluación objetiva con la evaluación subjetiva, ya que los actuales son buenos, pero no tienen en cuenta la percepción visual subjetiva del humano, así que sería necesario generar un algoritmo que tuviese en cuenta estas dos evaluaciones, esto se podría realizar usando redes neuronales en las cuales se genera

un aprendizaje continuo de la identificación de la calidad de las imágenes y su restauración.

Y por otra parte se podría trabajar en una aplicación que permita generar el filtro directamente en la cámara instalada en el dron para así tener resultados instantáneos en el receptor de imágenes, de tal forma que se realice la restauración de forma directa y el análisis sea mucho mas sencillo.

Referencias

- [1] P. Perona y J. MALIK, «Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic,» *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 12, nº 7, p. 11, 1990.
- [2] M. Wielgus, «Perona-Malik equation and its numerical properties,» Instituto de Matemática Aplicada y Mecánica, Varsovia , 2010.
- [3] G. Aubert y P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing*, Maryland: Springer, 2006.
- [4] L. Rudin, «Images, Numerical Analysis of Singularities and Shock Filters,» PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1987.
- [5] . H. Bruckner y G. Kramer, «Iterations of a non-linear transformation for enhancement of digital images,» *Pattern Recognition*, vol. 7, nº 1-2, pp. 53-58, 1975.
- [6] R. Gerig, O. Kubler y F. Jolesz, «Nonlinear anisotropic filtering,» *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 11, nº 2, pp. 221-232, 1992.
- [7] F. Catté, P. Lions, J. Morel y T. Coll, «Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion,» *SIAM journal*, vol. 29, pp. 182-193, 1992.
- [8] . J. Weickert, . B. Romeny y M. Viergever, «Efficiente and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering,» *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, nº 3, pp. 398-410, 1998.
- [9] L. Mescheder y D. Lorenz, «An Extended Perona–Malik Model Based on Probabilistic Models,» *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 60, nº 10851, pp. 128-144, 2017.
- [10] K. Zhang, «Existence of infinitely many solutions for the one-dimensional Perona-Malik model,» *Calculus of Variations*, vol. 26, nº DOI 10.1007/s00526-005-0363-4, pp. 171-199, 2006.

- [11] C. Platero, G. Asensio y J. Moreno, «Combinación de la Difusión Isotrópica y Anisotrópica en el procesamiento de Imágenes,» *Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial*, vol. 3, nº 2812, 2004.
- [12] P. Yifel, P. Siarry, J. Zhou y Y. Liu, «In this paper, a set of fractional partial differential equations based on fractional total variation,» *Science China Information Sciences*, vol. 57, nº 7, pp. 185-203, 2014.
- [13] A. Marquina y S. Osher, «Explicit Algorithms for a New Time Dependent Model Based on Level Set Motion for Nonlinear Deblurring and Noise Removal,» *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 22, nº 2, pp. 387-405, 2015.
- [14] M. Borroto y M. Gonzalez, «New estimation method of the contrast parameter for the Perona–Malik diffusion equation,» *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering.*, vol. 4, nº 31, pp. 238-252, 2014.
- [15] F. Karami, L. Ziad y K. Sadik, «A splitting algorithm for a novel regularization of Perona–Malik and application to image restoration,» *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 19, nº 80, pp. 1-9, 2017.
- [16] K. J. Rodríguez Oliva y R. Orozco Morales, «Suavizado de imágenes de microscopía celular mediante el uso de técnicas de filtrado morfológico,» *Revista Cubana de Ciencias Informáticas* , vol. 11, nº 1, 2017.
- [17] N. Bahamón Cortés, «Restauración de imágenes mediante un modelo matemático basado en las técnicas de detección de bordes y propagación de texturas,» Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2011.
- [18] J. G. Triana, L. C. Romero y D. G. Roldán, «Restauración Digital de Imágenes Mediante Ecuaciones Diferenciales Parciales.,» *UDCA Actualidad y Divulgación Científica* , vol. 16, nº 2, pp. 511-518, 2013.
- [19] W. Burger y M. J. Burge, *Principles of Digital Image*, Inglaterra: Springer-Verlag, 2009.
- [20] J. Giacomantone y A. De Giusti, «Detección de áreas de interés bajo la hipótesis de relación espacial de voxels activados en FMRI,» de *XX Congreso Argentino de Ciencias de la Computación (Buenos Aires, 2014)*, La Plata, 2014.

- [21] M. Black, G. Shapiro y . D. H. Marimont, «Robust anisotropic diffusion,» *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, nº 3, pp. 421-432, 1998.
- [22] S. Martínez Orna, «Adecuación de técnicas de restauración avanzada de imágenes para dispositivos móviles,» Escuela de Ingenierías Industriales , Valladolid, 2012.
- [23] J. Sanguino, C. Platero, P. Gonzales , J. Poncela y M. Tovar, «Aplicaciones de una familia de difusión anisotrópica sobre la evolución de algunos contornos activos,» de *XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones*, Sevilla, 2007.
- [24] V. Tsurkov, «An analytical model of edge protection under noise suppression by anisotropic diffusion,» *Journal of Computer and Systems Sciences International*, vol. 39, nº 3, pp. 437-440, 2000.
- [25] A. Afaro Alfaro y I. Sspirán Mendoza, «Diseño de un algoritmo de segmentación de imágenes aplicando el funcional de Mumford-Shah para mejorar el desempeño de los algoritmos clásicos.,» *Universidad Nacional de Trujillo*, vol. Tesis de grado, pp. 33-55, 2006.
- [26] A. Fernandez Sarría, J. Recio Recio y L. A. Ruiz Fernández, «Análisis de Imágenes Mediante Texturas: Aplicación a la Clasificación de Unidades de Vegetación,» *Revista Internacional de Ciencia y Tecnología de la Información Geográfica*, vol. 3, pp. 143-159, 2003.
- [27] K. Laws, «Goal-directed texture image segmentation,» *Applications of Artificial Intelligence II*, vol. 548, pp. 19-26, 1985.
- [28] C. Platero, G. Asensio y J. Moreno, «Combinación de la difusión isotrópica y anisotrópica en el procesamiento de imágenes.,» *Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial*, vol. 3, nº 28012, pp. 1-6, 2004.
- [29] J. Koenderin, «The structure of images,» *Biological Cybernetics*, vol. 50, nº 5, p. 363–370, 1984.
- [30] J. Weickert, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, Copenhagen: Teubner Stuttgart , 1998.
- [31] D. Pulido, *Sobre el modelo de difusión anisotrópica de Perona-Malik*, Bogotá: Unal, 2018.

- [32] G. Aubert y P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing*, New York: Springer, 2002.
- [33] D. Zill, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, México: International Thomson, 1997.
- [34] N. Perez , «Fundamentos del Tratamiento de Imágenes. Visión por Computador,» 3 Abril 1995. [En línea]. Available: <http://www6.uniovi.es/vision/intro/>. [Último acceso: 20 Noviembre 2019].
- [35] F. Palomares, Giménez, J. A. Monsoriu, Martínez y E. Alemany, «Aplicación de la convolución de matrices al filtrado de imágenes,» *Modelling in Science Education and Learning*, vol. 9, nº 2, pp. 97-108, 2016.
- [36] J. Alcalá Mellado y G. Navarro Otorola, *Una introducción a la imagen digital y su tratamiento*, Cuenca: MIDECIANT, 2008.
- [37] J. Canny, «A computational approach to edge detection,» *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 8, nº 6, pp. 679 - 698, 1986.
- [38] C. Tsotsios y M. Petrou , «On the choice of the parameters for anisotropic diffusion in image processing,» *Pattern Recognition*, vol. 46, nº 46, p. 1369–1381, 2013.
- [39] S. Opozda y A. Sochan , «The survey of subjective and objective methods for quality assessment of 2D and 3D images,» *Theoretical and Applied Informatics*, vol. 26, nº 12, pp. 39-67, 2014.
- [40] A. Mittal, A. Krishna y A. Conrad, «No-Reference Image Quality Assessment in the Spatial Domain,» *IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING*, vol. 21, nº 12, pp. 4695-4708, 2012.
- [41] N. Venkatanath , D. Praneeth y C. Maruthi , «BLIND IMAGE QUALITY EVALUATION USING PERCEPTION BASED FEATURES,» *Image Understanding Group, Uurmi Systems Pvt. Ltd., Hyderabad*, pp. 1-6, 2015.
- [42] S. Kichenassamy, «The Perona-Malik paradox.,» *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 57, nº 5, pp. 1328-1342, 1997.

- [43] J. Tiirola, «Gamma-convergence of certain modified perona–malik Functionals,» *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 23, nº DOI: 10.1051, p. 1499–1513, 2017.
- [44] A. Taberero, «Representación de imágenes mediante funciones de Gabor. Modelado de sistema visual y análisis de texturas.,» Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 1992.
- [45] J. Weickert, B. H. Romeny y a. M. Viergever, «Efficiente and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering,» *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, nº 3, pp. 398-410, 1998.
- [46] A. Bosnjak, G. Montilla, H. Villegas, R. Villegas y I. Jara, «Estudio Comparativos de Varios Metodos de Segmentación Dinamica 3D para extracción de estructuras del Cerebro en volúmenes de MRI,» de *IV Latin American Congress en Biomedical Engineering* , Margarita Island, Venezuela, 2007.