



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

Unidad didáctica con diferenciación para
alumnos con altas capacidades: Trigonometría
para 4º de ESO

Presentado por: Daniel Comino Royuela
Tipo de trabajo: Propuesta de Intervención
Director/a: Francisco Soler Flores

Ciudad: Barcelona
Fecha: 01 de junio de 2017

Resumen

A diferencia de la gran cantidad de metodologías y la amplia aceptación y normalización de los planes educativos y medidas de atención diferenciadas para alumnos con necesidades educativas especiales (NEE), dentro de estas existen relativamente pocos estudios y estrategias de adaptación curricular para los alumnos con altas capacidades intelectuales en las escuelas actuales.

Esta tipología de alumnos presentan unas características comunes y dificultades asociadas a sus capacidades cognitivas que deben ser tratadas dentro del marco legislativo de atención a la diversidad, evitando de este modo el fracaso escolar derivado de la errónea gestión de dichas necesidades.

Así pues, el objetivo principal de este trabajo ha sido presentar una propuesta didáctica para la materia de trigonometría de 4º de ESO, basada en una metodología de enseñanza que recoja las necesidades de estos alumnos. Para ello nos hemos centrado en el análisis de varios puntos del marco teórico existente, entre los cuales se puede destacar: las dificultades cognitivas derivadas del estudio de la trigonometría, los conocimientos previos necesarios para la misma, la problemática asociada a las altas capacidades, su detección y diagnóstico, así como las respuestas educativas planteadas en la actualidad.

De esta investigación finalmente se ha diseñado una unidad didáctica diferenciada que fortalece los siguientes puntos: (1) un refuerzo previo de los conceptos base fundamentales de la trigonometría, (2) clases dinámicas que potencien la motivación del alumno mediante la metodología activa-participativa, (3) ajustes de ampliación, profundización y desarrollo del currículo ordinario que no se centren en aumentar la cantidad de ejercicios a realizar ni de adelantar contenidos de cursos posteriores, sino de proveer los aprendizajes de un mayor grado de riqueza y profundidad, (4) propiciar la colaboración de estudiantes con distintos grados de habilidad para obligar a la valoración de alternativas y aceptación de los distintos puntos de vista de los compañeros, y (5) uso de las TIC como medio para aumentar la motivación conjunta.

Palabras clave: trigonometría, altas capacidades, superdotados, diferenciación curricular, disincronía.

Abstract

Unlike the large number of methodologies and the wide acceptance and normalization of educational plans and differentiated measures of attention for students with special educational needs (SEN), within these there are relatively few studies and strategies of curricular adaptation for students with high intellectual abilities in today's schools.

This typology of students presents common characteristics and difficulties associated with their cognitive capacities that must be addressed within the legislative framework of attention to diversity, avoiding thereby school failure due to the erroneous management of such needs.

So, the main objective of this work has been to present a didactic proposal for the subject of trigonometry of 4º ESO, based on a teaching methodology that meets the needs of these students. For this we have focused on the analysis of several points of the existing theoretical framework, among which we can highlight: the cognitive difficulties derived from the study of trigonometry, previous knowledge necessary for it, the problems associated with high capacities, detection and diagnosis, as well as the educative answers proposed nowadays.

From this research, a differentiated didactic unit has been designed that strengthens the following points: (1) a previous reinforcement of the basic concepts of trigonometry; (2) dynamic classes that enhance student motivation through active-participatory methodology; (3) adjustments for the expansion, deepening and development of the ordinary curriculum that do not focus on increasing the number of exercises to be carried out or on advancing contents of superior grades, but on providing the lessons of a greater level of wealth and depth, (4) to foster the collaboration between students with different levels of ability to force the study of alternatives and acceptance of the different points of view of their peers, and (5) use of ICT as a way to increase the group motivation.

Keywords: trigonometry, high capacities, gifted, curricular differentiation, dyssynchrony.

Índice

1	INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	3
1.1	Presentación y justificación	3
1.2	Objetivos.....	4
1.3	Fundamentación de la Metodología	5
2	MARCO TEÓRICO	6
2.1	Trigonometría.....	6
2.1.1	Marco legislativo. Contenidos de trigonometría en 4º de ESO.....	6
2.1.2	Razón de ser y tipología de problemas.....	9
2.1.3	Procesos cognitivos	13
2.1.4	Conocimientos previos.....	15
2.1.5	Dificultades en el aprendizaje de la trigonometría.....	16
2.2	Altas Capacidades.....	18
2.2.1	Marco legislativo.....	18
2.2.2	Tipología y caracterización de alumnos con altas capacidades	21
2.2.3	Problemática asociada a las altas capacidades	24
2.2.4	Detección y diagnóstico de las altas capacidades.....	27
2.2.5	Respuestas educativas para alumnos con altas capacidades.....	31
2.2.6	El Plan Individualizado.....	32
3	METODOLOGÍA	33
3.1	Metodología aplicada.....	33
3.2	Propuesta Didáctica	36
3.2.1	Introducción y justificación.....	36
3.2.2	Destinatarios.....	37
3.2.3	Objetivos, criterios de evaluación, estándares evaluables y competencias.....	37
3.2.4	Contenidos	42
3.2.5	Metodología.....	43
3.2.6	Temporalización y desarrollo de las sesiones.....	45
3.2.7	Recursos.....	53
3.2.8	Criterios de evaluación.....	54
3.2.9	Evaluación de la unidad	56
4	CONCLUSIONES	57
5	LIMITACIONES DEL TRABAJO	60
6	LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS	61
7	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	62
8	ANEXOS.....	66
8.1	Anexo 1. Cuestionario para la detección de altas capacidades (9-14 años). Pérez (2007).....	66
8.2	Anexo 2. Modelo de Plan Individualizado.	68
8.3	Anexo 3. Ejercicios de las sesiones de la propuesta didáctica.	70

Índice de Tablas

Tabla 1. Contenidos comunes i específicos para Trigonometría según el Real Decreto 1105/2014	7
Tabla 2. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para Trigonometría según el Real Decreto 1105/2014.....	8
Tabla 3. Tipología de problemas trigonométricos y su categoría (elaboración propia, 2017).....	11
Tabla 4. Niños brillantes versus niños superdotados (Acereda, 2010).....	23
Tabla 5. Comparación entre estereotipos y realidades de los alumnos (Gómez y Mir, 2011)	26
Tabla 6. Ventajas y limitaciones de procedimientos de identificación más usuales (Domínguez y Pérez, 1999).....	30
Tabla 7. Objetivos de la U.D. (elaboración propia, 2017)	38
Tabla 8. Criterios de Evaluación y Estándares Eval. de la U.D. (elaboración propia, 2017)	39
Tabla 9. Contenidos de la U.D. (elaboración propia, 2017)	42
Tabla 11. Baremo de puntuación del dossier de la U.D. (elaboración propia, 2017)	55
Tabla 12. Baremo de puntuación de la actitud en la U.D. (elaboración propia, 2017)	56

1 INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Presentación y justificación

Actualmente en nuestra sociedad se tiene muy presente a los alumnos con necesidades educativas especiales (NEE) cuyas dificultades a la hora de comprender la materia impartida les impide seguir el mismo ritmo que el resto de sus compañeros de clase. A pesar de ello parece que se obvia o no se encuentran normalizadas al mismo nivel la atención hacia los niños con altas capacidades intelectuales.

De esta forma existen y están ampliamente implantados los planes educativos diferenciados y las medidas de atención destinadas a los alumnos que se quedan por debajo en sus capacidades respecto a la campana de Gauss, pero no hay tantas estrategias o adaptaciones curriculares para los que están por encima de la media. Una de las causas puede ser debida a la extensa consideración de que su elevada condición intelectual les capacita para hacer frente a las exigencias, primero, del sistema escolar, y segundo, de la sociedad, lo que no les hace valedores de la etiqueta de alumnos con NEE (Domínguez y Pérez, 1999).

Debido a este hecho es bastante común que estas mentes no acaben alcanzando todo su potencial. Esto se ve respaldado por varios estudios que afirman que alrededor del 70% del alumnado con estas características tienen un rendimiento escolar bajo, y entre un 35-50% llegan incluso al fracaso escolar (Martín et al., 2000).

Así pues la implantación de medidas de diagnóstico, identificación y el desarrollo de adaptaciones adecuadas para este alumnado es una tarea necesaria a llevar a cabo en los centros escolares, siempre teniendo en cuenta la normativa vigente (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa) que los reconoce como alumnos con NEE en el ámbito de la atención a la diversidad, y evitando de este modo el fracaso escolar derivado de la errónea gestión de dichas necesidades.

Dicho esto, en este trabajo se ha intentado colaborar con esta mejora en el proceso educativo de un área específica de las matemáticas: la Trigonometría. De este modo llevaremos a cabo una unidad didáctica de dicho área para 4º de la ESO con diferenciación para los alumnos con altas capacidades intelectuales. En lo referente al contenido del trabajo, la trigonometría representa una de las partes del temario que más problemas de comprensión supone por parte de los alumnos. Esta parte de la asignatura obliga al alumno por otra parte a movilizar conocimientos previamente

adquiridos ya que es el nexo de unión con conceptos vistos en cursos anteriores, como la geometría, el teorema de Pitágoras o el teorema de Tales. Esto, junto con la utilización del lenguaje matemático del álgebra así como su carácter abstracto suele traducirse en dificultad a la hora de su asimilación. Es por ello que a la hora de diseñar la unidad didáctica tendremos que tener en cuenta estas dificultades y proponer metodologías de interés para los alumnos que ataquen estos posibles bloques que la asignatura supone.

De este modo, para la elaboración de la propuesta didáctica hemos llevado a cabo un trabajo de investigación sobre la razón de ser y la tipología de problemas a las que nos enfrentamos, las principales dificultades de aprendizaje, y finalmente sobre los recursos que más se ajusten a las necesidades de este tipo de alumnado de cara a facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

1.2 Objetivos

El objetivo principal del trabajo será presentar y fundamentar una propuesta de unidad didáctica para el temario de Trigonometría del curso de 4º de ESO que recoja una adaptación diferenciada para alumnos con altas capacidades. Para ello nos valdremos de varios objetivos específicos:

- Averiguar y exponer las principales dificultades de aprendizaje y estudio de los conceptos trigonométricos, y con ello saber propiciar la correcta construcción del pensamiento matemático-geométrico en los alumnos.
- Averiguar y exponer las características y principales problemáticas asociadas a los alumnos con altas capacidades.
- Investigar las distintas formas de detección y diagnóstico de las altas capacidades.
- Profundizar en el estudio de las propuestas existentes de respuestas educativas para alumnos con altas capacidades.
- Exponer las metodologías y estrategias de aprendizaje más adecuadas ante los retos añadidos que presentan los alumnos con altas capacidades.

1.3 Fundamentación de la Metodología

La metodología que se ha llevado a cabo en la elaboración de este trabajo, y con ello la realización de la unidad didáctica se ha centrado principalmente en la investigación bibliográfica de los principales aspectos tanto del aprendizaje de la trigonometría así como de los estudios existentes sobre los alumnos con altas capacidades intelectuales (búsqueda de información en libros, revistas, artículos, papers, etc). Para ser más concretos se ha dividido el marco teórico en las siguientes fases:

- 1- **Trigonometría.** Investigación bibliográfica sobre: marco legislativo, razón de ser, tipología de problemas, procesos cognitivos, conocimientos previos necesarios y dificultades de aprendizaje.
- 2- **Altas capacidades.** Investigación bibliográfica sobre: marco legislativo, tipología y caracterización, problemática asociada, detección y diagnóstico, respuesta educativa y plan individualizado.

De todas formas si bien es cierto que la base teórica del trabajo se sustentará sobre estas investigaciones bibliográficas también hay que apuntar que existe una base de trabajo de campo apoyada sobre las prácticas asociadas al Master del Profesorado que el autor de este trabajo llevó a cabo entre los meses de enero a mayo de 2017 en el colegio “Verge del Roser” del municipio de Vallirana, en la comarca del Baix Llobregat, provincia de Barcelona.

En dicho tiempo el autor llevó a cabo el practicum de observación así como el practicum de intervención I y II en el cual desarrollo e implanto una unidad didáctica de trigonometría para el grupo de alumnos de 4º de ESO (sin adaptación a altas capacidades). Este periodo de tiempo le valió para observar y constatar in situ las dificultades de los alumnos a la hora de atacar la asignatura, aprendizaje que ha servido como base a la hora de elaborar la propuesta didáctica de este trabajo.

2 MARCO TEÓRICO

En este apartado desarrollaremos las bases teóricas que sustentan el presente trabajo. Como ya se ha comentado en el apartado 1.3 anterior, dividiremos este punto en dos partes diferenciadas, por un lado la correspondiente al objeto matemático, en este caso trigonometría de 4º de ESO, y por otro la información relacionada con el estudio de las Altas Capacidades.

2.1 Trigonometría

2.1.1 Marco legislativo. Contenidos de trigonometría en 4º de ESO

En Cataluña, a través del Decreto Autonómico 187/2015, de 25 de agosto, de ordenación de las enseñanzas de la educación secundaria obligatoria, con base de aplicación la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, se establecen los temarios y criterios de evaluación para las asignaturas de la ESO.

En primer lugar, si nos fijamos en la legislación estatal tenemos que el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, establece las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, a las que hace referencia la LOMCE. Se hace referencia en este Real Decreto (artículo 2), a las competencias básicas que al final de la etapa de la ESO los alumnos deberán haber adquirido. Estas competencias básicas ponen de manifiesto los aprendizajes considerados imprescindibles, desde un planteamiento orientado a la aplicación de los saberes adquiridos y se debe contribuir a ellas desde todas las áreas. Así pues tenemos las siguientes competencias básicas:

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
3. Competencia digital.
4. Aprender a aprender.
5. Competencias sociales y cívicas.
6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
7. Conciencia y expresiones culturales.

De igual forma, tanto los objetivos como la propia selección de los contenidos buscan asegurar el desarrollo de estas competencias, mientras que los criterios de evaluación sirven de referencia para valorar el progresivo avance en la adquisición de las mismas.

Así pues el Real Decreto también realiza una descripción detallada de los contenidos por curso o bloques de cada materia así como los criterios de evaluación. En la siguiente tabla se detallan los contenidos del bloque 1 y 3 de Geometría referidos a Trigonometría de 4º curso de la ESO para las Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

Tabla 1. Contenidos comunes i específicos para Trigonometría según el Real Decreto 1105/2014

CONTENIDO TRIGONOMETRÍA. RD 1105/2014	
Contenidos Comunes (Bloque 1)	Contenidos específicos (Bloque 3)
Planificación del proceso de resolución de problemas.	Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.
Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los ángulos.
Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos geométricos.	Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.	Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.
Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para facilitar la comprensión de propiedades geométricas.	

A continuación se enumeran los criterios de evaluación y estándares evaluables expuestos en el Real Decreto para el bloque 3 de Geometría, centrándonos en concreto en los referentes a Trigonometría:

Tabla 2. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para Trigonometría según el Real Decreto 1105/2014

BLOQUE 3 GEOMETRÍA (TRIGONOMETRÍA). RD 1105/2014	
Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.
2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.
3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

Como comentábamos al principio, a nivel autonómico en Cataluña existe el Decreto Autonómico 187/2015, de 25 de agosto, de ordenación de las enseñanzas de la educación secundaria obligatoria que establece los siguientes contenidos para Trigonometría de 4º de ESO:

- Medida de ángulos (unidades sexagesimales y en radianes).
- Razones trigonométricas.
- Resolución de triángulos rectángulos.
- Uso de programas de geometría dinámica.
- El nacimiento y primer desarrollo de la trigonometría a lo largo de la historia.
- Uso de la trigonometría para la resolución de problemas en contextos diversos.

En dicho Decreto Autonómico 187/2015, para los criterios de evaluación de los contenidos de Trigonometría en la asignatura se establecen los siguientes puntos:

- Obtener medidas indirectas en la resolución de problemas de ámbitos diversos (por ejemplo, la agrimensura y la navegación), utilizando la trigonometría y relacionarlo con los medios tecnológicos que actualmente se utilizan para hacer medidas indirectas.
- Planificar y utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, como la realización de conjeturas, su justificación y generalización, así como la comprobación, el tanteo y el contraste con diversas formas de razonamiento a lo largo de la historia de las matemáticas.
- Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los otros, a través del trabajo por parejas o en grupo o bien la puesta en común con toda la clase.
- Usar relaciones entre diversas partes de las matemáticas (álgebra y geometría, números y geometría, estadística y geometría) que favorezcan el análisis de situaciones y el razonamiento.
- Expresar con precisión verbalmente y por escrito, razonamientos, relaciones cuantitativas e informaciones que incorporen elementos matemáticos, simbólicos o gráficos, valorando la utilidad del lenguaje matemático y su evolución a lo largo de la historia.
- Seleccionar y usar tecnologías diversas para gestionar y mostrar información, y visualizar y estructurar ideas o procesos matemáticos.

2.1.2 Razón de ser y tipología de problemas

De cara a tener una perspectiva completa de la razón de ser de los conceptos involucrados en el temario de trigonometría tendremos que responder a las preguntas ¿para qué sirve la trigonometría?, ¿en qué situaciones se hace útil?, ¿qué fenómenos la hacen presente?

El estudio de estos fenómenos cobran mayor sentido si atendemos a la descripción que se da en la LOMCE de la competencia matemática, exponiéndola como:

Esta competencia implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto.

De esta misma manera, si nos fijamos en la definición que daba la anterior Ley Orgánica de la Educación (LOE), de 3 de mayo del 2006, tenemos que se expresa de la siguiente forma:

Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella.

En definitiva, la posibilidad real de utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Por ello, su desarrollo en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

Basándonos pues en esta postulación de la competencia matemática como la capacidad del razonamiento matemático como herramienta que nos permite resolver problemas reales, describiremos algunos de los fenómenos en los que la trigonometría se hace relevante:

- Fenómenos relacionados con aeronáutica, navegación, astronomía, astronomía de posición, cálculo de trayectorias y rumbos.
- Fenómenos de medida indirecta o medida de distancias inaccesibles, que pueden aparecer en agrimensura, arquitectura, ingenierías, cartografía, etc.
- Fenómenos que impliquen el cálculo de áreas de figuras resolubles por triangulación mediante la topografía, aplicable de nuevo en agrimensura, ingenierías, etc.

Así pues en la unidad didáctica que desarrollaremos en este trabajo se plantearán problemas que permitan determinar medidas de lados y ángulos sobre triángulos rectángulos, y no rectángulos, contextualizados en situaciones de la vida cotidiana, para reforzar la adquisición del concepto de razón trigonométrica (seno, coseno, tangente). Además se realizarán problemas que tengan en cuenta sus orígenes y razón de ser. Dado que calcular, por ejemplo, la distancia de la Tierra a la Luna es complicado en este nivel, nos centraremos en hacerles notar que la mayoría de las distancias por las que se pregunta en los problemas son inaccesibles y no sería posible obtenerlas de otro modo.

Estos problemas no consistirán simplemente en aplicar las técnicas, sino que en ellos los alumnos deberán comprobar, demostrar o justificar dichas técnicas. A continuación presentamos los tipos de problemas que se llevarán a cabo:

Tabla 3. Tipología de problemas trigonométricos y su categoría (elaboración propia, 2017).

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS	CATEGORÍA
Tipología de problemas 1: <i>Calcular un lado de un triángulo rectángulo, conocidos otro lado y un ángulo.</i>	1a.- Se conoce un ángulo agudo y el cateto opuesto y se desea conocer la hipotenusa.
	1a'.- Se conoce un ángulo agudo y la hipotenusa y se desea conocer el cateto opuesto a dicho ángulo.
	1b.- Se conoce un ángulo agudo y el cateto contiguo y se desea conocer la hipotenusa.
	1b'.- Se conoce un ángulo agudo y la hipotenusa y se desea conocer el cateto contiguo a dicho ángulo.
Tipología de problemas 2: <i>Calcular un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, conocidos dos lados.</i>	1c.- Se conoce un ángulo agudo y un cateto y se desea conocer el otro cateto.
	2a.- Se conocen la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo a calcular.
	2b.- Se conocen la hipotenusa y el cateto contiguo al ángulo a calcular.
Tipología de problemas 3: <i>Triángulos no rectángulos</i>	2c.- Se conocen los dos catetos.
	3a.- El triángulo se puede descomponer en dos triángulos rectángulos de los cuales uno contiene al otro.
	3b.- El triángulo se puede descomponer en dos triángulos rectángulos los cuales no se contienen entre sí.

A continuación se muestran varios ejemplos de los problemas a resolver para cada tipología.

- **Tipología de problemas 1.**

1a) Conocido un ángulo agudo y la hipotenusa, calcular el cateto opuesto.

- Un bailarín gira sobre su propia pierna mientras mantiene la otra con una inclinación de 35° . ¿Cuál será el radio de la circunferencia que describe si sus piernas miden 1 m?

1b) Conocido un ángulo agudo y la hipotenusa, calcular el cateto contiguo.

- Una escalera de bomberos de 15 m de longitud se ha fijado en un punto de una calle entre dos edificios. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 33° y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de 27° . Calcula la anchura de la calle.

1c) Conocido un ángulo agudo y un cateto, calcular el otro cateto.

- Un turista se encuentra en el margen de un río, y al otro lado del río hay una torre. Si el turista sabe que el río mide 50 m de ancho y para ver la punta de la torre con unos prismáticos necesita 40° de inclinación sobre la horizontal ¿Qué altura tiene la torre?

- **Tipología de problemas 2.**

2a) Conocida la hipotenusa y el cateto opuesto, calcula el ángulo indicado.

- Si tenemos una escalera de 7 m de longitud, ¿con que ángulo debemos colocarla para que alcance una altura de 5,5 m?

2b) Conocida la hipotenusa y el cateto contiguo, calcula el ángulo indicado.

- Un globo atado a una cuerda de 15 m es desviado por una brisa de aire 5 m de su proyección vertical ¿Qué ángulo forma la cuerda con la horizontal?

2c) Conocidos los dos catetos, calcula el ángulo indicado.

- ¿Qué ángulo proyectan los rayos solares contra el suelo cuando una torre de 50 m proyecta una sombra de 85 m?

- **Tipología de problemas 3.**

En esta tipología se procederá a descomponer los triángulos en dos triángulos rectángulos, resolviéndolos normalmente mediante un sistema de ecuaciones.

3a) El triángulo se puede descomponer en dos triángulos rectángulos de los cuales uno contiene al otro.

- Desde donde nos encontramos la visual a la punta más elevada de un faro es de 56° con la horizontal. Si nos alejamos 30 m la visual ahora pasa a ser de 34° . ¿Cuál es la altura del faro?

3b) El triángulo se puede descomponer en dos triángulos rectángulos los cuales no se contienen entre sí.

- Tenemos dos pueblos, A y B, que están separados por una montaña. Desde el pueblo A sale un teleférico con un ángulo de 21° que sube hasta la cima de la montaña y vuelve a bajar hasta el pueblo B. Para construirlo necesitaron 710 m de cable del pueblo A a la cima, y 520 m de cable de la cima al pueblo B (cables totalmente tensados). Calcula la distancia entre los dos pueblos y el ángulo de llegada del teleférico al pueblo B.

2.1.3 Procesos cognitivos

A continuación intentaremos ahondar en los aspectos fundamentales que influyen en la impartición y aprendizaje de la asignatura de trigonometría en 4º de la ESO. Para ello analizaremos los procesos cognitivos que se desarrollan en los alumnos, los cuales no hay que olvidar que se encuentran en una fase de sus vidas en la que se producen múltiples cambios: físicos, sociales, emocionales, cognitivos, etc.

Dichos cambios dan lugar a diferentes desarrollos que se van produciendo en el adolescente de forma paralela, como pueden ser el desarrollo físico (hormonal),

desarrollo cerebral (mielinización y poda sináptica), de la personalidad (autoconcepto y autoestima) y socio-emocional. En nuestro caso nos centraremos en el desarrollo del pensamiento.

En estas etapas el adolescente experimentará cambios en la forma de pensar y adquirirá nuevas habilidades cognitivas como la atención, el lenguaje, la memoria, así como el comienzo del pensamiento social, esto es, aspectos como la identidad, la empatía o la moralidad. Además de esto se empiezan a desarrollar procesos metacognitivos así como las denominadas funciones ejecutoras (flexibilidad, planificación, actualización, inhibición y toma de decisiones). Algunos de estos cambios fundamentales serán:

- Capacidad de formular hipótesis, utilización del método hipotético-deductivo de cara a evaluar alternativas.
- Capacidad para concebir lo posible, entendiendo la realidad como una opción más.
- Capacidad de pensar en abstracto y despegarse de la realidad.
- Uso de la combinatoria, teniendo en cuenta todos los elementos.

Así mismo si nos centramos en el estudio de la geometría y la trigonometría Torregrosa y Callejo (2011) distinguen tres clases de procesos cognitivos en la resolución de problemas geométricos.

1. En primer lugar tenemos el **Proceso de Visualización**, que se traduce en el proceso mental de llevar a cabo una representación espacialmente, favoreciendo de este modo una mejor visualización y representación de resultados de cara a poder obtener datos a partir de ella.
2. Después tenemos el **Proceso de Construcción**. Con este proceso se crea un modelo mental sobre el que se llevaran a cabo acciones y nos darán como consecuencia unos resultados específicos.
3. Por último nos encontramos con el **Proceso de Razonamiento**, que consiste en la capacidad cognitiva de poder extender el conocimiento a los demás, para su demostración y explicación.

De cara a llegar a adquirir la competencia en geometría y trigonometría Torregrosa y Callejo (2011) inciden en la necesidad de que estos tres procesos cognitivos se trabajen de manera conjunta.

Sobre estos procesos podemos puntualizar que la visualización contribuye a la organización de la información de manera esquemática y es factor importante de la globalización, siendo además un elemento que guía el desarrollo analítico de la solución (Fishbein, 1987, citado en Torregrosa y Callejo, 2011, p.47). Podríamos dar otra definición de la visualización como la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual o viceversa (Herskowitz et al., 1996, citado en Torregrosa y Callejo, 2011, p.47).

A parte de esto podemos distinguir dos tipos de procesos de razonamiento (Torregrosa y Callejo, 2011):

- Proceso discursivo natural: es espontáneo y se produce a través de la descripción, explicación y argumentación.
- Proceso discursivo teórico: se produce a través de la deducción. Necesita utilizar en su desarrollo solamente teoremas, axiomas o definiciones para llegar a la conclusión.

2.1.4 Conocimientos previos

A la hora de afrontar la unidad didáctica propuesta será necesario que los alumnos posean una serie de conocimientos previos:

- Que es un triángulo, que datos necesitamos para construir uno.
- Notación para representar triángulos, que datos necesitamos para construirlos.
- Que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° .
- Semejanza de triángulos. Teorema de Tales.
- Teorema de Pitágoras.
- Ecuaciones y sistemas de ecuaciones, para saber despejar las incógnitas.
- Saber operar con números reales, entre ellos los fraccionarios.

Todos estos conocimientos se han visto y se han trabajado en este curso o en cursos anteriores.

El concepto de ángulo se viene trabajando desde Primaria y se continúa posteriormente con ello en Secundaria. En 1º de ESO se trabajan sus propiedades y las operaciones con ellos. En 2º también se estudian las medidas de los ángulos.

La semejanza de triángulos ya se estudia en 2º de ESO y el teorema de Tales y el de Pitágoras se aplican en 3º de ESO para resolver problemas físicos y reales. Además en 4º de ESO se vuelven a repasar semejanzas de triángulos antes de entrar en el temario de Trigonometría.

Respecto a las ecuaciones estas se introducen en 1º de ESO y se siguen trabajando en el resto de cursos. Ya en 3º de ESO aparecen las ecuaciones de 2º grado así como los sistemas de ecuaciones.

Por último tenemos que desde Primaria ya se vienen trabajando las fracciones y en Secundaria se continúa operando con ellas. En 4º de ESO es cuando se acaba de estudiar la clasificación del resto de números reales.

Así pues, cuando se llega en 4º de ESO al tema de Trigonometría todos estos conceptos se presuponen conocidos. A pesar de todo siempre será conveniente al principio del tema llevar a cabo algunas actividades específicas a estos puntos para asegurar que realmente tienen asimilados dichos conocimientos.

2.1.5 Dificultades en el aprendizaje de la trigonometría

En el proceso de enseñanza-aprendizaje los errores y dificultades juegan un papel fundamental. Para poder llevar a cabo un correcto planteamiento a la hora de diseñar la unidad didáctica de trigonometría previamente deberemos identificar los posibles conflictos cognitivos que pueden llegar a frenar el aprendizaje de los conceptos expuestos. ¿Qué tipología de dificultades nos podemos llegar a encontrar?:

- Nos podemos encontrar con problemas de asimilación de conceptos por parte de los alumnos, bien por deficiencias en los conceptos previos necesarios para este tema, o bien por la propia dificultad del contenido. En cualquier caso, estos errores nos dan un indicativo de donde reside el problema. Así pues, una vez diagnosticado el origen del error se puede afrontar focalizándonos en esa parte específica del contenido. Siempre se debe intentar que el estudiante tome conciencia de la dificultad y de donde proviene de cara a auto regular su propio proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Otra posibilidad es que el error venga dado por una mala praxis docente, en cuyo caso el propio error ejercerá de síntoma para detectar la necesidad de cambio en la metodología utilizada. Si esto ocurriese el profesor deberá

intentar abordar el problema desde otra perspectiva, lo que deriva en una depuración del proceso de enseñanza-aprendizaje.

A continuación enumeramos una serie de dificultades que nos podemos llegar a encontrar a la hora de implantar la unidad didáctica de trigonometría en el aula:

1. Confundir los elementos de un triángulo (catetos, hipotenusa, alturas).
2. Confundir los distintos tipos de triángulos.
3. Creer que un triángulo solo tiene una base y una altura.
4. Dificultad en el paso de grados a sistema decimal.
5. Confusión entre grados expresados con decimales y grados expresados en minutos y segundos (ej. $42,3^\circ \neq 42^\circ 30'$).
6. Dificultad a la hora de aplicar las razones trigonométricas (ej. confundir el seno con el coseno).
7. Dificultad a la hora de aplicar las inversas de las razones trigonométricas (ej. confundir el arcotangente con la propia tangente)
8. Intentar calcular razones trigonométricas de ángulos en triángulos no rectángulos.
9. No recordar que los valores absolutos del seno y del coseno son siempre ≤ 1 .
10. No considerar que las razones trigonométricas van siempre asociadas a un ángulo (ej. $\text{sen } \alpha = 0,5 \rightarrow \alpha = 0,5/\text{sen}$).
11. Modelización incorrecta debido a la comprensión errónea de los enunciados.
12. Aplicación incorrecta de las diferentes estrategias de resolución de triángulos.
13. No identificar el triángulo rectángulo en el modelo de resolución propuesto o identificarlo mal (que no sea rectángulo).
14. Resolución errónea de las ecuaciones o sistema de ecuaciones derivadas del modelo de resolución propuesto.
15. Dificultad en la conversión entre grados y radianes.
16. Utilización de la calculadora en un modo erróneo, $\text{Deg} \leftrightarrow \text{Rad}$
17. Dificultad en la aplicación de razones trigonométricas para ángulos no agudos.
18. Dificultad en la aplicación de razones trigonométricas para ángulos negativos o mayores de 360° .
19. Dificultad en el manejo algebraico de las razones trigonométricas, relaciones y formulas asociadas.
20. No comprobar a posteriori la adecuación de la solución del problema a la realidad.

Para cada error que se nos presente en clase debemos tener en cuenta que puede estar asociado a más de una dificultad. Por ejemplo, tenemos el siguiente error:

- A la hora de ir a calcular una de las razones trigonométricas en función de las otras mediante la relación fundamental no tener en cuenta la solución negativa.

Este error va asociado a las dificultades 18, 19, 20. De igual forma cada una de estas dificultades puede llegar a tener asociados distintos errores, por ejemplo otro error que se podría llegar a englobar dentro de la dificultad 19 sería:

- Pensar en las razones trigonométricas como lineales y llevar a cabo transformaciones del tipo: $\cos(4\alpha) = 4 \cos \alpha$.

2.2 Altas Capacidades

2.2.1 Marco legislativo

Con respecto a las Necesidades Educativas Especiales y más en concreto a las Altas Capacidades la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, que modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación establece que:

- Uno de sus objetivos esenciales es conseguir el mayor poder cualificador del sistema educativo junto a la integración en éste del máximo número posible de alumnos.
- El sistema educativo debe procurar una configuración flexible, que se adapte a las diferencias individuales de aptitudes, necesidades, intereses y ritmos de maduración de las personas para no renunciar al logro de resultados de calidad para todos.

Asimismo, a través de esta ley, se establece un marco general que permita a las Administraciones educativas garantizar una adecuada respuesta educativa a las circunstancias y necesidades que concurren en los alumnos superdotados intelectualmente. Sólo un sistema educativo de calidad, inclusivo, integrador y exigente, garantiza la igualdad de oportunidades y hace efectiva la posibilidad de que cada alumno o alumna desarrolle el máximo de sus potencialidades.

En su artículo 1 se enumeran los principios de calidad del sistema educativo. Uno de los principios establecidos es la equidad, que garantiza una igualdad de oportunidades de calidad, para el pleno desarrollo de la personalidad a través de la educación, en el respeto a los principios democráticos y a los derechos y libertades fundamentales. Otro de los principios es la flexibilidad, para adecuar su estructura y su organización a las diversas aptitudes, intereses, expectativas y personalidad de los alumnos.

En su artículo 2.2.a) se reconoce a los alumnos el derecho básico a recibir una formación integral que contribuya al desarrollo de su personalidad.

De todas formas es en su artículo 57, que modifica el anterior artículo 71 de la LOE, donde se pone especial atención a los alumnos con Necesidades Educativas Especiales, quedando redactado de la siguiente forma:

1. Las Administraciones educativas dispondrán los medios necesarios para que todo el alumnado alcance el máximo desarrollo personal, intelectual, social y emocional, así como los objetivos establecidos con carácter general en la presente Ley. Las Administraciones educativas podrán establecer planes de centros prioritarios para apoyar especialmente a los centros que escolaricen alumnado en situación de desventaja social.
2. Corresponde a las Administraciones educativas asegurar los recursos necesarios para que los alumnos y alumnas que requieran una atención educativa diferente a la ordinaria, por presentar necesidades educativas especiales, por dificultades específicas de aprendizaje, TDAH, por sus altas capacidades intelectuales, por haberse incorporado tarde al sistema educativo, o por condiciones personales o de historia escolar, puedan alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales y, en todo caso, los objetivos establecidos con carácter general para todo el alumnado.

Así como el artículo 58, que modifica el anterior artículo 76 de la LOE, en el cual se establece:

- Corresponde a las Administraciones educativas adoptar las medidas necesarias para identificar al alumnado con altas capacidades intelectuales y valorar de forma temprana sus necesidades. Asimismo, les corresponde adoptar planes de actuación, así como programas de enriquecimiento curricular adecuados a dichas necesidades, que permitan al alumnado desarrollar al máximo sus capacidades.

En Cataluña, a través del Decreto Autonómico 187/2015, de 25 de agosto, de ordenación de las enseñanzas de la educación secundaria obligatoria, con base de aplicación la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, se establece el artículo 18 en el cual se trata la Atención a la diversidad de los alumnos. De este artículo se pueden destacar los siguientes puntos:

1. La atención a la diversidad consiste en la aplicación de medidas curriculares, metodológicas, organizativas y/o psicopedagógicas que permiten personalizar la acción educativa para todos los alumnos.
2. El proyecto educativo de centro (PEC) debe incluir los criterios y los recursos que orienten la atención a la diversidad de los alumnos.
4. Las medidas de carácter general garantizan la atención y el apoyo a todo el alumnado e incluyen el conjunto de acciones de refuerzo y ampliación que cada docente prevé con el fin de ajustar la programación general del grupo a las necesidades de todos los alumnos. Esto conlleva la diversificación de los procedimientos y las actividades de aprendizaje y de evaluación, tanto desde la perspectiva organizativa como metodológica, y no suponen ninguna flexibilización ni adaptación del currículo.
5. c) Alumnos con altas capacidades y alto interés por el aprendizaje. Pueden disponer, si conviene, de medidas específicas que den respuesta a sus necesidades con relación a la ampliación y enriquecimiento curricular a lo largo de toda la etapa, así como la flexibilidad en la duración de la etapa en determinados casos debidamente motivados.

En resumen, el marco legal para la atención a los alumnos con altas capacidades consiste en:

- Atención a la diversidad. Obligatoriedad de adaptar el currículum a las necesidades de todos los alumnos.
- Currículum flexible y enriquecido a través de mecanismos de adaptación curricular.
- Posibilidad de adoptar medidas tendentes a flexibilizar el periodo de escolarización obligatoria de estos alumnos.
- Refuerzo de la orientación educativa a través de los Departamentos de Orientación y Equipos de Orientación.

2.2.2 Tipología y caracterización de alumnos con altas capacidades

Según el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (2013) en los últimos 30 años, las investigaciones han desafiado la visión largamente mantenida de la inteligencia como un concepto inmutable; ahora se entiende que la inteligencia es compleja, que hay muchas variables que inciden y, por tanto, para medirla hay que tomar en consideración muchos criterios. Estos conocimientos se han de tener presentes a la hora de establecer los procedimientos de la evaluación psicopedagógica y, en general, cuando se quiere medir la inteligencia. Aplicar solamente pruebas que midan el CI ya no es un procedimiento válido para identificar los múltiples talentos que pueden presentar los estudiantes.

De todas formas a lo largo de los años ha habido muchos intentos de definir la superdotación intelectual. El Departamento de Educación de EEUU, en 1972, en el acta Marland definen una persona dotada en altas capacidades como la persona que tenga “una actuación demostrada y/o habilidad potencial cualquiera de las siguiente áreas, en una de ellas o combinadas: habilidad intelectual general, aptitud académica específica, pensamiento creativo, habilidades sociales y liderazgo, artes visuales o representativas y habilidades psicomotrices” (Alvino et al., 1982).

Si nos fijamos en otras definiciones tenemos que según Benito (2003) existen diferentes criterios a la hora de definir la superdotación:

- Según el concepto de necesidades educativas especiales. Un niño con NEE es aquél que muestra desviaciones comparándolo con el niño promedio. Es por ello que se requieren prácticas escolares para poder aprovechar realmente todas sus capacidades ya que el modelo estandarizado no es el correcto para él.
- Según la diferenciación de conceptos. Para Renzulli, la superdotación de escuela (lo que llamamos talento académico) también se podría llamar superdotación de aprendizaje de lecciones o de realización de test. Es de fácil medición el cociente intelectual de estos alumnos (CI). La facilidad de aprendizaje de estos alumnos requiere una actuación a nivel curricular que normalmente pasa por la compactación del currículum (Renzulli y Reis, 1992) y otras técnicas de aceleración. Se concluye que los alumnos con un CI más alto que 120, pueden presentar comportamientos de superdotación y sobretodo un alto nivel de creatividad y compromiso con el trabajo.

- Según el diagnóstico clínico. Se considerará superdotación en casos de alumnos con CI por encima de 130 en uno o más test de inteligencia, memoria visual, percepción visual y desarrollo cognitivo precoz desde los 6 años de vida, alta motivación para el aprendizaje y talento. Esta sobredotación se suele manifestar en etapas que no van más allá de los 18 años.

Así pues, vemos que no existe una única definición correcta sino que partimos de una yuxtaposición de teorías. A menudo ocurre que la superdotación es confundida con otros tipos de fenómenos intelectuales que por su naturaleza pueden hacer pensar que nos encontramos ante un alumno superdotado cuando realmente no lo es. Tannenbaum (1983) enumera algunas de las acepciones al concepto:

- **Precoces:** los que tienen un desarrollo temprano inusual para su edad. La mayoría de los alumnos con altas capacidades intelectuales son precoces, pero no todos los niños precoces llegan a desarrollar capacidades excepcionales.
- **Prodigios:** son los que realizan una actividad fuera de lo común para su edad y condición. Desarrollan productos que llaman la atención en un campo específico, memoria, lenguaje, ritmo, etc. Ha habido figuras eminentes que fueron niños prodigios en su infancia: Mozart, Einstein o Picasso.
- **Genios:** hay menos unanimidad respecto a esta denominación, pero bajo este término se encontrarían sujetos con una gran capacidad intelectual y de producción, históricamente el caso más representativo sería Leonardo da Vinci. También se denominan así a los sujetos de capacidad ilimitada.
- **Talentosos:** el talento es la capacidad de rendimiento superior en un área de la conducta humana. Hay numerosas clasificaciones de tipos de talentos. DeHaan y Havighurst (1957) hablan de intelectual, creativo, científico, social, mecánico y artístico. Phenix (1964) propone: simbólico, empírico, estético, intuitivo, ético y sintético. El propio Tannenbaum (1983) prefiere hablar de: científicos, artísticos, adicionales, escasos, anómalos...
- **Alta capacidad:** se reconoce en este grupo a sujetos con alta capacidad intelectual medida a través de pruebas psicométricas. La línea de corte la establecería un CI de 125 - 130.
- **Brillantes:** sujetos que destacan en alguna capacidad en un contexto determinado.
- **Excepcionales:** sujetos que se desvían de la media.

- **Superdotado:** algunos autores reservan este término para adultos que destacan en todas las áreas del conocimiento humano.

Tabla 4. Niños brillantes versus niños superdotados (Acereda, 2010)

NIÑOS BRILLANTES	NIÑOS SUPERDOTADOS
Saben las respuestas.	Hacen preguntas.
Interesados.	Sumamente curiosos
Prestan atención.	Consiguen implicarse física y mentalmente en las tareas que son de su interés.
Trabajan duro.	A pesar de que no trabajan duro, consiguen buenas puntuaciones en las pruebas.
Contestan a las preguntas.	Preguntan a las respuestas.
Disfrutan con compañeros de su misma edad.	Prefieren adultos o niños mayores.
Buenos para la memorización.	Buenos para prever y adivinar.
Aprenden fácilmente.	Aburridos. Ya conocen las respuestas.
Escuchan bien.	Muestran fuertes opiniones y sentimientos.
Autosatisfechos	Enormemente autocríticos y perfeccionistas.

A pesar de este rango de matices sí que es cierto que existen una serie de rasgos comunes en los niños con altas capacidades intelectuales. Según los Equipos de Orientación Educativa y Psicopedagógica de la Rioja (2016), la gran mayoría responden a las siguientes características específicas:

- Aprenden con rapidez y muestran gran capacidad para retener y utilizar los conocimientos adquiridos.
- Pueden manejar una cantidad de información superior al resto de los niños y de interconexionala: relacionan ideas y conceptos con facilidad.
- Presentan un buen dominio del lenguaje, tanto en comprensión como en expresión.
- Elevada comprensión de mensajes verbales; ideas abstractas y complejas.
- Vocabulario altamente avanzado para su edad; suelen ser ricos de expresión, elaboración y fluidez.

- Destreza superior para resolver problemas. Tienden a considerar las situaciones problemáticas como un reto y utilizan estrategias sistemáticas y múltiples para encontrar una solución adecuada.
- Su comportamiento puede ser sumamente creativo y ello puede observarse por las ideas que expresan o por las actividades que realizan: dibujos, juegos experimentos...
- Tienen una extensa gama de intereses.
- Muy curiosos y preguntones.
- En ocasiones muestran un interés profundo y apasionado por un área o áreas de conocimiento y dedican todos sus esfuerzos a obtener información sobre los mismos.
- Suelen ser buenos lectores, especialmente en lecturas relacionadas con sus temas de interés.
- Se suelen describir como perfeccionistas y autocríticos. Aspiran a niveles elevados de rendimiento y son muy perseverantes en las tareas que les interesan.
- El rendimiento escolar suele ser bueno. Sólo cuando existen problemas importantes de motivación, autoestima, inadecuado nivel de expectativas... pueden llegar a una situación de bajo rendimiento escolar.

2.2.3 Problemática asociada a las altas capacidades

Ante lo anteriormente expuesto es importante mencionar el concepto de disincronía, acuñado por Terrasier (1985) y referido a una carencia de sincronización en los ritmos del desarrollo intelectual, afectivo, físico y motor. Ésta podría dividirse en dos grandes bloques: disincronía interna y disincronía social.

Mientras que la disincronía interna es aquella que tiene lugar en el ámbito del niño consigo mismo y se caracteriza por desarrollar de manera irregular varias de las funciones que acompañan a todos los seres humanos, la disincronía social hace referencia a la falta de equilibrio entre el propio niño y el entorno. Esta última es la que se produce en la escuela o en casa cuando los estímulos no satisfacen las necesidades del niño.

Igualmente la disincronía no es el único problema asociado a las características generales de los niños con altas capacidades, a continuación se enumeran varios de estos problemas expuestos por Webb (1993) debidos principalmente a sus rasgos de personalidad intrínsecos:

- Se aburren fácilmente pudiendo llegar a frustrarse.
- Odian la monotonía, las repeticiones y el currículum superficial.
- Presentan dificultad para escuchar a los demás. Tienen gran capacidad para manipular si lo desean o les conviene.
- No soportan la inactividad. Generalmente necesitan menos horas de sueño.
- Suelen adquirir demasiadas responsabilidades y actividades al mismo tiempo.
- Se resisten a ser interrumpidos cuando es de su interés. No soportan horarios programados.
- Necesitan tener éxito. Son muy sensibles a la crítica.
- Pueden “retener” fácilmente cualquier nueva situación.
- Suelen ponerse metas altas. Si no las alcanzan pueden frustrarse e interrumpir nuevos intentos.
- Intentan cambios en su entorno poco realistas.
- Tienen tendencia a cuestionarlo todo y tendencia a los retos. Pueden mostrarse intransigentes con la rigidez de ideas.
- Pueden llegar a cierto aislamiento con los iguales y a nivel social.
- Pueden utilizar su agudo sentido del humor para atacar a los demás de forma inapropiada y utilizando todos sus recursos verbales.
- Su gran imaginación puede provocar que sean vistos como “raros” por parte de los demás.

Según Gómez y Mir (2011) otro de los problemas a los que se enfrentan las personas superdotadas son los estereotipos o tópicos que la sociedad tiene de ellos debido a que se les atribuye un sentido erróneo a sus capacidades. En la siguiente tabla se muestran una serie de tópicos confrontados con aspectos reales de los alumnos superdotados.

Tabla 5. Comparación entre estereotipos y realidades de los alumnos (Gómez y Mir, 2011)

ESTEREOTIPOS	REALIDADES
Generales	
Suelen ser de clase media o alta.	Proviene de cualquier clase social.
Tienen un coeficiente intelectual alto.	El criterio psicométrico no es el único, hay que completar con modelos que identifiquen el mayor número de factores o variables de las altas capacidades, creatividad, aptitudes, etc.
Presentan superioridad física o bien están poco capacitados físicamente.	Su desarrollo físico es totalmente independiente de las altas capacidades.
La superdotación es innata.	La biología juega un papel importante en el desarrollo intelectual, pero el contexto influye en su capacidad.
Suelen ser excesivamente serios y con poco sentido del humor.	Tienen un sentido del humor más avanzado del que se espera para su edad.
Competencia escolar	
Obtienen buen rendimiento escolar. Destacan en todas las áreas.	En ocasiones pueden obtener un bajo rendimiento escolar o destacar sólo en aquellas áreas que les interesan.
Acostumbran a aburrirse.	En el aula hay que ajustar la respuesta educativa a sus capacidades.
Ordinariamente tienen una gran motivación por todos los temas.	Se interesan y destacan en los temas que despiertan su curiosidad.
Competencia social y características emocionales	
Propensos a desequilibrios emocionales psicológicos.	Tienen menos desequilibrios que otros compañeros sin altas capacidades.
Intervención	
Tienen que ser atendidos por profesionales superdotados.	No es necesario que el profesor sea superdotado. Debe ser una persona madura y especialmente debe orientar, aconsejar, proporcionar recursos e integrar más que facilitar conocimientos.
No necesitan ayuda. Pueden aprender en cualquier circunstancia y autoeducarse.	Requieren una atención educativa adecuada para evitar el fracaso escolar.

2.2.4 Detección y diagnóstico de las altas capacidades

El número y los porcentajes de alumnos identificados como superdotados o talentosos varía en función de las prácticas y los instrumentos utilizados, de todas maneras existe bastante consenso de que representan del 4% al 6% de la población escolar.

Existe controversia sobre el cómo diagnosticar las altas capacidades debido a que los estudios realizados sobre los alumnos de los que tenemos sospechas son bastante diversos y han ido cambiando a lo largo de la historia. Ya no es suficiente con hacer un test para medir el cociente intelectual, si no que se hace necesario el llevar a cabo un estudio más amplio según diferentes variables y facetas.

Existen pues dos grandes bloques de estudio a tener en cuenta. Un primero compuesto por pruebas formales u objetivas tales como los test de inteligencia general, test de aptitudes específicas o pruebas de rendimiento basadas en el currículum, y un segundo bloque formados por pruebas informales o subjetivas como informes de los profesores, observación familiar, explicaciones de compañeros de aula y auto-informes. (Huamán-Arismendi, 2007). A continuación exponemos los principales métodos de identificación:

Pruebas estandarizadas

Según González (1999) las pruebas estandarizadas son una serie de test que se realizan a los alumnos de forma que todos son evaluados bajo las mismas tareas en condiciones equiparables, existiendo siempre un grupo de referencia que hace posible la comparativa de rendimientos entre distintos alumnos o de un solo alumno con distintos campos.

Se distinguen las siguientes tipologías de pruebas estandarizadas que se pueden llegar a realizar (Gómez y Mir, 2011):

- Pruebas de inteligencia. Ayudan a valorar el potencial intelectual comprendiendo el razonamiento lógico, gestión perceptual, gestión de memoria, razonamiento verbal, razonamiento matemático y aptitud espacial. De entre todas las existentes, la más conocida es la escala de inteligencia Wechsler para niños “WISC IV”.

- Pruebas de creatividad. Se pueden destacar la prueba CREA de Corbalán (2003), dirigida tanto para niños y adolescentes como para adultos, y las pruebas PIC de Artola et al. (2008), con las que se estudia la evolución de la creatividad narrativa y gráfica.
- Pruebas de nivel académico. Se basan en pruebas académicas puestas por el tutor a nivel de clase y del expediente académico.
- Pruebas de personalidad. Están basadas en cuestionarios de personalidad, autoconcepto, socialización, etc.
- Cuestionarios generales donde se realizan valoraciones por parte de los profesores, padres y propios alumnos sobre aspectos como la motivación, personalidad, creatividad, aprendizajes y psicomotricidad.

Escalas de observación, listas de control y cuestionarios (Gento, 2010)

Los cuestionarios para la detección de altas capacidades sirven para saber si las manifestaciones de algunos alumnos pueden confirmar las sospechas sobre su superdotación. Existen distintos niveles de detección dependiendo de la edad de los alumnos. Normalmente estos cuestionarios los lleva a cabo el profesor y los padres para comparar sus opiniones. Algunas de los cuestionarios más utilizados son: Escala de Renzulli (1976), Identificación del talento de Krantz (1981), Escalas de valoración académica de Purdue (Feldhunsen, 1991) y en un plano más actual los Cuestionarios para la detección de niños con altas capacidades de Pérez (2007). En el Anexo 1 se muestran estos últimos.

Análisis de trabajos realizados

De los trabajos realizados en clase por los alumnos se puede llegar a obtener información para identificar a niños superdotados (Gento, 2010). Entre ellos destacan: descripciones y redacciones, dibujos, trabajos manuales, soluciones a problemas, creatividad (p.e. notar si dan soluciones creativas a un problema) o muestran interés por otros aspectos (filosóficos, religiosos, etc).

Recogida de información

Un punto muy importante es poder recopilar toda la información de los alumnos referente a los cursos anteriores y sus calificaciones. Ya sean pruebas escritas en el

centro o aspectos relevantes traspasados de forma oral por sus antiguos profesores (Gento, 2010).

Interacción social

Una fuente de información extremadamente valiosa es la apreciación de los propios compañeros de clase, ya que su valoración se suele ajustar de manera bastante correcta a las capacidades reales de sus iguales arrojando información sobre socialización y liderazgo de gran importancia (Apraiz, 1995).

Información familiar

La herramienta más directa de cara a obtener información familiar sobre los alumnos es a través de entrevistas o cuestionarios. Los padres constituyen una pieza clave en el proceso de identificación y desarrollo de los niños con altas capacidades. La familia cuenta con mucha información sobre su hijo, lo que se pretende conocer es el comportamiento que del niño fuera del ámbito de la escuela. Según Gento (2010) los padres suelen ser muy buenos identificadores de la superdotación de sus hijos. A pesar de ello, las reacciones por parte de los mismos ante la noticia pueden ir desde el entusiasmo desmedido (programación de actividades adicionales, tutores particulares, etc.), hasta el intento de esconder la situación en aras de protegerlos de los posibles problemas futuros.

Información personal

Mediante entrevistas, conversaciones espontáneas o autovaloraciones puede llegar a disponerse de información no accesible mediante los test psicométricos tales como los intereses, las motivaciones y/o aficiones del estudiante. Elementos directamente relacionados con la motivación de sus actos y la actitud (Apraiz, 1995)

Por último, aquí exponemos una tabla donde se describen las ventajas y limitaciones de los procesos de identificación más comunes según Domínguez y Pérez (1999).

Tabla 6. Ventajas y limitaciones de procedimientos de identificación más usuales (Dominguez y Pérez, 1999)

VENTAJAS E INCONVENIENTES DE LOS PROCEDIMIENTOS DE IDENTIFICACIÓN MÁS USUALES			
<i>Procedimientos</i>	<i>Ventajas</i>	<i>Limitaciones</i>	<i>Observaciones</i>
Sistemas o Pruebas objetivas			
Test individuales de inteligencia	Fiabilidad para diferenciar las características de la superdotación	Son costosas de administrar, algunas escalas tienen fuerte carga cultural, por lo que favorecen a determinados sectores de la población	Los resultados deben tomarse como una estimación. Deben analizarse cuantitativa, cualitativa y comparativamente.
Test colectivos de inteligencia	Economía	Sólo son buenos como métodos de screening, nunca para tomar decisiones ni establecer programas	Se pueden usar para seleccionar casos detectados por nominaciones u otros indicios
Test de creatividad y/o pensamiento inventivo	Miden el pensamiento divergente	Las pruebas estandarizadas tienen características muy diferentes en función de las diferentes concepciones de esta área	Son necesarias para combinar sus resultados con otros criterios
Test de aptitudes específicas	Sirven para la identificación individualizada del talento académico	Pueden no descubrir al superdotado al no puntura alto en conocimientos escolares	Necesarias para combinar con otros criterios, especialmente los programas de intervención (ampliaciones, adaptaciones...)
Test de aptitudes específicas	Sirven para la identificación individualizada del talento	Sirven en exclusiva para un tipo de capacidades	Imprescindibles para detectar talentos
Test de estrategias cognitivas y metacognitivas	Diagnostican el nivel y la calidad del procesamiento de la información	Pueden ser manipuladas de forma desiderativa	Permiten intervenir mejorando y equilibrando procesos
Test de personalidad e intereses	Muy importante en los casos de inadaptación	Costosos, deben ser utilizados siempre por especialistas	Necesarios para una valoración completa
Sistemas o Pruebas subjetivas			
Cuestionarios, inventarios, escalas de observación	Fáciles y rápidos de administrar	Falta de fiabilidad	Necesarios en los primeros pasos de la investigación y como material complementario
Informe de profesores (sin formación específica)	Bajo coste económico y rapidez de aplicación	Falta de exactitud, suele confundir superdotación con rendimiento académico	Es una fuente de información necesaria

Informe de profesores con formación específica o de expertos	Predicciones exactas, incremento de fiabilidad	Hay poco personal especializado	Es una de las mejores formas de identificación
Informe de los padres	Conocen muy bien al niño y pueden ser precisos en sus observaciones	No siempre son capaces de interpretar objetivamente. Desconocen las características de la superdotación	Son imprescindibles para analizar datos evolutivos
Nominaciones de compañeros	Son un buen índice de la capacidad social y de liderazgo	A veces los niños y especialmente las niñas la esconden ante sus compañeros	Necesarias para combinar los resultados con otros criterios
Autobiografías, informes personales, entrevistas	Fuente valiosa de información. Revela sus intereses, logros y aspiraciones	Subjetividad y empatía de quien lo valora	Necesarias para combinar los resultados con otros criterios
Productos del niño, trabajos espontáneos, portfolio	Trabajos propios que pueden expresar su capacidad, sin estar mediatizados por el entorno	No se les presta habitualmente atención	Necesarias para combinar los resultados con otros criterios

2.2.5 Respuestas educativas para alumnos con altas capacidades

Las principales medidas expuestas en la legislación actual para la atención a las altas capacidades en los centros educativos se resumen en tres estrategias educativas básicas: la aceleración o flexibilización, el agrupamiento y el enriquecimiento o ajuste curricular. (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre)

1. **La aceleración o flexibilización.** Consistiría en hacer avanzar al estudiante por el sistema educativo a un ritmo más rápido o bien adelantando cursos.
2. **El agrupamiento.** Consistiría en juntar o agrupar a los estudiantes excepcionales en grupos, o incluso en centros especiales, donde se llevan a cabo programas adecuados a sus destrezas y capacidades.
3. **El enriquecimiento.** Consistiría en ajustar las programaciones didácticas a las características y necesidades especiales del alumno más capaz permitiéndole así seguir su instrucción en el aula ordinaria con sus compañeros habituales de clase.

Al final, todo este conjunto de estrategias básicas expuestas, tienen como objetivo último que todos los alumnos tengan igualdad de oportunidades.

2.2.6 El Plan Individualizado

El Plan Individualizado (PI) es el conjunto de soportes y adaptaciones que un determinado alumno pueda necesitar en los diferentes momentos y contextos escolares y también es el documento escrito donde constan estas decisiones.

El responsable del Plan Individualizado es el tutor con la colaboración del equipo de maestros o del profesorado del Equipo de Asesoramiento y Orientación Psicopedagógica (EAP), el orientador y otros profesionales que participan en la atención educativa del alumno/a. Se tiene que contar con la colaboración de los padres, madres o representantes legales del alumno/a y del alumno/a mismo si su edad y circunstancias personales lo aconsejan, y escucharlos en el proceso de toma de decisiones. El tutor o tutora es el responsable de la coordinación de los diferentes profesionales que intervienen, de hacer el seguimiento y debe actuar como principal interlocutor con la familia. El PI debe ser aprobado por el director o directora del centro educativo (Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, 2013).

Tal como establece la Orden ECD/1361/2015, de 3 de julio, por la cual se determinan los procedimientos y los documentos y requisitos formales de los procesos de evaluación en la educación secundaria obligatoria, hay que dejar constancia de los cursos que sigue el alumno con un plan individualizado en el expediente académico de este alumno.

El PI se tiene que elaborar en un término máximo de 2 meses, se tiene que revisar cada final de curso con el fin de ajustarlo a la evolución del alumno y se debe llevar a cabo un seguimiento trimestral. En el Anexo 2 se muestra un modelo de Plan Individualizado.

3 METODOLOGÍA

3.1 Metodología aplicada

El marco teórico nos ha permitido, por un lado, exponer los procesos cognitivos que se desarrollan en la mente del alumnado en el estudio de la trigonometría así como las dificultades que plantea el aprendizaje de sus conceptos, y los recursos y estrategias para facilitar su asimilación. De igual forma se ha podido ver la tipología, caracterización y problemática asociada a las altas capacidades, así como su detección y diagnóstico. Toda esta información constituirá la base sobre la que elaboraremos la unidad didáctica.

Sin embargo, y antes de desarrollar la propia unidad, en este apartado incidiremos en la metodología que nos permitirá desarrollar la respuesta educativa de utilizaremos para la construcción de nuestra unidad didáctica: el enriquecimiento o ajuste curricular.

Según Reyzábal et al. (2007) estos ajustes suponen el enriquecer o ampliar el currículo ordinario, dándole una mayor riqueza y profundidad, en ciertos contenidos específicos del área o materia que nos ocupa, los cuales requieren de procesos cognitivos más complejos, sin llegar a exponer o adelantarnos en contenidos de cursos superiores. Para desarrollar estos ajustes, deberemos tener en cuenta una serie de cuestiones (Reyzábal, et al., 2007):

1. Los ajustes de ampliación, profundización y desarrollo del currículo ordinario formarán parte de las programaciones didácticas.
2. Cualquier medida de enriquecimiento deberá realizarse bajo la coordinación del tutor/a, pero con la colaboración e implicación de todos los docentes que van a tener que hacerla posible.
3. No deben representar una actuación concreta que se plantea de forma individual al alumno/a con altas capacidades intelectuales sino que también deben salir beneficiados todos aquellos alumnos que manifiesten un alto rendimiento en un aspecto específico del currículo o, por ejemplo, en las circunstancias descritas a continuación:

- Cuando parte de los alumnos hayan terminado de forma correcta y antes del tiempo estipulado los ejercicios o actividades planteados por el profesor.
 - Cuando parte del grupo no necesite llevar a cabo más ejercicios repetidos sobre el tema explicado cuando se valore que estos conocimientos ya se han consolidado y superado.
4. No se trata de aumentar la cantidad de ejercicios a realizar ni de adelantar contenidos de cursos posteriores, sino de proveer los aprendizajes de un mayor grado de riqueza, profundidad e interdisciplinariedad.
 5. Los enriquecimientos tienen que ser atractivos y motivadores para los estudiantes y deben poner en práctica a la vez que activar procesos cognitivos de mayor complejidad.

A continuación exponemos distintas tipologías de ajustes que hemos tenido en cuenta a la hora de desarrollar nuestra unidad (Reyzábal, et al., 2007):

A) Ajustes Metodológicos y Organizativos

- Reservar en el aula momentos para el diálogo.
- Fomentar el aprendizaje cooperativo y la ayuda entre iguales mediante agrupaciones flexibles.
- Utilizar de manera gradual recursos impresos, audiovisuales e informáticos para el tratamiento, manejo, acceso, y síntesis de la información.
- Plantear los temas desde una actitud dialogante y abierta, creando un clima de comunicación fluido en el grupo-clase.
- Partir de las equivocaciones como fuente de aprendizaje concediendo “el derecho al error”.
- Defender la realización de preguntas sin cohibiciones y la búsqueda grupal de respuestas.
- Apoyar los proyectos e iniciativas que aparezcan de forma espontánea, ayudando a la canalización de las propuestas creativas de los alumnos.

B) Ajustes en Relación con las Actividades

- Plantear actividades que alternen distintos tipos de agrupamientos: pequeño grupo o gran grupo, para fomentar el aprendizaje cooperativo y a la par llevar a cabo actividades de forma individual para potenciar el aprendizaje autónomo y el desarrollo de los intereses propios.
- Diseñar una batería de actividades y recursos de ampliación que permitan enriquecer el currículo de los alumnos de altas capacidades, teniendo en cuenta los distintos estilos de aprendizaje.
- Planificar una variada oferta de actividades y ejercicios con diversos grados de dificultad o comprensión.
- Elaborar trabajos en equipo integrados por estudiantes con distintos grados de habilidad, en los que el alumno/a con altas capacidades tenga que colaborar, compartir información, valorar alternativas y aceptar los distintos puntos de vista del resto de sus compañeros.

C) Ajustes en Relación con los Contenidos

- Introducir de forma gradual nuevas metodologías de procedimiento, como herramienta para poder llevar a cabo trabajos cada vez más elaborados, utilizando distintos medios de acceso a la información y diferentes procesos de investigación aplicables a la vida real.
- Ampliar los contenidos del tema a estudio con una mayor profundidad, extensión y conexión entre los conceptos que lo integran.
- Integrar contenidos actitudinales específicamente adaptados al alumnado con altas capacidades intelectuales. Por ejemplo:
 - Evaluación en grupo del trabajo bien hecho y del esfuerzo individual.
 - Aceptación a la corrección y tolerancia a los errores como fuente de superación y aprendizaje.
 - Tutorización del alumno/a con altas capacidades con el resto de sus compañeros como dinamizador en el proceso de aprendizaje del grupo-clase.
 - Asimilación de la importancia del intercambio de información y valoración positiva del punto de vista de los demás compañeros.

Por último recordar tal como ya comentamos en el apartado 1.3 de este trabajo que una parte eminentemente práctica de la metodología utilizada para elaborar este trabajo descansa sobre la base del trabajo de campo asociado a las prácticas del Master del Profesorado que el autor llevó a cabo entre los meses de enero a mayo de 2017 en el colegio “Verge del Roser” del municipio de Vallirana, en la comarca del Baix Llobregat, provincia de Barcelona.

En dicho periodo de tiempo el autor completó el practicum de observación así como el practicum de intervención I y II en el cual desarrollo e implanto una unidad didáctica de trigonometría para el grupo de alumnos de 4º de ESO (sin adaptación a altas capacidades). Esto le valió para observar y constatar in situ las dificultades de los alumnos a la hora de atacar la asignatura, aprendizaje que ha servido como base a la hora de elaborar la propuesta didáctica de este trabajo.

3.2 Propuesta Didáctica

3.2.1 Introducción y justificación

La presente unidad didáctica es la razón fundamental y propósito de este trabajo en la cual se desarrollará el tema de trigonometría con diferenciación para alumnos con altas capacidades. Dicha unidad se enmarcará en la asignatura de matemáticas de cuarto curso de ESO, según el currículo recogido en el Decreto 187/2015, del 25 de agosto, para la ordenación de la enseñanza de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Cataluña. En dicho decreto viene dispuesto el tema de trigonometría cuyos contenidos son los primeros que se engloban dentro del bloque de Espacio y formas, precedido del tema de Inecuaciones y sucedido del tema de Geometría analítica en el plano.

Según lo visto en el apartado 2.1.3, la trigonometría es una herramienta matemática de resolución de problemas geométricos tanto en el plano como en el espacio. A pesar de que en este curso se presentará la trigonometría principalmente como herramienta para la resolución de triángulos y cálculo de áreas y volúmenes, en cursos posteriores serán muchas las aplicaciones de la misma. Es importante destacar que la trigonometría es una herramienta primordial básica para los cálculos en todas las disciplinas científicas, y en concreto en física, química, astronomía, topografía y arquitectura.

Así pues, a lo largo de este apartado, y para el desarrollo completo de la unidad, se detallaran los siguientes puntos:

- Destinatarios
- Objetivos
- Competencias
- Metodología
- Temporización y desarrollo de las sesiones
- Recursos
- Criterios de evaluación
- Evaluación de la unidad

3.2.2 Destinatarios

Como ya se ha comentado hasta el momento, esta unidad didáctica de trigonometría se va a desarrollar teniendo en mente un grupo-clase genérico, como cualquier clase que nos pudiésemos encontrar en nuestro sistema educativo, un grupo heterogéneo con unas necesidades educativas específicas muy dispares. Así pues, el rendimiento académico que nos encontraremos en el aula será diverso y desigual. Esto obligará al tutor y a los profesores del grupo a llevar a cabo una labor de atención a la diversidad bastante importante, de cara a promover el éxito de todos los alumnos de forma equitativa, y en nuestro caso concreto los alumnos con altas capacidades intelectuales. De esta manera la unidad se ha definido de forma que pueda dar respuesta a los diferentes niveles académicos y ritmos de aprendizaje presentes.

3.2.3 Objetivos, criterios de evaluación, estándares evaluables y competencias

A continuación presentamos los objetivos de la unidad didáctica diferenciada, con sus criterios de evaluación y sus estándares de aprendizaje evaluables para el bloque de trigonometría de 4º de ESO. Esta diferenciación para altas capacidades se ha llevado a cabo siguiendo el modelo expuesto por Calvo et al. (2007). Posteriormente se expondrán las competencias asociadas a los mismos.

Tabla 7. Objetivos de la U.D. (elaboración propia, 2017)

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	OBJETIVOS	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			1. Entender los conceptos relacionados con la semejanza y valorar la utilidad de las relaciones de semejanza.	1. <i>Entender los conceptos relacionados con la semejanza y valorar la utilidad de las relaciones de semejanza.</i>
			2. Resolver problemas relacionados con el mundo físico que nos envuelve.	2. <i>Resolver problemas relacionados con el mundo físico que nos envuelve, contemplando y exponiendo todas las diferentes alternativas.</i>
			3. Representar gráficamente, de una manera clara y precisa, las situaciones que surgen en los problemas de geometría, para poder apreciar las relaciones de semejanza y expresar algebraicamente las relaciones entre las magnitudes del problema.	3. <i>Representar gráficamente, de una manera clara y precisa, las situaciones que surgen en los problemas de geometría, para poder apreciar las relaciones de semejanza y expresar algebraicamente las relaciones entre las magnitudes del problema.</i>
			4. Entender las diversas formas de medir ángulos y como se transforman de unos sistemas a otros utilizando, cuando haga falta, la calculadora científica.	4. <i>Entender las diversas formas de medir ángulos y como se transforman de unos sistemas a otros utilizando, cuando haga falta, la calculadora científica.</i>
				5. <i>Comprender la naturaleza de los radianes y utilizarlos para el cálculo de áreas de circunferencias.</i>
			5. Comprender las relaciones que hay entre los lados y los ángulos en los triángulos rectángulos, expresar estas relaciones mediante las razones trigonométricas de un ángulo y hacer uso de ellas para resolver problemas de geometría.	6. <i>Comprender las relaciones que hay entre los lados y los ángulos en los triángulos rectángulos, expresar estas relaciones mediante las razones trigonométricas de un ángulo y hacer uso de ellas para resolver problemas de geometría.</i>
				7. <i>Entender el concepto de razones trigonométricas de ángulos $>90^\circ$</i>

Tabla 8. Criterios de Evaluación y Estándares Eval. de la U.D. (elaboración propia, 2017)

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES EVALUABLES	
				PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			1. Entender la semejanza entre triángulos rectángulos, el significado de las razones trigonométricas y calcularlas.	<p>1.1 Reconoce la semejanza entre triángulos rectángulos para calcular ángulos y lados.</p> <p>1.2 Comprende lo que representan las diferentes razones trigonométricas y realiza el cálculo.</p>	<p>1.1 Reconoce la semejanza entre triángulos rectángulos para calcular ángulos y lados.</p> <p>1.2 Comprende lo que representan las diferentes razones trigonométricas y realiza el cálculo.</p> <p>1.3 Comprende la dependencia única de las razones trigonométricas con el ángulo, no con la dimensión del propio triángulo en sí.</p>
			2. Trabajar las razones trigonométricas de manera gráfica y numérica, y calcularlas.	<p>2.1 Compara las razones trigonométricas de manera gráfica y numérica.</p> <p>2.2 Realiza el cálculo de las razones trigonométricas a partir del ángulo y al revés.</p>	<p>2.1 Compara las razones trigonométricas de manera gráfica y numérica.</p> <p>2.2 Realiza el cálculo de las razones trigonométricas a partir del ángulo y al revés.</p> <p>2.3 Maneja la circunferencia goniométrica para ángulos $>90^\circ$ y comprende los signos.</p>
			3. Utilizar la propiedad fundamental de la trigonometría y la relación $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$.	<p>3.1 Calcula utilizando las razones trigonométricas y la relación $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$.</p>	<p>3.1 Calcula utilizando las razones trigonométricas y la relación $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$.</p>

			4. Determinar ángulos y longitudes desconocidos en triángulos rectángulos en función de otros ángulos o longitudes.	4.1 Identifica ángulos y longitudes desconocidas en triángulos rectángulos en función de otros ángulos o longitudes: conociendo un ángulo agudo y la hipotenusa, un ángulo agudo y un cateto o conociendo dos lados.	4.1 <i>Identifica ángulos y longitudes desconocidas en triángulos rectángulos en función de otros ángulos o longitudes: conociendo un ángulo agudo y la hipotenusa, un ángulo agudo y un cateto o conociendo dos lados.</i> 4.2 <i>Sabe llegar a uno de los tres problemas básicos si se encuentra con una variación de ellos y resolverlo.</i>
			5. Resolver problemas mediante las razones trigonométricas y las relaciones aprendidas.	5.1 Soluciona problemas de la vida cotidiana haciendo uso de las razones trigonométricas y las relaciones aprendidas.	5.1 <i>Soluciona problemas de la vida cotidiana haciendo uso de las razones trigonométricas y las relaciones aprendidas.</i> 5.2 <i>Es capaz de resolver un mismo problema con distintas razones trigonométricas comprendiendo la relación entre ellas.</i> 5.3 <i>Analiza y contrasta los resultados obtenidos con la realidad para comprobar su idoneidad.</i>
			6. Utilizar el concepto de ángulos radianes para resolver problemas.		6.1 <i>Sabe manejar los ángulos en radianes y utilizarlos para el cálculo de áreas de circunferencias.</i>

Por lo que respecta a las competencias, recordamos que el currículum está sujeto a lo que marca el *Decreto 187/2015, del 25 de agosto, para la ordenación de la enseñanza de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Cataluña*. Dicha legislación contiene las siguientes competencias básicas transversales:

- 1) Competencia en Comunicación lingüística.
- 2) Competencia en Matemáticas y competencia en Ciencia y Tecnología.
- 3) Competencia Digital
- 4) Competencia en Aprender a aprender.
- 5) Competencia Social y Cívica.
- 6) Sentido de la Iniciativa y Espíritu Emprendedor
- 7) Competencia en Conciencia y Expresiones Culturales.

Además de las competencias transversales cada asignatura tiene sus competencias específicas. En el caso de las matemáticas se definen 12 competencias específicas básicas.

En esta unidad didáctica se trabajarán las siguientes:

- 1) *Competencia en Comunicación lingüística*: esta competencia se trabaja a lo largo de toda la unidad, ya que la comprensión del texto es básica para el aprovechamiento de la misma. En particular, los problemas con enunciado contextualizado desarrollan la comunicación escrita.
- 2) *Competencia en Matemáticas*: esta competencia se trabaja de manera completa. En esta unidad se considera que se trabajan fundamentalmente las subcompetencias de resolución de problemas y uso de elementos y herramientas matemáticos, según las siguientes competencias básicas específicas:
 - Competencia 3. Mantener una actitud de búsqueda ante un problema, ensayando estrategias diversas.
 - Competencia 5. Construir, expresar y contrastar argumentaciones para justificar y validar las afirmaciones que se hacen en matemáticas.
 - Competencia 10. Expresar ideas matemáticas con claridad y precisión, y comprender las de los demás.
- 3) *Competencia Digital*: en el uso de los diferentes tipos de calculadoras en la realización de operaciones, en este caso se incide en el uso en el cálculo de las razones trigonométricas, de los ángulos, etc. Además se utiliza el programario de Geogebra para la explicación de algunos de los contenidos teóricos del temario.
- 4) *Competencia en Aprender a aprender*: en el uso de las habilidades y técnicas de aprendizaje relacionadas con el trabajo cooperativo. A partir de las actividades planteadas se adquiere conciencia y control de las propias capacidades y del conocimiento del propio proceso de aprendizaje, así como el proceso de resolución que ha hecho otra persona.

- 5) *Competencia Social y Cívica*: en esta unidad el alumno reconoce la importancia de la trigonometría para resolver problemas reales.
- 6) *Sentido de la Iniciativa y Espíritu Emprendedor*: esta competencia se trabaja a la hora de archivar los trabajos realizados con tal de poder ser recuperados y utilizados para el estudio personal. También se mejora la propia confianza del alumno para resolver problemas de la vida cotidiana. Por último a la hora de realizar actividades no guiadas para las cuales hace falta planificar la estrategia a utilizar.
- 7) *Competencia en Conciencia y Expresiones Culturales*: a lo largo de esta unidad encontramos referencias a las aplicaciones del contenido matemático expuesto en situaciones y problemas de la vida diaria así como de contenido cultural: alturas de edificios (por ejemplo, la torre Eiffel), la inclinación de la torre Pisa, etc.

3.2.4 Contenidos

Los contenidos de la unidad propuesta corresponden al temario de trigonometría de 4º de ESO, concretados respecto a los criterios de evaluación expuestos anteriormente:

Tabla 9. Contenidos de la U.D. (elaboración propia, 2017)

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	CONTENIDOS	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			1. Razones trigonométricas 1.1 Semejanza de triángulos rectángulos 1.2 Razones entre los lados de un triángulo 1.3 Razones trigonométricas: seno, coseno, y tangente	1. <i>Razones trigonométricas</i> 1.1 <i>Semejanza de triángulos rectángulos</i> 1.2 <i>Razones entre los lados de un triángulo</i> 1.3 <i>Razones trigonométricas: seno, coseno, y tangente</i>
			2. Cálculo de razones trigonométricas 2.1 Uso de la calculadora 2.2 Caso particular de las razones de los ángulos de 30°, 45° y 60°	2. <i>Cálculo de razones trigonométricas</i> 2.1 <i>Uso de la calculadora</i> 2.2 <i>Caso particular de las razones de los ángulos de 30°, 45° y 60°</i>

			3. Relaciones entre razones trigonométricas 3.1 Relación $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 3.2 Relación $\operatorname{tga} = \sin\alpha / \cos\alpha$	3. <i>Relaciones entre razones trigonométricas</i> 3.1 <i>Relación $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$</i> 3.2 <i>Relación $\operatorname{tga} = \sin\alpha / \cos\alpha$</i>
			4. Resolución de triángulos rectángulos 4.1 Conociendo un ángulo agudo y la hipotenusa 4.2 Conociendo un ángulo agudo y un cateto 4.3 Conociendo dos lados	4. <i>Resolución de triángulos rectángulos</i> 4.1 <i>Conociendo un ángulo agudo y la hipotenusa</i> 4.2 <i>Conociendo un ángulo agudo y un cateto</i> 4.3 <i>Conociendo dos lados</i>
			5. Aplicación de la trigonometría a la resolución de problemas	5. <i>Aplicación de la trigonometría a la resolución de problemas</i>
			6. Medidas de ángulos. El radian.	6. <i>Medidas de ángulos. El radian. Cálculo de áreas de sectores de circunferencia.</i>
			7. Circunferencia goniométrica	7. <i>Circunferencia goniométrica. Cálculo de razones para ángulos de $>90^\circ$.</i>

3.2.5 Metodología

No debemos perder de vista que es en este curso cuando se presenta por primera vez el tema de la trigonometría, por lo que los conceptos teóricos que se llevarán a cabo en esta unidad serán completamente nuevos para los alumnos. Es por ello que la didáctica de estos conceptos obliga al docente a:

- Procurar que la trigonometría sea percibida como algo cercano y práctico.
- A ser muy claro en los conceptos (estructurar conceptos y cuidar los ritmos).
- A controlar constantemente el aprendizaje de los alumnos (comprobar que construyen bien los conceptos).
- A ser especialmente pacientes.

Teniendo todo esto en cuenta la unidad se ha diseñado siguiendo los siguientes puntos:

- **Metodología activa-participativa.** El proceso de enseñanza-aprendizaje debe girar alrededor del alumnado, no de las explicaciones teóricas del profesor, es por ellos que las sesiones seguirán un esquema donde habrá:

- Sesiones con breves introducciones teóricas que son complementadas con resolución de problemas a partir de la participación del alumnado.
- Sesiones de trabajo colaborativo en parejas para la resolución de problemas.
- **Dinámica de las clases.** Las dinámicas de las clases discurrirán de la siguiente forma:
 - Durante los primeros minutos de clase se resolverán las posibles dudas y se corregirán las actividades pendientes (si es que hay) de la sesión anterior.
 - A continuación el profesor hará la explicación del concepto o procedimiento correspondiente.
 - El resto del tiempo el alumno se dedicará a hacer las actividades sobre el procedimiento trabajado.
 - Se resolverán todas las dudas cuando estas se expongan con educación levantando la mano. Si un alumno continúa con la duda y esta es individual, se atenderá fuera de clase. Un buen momento será durante el patio.
- **Soportes TIC.** Durante las clases se utilizaran los siguientes soportes TIC:
 - PDI (Pizarra digital interactiva). Se procurará utilizar la PDI a modo soporte/ayuda para las sesiones del profesor, a la hora de proyectar los contenidos (imágenes, ejercicios, videos, etc.), y como pizarra clásica propiamente dicha. De este modo la PDI ejercerá de elemento dinamizador y motivador para los estudiantes.
 - Software informático. Durante algunas de las sesiones recurriremos al software Geogebra, un programa matemático programable de cálculo y representación gráfica en el cual nos apoyaremos para conseguir un mayor entendimiento por parte de los alumnos en algunos conceptos trigonométricos.
 - Plataforma digital. Apoyaremos la dinámica de las clases en una plataforma virtual de cara a colgar diverso material del utilizado en las sesiones, ya sean ejercicios, deberes, recursos interactivos, o como simple medio de comunicación en horario extraescolar entre los propios alumnos y el profesor. El tipo de plataforma dependerá de si el colegio ya hace uso de alguna de las existentes en concreto o no (ej: Moodle, Canal de Facebook, etc.).

3.2.6 Temporalización y desarrollo de las sesiones

La unidad didáctica se distribuirá a lo largo de 11 sesiones (cada sesión dura aproximadamente 55 minutos de clase), que en el centro equivaldrán a dos semanas y media. Las sesiones se distribuirán de la siguiente manera:

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	SESIÓN 1: Presentación de la unidad y evaluación del nivel de los alumnos (55 min)	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<ol style="list-style-type: none"> 1. Presentación De la unidad (25 min) <ul style="list-style-type: none"> • Estructuración de las sesiones • Normas de clase: la participación y el trabajo diario serán necesarios, así como los buenos modales y el respeto entre compañeros. • Informar de la creación de la plataforma virtual e incidir en su funcionamiento y aprovechamiento. • Información sobre la evaluación (ver apartado criterios de evaluación) 2. Evaluación inicial (30 min) <ul style="list-style-type: none"> • Prueba escrita individual sobre conocimientos previos necesarios (ver apartado 2.1.5). Prueba no puntuable. Objetivo: que cada alumno conozca su nivel. Ejercicios (Anexo 3, S1, ej. 1 al 10) 3. Deberes (Anexo 3, S1, ej. 11 al 13) 	
			<p><u>Recursos:</u> Pantalla digital interactiva para proyección de la presentación de la asignatura, mostrar la plataforma virtual y su funcionamiento y ejercicios de deberes.</p> <p><u>Notas:</u> Explicar que en la plataforma se colgará la teoría y los problemas a realizar en las sesiones de cada día. También existirá un foro para preguntar todas aquellas dudas que surjan. Los propios alumnos podrán responder a dichas dudas. El profesor también colgará noticias, artículos o enlaces audiovisuales relacionados con el tema tratado y se animará a los alumnos a que hagan lo mismo.</p>	
AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	SESIÓN 2: Razones trigonométricas (55 min)	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<p><u>Contenido</u></p> <ol style="list-style-type: none"> 2. Razones trigonométricas <ol style="list-style-type: none"> 1.1 Semejanza de triángulos rectángulos 1.2 Razones entre los lados de un triángulo 1.3 Razones trigonométricas: seno, coseno, y tangente 	

			1. Resultados de la prueba escrita (5 min). Devolución de los ejercicios. Se corrigen los 2 ejercicios con más fallos por parte de los alumnos.	1. <i>Resultados de la prueba escrita (5 min). Devolución de los ejercicios. Se corrigen los 2 ejercicios con más fallos por parte de los alumnos.</i>
			2. Teoría y ejemplos (25 min). Clase teórica mezclada con preguntas cortas de respuesta directa a los alumnos. Resolución de un ejercicio por el profesor en la pizarra con ayuda de los alumnos. (Anexo 3, S2, ej. 1)	2. <i>Teoría y ejemplos (25 min). Clase teórica mezclada con preguntas cortas de respuesta directa a los alumnos. Resolución de un ejercicio por el profesor en la pizarra con ayuda de los alumnos. (Anexo 3, S2, ej. 1)</i>
			3. Ejercicios (20 min). Ejercicios del tema realizados por los alumnos en clase (Anexo 3, S2, ej. 2 al 4). Los ejercicios que no se acaben se harán como deberes.	3. <i>Ejercicios (20 min). Ejercicios del tema realizados por los alumnos en clase (Anexo 3, S2, ej. 2 al 6). Se añaden 2 ejercicios de mayor dificultad cognitiva. Los ejercicios que no se acaben se harán como deberes.</i>
			<p><u>Recursos:</u> PDI para la proyección de la teoría y resolución de ejercicios. Pizarra clásica para la ilustración de la teoría y la realización de problemas (participación del estudiantado).</p> <p><u>Notas:</u> Los estudiantes que hayan salido a la pizarra para la corrección de los deberes serán puntuados positivamente en la nota de actitud del día.</p>	

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	SESIÓN 3: Cálculo de razones trigonométricas (55 min)	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<p><u>Contenido</u></p> <p>3. Cálculo de razones trigonométricas</p> <p>3.1 Uso de la calculadora</p> <p>3.2 Caso particular de las razones de los ángulos de 30°, 45° y 60°</p>	
			1. Repaso + corrección de deberes (10 min). Interrogatorio rápido sobre los conceptos del día anterior + corrección de deberes paralelamente en la pizarra.	1. <i>Repaso + corrección de deberes (10 min). Interrogatorio rápido sobre los conceptos del día anterior + corrección de deberes paralelamente en la pizarra.</i>
			2. Teoría y ejercicio (25 min). Demostración de las razones de 30°, 45° y 60°. Explicación uso de la calculadora. Ejercicio de completar tabla de razones de varios ángulos por parejas (Anexo 3, S3, ej. 1a)	2. <i>Teoría y ejercicio (25 min). Demostración de las razones de 30°, 45° y 60°. Explicación uso de la calculadora. Ejercicio de completar tabla de razones de varios ángulos por parejas (Anexo 3, S3, ej. 1a y b) Argumentación de los resultados para los ángulos de 0° y 90°.</i>

			3. Teoría y ejemplo (10 min). Breve repaso de la notación de ángulos en grados, minutos y segundos. Breve ejemplo hecho a mano por el profesor (Anexo 3, S3, ej. 2)	3. <i>Teoría y ejemplo (10 min). Breve repaso de la notación de ángulos en grados, minutos y segundos. Breve ejemplo hecho a mano por el profesor (Anexo 3, S3, ej. 2)</i>
			4. Ejercicios (10 min). Ejercicios del tema realizados por los alumnos en clase en parejas con ayuda de la calculadora (Anexo 3, S3, ej. 3a a 3f, 5, 6a a 6f, 8). Los ejercicios que no se acaben se harán como deberes.	4. <i>Ejercicios (10 min). Ejercicios del tema realizados por los alumnos en clase en parejas con ayuda de la calculadora (Anexo 3, S3, ej. 3a a 3c, 4, 6a a 6c, 7, 8). Ejercicios diferenciados respecto el resto. Los ejercicios que no se acaben se harán como deberes.</i>
			<p><u>Recursos:</u> PDI y Pizarra clásica para desarrollo de teoría y para la proyección y corrección de ejercicios.</p> <p><u>Notas:</u> Daremos nociones básicas de cómo funciona la calculadora estándar, de todas formas se comenta que es responsabilidad de cada uno el saber cómo funciona su propia calculadora. Los estudiantes que hayan salido a la pizarra para la corrección de los deberes serán puntuados positivamente en la nota de actitud del día.</p>	

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	SESIÓN 4: Relaciones entre razones trigonométricas (55 min)	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<p><u>Contenido</u></p> <p>3. Relaciones entre razones trigonométricas</p> <p>3.1 Relación $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$</p> <p>3.2 Relación $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$</p>	
			1. Corrección de deberes (10 min). Corrección grupal de los ejercicios que quedasen como deberes de la sesión anterior.	1. <i>Corrección de deberes (10 min). Corrección grupal de los ejercicios que quedasen como deberes de la sesión anterior.</i>
			2. Teoría y ejercicio (20 min). Demostración teórica de las relaciones entre razones + comprobación en ejemplo numérico por profesor con la participación de los alumnos (Anexo 3, S4, ej. 1, 2)	2. <i>Teoría y ejercicio (20 min). Demostración teórica de las relaciones entre razones + comprobación en ejemplo numérico por profesor con la participación de los alumnos (Anexo 3, S4, ej. 1, 2)</i>
			3. Ejercicios (25 min). Ejercicios del tema realizados por los alumnos en clase de forma individual (13 min) (Anexo 3, S4, ej. 3, 4, 5). Corrección en la pizarra por voluntarios (12 min).	3. <i>Ejercicios (25 min). Ejercicios del tema realizados por los alumnos en clase de forma individual (13 min) (Anexo 3, S4, ej. 4, 5, 6). Corrección en la pizarra por voluntarios (12 min).</i>

			4. Deberes. Ejercicios para casa (Anexo 3, S4, ej. 7).	4. <i>Deberes. Ejercicios para casa (Anexo 3, S4, ej. 7). + Argumentación: partiendo de la relación fundamental, ¿qué pasa a los catetos de un triángulo si multiplicamos su hipotenusa por un valor h? ¿qué conclusión podemos sacar?</i>
			<p>Recursos: PDI y Pizarra clásica para desarrollo de teoría y para la proyección y corrección de ejercicios.</p> <p>Notas: Los estudiantes que hayan salido a la pizarra para la corrección de los deberes serán puntuados positivamente en la nota de actitud del día.</p>	

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	SESIÓN 5: Sesión de repaso (55 min)	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<p>Contenido</p> <ul style="list-style-type: none"> Sesión de repaso y asentamiento de conocimientos 	
			1. Video (5 min). Breve video sobre Eratóstenes y la medida de la tierra (Video de youtube, 2013).	1. <i>Video (5 min). Breve video sobre Eratóstenes y la medida de la tierra (Video de youtube, 2013).</i>
			2. Problemas (25 min). Clase práctica de resolución de problemas de los tres temas dados hasta la fecha por los alumnos de forma grupal. El profesor escoge los grupos de 4 personas (Anexo 3, S5, ej. 1 a 8)	2. <i>Teoría y ejercicio (20 min). Demostración teórica de las relaciones entre razones + comprobación en ejemplo numérico por profesor con la participación de los alumnos (Anexo 3, S5, ej. 1 a 8)</i>
			3. Corrección (25 min). Corrección de los ejercicios en clase, cada grupo tendrá que tener un portavoz que salga a explicar uno de los problemas realizados al resto de grupos.	3. <i>Corrección (25 min). Corrección de los ejercicios en clase, cada grupo tendrá que tener un portavoz que salga a explicar uno de los problemas realizados al resto de grupos. El profesor se asegura que en los grupos con alumnos con altas capacidades sean estos los portavoces.</i>
			<p>Recursos: PDI para la proyección del video. Pizarra clásica y PDI para la resolución y corrección de los ejercicios.</p> <p>Notas: A la hora de escoger los grupos el profesor se asegura (en la medida de lo posible) que los alumnos con altas capacidades vayan en grupos separados, con el objetivo de que estos se vean obligados escuchar las opiniones de los demás compañeros y democratizar las respuestas del grupo. Al obligar a estos alumnos a ser los portavoces de sus grupos el profesor los está motivando a tener que estructurar su explicación sobre la democratización del resultado obtenido.</p>	

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	SESIÓN 6: Resolución de triángulos rectángulos (55 min)	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<p>Contenido</p> <p>4. Resolución de triángulos rectángulos</p> <p>4.1 Conociendo un ángulo agudo y su hipotenusa</p> <p>4.2 Conociendo un ángulo agudo y su cateto</p> <p>4.3 Conociendo dos lados</p>	
			<p>1. Teoría y ejercicios (25 min). Breve introducción teórica (5 min) + Resolución de un ejemplo de cada uno de los tres casos por profesor con intervención del alumnado (20 min) (Anexo 3, S6, ej. 1a, b y c)</p>	<p>1. <i>Teoría y ejercicio (25 min). Demostración teórica de las relaciones entre razones + comprobación en ejemplo numérico por profesor con la participación de los alumnos (Anexo 3, S4, ej. 1a, b, c)</i></p>
			<p>2. Ejercicios (25 min). Resolución de ejercicios por alumnos en parejas y corrección de forma grupal en la pizarra. Los ejercicios que no se acaben en clase quedaran pendientes como deberes. (Anexo 3, S4, ej. 2, 3, 4).</p>	<p>2. <i>Ejercicios (25 min). Resolución de ejercicios por alumnos en parejas y corrección de forma grupal en la pizarra. Los ejercicios que no se acaben en clase quedaran pendientes como deberes. (Anexo 3, S4, ej. 2, 5, 6). El profesor agrupará a los alumnos de altas capacidades juntos y los ejercicios serán diferentes.</i></p>
			<p>Recursos: Pizarra clásica para la ilustración de la teoría y la realización de ejemplos. PDI para la resolución de los ejercicios.</p> <p>Notas: Los ejercicios para los grupos de alumnos con altas capacidades empezaran a contener problemas sencillos de triángulos no rectángulos que se resuelvan descomponiéndose en dos triángulos rectángulos. Los estudiantes que hayan salido a la pizarra para la corrección de los deberes serán puntuados positivamente en la nota de actitud del día.</p>	

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	SESIÓN 7: Resolución de problemas (1) (55 min)	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<p>Contenido</p> <p>5. Aplicación de la trigonometría a la resolución de problemas (1).</p>	
			<p>1. Corrección de deberes (10 min). Corrección grupal de los ejercicios que quedasen como deberes de la sesión anterior.</p>	<p>1. <i>Corrección de deberes (10 min). Corrección grupal de los ejercicios que quedasen como deberes de la sesión anterior.</i></p>

			<p>2. Problemas tipo (20 min). Resolución de 3 problemas tipo de descomposición en triángulos rectángulos por parte del profesor con ayuda de los alumnos (Anexo 3, S7, ej. 1, 2 y 3)</p>	<p>2. <i>Problemas tipo (20 min). Resolución de 3 problemas tipo de descomposición en triángulos rectángulos por parte del profesor con ayuda de los alumnos (Anexo 3, S7, ej. 1, 2 y 3)</i></p>
			<p>3. Práctica (25 min). Los alumnos se colocaran en grupos de 4 escogidos por el profesor y realizaran una serie de ejercicios. Los ejercicios no consistirán en resolver los problemas, sino simplemente en plantear el triángulo derivado del enunciado y las ecuaciones que utilizarían para resolverlo (solo plantearlas, no resolverlas) (Anexo 3, S7, ej. 4a, b, c y d). Los ejercicios se entregaran al profesor y contarán para el dossier.</p>	<p>3. <i>Práctica (25 min). Los alumnos se colocaran en grupos de 4 escogidos por el profesor y realizaran una serie de ejercicios. Los ejercicios no consistirán en resolver los problemas, sino simplemente en plantear el triángulo derivado del enunciado y las ecuaciones que utilizarían para resolverlo (solo plantearlas, no resolverlas) (Anexo 3, S7, ej. 4a, b, c y d). Los ejercicios se entregaran al profesor y contarán para el dossier.</i></p>
				<p>4. <i>Deberes. Los alumnos con altas capacidades tendrán como deberes resolver las ecuaciones planteadas en los ejercicios.</i></p>
			<p>Recursos: PDI y Pizarra clásica para desarrollo de teoría y para la proyección de ejercicios.</p> <p>Notas: A la hora de escoger los grupos el profesor se asegura (igual que en la sesión 5) que los alumnos con altas capacidades vayan en grupos separados, con el objetivo de que estos se vean obligados escuchar las opiniones de los demás compañeros y democratizar las respuestas del grupo.</p>	

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	SESIÓN 8: Resolución de problemas (2) (55 min) -Aula de informática-	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<p>Contenido</p> <p>5. Aplicación de la trigonometría a la resolución de problemas (2).</p>	
			<p>1. Corrección de ejercicios (15 min). Devolución y corrección grupal de los ejercicios de la práctica del día anterior.</p>	<p>1. <i>Corrección de ejercicios (15 min). Devolución y corrección grupal de los ejercicios de la práctica del día anterior.</i></p>
			<p>2. Resolución de problemas (40 min). En el aula de informática el profesor los dispondrá en grupos de modo que haya un ordenador cada 2-3 alumnos. Se presentaran problemas en la PDI desarrollados en el software Geogebra y los</p>	<p>2. <i>Resolución de problemas (40 min). En el aula de informática el profesor los dispondrá en grupos de modo que haya un ordenador cada 2-3 alumnos. Se presentaran problemas en la PDI desarrollados en el software Geogebra y los alumnos</i></p>

			<p>alumnos los tendrán que resolver en plan concurso a ver quién llega a la solución correcta antes. Usar las pistas del programa resta 1 pto, acabar los primeros el ejercicio de forma correcta suma 3 ptos. El grupo con más ptos al final de la sesión gana (Anexo 3, S8).</p>	<p><i>los tendrán que resolver en plan concurso a ver quién llega a la solución correcta antes. Usar las pistas del programa resta 1 pto, acabar los primeros el ejercicio de forma correcta suma 3 ptos. El grupo con más ptos al final de la sesión gana (Anexo 3, S8)</i></p>
			<p>Recursos: PDI y Pizarra clásica para desarrollo de teoría y para la proyección de ejercicios. Ordenadores del aula de informática.</p> <p>Notas: A la hora de escoger los grupos el profesor se asegura (igual que en la sesión 5 y 7) que los alumnos con altas capacidades vayan en grupos separados, de cara a no dar ventaja a ciertos grupos. Uno o dos de los problemas tendrán una dificultad ligeramente mayor que el resto para motivar a los alumnos de altas capacidades.</p>	

			SESIÓN 9: Radianes y circunferencia goniométrica (55 min)	
AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<p>Contenido</p> <p>6. Medida de ángulos. El radian. 7. Circunferencia goniométrica.</p>	<p>Contenido</p> <p>6. Medida de ángulos. El radian. Cálculo de áreas de sectores de circunferencia. 7. Circunferencia goniométrica. Cálculo de razones para ángulos de $>90^\circ$.</p>
			<p>1. Teoría (15 min). Radianes, teoría apoyada en herramientas del software Geogebra con preguntas cortas de respuesta directa a los alumnos + ejemplo resuelto en pizarra por profesor con ayuda de alumnos (Anexo 3, S9A)</p>	<p>1. Teoría (15 min). Radianes, teoría apoyada en herramientas del software Geogebra con preguntas cortas de respuesta directa a los alumnos + ejemplo resuelto en pizarra por profesor con ayuda de alumnos (Anexo 3, S9A).</p>
				<p>2. Teoría (2 min). Explicación particular del profesor a los alumnos con altas capacidades sobre la fórmula de la superficie de un sector de circunferencia: $S = r \cdot \alpha$, (α en radianes)</p>
			<p>2. Ejercicios (15 min). Ejercicios individuales de cambio de grados a radianes (Anexo 3, S9, ej. 1a, b, c; 2a, b, c)</p>	<p>3. Ejercicios (13 min). Ejercicios individuales de cambio de grados a radianes y cálculo de sectores de circunferencia (Anexo 3, S9, ej. 1a, b; 2a, b; 3a, b, c)</p>
			<p>3. Teoría (20 min). Circunferencia goniométrica, teoría apoyada en herramientas del software Geogebra con preguntas cortas de respuesta directa a los alumnos (Anexo 3, S9B)</p>	<p>4. Teoría (20 min). Circunferencia goniométrica, teoría apoyada en herramientas del software Geogebra con preguntas cortas de respuesta directa a los alumnos (Anexo 3, S9B)</p>

				5. <i>Teoría (5 min). Explicación particular del profesor a los alumnos con altas capacidades sobre los signos de las razones en la circunferencia goniométrica para ángulos de $>90^\circ$</i>
			4. Deberes (5 min). (Anexo 3, S9, ej. 1d, e, f; 2d, e, f)	6. <i>Deberes. (Anexo 3, S9, ej. 1d, e; 2d, e; 3d, e, f)</i>
			<p>Recursos: PDI y Pizarra clásica para la explicación teórica en proyección de software Geogebra. PDI para corrección de los ejercicios.</p> <p>Notas: Mientras el profesor está con los alumnos de altas capacidades al final de la clase, el resto puede aprovechar para ir empezando los ejercicios mandados como deberes.</p>	

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	SESIÓN 10: Síntesis final (55 min)	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<p>Contenido</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Síntesis final de la unidad ○ Problemas 	
			1. Corrección de deberes (10 min). Corrección grupal de los ejercicios que quedasen como deberes de la sesión anterior.	1. <i>Corrección de deberes (10 min). Corrección grupal de los ejercicios que quedasen como deberes de la sesión anterior.</i>
			2. Síntesis de la unidad (20 min). Mirar Notas. (Anexo 3, S10, A, B, C)	2. <i>Síntesis de la unidad (20 min). Mirar Notas. (Anexo 3, S10, ej. A, B, C)</i>
			3. Problemas (25 min). Se deja la última parte de la clase para que los alumnos vayan practicando problemas en grupos de 4 y se ayuden entre ellos. Si hay alguna duda el profesor acude a ayudarlos. (Anexo 3, S10, ej. 1, 2, 3).	3. <i>Problemas (25 min). Se deja la última parte de la clase para que los alumnos vayan practicando problemas en grupos de 4 y se ayuden entre ellos. Si hay alguna duda el profesor acude a ayudarlos. (Anexo 3, S10, ej. 3, 4, 5). Ejercicios diferenciados con mayor dificultad cognitiva.</i>
			<p>Recursos: PDI y Pizarra clásica para la corrección de los problemas.</p> <p>Notas: Para la síntesis de la unidad el profesor previamente habrá establecido agrupaciones de los alumnos en grupos de 4 (grupos “madre”), y una segunda agrupación en grupos de 4 distintos (agrupaciones “satélite”). Los alumnos se disponen según las agrupaciones “satélite” y copian una parte de la síntesis de la unidad (cada grupo una parte distinta) (15 min). Posteriormente se reagrupan los alumnos según la disposición “madre” y cada alumno explica a sus compañeros la parte de síntesis que han copiado en el grupo “satélite” (15 min). Al final cada alumno debe haber la síntesis entera. El profesor recordará a los alumnos traer el Dossier de la asignatura el día del examen en la sesión siguiente.</p>	

AÑADIDA	ELIMINADA	DIFERENCIADA	SESIÓN 11: Prueba final (60 min)	
			PROPUESTA-BASE (Para todo el grupo-clase)	PROPUESTA-DIFERENCIADA (Para el alumno con altas capacidades)
			<u>Contenido</u> o Examen final	
			1. Examen del tema de trigonometría (60 min). (Anexo 3, S11, Ex. A).	1. Examen del tema de trigonometría (60 min). Examen con algunos ejercicios diferenciados. (Anexo 3, S11, Ex. B).
			<u>Recursos:</u> Fotocopias del examen. <u>Notas:</u> El día del examen el profesor recogerá el dossier de la unidad a cada uno de los alumnos que deberá cumplir los puntos explicitados en el apartado 3.2.8. de este trabajo. En este apartado también se pueden ver las características y aspectos que deberá cumplir la prueba escrita.	

3.2.7 Recursos

En el apartado de temporalización de las sesiones ya se han expuesto los recursos que utilizaremos en cada una de las clases, de todos modos aquí quedan resumidos y descritos cada uno de ellos.

- Recursos en el aula.** Los principales recursos utilizados en el aula serán la pizarra tradicional y la PDI con conexión a internet. La pizarra clásica servirá al profesor para llevar a cabo las aclaraciones pertinentes a sus explicaciones, además de servir para la resolución de los ejercicios por parte de los alumnos. De este modo se convertirá en una herramienta de participación y dinamismo en las sesiones de la unidad. Por su parte la PDI se utilizará a la hora de proyectar elementos audio-visuales (videos educativos, etc.), en la resolución de ejercicios interactivos, o como segunda pantalla donde exponer resúmenes de fórmulas o esquemas a consultar durante la resolución de ejercicios en la pizarra clásica (cosa que facilitará por otra parte su memorización). En el caso de que la escuela no cuente con internet disponible en las aulas para conectarla a la PDI, siempre se pueden llevar preparados los contenidos audiovisuales en un disco USB descargados con anterioridad.

No olvidar en este punto el recurso humano del docente, pieza indispensable como guía dinamizadora y motivador principal del proceso de enseñanza-aprendizaje.

- **Recursos en el aula de informática.** Como hemos visto algunas de las sesiones se desarrollaran en el aula de informática, por ello será necesario que el centro cuente con suficientes ordenadores como para poder llevar a cabo agrupaciones de 2-3 personas por ordenador. También sería necesaria la conexión a internet de cara a poder trabajar con el software Geogebra en línea, y posteriormente poder enviarle la actividad al profesor vía email (en su defecto el profesor se las podrá llevar en un dispositivo USB).
- **Recursos fuera del centro.** De cara a poder utilizar la plataforma virtual como canal de comunicación y descarga de ejercicios y deberes será necesario que los estudiantes dispongan de conexión a internet en sus hogares. Si este no fuese el caso siempre se podría acceder a ella desde los dispositivos móviles smartphones o tablets dado su extendida utilización en el alumnado actual.

3.2.8 Criterios de evaluación

La evaluación de la unidad didáctica se llevará a cabo de forma coherente con la metodología en la que se ha basado la misma unidad didáctica. Así, tanto para la disposición de los ejercicios, como las actividades planteadas, como la prueba final se ha tenido siempre en mente los criterios de evaluación y objetivos planteados en el apartado 3.2.3 de este trabajo. De igual manera se ha intentado que la evaluación del alumnado fuese lo más justa posible según estas directrices de “trabajo continuado” por lo que se le ha dado el mismo peso a la evaluación continua recogida en forma de dossier que al examen final según los criterios que veremos a continuación. Estos criterios de evaluación se les entregaran a los alumnos desde el primer día de curso para que los tengan claros y puedan auto-regular y planificar con tiempo su estudio. Para empezar se establecen dos variables a tener en cuenta: Contenido y Actitud.

Contenido

El contenido recoge los conceptos y procedimientos explicados en la unidad didáctica. Para evaluarlo se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

1. Dossier
 - El día del examen final el alumno entregará el dossier, que contendrá todas las actividades, explicaciones y ejercicios llevados a cabo durante las sesiones de la unidad didáctica.

- El dossier (que tendrá que estar numerado) tendrá que contener: tapa, índice, trimestre, unidad, título de la unidad, fecha, actividades, síntesis de la unidad y todas las fotocopias entregadas y pruebas hechas.
- El dossier se evaluará según el siguiente baremo:

Tabla 10. Baremo de puntuación del dossier de la U.D. (elaboración propia, 2017)

Trimestre, título de la unidad, fecha diaria	1 p
Síntesis de la unidad	1 p
Índice y páginas numeradas	1 p
Fotocopias y prueba de los tema	1 p
Actividades	6 p

2. Pruebas (Examen final)

- Se realizará una prueba escrita al finalizar la unidad didáctica, programada siempre con antelación y con un margen mínimo de una semana tras la finalización de la última sesión de la unidad.
- En caso de que un alumno no pueda realizar la prueba por motivos justificados, tendrá la oportunidad de realizarla el primer día que se incorpore a la clase de esa asignatura.
- Todas las pruebas se realizarán con bolígrafo, solo se podrá utilizar corrector de cinta y siempre llevaran el nombre, apellido y fecha.
- La prueba escrita se calificara de 0 a 10 puntos.
- Para aprobar la prueba el alumno ha de hacer bien el 50% o más de las actividades incluidas en las mismas.
- Si un alumno copia en la prueba, se le retirará la prueba y esta quedará automáticamente suspendida.
- Una vez corregidas las pruebas se devolverán para poder verlas, revisarlas y guardarlas.

La nota de contenido será la media de las notas obtenidas entre la nota del dossier y la nota del examen final. (A esta nota la llamaremos nota A).

El otorgar este gran peso a la evaluación continua es un incentivo para motivar que el alumno se esfuerce y trabaje desde el primer día, de este modo nos aseguraremos que los alumnos asimilan, comprenden y aprenden los contenidos impartidos.

Actitud

En esta variable se evaluará el comportamiento de los alumnos durante las sesiones de la unidad didáctica según el siguiente baremo:

Tabla 11. Baremo de puntuación de la actitud en la U.D. (elaboración propia, 2017)

Puntualidad. No se puede llegar tarde a clase	1 p
Preparados para comenzar la clase	1 p
Llevar siempre el material (libro, dossier, utensilios de dibujo, calculadora,...)	1 p
Atención en clase	1 p
Participación en clase	1 p
Comportamiento en clase	1 p
Actividades	4 p

(A esta nota la llamaremos nota B).

Nota de la evaluación

La nota final de la unidad didáctica se evaluará según los contenidos (80% de la nota) y la actitud (20% restante).

$$\text{Nota de la evaluación} = 0,80xA + 0,20xB$$

3.2.9 Evaluación de la unidad

En lo que respecta a la idoneidad de la propia unidad didáctica presentada esta se valorará según dos aspectos. Por un lado se podrá analizar la efectividad de la metodología, temporalización y recursos planteado primero in situ a medida que la propia unidad didáctica vaya transcurriendo (comprobando si el planning y los tiempos estimados para cada sesión se van cumpliendo), y segundo mediante el feedback recibido por parte de los alumnos tanto durante el transcurso de las sesiones como a la finalización de las mismas (este feedback se puede dar entre el profesor y los alumnos mediante intercambio distendidos de opiniones a la finalización de cada una de las clases). Por otro lado uno de los mejores “termómetros” de idoneidad de la unidad didáctica serán sin duda los resultados de las evaluaciones llevadas a cabo a los alumnos.

4 CONCLUSIONES

En este apartado se presentan las conclusiones alcanzadas en el desarrollo de esta propuesta de intervención como trabajo final de máster. A continuación repasaremos los objetivos específicos marcados en el apartado 1.2 del presente trabajo con los resultados obtenidos para cada uno de ellos.

El primer objetivo era *Averiguar y exponer las principales dificultades de aprendizaje y estudio de los conceptos trigonométricos, y con ello saber propiciar la correcta construcción del pensamiento matemático-geométrico en los alumnos*. En el análisis realizado hemos podido distinguir dos tipos de problemas cognitivos, por una banda tenemos los problemas de asimilación por parte de los alumnos, bien por deficiencias en los conceptos previos necesarios para este tema, o bien por la propia dificultad del contenido, y por otra parte los errores provenientes de una mala praxis por parte del docente. A posteriori se ha expuesto una lista con las 20 dificultades típicas a la hora de enfrentarnos a una unidad didáctica de trigonometría, viendo que un mismo error puede movilizar más de una dificultad distinta, y que cada dificultad puede tener diferentes errores asociados.

El segundo de los objetivos era *Averiguar y exponer las características y principales problemáticas asociadas a los alumnos con altas capacidades*. Para empezar, en el momento de investigar las altas capacidades hemos visto que existen distintos criterios a la hora de definir la superdotación (Benito, 2003): según el concepto de necesidades educativas especiales, la diferenciación de conceptos, o el diagnóstico clínico. De esta forma se ha podido comprobado que no existe una única definición correcta sino que partimos de una yuxtaposición de teorías. También se ha comprobado que a menudo la superdotación es confundida con otros tipos de fenómenos intelectuales que Tannenbaum (1983) definió según una serie de acepciones como: precoces, prodigios, genios, talentosos, brillantes, excepcionales, etc. Con todo ello se ha acabado exponiendo una lista con una serie de rasgos a los que responden los alumnos con altas capacidades, con características como: rapidez de retención, cantidad de información asimilable, dominio del lenguaje, destreza a la hora de resolver problemas, etc. En lo que respecta a los problemas asociados a su condición se ha podido observar que también existen varias tipologías. Por un lado tenemos la disincronía, debida a una carencia de sincronización en los ritmos del desarrollo intelectual, afectivo, físico y motor, y que puede ser tanto interna como social (Terrasier, 1985). Por otro lado se ha podido listar una serie de problemas debidos

principalmente a sus rasgos de personalidad intrínsecos (Webb, 1993), tales como: fácil aburrimiento, no soportan la inactividad, necesidad de éxito, frustración al no alcanzar unas metas demasiado altas, etc. Y por último se han visto problemas derivados de los estereotipos o tópicos que la sociedad tiene de ellos.

En lo referente al tercero de los objetivos específicos, *Investigar las distintas formas de detección y diagnóstico de las altas capacidades*, se ha podido observar que ya no es suficiente con hacer un test para medir el cociente intelectual, si no que se hace necesario el llevar a cabo un estudio más amplio según diferentes variables. Se ha podido ver pues, como existen dos grandes bloques de estudio, el primero formado por pruebas formales u objetivas tales como los test de inteligencia general, test de aptitudes específicas o pruebas de rendimiento basadas en el currículum, y un segundo bloque formados por pruebas informales o subjetivas como informes de los profesores, observación familiar, explicaciones de compañeros de aula y auto-informes (Huamán-Arismendi, 2007). Por último se han podido repasar varios ejemplos de cada uno de ellos.

En el cuarto objetivo perseguido, *Profundizar en el estudio de las propuestas existentes de respuestas educativas para alumnos con altas capacidades*, hemos analizado la legislación vigente (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa) para encontrar que las principales medidas expuestas se resumen en tres estrategias educativas básicas. La primera de ellas, aceleración o flexibilización, consistente en hacer avanzar al estudiante por el sistema educativo a un ritmo más rápido; una segunda, agrupamiento, en la cual se juntan a los estudiantes excepcionales en grupos, donde se llevan a cabo programas adecuados a sus destrezas; y por último la tercera, enriquecimiento o ajuste curricular, donde se ajustan los programas curriculares a las características y necesidades especiales del alumno con altas capacidades permitiéndole así seguir su educación en el aula ordinaria con sus compañeros habituales.

Para el quinto y último objetivo, *Exponer las metodologías y estrategias de aprendizaje más adecuadas ante los retos añadidos que presentan los alumnos con altas capacidades*, se ha tenido en cuenta que en nuestra unidad llevaríamos a cabo un enriquecimiento o ajuste curricular, y con ello una serie de cuestiones expuestas por Reyzábal et al. (2007). Entre ellas destacar que los ajustes realizados no deben representar una actuación concreta específica para el alumno de altas capacidades si no que todo el resto de alumnado también debe salir beneficiado, o que no se trata de

aumentar la cantidad de ejercicios a realizar ni de adelantar contenidos de cursos posteriores, sino de proveer los aprendizajes de un mayor grado de riqueza, profundidad e interdisciplinariedad. Por otra parte también se han expuesto tres tipologías distintas de ajustes a poder desarrollar: ajustes metodológicos y organizativos, ajustes en relación con las actividades, y ajustes en relación con los contenidos (Reyzábal, et al., 2007). Cada una de ellas con varios ejemplos ilustrativos.

De esta forma podemos concluir que el trabajo ha alcanzado los objetivos específicos marcados desde un inicio de forma satisfactoria, lo que nos ha permitido implementar los resultados obtenidos en nuestra propuesta de unidad didáctica con diferenciación para alumnos con altas capacidades en el temario de trigonometría de 4º de ESO, y por lo tanto, dar por alcanzado el objetivo principal del mismo.

5 LIMITACIONES DEL TRABAJO

Al llevar a cabo este trabajo nos hemos encontrado con varias limitaciones que se han debido sortear. Aquí dejamos una descripción de algunas de las principales:

- **Contenidos.**

A pesar de la gran cantidad de contenido disponible en internet o a través de bibliografía en bibliotecas, nos hemos encontrado con un contenido limitado a la hora de hallar información específica acerca de los procesos cognitivos y las posibles dificultades inherentes al proceso de enseñanza-aprendizaje de la propia trigonometría en sí. Es por ello que se han extrapolado algunos de estos aspectos de la trigonometría a la literatura existente sobre el tema englobada dentro del ámbito del razonamiento geométrico.

- **Factor tiempo.**

El presente trabajo también se ha visto limitado por el factor tiempo según diversas variables:

- Extensión del marco teórico. La excesiva información existente y el tiempo finito para manejarla ha hecho que tuviésemos que acotar y limitar la profundidad del mismo de cara a su finalización.
- Información sobre didáctica de las matemáticas. También se hubiese requerido más tiempo para poder recopilar más información sobre la didáctica de las matemáticas en secundaria específicamente centrada en alumnos con altas capacidades.
- Estudio de campo. El factor tiempo también ha acotado el no haber podido contrastar las propuestas teóricas con entrevistas a profesores, en las cuales diesen su punto de vista según su experiencia, más allá de las expuestas en conversaciones informales por los profesores del centro de prácticas del autor de este trabajo.

- **Implementación de la propuesta didáctica.**

A pesar de su correcto desarrollo mediante la investigación desarrollada en el marco teórico de este trabajo, no se ha podido llegar a comprobar la repercusión e idoneidad real de la unidad didáctica aquí expuesta, por falta de tiempo y medios.

6 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Una vez finalizado el presente estudio se considera interesante exponer las posibles líneas de investigación futura que se podrían desarrollar de cara a continuar con la investigación abierta en el mismo. En estas futuras líneas de investigación habría que pensar en atacar las limitaciones encontradas y expuestas en el apartado anterior, es por ello que los puntos a recoger deberían direccionarnos hacia los siguientes aspectos:

- Estudio de Campo. Con ello nos referimos a poder llegar a realizar entrevistas a profesores de matemáticas de distintos centros escolares de cara a conocer su experiencia al respecto del tema tratado. Lo ideal sería poder llegar a contactar tanto con centros ordinarios como con centros especializados en alumnos con altas capacidades de cara a poder comparar su respuesta tanto a nivel cognitivo como emocional según el entorno.
- De igual manera, la línea principal a seguir en el presente estudio sería el poder llegar a implementar en el aula de forma real la propuesta didáctica planteada. Con ello podríamos llegar a constatar los resultados obtenidos, verificar su adecuación e idoneidad, y auto-regularla en caso de encontrar deficiencias prácticas no planteadas desde un inicio.
- Finalmente, y como última línea de investigación, se podría intentar ver si los procedimientos seguidos para la adaptación de esta unidad didáctica de trigonometría de 4º de ESO a altas capacidades serían adecuados para otros temas de la asignatura o incluso para las matemáticas de cursos posteriores, como 1º o 2º de Bachillerato. En dichos cursos el nivel de abstracción de los contenidos matemáticos cada vez es superior y requieren de unas mayores exigencias de capacidad lógica por parte de los alumnos.

Por último solo recordar que es sobre los propios profesores sobre los que recae la responsabilidad del desarrollo de propuestas didácticas e implementación de metodologías prácticas de cara a mejorar la experiencia y la calidad de la enseñanza-aprendizaje para el beneficio de toda la comunidad educativa.

7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acereda, A. (2010). *Niños superdotados*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Apraiz, J. (1995). *La educación del alumnado con altas capacidades*. Vitoria-Gasteiz: Gobierno Vasco.
- Artola, T., Barraca, J., Martín, C., Mosteiro, P., Ancillo, I., Poveda, B. (2012). *PIC-J. Prueba de Imaginación Creativa – Jóvenes*. Madrid: TEA Ediciones.
- Benito, Y. (2003). La identificación: procedimientos e instrumentos. En J.A. Alonso, J. S. Renzulli y Y. Benito, *Manual internacional de superdotados. Manual para profesores y padres* (pp. 33-71). Madrid: EOS.
- Calvo, E., Rodríguez G., Varas, M., Vega, S., Zariquiey F. (2007). *Guía de respuesta educativa al alumnado de altas capacidades. Capítulo 9, Ejemplificación de unidades didácticas de diferenciación curricular*. Fundación Pryconsa. Comunidad de Madrid. Recuperado de: http://www.fundacionpryconsa.es/media/Altas_capacidades_y_aprendizaje_cooperativo.pdf
- Cayetano, J. (2015). *4º ESO. Trigonometría*. Geogebra Online, Geogebra. Recuperado de: <https://www.geogebra.org/m/WkRhsDTr#chapter/70925>
- Celma, J., Juez, X., Jurado, J., Macià, D., Rebagliato, J., Soler, N. (2016). *4º ESO Matemàtiques*. Barcelona: Cruïlla (Ed.)
- Corbalan, F. J. (2003). *CREA. Inteligencia Creativa*. Madrid: TEA Ediciones.
- DeHaan, R. F. y Havighurst, R. J. (1957). *Educating Gifted Children*. Chicago, Illinois: University of Chicago Press.
- Decreto 187/2015, de 25 de agosto, *de ordenación de las enseñanzas de la educación secundaria obligatoria*. Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, 6945, de 28 de agosto de 2015. Recuperado de: <http://portaldocgencat.cat/utillsEADOP/PDF/6945/1441278.pdf>

Departament d'Ensenyament (2013). *Altes capacitats: Detecció i actuació en l'àmbit educatiu. Guia per Mestres i Professors*. Generalitat de Catalunya. Recuperado de: http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/inclusio/altes_capacitats.pdf

Domínguez, P. y Pérez, L.F. (1999). *Perspectiva psicoeducativa de la sobredotación intelectual*. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, nº 36, pp. 93-106. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/118048.pdf>

Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de La Rioja (2016). *Guía para padres de alumnos con altas capacidades*. Consejería de Educación La Rioja. Recuperado de: <http://www.psie.cop.es/uploads/La%20Rioja/GUIA%20ALTAS%20CAPACIDADES.%20CONSEJERIA%20EDUCACION%20LA%20RIOJA%202016.pdf>

Gento, S. (2010). *Tratamiento educativo de la diversidad de personas superdotadas*. Madrid: UNED.

Gómez, M. T. y Mir, V. (2011). *Altas capacidades en niños y niñas. Detección, identificación e integración en la escuela y en la familia*. Madrid: Narcea S.A. de Ediciones.

González, E. (1999). *Necesidades Educativas Especiales. Intervención Psicoeducativa*. Madrid: Editorial CCS.

Huamán-Arismendi, L. (2007). *Concepciones de los Profesores de la Educación de Perú acerca de la inclusión de las Altas Capacidades*. Recuperado de <http://www.redem.org/boletin/files/Art%20sobre%20percepcion%20en%20altas%20capacidades%20Luciano.doc>

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, *de Educación*. Boletín Oficial del Estado (4 de mayo de 2006), núm. 106, pp. 17158-17207. Recuperado de: <http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, *para la mejora de la calidad educativa*. Boletín Oficial del Estado (10 de diciembre de 2013), núm. 295, pp. 97858-97921. Recuperado de: <https://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf>

Martín, J., González, M. T. y López, P. (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades*. Madrid: CIDE-MEC.

Orden ECD/1361/2015, de 3 de julio, *por la que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, y se regula su implantación, así como la evaluación continua y determinados aspectos organizativos de las etapas*. Boletín Oficial del Estado (9 de julio de 2015), núm. 163, pp. 56936-56962. Recuperado de: <https://www.boe.es/boe/dias/2015/07/09/pdfs/BOE-A-2015-7662.pdf>

Pérez, L. y López, C. (2007). *Hijos Inteligentes ¿educación diferente?* Madrid: Editorial San Pablo.

Phenix, P. H. (1964). *Realms of meaning: a philosophy of the curriculum for general education*. New York: McGraw-Hill Book Co.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, *por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado (3 de enero de 2015), núm. 3, pp. 169-546. Recuperado de: <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>

Renzulli, J. S. y Reis, S. M. (1992). *El modelo de enriquecimiento triádico/puerta giratoria: un plan para el desarrollo de la productividad creativa en la escuela*. En Y. Benito (coord.): *Desarrollo y educación de los niños superdotados* (pp. 261-304). Salamanca: Amarú Ediciones.

Reyzábal, M. V., Alonso, L., Arias, L., Boal, M. T., Expósito, M., León, M., López, B., López, T., Otero, P. (2007). *Respuestas educativas al alumnado con altas capacidades intelectuales. Guía para elaborar el Documento Individual de Adaptaciones Curriculares de ampliación o enriquecimiento*. Comunidad de Madrid. Consejería de Educación. Recuperado de: <http://www.madrid.org/bvirtual/BVCM001680.pdf>

- Richert, E.S.; Alvino, J. J. y McDonnel, R.C. (1982). *National Report on Identification: Assessment and Recommendations for Comprehensive Identification of Gifted and Talented Youth*. New Jersey: A Product of the Educational Information and Resource Center.
- Tannenbaum, A. J. (1983). *Gifted children; psychological and educational perspectives*. New York: MacMillan.
- Terrasier, J. (1985). *Los niños superdotados. Aspectos psicológicos y pedagógicos*. Madrid: Santillana, Aula XXI.
- Torregrosa, G y Callejo, M. L. (2011). Procesos matemáticos en la educación secundaria. En J.M. Goñi (Coord.). *Matemáticas Complemento de formación disciplinar* (pp. 29-56). Barcelona: Graó.
- Video de youtube (2013). *Eratóstenes y la medida de la tierra*. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=2tmiWjLSMcA>
- Webb, J. T. (1993). Nurturing social-emotional development of the gifted. En K. A. Heller, F. J. Mönks, y A. H. Passow (Eds.), *International handbook for research and development of giftedness and talent* (pp. 525-538). Oxford: Pergamond Press.

8 ANEXOS

8.1 Anexo 1. Cuestionario para la detección de altas capacidades (9-14 años). Pérez (2007)

Marcar con una cruz el valor correspondiente entre las cuatro posibilidades. El valor 1 significa que no se observa nunca o casi nunca, y el valor 5 que se manifiesta en su grado máximo.

1 = nunca 2 = casi nunca 3 = a menudo 4 = casi siempre 5 = siempre

INDICADORES		VALORACIÓN				
1	Se desenvuelve bien en situaciones cotidianas, con una facilidad inusual y admirable	1	2	3	4	5
2	Tiene sentido del humor	1	2	3	4	5
3	Demuestra un espíritu observador, agudo y despierto	1	2	3	4	5
4	Es atento, detallista y exquisito en el trato	1	2	3	4	5
5	Considera las situaciones problemáticas como un reto	1	2	3	4	5
6	Demuestra curiosidad por saber de todo, aunque no se haya explicado en clase	1	2	3	4	5
7	Es muy sensible ante los fracasos, injusticias y la incomprensión	1	2	3	4	5
8	Es persistente y perfeccionista en las tareas que emprende	1	2	3	4	5
9	Sus intereses son múltiples y variados	1	2	3	4	5
10	Sobresale entre los compañeros porque comprende las explicaciones y las asimila rápidamente	1	2	3	4	5
11	Prefiere relacionarse con compañeros mayores	1	2	3	4	5
12	Frecuentemente vive abstraído en su mundo interior, como distraído	1	2	3	4	5
13	Sobresale por su disponibilidad y responsabilidad en las tareas de grupo	1	2	3	4	5
14	Tiene una comprensión global y diferencia con facilidad aquello principal de lo secundario	1	2	3	4	5
15	Resuelve problemas acertando rápidamente el resultado	1	2	3	4	5
16	Utiliza y organiza muchas estrategias para estudiar y aprender	1	2	3	4	5
17	Se organiza de tal forma que tiene tiempo para todo	1	2	3	4	5
18	El vocabulario y la fluidez verbal son ricos y elaborados para su edad	1	2	3	4	5

19	Le apasiona la lectura y devora libros y cuentos	1	2	3	4	5
20	Sus preguntas son incisivas	1	2	3	4	5
21	Tiene una imaginación desbordante y creativa	1	2	3	4	5
22	Se aburre y muestra desgana en las clases rutinarias	1	2	3	4	5
23	Es muy maduro para su edad	1	2	3	4	5
24	Si está concentrado le molesta que le interrumpen	1	2	3	4	5
25	Transfiere con facilidad los conocimientos y las estrategias aprendidas a otros contenidos y situaciones	1	2	3	4	5
26	Capta con perspicacia las motivaciones de la gente, sus puntos débiles, necesidades y comprende sus problemas	1	2	3	4	5
27	Reproduce con exactitud los contenidos que ha aprendido	1	2	3	4	5
28	Posee una gran información de temas complejos para su edad	1	2	3	4	5
29	No está satisfecho del ritmo de su trabajo. Siempre está seguro de que se puede mejorar	1	2	3	4	5
30	Es autosuficiente y autodidacta. Pide poca ayuda al profesor	1	2	3	4	5
PUNTUACIÓN TOTAL						

Si la puntuación obtenida es superior a 70 puntos es conveniente que un especialista confirme las altas capacidades.

8.2 Anexo 2. Modelo de Plan Individualizado.

Logotipo del centro

Alumno/a		
Fecha de nacimiento		
Dirección	Curso	Teléfono
Etapa		Año Académico
Tutor/a		Profesionales implicados
Centro Educativo		Localidad
Dirección		Teléfono

1. Justificación

(Breve descripción de los motivos por los cuales se realiza el PI)
--

2. Duración prevista del plan individualizado

Vigencia	Curso.....	Curso.....	Curso.....
Fecha de inicio			
Previsión de seguimiento (trimestral, cada final de curso, etc)			

3. Propuesta de trabajo y horario en que se realizará (lectivo y post-lectivo)

Programa/ adaptación/ actividades que se realizaran

Día	Horario	Materia	Actividades
Lunes			Descripción sintética
Martes			
Miércoles			
Jueves			
Viernes			
Sábado			
Domingo			

4. Reuniones de seguimiento

Fecha	Resumen reunión

Firma del tutor/a

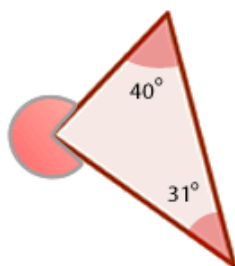
Firma de los padres

8.3 Anexo 3. Ejercicios de las sesiones de la propuesta didáctica.

SESIÓN 1: Presentación de la unidad y evaluación del nivel de los alumnos

Evaluación Inicial (www.vitutor.com)

1. De un triángulo cualquiera sabemos que tiene un ángulo de 35° y otro de 83° , entonces ¿cuánto mide el tercer ángulo?
2. ¿Cuál es la medida del ángulo exterior marcado en este dibujo? ¿Y la medida del ángulo interior que falta?



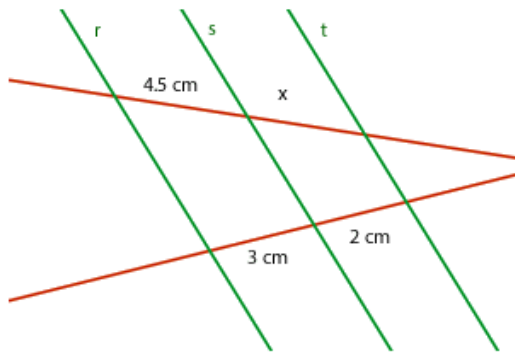
3. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y uno de sus catetos mide 20 cm. ¿Cuál es la medida del otro cateto?
4. Tenemos dos triángulos. Un triángulo A cuyas medidas son 8, 15, 17 y otro triángulo B de medidas 7, 23 y 25. ¿Estos triángulos son triángulos rectángulos? ¿Por qué?
5. Una escalera de 8.2 m de altura se apoya con el pie a 5,3 m de la pared para arreglar un problema que hay en la azotea de una casa. ¿A qué altura se encuentra la azotea?
6. Un triángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm es semejante a otro triángulo de lados 7,5 cm, 18 cm y _____.
7. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad de los triángulos del ejercicio anterior?
8. Calcula los triángulos semejantes a un triángulo con lados $a = 9$ cm, $b = 21$ cm, $c = 15$ cm con una razón $r = 2,5$
9. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación. En caso de que alguna solución sea una fracción escríbela de forma a/b .

$$\begin{cases} 5x + 4y = 10 \\ x - y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x-5y}{2} - 7 = 2 \\ \frac{3x}{6} + 5y = 3 \end{cases}$$

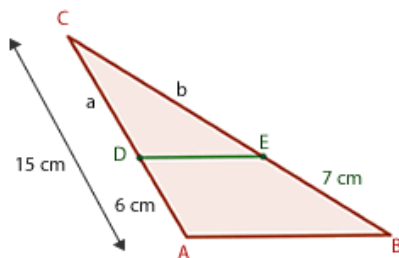
10. La edad de un niño y la de su padre suman 49. Sabemos que la edad del padre menos el doble de la edad del hijo es igual a 25, ¿cuál es la edad de ambos?

Deberes (www.vitutor.com)

11. Sabiendo que las rectas r , s y t son paralelas, ¿cuál es la longitud de x ?



12. Sabiendo que el segmento DE es paralelo a la base del triángulo, ¿Cuáles son las medidas de los segmentos a y b ?

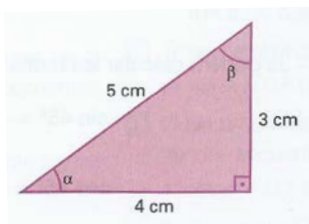


13. ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 26 cm y que su base es el triple de su altura?

SESIÓN 2: Razones Trigonómicas

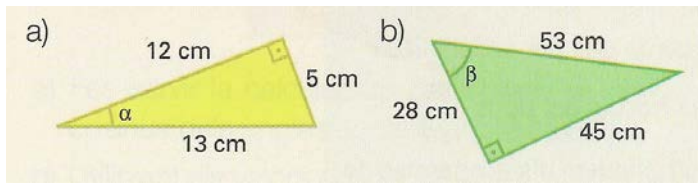
Ejemplo (Ed. Cruilla, 2016)

1. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos α y β del triángulo siguiente.

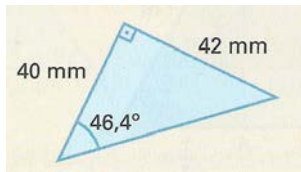


Ejercicios (Ed. Cruilla, 2016)

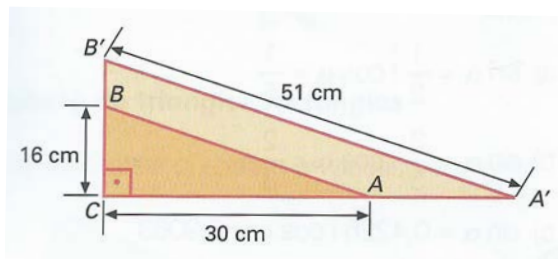
2. Indicar en estos triángulos el cateto opuesto i el cateto contiguo del ángulo α y del ángulo β . Después calcular sus razones trigonométricas.



3. Un triángulo rectángulo es semejante al del dibujo y tiene una hipotenusa de 87 mm. Indica la amplitud de sus ángulos y las longitudes de sus catetos.



4. Encuentra las razones trigonométricas de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo que tiene la hipotenusa de 58 cm y uno de los catetos de 40 cm.
5. Plantamos dos palos, uno de ellos el triple de largo que el otro en el mismo momento de un día soleado, el palo pequeño proyecta una sombra que mide las dos terceras partes de su altura. El palo grande proyecta una sombra de 2.5 m. ¿Cuánto mide cada palo?
6. Considera estos triángulos:



- a) ¿Son semejantes los triángulos ABC y A'B'C'?
- b) Encuentra las longitudes de los lados CB' y CA'.
- c) Calcula las razones trigonométricas del ángulo B. ¿Serán las mismas que las del ángulo B'? Razónalo.

SESIÓN 3: Cálculo de razones trigonométricas

Ejemplos

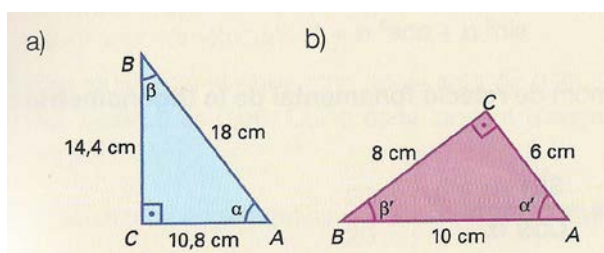
1. a) Completa esta tabla de razones trigonométricas con ayuda de la calculadora.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin					
cos					
tg					

- b) Razona y argumenta los resultados para 0° y 90°.
2. Transforma 23,5625° en grados, minutos y segundos. Primero manualmente y luego comprueba el resultado con la calculadora.

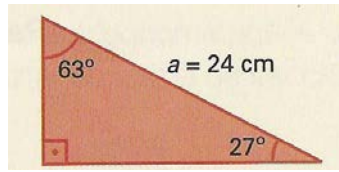
Ejercicios (Ed. Cruilla, 2016)

3. Calcula las siguientes razones trigonométricas redondeando el valor con 4 cifras decimales:
- a) $\sin 24^\circ$ c) $\cos 12^\circ$ e) $\operatorname{tg} 79^\circ$
 b) $\operatorname{tg} 52^\circ$ d) $\sin 88^\circ$ f) $\cos 2,5^\circ$
4. Tanto el seno como el coseno de un ángulo de 45° dan lo mismo.
 a) ¿Por qué?
 b) ¿Hay algún otro ángulo que tenga igual el seno y el coseno?
5. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos α y β de estos triángulos. ¿Qué observas?



6. Ordena de más pequeño a más grande los ángulos que tienen las siguientes razones trigonométricas:
- a) $\cos A = 0,7658$ c) $\sin C = 0,1729$ e) $\cos E = 0,5346$
 b) $\sin B = 0,8702$ d) $\operatorname{tg} D = 2,2015$ f) $\sin F = 0,5$

7. Tenemos este triángulo:



- Haz servir la calculadora para obtener el seno y el coseno de los ángulos agudos de este triángulo.
 - Utilizando los valores obtenidos de las razones trigonométricas, calcula los catetos del triángulo.
 - ¿Es necesario utilizar las razones de los dos ángulos o bastaría con la de uno? Explícalo.
8. Completa en tu cuaderno la tabla siguiente con los valores de las razones trigonométricas que se piden redondeadas a las centésimas:

	Seno	Coseno	Tangente
4° 40' 40''			
75° 30' 3''			
58° 16''			

SESIÓN 4: Relaciones entre razones trigonométricas

Ejemplos (Ed. Cruilla, 2016)

- El seno de un ángulo agudo α es 0,7. Utilizando las relaciones entre razones trigonométricas, calcula el coseno y la tangente de este ángulo.
- Calcula el coseno de un ángulo agudo α sabiendo que $\text{tg } \alpha = 2$.

Ejercicios (Ed. Cruilla, 2016)

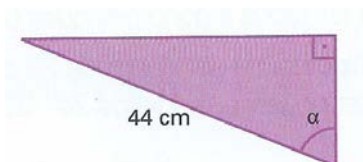
- Nos dicen que el seno de un ángulo agudo es 0,28 y su coseno es 0,96. ¿Cuál es la tangente de este ángulo?
- El seno de un ángulo agudo es $\frac{20}{29}$. Encuentra el valor exacto del coseno y su tangente utilizando las relaciones entre las razones trigonométricas.
- Encuentra el seno y el coseno de un ángulo agudo α utilizando las relaciones entre las razones trigonométricas y sabiendo que $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$.
- Demuestra que para cualquier ángulo de α se cumple la igualdad: $1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
- Calcula las razones trigonométricas del ángulo β . Expresa el resultado en forma de fracción irreducible. Comprueba que los valores de las razones obtenidas cumplen que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ y $\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

SESIÓN 5: Sesión de repaso

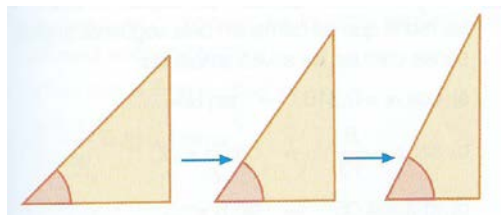
Ejercicios (Ed. Cruilla, 2016)

1. Un triángulo rectángulo tiene los catetos de 9 y 12 cm respectivamente. Otro triángulo semejante tiene una hipotenusa de 25 cm. Calcula la longitud de sus catetos.

2. En este triángulo el seno del ángulo α es igual a $\frac{5}{8}$



- a) ¿Qué longitud tiene el cateto opuesto al ángulo α ?
b) ¿Cuánto mide el cateto contiguo a α ?
3. Al calcular las razones trigonométricas de un ángulo α , Pilar ha obtenido que su seno es igual a $\frac{9}{6}$. Irene le dice muy convencida que este resultado es erróneo. ¿Cómo puede estar tan segura?
4. Sabemos que la tangente de uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es igual a 1. ¿De qué tipo de triángulo rectángulo se trata?
5. Dibuja un triángulo rectángulo de manera que la tangente de uno de sus ángulos agudos sea $\frac{5}{8}$.
6. Tenemos esta sucesión de ángulos y triángulos. Al aumentar el ángulo, ¿el seno aumenta o disminuye?, ¿y el coseno?, ¿y la tangente? Razona la respuesta.

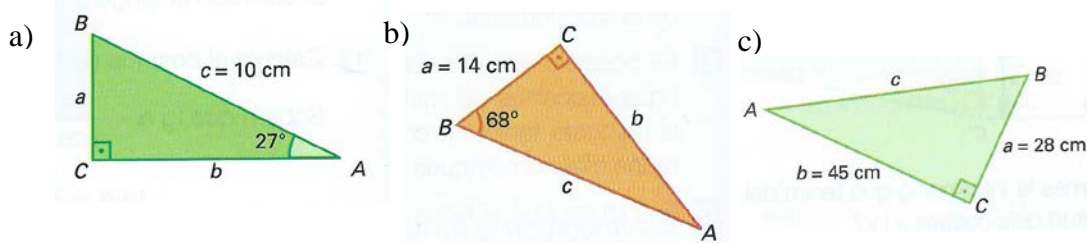


7. Utilizando la calculadora, determina a que ángulos agudos corresponden las siguientes razones trigonométricas:
- a) $\operatorname{tg} A = 1,3452357$ b) $\sin B = 0,759357289$ c) $\cos C = \frac{6}{11}$
8. Calcula el valor de la tangente del ángulo agudo β sabiendo que $\sin \alpha = \frac{2}{5}$. Para hacerlo utiliza las relaciones entre las razones trigonométricas.

SESIÓN 6: Resolución de triángulos rectángulos

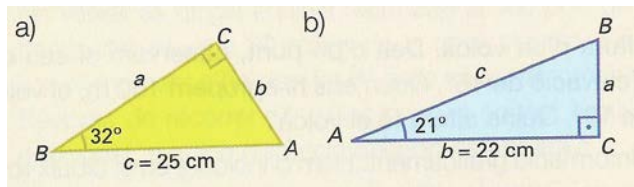
Ejemplos (Ed. Cruilla, 2016)

1. Encuentra los lados y los ángulos que faltan en los siguientes triángulos rectángulos.

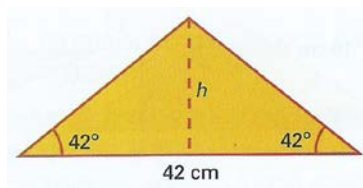


Ejercicios (Ed. Cruilla, 2016)

2. Calcula los ángulos y los lados que faltan:



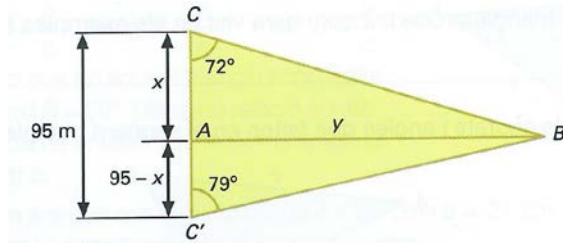
3. Resuelve los triángulos rectángulos siguientes:
- Hipotenusa $c = 12$ cm y ángulo $B = 40^\circ$
 - Cateto $b = 108$ cm y ángulo $B = 81^\circ$
 - Cateto $a = 8$ cm y ángulo $A = 16^\circ$
4. La hipotenusa de un triángulo rectángulo hace 18 cm y uno de los catetos mide 10 cm. Encuentra el lado y los ángulos desconocidos.
5. Las vigas de madera que soportan la cubierta de un tejado hacen 5 m de longitud. Estas vigas descansan sobre otra viga de 8 m dispuesta horizontalmente de manera que las tres vigas forman un triángulo isósceles.
- ¿Qué ángulo forman las vigas de 5 m?
 - ¿Qué ángulo forman sobre la viga en la que descansan?
6. Calcula la altura de este triángulo isósceles:



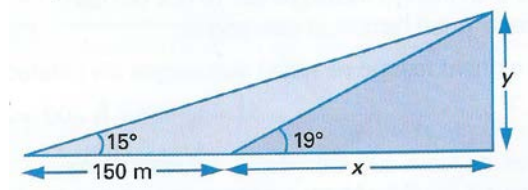
SESIÓN 7: Resolución de problemas (1)

Ejemplos (Ed. Cruilla, 2016)

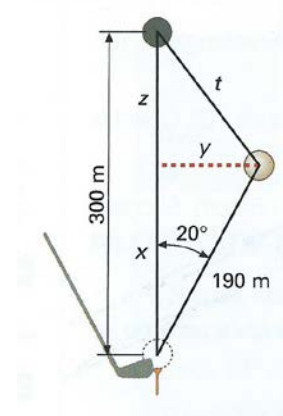
- Un equipo de topógrafos ha estado tomando medidas en una zona que ocupará el trazado de una autopista. Entre sus anotaciones aparece el siguiente esquema. Encuentra los valores de x e y .



- Queremos saber la altura de una montaña. Desde un punto, observamos su pico con un ángulo de elevación de 15° . Cuando nos acercamos 150 m, lo vemos con un ángulo de 19° . ¿Cuál es la altura de la montaña?



- Un jugador de golf lanza la pelota desde la posición de salida hasta el primer hoyo, que está a 300 m. La tirada ha sido floja y solo ha llegado a los 190 m, y la dirección de la bola ha formado un ángulo de 20° respecto a la dirección del hoyo. ¿A cuántos metros ha quedado la pelota del agujero?



Ejercicios

- Dibuja los triángulos derivados de los siguientes enunciados (con los datos y las incógnitas) y expone las ecuaciones que usarías para resolver el problema (sin resolverlas).
 - Tenemos dos pueblos, A y B, que están separados por una montaña. Desde el pueblo A sale un teleférico (con un ángulo de 21°) que sube hasta la cima de la montaña y vuelve a bajar hasta el pueblo B. Para construirlo necesitaron 710 m de cable del pueblo A en la cima, y 502 m de cable de la cima al pueblo B (cables totalmente tensados). Calcula la distancia entre los dos pueblos y el ángulo de llegada del teleférico al pueblo B.
 - Un faro ilumina el mar por la noche con un haz de luz de manera que el rayo más alejado del faro llega a la costa recorriendo 350 m con un ángulo de 5° . ¿Si el haz de luz barre 200 m de mar, cuál es la altura del faro? ¿Y el ángulo de entrada al mar del rayo más acercado al faro?

- c) Jaime y Andrea están jugando al videojuego del Dragon Ball en la X-Box 360. Están jugando en parejas contra el malo final de la pantalla. Parece que el malo puede volar y ellos no, así que deciden hacer un ataque simultáneo para derrotarlo poniéndose cada uno a un lado del malo que los sobrevuela. Si sus personajes están a 60 metros de distancia y el Kamehame del Jaime sale con un ángulo de 35° y el de Andrea con un ángulo de 50° , calcula a qué altura se encuentra el malo del suelo.
- d) Un barco en alta mar quiere fondear pero hay muy mala mar así que suelta dos anclas en vez de una para asegurar. Justo en esa zona el fondo marino no es recto sino que tiene una inclinación de 22° y un ancla se clava al llegar a tierra pero la otra resbala hasta llegar a una zona de fondo plano. Considerando que la primera ancla ha soltado 27 m de cadena, que esta hace un ángulo de 31° con la cadena de la segunda ancla y que ambas cadenas están tensas, ¿cuánto mide la cadena de la segunda ancla?

SESIÓN 8: Resolución de problemas (2) -Aula de informática-

Problemas Geogebra (Cayetano, 2015)

- <https://www.geogebra.org/m/WkRhsDTr#chapter/70925>

< 2.2. >

Doble Observación (con Ángulo de depresión)

Propone, y muestra problemas de cómo calcular distancias usando dos observaciones de ángulos desde un punto elevado, y trigonometría.

Por simplificar, se supondrá que todos los puntos están en el mismo plano.



Datos aleatorios

Ver Solución

Considerar Alturas

Otro Ejercicio

◀ Pista

Un helicóptero de la policía vuela a 82m. Desde allí, con un ángulo de depresión de 29.07° ve a un ladrón, y a un policía con un ángulo de 53.16° . Si cada uno se encuentra a un lado del helicóptero, calcula la distancia entre el policía y el ladrón, y la distancia de cada uno al lugar que sobrevuela el helicóptero.



SESIÓN 9: Radianes y circunferencia goniométrica

Ejemplo Geogebra (Cayetano, 2015)

A. <https://www.geogebra.org/m/WkRhsDTr#material/ZeejreMw>

¿Qué es un RADIÁN?

Un RADIÁN es el ángulo que aparece cuando la longitud del arco de la circunferencia, mide lo mismo que el radio.
El radián no depende del tamaño de la circunferencia.

Una circunferencia completa tiene de ángulo:

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianes}$$

Anima el deslizador del ángulo que aparece en la parte de arriba a la derecha y podrás observar como aparecen los distintos ángulos, tanto en radianes como en grados sexagesimales.

¿QUÉ ES UN RADIÁN?

radio = 4.1 $\alpha = 205.2^\circ$

3 Radianes = 171.89°.

Cuando la longitud del arco mida lo mismo que mide el radio, diremos que el ángulo mide 1 radián.

El ángulo en radianes no depende del tamaño de la circunferencia.

1 Radián = 57.3°

La longitud del arco de circunferencia es de 14.68.

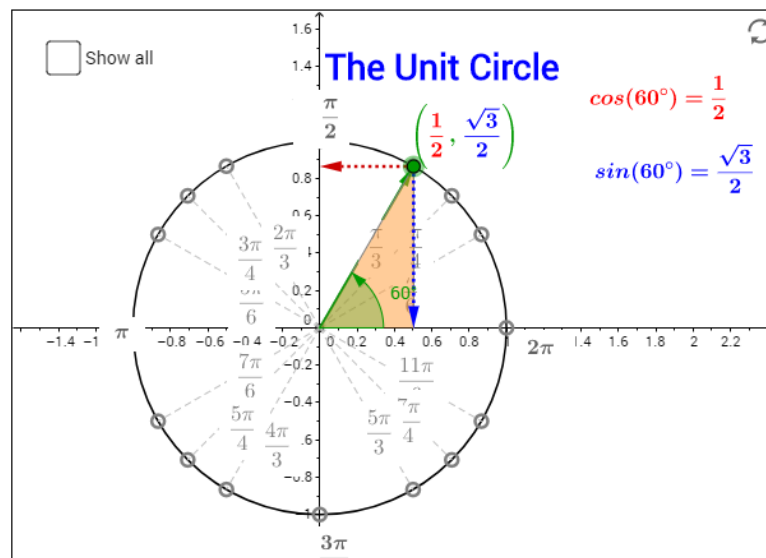
El ángulo en grados es de 205.2° que son 3.58 radianes.

1 Radián 2 Radianes 3 Radianes 4 Radianes 5 Radianes 6 Radianes Arco en grados

B. <https://www.geogebra.org/m/WkRhsDTr#material/G7xgNRxm>

Unit Circle - exact values

Investigate the exact trigonometric values by dragging the green dot around the unit circle.



Do you observe any patters with the sine and cosine functions relating to the coordinates?

Ejercicios y deberes

1. Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos:
a) 3 rad c) $2\pi/5$ rad e) $3\pi/10$ rad
b) π rad d) 1 rad f) $3\pi/4$ rad
2. Expresa en radianes los siguientes ángulos:
a) 315° c) 95° e) $60^\circ 32' 45''$
b) $27,87^\circ$ d) $0^\circ 56'$ f) 360°
3. Calcula el área de un sector de circunferencia con los siguientes grados:
a) 27° c) 2π rad d) $60^\circ 32' 45''$
b) $\pi/2$ rad d) $76^\circ 34' 32''$ f) 4 rad

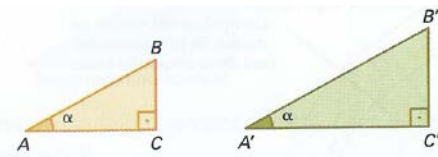
SESIÓN 10: Síntesis final

Síntesis de la Unidad (Ed. Cruilla, 2016)

A. TRIÁNGULOS SEMEJANTES

o Criterios de semejanza de triángulos rectángulos.

- o Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.
- o Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen dos parejas de lados proporcionales.



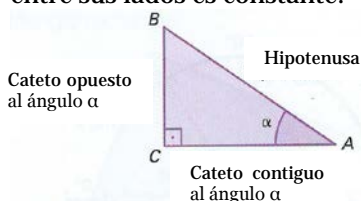
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}, \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}, \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

En un triángulo rectángulo, tener dos parejas de lados proporcionales equivale a tenerlos los tres.

B. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

o Lados de un triángulo rectángulo.

Dado un ángulo agudo, podemos encontrar infinidad de triángulos rectángulos que lo contengan. Todos estos triángulos son semejantes y, por tanto, la proporción entre sus lados es constante.



o Seno, coseno y tangente

$$\sin\alpha = \frac{A}{B} = \frac{\text{Longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{Longitud de la hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{B} = \frac{\text{Longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{Longitud de la hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A}{B} = \frac{\text{Longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{Longitud del cateto contiguo a } \alpha}$$

○ **Relaciones entre las razones trigonométricas.**

Dado un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, se cumple:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

La primera fórmula se conoce como la relación fundamental de la trigonometría.

○ **Razones trigonométricas de ángulos conocidos.**

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

C. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

○ **Resolución de triángulos rectángulos**

Resolver un triángulo consiste en determinar los ángulos o lados desconocidos. Podemos utilizar:

- La propiedad de que sus ángulos agudos suman 90°.
- La definición de seno, coseno y tangente.
- El teorema de Pitágoras.

○ **Información mínima para resolver un triángulo**

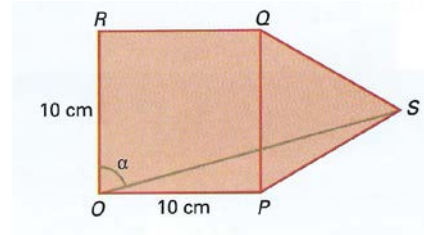
Podemos resolver un triángulo rectángulo con esta información mínima:

- Conociendo uno de los ángulos agudos (o una razón del ángulo) y uno de sus lados.
- Conociendo dos lados.

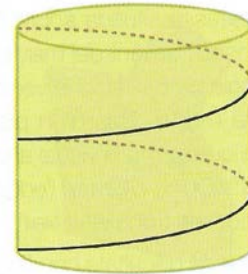
Ejercicios (Ed. Cruilla, 2016)

1. La torre Eiffel tiene una altura de 324 m. Lucia está sentada delante, a una cierta distancia. Desde su sitio ve el punto más alto de la torre con un ángulo de 50° respecto al suelo. Desde el mismo sitio el ángulo que forma con el suelo la visual al segundo piso es de 29° 23' 56".
 - a) ¿A qué distancia de la torre está sentada Lucia?
 - b) ¿a qué altura se encuentra el segundo piso?
2. Desde un punto vemos una montaña con un ángulo de 27° respecto a la horizontal. Después de caminar 340 m en dirección a la montaña por un camino horizontal, el ángulo de la visual pasa a ser 36° 23'. ¿Cuál es la altura de la montaña respecto al plano?
3. En una carrera de motos por el desierto, dos participantes salen en línea recta de un mismo punto con trayectorias que forman un ángulo de 23°. Pasados 12 minutos, un motorista ha recorrido 21 km y el otro 17 km.
 - a) Representa el esquema de la situación
 - b) ¿Qué distancia los separa en este momento?

4. Encuentra el ángulo α y la distancia OS teniendo en cuenta que los polígonos OPQR y PQS son respectivamente un cuadrado y un triángulo equilátero.



5. Una cuerda da vueltas a un cilindro como se puede observar en este dibujo. El cilindro tiene una altura de 14 cm y su base tiene un perímetro de 24 cm. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?



SESIÓN 11: Prueba final

A. EXAMEN TRIGONOMETRÍA (Versión ordinaria)

1. Responde de manera breve y razonadamente las siguientes cuestiones:
- ¿Puede ser 1,5 el seno de un ángulo? Justifica tu respuesta mediante un dibujo. (0,5 puntos)
 - Si la tangente de un ángulo es igual a 1. ¿De qué tipo de triángulo rectángulo se trata? ¿Por qué? (0,5 puntos)
- 2.
- Calcula los siguientes términos redondeando con 5 decimales: (1 punto)

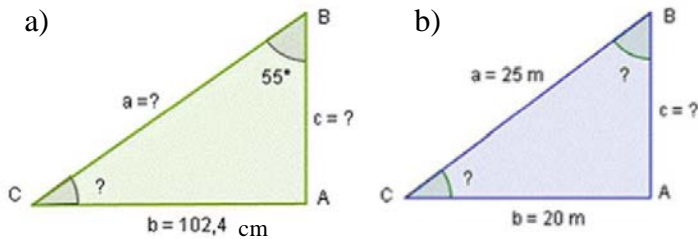
	Seno	Coseno	Tangente
23°			
63° 23' 37"			

- Calcula los ángulos que provocan estas razones trigonométricas (expresadas en grados, minutos y segundos en el caso que convenga): (1 punto)

	Ángulos
sin A = 0,8829476	
cos B = 0,8086321	
tg C = 190,9841864	

3. Encuentra todas las razones trigonométricas del ángulo α si sabemos que $\sin \alpha = 4/5$. (1 punto)

4. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos (da todos los datos que faltan redondeando los lados con 1 decimal y los ángulos con 2). (2 puntos):



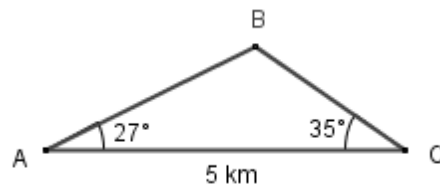
5. Una persona en posición vertical proyecta una sombra de 180 cm cuando los rayos del sol forman un ángulo de 44° con la horizontal. ¿Cuál es la altura de esta persona? (1 punto)

6. Desde un punto del suelo vemos una torre con un ángulo de 55° . Si retrocedemos 30 m vemos de nuevo la torre con un ángulo de 25° . Calcula la altura de la torre. (1 punto)

7. En dos comisarías de policía, A i C, se escucha la alarma de un banco B. Con los datos de la figura, calcula:

a) la distancia más corta del banco a la carretera que une las dos comisarías (1 punto)

b) la distancia del banco a cada una de las comisarias. (1 punto)



B. EXAMEN TRIGONOMETRÍA (Versión alumnos con altas capacidades)

1. Responde de manera breve y razonadamente las siguientes cuestiones:

- ¿Puede ser 1,5 el seno de un ángulo? Justifica tu respuesta mediante un dibujo. (0,25 puntos)
- Si la tangente de un ángulo es igual a 1. ¿De qué tipo de triángulo rectángulo se trata? ¿Por qué? (0,25 puntos)
- ¿Puede pasar que el seno y el coseno de un ángulo coincidan? ¿Cuándo pasaría esto? (0,25 puntos)
- ¿Si un ángulo α aumenta, el seno aumenta o disminuye? ¿y el coseno? ¿y la tangente? Razona la respuesta. (0,25 puntos)

2.

- Calcula los siguientes términos redondeando con 5 decimales: (1 punto)

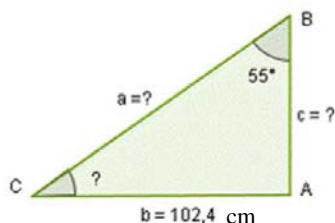
	Seno	Coseno	Tangente
$63^\circ 23' 37''$			
102°			
$273^\circ 43' 67''$			

- Calcula los ángulos que provocan estas razones trigonométricas (expresadas en grados, minutos y segundos en el cas que convenga): (1 punto)

	Ángulos
$\sin A = 0,8829476$	
$\cos B = 0,8086321$	

- Encuentra todas las razones trigonométricas del ángulo α si sabemos que $\sin \alpha = 4/5$. (1 punto)

- Resuelve los siguientes triángulos rectángulos (da todas los datos que faltan redondeando los lados con 1 decimal y los ángulos con 2). (1 punto):



5. Calcula el área de un sector de circunferencia con los siguientes grados (1 punto):
- a) $60^{\circ} 32' 45''$ b) $3\pi / 2$ rad
6. Un padre sale a pasear al parque con su hijo. El padre es el triple de alto que el hijo. En un momento determinado el padre proyecta una sombra de 1,2 m y su hijo proyecta una sombra de dos terceras partes de su altura ¿Cuál es la altura de cada uno de ellos? (1 punto)
7. Desde un punto del suelo vemos una torre con un ángulo de 55° . Si retrocedemos 30 m vemos de nuevo la torre con un ángulo de 25° . Calcula la altura de la torre. (1 punto)
8. En dos comisarías de policía, A i C, se escucha la alarma de un banco B. Con les datos de la figura, calcula:
- a) la distancia más corta del banco a la carretera que une las dos comisarías (1 punto)
- b) la distancia del banco a cada una de les comisarias. (1 punto)

