



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA MEDIANTE EL TRABAJO COOPERATIVO EN 4º DE ESO

Presentado por: Joana Fernández Vázquez
Línea de investigación: Métodos pedagógicos
Directora: Ana Isabel Leal García

Ciudad: Bilbao
Fecha: 21 de Octubre de 2013

RESUMEN

El presente trabajo se ha dividido en dos partes bien diferenciadas. En la primera, se ha analizado la situación actual de la enseñanza de las matemáticas, tomando como referencia resultados de estudios anteriores, como son el informe PISA y la Evaluación General de Diagnóstico. A través de este marco teórico se pretenden detectar las distintas dificultades que presentan los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el álgebra, para su posterior análisis. Dentro de esta primera parte, también se ha realizado una investigación bibliográfica sobre el trabajo cooperativo, haciendo especial hincapié en su efectividad en el campo matemático.

Para finalizar, en la segunda parte se describe el estudio de campo realizado con alumnos de 4º curso de la ESO del colegio Nuestra Señora de las Mercedes de Leioa en la provincia de Vizcaya, con el fin de comprobar las deducciones extraídas del marco teórico desarrollado en la primera parte.

Una vez analizados los datos obtenidos tanto de la investigación bibliográfica como del estudio de campo, se ha llegado a la conclusión de que el trabajo cooperativo es una herramienta idónea para mejorar los resultados académicos de los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria en el área matemática del álgebra.

Palabras claves: Matemáticas, Álgebra, Trabajo cooperativo, Educación Secundaria.

SUMMARY

The present work consists of two separate sections. First section studies the current state of mathematics education, taking as a reference results in previous surveys such as the PISA study and the Evaluación General de Diagnóstico. The use of this theoretical framework aims for detecting different challenges middle school students face while learning mathematics, with a special focus on algebra, for posterior analysis. In addition, bibliographical research concerning cooperative education and its effectiveness in mathematical education is included.

Second section describes the field work carried out with 4th of ESO students from Colegio Nuestra Señora de las Mercedes in Leioa, in order to test the empirical validity of the theoretical conclusions derived from first section.

Analysis of data obtained from both the bibliographical research and the field work yields the conclusion that cooperative education is an optimum tool in order to improve middle school students' academic performance in the mathematical field of algebra.

Key words: Mathematics, Algebra, Cooperative education, Middle School.

ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN.....	4
1.1.	JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO Y SU TÍTULO.....	4
1.2.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
1.3.	OBJETIVOS	7
1.4.	BREVE FUNDAMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA	7
1.5.	BREVE JUSTIFICACIÓN DE LA BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA	8
2.	DESARROLLO.....	10
2.1.	FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	10
2.1.1.	SITUACIÓN ACTUAL DEL ALUMNADO DE 4º DE ESO EN LA COMPETENCIA MATEMÁTICA.....	10
2.1.2.	PROBLEMAS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA DE LOS ALUMNOS DE 4º DE ESO	12
2.1.3.	TRABAJO COOPERATIVO	14
2.2.	MATERIALES Y MÉTODOS	19
2.2.1.	DESCRIPCIÓN DEL CENTRO.....	20
2.2.2.	MUESTRA.....	21
2.2.3.	CUESTIONARIO.....	22
2.3.	RESULTADOS Y ANÁLISIS	22
2.3.1.	CUESTIONARIO.....	22
2.3.2.	EXÁMENES	28
3.	PROPUESTA PRÁCTICA.....	31
3.1.	INTRODUCCIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.....	31
3.2.	COMPETENCIAS	31
3.3.	OBJETIVOS	32
3.4.	CONTENIDOS	32
3.5.	METODOLOGÍA	32
3.6.	ACTIVIDADES Y TEMPORALIZACIÓN	33
3.7.	RECURSOS	36
3.8.	EVALUACIÓN	37
4.	CONCLUSIONES	38
5.	LIMITACIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS.....	39
5.1.	LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN	39

5.2. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS.....	39
6. BIBLIOGRAFÍA.....	41
6.1. REFERENCIAS	41
6.2. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA	43
ANEXOS	45
ANEXO I: ESTRUCTURAS COOPERATIVAS SIMPLES.....	45
ANEXO II: ESTRUCTURA COOPERATIVAS COMPLEJAS.....	48
ANEXO III: CUESTIONARIO	51
ANEXO IV: EXÁMENES	55

1. INTRODUCCIÓN

La presente investigación corresponde al Trabajo Fin de Máster del Máster Universitario en Formación del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas regulada según la ORDEN ECI/3858/2007 de 27 de diciembre y trata sobre el empleo del trabajo cooperativo para el aprendizaje del álgebra en 4º de ESO. Con ello, se pretende analizar la efectividad de esta metodología en el rendimiento del proceso de aprendizaje de los alumnos de este curso, en esta área de las matemáticas en concreto.

1.1. JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO Y SU TÍTULO

Son evidentes las dificultades con las que se encuentran los alumnos cuando se les enseña álgebra y el rechazo que estas complicaciones les conlleva hacia esta área.

El Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos o PISA (Programme for International Student Assessment), de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), estudia el rendimiento de estudiantes de 15 años en tres competencias, comprensión lectora, competencia matemática y competencia científica. Los estudios PISA se repiten cada tres años y en cada uno de ellos se profundiza especialmente en una de las materias. En el estudio realizado en el año 2003 se profundizó en matemáticas y participaron 41 países, entre ellos España.

Como se evidencia en el informe PISA del año 2009, los resultados obtenidos por los estudiantes españoles en la competencia matemática, están por debajo del promedio de los países de la OCDE (Ministerio de Educación, 2010). Además, en el estudio realizado en el año 2003, en el cual la principal área a evaluar fue la matemática, se concluyó que los alumnos españoles se mostraban más débiles en las sub-áreas de Espacio y Forma (geometría) y Cambio y relaciones (álgebra) (Ministerio de Educación y Ciencia, 2003). Por ello es por lo que se hace necesaria una intervención en la rama de álgebra de la asignatura de matemáticas.

Se ha demostrado que el trabajo cooperativo aumenta el rendimiento en el proceso de aprendizaje. Goikoetxea y Pascual (2002), citados en Servicio de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid (2008), realizaron un análisis sobre los efectos del aprendizaje cooperativo con el cual concluyeron que

“los métodos del aprendizaje cooperativo tienen efectos positivos en el rendimiento académico (y en otras variables como la productividad y las actitudes hacia el aprendizaje) en comparación con otros métodos de enseñanza tradicionales”. En Servicio de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid (2008). también se alude a Panitz (2004) quien, tras una investigación bibliográfica destacó una serie de beneficios académicos, sociales y psicológicos del aprendizaje cooperativo, donde se pueden destacar los siguientes: fomenta la metacognición de los alumnos y les permite ejercitar la sensación de control sobre la tarea, fomenta que los estudiantes vean las situaciones desde otras perspectivas y crea un ambiente donde los alumnos pueden practicar habilidades de mando, y realza la satisfacción del estudiante con la experiencia de aprendizaje y la ansiedad de estos se reduce significativamente.

Por todo lo anterior, se plantea la siguiente pregunta: ¿por qué no incorporar una metodología que resulta tan eficiente en un área que resulta tan compleja?

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La idea de investigar sobre el tema a tratar en el presente trabajo viene impulsada por las dificultades observadas, con las cuales se encontraban los alumnos en la asignatura de matemáticas durante el periodo de prácticas correspondiente a las asignaturas de Practicum I y II de dicho máster.

Durante dicho periodo, se pudo comprobar como alumnos que hasta el momento habían aprobado la asignatura de matemáticas, suspendían en el momento que se iniciaba con la rama del álgebra, aquellos que destacaban por su alto rendimiento en dicha asignatura, bajaban notablemente sus calificaciones y como estos hechos alimentaban la falta de motivación e interés hacia la asignatura.

En esta tesitura, este estudio trata de dar respuesta a estas dificultades mediante un cambio metodológico a la hora de impartir las clases de matemáticas

En los últimos años se han realizado diferentes investigaciones sobre los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del álgebra y muchos de éstas, se han centrado en las dificultades que encuentran los alumnos que comienzan a estudiar el álgebra.

Los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en aritmética.(...)

La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal resulta ser difícil para muchos de los que comienzan a estudiar álgebra. Estos estudiantes siguen usando los métodos que les funcionaban en aritmética. (Kieran & Filloy, 1989, p. 229-230)

La Evaluación General de Diagnóstico es un proceso de evaluación que mide el nivel de desarrollo de las competencias básicas de los alumnos escolarizados en 4º de Educación Primaria y 2º de ESO. El informe de resultados de la Evaluación General de Diagnóstico de 2010, muestra los siguientes resultados de los alumnos de 2º de ESO, sobre la competencia matemática:

Los resultados obtenidos en los diferentes procesos estudiados en la competencia matemática evidencian un grado de dificultad creciente, como cabía esperar, cuando se trata de reproducir (destrezas necesarias para la realización de los ejercicios más sencillos en situaciones conocidas), establecer conexiones (destrezas de interrelación, en contextos relativamente conocidos, presentes en problemas de dificultad media) y reflexionar sobre las cuestiones planteadas (destrezas que implican un cierto grado de perspicacia y creatividad a la hora de identificar los elementos matemáticos de un problema).

Los bloques de contenido que han resultado con mayor dificultad son el álgebra y la geometría, aspectos esenciales del aprendizaje, cuyo dominio asegura un éxito posterior en esta competencia. (Ministerio de Educación, 2011, p.86)

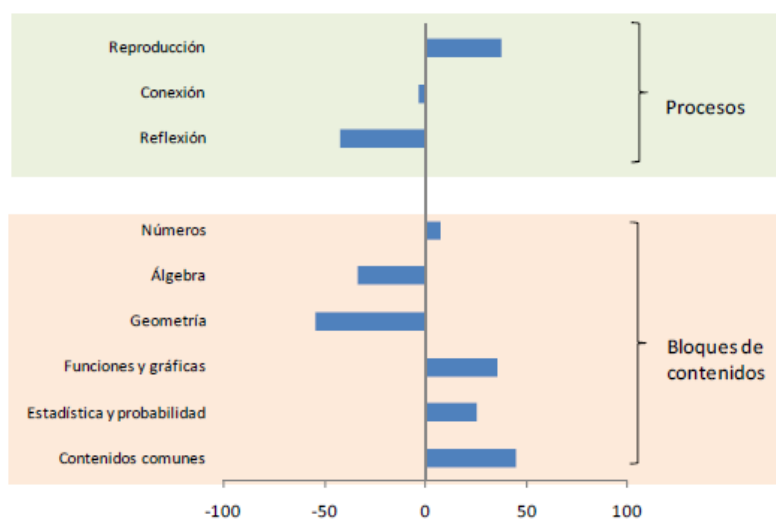


Figura 1. Rendimiento del alumnado en la Competencia matemática. (Ministerio de Educación, 2011, p.86)

A la vista de los resultados de la Evaluación General de Diagnóstico, se observa que en los primeros aprendizajes es cuando se produce una ausencia muy grande del sentido y esta falta de sentido resulta difícil de remontar después, cuando el trabajo

se encuentra inmerso en una mayor dificultad operatoria como se puede deducir de los datos del Informe Español Matemáticas Pisa 2003.

Los resultados que se muestran en Ministerio de Educación y Ciencia (2003) indican que los estudiantes españoles de 15 años muestran un rendimiento medio en matemáticas de 485 puntos, 15 puntos por debajo del promedio de la OCDE, el cual está fijado en 500 puntos. En álgebra la tendencia se mantiene, ya que se obtuvieron 481 puntos, 18 puntos menos que el promedio fijado por la OCDE, que en este caso es de 499 puntos.

Aunque es difícil determinar con exactitud las causas de estos resultados, existen numerosas investigaciones que llevan a pensar que empleando nuevas metodologías, dichos resultados podrían mejorar.

1.3. OBJETIVOS

Tras lo planteado en los epígrafes anteriores se plantea como objetivo general de la presente investigación analizar la efectividad del trabajo cooperativo como estrategia para el aprendizaje del álgebra en 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria.

Tomando como eje principal este objetivo general, los objetivos específicos que se proponen son los siguientes:

- Analizar la situación actual del alumnado de 4º de ESO en la competencia matemática.
- Identificar los problemas del proceso de aprendizaje del álgebra de estos alumnos.
- Investigar sobre la efectividad del trabajo cooperativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, teniendo en cuenta estudios anteriores.
- Evaluar el grado de conocimiento y opinión de los profesores sobre el trabajo cooperativo
- Comparar los resultados académicos obtenidos mediante metodología tradicional y mediante trabajo cooperativo.

1.4. BREVE FUNDAMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA

Para la elaboración de este estudio, se ha utilizado una metodología mixta basada en una investigación bibliográfica previa seguida de un posterior trabajo de

campo realizado con alumnos de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria del colegio Nuestra Señora de las Mercedes de Leioa.

La primera parte, dedicada a la búsqueda bibliográfica, se ha caracterizado por el estudio exhaustivo de diversos documentos de los cuales se han extraído los datos para determinar el marco teórico de dicha investigación.

El estudio de campo ha consistido por un lado, en analizar la opinión de los profesores de matemáticas del colegio Nuestra Señora de las Mercedes de Leioa, acerca de la metodología del trabajo cooperativo y la valoración de éstos como mejora en el aprendizaje del álgebra. Para realizar dicho análisis se ha optado por un cuestionario compuesto mayoritariamente por preguntas cerradas ya que este tipo de preguntas tienen varias ventajas, como por ejemplo su fácil codificación para ser tratadas por el ordenador de manera que así se realizan con facilidad los cálculos estadísticos. Además estos cuestionarios se responden sin esfuerzo, de manera que evita la fatiga y por tanto las incertidumbres y por eso se dejan pocas preguntas sin contestar.

De esta forma, los profesores del centro que se ha elegido como muestra, han proporcionado una serie de datos desde su propia experiencia.

Por otro lado, la segunda parte del estudio de campo, se ha llevado a cabo con los estudiantes de 4º de ESO de este mismo centro. Dicho estudio ha consistido en la comparación de los resultados de tres exámenes de álgebra de dos grupos de este curso sobre las unidades 2: Polinomios y Fracciones algebraicas y 3: Ecuaciones, Inecuaciones y Sistemas. Esta última unidad se ha dividido en dos por su extenso contenido y es por ello, por lo que se han realizado tres pruebas en total. En uno de los grupos que se han seleccionado como muestra, se ha empleado la metodología tradicional a la hora de impartir las clases, mientras que en el otro se ha puesto en marcha el trabajo cooperativo.

1.5. BREVE JUSTIFICACIÓN DE LA BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA

La revisión bibliográfica es una parte fundamental en toda investigación.

Para llevar a cabo este Trabajo Fin de Máster, se ha realizado una búsqueda bibliográfica basada en diferentes líneas, con el fin de poder encontrar fundamentos teóricos en los que apoyar esta investigación.

En primer lugar se ha hecho un estudio bibliográfico basado en la situación actual de los alumnos en la competencia matemática, después se han estudiado las dificultades encontradas por los alumnos en el estudio de las matemáticas y concretamente en el álgebra y finalmente se ha profundizado sobre la metodología del trabajo cooperativo y sus aportaciones al aprendizaje de las matemáticas y especialmente del álgebra. Todo ello, utilizando artículos de revistas de educación y libros, así como otras fuentes (Tesis, TFM, ponencias, entrevistas....)

Para acercarse a la realidad en la que se encuentran los alumnos españoles en lo que se refiere a sus conocimientos matemáticos, se han empleado informes recientes realizados por el Ministerio de Educación y Ciencia y la OCDE, como el informe PISA del año 2009.

El artículo “Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico” de Malisani (1999) ha sido clave para comprender las dificultades con las que se encuentran los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, junto con el informe español PISA del año 2003.

Por último, para el estudio de la metodología del trabajo cooperativo el autor Pere Pujolàs ha sido fundamental, ya que dicho autor ha investigado en profundidad sobre esta técnica en sus diversas obras. Las principales fuentes de las que se ha recabado información sobre el aprendizaje cooperativo han sido las siguientes:

- Pujolàs, P. (2008a). 9 ideas clave. El aprendizaje cooperativo. Barcelona: Graó.
- Pujolàs, P. (2004). Aprender juntos alumnos diferentes. Barcelona: Octaedro.

2. DESARROLLO

2.1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1.1. SITUACIÓN ACTUAL DEL ALUMNADO DE 4º DE ESO EN LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

El informe PISA (2009) permite conocer el nivel en la competencia matemática de los alumnos españoles. El informe del año 2009 se realizó en 65 países, 33 de ellos miembros de la OCDE más 32 países asociados, en los que se encontraba España. (Ministerio de Educación, 2010, p.13)

Como puede apreciarse en la siguiente tabla, los alumnos españoles están por debajo del promedio de los estudiantes de los países de la OCDE, en las tres competencias que evalúa dicho informe.

Tabla 1. Evolución de los resultados globales en las tres competencias

		2000	2003	2006	2009	Diferencia promedio OCDE/España
Lectura	Promedio OCDE	500	494	492	493	
	España	493	481	461	481	10
Matemáticas	Promedio OCDE		500	498	496	
	España		485	480	483	15
Ciencias	Promedio OCDE			500	501	
	España			488	488	12

Extraída de Ministerio de Educación, 2010, p.154.

El informe Education at Glance es una publicación anual que proporciona una amplia colección de datos comparados sobre el funcionamiento de los sistemas educativos en los países de la OCDE y en otros países asociados. En la edición de 2011 se concluye que:

Entre los jóvenes varones, una mayor competencia en lectura y matemáticas ha supuesto una asociación positiva hacia una transición a la educación post-secundaria. Mientras que una competencia menor se asoció con una inmediata integración al mundo laboral.

Entre las mujeres jóvenes una menor competencia en matemáticas se asocia a una pronta inclusión al mundo laboral. (OCDE, 2011, p.313)

El País Vasco fue una de las primeras comunidades autónomas que participó como muestra en la elaboración del informe PISA en el año 2003 junto con Castilla y León y Cataluña, este permite la posibilidad de comparar los resultados en diferentes años. La siguiente tabla muestra la evolución de los resultados del País Vasco en la competencia matemática de los años 2003, 2006 y 2009.

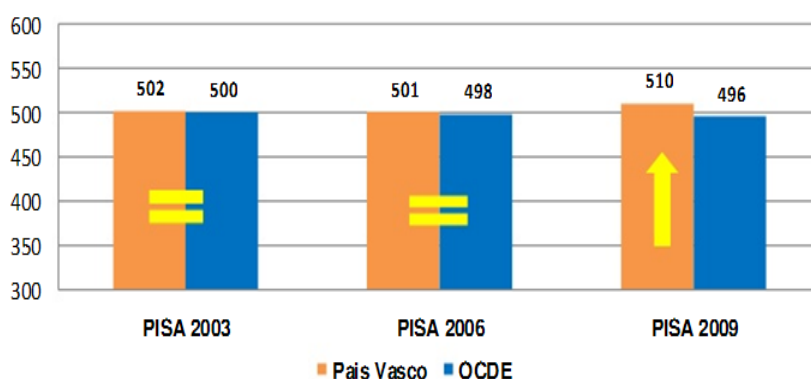
Tabla 2. Evolución de los resultados del País Vasco en Matemáticas

	Media	E.T.	Desv. típ. (E.T.)
PISA 2003	502	2,8	82,4 (1,1)
PISA 2006	501	3,4	84,8 (1,8)
PISA 2009	510	2,8	87,4 (1,8)

Extraída de ISEI-IVEI, 2011, p.121

Como se puede apreciar en la tabla anterior, los alumnos del País Vasco disminuyen en un punto los resultados obtenidos en 2006 respecto a 2003, aunque los resultados de 2009 aumentan en 8 puntos respecto a este mismo año. Estos resultados son mejores aún si se comparan con los obtenidos por la OCDE, ya que además de estar por encima de éstos en los tres años mencionados, se observa que en el caso de la OCDE los resultados van disminuyendo cada año. En la siguiente tabla evidencia la comparativa anteriormente expuesta:

Tabla 3. Comparación Resultados en Matemáticas 2003-2006-2009



Extraída de ISEI-IVEI, 2011, p.121

Aunque estos datos pueden parecer alentadores, el porcentaje de alumnos vascos que promocionan en 4º de ESO y por consiguiente, obtienen el título de Graduado en ESO va disminuyendo poco a poco, ya que en el curso 2010-2011 el 90,88% de estos alumnos obtuvieron el título y en el siguiente curso, 2011-2012 lo lograron el 90,47%, según los datos de un estudio comparativo de resultados escolares realizado por Inspección de Educación para el Gobierno Vasco (Gobierno Vasco, 2012).

Por otro lado, según Eustat (2013), la tasa de población de 20 a 24 años que ha superado al menos los estudios de secundaria en el País Vasco también va descendiendo desde el 2005 que alcanzó su nivel más alto con un 87,8%, hasta el 2012 que llegó a un 82,1%. Estos datos continúan siendo mejores que los de España y que muchos países de Europa pero aún así se vislumbra una tendencia a la baja de dichos resultados.

2.1.2. PROBLEMAS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA DE LOS ALUMNOS DE 4º DE ESO

El álgebra es un área que resulta muy difícil a una gran mayoría de los alumnos como se ha podido evidenciar de los datos del informe PISA (2003).

Kieran y Filloy (1989) aseguran que:

El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones.(...) La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal resulta ser difícil para muchos de los que comienzan a estudiar álgebra. (p. 229-230)

Por otra parte, Malisani (1999) extrae las siguientes conclusiones sobre los problemas que encuentran los alumnos en el aprendizaje del lenguaje algebraico:

- El desarrollo del lenguaje algebraico: se empieza utilizando nombres para designar a la incógnita y algunas relaciones, después abreviaturas de estas palabras, hasta llegar a los símbolos. Se pasa del lenguaje natural al lenguaje algebraico poco a poco depurando los códigos que se emplean al principio.
- Necesidad de apoyarse en otros lenguajes: en la fase intermedia es necesario utilizar otros lenguajes como el natural, aritmético o geométrico, para formular las reglas, para interpretar y resolver los problemas. Cuando se desarrolla el lenguaje algebraico todos estos otros lenguajes se van abandonando.

- La transición entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico: en esta fase el pensamiento aritmético puede retardar el desarrollo del lenguaje algebraico y los nuevos contenidos algebraicos pueden eclipsar los conocimientos aritméticos anteriores.
- La necesidad de introducir nuevos objetos de naturaleza más abstracta: este hecho dificulta la resolución de algún problema en particular.
- En el proceso de construcción del lenguaje algebraico se distinguen dos niveles a la hora de entender la generalidad de un método: uno es aplicable a unos casos específicos y otro se puede expresar mediante el lenguaje del álgebra simbólica.

Ruano, Socas y Palarea (2008) afirman que muchos profesores e investigadores han elaborado estudios sobre las dificultades que les ocasiona a los alumnos el aprendizaje del álgebra, impulsados por la preocupación que les ocasiona este problema. Además, aseguran que estos estudios concluyen que es al inicio cuando se producen las mayores dificultades. Estos autores citan a varios investigadores que apuestan por tres procesos diferentes con el fin de solventar dichas dificultades, a saber: Mason (1996) apuesta por la generalización para la introducción del álgebra, Freudenthal (1983) por el contrario, lo hace por la sustitución formal y Janvier (1996) por la modelización.

Ruano et al. (2008) realizaron un estudio sobre las ventajas e inconvenientes de la utilización de estos tres procesos para el aprendizaje del álgebra basándose en los errores cometidos por los estudiantes.

En este análisis, mencionan a Socas (1997) quien clasifica los errores que comenten los alumnos según el origen de dichos errores:

- Obstáculo
- Ausencia de sentido
- Actitudes afectivas y emocionales

También aluden a Bachelard (1938) y Brousseau (1983) quienes consideran el obstáculo como un conocimiento adquirido que ha demostrado su efectividad en

ciertos contextos, no como una falta de conocimiento. Cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas.

Los errores que tienen su origen en la ausencia de sentido se diferencian en tres etapas:

- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética
- Errores de procedimiento
- Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

Por último, los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales se pueden producir por falta de concentración, excesiva confianza, bloqueos, olvidos...

En general, todos estos estudios coinciden con la concepción de que las dificultades en el aprendizaje del álgebra se encuentran estrechamente relacionadas con el lenguaje algebraico y con la propia abstracción del álgebra.

2.1.3. TRABAJO COOPERATIVO

El aprendizaje cooperativo es un método de aprendizaje que se basa en el trabajo en equipo de los estudiantes. Según Gavilán (2004), aunque los primeros estudios sobre cooperación se remontan al siglo XX, el aprendizaje cooperativo es un método que se ha utilizado desde mucho antes. Como prueba de ello, cita El Talmud, donde se afirma que para hacer juntos el camino del aprendizaje es necesario tener un compañero y expone como Quintiliano (s.I) también propone a la interacción entre los alumnos para el propio aprendizaje de éstos, cuando en su obra *De institutione oratoria*, menciona que los alumnos se deben enseñar mutuamente.

Gavilán (2004) atribuye el declive de este método de aprendizaje a la incorporación del modelo competitivo, el cual tomó fuerza en Estados Unidos a finales de los años 30 a causa de la influencia del mundo de los negocios en la sociedad. Se consideraba este modelo, como la única forma para salir de la crisis. Por consiguiente, no es hasta la década de los 70 cuando se restablece el aprendizaje cooperativo tras los resultados recogidos de un informe sobre las escuelas, dejando atrás un estado de coexistencia entre dos modelos el competitivo y el individualista.

Los tres modelos mencionados anteriormente, en la actualidad, se podrían considerar como las diferentes formas de interacción en el aula cuando los alumnos realizan actividades y según Pujolàs (2009) consisten en:

- **Aprendizaje competitivo:** Las actividades se realizan en forma de competición. Se trata de que aprendan de forma individualizada pero intentado hacerlo mejor que los demás: mejor en tiempo, en calidad o en cantidad. De tal forma, que si uno consigue los objetivos es porque el resto no lo ha logrado.
- **Aprendizaje individualizado:** Los alumnos realizan las actividades individualmente, solo interaccionan con el profesor. Los criterios de progreso son personales y están basados en el rendimiento propio. Se espera de ellos que aprendan lo que el profesor les enseña independientemente de que lo consigan los demás.
- **Aprendizaje cooperativo:** Se organizan actividades para realizarlas en equipos pequeños que no se pueden realizar si no es colaborando entre los compañeros. Los equipos pueden ser homogéneos o heterogéneos. Se trata de que aprendan lo que el profesor les enseña y de que contribuyan a que el resto también lo haga. Se prioriza el éxito del equipo ante el éxito propio.

En el informe sobre nuevas metodologías elaborado por la Universidad Politécnica de Madrid (2008) se alude a Prieto (2007) quien defiende que “los estudiantes han de aprender a trabajar de forma autónoma, a colaborar con otros y a competir”. (Universidad Politécnica de Madrid, 2008, p. 5)

Además se añade, “aprender cooperativamente representa una ocasión privilegiada para alcanzar objetivos de aprendizaje muy diversos, no solo referidos a los contenidos, sino también orientados al desarrollo de habilidades y destrezas interpersonales, con claros beneficios para el aprendizaje de los alumnos” (Universidad Politécnica de Madrid, 2008, p. 5)

Por otro lado, Goikoetxea y Pascual (2002) citan a Slavin y Cooper (1999) quienes señalan como el principal motivo por el que el aprendizaje cooperativo promueve mayor rendimiento que las técnicas individualistas y competitivas, es que el aprendizaje cooperativo ofrece a los alumnos más oportunidades para discutir entre ellos, para aprender unos de otros y para inducir la excelencia.

El aprendizaje cooperativo se compone de cinco elementos básicos a entender de diversos investigadores como Gavilán (2004), Pujolàs (2009), y los siguientes autores citados por Dorado (2011), Johnson y Johnson (1990) y Johnson, Johnson y Holubee (1999).

- La interdependencia positiva
- La interacción cara a cara
- La responsabilidad individual y grupal
- Las habilidades sociales
- La autoevaluación del grupo

Gavilán (2004) afirma que la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas requiere una metodología que impulse tanto la autonomía como la cooperación en el alumnado.

Velasco y Domínguez (s.f.) tras una investigación realizada en el área de matemáticas con estudiantes de Ingeniería Técnica Informática de Sistemas en el curso 2006-2007 concluyen que:

La investigación muestra que los alumnos pueden tener más éxito que el propio profesor en hacer entender algunos conceptos a sus compañeros y los conceptos aprendidos de forma autónoma permanecen durante más tiempo que los que han sido simplemente memorizados. (p. 2)

Pujolàs (2008a) presenta el trabajo cooperativo como una forma de hacer, de enseñar, que requiere cambiar estructuras de pensamiento, y la estructura fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje. Plantea una serie de claves que hacen que este modelo de aprendizaje se esté desarrollando y aplicando en muchas zonas del mundo.

Con esta técnica no solo se mejoran los resultados académicos del alumnado sino que también las relaciones personales, ya que con ella se fomenta la creatividad, el compañerismo, la ayuda entre iguales y la autoestima.

La Universidad Politécnica de Madrid (2008) hace referencia a Apodaca (2006) quien destaca, las siguientes competencias entre las muchas que se desarrollan cuando se emplean métodos de aprendizaje cooperativos:

- Búsqueda, selección, organización y valoración de la información.
- Comprensión profunda de conceptos abstractos esenciales para la materia.

- Adaptación y aplicación de conocimientos a situaciones reales.
- Resolución creativa de problemas.
- Resumir y sintetizar.
- Expresión oral.
- Habilidades interpersonales.
- Organización y gestión personal.

Universidad Politécnica de Madrid (2008) también hace alusión a las ventajas que señalan Benito y Cruz (2005) a partir de las competencias citadas anteriormente.

- Desarrollo de habilidades interpersonales y de trabajo en equipo.
- Desarrollo de habilidades intelectuales de alto nivel.
- Responsabilidad, flexibilidad y autoestima.
- Trabajo de todos: cada alumno tiene una parte de responsabilidad de cara a otros compañeros, dentro y fuera del aula.
- Genera “redes” de apoyo para los alumnos “de riesgo”: alumnos de primeros cursos con dificultades para integrarse se benefician claramente de este modo de trabajar.
- Genera mayor entusiasmo y motivación.
- Promueve el aprendizaje profundo frente al superficial o memorístico.

Goikoetxea y Pascual (2002) señalan que el aprendizaje cooperativo a diferencia del colaborativo necesita de una estructura definida en la situación del aprendizaje para que éste exista.

Son varios los autores que han elaborado y desarrollado técnicas de aprendizaje cooperativo, las cuales pueden ser adaptadas a cualquier tema con el que se esté trabajando. Estas técnicas se dividen en, Estructuras cooperativas Simples y en Estructuras cooperativas Complejas. Pujolàs (2008a) expone varias técnicas para cada tipo de estructura.

Tabla 4. Estructuras cooperativas

ESTRUCTURAS COOPERATIVAS SIMPLES	1-2-4	Uno para todos
	Parada de tres minutos	El folio giratorio
	Lápices al centro	Lectura compartida
	El número	El juego de las palabras
	Números iguales juntos	La sustancia
ESTRUCTURAS COOPERATIVAS COMPLEJAS	TAI	
	La tutoría entre iguales	
	Rompecabezas	
	Grupos de investigación	
	TGT	

Elaboración propia

Cada una de estas estructuras, han sido detalladas en los Anexos I y II, los cuales se han desarrollado con información extraída de unas jornadas de formación impartidas por Betina Represas en el municipio de Leioa (Represas, 2013).

Es evidente, que antes de introducir el aprendizaje cooperativo en el aula, se debe ayudar a los alumnos a organizarse en grupos. Se pueden formar grupos homogéneos o heterogéneos y para ello, hay que tener en cuenta los siguientes aspectos de la diversidad del alumnado:

- Habilidades lingüísticas, informáticas, matemáticas, artísticas
- Nivel de conocimiento de la materia
- Capacidades de organización de la tarea, planificación, atención, concentración, esfuerzo
- Competencias sociales
- Interés
- Motivación
- Origen sociocultural
- Género
- Rendimiento académico

La composición heterogénea es la más adecuada cuando se trata de aprender algo nuevo: el profesor enseña algo y en el momento de realizar las actividades propuestas para aplicarlo, aprenderlo y comprobar hasta qué punto lo han entendido o no, en cada equipo hay algún alumno más capaz y más motivado, o que haya estado más atento, que lo explique al resto de sus compañeros de equipo.

Para formar los equipos de composición heterogénea, hay que distribuir a los estudiantes de la clase en tres subgrupos:

- Los más capaces de dar ayuda
- Los más necesitados de ayuda
- El resto de estudiantes del grupo

De tal forma, que en cada grupo tiene que haber algún miembro de cada uno de estos subgrupos, de manera que formen un equipo de entre 4 a 6 miembros.

En cambio, se trabajaría en equipos de composición más homogénea, cuando ya han aprendido, aunque sea a niveles distintos, lo que se les está enseñando. En este caso, los equipos pueden realizar ejercicios de forma más autónoma, siempre que se ajusten a su nivel de competencia, y el profesor tiene la posibilidad de atender de forma más personalizada a alguno de estos equipos, para reforzar o repasar lo que han aprendido o para introducir nuevos aprendizajes con los más aventajados.

Una vez formados los equipos, éstos deben ser estables, es decir, deben permanecer el tiempo suficiente como para poder llevar a cabo distintos planes de equipo, de modo que los alumnos, tengan la oportunidad de cambiar lo que no hacen bien y consolidar lo que hacen bien.

Pujolàs (2008b) asegura que: “De esta manera, las tareas académicas parecen más atractivas y retadoras a los ojos de los estudiantes y, a la vez, se aseguran en ellos, cada vez más, las condiciones emocionales imprescindibles para poder aprender”. (Pujolàs, 2008b, p. 3)

2.2. MATERIALES Y MÉTODOS

Como se ha mencionado anteriormente, para llevar a cabo esta investigación la participación tanto del alumnado de 4º de ESO como profesorado del área de

matemáticas del colegio Nuestra señora de las Mercedes de Leioa, ha sido fundamental.

2.2.1. DESCRIPCIÓN DEL CENTRO

El estudio de campo se ha realizado en el colegio Nuestra Señora de las Mercedes, que es un centro educativo católico privado concertado.

Está ubicado en el centro urbano de Leioa, provincia de Vizcaya, población que abarca alrededor de 31.000 habitantes.

El colegio es un centro docente de modelo lingüístico B, es decir, es de carácter bilingüe, el cual, toma el euskera y el castellano como lenguas cooficiales. En el centro se imparten las enseñanzas básicas de:

- Educación Infantil: Primer ciclo y Segundo ciclo.
- Educación Primaria.
- Educación Secundaria Obligatoria.

El centro pertenece a la Provincia Sagrado Corazón de Jesús, perteneciente a la Congregación de las Hermanas Mercedarias de la Caridad, Institución Religiosa Católica, a quien corresponde la capacidad jurídica y la autonomía propia reconocidas en la legislación vigente.

El colegio acoge a niños y niñas desde los 2 hasta los 16 años y les ofrece una formación humana, tecnológica y plurilingüe. Disponen de 31 aulas concertadas y dos líneas con una media de más de 20 alumnos por aula, por lo que el centro cuenta con unos 700 alumnos en la actualidad.

Todas las aulas de secundaria son aulas digitales, es decir, están equipadas con una Pizarra Digital Interactiva (PDI), un soporte vertical regulable en altura, un video proyector, altavoces, así como un punto de acceso inalámbrico wifi que permite la conexión a Internet. Además las aulas de 1º y 2º de ESO disponen de un armario metálico electrificado para almacenar y recargar las baterías de los portátiles, ya que los alumnos pertenecientes a estos cursos disponen de un mini portátil cada uno, gracias al proyecto “Eskola 2.0” que el Gobierno Vasco puso en marcha en 2010.

Todos estos recursos favorecen el uso de nuevas metodologías a la hora de impartir las clases.

2.2.2. MUESTRA

Para realizar la investigación, se ha tomado como muestra tanto al profesorado de matemáticas de educación secundaria del colegio Nuestra Señora de las Mercedes como al alumnado de 4º de ESO de este mismo centro.

Con el fin de recoger las opiniones de dichos profesores, se ha elaborado un cuestionario, el cual puede apreciarse en el Anexo III. Este cuestionario se ha realizado de manera presencial a seis profesores del departamento de matemáticas del colegio Nuestra Señora de las Mercedes de Leioa, quienes conocen la metodología del trabajo cooperativo y alguno de ellos emplea dicha metodología para impartir sus clases.

Además del cuestionario dirigido al profesorado, también se ha realizado un estudio de campo con los alumnos de 4º curso de secundaria de este mismo colegio.

Como se ha mencionado en el epígrafe anterior, este centro dispone de dos grupos en este curso, A y B, y los dos están compuestos por 21 alumnos. A los alumnos adscritos al grupo A se les ha aplicado la metodología tradicional que consiste básicamente en que el profesor imparte el tema y los alumnos realizan los ejercicios propuestos por éste en su cuaderno.

En cambio, a los del grupo B se les ha sometido a un proceso de enseñanza-aprendizaje con una metodología mixta, tradicional al principio y trabajo cooperativo después.

Con el objetivo de constatar la eficacia del trabajo cooperativo en el área del álgebra, se han trabajado dos unidades, en la primera y parte de la segunda, se ha aplicado la metodología tradicional en los dos grupos y para la parte restante, con el grupo A se ha continuado con la misma técnica y en el grupo B se ha implantado el trabajo cooperativo. Las unidades que se han trabajado son las siguientes, a saber:

- Polinomios y Fracciones algebraicas
- Ecuaciones, Inecuaciones y Sistemas.

Esta segunda unidad, se ha dividido en dos partes, como se ha mencionado anteriormente, Ecuaciones por un lado e Inecuaciones y Sistemas por otro, por consiguiente, se han realizado un total de tres exámenes, cuyos resultados se han comparado para poder determinar la efectividad de la metodología del trabajo cooperativo ante la tradicional. Estos exámenes pueden verse en el Anexo IV

2.2.3. CUESTIONARIO

Como se ha mencionado en el apartado anterior, el profesorado del departamento de matemáticas del colegio Nuestra Señora de las Mercedes también ha sido clave en la elaboración de este estudio, ya que mediante un cuestionario (Ver Anexo III) se ha podido recoger la opinión de éstos acerca de las diferentes líneas de investigación del que se compone este trabajo. El cuestionario que se ha utilizado es de elaboración propia y consta de 15 preguntas cerradas en su mayoría. Las preguntas cerradas son aquellas que ofrecen a los encuestadores todas las alternativas que mejor responden a la cuestión que se quiere estudiar. El encuestado sólo tiene que elegir una o algunas repuestas de las que le han sido facilitadas.

2.3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A continuación se exponen los datos recopilados tanto de los cuestionarios realizados a los seis profesores como de las calificaciones obtenidas por los alumnos de 4º de ESO en los tres exámenes sobre álgebra.

2.3.1. CUESTIONARIO

A lo largo de este epígrafe se presentan los resultados obtenidos de los cuestionarios realizados por el profesorado del departamento de matemáticas de secundaria del colegio que se ha tomado como muestra.

Con respecto a la pregunta 1 del cuestionario ¿Cuántos años lleva impartiendo la asignatura de matemáticas en secundaria?, los resultados muestran que un 50% lleva más de 15 años impartiendo clases de matemáticas, un 17% lleva entre 10 y 15 años y un 33%, entre 5 y 10 años, por lo que se puede deducir que dichos profesores tienen una amplia experiencia en este campo.

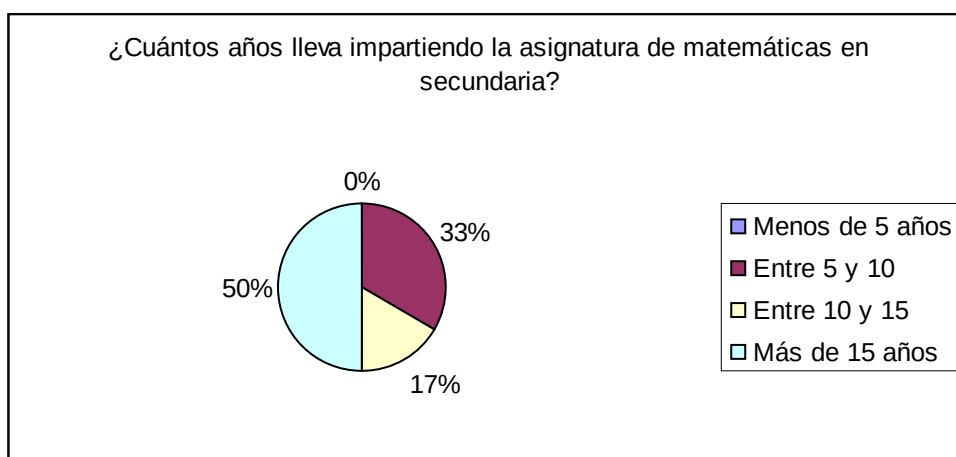


Figura 2. Resultados sobre la pregunta número 1 del cuestionario. (Elaboración propia)

En la pregunta 2, se preguntaba la opinión sobre el nivel de matemáticas que tienen hoy en día los alumnos. La mayoría de los encuestados opina que el nivel en matemáticas de los alumnos en la actualidad es normal. Por otro lado un 17% de éstos, considera que el nivel es bueno y otro 17% cree en cambio que dicho nivel es malo.

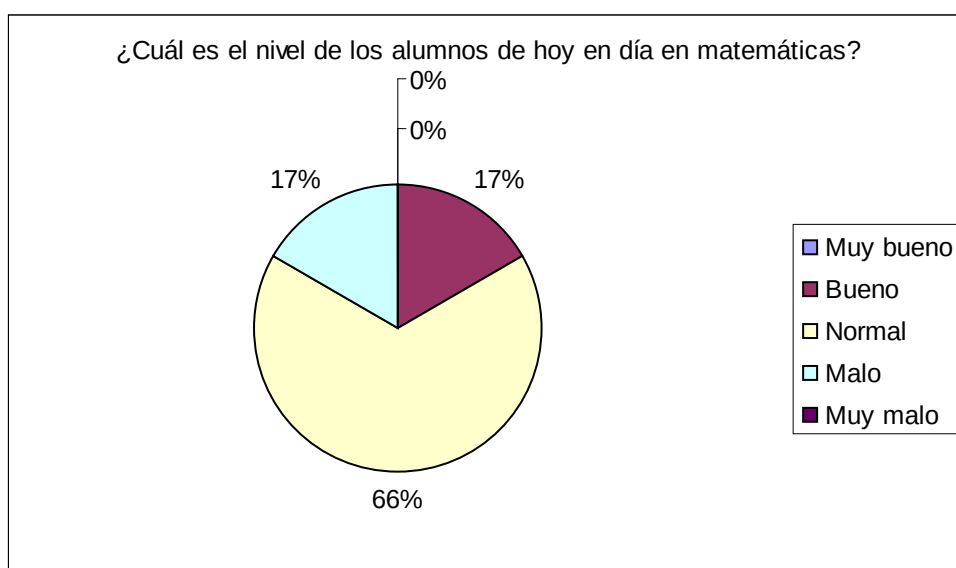


Figura 3. Resultados sobre la pregunta número 2 del cuestionario. (Elaboración propia)

En la pregunta número 3, ¿Cuáles cree que son las dificultades con las que se encuentran la mayoría de los alumnos en el estudio de las matemáticas?, 4 de los 6 profesores encuestados apunta como dificultades en el estudio de las matemáticas

los problemas de comprensión. 3 de ellos piensan que dichas dificultades se deben a una falta de base, otros 3 al rechazo hacía la asignatura de matemáticas y por último 2 de éstos, apuestan por la falta de motivación. En esta pregunta se podían contestar varias opciones.

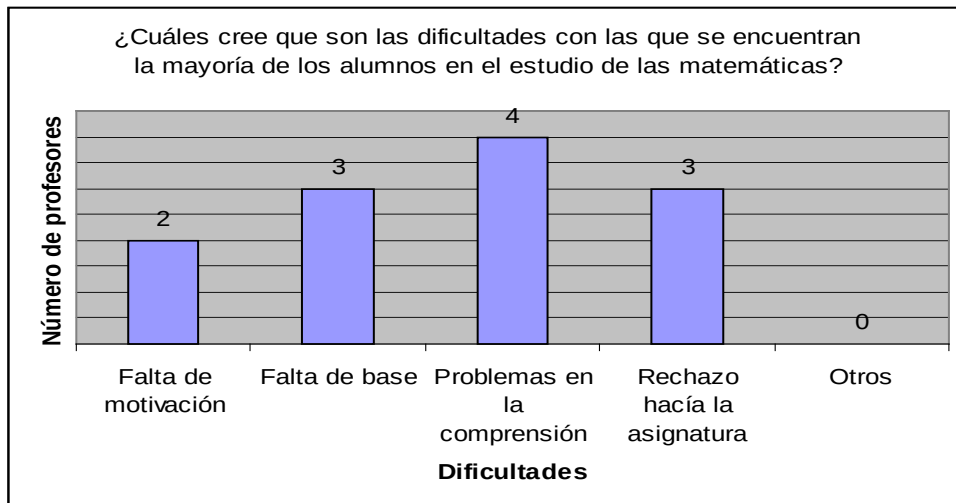


Figura 4. Resultados sobre la pregunta número 3 del cuestionario. (Elaboración propia)

Respecto a la pregunta número 4, ¿Qué área de las matemáticas diría que les resulta más difícil a los alumnos?, la mayoría de los encuestados consideran que es el álgebra, seguida de la geometría. Sólo un profesor piensa que dicha área es la aritmética. Los motivos que exponen en la pregunta número 5, “¿por qué cree que es así?”, éstos, señalan la abstracción del álgebra y los problemas que les acarrea el hecho de operar con letras, como los motivos principales.

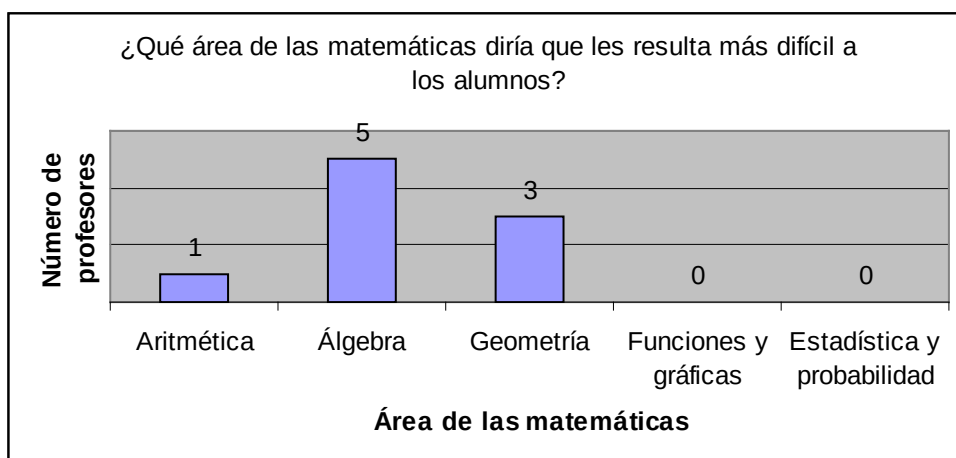


Figura 5. Resultados sobre la pregunta número 4 del cuestionario. (Elaboración propia)

La mayor parte del profesorado que se ha tomado como muestra, determina en la pregunta 6 donde se preguntaba sobre la dificultad con la que se encuentran los estudiantes al estudiar álgebra, que dicha dificultad se encuentra en el empleo de letras y símbolos.

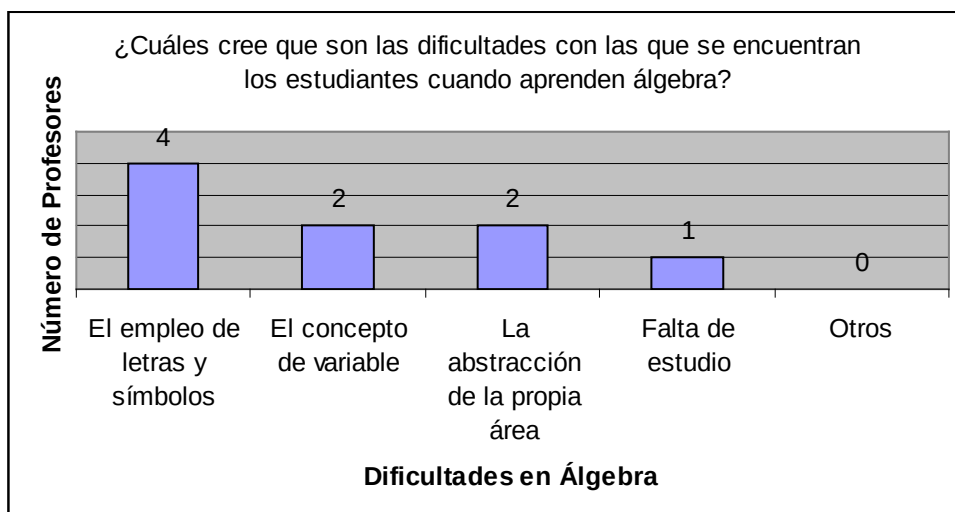


Figura 6. Resultados sobre la pregunta número 6 del cuestionario. (Elaboración propia)

En la pregunta número 7, donde se preguntaba sobre si un cambio metodológico mejoraría los resultados de los alumnos, la gran mayoría de los encuestados, un 83% exactamente, está parcialmente de acuerdo con esta idea, frente a un 17% que está parcialmente en desacuerdo. Además todos ellos, afirman conocer la metodología del trabajo cooperativo, en la pregunta número 8, ¿Conoce la metodología del trabajo cooperativo?

En cuanto a la pregunta 9 ¿Qué técnicas de trabajo cooperativo conoce?, la técnica de trabajo cooperativo más conocida es El folio giratorio, seguida de Lápices al centro y Lectura compartida. 3 profesores afirman conocer la técnica 1-2-4 y otros 3, la tutoría entre iguales, 2 de ellos El rompecabezas y por último con un único profesor conoce la Parada de tres minutos y otro, Números iguales juntos. El resto de las técnicas son desconocidas para los encuestados.

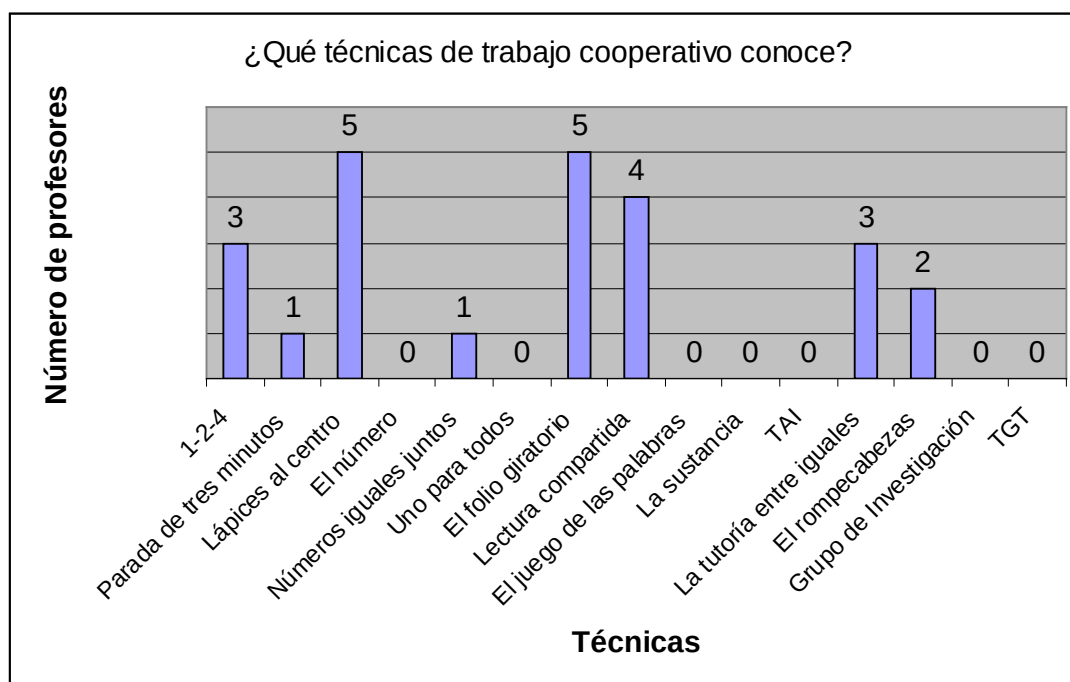


Figura 7. Resultados sobre la pregunta número 9 del cuestionario. (Elaboración propia)

En la pregunta 10, en la cual se preguntaba si se ha empleado la metodología de trabajo cooperativo en el aula, el 83% del profesorado encuestado manifiesta que sí emplea dicha metodología a veces frente a un 17% que sostiene que no lo ha utilizado nunca. Y tal y como reflejan los resultados obtenidos en la pregunta 11, “Cuando ha empleado esta técnica, ¿Qué tipo de grupos ha formado?”, todos aquellos que han trabajado con esta técnica alguna vez, apuntan haber formado grupos heterogéneos.

En relación a la pregunta 12, ¿Cree que el uso de esta metodología mejora o puede ayudar a mejorar los resultados de los alumnos?, el 83% de los profesores encuestados está parcialmente de acuerdo con que esta metodología mejora o puede mejorar los resultados académicos y el 17% de los profesores está totalmente de acuerdo.

En la pregunta 13 donde se preguntaba sobre las ventajas que destacarían de esta metodología, las respuestas están repartidas prácticamente en partes iguales. 3 de los profesores opina que las ventajas más acentuadas sobre dicha metodología se encuentran en el desarrollo de actitudes de colaboración, solidaridad, comunicación y confianza, otros 3 en generar interés y mayor motivación hacia la asignatura. Por

otro lado, 2 de ellos señala la participación activa de todos los alumnos y otros 2 el hecho de promover la integración.

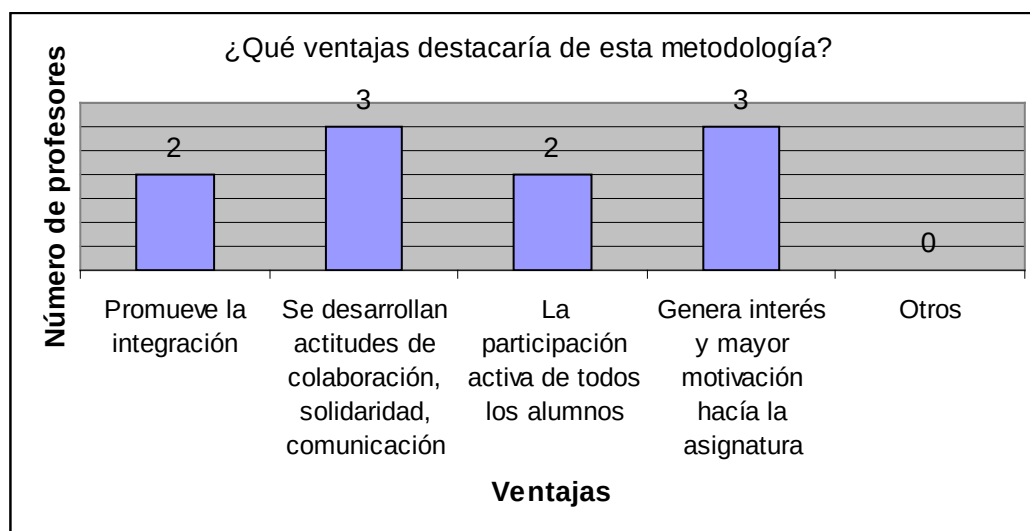


Figura 8. Resultados sobre la pregunta número 13 del cuestionario. (Elaboración propia)

En la pregunta 14, en la cual se preguntaba sobre los inconvenientes que ven al trabajo cooperativo, el mayor inconveniente que detectan sobre dicha metodología reside en las dificultades que conlleva dicha técnica a la hora de evaluar a cada miembro del grupo. Uno de los profesores encuestados ha marcado la opción "Otros", donde ha expuesto que el mayor inconveniente es conseguir que todos los integrantes del equipo participen.

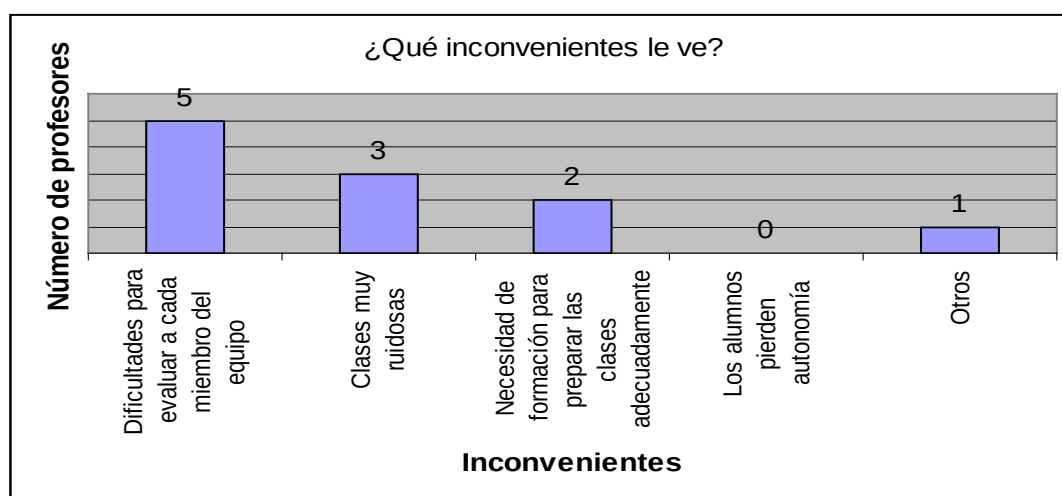


Figura 9. Resultados sobre la pregunta número 14 del cuestionario. (Elaboración propia)

Por último, en la pregunta número 15, ¿Piensa que el empleo del trabajo cooperativo ayudaría a mejorar el aprendizaje del álgebra?, un 83% de los encuestados está totalmente o parcialmente de acuerdo.

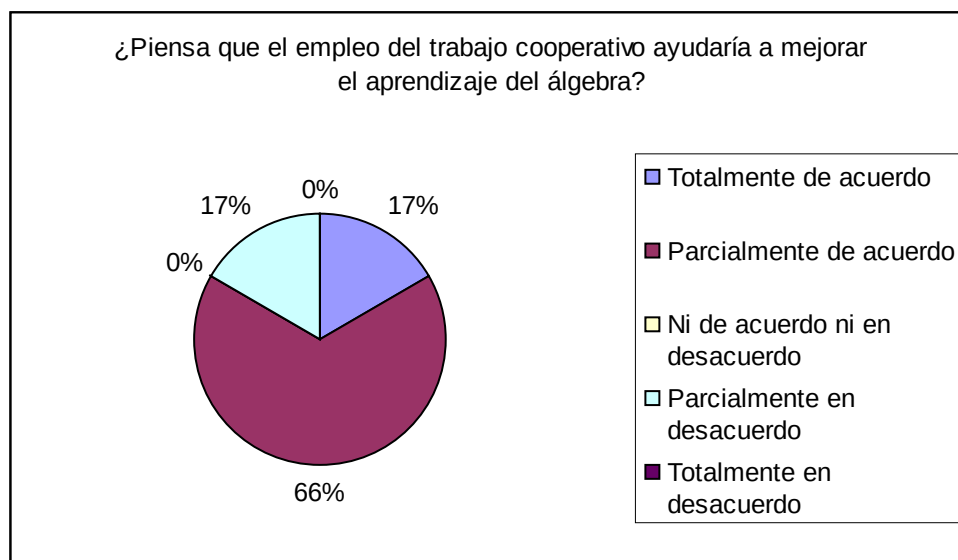


Figura 10. Resultados sobre la pregunta número 15 del cuestionario.
(Elaboración propia)

2.3.2. EXÁMENES

Para analizar el rendimiento académico de los alumnos en el área del álgebra se han elaborado las siguientes tablas donde quedan reflejadas las notas de los estudiantes en los tres exámenes realizados:

Tabla 5. Resultados del examen sobre Polinomios y Fracciones Algebraicas

		GRUPO A	GRUPO B
SOBRESALIENTE	[9,10]	1	0
NOTABLE	[7,9)	4	5
BIEN	[6,7)	5	1
SUFICIENTE	[5,6)	2	2
INSUFICIENTE	[0,5)	9	13

Elaboración propia.

Tabla 6. Resultados del examen sobre Ecuaciones

		GRUPO A	GRUPO B
SOBRESALIENTE	[9,10]	2	1
NOTABLE	[7,9)	10	1
BIEN	[6,7)	3	2
SUFICIENTE	[5,6)	0	3
INSUFICIENTE	[0,5)	6	14

Elaboración propia.

Tabla 7. Resultados del examen sobre Inecuaciones y Sistemas

		GRUPO A	GRUPO B
SOBRESALIENTE	[9,10]	2	2
NOTABLE	[7,9)	7	6
BIEN	[6,7)	2	3
SUFICIENTE	[5,6)	3	3
INSUFICIENTE	[0,5)	7	7

Elaboración propia.

Como se ha mencionado anteriormente, la metodología que se empleó para impartir la materia sobre Polinomios y Fracciones algebraicas, y Ecuaciones fue la tradicional. Con los resultados de la Tabla 5 y la Tabla 6 se ha querido constatar la diferencia de nivel entre los alumnos del grupo A y B. Como se puede observar en dichas tablas en el Grupo A hay más alumnos con sobresaliente y menos suspensos que en el grupo B.

Además, se han calculado las medias de cada uno de los grupos y se han comparado entre ellas. En el caso de las calificaciones correspondientes al examen sobre Polinomios y Fracciones algebraicas, la media del grupo A es de 5,12; mientras que la del grupo B sólo asciende a 4,29. Este hecho demuestra que los estudiantes del grupo A poseen un mayor rendimiento que los del grupo B. De la misma forma se ha procedido con las notas recogidas en la Tabla 6, las cuales corresponden al examen sobre Ecuaciones. En este caso la media del grupo A aumenta hasta 6,36, mientras que la del grupo B disminuye a un 3,9. Los resultados obtenidos en estos dos exámenes llevan a pensar, que efectivamente, el rendimiento de los alumnos del grupo B es inferior a los de grupo A. Por tanto, estos datos indican una necesidad de cambio para los estudiantes del grupo B, y por consiguiente, fue en el grupo B donde se decidió aplicar la metodología del trabajo cooperativo.

En la Tabla 7, se muestran los resultados obtenidos en el examen de Inecuaciones y Sistemas, después de trabajar con los alumnos del grupo B mediante trabajo cooperativo, como se ha indicado. Como se puede observar en esta tabla, en este caso, el número de alumnos que ha sacado sobresaliente y que han suspendido

es el mismo en los dos grupos. Además, se ha continuado con el mismo procedimiento de comparación de medias, obteniendo los siguientes datos: la media del grupo A esta vez, disminuye a 5,81 en comparación con la media anterior mientras que la media del grupo B, grupo donde se ha utilizado el trabajo cooperativo, alcanza los 5,74 puntos. Aunque no supera el resultado obtenido por el grupo A, se observa una gran mejoría respecto con los resultados anteriores llegando prácticamente a lograr la misma media que el otro grupo.

3. PROPUESTA PRÁCTICA

A la vista de los resultados expuestos en el apartado anterior, se plantea una unidad didáctica sobre Ecuaciones para la opción B de 4º de ESO como propuesta práctica del presente estudio.

3.1. INTRODUCCIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

La idea de elaborar esta unidad didáctica surge tras los resultados tan alentadores logrados por los alumnos de 4º de ESO del colegio Nuestra Señora de las Mercedes de Leioa, en la unidad sobre las Inecuaciones y los Sistemas de Ecuaciones, mediante la metodología de trabajo cooperativo. El capítulo en realidad está formado también por las ecuaciones, apartado que se impartió mediante la metodología tradicional. Por ello, se ha decidido desarrollar una unidad didáctica sobre ecuaciones empleando diversas estrategias cooperativas.

Todo el marco legal que regula la educación no universitaria se recoge en la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo.

Dicha ley de Educación dispone que las Comunidades Autónomas deben establecer el currículo de las enseñanzas reguladas en la misma.

El Estatuto de Autonomía del País Vasco atribuye la competencia propia sobre la enseñanza en toda su extensión, niveles y grados, modalidades y especialidades a la Comunidad Autónoma del País Vasco. En uso de dicha competencia, el Departamento de Educación, Universidades e Investigación aprobó el currículo correspondiente a la Educación Primaria y a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma del País Vasco y publicó el Decreto 175/2007, de 16 de octubre, por el que se establece el currículo de la Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco.

3.2. COMPETENCIAS

El Decreto 175/2007, de 16 de octubre, en su Anexo III, establece las competencias educativas generales para la etapa de la educación básica y define las ocho competencias básicas.

De estas ocho competencias, esta unidad tiene como propósito trabajar las siguientes, a saber:

- Competencia matemática
- Competencia social y ciudadana
- Competencia de aprender a aprender
- Competencia para la autonomía e iniciativa personal

3.3. OBJETIVOS

Los objetivos que se desean alcanzar con esta unidad didáctica son los siguientes:

- Determinar el número de soluciones de una ecuación de 2º grado a partir de su discriminante.
- Resolver ecuaciones de distintos tipos: de 2º grado, bicuadradas, racionales, irracionales y factorizadas.

3.4. CONTENIDOS

Para alcanzar los objetivos citados en el apartado anterior es fundamental exponer los contenidos implicados en la presente unidad didáctica, la cual pertenece al bloque 2 que corresponde a los números y al álgebra.

Atendiendo a lo que establece el Decreto 175/2007, de 16 de octubre, en su Anexo V los contenidos del bloque 2: Números y Álgebra son los siguientes:

- Cálculo con expresiones literales. Utilización de igualdades notables.
- Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones.
- Resolución de inecuaciones en casos prácticos. Interpretación gráfica.
- Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización.
- Operaciones con fracciones algebraicas sencillas. Simplificación.

3.5. METODOLOGÍA

El desarrollo de la presente unidad didáctica, se llevará a cabo mediante una metodología mixta compuesta por la tradicional, la cual consiste en que el profesor realiza las explicaciones en la pizarra o con el proyector y después los alumnos realizan las actividades de acuerdo a los contenidos explicados y el trabajo cooperativo.

Para realizar las actividades de forma cooperativa, será necesaria la formación de grupos. Estos grupos estarán compuestos por 4 o 5 miembros, serán heterogéneos, sobre todo respecto al rendimiento de los alumnos que lo componen y por ello serán formados por el profesor.

3.6. ACTIVIDADES Y TEMPORALIZACIÓN

La presente unidad didáctica está diseñada para desarrollarla en 8 sesiones de 55 minutos de duración.

A continuación se muestra una tabla con las actividades propuestas, la metodología a utilizar y la temporalización de cada una de ellas. Todas las actividades sugeridas serán extraídas del libro de texto de la asignatura.

Tabla 8: Actividades-Metodología-Temporalización

ACTIVIDAD	METODOLOGÍA	TEMPORALIZACIÓN
Introducir el tema recordando la resolución de ecuaciones de 2° grado, tanto las completas como las incompletas.	Trabajo cooperativo: Folio giratorio	1° semana - 1° sesión (35')
Corregir los ejercicios y explicar el concepto de discriminante.	Tradicional	1° semana - 1° sesión (20')
Resolución de ecuaciones bicuadradas.	Trabajo cooperativo: Parada de tres minutos.	1° semana.- 2° sesión (25')
Realizar ejercicios sobre ecuaciones bicuadradas	Trabajo cooperativo: Lápices al centro y Uno para todos.	1° semana.-.2° sesión (30')
Explicar la resolución de ecuaciones racionales y realizar ejercicios.	Tradicional	1° semana – 3° sesión (55')
Corregir los ejercicios sobre ecuaciones racionales.	Tradicional	1° semana.-.4° sesión (20')
Explicar la resolución de ecuaciones irracionales.	Tradicional	1° semana.-.4° sesión (35')
Resolver ecuaciones irracionales.	Trabajo cooperativo: 1-2-4 y Números iguales juntos	2° semana.-.5° sesión (55')
Explicación sobre la resolución de ecuaciones factorizadas.	Tradicional	2° semana.-.6° sesión (20')
Ejercicios de ecuaciones factorizadas.	Trabajo cooperativo: 1-2-4 y Uno para todos	2° semana.-.6° sesión (35')
Ejercicios de repaso.	Trabajo cooperativo: Lápices al centro.	2° semana - 7° sesión. (55')
Control de la unidad.	Prueba escrita	2° semana.-.8° sesión (55')

Elaboración propia

- Introducir el tema recordando la resolución de ecuaciones de 2° grado, tanto las completas como las incompletas. Se divide la clase en grupos y a cada uno de ellos se le entrega un folio en blanco. Se les asigna a todos los grupos como tarea, los mismos ejercicios sobre ecuaciones de 2° grado del libro de texto, 1,2 y 3 de la página 60. Uno de los miembros de cada uno de los equipos empieza a resolver la primera ecuación, si tiene alguna duda se la puede consultar a sus compañeros de equipo para que éstos se la solventen. Una vez, haya terminado, le pasa el folio al compañero que tenga a su lado, siguiendo la dirección de las agujas del reloj. Este segundo, deberá corregir la ecuación que ha resuelto su compañero anteriormente y realizar la ecuación que le corresponde, después le pasará el folio al siguiente compañero y así sucesivamente hasta finalizar la actividad.

- Corregir los ejercicios y explicar el concepto de discriminante. Las ecuaciones realizadas se corregirán en la pizarra intentando que algún miembro de todos los grupos participe en la corrección. Después el profesor explicará el concepto de discriminante y el número de soluciones de una ecuación de 2° grado dependiendo del signo de éste. Para ello, se empleará la pizarra y se pondrán diversos ejemplos que clarifiquen dicho concepto.

- Resolución de ecuaciones bicuadradas. Explicación del profesor sobre el procedimiento a seguir para la resolución de ecuaciones bicuadradas. Para ello, éste se valdrá de la estructura cooperativa Parada de 3 minutos (Ver Anexo I), con el fin de que cada grupo interiorice dicho procedimiento para su posterior empleo en las actividades propuestas.

- Realizar ejercicios sobre ecuaciones bicuadradas. Los equipos deberán realizar el ejercicio 1 de la página 63 mediante la técnica cooperativa Lápidas al centro. (Ver Anexo I). Una vez hayan terminado la actividad, ésta será corregida por el profesor a través del método Uno para todos. (Ver Anexo I).

- Explicar la resolución de ecuaciones racionales y realizar ejercicios. Presentación del profesor sobre ecuaciones racionales, recordando los conceptos de mínimo común múltiplo de polinomios y de fracciones algebraicas. Después los alumnos tendrán que realizar individualmente los ejercicios 3 y 4 de la página 63.

- Corregir los ejercicios sobre ecuaciones racionales. Los alumnos previamente elegidos por el profesor, saldrán a la pizarra a corregir las ecuaciones racionales propuestas.
- Explicar la resolución de ecuaciones irracionales. Aclaración del profesor sobre el procedimiento a seguir para resolver ecuaciones irracionales, para ello se utilizarán varios ejemplos de cada uno de los dos casos.
- Resolver ecuaciones irracionales. Organizados en los mismos grupos que en la 1º y 2º sesión, los alumnos deberán realizar el ejercicio 2 de la página 63. La metodología que se empleará en este caso, será 1-2-4. (Ver Anexo I). Una vez finalizada la tarea, ésta será corregida mediante la estructura cooperativa Números iguales juntos. (Ver Anexo I).
- Explicación sobre la resolución de ecuaciones factorizadas. Explicación del profesor sobre la resolución de ecuaciones factorizadas, para ello, se recordarán contenidos anteriores como la factorización de polinomios, haciendo especial hincapié en la regla de Ruffini.
- Ejercicios de ecuaciones factorizadas. Se procederá de la misma forma que con la resolución de ejercicios sobre ecuaciones irracionales. Esta vez, se empleará la metodología Uno para todos para corregir la tarea.
- Ejercicios de repaso. Tendrán que resolver los ejercicios 4, 6, 8, 9, 10 y 12 de la página 72. En este caso, la técnica a utilizar será Lápidas al centro. Después se proyectarán las soluciones de los ejercicios con la ayuda del libro digital de Anaya.
- Control de la unidad. Prueba escrita para evaluar lo aprendido.

3.7. RECURSOS

Los recursos necesarios para llevar a cabo la unidad didáctica que se propone, son el libro de Colera, Gaztelu y Oliveira (2011) *Matemáticas 4 Educación Secundaria*, el libro digital de la editorial Anaya, la pizarra convencional, el cañón y la pizarra digital.

3.8. EVALUACIÓN

En el Anexo V del Decreto 175/2007, de 16 de octubre, se establecen los criterios de evaluación de la materia de matemáticas para todos los cursos de la ESO. Por consiguiente, según este decreto los criterios de evaluación de esta unidad didáctica serán:

- Resolver problemas de la vida cotidiana y del ámbito específico de ciencias en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas algebraicos de distintos tipos aplicando con destreza los algoritmos propios de su resolución.
- Plantear y resolver ecuaciones de primer y segundo grado e inecuaciones de primer grado, utilizando el álgebra simbólica, aplicando los algoritmos más adecuados.
- Plantear y resolver sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de inecuaciones de primer grado, utilizando el álgebra simbólica, aplicando los algoritmos más adecuados.
- Interpretar los resultados obtenidos en el contexto del problema valorando su pertinencia.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se han dividido los criterios de evaluación de dicha unidad didáctica en conceptuales y actitudinales, los conceptuales supondrán un 90% de la nota final mientras que los actitudinales supondrán el 10% restante. Para valorar estos últimos, se tendrán en cuenta los siguientes aspectos de cada uno de los alumnos:

- Reflexión personal.
- Participación activa.
- Respeto hacia los compañeros, el profesor y el material.
- Autonomía.
- Esfuerzo.
- Solidaridad.

4. CONCLUSIONES

A continuación se presenta las conclusiones obtenidas en este Trabajo Fin de Máster:

1. A través de los diferentes informes presentados, se ha podido constatar el bajo nivel de los alumnos españoles en la competencia matemática, en comparación con la media de los países de la OCDE. Aunque, los resultados de los estudiantes del País Vasco muestran un nivel más alto en dicha competencia, se percibe una tendencia en la cual dichos resultados van empeorando. Por otro lado, se ha establecido una relación entre un alto nivel en la competencia matemática y la obtención de estudios superiores. Todo ello, apunta a una necesidad de mejora en la competencia matemática.

2. Los bloques que más dificultades causan a los estudiantes de secundaria son los de Geometría y Álgebra. Dentro de estas dificultades, se ha corroborado que los principales motivos están relacionados con el lenguaje algebraico y la propia abstracción de esta rama de las matemáticas.

3. Se ha corroborado como el trabajo cooperativo es una metodología adecuada para abordar las dificultades que ocasiona el álgebra, ya que es una técnica con la que se aumenta el rendimiento de los alumnos, además de mejorar el clima del aula.

4. De acuerdo con las opiniones extraídas de los cuestionarios realizados a los profesores de matemáticas del colegio Nuestra Señora de las Mercedes de Leioa, se puede constatar que el trabajo cooperativo es una técnica conocida y positivamente valorada por éstos para abordar los problemas que surgen con el estudio de las matemáticas y concretamente para hacer frente a las dificultades que aparecen con el álgebra.

5. Tras la comparación de las calificaciones obtenidas por los alumnos de 4º de ESO del colegio Nuestra Señora de las Mercedes en los tres exámenes correspondientes al álgebra, se puede afirmar que el empleo del trabajo cooperativo mejora los resultados del alumnado.

5. LIMITACIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

5.1. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

En este epígrafe se exponen de las principales limitaciones que se han encontrado en la elaboración de esta investigación.

1. El presente estudio ha sido realizado a lo largo de los meses de agosto, septiembre y octubre. Los alumnos y profesores del colegio Nuestra Señora de las Mercedes de Leioa que se han tomado como muestra, no se incorporaron hasta primeros del mes de septiembre, concretamente, los profesores el día 2 y los alumnos el 9. Además, el 1º tema que se imparte en matemáticas en 4º de ESO es el de los Números Reales y a posteriori en el 2º tema es donde se inicia el estudio del álgebra. Por todo ello, los datos referentes a los alumnos que se han recogido corresponden al curso 2012-2013.

2. El colegio que se ha tomado como muestra, dispone únicamente de dos líneas por curso. Por consiguiente, los datos con los que se ha trabajado, aunque han sido muy significativos, solamente corresponden a dos grupos de 4º de ESO.

3. El colegio Nuestra Señora de las Mercedes de Leioa es una institución que está muy comprometida con la innovación educativa por esta razón imparte varias sesiones de formación sobre nuevas metodologías al profesorado. Aunque la formación es obligatoria su implantación en las aulas es opcional, por este motivo la mayoría del profesorado sigue empleando la metodología tradicional para impartir sus clases. Este hecho ha dificultado el hallazgo de testimonios sobre el trabajo cooperativo desde la propia experiencia.

5.2. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Tomando en cuenta las limitaciones señaladas en el apartado anterior, el presente estudio propone como líneas de investigación futuras las siguientes:

1. A lo largo de este trabajo se han presentado varios resultados tomados del informe PISA sobre el rendimiento de los alumnos españoles en la competencia

matemática. Una nueva línea de investigación podría ir encaminada en recoger los datos en la competencia matemática de todos aquellos colegios españoles donde se emplea el trabajo cooperativo.

2. Con este estudio se ha intentado indagar sobre la efectividad del trabajo cooperativo frente a la metodología tradicional en un área concreta del campo matemático. Esta comparación se podría abrir hacia diferentes metodologías como las inteligencias múltiples de Gardner, el aprendizaje basado en problemas, el uso de las TIC, la enseñanza para la comprensión... y de esta forma determinar cuál es la más eficaz para emplearla en la enseñanza de las matemáticas.

3. Otra propuesta de investigación futura podría ser, la de poner en práctica la unidad didáctica desarrollada en el epígrafe correspondiente a la Propuesta Práctica, y comprobar por un lado si los resultados de los alumnos mejoran y por otro estudiar su grado de satisfacción ante esta metodología.

6. BIBLIOGRAFÍA

6.1. REFERENCIAS

- Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, M.J. (2011). *Matemáticas 4 Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.
- Decreto 175/2007, por el que se establece el currículo de la Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco. Boletín Oficial del País Vasco, 218, de 13 de noviembre de 2007.
- Dorado, G.P. (2011). Características del aprendizaje cooperativo en la ESO. Ejemplificación. *EmásF. Revista digital de Educación Física*, 2 (9), 43-57. Recuperado el día 27 de septiembre del 2013 de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=CARACTER%C3%8DSTICAS+DEL+APRENDIZAJE+COOPERATIVO+EN+LA+ESO.&db=1&td=todo>
- Eustat (2013). *Tasa de Población de 20 a 24 años que han superado los estudios secundarios por países. 2000-2012*. Recuperado el día 28 de septiembre de 2013 de http://www.eustat.es/elementos/ele0003000/ti_Tasa_de_poblacion_de_20_a_24_años_que_ha_superado_al_menos_los_estudios_secundarios_por_paises_2000-2012/tbl0003043_c.html#axzz2gAtYknZA
- Gavilán, P. (2004). *Álgebra en secundaria. Trabajo cooperativo en matemáticas*. Madrid: Narcea.
- Gobierno Vasco. (2012). Inspección de Educación. Plan General. Resultados Escolares. Estudio Comparativo. Recuperado el día 27 de septiembre de 2013 de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-inspcont/es/contenidos/informacion/resultado_inspeccion_educacion/es_escolar/adjuntos/Comparativa.pdf
- Goikoetxea, E. y Pascual, G. (2002). Aprendizaje cooperativo: bases teóricas y hallazgos empíricos que explican su eficacia. *Educación XXI: Revista de la Facultad de Educación*, (5), 227-247. Recuperado el 31 de agosto de 2013 de <http://www.uned.es/educacionXX1/pdfs/05-10.pdf>
- ISEI-IVEI (2011). PISA 2009 Euskadi. Informe de Evaluación. Recuperado el día 27 de septiembre de 2013 de <http://es.scribd.com/doc/52861682/Pisa2009-Euskadi-1informe>
- Kieran, C. y Filloy, E (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7 (3), 229-240.

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de *Educación*. Boletín Oficial del Estado, de 4 de mayo de 2006.
- Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, 13. Recuperado el día 31 de agosto de <http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf>
- Ministerio de Educación y Ciencia (2003). *Informe Español Matemáticas PISA 2003*. Recuperado el día 25 de agosto de <http://www.mecd.gob.es/dctm/evaluacion/internacional/pisa2003liberados.pdf?documentId=0901e72b801106c6>
- Ministerio de Educación (2010). PISA 2009. *Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. OCDE. Informe Español* Recuperado el día 25 de agosto de <http://www.educacion.gob.es/dctm/evaluacion/internacional/pisa-2009-con-escudo.pdf?documentId=0901e72b808ee4fd>
- Ministerio de Educación (2011). *Evaluación General de diagnóstico 2010*. Recuperado el día 02 de septiembre de 2013 de <http://www.mecd.gob.es/dctm/evaluacion/informe-egd-2010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e>
- OCDE (2011). *Education at Glance*. Recuperado el día 24 de septiembre de 2013 de <http://www.oecd.org/education/skills-beyond-school/48631582.pdf>
- Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Boletín Oficial del Estado, 312, de 29 de diciembre de 2007
- Pujolàs, P. (2004). *Aprender juntos alumnos diferentes*. Barcelona: Octaedro.
- Pujolàs, P. (2008a). *9 ideas clave. El aprendizaje cooperativo*. Barcelona: Graó.
- Pujolàs, P. (2008b). El aprendizaje cooperativo como recurso y como contenido. *Aula de Innovación educativa*, 170. Recuperado de [http://www.cife-ei-caac.com/docs_publicacions/C\)Pujolàs,%20P.%20\(2008\)%20El%20aprendizaje%20cooperativo%20como%20recurso...%20Revista%20Aula%20de%20Innovación%20Educativa,%20núm.%20170.pdf](http://www.cife-ei-caac.com/docs_publicacions/C)Pujolàs,%20P.%20(2008)%20El%20aprendizaje%20cooperativo%20como%20recurso...%20Revista%20Aula%20de%20Innovación%20Educativa,%20núm.%20170.pdf)

- Pujolàs, P (2009). *Aprendizaje cooperativo y educación inclusiva: una forma práctica de aprender juntos alumnos diferentes*. Recuperado el 25 de agosto de 2013 de <http://www.mecd.gob.es/dms-static/f4d240d3-55ad-474f-abd7-dca54643c925/2009-ponencia-jornadas-antiguas-pere-pdf.pdf>
- Represas, B (2013). Jornadas de formación. *Introducción al aprendizaje cooperativo*. Material no publicado.
- Ruano, R.M., Socas, M. M. y Palarea, M.M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*. 2 (2), 61-74. Recuperado el día 10 de septiembre de 2013 de <http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/4441/1/Ruano2008Analisis.pdf>
- Servicio de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid (2008). *Aprendizaje cooperativo. Guías rápidas sobre nuevas metodologías*. Recuperado el día 25 de agosto de http://innovacioneducativa.upm.es/guias/Aprendizaje_coop.pdf
- Velasco, P.J. y Domínguez, F. (s.f.). El aprendizaje cooperativo en las asignaturas de matemáticas. Recuperado el día 25 de agosto de 2013 de <http://www.uem.es/myfiles/pageposts/jiu/jiu2007/archivos/EVAL%20ALTERNATIVAS/Velasco%20Quintana,%20Paloma%20Julia.pdf>

6.2. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- Chamoso, J.M., Hernández, L. y Orrantia, J. (2010). Análisis de una experiencia de resolución de problemas de matemáticas en secundaria. *Revista de Educación*, 351, 557-570. Recuperado el 27 de septiembre de 2013 de http://digital.csic.es/bitstream/10261/21239/1/re351_23.pdf
- Fabra, M.L. (1994). *Técnicas de grupo para la cooperación*. Barcelona: CEAC.
- Gobierno de Navarra. Departamento de Educación y Cultura. (s.f.). El aprendizaje cooperativo. Recuperado el 15 de septiembre de 2013 de http://dpto.educacion.navarra.es/publicaciones/pdf/apr_coop.pdf
- Institut de Ciències de l'Educació.GIAC: Grupo de Interés en Aprendizaje Cooperativo. Recuperado el 25 de agosto del 2013 de http://giac.upc.es/pag/giac_cas/giac_que_es.htm.
- Página web Mercedarias de la Caridad. Leioa. (s.f.) <http://www.mercedariasleioa.org>. Consultada el 16 de septiembre de 2013.

- Pons, R.M., Serrano, J.M. y González, M.E. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: un estudio intracontenido. Recuperado el día 2 de septiembre del 2013 de "<http://digitum.um.es/xmlui/bitstream/10201/8175/1/Aprendizaje%20cooperativo%20en%20matematicas.%20Un%20estudio%20intracontenido.pdf>"
- Riera, G., Pujolàs, P. y Juvé, M. (2012). Aprender / Aprender a cooperar. Programa didáctico para enseñar a aprender de manera cooperativa en un grupo clase de segundo curso de la ESO en el área de ciencias naturales. Recuperado el día 27 de septiembre de 2013 de [http://www.cife-ei-caac.com/docs_publicacions/N\)Riera,%20G.,%20Pujolàs,%20P.,%20Juvé,%20M.%20\(2012\)%20Aplicación%20del%20programa%20CAAC...%20Cádiz%202012.pdf](http://www.cife-ei-caac.com/docs_publicacions/N)Riera,%20G.,%20Pujolàs,%20P.,%20Juvé,%20M.%20(2012)%20Aplicación%20del%20programa%20CAAC...%20Cádiz%202012.pdf)
- Universidad Internacional de la Rioja (2013). *Tema 3: Herramientas de medición sociológica*. Material no publicado
- Universidad Internacional de la Rioja (2013). *Tema 5: Diseño de unidades didácticas*. Material no publicado
- Universidad Internacional de la Rioja (2013). *Tema 5: Exposición de los resultados de la investigación en el contexto de un TFM*. Material no publicado

ANEXOS

ANEXO I: ESTRUCTURAS COOPERATIVAS SIMPLES

- **1-2-4:** Dentro de un equipo base, primero cada uno (1) piensa cuál es la respuesta correcta a una pregunta planteada por el profesor. Después, se ponen de dos en dos (2), intercambian las respuestas y las comentan. Finalmente, todo el equipo (4) decide cuál es la respuesta más adecuada a la pregunta planteada. Se intenta construir una nueva respuesta que incluya los elementos de las anteriores.

- **Parada de tres minutos:** Cuando el profesor da una explicación para toda la clase, de vez en cuando hace una parada de tres minutos para que cada equipo de base piense y reflexione sobre lo explicado, y piensa tres preguntas sobre el tema en cuestión, que deberán plantear después. Transcurridos los tres minutos, cada equipo plantea una de las tres preguntas que pensaron, una por equipo en cada vuelta (si se repiten, se saltan). Cuando están planteadas todas las preguntas el profesor sigue explicando hasta que se haga una nueva parada.

- **Lápices al centro:** El profesor reparte a cada equipo una hoja con el mismo número de preguntas o ejercicios que de miembros de un equipo. Cada alumno se hace cargo de una de las preguntas, la lee en voz alta, se asegura de que todos los miembros aportan información u opinan, y comprueba que todos saben y entienden la respuesta consensuada. Cuando uno expone “su” pregunta y todos hablan de ella, ponen sus lápices en el centro de la mesa para indicar que en ese momento sólo se puede hablar y escuchar, pero no escribir. Cuando todos tienen clara la respuesta, cada uno coge su lápiz y la escribe en su cuaderno. En ese momento no se puede hablar, sólo escribir. A continuación, se vuelven a poner los lápices en el centro y se procede con la siguiente pregunta, dirigida por otro de los miembros del grupo. Esta estructura se puede combinar con otras como “El número” o “Números iguales juntos”.

- **El número:** El profesor pone una tarea a toda la clase, los alumnos la hacen en su equipo base. Cada estudiante de la clase tiene un número asignado, y cuando está terminada la tarea, el profesor saca un número de la bolsa (donde hay tantos números como alumnos) y al que le toca, debe explicar delante de toda la clase la tarea realizada o resolver el problema en la pizarra. Si lo hace correctamente, su equipo obtiene una recompensa (una estrella, un punto...) que más adelante se podrá intercambiar por un premio. Si queda tiempo, se saca otro número para que salga un miembro de otro equipo a hacer la exposición.

- **Números iguales juntos:** Se resuelve una tarea con el método “Lápices al centro” y al terminar, el maestro escoge un número del 1 al 4 al azar (cada uno de los 4 miembros del grupo base tiene asignado un número). Quienes tienen ese número en cada equipo deben salir de uno en uno ante los demás a exponer la solución de la tarea. Quienes lo hacen bien reciben alguna recompensa (elogio del maestro, aplauso de la clase, un punto para su equipo...), y con esta estrategia, todos los equipos tienen opción de obtener una recompensa.

- **Uno para todos:** El profesor recoge al azar el cuaderno de ejercicios de uno solo de los miembros de cada equipo, lo corrige, y la calificación obtenida será la misma para todos los miembros de ese equipo. Hay que fijarse en el contenido de la respuesta y no en la presentación.

- **El folio giratorio:** El profesor asigna una tarea a los equipos y uno de los miembros de cada equipo empieza a escribir su parte o su aportación en un folio “giratorio”. Mientras tanto sus compañeros de equipo se fijan cómo lo hace, lo ayudan, le corrigen, lo animan... A continuación se lo pasa al compañero de al lado siguiendo la dirección de las agujas del reloj, para que también escriba su parte de la tarea en el mismo folio, y así sucesivamente hasta que todos los miembros han participado en la resolución de la tarea. Cada alumno puede escribir su parte con un color diferente (el mismo con el que haya puesto su nombre en el encabezamiento de la hoja) para que se pueda ver a simple vista la aportación de cada uno.

- **Lectura compartida:** Cuando haya que leer un texto se hace de forma compartida en cada equipo. Un miembro (el número 1) lee el primer párrafo mientras los demás están muy atentos, porque el siguiente miembro (el número 2) debe explicar lo leído o hacer un resumen, mientras los otros dos miembros deberán decir si es correcto o no lo que ha explicado. El alumno número 2 lee el segundo párrafo, el número 3 hace el resumen y los otros dos opinan sobre ese resumen. Y así sucesivamente hasta leer todo el texto. Si en el texto aparece una palabra o expresión que nadie del equipo conoce, consultan el diccionario, y si aún no lo comprenden se lo comunicarán al profesor para que pregunte a los demás equipos. Si hay alguien que lo sepa y que pueda ayudar, lo explica en voz alta para todos y además cuenta cómo ha descubierto el sentido de la palabra o expresión.

- **El juego de las palabras:** El profesor escribe en la pizarra algunas palabras clave del tema que se está trabajando en ese momento en el aula. En cada equipo, los alumnos deben pensar en una frase que incluya estas palabras o expresar la idea que hay “detrás de ellas”. Cuando cada uno hay escrito su frase, la muestra al resto del grupo para corregir, ampliar, modificar... hasta hacerla suya. Y así hasta que todos exponen su frase al grupo. Las palabras clave pueden ser las mismas para

todos o diferentes para cada grupo. Las frases o ideas construidas con esas palabras clave de cada equipo se ponen en común con el resto de la clase y son la síntesis de todo el tema trabajado.

- **La sustancia:** Esta es una estructura apropiada para extraer las ideas principales de un texto o tema. El profesor invita a cada alumno de un equipo a escribir una frase sobre una idea principal de un texto o tema. Cuando está escrita, se enseña al resto del equipo para corregir, ampliar... Si no es correcta, la descartan, y así van pasando por todas las frases escritas por todos los miembros del equipo. Se hacen tantas rondas como crean necesarias los miembros para que queden expresadas todas las ideas más relevantes. Al final se ordenan las frases entre todos de una forma lógica y cada uno las copia todas en su cuaderno, de esta manera todos tienen un resumen del tema trabajado. De todas formas, cada cual puede luego ampliar y corregir lo que considere oportuno en su propio cuaderno.

ANEXO II: ESTRUCTURA COOPERATIVAS COMPLEJAS

• **TAI (Team Assisted Individualization)**

En esta técnica no hay ningún tipo de competición. Combina el aprendizaje cooperativo con la instrucción individualizada: Todos los alumnos trabajan sobre lo mismo, pero cada uno sigue un programa específico. Es decir, la tarea de aprendizaje común se estructura en programas personalizados para cada miembro del equipo, ajustados a sus características y necesidades.

En los equipos, los alumnos se responsabilizan de ayudarse unos a otros para alcanzar los objetivos personales de cada miembro. La secuencia a seguir en la aplicación de esta técnica es la siguiente:

- Se divide la clase en los equipos base.
- Se concreta para cada alumno su plan de trabajo personalizado, en el que consten sus objetivos y las actividades a realizar para lograrlos.
- Todos trabajan sobre los mismos contenidos, pero no necesariamente con los mismos objetivos ni las mismas actividades.
- Cada alumno se responsabiliza de llevar a cabo su propio plan de trabajo y se compromete a ayudar a sus compañeros a llevar a cabo el de ellos.
- Simultáneamente, cada equipo elabora su propio plan de equipo, con los objetivos y compromisos para mejorar su funcionamiento como equipo.
- Si además de conseguir sus objetivos individuales consiguen mejorar como equipo, cada alumno recibe una “recompensa”.

• **La tutoría entre iguales (Peer Tutoring)**

Es la colaboración de un alumno con otro compañero de clase que ha formulado una demanda de ayuda. Esta es una estructura cooperativa dual, se establecen parejas de alumnos dentro de un mismo grupo.

Para que la estructura funcione, deben darse las siguientes condiciones:

- El alumno tutor debe responder a las demandas de ayuda de su compañero.
- La ayuda del tutor debe ser en explicaciones detalladas sobre el proceso de resolución de un problema y nunca proporcionando las soluciones mismas.

La secuencia a seguir es la siguiente:

- Fase de preparación: selección de los alumnos tutores y de los alumnos tutorizados.
- Diseño de las sesiones de tutoría (contenidos, estructura básica, sistema de evaluación)

- Constitución de los pares: tutor y tutorizado.
- Formación de los tutores.
- Inicio de las primeras sesiones bajo supervisión del profesor.
- Mantenimiento de la implicación de los tutores con reuniones formales y contactos informales con los profesores de apoyo.

• **Rompecabezas (Jigsaw)**

Técnica útil para las áreas de conocimiento cuyos contenidos pueden ser fragmentados en diferentes partes. Estos son los pasos a seguir:

- Dividimos la clase en grupos heterogéneos de 4 o 5 miembros.
- El material de estudio se fragmenta en tantas partes como miembros tiene cada grupo, de manera que cada uno recibe una parte de la información del tema a trabajar, pero no recibe la que se ha puesto a disposición del resto de sus compañeros de equipo. Cada uno debe preparar su propio subtema.
- Cada miembro prepara su parte a partir de la información dada por el profesor y la que pueda buscar por su cuenta.
- Con los integrantes de otros equipos que han estudiado el mismo subtema, forman un “Grupo de expertos”, donde intercambian la información, ahondan en conceptos clave, hacen esquemas, clarifican dudas...
- Cada uno de ellos vuelve a su equipo de origen y se responsabiliza de explicar al grupo la parte que él ha preparado.

Así todos los alumnos se necesitan entre sí y se ven obligados a cooperar porque cada uno sólo tiene una parte de la información, una pieza del rompecabezas, y sus compañeros de equipo tienen otras.

• **Grupos de investigación (GI:Group-Investigation)**

Esta técnica es parecida a la anterior, pero más compleja. Permite que cada alumno participe y desarrolle aquello para lo que está mejor preparado o más le interesa. Hay que seguir los siguientes pasos:

- Elección y distribución de subtemas. Los alumnos eligen según aptitudes e intereses subtemas específicos dentro de un tema general planteado por el profesor.
- Construcción de grupos dentro de la clase. Los alumnos eligen libremente cómo formar los grupos, aunque debemos tratar de que sean lo más heterogéneos posible, respetando sus deseos. Número ideal de miembros entre 3 y 5.
- Planificación del estudio del subtema. Alumnos y profesor planifican los objetivos concretos, los procedimientos y la distribución de tareas.
- Desarrollo del plan. Los alumnos desarrollan un plan realizado. El profesor sigue el progreso de cada grupo y les ofrece su ayuda.

➤ Análisis y síntesis. Los alumnos analizan y evalúan la información obtenida. La resumen y la presentan al resto de la clase.

➤ Presentación del trabajo. Una vez expuesto se plantean preguntas y se responden las dudas.

➤ Evaluación. El profesor y los alumnos realizan conjuntamente la evaluación del trabajo en grupo y la exposición. Puede completarse con una evaluación individual.

• **TGT (Teams-Games Tournaments)**

➤ Se forman equipos de base heterogéneos en cuanto a nivel de rendimiento de sus miembros, y el profesor explica que el objetivo es asegurarse de que todos los miembros del equipo aprendan el material asignado.

➤ Los miembros estudian juntos el material, y luego empieza el torneo, con las reglas del juego bien especificadas. El docente utiliza un juego de fichas con una pregunta en cada una y una hoja con las respuestas correctas.

➤ Cada alumno juega en grupos de tres, con dos miembros de otros equipos que tengan un rendimiento similar al suyo, según los resultados de la última prueba que se haya hecho en clase.

➤ El profesor entrega a cada grupo un juego de fichas con las preguntas sobre los contenidos estudiados hasta el momento en los equipos cooperativos.

➤ Los alumnos de cada trío cogen, uno tras otro, una ficha del montón, lee la pregunta y la responde. Si la respuesta es correcta, se queda la ficha. Si es incorrecta devuelve la ficha debajo del montón.

➤ Los otros dos alumnos pueden refutar la respuesta del primero si creen que la respuesta no es correcta. Si el que refuta acierta, se queda la ficha. Si no acierta, debe poner una de las fichas que ya ha ganado debajo del montón.

➤ El juego finaliza cuando se acaban todas las fichas. El miembro del trío con más fichas gana la partida y obtiene 6 puntos para su equipo; el que queda segundo, obtiene 4 puntos; y el que queda tercero 2 puntos. Si empatan los tres, 4 puntos cada uno. Si empatan los dos primeros, 5 puntos cada uno y 2 el tercero. Si empatan los dos últimos, se quedan 3 puntos cada uno y 6 el primero.

➤ Los puntos que ha obtenido cada integrante del trío se suman a los que han obtenido sus compañeros de equipo que formaban parte de otros tríos. El equipo con más puntos es el que gana.

ANEXO III: CUESTIONARIO

LA METODOLOGÍA DEL TRABAJO COOPERATIVO PARA LA MEJORA DEL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

Autora: Joana Fernández

Fecha: 28 de septiembre

El siguiente cuestionario está dirigido a los profesores del departamento de matemáticas del colegio Nuestra Señora de las Mercedes de Leioa, de la etapa de secundaria.

Este cuestionario está formado por 15 preguntas. Para rellenarlo adecuadamente siga las indicaciones que aparecen a continuación:

- Elija una de las opciones que se le proponen, marcándola con una cruz.
- En las preguntas 3, 4, 6, 9, 13 y 14, puede marcar varias opciones
- En las preguntas en las que le aparece la opción OTROS, en el caso de elegir esta opción escriba su respuesta.
- La pregunta 5 es abierta, por lo que deberá redactar su opinión.

Muchas gracias por su participación.

1. ¿Cuántos años lleva impartiendo la signatura de matemáticas en secundaria?
 - a) Menos de 5 años
 - b) Entre 5 y 10 años
 - c) Entre 10 y 15 años
 - d) Más de 15 años
2. En su opinión, ¿cuál es el nivel de los alumnos de hoy en día en matemáticas?
 - a) Muy bueno
 - b) Bueno
 - c) Normal
 - d) Malo
 - e) Muy malo

3. ¿Cuáles cree que son las dificultades con las que se encuentran la mayoría de los alumnos en el estudio de las matemáticas?
- a) Falta de motivación
 - b) Falta de base
 - c) Problemas en la comprensión
 - d) Rechazo hacía la asignatura
 - e) Otros:
4. ¿Qué área de las matemáticas diría que les resulta más difícil a los alumnos?
- a) Aritmética
 - b) Álgebra
 - c) Geometría
 - d) Funciones y gráficas
 - e) Estadística y probabilidad
5. ¿Por qué cree que es así?
6. ¿Cuáles cree que son las dificultades con las que se encuentran los estudiantes cuando aprenden álgebra?
- a) El empleo de letras y símbolos
 - b) El concepto de variable
 - c) La abstracción de la propia área
 - d) Falta de estudio
 - e) Otros:
7. ¿Opina que con un cambio metodológico mejorarían los resultados de los alumnos?
- a) Totalmente de acuerdo
 - b) Parcialmente de acuerdo
 - c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo
 - d) Parcialmente en desacuerdo
 - e) Totalmente en desacuerdo

8. ¿Conoce la metodología del trabajo cooperativo?
- a) Sí
 - b) No
9. ¿Qué técnicas de trabajo cooperativo conoce?
- a) 1-2-4
 - b) Parada de tres minutos
 - c) Lápices al centro
 - d) El número
 - e) Números iguales juntos
 - f) Uno para todos
 - g) El folio giratorio
 - h) Lectura compartida
 - i) El juego de las palabras
 - j) La sustancia
 - k) TAI
 - l) La tutoría entre iguales
 - m) El rompecabezas (Jigsaw)
 - n) Grupo de Investigación
 - o) TGT
10. ¿Ha empleado esta metodología en el aula?
- a) Siempre
 - b) Habitualmente
 - c) A veces
 - d) Casi nunca
 - e) Nunca
11. Cuando ha empleado esta técnica, ¿qué tipos de grupos ha formado?
- a) Homogéneos
 - b) Heterogéneos

12. ¿Cree que el uso de esta metodología mejora o puede ayudar a mejorar los resultados de los alumnos?
- a) Totalmente de acuerdo
 - b) Parcialmente de acuerdo
 - c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo
 - d) Parcialmente en desacuerdo
 - e) Totalmente en desacuerdo
13. ¿Qué ventajas destacaría de esta metodología?
- a) Promueve la integración
 - b) Se desarrollan actitudes de colaboración, solidaridad, comunicación y confianza.
 - c) La participación activa de todos los alumnos
 - d) Genera interés y mayor motivación hacía la asignatura.
 - e) Otros:
14. ¿Qué inconvenientes le ve?
- a) Dificultades para evaluar a cada miembro del equipo
 - b) Clases muy ruidosas
 - c) Necesidad de formación para preparar las clases adecuadamente
 - d) Los alumnos pierden autonomía
 - e) Otros:
15. ¿Piensa que el empleo del trabajo cooperativo ayudaría a mejorar el aprendizaje del álgebra?
- a) Totalmente de acuerdo
 - b) Parcialmente de acuerdo
 - c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo
 - d) Parcialmente en desacuerdo
 - e) Totalmente en desacuerdo

ANEXO IV: EXÁMENES

EXAMEN UNIDAD 2: POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a. $2 \cdot (x^2 + 2x) - (x + 1) \cdot (x^3 - 2x) =$

b. $(3y - 1) \cdot (3y + 1) - 2 \cdot (2y^2 + 16y - 16) =$

c. $(x - 1) \cdot (x^2 + x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2) =$

d. $(x^2 - 2x + 3) \cdot (2x + 1) - (4x - 1)^2 =$

2. Efectúa las siguientes divisiones de polinomio entre monomio:

a. $(8 + 12a - 28a^2 - 4a^3) : (-4a) =$

b. $(3x^2 - 9x^2y - 12xy^2) : (3x) =$

c. $(27x^5 + 9x^4 - 3x^3 - 10x^2) : (-3x^2) =$

d. $\left(x^4 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^6\right) : \left(\frac{1}{4}x^2\right) =$

3. Realiza las siguientes divisiones entre polinomios:

a. $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x - 2)$

b. $(3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x - 7) : (x^2 - x - 1)$

4. Realiza las siguientes **divisiones** utilizando la regla **de Ruffini**. Indica cuál es el cociente y el resto.

a. $(x^6 - 2x^5 - x^3 - 4x^2 - 10) : (x - 2)$ c. $(-2x^3 + x + 1) : (x - 3)$
b. $(-x^4 + 3x^2 - 2x + 1) : (x + 1)$ d. $(2x^2 - 9x - 5) : (x - 5)$

5. **Saca factor común primero** y utiliza **identidades notables después** para factorizar los siguientes polinomios.

a. $10x^3y - 10xy^3 =$
b. $x^4 + 2x^3 + x^2 =$
c. $8x^3 - 2x =$
d. $7a^2 - 42a^3 + 63a^4 =$

6. **Factoriza** los siguientes polinomios y **di cuáles son sus raíces**

a. $x^3 - 3x + 2$
b. $2x^2 - 9x - 5$
c. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
d. $3x^3 - 15x^2 + 12x$

7. Dado el polinomio $P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2x - 4$

- a. Calcula el valor numérico del polinomio para $x = 2$ y para $x = 1$. **(Teorema del resto)**
b. ¿Es divisible el polinomio $P(x)$ entre $(x - 2)$? ¿Y entre $(x - 1)$? **Razona tu respuesta**

8. **Descompón en factores y simplifica:**

a. $\frac{2x^3 + 10x^2 + 16x + 8}{4x^3 + 8x^2 - 4x - 8}$
b. $\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x}$
c. $\frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^3 + 3x^2 - 16x - 48}$
d. $\frac{x^2 - 9}{(x + 3)^2}$

e. $\frac{x^2 + 25 - 10x}{x^2 - 25}$

EXAMEN UNIDAD 3 (1º PARTE): ECUACIONES

1. $\frac{2(x+3)}{3} - 1 = \frac{3(x-6)}{4} + 4$

2. $\frac{x(2x+1)}{3} - \frac{(x+2)}{2} + 3x = 5x - \frac{11}{2}$

3. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

4. $\frac{3x}{x^2 - 9} = 1 + \frac{x}{2x - 6}$

5. $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = 0$

6. $2\sqrt{x+4} = \sqrt{5x+4}$

7. $\sqrt{7-3x} - x = 7$

8. Halla el valor que debe tener **a** para que la ecuación **$ax^2 - 4x + 1 = 0$** tenga solución única.

9. Escribe una ecuación polinómica cuyas soluciones sean: $x = 0$, $x = -1$, $x = 2/3$

10. ¿Por qué es imprescindible comprobar la validez de las posibles soluciones de una ecuación irracional? Indicar algún ejemplo.

EXAMEN UNIDAD 3 (2º PARTE): INECUACIONES Y SISTEMAS

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones: (2 puntos)

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} \frac{3x-1}{2} - \frac{y}{3} &= 1 \\ (6x-6) + 4y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{aligned} x^2 + y &= 24 \\ y &= 2x + 16 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x^2 + y^2 - 2xy &= 9 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} x - y &= 1 \\ xy &= 20 \end{aligned} \right\}$$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones(3 puntos)

$$\text{a. } 4(x+1) - 2(x+6) > x + 3$$

$$\text{b. } \frac{x-1}{4} - \frac{x+2}{3} \geq \frac{3x-1}{6} - x$$

$$\text{c. } (x-3)^2 < 5 + (x-2)^2$$

$$\text{d. } 2x^2 - 2x > -5x + x^2$$

$$\text{e. } \frac{3x-1}{6} - x > \frac{x-1}{4} - \frac{x+2}{3}$$

$$\text{f. } (3x-2) * (1+3x) > 0$$

3. Encuentra el menor número natural que cumpla la siguiente condición: sus tres quintos disminuidos en 12 unidades superan a su mitad aumentada en 2 unidades.
4. El numerador de una fracción es $6x+1$ y su denominador es $7-4x$. Encuentra para qué valores de x el numerador es mayor que el denominador.
5. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita (3 puntos)

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x - \frac{x+1}{2} > -x \\ x+6 > 2x \end{array} \right\} \quad \text{c) } \left. \begin{array}{l} x > -x - \frac{x-1}{2} \\ x+4 > 2x-2 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} -x+1 \leq x+1 \\ 2(x+3) > x+2 \end{array} \right\}$$