Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

Propuesta didáctica sobre la revaloración de las demostraciones como recurso para mejorar la comprensión del lenguaje matemático en los alumnos de Bachillerato.

Presentado por: Anna Badia Martí
Línea de investigación: Métodos pedagógicos (Matemáticas)
Director/a: Pedro Viñuela

Ciudad: Barcelona
Fecha: 28 de septiembre de 2012

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

1. RESUMEN

El fracaso en el primer curso de las carreras técnicas en las asignaturas de álgebra y cálculo es cada vez más notorio. Los alumnos llegan poco preparados del Bachillerato para lo que esas asignaturas requieren: aparecen dificultades por falta de conocimientos previos suficientes, por un nivel demasiado alto en las explicaciones, y dificultades, también, para comprender el lenguaje matemático. El presente trabajo plantea una propuesta didáctica para la asignatura de matemáticas del Bachillerato de Ciencias y Tecnología con el fin de que estos alumnos mejoren su preparación en vías a su paso a los estudios universitarios.

La propuesta centra sus esfuerzos en mejorar la comprensión y uso del lenguaje matemático entre las aulas de Bachillerato. Se estudia la importancia del lenguaje matemático y el protagonismo que éste tiene actualmente, a partir de actas de seminarios de didáctica de las matemáticas y con la realización de entrevistas a diversos profesores de matemáticas de Bachillerato y de los primeros cursos de Ingeniería.

Se plantea una revaloración de las demostraciones, dentro de la programación, como recurso para mejorar el uso del lenguaje matemático. Se justifica la propuesta, se enmarca dentro de las disposiciones del Real Decreto 1467/2007, y se presenta una serie de demostraciones para las principales unidades didácticas de la asignatura.

Se concluye que el valor educativo y formativo de las demostraciones viene dado por el aprendizaje que supone la formalidad de éstas. Se plantea una futura revisión de los libros de matemáticas de Bachillerato para revalorizar en éstos las demostraciones y el lenguaje matemático en su conjunto.

Palabras clave: lenguaje matemático, demostración, formalidad, Bachillerato, libros de texto

ABSTRACT

There is an obvious increase in failure rates in algebra and calculus in the first course of the technical careers. Pupils experience many gaps when dealing with these subjects after finishing High School (Baccalaureate). Difficulties appear due to the lack of previous knowledge, a high level in the explanations given, and specific difficulties in understand mathematical language. The present work raises a didactic proposal to mathematics in scientific and technological Baccalaureate in order to improve the student's preparation on their way to university studies.

This proposal focuses in improving the comprehension and use of the mathematical language in Baccalaureate. The research on the importance of the mathematical language and its leading role in teaching has been developed from the analysis of the notes taken from some workshops in mathematics didactic seminars and the interviews to several Baccalaureate's mathematic teachers and lecturers teaching the first years of Engineering.

In particular, preeminence to demonstration while programming is given, as resource to improve the use of mathematical language. This proposal is justified, inside the dispositions of the Royal decree 1467/2007. Besides, it presents a series of demonstrations for the main didactic units of the subject.

The main conclusion is that the educational and formative value of demonstrations comes as a result of the learning process of formalizing them. This research also suggests the future revision of mathematics' Baccalaureate books in order to increase the value of demonstrations and the use of mathematical language.

Keywords: mathematical language, demonstration, formality, Baccalaureate text books

2. INTRODUCCIÓN

2.1 Presentación y justificación

El fracaso en los primeros años de carrera es cada vez más notorio, y uno de los puntos que claramente preocupan a profesores, instituciones, y al propio gobierno, claro está. Como decía un artículo del periódico a finales de este curso académico: *"los alumnos universitarios aprueban solo un tercio de las asignaturas matriculadas"* (Vallín, 2012, p.44). Claramente un dato alarmante.

Las estadísticas de dicho fracaso universitario varían en función de la carrera; claramente las ingenierías registran la tasa de retraso más alta y también de abandono: un 40% según un estudio de las universidades españolas (Cabrera, 2006, p.14). A modo de ejemplo, es llamativo que La Escuela Politécnica Superior de Castelldefels (EPSC) de la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC) haya participado activamente en la adaptación del modelo educativo de sus asignaturas para lograr mejores resultados entre sus alumnos (Del Canto, Gallego, López, Mora, 2010, p.15).

A continuación se describe una relación de causas de dicho fracaso:

Causas

1. Conocimientos previos insuficientes.
2. Falta de información previa de la carrera elegida.
3. Excesivos contenidos en las asignaturas.
4. Nivel demasiado alto en las explicaciones.
5. Los exámenes no se corresponden con lo explicado en las asignaturas.
6. Falta de coherencia entre los objetivos de aprendizaje y el examen.
7. Nivel de exigencia exagerado.
8. Insuficiente información a los alumnos sobre el tipo de examen y los criterios de evaluación.
9. Falta de interés de los profesores.
10. Falta de motivación de los alumnos.
11. Falta de estudio a diario.
12. Falta de asistencia a clase.
13. Falta de asistencia a tutorías.
14. Masificación en las aulas
15. Excesivo número de asignaturas simultáneas (horarios sobrecargados).
16. Mala secuenciación de los contenidos y/o prácticas.
17. Concentración de exámenes.

Figura 1. Responsables del fracaso universitario en Ingeniería
(Martín, Arranz, González, Páramo, 2002, pp.52)

Se trata de un problema actual, y son muchos los que siguen estudiándolo para ofrecer soluciones acertadas. Entre ellos, Cabrera (2006, p.9) afirma que "todo esto ha llevado a que los procesos de transición a la enseñanza superior y la integración en la vida universitaria en el primer año sea uno de los focos de atención prioritaria para luchar contra el abandono. Ofrecer a los estudiantes una percepción realista de la vida universitaria debería ser un objetivo a lograr”.

Es relevante la actual dificultad que encuentran los alumnos de 1º curso en carreras técnicas y científicas, sobre todo en las asignaturas de matemáticas, concretamente en cálculo y álgebra. Entre ellas, destacan las dificultades por falta de conocimientos previos suficientes y por un nivel demasiado alto en las explicaciones, tal como indica la *Figura 1*. El nivel exigido en el 1º curso de estas carreras difiere considerablemente de los objetivos previstos para el Bachillerato. Hay ciertamente un salto entre ambos, y como se ha visto, no todos los alumnos logran superar esta etapa con éxito. Se han introducido algunas propuestas en el sistema universitario, como la implantación del *curso cero* (Cabrera, 2006, p.12), pero los índices de fracaso siguen persistiendo. En este sentido, éste sigue siendo un posible campo en el que introducir propuestas de mejora e iniciativas a distintos niveles.

Otro suceso habitual en las aulas de 1º de ingeniería suele ser la dificultad de los alumnos para comprender el lenguaje matemático empleado por el profesor y expresarse también ellos en dicho lenguaje. El uso del lenguaje matemático es imprescindible en cualquier carrera técnica, no solo en las asignaturas de álgebra y cálculo, pero los alumnos que empiezan el 1º curso de carrera no están habituados a usarlo: actualmente, las matemáticas del Bachillerato no se caracterizan por enfatizar la transmisión y enseñanza del lenguaje matemático. El salto que experimentan en este sentido al empezar la Universidad supone para éstos un obstáculo adicional en la comprensión global de las asignaturas.

Así pues, las propuestas que se puedan introducir en la enseñanza de las matemáticas en Bachillerato de Ciencias y Tecnología en cuanto a la mejora de los conocimientos y uso del lenguaje matemático, por pequeñas e insignificantes que parezcan, son pasos hacia una mejora del aprendizaje de los alumnos y una mejor capacitación de éstos para sus futuros estudios universitarios.

Sería importante hacer referencia, también, a aquel grupo de alumnos que, por el motivo que sea, no realizan estudios universitarios después del Bachillerato. Podría parecer que este sector no es beneficiario de la propuesta que se plantea este trabajo, pero justo por finalizar sus estudios, requieren de una mayor preparación y comprensión de las matemáticas y de los modos que le son propios.

2.2 Objetivos

El presente trabajo pretende presentar una propuesta didáctica para la asignatura de matemáticas del Bachillerato de Ciencias y Tecnología basada en una revaloración de las demostraciones como recurso para mejorar el uso y comprensión del lenguaje matemático.

Al mismo tiempo, este trabajo pretende alcanzar los siguientes objetivos secundarios:

- Justificar la importancia de la mejora del uso del lenguaje matemático en las aulas del Bachillerato de Ciencias y Tecnología, y la necesidad de una propuesta didáctica al respecto.
- Definir el papel que pueden tener las demostraciones como recurso de mejora de la comprensión y uso del lenguaje matemático.
- Realizar un estudio de campo para conocer la percepción de los profesores acerca de la propuesta realizada.

2.3 Metodología

La metodología del trabajo es el resultado de combinar y complementar una investigación bibliográfica y un pequeño estudio de campo. El cuerpo de este estudio consta de tres capítulos claramente diferenciados, que pretenden conseguir el objetivo anteriormente definido.

Con el fin de realizar una correcta contextualización y garantizar aplicabilidad y conveniencia de la propuesta didáctica que se plantea, se inicia el estudio con una caracterización del lenguaje matemático; a través de artículos publicados y libros de referencia, se describe su relación con los procesos de abstracción y comprensión matemática, y su importancia dentro del mundo de la enseñanza. A continuación, se estudia el papel de las demostraciones dentro de las ciencias matemáticas y sobre todo su relación con el uso y comprensión del lenguaje matemático.

Un claro punto a evaluar es el grado de implantación e importancia que tienen actualmente las demostraciones en el currículum de matemáticas del Bachillerato de Ciencias y Tecnología. Para ello, se han consultado las conclusiones de diversos seminarios de didáctica de las matemáticas, y se han realizado entrevistas a docentes del área de las matemáticas, tanto en 2º de Bachillerato como en el 1º curso de Ingeniería. Al mismo tiempo, se cuenta con la evaluación de estos docentes sobre la propuesta didáctica de este trabajo y con la aportación de sus experiencias.

Se presenta una propuesta didáctica respaldada por los dos primeros capítulos del trabajo. Pretende ser una propuesta de fácil implantación para todos los profesores, sin que ésta conlleve grandes modificaciones en la programación de la asignatura. Una relación de demostraciones a introducir en la programación, con unos objetivos claros respecto a la enseñanza del lenguaje matemático. A veces, las modificaciones más sutiles logran tener un impacto mucho mayor por la misma simplicidad de su puesta en marcha.

2.4 Justificación de la bibliografía utilizada

La realización de este estudio cuenta con el soporte bibliográfico de libros y conferencias sobre el lenguaje matemático, y otra bibliografía procedente de seminarios de didáctica de las matemáticas, o referenciada en estos.

Con el fin de realizar una acertada contextualización, se ha citado a Cabrera (2006) y se ha hecho referencia a un artículo periodístico de *La Vanguardia,* de mediados de junio de 2012, en el que se evidencia el actual fracaso universitario.

En cuanto a la fundamentación conceptual del trabajo, se han tomado como referencia para el estudio del lenguaje matemático: el libro de Pimm (1990), por desarrollar de forma detallada la tipología de símbolos, las vías de acceso a la simbolización y el uso y aprendizaje del lenguaje matemático, así como una reflexión sobre la competencia comunicativa que le es propia; el libro de Alcalá (2002); y la conferencia de Martín (2009), éste último para lograr comprender la construcción del lenguaje matemático. En lo relativo a las demostraciones, un punto de referencia ha sido Jalón (2001) y Martínez (2001), puesto que ambos presentan cuestiones relacionadas con el aprendizaje de las demostraciones.

Como soporte a las entrevistas mencionadas, y con el fin de tomar mayor consciencia aún de la realidad en las aulas, se hace referencia al libro de Ibañez (2004), en este caso en lo relativo al tratamiento que se da a las demostraciones en los libros de texto.

Por último, se han citado a distintos autores expertos en didáctica de las matemáticas. El gran referente en este campo ha sido Kline (1981) con su propuesta para las matemáticas modernas. También Sierpinska (1996) ha sido un punto de referencia para realizar una propuesta didáctica acertada.

3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La fundamentación teórica sobre la que se sustenta este trabajo se divide en dos grandes bloques conceptuales: por una parte una caracterización del lenguaje matemático y su enseñanza, y por otra una exposición de los métodos de demostración y el papel que tienen éstos en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

3.1 El lenguaje matemático

3.1.1 Caracterización del lenguaje matemático

Las matemáticas se apoyan en el lenguaje matemático: un lenguaje simbólico formal que sigue una serie de convenciones propias. Los símbolos representan un concepto, una operación, una entidad matemática. Éstos no deben considerarse abreviaturas, sino entidades con valor propio y autónomo.

En el lenguaje matemático resulta importante distinguir entre símbolo y concepto, es decir, entre significante (símbolo) y significado (referente) (Pimm, 2002, p.197) A menudo, son muchas las confusiones que se dan entre estas dos nociones. Pimm (1990, p.209) afirma que la notación matemática resulta ser un sistema muy conservador, ya que si queremos que los símbolos no lleguen a ser un obstáculo, es importante que existan ya como un objeto conceptual para el usuario cuando éste haga uso de ellos.

Los símbolos matemáticos se caracterizan por ser un medio de transmisión de potencial añadido ya que contribuyen, también, a la comprensión de la información transmitida: "los símbolos proporcionan un medio eficaz de almacenar y transmitir, porque facilitan la comprensión de un conjunto de información en un espacio reducido" (Pimm, 1990, p.210). Se deben conocer para poder interpretar lo que se quiere decir con ellos, al mismo tiempo que se deben utilizar para expresar lo que se quiera decir. "Todos los símbolos son necesarios para la perfecta construcción de ideas; es decir, todas y cada una de las *palabras matemáticas* tienen un significado concreto, no existiendo sinónimos para las *palabras matemáticas* como ocurre en el lenguaje habitual" (Martín, Paralea, Romero, Segovia, 2009, p.40)

Hillel (2000, p.195) presenta una clasificación de los tipos de lenguaje matemático, según el esquema que se presenta a continuación. También Alcalá (2002, p.26) y Pimm (1990, p.199) engloban el conjunto de los símbolos matemáticos en los siguientes grupos, éste último con una terminología distinta.

1. *Lenguaje algebraico: s*e usa para formalizar y simbolizar. Entre los símbolos algebraicos se encuentran números y letras. Éstas pueden representar tanto constantes como variables: las primeras letras del alfabeto se usan para representar constantes y las últimas para variables. Resulta importante determinar la fijación de estos símbolos, ya que las matemáticas tienden a modificar el significado de éstos.

2. *Lenguaje aritmético*: usado para describir las operaciones entre entes matemáticos.

$\neq$	diferente	$\exists$	existe	$\vec{A}$	vetor
$=$	igual	$\in$	pertence	$\vec{A} \cdot \vec{B}$	prod. escalar
$\supset$	contém	$\notin$	não pertence	$\vec{A} \times \vec{B}$	prod vetorial
$\subset$	contido	$\forall$	qualquer	lim	limite
$!$	fatorial	$\therefore$	portanto	Z	complexo
$<$	menor que	$\perp$	ortogonal	$\bar{Z}$	conjugado
$>$	maior que	$\wedge$	e	$/$	tal que
$\leq$	menor ou igual	$\vee$	ou	Γ	função gama
$\geq$	maior ou igual	i	imaginário	β	função beta
$+$	adição	Σ	somatória		
$-$	subtração	$\bigcup$	união		
$\div$	divisão	$\bigcap$	interseção		
$\times$	multiplicação	∇	nabla		
$\sim$	proporcional	Δ	diferença		
$\cong$	aproximado	∇^2	laplaciano		
$\Leftrightarrow$	se e somente se	$\int$	integral		
$\Rightarrow$	implicação				

Figura 2. Símbolos aritméticos

3. *Lenguaje geométrico:* consta de representaciones bidimensionales: el lenguaje de las funciones y gráficas, las representaciones geométrico-eulcídeas, grafos, representaciones conjuntistas y diagramas, etc.

4. *Jerga matemática:* formada por el conjunto de símbolos hablados; guarda una estrecha dependencia respecto a la lengua vernácula. La matemática toma ciertas palabras de la lengua vernácula y les otorga un significado preciso y peculiar, por lo que la jerga matemática suele ser fuente de frecuentes errores conceptuales.

Este trabajo centra su atención en el lenguaje escrito, tanto algebraico como aritmético y geométrico, sin pretender abarcar las caractrísticas de todos ellos sino más bien presentar una propuesta didáctica que los contemple. Para el caso del lenguaje geométrico, este trabajo hará referencia a él en cuanto a elemento de soporte para la comprensión de conceptos matemáticos, y de demostraciones, como se verá más adelante.

3.1.2 Papel del lenguaje simbólico en los procesos de abstracción

Se ha acaba de exponer la importancia de distinguir entre significante y significado, y se han glosado los significantes de que consta el lenguaje matemático. Sería importante definir ahora en qué radica el significado y como se construye dicho proceso de abstracción.

Las matemáticas, y sobre todo su enseñanza y aprendizaje, se deben permear del tipo de condiciones que establece la naturaleza de la disciplina, y especialmente en todo lo relacionado con procesos de abstracción. “Desarrollar la capacidad de abstracción en los alumnos es darles las condiciones para realizar un pensamiento abstracto, independiente, crítico y capaz de ascender a lo mejor de la cultura y el conocimiento universales” (Ruiz, 2006, p.24).

La abstracción es resultado de un cambio en el nivel de representación. El lenguaje matemático juega un papel decisivo en este proceso, ya que gracias a éste se opera este cambio en el plano de representación: las acciones, que en el plano material se realizan con objetos concretos, en éste se realizan con símbolos. Dichas acciones, en el nivel simbólico, permiten ir generando una red de relaciones. En la medida en que operamos tales objetos, crece la red de significaciones que los vincula. Se trata de reconocer la naturaleza simbólica de los objetos matemáticos, ya que un mejor conocimiento de dichos recursos permite utilizar los diversos niveles de representación para la construcción del significado.

Sin embargo, y como ya se ha anunciado, con frecuencia se dan confusiones cuando el alumno centra su atención preferentemente en los símbolos mismos, en vez de en lo que estos símbolos significan. “Este problema surge en parte a causa de la abstracción de los referentes que corresponden a muchos de los símbolos. Así mismo, procede del intento de enseñar a los alumnos la forma práctica de trabajar que utilizan los matemáticos, quienes operan con los símbolos como si los símbolos mismos fueran los objetos matemáticos” (Pimm, 1990, p. 124)

3.1.3 Adquisición de la competencia comunicativa

Pero no basta con conocer los símbolos. La adquisición del conocimiento matemático consiste en el dominio de su forma de hacer, comprendiendo y manejando los distintos símbolos de su lenguaje matemático. Dominar y aprender la forma de hacer de las matemáticas, su lenguaje, es imprescindible para su correcto aprendizaje. De hecho, como afirma Pimm (1990, p.283), “también en matemáticas debemos hablar de una competencia comunicativa, que supone saber utilizar y comprender los estilos del lenguaje adecuados a cada circunstancia”.

Gómez-Granell (1997, p.206) comenta que “desde una perspectiva conceptualista se otorga al lenguaje un papel secundario, dependiente de la comprensión conceptual y que, sin embargo, la investigación de los últimos años parece mostrar que la causa de multitud de errores radica en la dificultad real que supone el aprendizaje de un lenguaje específico de características muy distintas al lenguaje ordinario”.

Es cierto que aparecen grandes problemas, a todos los niveles educativos, en lo relativo al aprendizaje del lenguaje matemático. Problemas derivados, fundamentalmente, a su grado de abstracción: la utilización de símbolos para representarlo, sus características sintácticas, sus reglas de utilización, etc. Entre los alumnos aparecen claramente dificultades en la adquisición de estos significados, por ser más abstractos. Como se ha visto en el capítulo anterior, mediante el lenguaje matemático se opera el cambio en el nivel de representación, es decir, se llega a los conceptos abstractos; de tal modo que a través de una mejor enseñanza del lenguaje matemático, de un correcto uso y comprensión de su simbología, podremos mejorar implícitamente la comprensión de los significados y la competencia comunicativa.

Se trata de considerar la enseñanza de las matemáticas como enseñanza del lenguaje matemático, que debería caracterizarse por un cambio de centro de atención: pasar del simple estudio de un sistema abstracto de reglas y símbolos, a la adquisición de competencia comunicativa sobre determinados objetos. El Informe Cockcroft (párrafo 306) afirma que “el lenguaje desempeña un papel esencial en la formulación y expresión de las ideas matemáticas”. Así pues, el aprendizaje de la competencia comunicativa supone adquirir las formas, los significados y los modos de razonar que se hallan en el registro matemático. No consiste solo en la adquisición de unos símbolos matemáticos, sino también de sus significados y modos de comunicar propios de ese registro. Como afirma Nieto (1997, p.7), “es ese saber hacer Matemáticas el que va a potenciar su aplicabilidad en muchas de las situaciones de la actividad cotidiana, social y profesional. Las Matemáticas sólo tendrán sentido para los estudiantes si éstos llegan a asimilar sus conceptos y a entender sus significados, aplicaciones e interpretaciones".

3.1.4 Didáctica del lenguaje matemático

Hasta el momento se ha expuesto la importancia del lenguaje matemático, y más aún, de concebir las matemáticas como lenguaje. En ningún momento se ha pretendido reducir las matemáticas a un puro lenguaje, sino más bien revalorar el carácter también lingüístico de éstas. Esta concepción de las matemáticas como un lenguaje, y como consecuencia la importancia de la adquisición de la competencia comunicativa, nos debe incitar a planearnos los modos didácticos precisos para llevar a cabo dicho aprendizaje. "Cuando hablamos de la matemática como un lenguaje queremos significar que son sus aspectos simbólicos las que, desde un punto de vista didáctico, conviene enfatizar" (Alcalá, 2002, p. 29)

Este mismo autor, Alcalá (2002, p. 33), nos justifica que el considerar las matemáticas como un lenguaje es una buena estratagema didáctica, por lo menos por tres razones:

1. Ayuda a interpretar la mayoría de las dificultades que el alumno encuentra en su aprendizaje. Dificultades del tipo semántico, sobre todo ante el binomio significante-significado; dificultades inherentes a la estructura del código simbólico; y dificultades pragmáticas sobre el correcto uso de dicho código.
   Esta concepción de las matemáticas es útil desde el punto de vista didáctico ya que nos lleva a enfatizar sus aspectos lingüísticos. Es decir, nos lleva a poner mayor atención en la construcción de significados y en la comprensión y uso del lenguaje matemático

2. Proporciona una visión integradora del currículo, ya que procura dar la debida importancia a cada uno de los componentes de una buena formación matemática. Pone el acento en la construcción progresiva de los significados, en los aspectos comunicativos y en el dominio sintáctico.

3. Es una buena guía para organizar e interpretar la enseñanza en el aula por parte del profesor.

De hecho, son muchos los expertos y matemáticos que a los largo de los años han promovido el uso y conocimiento del lenguaje matemático. A continuación se citan algunos fragmentos que testimonian la importancia del lenguaje matemático en la enseñanza de esta ciencia.

- "Debemos hacer entender a nuestros alumnos que la única forma correcta de comunicación en Matemáticas es el lenguaje matemático. Utilizarlo es necesario para "saber lo que se dice" y "decir lo que se sabe" (Caraballo, Morales, Palacios, 2009, p.3)

- "El lenguaje matemático, aplicado a distintos fenómenos y aspectos de la realidad, es un instrumento eficaz que ayuda a comprender mejor el entorno que nos rodea y permite adaptarse a un mundo en continua evolución. Los alumnos deben conocerlo y utilizarlo correctamente, aplicándolo a la comprensión y modelización de la realidad" (Sánchez, 2000, p.17).

- "Requerimos de una auténtica reforma intelectual y de enfoques apropiados para definir una estrategia de progreso en la educación matemática" (Ruiz, 2006, p.24).

- "La comprensión del lenguaje, y su correcta utilización, constituyen uno de los requisitos más importantes para el aprendizaje de las matemáticas" (Jalón, 2001, p.22).

Todo lo expuesto hasta el momento permite afirmar que parece acertada la necesidad de proponer propuestas para mejorar la didáctica del lenguaje matemático en el aula, tal como pretendía justificar en este trabajo en uno de sus objetivos.

3.2 Las demostraciones

Este trabajo apuesta por una propuesta didáctica basada en la revaloración de las demostraciones dentro de la programación de la asignatura como recurso para que para mejorar el uso y comprensión del lenguaje matemático en las aulas de Bachillerato de Ciencias y Tecnología. Es preciso justificar esta propuesta, indicando el papel que tienen las demostraciones deductivas en la comprensión y uso del lenguaje matemático, y su relevancia actual dentro de la programación de matemáticas de 2º de este Bachillerato.

3.2.1 Métodos de demostración

Métodos de demostración:

Definamos en primer lugar el concepto de demostración. "Suponiendo una proposición p, podemos considerar la demostración como una cadena finita de transformaciones que se realizan mediante reglas lógicas y que se forman a partir de proposiciones verdaderas, o supuestamente verdaderas, y las cuales nos conducen a la proposición *p"* (Rodolfo, 2011, p.26).

La demostración consta de tres partes (*figura 2*):

1. La proposición que se trata de demostrar. Resulta importante diferenciar la hipótesis, que es la información que nos dan, de la tesis, que es aquello que se pretende demostrar.
2. Los fundamentos empleados: los términos primitivos, las definiciones, los postulados y las proposiciones o teoremas ya demostrados.
3. El procedimiento usado para lograr que la proposición quede demostrada. Puede ser el método deductivo o el inductivo.

 - El método inductivo es aquel que partiendo de una serie finita de casos observados se llega a la afirmación de la verdad de una proposición.

 - El método deductivo es un razonamiento lógico que partiendo de unas hipótesis, o ideas ciertas, progresa hasta obtener la veracidad de la tesis formulada. Estos pasos deben estar fundamentados en la aplicación de reglas de deducción: fundadas ya sea en axiomas o en teoremas anteriormente demostrados o en reglas básicas de deducción del sistema en cuestión. El esquema sería del método deductivo sería el que se indica a continuación:

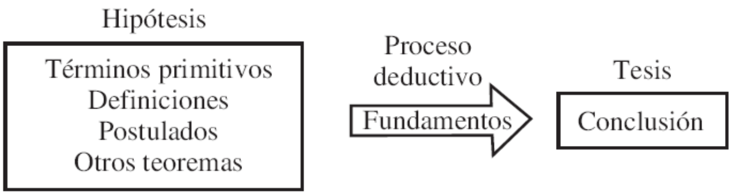

Figura 3. Método deductivo (Rodolfo, 2011, p.27)

Las demostraciones deductivas son importantes para garantizar la validez de los teoremas de la matemática. Al quedar demostrada una fórmula, ella se convierte en una recurso para el mismo avance de las matemáticas, y susceptible de aplicaciones en otras ciencias.

Resaltar que la geometría suele ser una ayuda importante en algunas demostraciones, ya que permite mostrar una clase particular del abanico de figuras geométricas para las cuales tiene validez el teorema que se va a demostrar.

Tipos de demostraciones:

Existen dos tipos de demostraciones, las directas y las indirectas:

1. DEMOSTRACIONES DIRECTAS:

Las demostraciones directas descubren la veracidad de la tesis mediante el examen de las condiciones, los términos primitivos, las definiciones, los postulados y las proposiciones ya probadas que conforman la hipótesis H.

Se trata de un razonamiento deductivo que nos conduce a la conclusión de la tesis T. En una demostración directa cada paso debe ir acompañado de una explicación que justifique su presencia.

2. DEMOSTRACIONES INDIRECTAS:

Se realiza una demostración indirecta cuando se establece la validez de una tesis T probando que las consecuencias de su contraria son falsas. La demostración indirecta determina la veracidad de la tesis que se demuestra, no examinando ésta sino algunas otras proposiciones, con el fin de que comprobada la falsedad de aquéllas, quede demostrada necesariamente la veracidad de la tesis.

La demostración indirecta se basa en el hecho de que si $\sim T$ (negación de la tesis) es falsa, entonces T es verdadera.

3.2.2 Las demostraciones deductivas en la enseñanza

La propuesta que se ha planteado como objetivo de este trabajo plantea la revaloración de las demostraciones, en concreto las de carácter deductivo. Sería importante detenerse a considerar si son estas un recurso óptimo para la enseñanza matemática.

Kline (1981, pp. 54-60) plantea una extensa relación de argumentos contra la interpretación exclusivamente deductiva de las matemáticas en el ámbito de la enseñanza. Se exponen aquí algunos de ellas:

1. Se pueden dar numerosos ejemplos de matemáticos que habiendo descubierto teoremas de gran importancia no han sido capaces de demostrarlos.
2. El hincapié en la interpretación lógica engaña al estudiante: le hace creer que las matemáticas han sido creadas por genios que razonaban directamente desde los axiomas y teoremas.
3. No es el tipo de razonamiento útil para la vida diaria, ya que no es posible solucionar deductivamente los las problemas que los hombres encuentran en su vida.
4. "La lógica formal es una de las influencias más desvitalizadoras en la enseñanza matemática". Los planteamientos deductivos pueden tener un atractivo para el profesor, pero podríamos decir que sirve de anestésico para el alumno.

Ante estas réplicas, ¿tiene sentido la propuesta que este trabajo plantea? como él mismo afirma (1981, p.61), "no significa que deba rechazarse el uso de las demostraciones deductivas, pero es fundamental ponerlas en su sitio".

Como ya se ha visto, ningún resultado es aceptado en el cuerpo de las matemáticas si no es demostrado deductivamente, por lo que no hay duda de que la demostración deductiva es la pieza clave de las matemáticas. Sin embargo, "la demostración como criterio de aceptación de un resultado por los matemáticos y la demostración desde el punto de vista de la pedagogía son cosas diferentes" (Kline, 1981, p.179). ¿Cuál sería entonces el planteamiento acertado? Servirse de la exposición lógica como una ayuda subordinada; en vez de presentar las matemáticas tan deductivamente como sea posible, hacerlo de forma inductiva, puesto que la comprensión se consigue intuitivamente. ¿Niega esta afirmación el papel de las demostraciones deductivas en la enseñanza? Sin duda no. Simplemente significa que éstas deben ser introducidas a posteriori de la comprensión de los resultados por parte de los alumnos; claramente con el fin de convencerlos.

3.2.3 Demostraciones y lenguaje matemático

Ya se ha visto que ningún resultado en matemáticas se puede considerar válido hasta tanto no sea demostrado de manera formal. La formalidad de las demostraciones viene dada por la necesidad de que éstas sigan la lógica del razonar matemático.

¿Cabe identificar formalidad con rigor? Kline (1981, p.70) plantea claramente la necesidad de aclarar la distinción entre desarrollo deductivo y desarrollo deductivo riguroso. El razonamiento deductivo es necesario para validar los resultados matemáticos, pero el desarrollo deductivo riguroso es otra cosa; éste "solo afecta al profesional de las matemáticas, que quiere comprobar si las estructuras deductivas son firmes" (Kline, 1981, p.70). La presentación deductiva rigurosa no pretende ser una ayuda para la pedagogía, sino para el matemático. Claramente, para la didáctica de las matemáticas no se debe enfatizar el aspecto riguroso de las demostraciones deductivas. No se precisa la demostración de cada paso realizado, como harían los estudiosos de la Ciencia Matemática, sino la presentación de demostraciones deductivas que guarden el carácter formal pero sin rigorismos en sus modos de razonar.

Hasta el momento se ha hablado de formalidad en el sentido de la necesidad de seguir la lógica del razonar matemático. Pero no solo basta con un razonamiento correcto: la formalidad requiere también el correcto uso del lenguaje propio de esta disciplina, del lenguaje matemático. No estamos hablando ya de rigor matemático sino de corrección en el modo expresarse matemático. Corrección en la enseñanza-aprendizaje de la competencia comunicativa.

Así pues, para discernir si las demostraciones son un recurso útil para la mejora de la comprensión y uso del lenguaje matemático, lo primordial será no focalizarse en la demostración rigurosa en sí misma, aunque será la herramienta de trabajo y parte de los contenidos de la programación, sino en el aprendizaje que supone esa formalidad para los alumnos en cuanto al uso y comprensión del lenguaje matemático.

Veamos un ejemplo común en el aula: la necesidad de plantear la solución de un problema. Claramente, ésta debe pasar a través del tamiz indefectible de la lógica si se quiere elevar a la categoría de un hecho verdadero; y ese tamiz requiere, al mismo tiempo, una lógica sustentada por un correcto uso del lenguaje matemático. El razonar lógico-matemático se asienta en el lenguaje matemático.

3.2.4 Las demostraciones en Bachillerato. Real Decreto 1467/2007

Se citan a continuación algunas de las disposiciones generales que aparecen en el Real Decreto de 2007 para las modalidades del Bachillerato y que hacen referencia a las demostraciones.

> Las definiciones formales, las demostraciones (reducción al absurdo, contraejemplos) y los encadenamientos lógicos (implicación, equivalencia) dan validez a las intuiciones y confieren solidez a las técnicas aplicadas. Sin embargo, éste es el primer momento en que el alumno se enfrenta con cierta seriedad al lenguaje formal, por lo que el aprendizaje debe ser equilibrado y gradual. El simbolismo no debe desfigurar la esencia de las ideas fundamentales, el proceso de investigación necesario para alcanzarlas, o el rigor de los razonamientos que las sustentan. Deberá valorarse la capacidad para comunicar con eficacia esas ideas aunque sea de manera no formal. Lo importante es que el estudiante encuentre en algunos ejemplos la necesidad de la existencia de este lenguaje para dotar a las definiciones y demostraciones matemáticas de universalidad, independizándolas del lenguaje natural (BOE-A-2007-19184, núm. 266, p. 45461)

Se puede apreciar la referencia clara a las demostraciones, y en concreto, a la importancia de que el estudiante encuentre en algunos ejemplos la necesidad de la existencia del lenguaje matemático; hecho que dota de solidez y respaldo a la propuesta didáctica que se presenta en este trabajo.

Sin embargo, la realidad en las aulas de Bachillerato diste bastante de estas directrices del Real Decreto. El calendario apretado de la programación, por falta de tiempo, y por dificultades de comprensión por parte de los alumnos, hace que muchos de los profesores no consideren las demostraciones como algo prioritario dentro de la programación de la asignatura. Así los sostienen todos los profesores entrevistados (ver capítulo 4). Una vez más, se puede afirmar que las propuestas al respecto, con el fin de mejorar esta situación, serán de gran utilidad.

3.2.5 Las demostraciones en los libros de texto de Bachillerato

Es evidente que los libros de texto influyen de forma decisiva en los procesos educativos (Ibañez, 2004, p.25). Sin embargo, en lo referente a la enseñanza de demostraciones matemáticas en Bachillerato existen grandes lagunas por parte de los libros de texto. Se muestran algunos textos que lo ponen de manifiesto:

> En los libros de texto que hemos estado analizando las demostraciones brillan por su ausencia. Las demostraciones que presentan una mínima dificultad han sido eliminadas de los textos de bachillerato, en los que las Matemáticas consisten en el aprendizaje de una serie de conceptos (con sus definiciones subrayadas), junto a un conjunto de instrucciones, o normas de uso, estableciéndose luego algunas conexiones entre ellos y mostrando su utilidad para poder resolver diversos problemas y ejercicios (Barba, 2007, p. 18).

> Esta ausencia de intención didáctica que se observa en el tratamiento que dan los libros de texto a la demostración, se ve reflejada en la uniformidad de métodos y estilos, en el silencio sobe sus funciones, en las casi inexistentes reflexiones sobre la naturaleza del procedimiento, en la ausencia de explicaciones sobre las expresiones que se utilizan, en la unánime carencia de explicaciones sobre el sentido global del proceso y de sus líneas maestras, y en el nulo interés por indicar vías de justificación para establecer afinidades y contraste (Ibañez, 2004, p.29).

Ante esta situación, y con todo lo expuesto en los capítulos anteriores, podrían plantearse claramente varias alternativas. Destacar un par de ellas, que se plantean como realizables y de plausible impacto:

- Promover una presencia mayor, y de peso más significativo, de demostraciones en los libros de Matemáticas de Bachillerato. Esta actuación claramente tendría un fuerte impacto, y conllevaría una fase previa de estudio de la situación actual de los libros de Matemáticas y los puntos de mejora a proponer.
- Proponer la implantación de la propuesta didáctica que plantea el presente trabajo, para las Matemáticas de Bachillerato. Una propuesta basada en la enseñanza-aprendizaje del lenguaje matemático, a través de una revaloración de las demostraciones en 2º de Bachillerato de ciencias y tecnología. Para ello, y para realizar una propuesta asequible y de impacto real, se propone la selección de ciertas demostraciones importantes dentro del temario, pocas, pero con un criterio de selección claro.

El presente trabajo pretende proponer una propuesta para la segunda alternativa expuesta. En vistas, claro está, que dichas propuestas sean incluidas a largo plazo en los libros de texto. La experiencia que se derive de esta propuesta puede ser muy enriquecedora, tanto para profesores como para las propias editoriales.

4. ESTUDIO DE CAMPO

Con el fin de valorar la adecuación de la propuesta planteada a las necesidades que los profesores detectan en las aulas, se ha realizado un trabajo de campo para tener en cuenta la experiencia de los docentes y su punto de vista al respecto.

4.1 Estructura de las entrevistas y docentes entrevistados

Claro está que con frecuencia quienes se encargan de estas tareas educativas centran su atención en los métodos didácticos sin dedicar mucho tiempo al estudio de las matemáticas en sí mismas, es decir, a cuestiones más conceptuales sobre las matemáticas y sus procesos de carácter abstracto. Sin embargo, sus aportaciones resultan enriquecedoras para este estudio, ya que ofrecen un punto de referencia sobre la posible aceptación o rechazo de quienes deben ser los agentes de implantación de la propuesta que se plantea. Por otro lado, su experiencia en el campo de la enseñanza aportará luces nuevas que serán de gran utilidad para el diseño de la propuesta didáctica.

Con este objetivo, se han entrevistado cinco profesores, tanto universitarios como de Bachillerato, contando con la autorización de todos en cuanto a la publicación y difusión de las opiniones que han plasmado en las entrevistas:

1. Sergi Nadal: profesor de Álgebra de 1º curso de Ingeniería de Caminos de la UPC (Universitat Politècnica de Catalunya).
2. Javier Muñoz: profesor de Álgebra de 1º curso de Ingeniería de Telecomunicaciones de la UPC (Universitat Politècnica de Catalunya).
3. Carme Fabregat: profesora de Matemáticas de 2º de Bachillerato científico del Colegio Pineda.
4. M. Teresa Gómez: profesora de Matemáticas de 2º de Bachillerato científico en el Colegio La Vall.
5. Pilar Moreno: profesora de Matemáticas de 2º de Bachillerato científico del Colegio Montclar, y profesora de 1º curso de Matemáticas en la Facultad de Física de la UB (Universitat de Barcelona).

Las entrevistas realizadas son de tipo semiestructurado: se ha partido de un guión común para todas las entrevistas (ver el guión en los anexos) y se han complementado con aportaciones personales y de carácter esporádico de los entrevistados, así como con temas relacionados a este estudio y que eran de interés por parte de esos docentes.

4.2 Valoración de los resultados

Las entrevistas realizadas permiten exponer una serie de conclusiones y reflexiones. A continuación se transcriben algunas de ellas.

a. Necesidad de realizar una enseñanza en forma de *bucle*

Fabregat (comunicación personal, 2012, julio 15) expuso que sería importante destacar que la enseñanza, y más aún la enseñanza de las matemáticas, se define por ser un proceso circular. Se da una necesidad, por parte del alumno, de reincidir de forma recurrente sobre los mismos aspectos. Podríamos decir que el aprendizaje de los alumnos es como *bucle* en el que el profesor empieza explicando un concepto (el núcleo central de dicho *bucle*) y éste debe ir dando diferentes vueltas, véase diversas referencias, alrededor de ese concepto. No se trata de reincidir una y otra vez sobre el mismo aspecto y de la misma manera, sino hacer referencia al concepto expuesto desde distintos puntos de vista o aludiendo en cada vuelta a una característica de éste. Con una sola explicación del concepto los alumnos no son capaces de comprender la significación de éste, por lo que se aconseja realizar una enseñanza en forma de *bucle*. Como en todo proceso educativo, hay que partir de lo conocido y volver a formularlo si es preciso para dar más claridad y mayor alcance a lo que el alumno ya sabe; graduar el orden de dificultad en los razonamientos y aumentar su complejidad paulatinamente; insistir en las ideas básicas, enfocarlas desde puntos de vista y desde niveles diferentes; practicar con ellas a través de ejercicios y problemas, que, a la vez que contribuyen a asentarlas, proporcionan soltura en los métodos de trabajo. Por ejemplo, todos los profesores de 2º de las matemáticas del Bachillerato de Ciencias y Tecnología que se han entrevistado coinciden en afirmar que los alumnos necesitan por lo menos 2 años para asimilar bien un concepto.

Con la enseñanza del lenguaje matemático también nos encontramos con esta tesitura. Ante esta realidad, y más aún frente al fracaso actual en las aulas de las

Universidades, parece acertado proponer una mejora en el uso y enseñanza del lenguaje matemático en los Institutos y Colegios.

b. Las demostraciones no son algo prioritario para el profesor de matemáticas de 2º de Bachillerato

Todos los profesores de 2º de Bachillerato coinciden en afirmar que para ellos las demostraciones no son algo prioritario dentro de la programación de su asignatura. También han sido unánimes en cuanto a la justificación de dicha realidad, y destacan como principales motivos de esta dejación:

- La falta de tiempo, que lleva a que el calendario escolar y las programaciones estén demasiado apretadas como para dedicarse a explicar demostraciones.
- Las dificultades de comprensión por parte de los alumnos, ya que estos no están habituados a trabajar con ese tipo de razonamiento lógico ni al uso del lenguaje matemático. Este hecho, supone un añadido más para los profesores entrevistados no vean como prioritaria, a efectos prácticos, la enseñanza de las demostraciones.

c. Propuestas didácticas sobre el correcto uso y evaluación del lenguaje matemático

En este sentido, las opiniones de los entrevistados divergen notablemente. Aparece una clara distinción entre la evaluación que realizan los profesores universitarios, que aquella que hacen los docentes de Bachillerato.

Los profesores de primer curso de Ingeniería afirman que no tienden a ser exigentes con los alumnos en este sentido; la corrección de exámenes suele ser ardua y no se precisa de mucho tiempo. Sí que afirman que actualmente son pésimos los hábitos y conocimientos del lenguaje matemático con que los alumnos llegan a sus clases, y están convencidos de que muchos no logran superar sus asignaturas por no tener esa base bien asentada. Como suele ser habitual en estos casos, estos profesores ponen, en parte, el sello de este fracaso sobre los docentes de Bachillerato.

Por su parte, los profesores de Bachillerato han presentado opiniones muy variadas, y de gran interés didáctico:

- Pilar Moreno (comunicación personal, 2012, agosto 18) afirma que desde hace muchos años corrige el inapropiado uso del lenguaje matemático como si se tratara de un examen de lengua: "las faltas de ortografía castellana bajan puntos, y las faltas matemáticas también". Así lo explica a sus alumnos al iniciar el Bachillerato, y así lo cumple. Como expone ella misma, esto le exige en primer lugar a ella, ya que debe cuidar el correcto uso del lenguaje matemático en la pizarra y en los modos de expresarse. Está segura de haber podido comprobar numerables veces los frutos de ese esfuerzo.
- M. Teresa Gómez (comunicación personal, 2012, 8 julio) explica uno de sus objetivos claros en sus clases de Bachillerato: exponer de forma clara, correcta y completa las resoluciones de los ejercicios en la pizarra. Afirma que para los alumnos es de gran ayuda este modo de proceder, ya que disponen de puntos de referencia fiables para el correcto uso del lenguaje matemático, sobre todo en vistas a enfrentarse ellos solos a un ejercicio o examen.

d. Valoración de la propuesta didáctica

La propuesta didáctica que se plantea, basada en una revaloración de las demostraciones como recurso para mejorar el uso y comprensión del lenguaje matemático, ha sido considerablemente bien acogida por todos los profesores entrevistados.

Como ya se ha dicho, uno de los grandes inconvenientes al que han alegado los profesores de Bachillerato es la falta de tiempo, siempre un elemento decisivo y limitante en la programación de un curso. También es cierto, sin embargo, que aseguran que se trata probablemente de un problema de falta de prioridad por su parte. Sin embargo, también ellos son conscientes que el nivel de matemáticas actual de los alumnos de Bachillerato es muy bajo y que la introducción de pequeñas demostraciones en clase puede favorecer mucho los procesos de abstracción y comprensión, y ayudar a la adquisición de la competencia comunicativa también en matemáticas, sabiendo usar su lenguaje propio.

Claramente, y como era de esperar, los profesores universitarios les ha entusiasmado la propuesta. Ven en ella el inicio de un camino hacía una revaloración del buen hacer matemático.

5. PROPUESTA DIDÁCTICA PARA REVALORIZAR LAS DEMOSTRACIONES EN LA PROGRAMACIÓN DE MATEMÁTICAS DEL BACHILLERATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

5.1 Criterios de estudio

El estudio realizado en los capítulos anteriores, nos ha permitido llegar a varias conclusiones sobre el modo de enfocar la propuesta didáctica que nos proponemos. Como se ha visto, la mejora del uso del lenguaje matemático en las aulas de Bachillerato es actualmente un tema a estudiar y sobre el que seguir proponiendo mejoras.

La propuesta didáctica se basa en una revaloración de las demostraciones en la programación de matemáticas de 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, con el fin de mejorar el aprendizaje del lenguaje matemático por parte de los alumnos. Como ya se ha expuesto en los capítulos previos, se presentarán solo algunas demostraciones, para una primera puesta en práctica de esta propuesta, y al mismo tiempo, como referencia para futuras implantaciones de esta propuesta de forma global para todo el temario.

Para cada una de las demostraciones propuestas se definirán los siguientes criterios de estudio, según los aspectos que se han estudiado en los capítulos anteriores:

- ✓ Modo de introducir la demostración:
  Dado que no resulta óptimo iniciar un tema con una demostración deductiva, éstas deberán ser el colofón tras un proceso intuitivo previo. Resulta importante tenerlo en cuenta a la hora de plantear el modo de presentar dichas demostraciones en el aula.

- ✓ Lenguaje matemático a trabajar:
  Uno de los objetivos prioritarios es que los alumnos se habitúen al correcto uso del lenguaje matemático. Se pretende definir los símbolos a introducir a través de dicha demostración, también las representaciones gráficas, si es el caso.

- ✓ Demostración a realizar:
  Se propone la demostración citada con el lenguaje matemático correspondiente.

5.2 Propuesta para las principales unidades didácticas

Para la elaboración de la presente propuesta didáctica, se han seleccionado algunas unidades didácticas, sin pretender abarcar la totalidad de la programación de matemáticas de 2ºBachillerato de Ciencias y Tecnología. En el Real Decreto 1467/2007 los contenidos se estructuran en tres bloques: análisis, geometría y álgebra. De cada uno de estos ejes se ha destacado una unidad específica de estudio, por el peso docente que ésta tiene y por la importancia de sus contenidos dentro del mismo. En los siguientes apartados se presentan estas tres unidades.

5.2.1 ANÁLISIS: estudio de funciones

a. Importancia del estudio de funciones dentro del currículum

El concepto de función es uno de los conceptos básicos en Matemáticas y, al mismo tiempo, uno de los más difíciles de adquirir por los estudiantes, pues se mezclan en él aspectos complejos en sí mismos como su simbolismo, su representación, sus aplicaciones a otros campos y sus propiedades, entre otros.

En la ESO los alumnos realizan estudios, de carácter intuitivo y gráfico, de fenómenos funcionales relacionados con otras áreas de conocimiento. Este hecho propicia que los alumnos tengan un conocimiento previo del concepto de función antes de llegar al Bachillerato. En este sentido es muy importante que los estudiantes relacionen, con destreza, las familias más comunes de funciones con su gráfica, entendiendo el significado de sus características más importantes. “El lenguaje gráfico es, en la actualidad, un recurso muy importante para la transmisión de la información y el desarrollo de las capacidades básicas de este lenguaje --lectura e interpretación-- es fundamental en este nivel educativo” (Nieto, 1997).

b. Dificultades propias del aprendizaje del estudio de funciones

Las posibles dificultades para la visualización gráfica de una función pueden superarse actualmente con las calculadoras gráficas o con los múltiples programas informáticos que existen, por lo que resulta fácil que los alumnos tengan

Los conceptos de límite y derivada constituyen otro de los problemas didácticos en las matemáticas en estos cursos. Uno de los problemas con que el alumno se encuentra en el momento de aproximarse al concepto de límite, es la idea del infinito y de una cantidad infinitesimal, al que se añade el problema derivado de no tener bien asentado el concepto de función.

c. Propuesta didáctica para incluir demostraciones

Como se ha visto, unos de los conceptos más conflictivos de esta unidad didáctica son el de límite y derivada. Por este motivo, la propuesta didáctica que se va a proponer será dentro de este marco, con el fin de aportar propuestas positivas en cuanto a la comprensión del tema, al mismo tiempo que se logra una mejora en el uso del lenguaje matemático que le es propio.

DEMOSTRACIÓN 1: LA DERIVADA

1. Modo de introducción de la demostración

Realizar primeramente una introducción gráfica en la que los alumnos vean la necesidad de de construir la derivada a partir del uso de los límites, que ya conocen de unidades anteriores.

Se recomienda el uso del software *Geogebra* para mostrar a los alumnos la representación gráfica de la derivada en cualquier punto de la función.

2. Lenguaje matemático a trabajar

Esta demostración matemática contiene lenguaje gráfico y notación matemática, por lo que resulta ser muy enriquecedora. Los símbolos del lenguaje matemático a trabajar a través de esta demostración es el que se indica a continuación:

$$lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}$$

Limite: lim

Incremento: Δ

Diferencial: d

Asegurar el correcto uso del símbolo lim, puesto que los alumnos tienden a anularlo antes de haber realizado la operación pertinente.

3. Desarrollo de la demostración

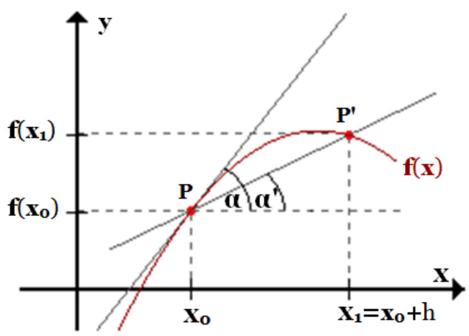

Figura 4. Representación de la derivada en un punto

Dibujada la gráfica de la Figura 3, consideremos la tangente a la curva f(x) en el punto $P(x_0,f(x_0))$. El conocimiento de los valores x_0 y $f(x_0)$ no basta para determinarlo, puesto que hay un número infinito de rectas, aparte de la tangente, que pasan por P. Tampoco es necesario conocer la función f(x) en su comportamiento global; el conocimiento de la función en una vecindad arbitraria del punto P debe ser suficiente para determinar α. Esto indica que se debería definir la dirección de la tangente a una curva f(x) mediante un proceso de límite.

Consideremos la *Figura 4*, en la que aparece un segundo punto $P'(x_1,f(x_1))$ sobre la curva, cercano a P, dónde $x_1= x_0+h$ (dónde h es un número infinitamente pequeño). Por los dos puntos P y P' se traza una línea recta. A medida que se hace tender h a cero, la recta secante que une los puntos $(x_0,f(x_0))$ y $((x_0 + h), f(x_0 + h))$ tiende a confundirse con la tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$.

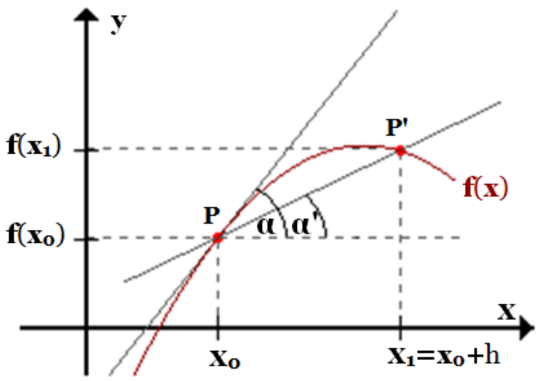

Figura 5. Gráfica para el cálculo de la recta tangente en un punto

Sea α' el ángulo que la recta PP' forma con el eje x positivo. Si α' es el ángulo que forma la secante con el eje de abscisas, y α el ángulo que determina la tangente con ese mismo eje, en el triángulo rectángulo de vértices $(x_0,f(x_0))$,$(x_0 + h,f(x_0 + h))$ y $(x_0 + h,f(x_0))$, se verifica:

$$\tan\alpha' = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Al hacer tender h a cero, y puesto que la secante tiende a confundirse con un segmento de la tangente, tan α' tiende a tan α, es decir, a la pendiente de la tangente a la curva en el punto $(x_o,f(x_o))$. Esto se expresa matemáticamente así:

$$\tan\alpha = \lim_{h\to 0}\tan\alpha' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'(x_0)$$

A este límite, si existe y es finito (un número), se lo denomina derivada de la función f(x) en el punto x_o y se denota como $f'(x_o)$ y no es otra cosa que la pendiente de la tangente a la curva (gráfica de la función) en $(x_o,f(x_o))$.

5.2.2 GEOMETRÍA: geometría en el espacio

a. Importancia del estudio de la geometría dentro del currículum

Se admite de forma universal la importancia de la geometría como formadora del razonamiento lógico. Pocos son quienes discuten su trascendencia tanto en estudios superiores de cualquier ciencia como en el desarrollo de habilidades de la vida diaria.

b. Dificultades propias del aprendizaje de la geometría en el espacio

A pesar de que los estudiantes se desenvuelven en un mundo tridimensional carecen, en muchos casos, de visión espacial. Se trata de un problema bastante generalizado.

Los problemas más frecuentes en la enseñanza de la geometría vienen mayoritariamente derivados de las dificultades de visualización de los problemas geométricos planteados desde una perspectiva algebraica. Los alumnos menos capacitados, sobre todo aquellos con poca facilidad para la abstracción, se pierden entre las fórmulas y ecuaciones propias del lenguaje algebraico, y no logran comprender su significado geométrico.

El trabajo geométrico que los alumnos han realizado en la ESO sirve de base para que el tratamiento algebraico de la geometría esté más próximo a las situaciones de aprendizaje de los estudiantes de Bachillerato. Además, como en el caso del estudio de la representación de funciones, la utilización de programas informáticos puede ser muy importante para esta visualización.

c. Propuesta didáctica para incluir demostraciones

A continuación se presenta el desarrollo de la demostración a introducir en clase, definiendo todos los puntos citados anteriormente.

DEMOSTRACIÓN 2: CÁLCULO DE ÁNGULOS EN EL ESPACIO

1. Modo de introducción de la demostración

Partir claramente de representaciones visuales en 3D, nunca de las demostraciones algebraicas, para que los alumnos perciban de forma intuitiva la formulación algebraica del cálculo de distancias

Se recomienda el uso del plataforma del proyecto *Descartes 3D,* del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

2. Lenguaje matemático a trabajar

- recta: r
- ángulo: $\propto$
- vector director de la recta r: $\vec{u_r}$
- vector normal al plano π: $\vec{n_\pi}$
- producto escalar entre dos vectores

Asegurar el correcto uso de los paréntesis y símbolos. Suele darse la confusión del valor absoluto con el módulo de un vector.

3. Desarrollo de la demostración

En el temario de matemáticas de 2º de Bachillerato de ciencias y tecnología aparece un extenso tema de geometría, con la presentación de una gran extensión de fórmulas matemáticas para el cálculo de distancias en el espacio. Se han seleccionado las que, por su desarrollo y los contenidos que trabajan, puedan ser de más utilidad.

En esta unidad didáctica, el recurso a figuras y dibujos para plasmar los conceptos a estudiar es un recurso básico. Como ya se ha dicho, el lenguaje gráfico-geométrico es de vital importancia, ya que los alumnos difícilmente podrán entender estos conceptos sin esta ayuda.

a. Ángulo entre dos rectas

Si se toman los vectores directores de las dos rectas, $\vec{u_r}$ y $\vec{u_s}$, el ángulo que forman éstos coincide con el ángulo entre las dos rectas, si es agudo, o con su suplementario, en el caso en que sea obtuso.

Por lo tanto, el coseno del ángulo $\propto$ entre las dos rectas coincidirá, menos en el signo, con el ángulo que forman sus vectores directores:

$$cos(\widehat{r,s}) = \cos\alpha = \left|cos(\widehat{\vec{u_r},\vec{u_s}})\right| = \left|\frac{\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}}{|\vec{u_r}||\vec{u_s}|}\right| = \frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}|}{|\vec{u_r}||\vec{u_s}|}$$

$$\propto = arc\cos\frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}|}{|\vec{u_r}||\vec{u_s}|}$$

b. Ángulo entre dos planos

Para iniciar, será importante definir el concepto de vector normal a un plano π como aquél vector perpendicular (también llamado ortogonal) al plano en un punto: $\vec{n_\pi}$

Así pues, dados dos planos podemos encontrar sus vectores normales, y calcular el ángulo entre éstos mediante el procedimiento de cálculo de ángulos entre dos rectas.

$$\left|cos(\widehat{\vec{\pi_1},\vec{\pi_2}})\right| = \left|cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})\right| = \left|\frac{\vec{u_{n1}}\cdot\vec{u_{n2}}}{|\vec{u_{n1}}||\vec{u_{n2}}|}\right| = \frac{|\vec{u_{n1}}\cdot\vec{u_{n2}}|}{|\vec{u_{n1}}||\vec{u_{n2}}|}$$

$$\propto = arc\cos\frac{|\vec{u_{n1}}\cdot\vec{u_{n2}}|}{|\vec{u_{n1}}||\vec{u_{n2}}|}$$

c. Ángulo entre recta y plano

El ángulo α que forman el plano π y la recta r es complementario a β, que es el que forma dicha recta con el vector normal al plano $\vec{n_\pi}$. El vector normal al plano genera una recta, t, que es perpendicular al plano π.

Por lo tanto, sabemos que el seno del ángulo α coincidirá con el coseno del ángulo β, y que éste coincidirá, excepto en el signo, con el ángulo que forman el vector director de la recta $\vec{u_r}$ y un vector normal al plano $\vec{n_\pi}$. Así pues, tenemos que:

$$\sin(\widehat{r,\pi}) = \sin\alpha = |cos(\widehat{r,t})| = \cos\beta = \left|\cos(\widehat{\vec{u_r},\vec{n_\pi}})\right| = \frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{n_\pi}|}{|\vec{u_r}||\vec{n_\pi}|} \propto$$

$$= arc\cos\frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{n_\pi}|}{|\vec{u_r}||\vec{n_\pi}|}$$

5.2.3 ÁLGEBRA: método de la inducción

a. Importancia del álgebra

La matemática actual se caracteriza por el predominio del álgebra, y ésta se está ganando protagonismo en todas las ramas de las matemáticas. Su importancia radica en el hecho de que permite realizar generalizaciones de relaciones y patrones aritméticos específicos.

b. Dificultades propias del aprendizaje del álgebra

A pesar de las posibilidades que propician el conocimiento y desarrollo del álgebra, los alumnos le tienen pavor. Las dificultades suelen estar asociadas al uso del lenguaje matemático. De hecho, Sierpinska (1996) menciona la coexistencia de tres tipos de lenguaje en el álgebra: el lenguaje geométrico, el aritmético y el algebraico, de ahí su grado de dificultad para los alumnos.

También es cierto que en las otras didácticas expuestas hasta el momento es frecuente, y relativamente fácil, motivar la enseñanza de los conceptos a partir de otros conocimientos físicos o geométricos ya conocidos; pero en el álgebra lineal, la mayor parte de conceptos se presentan como definiciones formales de objetos cuya existencia no suelen tener conexión con conocimientos previos ni realidades físicas que motiven la definición presentada. Esto lleva a que muchos estudiantes piensen que la materia es demasiado abstracta y que los contenidos no tienen relación con algo que se pueda aplicar en la realidad.

c. Propuesta didáctica para incluir demostraciones

Se ha visto importante seleccionar la demostración del método por inducción, por su importancia dentro del razonar matemático y por el peso que tiene en las asignaturas de primer curso de las carreras técnicas.

DEMOSTRACIÓN 3: MÉTODO DE INDUCCIÓN

1. Modo de introducción de la demostración

Enmarcar la presentación de esta demostración dentro de las estrategias de resolución de problemas, diferenciando entre los razonamientos deductivos y los inductivos.

Los alumnos de Bachillerato no están acostumbrados a este tipo de razonamiento, por lo que será importante empezar con ejemplos numéricos concretos.

2. Lenguaje matemático a trabajar

- P_0: primera proposición que se demuestra cierta
- P_n: proposición que se asume cierta
- P_{n+1}: proposición que se demuestra cierta partiendo de P_n

Asegurar la correcta distinción y argumentación de las fases de la demostración

3. Desarrollo de la demostración

Primeramente debemos definir los siguientes conceptos:

- P_n: proposición
- n : rango

Y a continuación se define el modo de proceder de las demostraciones inductivas:

1. Se demuestra que P_0, el primer valor que cumple la proposición, es cierta.
2. Se asume como cierta y como hipótesis inductiva: P_n
3. Demostrar que P_{n+1} también es cierta, sin condición sobre el entero natural n

Una vez demostrados estos puntos, podemos concluir por inducción que P_n es cierto para todo natural n. Este resultado será válido:

$$\forall\, n \in N, tal\ que\ n \geq n_0$$

No debe exponerse esta demostración sin plasmarla en un ejemplo concreto, como el que se presenta a continuación:

Nos dice el enunciado del problema:

$\forall\, n \geq 1, 6^n$ es un número que acaba en 6.

Definimos la preposición P_n: « 6^n acaba en 6».

1. Se demuestra que P_0, el primer valor que cumple la proposición, es cierta.
   Es claro que 6^1 es cierto, ya que $6^1 = 6$.

2. Se asume como cierta y como hipótesis inductiva: P_n

3. Demostrar que P_{n+1} también es cierta, sin condición sobre el entero natural n

   Un entero acaba por 6 si se puede escribir así: $10a + 6$, con a entero positivo o igual a cero. La hipótesis es, pues: $6^n = 10a + 6$

   Por lo que tenemos:

   $$6^{n+1} = 6(10a + 6) = 60a + 30 + 6 = 10(6a + 3) + 6 = 10c + 6$$
   con $c = 6a + 3$, entero

   Con lo que se acaba de probar que 6^{n+1} acaba por 6, o sea que P_{n+1} es cierto, con lo que P_n es cierto $\forall\, n \geq 1$.

5.3 Orientaciones para los profesores

5.3.1 Verlo como una prioridad

Quizá uno de los grandes inconvenientes que alegarán los profesores ante la propuesta que se acaba de realizar es la falta de tiempo, siempre un elemento decisivo y limitante en la programación de un curso. De hecho, los profesores entrevistados, aunque muy entusiastas frente a la propuesta didáctica que presenta dicho trabajo, han aludido todos ellos al problema de la falta de tiempo. También es cierto, sin embargo, que aseguran que se trata más bien de un problema de falta de prioridad por parte del profesor. Como ya se ha expuesto, también ellos son conscientes que el nivel de matemáticas actual de los alumnos de Bachillerato es muy bajo y que la introducción de pequeñas demostraciones en clase puede favorecer mucho la comprensión matemática, los hábitos de uso correcto del lenguaje, y como no, de los procesos de abstracción.

5.3.2 Modos de evaluación

Como en cualquier asignatura del Bachillerato, es importante no dar contenidos que más tarde no van a ser evaluados. Por lo tanto, es necesario remarcar la importancia de evaluar de forma explícita las demostraciones hechas.

Dado que para los alumnos de Bachillerato es la primera vez que se encuentran de con estas demostraciones, puede ser conveniente que éstos deban entregar como deberes la demostración que se ha explicado en clase, más aún si estas no aparecen en los libros, como suele suceder. Esta actividad les facilitará la práctica con dichas expresiones, y puede corregirse al día siguiente en la pizarra, de tal modo que éstos deban verbalizar sus razonamientos.

5.3.3 Aspirar a una educación personalizada

Entre un grupo de alumnos, no todos tienen las mismas capacidades e inquietudes respecto al aprendizaje matemático. En concreto, es importante resaltar que en el Bachillerato se dan grandes diferencias entre estos alumnos en cuanto que no todos quieren realizar los mismos estudios universitarios. Claramente es muy diferente la preparación matemática que precisa un futuro ingeniero que un médico. Sería bueno, pues, adecuarse a los distintos casos.

Sería muy interesante ofrecer, sobre todo a los alumnos que quieran estudiar alguna ingeniería, un elenco de demostraciones para cada una de las unidades didácticas del Bachillerato para que éstos pudieran familiarizarse aún más con este lenguaje matemático y con este modo de razonar. Por lo general, estas demostraciones no tendrían por qué explicarse en clase, a no ser que se tratara de un grupo de alumnos que tuviera un buen nivel académico ya conseguido; serían más bien unas fichas a plantear de forma extra a ciertos alumnos, con el fin de incentivarles y tener con ellos un seguimientos personalizado de su aprendizaje.

6. CONCLUSIONES

El presente estudio permite exponer algunas conclusiones sobre los objetivos que inicialmente se proponía. A continuación se presentan los puntos que se destacan:

1. Se puede afirmar que actualmente existe los alumnos de Bachillerato tienen dificultad para comprender el lenguaje matemático empleado por el profesor y para expresarse también ellos en dicho lenguaje.

2. Se debe considerar la enseñanza de las matemáticas como enseñanza del lenguaje matemático, que debería caracterizarse por un cambio de centro de atención: pasar del simple estudio de un sistema abstracto de reglas y símbolos, a la adquisición de competencia comunicativa.

3. El aprendizaje matemático, también su lenguaje, es como un *bucle*. Hay que partir de lo conocido y volver a formularlo si es preciso para dar más claridad y mayor alcance a lo que el alumno ya sabe. No consiste solo en la adquisición de unos símbolos matemáticos, sino también de sus significados y modos de comunicar propios de ese registro.

4. Las demostraciones deductivas son un recurso educativo eficaz para al aprendizaje del lenguaje matemático, no tanto por su rigorismo sino por la formalidad lógico-lingüística que éstas precisan.

5. Los libros de texto influyen de manera decisiva en las programaciones y en los procesos educativos, pero la referencia a las demostraciones casi no aparecen en ellos.

6. Se concluye que la propuesta basada en revalorizar las demostraciones, como recurso para mejorar el uso y comprensión del lenguaje matemático, resulta ser una propuesta fuerte impacto y de gran simplicidad de implementación, y se trata de una actuación afín a las disposiciones del Real Decreto 1467/2007.

7. LIMITACIONES DEL TRABAJO

En cualquier estudio que se pretenda realizar, uno debe ser consciente de las limitaciones del mismo. Limitaciones que suponen decisiones por parte de quienes realizan dicho estudio; el error más grande sería pretender aportar una respuesta de carácter absoluto a una cuestión. Siempre aparecen posibles hipótesis a considerar o distintos criterios desde los que enfocar un estudio.

En el presente trabajo, cabría dejar constancia de las siguientes limitaciones:

- La dificultad en el uso del lenguaje matemático no solo aparece en el Bachillerato, sino que claramente es un problema que lo arrastran los alumnos desde la ESO. Sería interesante aportar propuestas al respecto que pudieran aplicarse en esos cursos, pero para este estudio se ha determinado como campo de estudio solamente el Bachillerato, con el fin de poder aportar propuestas claras y concretas.

- La propuesta didáctica que se presenta solo contiene un elenco muy reducido de demostraciones. Podrían introducirse muchas más, pero serían objeto de un estudio de carácter exhaustivo que estuviera centrado en esta propuesta. Sin embargo, el presente trabajo ha pretendido en gran medida fundamentar la importancia de la revaloración de las demostraciones y ha querido plantear una primera propuesta didáctica, que resulta ser un modelo a seguir desarrollando con profundidad.

- No se ha realizado una prueba piloto de la propuesta que se presenta. Se trata solo de una propuesta teórica, aunque respaldada por algunos docentes. Las experiencias y resultados que se obtendrán de una primera implementación en las aulas de un colegio proporcionarán una valoración añadida a este trabajo.

8. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

- Estudio comparativo de los contenidos actuales de los principales libros de matemáticas del Bachillerato de Ciencias y Tecnología en lo referente a las demostraciones.

- Realización de una colección de demostraciones y actividades relacionadas para Bachillerato, a realizar de modo personalizado por los alumnos, sobre todo aquellos que se planeen estudiar una carrera técnica.

- Proponer un plan de mejora sobre el uso y aprendizaje progresivo del lenguaje matemático en la ESO y Bachillerato. Determinar los objetivos para cada curso.

- Desarrollar un plan de mejora de la competencia comunicativa de los alumnos a nivel oral. Saber expresarse correctamente estructura el pensamiento y afianza los procesos de abstracción.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcalá, Manuel (2002). *La construcción del lenguaje matemático* (1ª ed.). Madrid: El Graó.

- Barba, A. C. (2007). *Libros de texto de Matemáticas en el Bachillerato español.* Informe del Colegio Libre de Eméritos

- Cabrera, L. B. (2006). El problema del abandono de los estudios universitarios. Revista *Relieve,* vol.12, n. 2 .

- Canto, P; Gallego, I (2010). *¿Qué hacemos con los alumnos que van mal?* XVI Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas. Cádiz: 2008, p. 1-11.

- Caraballo, M., Morales, C., Palacios, E., González, M. M. (2009). Mejora de la comprensión del lenguaje. *XVII Jornadas ASEPUMA – V Encuentro Internacional.* Vol. Actas 17

- Codina Sánchez, A., Lupiañez Gómez, J. *El razonamiento matemático: argumentación y demostración.*

- Godino, J., Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada. Disponible en:

  http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf.

- Hillel J., (2000), *Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra.* J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 191–207.

- Ibañez, M. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato. XXXI Jornadas anuales de la SCPM. Disponible en:

  http://www.sinewton.org/numeros/numeros/57/Articulo02.pdf

- Jalón, M. J. (2001). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. *Investigación en Eduacción Matemática,* Almería.

- Kline, M. (1981). *El fracaso de la matemática moderna* (7ª ed.). Madrid: Siglo veintiuno editores.

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado (4 mayo 2006), núm. 106, pp. 17158- 17207

- *Matemàtiques II*. Grup Edebé. Barcelona, 2009.
- *Matemáticas II*. Oxford Education. Madrid, 2002.

- Martín Mª Ángeles, Arranz, G; , González, M; , Páramo, R (2002). Análisis de las causas del fracaso escolar y desarrollo de acciones mejora. Diponible en: http://www.epsevg.upc.edu/xic/ponencias/R0170.pdf

- Martínez Recio, A. (2001). La demostración matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. *Investigación en Eduación Matemática*.

- Nieto, J. B. (1997). Las matemáticas en el Bachillerato. *SUMA* , 25, 6-8.

- Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula* (3ª ed.). Madrid: Morata.

- Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se establecen sus enseñanzas mínimas. Boletín Oficial del Estado (6 noviembre 2007), núm. 266, pp. 45381-45477.

- Ruiz, Á. (2006). La educación matemática debe fortalecer el pensamiento abstracto. *Revista Matemáticas, Educación e Internet*, 157, 22-25.

- Sierpinska A. (1996) Problems related to the design of the teaching and learning process in linear álgebra, Research Conference in Collegiate Mathematics Education, Central Michigan University.

- Rodolfo Londoño, J. (2011). Geometría Euclidiana. Cap 1: algunos métodos de demostración. Disponible en:

  http://es.scribd.com/doc/100074153/geometria-euclidiana-cap01

- Vallín, (2012, junio 15). El fracaso universitario en Cataluña va en aumento *La Vanguardia*, pp. 45

10. ANEXOS

Propuesta didáctica sobre la revaloración de las demostraciones como recurso para mejorar la comprensión del lenguaje matemático en los alumnos de Bachillerato.

Máster en Educación Secundaria, UNIR. Colaboración con el trabajo final de Máster.

NOMBRE...

ESTUDIOS REALIZADOS ....

DEDICACIÓN ACTUAL...

La presenta encuesta se encuentra enmarcada dentro de un estudio sobre la mejora de la preparación matemática de los alumnos del Bachillerato científico, con la finalidad de reducir los fracasos en 1ºcurso de las carreras, sobre todo técnicas. La propuesta de dicho estudio se centra en la mejora del uso y comprensión del lenguaje matemático a través del empleo de las demostraciones en los cursos previos a los estudios universitarios.

1. Dónde radica la importancia del lenguaje matemático. Su relación con la comprensión matemática y los procesos de abstracción.

2. Importancia que da al aprendizaje del lenguaje matemático. Modo de enseñarlo y de evaluarlo.

3. Importancia de las demostraciones para el aprendizaje del lenguaje matemático.

4. Papel que tienen las demostraciones dentro de tu programación didáctica

5. Calificación de los contenidos de los libros de matemáticas de Bachillerato, en cuanto a la didáctica y enseñanza de demostraciones.

6. Crítica constructiva de la propuesta didáctica que plantea este estudio
    I. Enfatizar el aprendizaje de algunas demostraciones dentro del curículum de Bachillerato.

    II. Unidades didácticas y demostraciones seleccionadas dentro del currículum, por su importancia dentro del mismo
    - Análisis: estudio de funciones, las derivadas
    - Geometría: cálculo de distancias
    - Álgebra: método de inducción

    III. Campos a definir de cada una de las demostraciones
    - Modo de introducción de la demostración
    - Conceptos a definir
    - Lenguaje matemático a trabajar