

Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología

Grado en Física

Análisis relativista del movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild

Trabajo de fin de estudio presentado por:	José Félix Jiménez Justo
Director/a/es:	Jorge Giner Navarro
Fecha:	2026-07-08

A mi familia

Resumen

En este trabajo se analiza el movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild, que describe el campo gravitatorio exterior de un objeto compacto esféricamente simétrico, estático, no cargado y sin rotación. Se estudian las trayectorias de partículas masivas y fotones en ausencia de fuerzas no gravitatorias, deduciendo las constantes conservadas y la ecuación radial efectiva. A partir del potencial efectivo se caracterizan distintos regímenes dinámicos, como órbitas ligadas, captura, escape, dispersión y órbitas circulares, prestando especial atención a la esfera de fotones, la última órbita circular estable para partículas masivas y la dilatación temporal gravitatoria. El trabajo combina el desarrollo analítico con una herramienta computacional propia que permite representar potenciales efectivos, integrar trayectorias geodésicas y visualizar los resultados, facilitando la interpretación física del movimiento relativista en entornos gravitatorios intensos.

Palabras clave: espacio-tiempo de Schwarzschild, movimiento geodésico, simulación numérica.

Abstract

In this work, we analyze geodesic motion in Schwarzschild spacetime, which describes the exterior gravitational field of a compact, spherically symmetric, static, uncharged and non-rotating object. The trajectories of massive particles and photons are studied in the absence of non-gravitational forces, deriving the conserved quantities and the effective radial equation. The effective potential is used to characterize different dynamical regimes, including bound orbits, capture, escape, scattering and circular orbits, with particular attention to the photon sphere, the innermost stable circular orbit for massive particles and gravitational time dilation. The work combines analytical development with a custom computational tool that makes it possible to represent effective potentials, integrate geodesic trajectories and visualize the results, facilitating the physical interpretation of relativistic motion in strong gravitational environments.

Keywords: Schwarzschild spacetime, geodesic motion, numerical simulation.

Índice de contenidos

1.	Introducción	1
2.	Fundamento teórico	3
2.1.	Espacio-tiempo, métrica y gravedad como geometría	3
2.2.	Movimiento geodésico	5
2.3.	Geodésicas temporales y geodésicas nulas	7
2.4.	Simetrías, campos de Killing y magnitudes conservadas	9
2.5.	Formalismo lagrangiano y reducción del problema dinámico	11
2.6.	Unidades, convenciones y notación empleada	12
3.	Métrica de Schwarzschild	15
3.1.	Forma general de la métrica	15
3.2.	Coordenadas, radio de Schwarzschild y horizonte	16
3.3.	Tiempo propio, tiempo coordenado y dilatación temporal gravitatoria	17
3.4.	Simetría esférica y reducción al plano ecuatorial	19
3.5.	Lagrangiana geodésica asociada	20
4.	Constantes de movimiento y reducción radial	22
4.1.	Coordenadas cíclicas y conservación dinámica	22
4.2.	Energía conservada	23
4.3.	Momento angular conservado	25
4.4.	Condición de normalización	26
4.5.	Ecuación radial efectiva	27
5.	Potencial efectivo y clasificación de trayectorias	30
5.1.	Interpretación del potencial efectivo	30
5.2.	Potencial efectivo para partículas masivas	31

5.3.	Potencial efectivo para fotones	33
5.4.	Clasificación cualitativa de trayectorias	35
5.5.	Papel del potencial efectivo en el desarrollo posterior	37
6.	Órbitas circulares y estabilidad orbital	38
6.1.	Órbitas circulares para partículas masivas	38
6.2.	Estabilidad de las órbitas circulares	40
6.3.	Energía de las órbitas circulares	43
6.4.	Órbitas circulares nulas y esfera de fotones	45
6.5.	Interpretación física de los radios críticos	47
7.	Resultados numéricos y escalas características	50
7.1.	Elección del objeto de estudio	50
7.2.	Radios característicos en unidades físicas	51
7.3.	Energía y momento angular en la ISCO	52
7.4.	Dilatación temporal en radios característicos	53
7.5.	Tiempo propio y tiempo coordinado para partículas en órbita circular . . .	55
7.6.	Parámetro de impacto crítico para fotones	57
7.6.1.	Ángulo de deflexión de una geodésica nula	59
7.7.	Comparación de escalas características de Schwarzschild	60
7.8.	Resumen de resultados numéricos	60
7.9.	Representaciones gráficas preliminares	61
8.	Metodología de simulación numérica	64
8.1.	Ecuaciones utilizadas para el cálculo de trayectorias	64
8.2.	Condiciones iniciales y tipos de trayectorias	66
8.3.	Estrategia de integración numérica	67
8.4.	Representaciones gráficas y criterios de validación	68
9.	Herramienta de simulación desarrollada	70
9.1.	Objetivo y papel dentro del trabajo	70
9.2.	Estructura general de la herramienta	71
9.3.	Simulación de geodésicas temporales y nulas	72
9.3.1.	Geodésicas temporales	72
9.3.2.	Geodésicas nulas	73

9.3.3.	Influencia de la energía y del momento angular	74
9.4.	Estudio del potencial efectivo y radios críticos	75
9.4.1.	Comparación simultánea de trayectorias	76
9.4.2.	Escenarios predefinidos y exploración de parámetros	77
9.5.	Interfaz y capacidades de visualización	78
9.6.	Validación física de las simulaciones	80
10.	Resultados de simulación y análisis físico	82
10.1.	Lectura de las figuras de simulación	82
10.2.	Órbita circular estable	83
10.3.	Última órbita circular estable (ISCO)	86
10.4.	Órbita ligada con precesión relativista	88
10.5.	Captura gravitatoria de una partícula masiva	91
10.6.	Esfera de fotones	93
10.7.	Trayectorias próximas al parámetro de impacto crítico	96
10.8.	Casos adicionales de simulación: partículas masivas	98
10.8.1.	Trayectoria perturbada próxima a la órbita circular inestable en $r = 5 M$	99
10.8.2.	Trayectoria de escape relativista	100
10.8.3.	Validación en régimen de campo débil	102
10.9.	Casos adicionales de simulación: fotones	103
10.9.1.	Captura de fotones	104
10.9.2.	Dispersión gravitatoria de fotones	105
10.10.	Conclusiones de las simulaciones	108
11.	Conclusiones	110
A	Exportaciones y datos numéricos	113
B	Capturas adicionales de la herramienta	121
	Bibliografía	128

1. Introducción

La Relatividad General constituye uno de los pilares fundamentales de la física moderna, proporcionando una descripción geométrica de la gravedad en la que la interacción gravitatoria deja de interpretarse como una fuerza en el sentido clásico para pasar a entenderse como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. En este marco teórico, las ecuaciones de Einstein relacionan la distribución de materia y energía con la estructura geométrica del espacio-tiempo, dando lugar a soluciones que describen escenarios físicos de gran relevancia tanto teórica como astrofísica.

Entre estas soluciones, la métrica de Schwarzschild ocupa un lugar central al representar el campo gravitatorio exterior de un objeto compacto esféricamente simétrico, estático, no rotante y no cargado. A pesar de su relativa simplicidad, este espacio-tiempo presenta una estructura suficientemente rica como para analizar fenómenos característicos de la Relatividad General, como la dilatación temporal gravitatoria, la existencia de horizontes de sucesos, la desviación de la luz y la aparición de órbitas relativistas con propiedades distintas a las predichas por la mecánica newtoniana.

El estudio del movimiento de partículas y radiación en este contexto se formula en términos de geodésicas, entendidas como las trayectorias que siguen los cuerpos en ausencia de fuerzas no gravitatorias. Estas trayectorias constituyen una generalización relativista del concepto de movimiento inercial y permiten describir de manera unificada el comportamiento de partículas masivas y fotones. El análisis de las geodésicas proporciona, por tanto, información fundamental no solo sobre la dinámica de los cuerpos en presencia de campos gravitatorios intensos, sino también sobre la estructura causal y temporal del espacio-tiempo.

Desde el punto de vista formal, el análisis del movimiento geodésico se ve notablemente simplificado gracias a las simetrías del espacio-tiempo de Schwarzschild. La independencia respecto a la coordenada temporal y la simetría rotacional permiten identificar magnitudes conservadas como la energía y el momento angular. Estas cantidades desempeñan un papel fundamental en la caracterización de las trayectorias y permiten reducir el problema a una ecuación efectiva para el movimiento radial.

En este contexto, resulta especialmente útil introducir el concepto de potencial efectivo. Esta herramienta permite reinterpretar la dinámica radial como un problema unidimensional y facilita la identificación de regiones permitidas, puntos de retorno, trayectorias de captura, escape, dispersión, órbitas ligadas y órbitas circulares [1], [2]. Además, el análisis de sus extremos permite estudiar la estabilidad orbital y obtener radios característicos como la esfera de fotones en $r = 3 M$ y la última órbita circular estable para partículas masivas en $r = 6 M$.

Junto al estudio dinámico de las trayectorias, el trabajo analiza la relación entre tiempo propio y tiempo coordinado en la geometría de Schwarzschild. Esta cuestión permite interpretar la dilatación temporal gravitatoria y mostrar que la curvatura del espacio-tiempo no solo condiciona la forma de las órbitas, sino también la medida del tiempo por distintos observadores.

El objetivo del presente Trabajo de Fin de Grado es desarrollar un estudio analítico y computacional del movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Para ello se deducen las constantes conservadas, la ecuación radial efectiva y las condiciones de circularidad y estabilidad, y se complementan estos resultados con una herramienta numérica propia capaz de representar potenciales efectivos, integrar trayectorias y visualizar distintos regímenes dinámicos.

De este modo, el trabajo combina la formulación matemática de la Relatividad General con la simulación computacional de trayectorias, mostrando cómo resultados deducidos a partir de la métrica de Schwarzschild se traducen en fenómenos físicos como la captura gravitatoria, la dispersión de fotones, la existencia de órbitas críticas, la ISCO, la esfera de fotones y la dilatación temporal gravitatoria.

2. Fundamento teórico

Antes de abordar el caso concreto de Schwarzschild, conviene fijar el marco geométrico en el que se describirá el movimiento. Para ello se introducen primero los conceptos de métrica, intervalo y geodésica, y después se presentan las herramientas que permiten simplificar el problema mediante simetrías, constantes conservadas y una formulación lagrangiana adecuada.

2.1. Espacio-tiempo, métrica y gravedad como geometría

La Relatividad General proporciona una descripción geométrica de la gravedad en la que el espacio y el tiempo dejan de concebirse como entidades independientes y absolutas, pasando a formar una estructura unificada de cuatro dimensiones: el espacio-tiempo [3]. En este marco, los sucesos físicos se representan mediante coordenadas x^μ , donde el índice μ recorre las cuatro componentes espacio-temporales. La presencia de materia y energía no actúa generando una fuerza gravitatoria en el sentido newtoniano, sino modificando la geometría de esta variedad espacio-temporal.

El objeto matemático fundamental que caracteriza dicha geometría es la métrica $g_{\mu\nu}$. Esta permite definir el intervalo entre dos sucesos infinitamente próximos mediante el elemento de línea:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

donde se adopta el convenio de suma de Einstein sobre índices repetidos. El intervalo ds^2 generaliza el concepto de distancia de la geometría ordinaria, aunque con una diferencia esencial: en un espacio-tiempo relativista su signo posee significado físico. Con la conven-

ción de signos $(-, +, +, +)$, los intervalos temporales cumplen $ds^2 < 0$, los intervalos nulos cumplen $ds^2 = 0$, y los intervalos espaciales cumplen $ds^2 > 0$.

Además de clasificar causalmente las separaciones entre sucesos, la métrica permite relacionar las coordenadas utilizadas para describir el espacio-tiempo con las magnitudes medidas por observadores físicos. En particular, para trayectorias temporales, el intervalo está directamente relacionado con el tiempo propio τ , es decir, con el tiempo medido por un reloj que acompaña al observador. Por ello, el estudio de una métrica no solo determina las trayectorias posibles, sino también la forma en que distintos observadores relacionan sus medidas de tiempo y espacio.

Esta clasificación no es meramente formal, sino que determina la estructura causal del espacio-tiempo. Las trayectorias de partículas masivas están asociadas a intervalos temporales, ya que dichas partículas evolucionan dentro de sus conos de luz locales y experimentan un tiempo propio no nulo. La luz, en cambio, sigue trayectorias nulas, lo que refleja el hecho de que los fotones se propagan sobre la frontera del cono de luz. Las separaciones espaciales, por su parte, no pueden conectar causalmente dos sucesos mediante señales físicas que viajen a velocidad menor o igual que la de la luz.

En ausencia de gravedad, la Relatividad Especial describe el espacio-tiempo mediante la métrica plana de Minkowski. En presencia de un campo gravitatorio, los coeficientes $g_{\mu\nu}$ dejan de ser constantes y pasan a depender de las coordenadas, reflejando la curvatura inducida por la distribución de masa y energía. Esta dependencia geométrica es la responsable de fenómenos característicos de la Relatividad General, como la dilatación temporal gravitatoria, la desviación de la luz, la precesión orbital o la existencia de horizontes de sucesos. En particular, la variación de los coeficientes métricos permite que el tiempo medido localmente por un observador no coincida, en general, con el tiempo coordinado asociado a otro sistema de referencia.

Desde este punto de vista, el estudio de una solución concreta de las ecuaciones de Einstein equivale a estudiar una geometría concreta del espacio-tiempo. En el presente trabajo, la geometría de interés será la descrita por la métrica de Schwarzschild, que representa el campo gravitatorio exterior de una distribución de masa esféricamente simétrica, estática

y sin carga. Por tanto, el análisis se restringe al caso estático, esféricamente simétrico y no cargado, dejando fuera efectos asociados a la rotación, como los presentes en la métrica de Kerr. Esta delimitación permite centrar el estudio en una solución suficientemente rica desde el punto de vista físico, pero todavía manejable analítica y numéricamente.

Uno de los principios conceptuales que justifica esta interpretación geométrica es el principio de equivalencia. Según este principio, localmente los efectos de un campo gravitatorio son indistinguibles de los de un sistema de referencia acelerado [4], [5]. En una región suficientemente pequeña del espacio-tiempo siempre puede escogerse un sistema localmente inercial en el que las leyes físicas adoptan la forma de la Relatividad Especial. Sin embargo, esta eliminación local del campo gravitatorio no puede extenderse en general a toda la variedad si existe curvatura. Precisamente esa imposibilidad global es lo que distingue un espacio-tiempo curvo de un simple cambio de coordenadas en un espacio plano.

Así, una partícula en caída libre no experimenta localmente una fuerza gravitatoria propia. Su movimiento corresponde al movimiento inercial natural dentro de una geometría curva. Esta idea conduce directamente al concepto de geodésica, que constituye la herramienta central para describir el movimiento libre en Relatividad General.

2.2. Movimiento geodésico

Una geodésica puede entenderse, de manera intuitiva, como la generalización relativista de una línea recta en un espacio curvo [4], [5]. En un espacio plano, una partícula libre mantiene un movimiento rectilíneo uniforme. En un espacio-tiempo curvo, la noción de recta se sustituye por la de curva cuyo vector tangente se transporta paralelamente a sí mismo a lo largo de la trayectoria.

Si la trayectoria se representa mediante las funciones coordenadas $x^{\mu(\lambda)}$, donde λ es un parámetro que recorre la curva, la ecuación geodésica se escribe como:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (2)$$

Los coeficientes $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$, que en notación compacta pueden escribirse como Γ_{bc}^a , son los símbolos de Christoffel, definidos en términos de la métrica por:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_c g_{db} + \partial_b g_{dc} - \partial_d g_{bc}) \quad (3)$$

donde ∂_b denota la derivada parcial respecto a la coordenada x^b , es decir:

$$\partial_b g_{cd} = \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} \quad (4)$$

Estos símbolos codifican cómo varían las bases coordenadas de un punto a otro de la variedad. Aunque no son tensores, contienen la información necesaria para construir la derivada covariante y describir el transporte paralelo. En coordenadas inerciales de un espacio plano pueden anularse globalmente, pero en un espacio-tiempo curvo no es posible eliminarlos en toda la variedad mediante una elección de coordenadas. Su presencia en la ecuación geodésica refleja el efecto de la geometría sobre la evolución de las trayectorias.

La ecuación geodésica muestra que la aceleración coordenada de una partícula libre no tiene por qué ser nula. Sin embargo, dicha aceleración no debe interpretarse como una aceleración propia causada por una fuerza externa, sino como una manifestación de la curvatura y de la elección de coordenadas. En este sentido, la Relatividad General sustituye la idea de fuerza gravitatoria por la de movimiento inercial en una geometría no plana.

En el caso particular de la métrica de Schwarzschild, los símbolos de Christoffel dependen de la coordenada radial r . Esta dependencia expresa el carácter no homogéneo del campo gravitatorio generado por el objeto compacto central. A partir de dichos símbolos podrían escribirse las ecuaciones geodésicas completas para las coordenadas t , r , θ y φ . No obstante, gracias a las simetrías de la métrica, el problema puede simplificarse notablemente mediante el uso de constantes de movimiento.

La ecuación geodésica también puede obtenerse a partir de un principio variacional. Para partículas masivas, la trayectoria física hace estacionario el tiempo propio entre dos sucesos. Esto significa que, si se consideran pequeñas variaciones de la trayectoria manteniendo fijos los sucesos inicial y final, la variación del tiempo propio acumulado se anula a primer orden. En otras palabras, la partícula libre sigue aquella curva para la cual el tiempo medido por un reloj que se desplaza con ella no cambia linealmente ante pequeñas deformaciones de la trayectoria. Esta condición puede expresarse formalmente como:

$$\delta \int d\tau = 0 \quad (5)$$

Esta formulación proporciona una interpretación profunda del movimiento libre: una partícula masiva no sigue una trayectoria arbitraria, sino una geodésica determinada por la geometría del espacio-tiempo. Para fotones, aunque el tiempo propio es nulo, puede formularse de manera análoga el problema empleando un parámetro afín.

Esta doble perspectiva, diferencial y variacional, será útil en el desarrollo posterior. La forma diferencial permite interpretar directamente el movimiento como transporte paralelo del vector tangente, mientras que la formulación variacional conduce de manera natural al formalismo lagrangiano, especialmente conveniente para obtener constantes conservadas en espacios-tiempo con simetrías.

2.3. Geodésicas temporales y geodésicas nulas

El presente trabajo se centra en dos tipos de trayectorias físicas: las geodésicas temporales, asociadas a partículas masivas, y las geodésicas nulas, asociadas a la propagación de la luz [3], [5]. Ambas obedecen formalmente la misma ecuación geodésica, pero se diferencian por la condición de normalización impuesta sobre su vector tangente.

Para una partícula masiva, la trayectoria puede parametrizarse mediante el tiempo propio τ , que representa el tiempo medido por un reloj que se desplaza junto con la partícula. El cuadvectores velocidad se define como:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (6)$$

Con la convención de signos adoptada, su norma satisface:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2 \quad (7)$$

En unidades relativistas, donde $c = 1$, esta condición toma la forma:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \quad (8)$$

Esta expresión refleja que la línea de universo de una partícula masiva es temporal. La existencia de un tiempo propio no nulo permite interpretar la trayectoria como la historia física de un observador material.

Esta propiedad será relevante no solo para describir la trayectoria espacial de una partícula masiva, sino también para estudiar cómo evoluciona su tiempo propio en comparación con el tiempo coordenado empleado en la descripción de Schwarzschild. De este modo, el análisis de geodésicas temporales permite conectar la dinámica orbital con la estructura temporal del espacio-tiempo.

En cambio, para un fotón o cualquier partícula sin masa, el intervalo a lo largo de la trayectoria es nulo. Por tanto:

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (9)$$

donde λ es un parámetro afín. En este caso no existe un sistema de referencia en reposo con el fotón ni puede definirse un tiempo propio asociado a su movimiento. Aun así, la trayectoria está determinada por la métrica y por la ecuación geodésica.

Ambos casos pueden tratarse de forma unificada introduciendo el parámetro ε , definido mediante:

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\varepsilon \quad (10)$$

donde el punto representa derivación respecto al parámetro de la curva y ε se define como:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{para partículas masivas} \\ 0 & \text{para fotones} \end{cases} \quad (11)$$

Esta notación resulta especialmente útil porque permite derivar expresiones generales que luego se particularizan para partículas materiales o para fotones. En el caso de Schwarzschild, la diferencia entre $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon = 0$ dará lugar a potenciales efectivos distintos y, por tanto, a comportamientos dinámicos cualitativamente diferentes.

Las partículas masivas pueden describir órbitas ligadas, órbitas circulares estables o inestables, trayectorias de escape y procesos de captura. La luz, por su parte, presenta una

dinámica fuertemente condicionada por la estructura causal del espacio-tiempo y por la existencia de regiones críticas asociadas a la geometría de Schwarzschild. Una de las más relevantes es la esfera de fotones, situada en $r = 3 M$ cuando se emplean unidades geométricas, es decir, tomando $G = c = 1$ [1]; al restaurar las constantes físicas, esta posición equivale a:

$$r = \frac{3GM}{c^2} \quad (12)$$

Dicha esfera corresponde a una órbita circular nula inestable, por lo que no representa una trayectoria estable de la luz, sino una frontera dinámica entre rayos que pueden escapar y rayos que terminan siendo capturados.

La comparación entre geodésicas temporales y nulas constituye uno de los ejes del trabajo. Permite analizar cómo una misma geometría produce efectos distintos sobre partículas con masa y sobre la radiación, y proporciona una vía directa para interpretar fenómenos como la captura gravitatoria, la desviación de la luz y la formación de sombras de agujeros negros.

2.4. Simetrías, campos de Killing y magnitudes conservadas

Una de las razones por las que el espacio-tiempo de Schwarzschild resulta especialmente importante es su alto grado de simetría. Estas simetrías no solo simplifican la forma de la métrica, sino que permiten identificar magnitudes conservadas a lo largo de las geodésicas. La relación entre simetrías y conservación constituye una idea fundamental en física y aparece de forma natural en Relatividad General mediante los campos de Killing [3], [5].

Un campo vectorial ξ^μ es un campo de Killing si genera una transformación que deja invariante la métrica. Matemáticamente, esta condición se expresa como:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (13)$$

Si ξ^μ es un campo de Killing y u^μ es el vector tangente a una geodésica, entonces la cantidad:

$$\xi_\mu u^\mu \quad (14)$$

se conserva a lo largo de dicha geodésica. Esta propiedad permite transformar simetrías geométricas en constantes físicas del movimiento.

En una métrica estacionaria, es decir, independiente de la coordenada temporal t , existe una simetría asociada a traslaciones temporales. La constante conservada correspondiente se interpreta como la energía específica de la partícula medida por un observador situado en el infinito. En una métrica con simetría axial, independiente de una coordenada angular φ , aparece una constante asociada al momento angular. En el caso de Schwarzschild, la geometría es estática y esféricamente simétrica, por lo que ambas constantes desempeñan un papel central.

La conservación de la energía y del momento angular permite reducir de manera sustancial el problema. En lugar de resolver directamente el sistema completo de ecuaciones geodésicas de segundo orden, se pueden utilizar las constantes conservadas para expresar $\dot{t}$ y $\dot{\varphi}$ en función de r . De este modo, la dinámica queda esencialmente reducida a una ecuación radial.

La simetría esférica tiene además una consecuencia adicional: cualquier geodésica puede estudiarse, sin pérdida de generalidad, en un plano. Por elección de coordenadas, dicho plano puede tomarse como el plano ecuatorial:

$$\theta = \pi/2 \tag{15}$$

Con esta elección, se tiene $\dot{\theta} = 0$, y el movimiento queda descrito únicamente por las coordenadas t , r y φ . Esta reducción no es una aproximación, sino una consecuencia exacta de la simetría esférica del problema.

En el desarrollo posterior, estas simetrías permitirán obtener expresiones explícitas para la energía E y el momento angular L . Dichas magnitudes serán fundamentales para construir el potencial efectivo y clasificar las trayectorias posibles: órbitas ligadas, órbitas circulares, trayectorias de dispersión, escape o captura. Así, las simetrías no solo simplifican el cálculo, sino que proporcionan una interpretación física directa del movimiento.

2.5. Formalismo lagrangiano y reducción del problema dinámico

Aunque la ecuación geodésica proporciona una descripción completa del movimiento, en la práctica resulta más conveniente emplear el formalismo lagrangiano cuando la métrica posee simetrías. Esta aproximación permite obtener de forma sistemática las constantes de movimiento y conduce de manera natural a la ecuación radial efectiva [2], [3].

La lagrangiana geodésica se define como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (16)$$

donde:

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (17)$$

El parámetro λ puede identificarse con el tiempo propio τ en el caso de partículas masivas, mientras que para fotones representa un parámetro afín. Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas son:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (18)$$

Aplicadas a la lagrangiana geodésica, estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación geodésica. Sin embargo, su utilidad práctica reside en que permiten identificar coordenadas cíclicas. Si la lagrangiana no depende explícitamente de una coordenada x^μ , el momento conjugado asociado:

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (19)$$

se conserva.

Este procedimiento será el empleado para analizar el movimiento en Schwarzschild. La independencia de la métrica respecto de t conducirá a una constante asociada a la energía, mientras que la independencia respecto de φ conducirá a una constante asociada al momento angular. Sustituyendo estas constantes en la condición de normalización de la

trayectoria dada por la Ecuación 10, se obtendrá una ecuación diferencial para la coordenada radial.

La importancia de esta reducción radica en que permite reinterpretar el movimiento radial de forma análoga a un problema unidimensional de mecánica clásica. En lugar de estudiar directamente la trayectoria completa en cuatro dimensiones, se analiza la evolución de r bajo la influencia de un potencial efectivo. Este enfoque permite determinar de manera clara qué regiones son accesibles para una partícula o un fotón, dónde pueden existir órbitas circulares y bajo qué condiciones se produce escape o captura.

La estructura general que se buscará en los apartados posteriores será de la forma:

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E^2 \quad (20)$$

donde E representa la constante de energía y $V_{\text{eff}}(r)$ es el potencial efectivo asociado al tipo de geodésica considerado. La forma concreta de este potencial dependerá de si se estudian partículas masivas o fotones. En ambos casos, el análisis de sus extremos permitirá identificar órbitas circulares, mientras que el signo de la segunda derivada permitirá estudiar su estabilidad.

Este planteamiento constituye el puente entre el formalismo geométrico de la Relatividad General y la interpretación física de las trayectorias. Además, proporciona una base adecuada para el estudio computacional del movimiento geodésico, ya que las ecuaciones reducidas pueden integrarse para distintos valores de energía, momento angular y condiciones iniciales. Esta formulación ha permitido no solo obtener resultados analíticos, sino también desarrollar una herramienta numérica capaz de visualizar trayectorias, explorar distintos regímenes dinámicos y contrastar de forma gráfica las predicciones derivadas del análisis teórico.

2.6. Unidades, convenciones y notación empleada

En el análisis de geodésicas alrededor de objetos compactos es habitual trabajar con unidades relativistas o geométricas, en las que se toma:

$$G = c = 1 \quad (21)$$

Esta elección simplifica la notación y permite expresar masas, longitudes y tiempos en las mismas unidades. En particular, la masa M del objeto central puede interpretarse como una escala geométrica de longitud. Con esta convención, el radio de Schwarzschild se escribe como:

$$r_s = 2 M \quad (22)$$

Si se restauran las constantes físicas, la expresión correspondiente es:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (23)$$

El uso de unidades $G = c = 1$ no supone una pérdida de generalidad, sino una simplificación formal. Los resultados pueden traducirse de nuevo a unidades físicas ordinarias reintroduciendo los factores adecuados de G y c mediante análisis dimensional. En este trabajo se emplearán preferentemente unidades relativistas para el desarrollo analítico, indicando explícitamente las expresiones con constantes físicas cuando resulte conveniente para la interpretación.

Se adoptará la convención de signos $(-, +, +, +)$, de modo que la métrica plana de Minkowski adopta la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (24)$$

en unidades $c = 1$. Esta elección fija el signo de las condiciones de normalización de las geodésicas temporales y nulas, así como la forma de la ecuación radial efectiva que se empleará posteriormente.

La notación con punto indica derivación respecto al parámetro de la geodésica, según se definió en la Ecuación 17.

Para partículas masivas, cuando se emplee el tiempo propio, se toma $\lambda = \tau$. Para fotones, λ representa un parámetro afín. Asimismo, se utiliza la notación $\varepsilon = 1$ para geodésicas temporales y $\varepsilon = 0$ para geodésicas nulas, lo que permitirá tratar ambos casos dentro de una misma formulación.

Finalmente, cuando se analice el movimiento en Schwarzschild, se aprovechará la simetría esférica para restringir el estudio al plano ecuatorial definido en la Ecuación 15. Esta elección simplifica las expresiones sin reducir la generalidad física del problema, ya que cualquier trayectoria puede situarse en un plano mediante una rotación adecuada del sistema de coordenadas.

Las convenciones y unidades introducidas en este apartado serán utilizadas de forma sistemática en los capítulos siguientes. En particular, el empleo de unidades geométricas permitirá simplificar las expresiones analíticas y facilitar la interpretación de los resultados obtenidos para el movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

3. Métrica de Schwarzschild

Una vez introducido el marco geométrico general, el análisis puede centrarse en una solución concreta de las ecuaciones de Einstein. La métrica de Schwarzschild proporciona el escenario relativista que se empleará en el resto del trabajo, ya que permite describir el campo exterior de un objeto compacto idealizado y estudiar en él trayectorias, radios críticos y efectos temporales.

3.1. Forma general de la métrica

La métrica de Schwarzschild constituye una de las soluciones exactas más relevantes de las ecuaciones de campo de Einstein. Describe el espacio-tiempo exterior generado por una distribución de masa esféricamente simétrica, estática, no cargada y no rotante [2], [6]. Por este motivo, representa el modelo relativista más sencillo para estudiar el campo gravitatorio exterior de un objeto compacto idealizado, como una estrella esférica o un agujero negro no rotante.

En coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, φ) , y empleando unidades geométricas $G = c = 1$, el elemento de línea se escribe como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\varphi^2 \quad (25)$$

donde M representa la masa del objeto central expresada en unidades geométricas. La forma de la métrica muestra explícitamente cómo la presencia de masa modifica los coeficientes asociados a las coordenadas temporal y radial. En el límite $r \rightarrow \infty$, los términos dependientes de $\frac{M}{r}$ se hacen despreciables y la métrica tiende a la métrica plana de

Minkowski en coordenadas esféricas, lo que refleja que el campo gravitatorio se debilita a grandes distancias.

La función:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (26)$$

aparece de forma recurrente en el análisis del movimiento geodésico. Con esta notación, la métrica puede escribirse de manera más compacta como:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\varphi^2 \quad (27)$$

Esta expresión será la base del desarrollo posterior. A partir de ella se obtendrá la lagrangiana geodésica, se identificarán las constantes de movimiento asociadas a las simetrías temporal y angular, se estudiará la relación entre tiempo propio y tiempo coordinado, y se reducirá el problema dinámico a una ecuación efectiva para la coordenada radial.

3.2. Coordenadas, radio de Schwarzschild y horizonte

Las coordenadas (t, r, θ, φ) utilizadas en la métrica de Schwarzschild poseen una interpretación geométrica específica. La coordenada t corresponde al tiempo medido por un observador situado en el infinito, donde el campo gravitatorio del objeto central se vuelve despreciable. La coordenada r no representa una distancia radial euclídea ordinaria, sino que se define de forma que las superficies de radio constante poseen área:

$$A = 4\pi r^2 \quad (28)$$

Por esta razón, r se denomina radio areal. Las coordenadas θ y φ son las coordenadas angulares usuales de un sistema esférico.

El radio de Schwarzschild viene dado por la Ecuación 22 y la Ecuación 23 en unidades geométricas y físicas, respectivamente.

En $r = 2M$, el coeficiente temporal g_{tt} se anula, mientras que el coeficiente radial g_{rr} diverge. En las coordenadas de Schwarzschild, esto se manifiesta como una singularidad de la métrica. Sin embargo, dicha singularidad no corresponde a una divergencia física de

la curvatura, sino a una singularidad de coordenadas asociada al horizonte de sucesos [2], [3]. En cambio, la verdadera singularidad física de la solución se encuentra en $r = 0$, donde los invariantes de curvatura divergen.

En el presente trabajo se considerará principalmente la región exterior:

$$r > 2 M \quad (29)$$

donde las coordenadas de Schwarzschild proporcionan una descripción adecuada del espacio-tiempo y donde pueden estudiarse de manera directa las órbitas, trayectorias de escape, procesos de captura, propagación de la luz y efectos temporales asociados al campo gravitatorio exterior.

La existencia del horizonte de sucesos constituye una de las diferencias esenciales entre la descripción newtoniana y la relativista [2], [3]. Mientras que en la gravedad newtoniana no aparece ninguna superficie de no retorno, en la geometría de Schwarzschild el horizonte separa causalmente la región exterior de la región interior del agujero negro. Una vez que una partícula o un rayo de luz cruza dicho horizonte hacia el interior, no puede volver a comunicarse con el infinito.

3.3. Tiempo propio, tiempo coordenado y dilatación temporal gravitatoria

La métrica de Schwarzschild no solo determina la geometría espacial y las trayectorias posibles, sino también la relación entre el tiempo medido localmente por un observador y el tiempo coordenado t asociado a un observador situado en el infinito. Esta diferencia constituye uno de los efectos característicos de la Relatividad General: la dilatación temporal gravitatoria [2], [3].

Para estudiar este efecto, puede considerarse un observador estático situado a radio constante r , es decir, un observador para el cual:

$$dr = 0, \quad d\theta = 0, \quad d\varphi = 0. \quad (30)$$

En este caso, el elemento de línea de Schwarzschild se reduce a:

$$ds^2 = -f(r)dt^2. \quad (31)$$

Para una trayectoria temporal, el intervalo se relaciona con el tiempo propio mediante:

$$ds^2 = -d\tau^2 \quad (32)$$

en unidades $c = 1$. Comparando ambas expresiones, se obtiene:

$$d\tau^2 = f(r)dt^2. \quad (33)$$

Por tanto:

$$d\tau = \sqrt{f(r)}dt = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}dt \quad (34)$$

Esta ecuación muestra cómo el tiempo propio τ , medido por un reloj situado a radio r , se relaciona con el tiempo coordenado t . La razón entre ambos tiempos viene dada por:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \quad (35)$$

Para radios muy grandes, $r \rightarrow \infty$, se tiene $f(r) \rightarrow 1$, y por tanto:

$$\frac{d\tau}{dt} \rightarrow 1 \quad (36)$$

Esto significa que, lejos del objeto compacto, el tiempo propio del observador local coincide aproximadamente con el tiempo coordenado del observador situado en el infinito. En cambio, al aproximarse al horizonte, $r \rightarrow 2M$ se cumple $f(r) \rightarrow 0$, de modo que:

$$\frac{d\tau}{dt} \rightarrow 0 \quad (37)$$

Este resultado indica que, en coordenadas de Schwarzschild, el ritmo del tiempo propio de un observador estático cercano al horizonte se hace cada vez menor en comparación con el tiempo coordenado medido desde el infinito. De forma equivalente:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \quad (38)$$

que diverge cuando $r \rightarrow 2M$.

Es importante señalar que esta divergencia está asociada a la descripción mediante coordenadas de Schwarzschild y al hecho de considerar observadores estáticos cada vez más próximos al horizonte. Mantenerse estático en las proximidades de $r = 2M$ requiere una aceleración cada vez mayor, y en el propio horizonte no puede existir un observador estático físico. Aun así, la expresión anterior resulta fundamental para interpretar la dilatación temporal gravitatoria y para visualizar cómo la geometría de Schwarzschild modifica la relación entre distintos tiempos.

En el desarrollo del presente trabajo, esta relación complementa el análisis de las trayectorias geodésicas mediante una interpretación temporal de la geometría de Schwarzschild. En particular, resulta útil para representar gráficamente el factor de dilatación temporal gravitatoria $\frac{d\tau}{dt}$ en función de $\frac{r}{M}$, identificando radios característicos como el horizonte $r = 2M$, la esfera de fotones $r = 3M$ y la última órbita circular estable $r = 6M$.

3.4. Simetría esférica y reducción al plano ecuatorial

La métrica de Schwarzschild es esféricamente simétrica. Esto implica que no existe una dirección espacial privilegiada alrededor del objeto central. Como consecuencia, cualquier trayectoria geodésica puede situarse en un plano mediante una elección adecuada del sistema de coordenadas. Sin pérdida de generalidad, dicho plano puede escogerse como el plano ecuatorial definido en la Ecuación 15, con:

$$\dot{\theta} = 0 \quad (39)$$

En este plano se cumple $\sin(\theta) = 1$, por lo que el término angular de la métrica se simplifica. La métrica de Schwarzschild restringida al plano ecuatorial queda entonces:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\varphi^2 \quad (40)$$

o, empleando la función definida en la Ecuación 26:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\varphi^2 \quad (41)$$

Esta reducción es especialmente útil porque permite describir el movimiento mediante tres coordenadas: t , r y φ . La coordenada r caracteriza la evolución radial de la partícula

o del fotón, φ describe su desplazamiento angular alrededor del centro gravitatorio y t permite relacionar la evolución de la trayectoria con el tiempo coordinado asociado a un observador lejano. El problema conserva así toda su generalidad física, pero adquiere una forma matemática mucho más manejable.

Desde el punto de vista dinámico, esta simplificación permite interpretar las trayectorias en términos de un movimiento orbital en un plano. Por ello, será la formulación utilizada para obtener la lagrangiana geodésica, las constantes de movimiento y, posteriormente, el potencial efectivo.

3.5. Lagrangiana geodésica asociada

A partir de la métrica restringida al plano ecuatorial, se puede construir la lagrangiana geodésica correspondiente. De acuerdo con la formulación general introducida en el apartado anterior, se toma la lagrangiana geodésica definida en la Ecuación 16.

Sustituyendo los coeficientes métricos de Schwarzschild en el plano ecuatorial, se obtiene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] \quad (42)$$

o, de forma equivalente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-f(r) \dot{t}^2 + f(r)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] \quad (43)$$

Esta lagrangiana contiene toda la información necesaria para estudiar el movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Su importancia radica en que las coordenadas t y φ no aparecen explícitamente en ella, sino solo sus derivadas $\dot{t}$ y $\dot{\varphi}$. Por tanto, ambas son coordenadas cíclicas, lo que anticipa la existencia de dos constantes de movimiento: una asociada a la energía y otra asociada al momento angular.

La coordenada temporal t tendrá además una relevancia especial en la interpretación física del movimiento, ya que permite relacionar la evolución de una partícula con el tiempo medido por un observador lejano. En el caso de geodésicas temporales, esta descripción se complementará con el tiempo propio τ , medido por un reloj que acompaña a la partícula.

Además, la condición de normalización de la trayectoria, dada por la Ecuación 10, adopta la forma:

$$-f(r)\dot{t}^2 + f(r)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = -\varepsilon \quad (44)$$

donde $\varepsilon = 1$ corresponde a geodésicas temporales, asociadas a partículas masivas, y $\varepsilon = 0$ corresponde a geodésicas nulas, asociadas a fotones.

Esta expresión será el punto de partida para reducir la dinámica a una ecuación radial efectiva. En el siguiente apartado se utilizarán las simetrías de la métrica para obtener las constantes conservadas E y L , y se mostrará cómo la combinación de estas cantidades con la condición de normalización permite construir el potencial efectivo relativista. Asimismo, la constante asociada a la coordenada temporal permitirá interpretar la relación entre el tiempo coordenado y el parámetro propio de la geodésica.

4. Constantes de movimiento y reducción radial

La forma de la métrica de Schwarzschild permite pasar del estudio geométrico del espacio-tiempo a la descripción dinámica de las trayectorias. Gracias a sus simetrías, el movimiento geodésico puede expresarse mediante constantes conservadas que reducen el problema a una ecuación radial efectiva.

4.1. Coordenadas cíclicas y conservación dinámica

La métrica de Schwarzschild posee dos simetrías especialmente relevantes para el estudio del movimiento geodésico. Por un lado, es independiente de la coordenada temporal t , lo que refleja el carácter estático del espacio-tiempo. Por otro lado, una vez restringido el movimiento al plano ecuatorial, la métrica tampoco depende explícitamente de la coordenada angular φ , lo que expresa la simetría rotacional alrededor del centro gravitatorio.

Estas simetrías se manifiestan en la lagrangiana geodésica obtenida en la Ecuación 43, donde se emplea la función definida en la Ecuación 26.

La lagrangiana depende de las derivadas $\dot{t}$, $\dot{r}$ y $\dot{\varphi}$, pero no depende explícitamente de t ni de φ . En el formalismo lagrangiano, esto implica que dichas coordenadas son cíclicas y que sus momentos conjugados asociados se conservan a lo largo de la geodésica.

El momento conjugado asociado a una coordenada x^μ se define como en la Ecuación 19.

Por tanto, si la lagrangiana no depende explícitamente de una coordenada determinada, el momento conjugado correspondiente permanece constante durante el movimiento. Este hecho constituye la traducción lagrangiana de la relación entre simetrías y leyes de conservación.

En el caso de Schwarzschild, las dos constantes de movimiento fundamentales son la energía y el momento angular. Estas cantidades permiten reducir considerablemente el problema dinámico, ya que hacen posible expresar $\dot{t}$ y $\dot{\varphi}$ en función de la coordenada radial r . De este modo, la dinámica completa queda esencialmente determinada por una única ecuación diferencial para $r(\lambda)$, mientras que la evolución temporal y angular se obtiene a partir de las constantes conservadas.

En los apartados siguientes se obtendrán expresiones explícitas para ambas constantes conservadas a partir de los momentos conjugados asociados a las coordenadas cíclicas t y φ . Estas magnitudes constituirán los parámetros fundamentales para caracterizar las trayectorias y construir la ecuación radial efectiva.

4.2. Energía conservada

La independencia de la lagrangiana respecto de la coordenada temporal t conduce a la conservación del momento conjugado p_t . A partir de la lagrangiana geodésica se obtiene:

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -f(r)\dot{t} \quad (45)$$

Por convenio, se define la energía conservada como la cantidad opuesta a p_t :

$$E = -p_t \quad (46)$$

Por tanto:

$$E = f(r)\dot{t} \quad (47)$$

donde se ha utilizado la función definida en la Ecuación 26.

Esta expresión muestra que la energía conservada está asociada a la simetría temporal del espacio-tiempo y determina la evolución de la coordenada temporal t a lo largo de la geodésica. Despejando $\dot{t}$, se obtiene:

$$\dot{t} = \frac{E}{f(r)} \quad (48)$$

La interpretación física de E depende del tipo de geodésica considerada. Para partículas masivas, al tomar $\lambda = \tau$, E puede interpretarse como la energía específica normalizada por la energía en reposo de la partícula, es decir, $E = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}$. En las unidades geométricas empleadas, con $c = 1$, esta magnitud es adimensional. Para geodésicas nulas, asociadas a fotones, el parámetro afín puede reescalarsse, por lo que E no posee una normalización absoluta independiente del parámetro elegido; aun así, sigue siendo una constante útil para caracterizar la trayectoria.

En las geodésicas nulas consideradas en este trabajo se adopta la normalización convencional $E = 1$ para la realización de las simulaciones numéricas. Esta elección no supone ninguna restricción física adicional, ya que el parámetro afín asociado a una geodésica nula puede reescalarsse arbitrariamente sin modificar la trayectoria obtenida. En consecuencia, las propiedades físicas de las trayectorias de los fotones dependen únicamente del cociente entre las constantes conservadas L y E , definido como el parámetro de impacto $b = \frac{L}{E}$.

Por ello, al fijar $E = 1$, el momento angular L coincide numéricamente con el parámetro de impacto, lo que simplifica tanto la interpretación física de los resultados como la implementación de la herramienta de simulación desarrollada.

En el caso de partículas masivas, al tomar $\lambda = \tau$, la expresión anterior permite escribir:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{f(r)} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (49)$$

Esta relación conecta directamente la constante de energía con la comparación entre el tiempo coordenado t y el tiempo propio τ de la partícula. Por tanto, no solo proporciona información dinámica sobre la trayectoria, sino también información temporal sobre cómo evoluciona el reloj propio de la partícula respecto al tiempo asociado a un observador lejano.

La expresión anterior permite observar un rasgo característico de las coordenadas de Schwarzschild. Al aproximarse al horizonte, $r \rightarrow 2M$, se tiene $f(r) \rightarrow 0$, de modo que, para energía finita:

$$\frac{dt}{d\tau} \rightarrow \infty \quad (50)$$

Este comportamiento está relacionado con la dilatación temporal gravitatoria observada desde el infinito y con el carácter singular de las coordenadas de Schwarzschild en el horizonte, aunque no implica una singularidad física en $r = 2M$. Para una partícula que cae libremente, el cruce del horizonte puede ocurrir en tiempo propio finito, mientras que la coordenada temporal t de Schwarzschild refleja una divergencia asociada al observador lejano.

4.3. Momento angular conservado

La segunda constante de movimiento aparece como consecuencia de la independencia de la lagrangiana respecto de la coordenada angular φ . El momento conjugado asociado a dicha coordenada se obtiene a partir de la definición general dada en la Ecuación 19.

A partir de la lagrangiana de Schwarzschild en el plano ecuatorial se obtiene:

$$p_\varphi = r^2 \dot{\varphi} \quad (51)$$

Se define entonces el momento angular conservado como:

$$L = p_\varphi \quad (52)$$

Por tanto:

$$L = r^2 \dot{\varphi} \quad (53)$$

Despejando la derivada angular:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2} \quad (54)$$

Esta expresión es formalmente análoga a la conservación del momento angular en un problema central de mecánica clásica. En este trabajo, L representa el momento angular específico, es decir, el momento angular por unidad de masa de la partícula. Por ello, en unidades geométricas puede expresarse en unidades de longitud y resulta natural trabajar

con valores normalizados respecto a M . Sin embargo, en el contexto relativista su significado está ligado a la simetría rotacional de la geometría de Schwarzschild. El hecho de que L sea constante indica que la trayectoria conserva su momento angular específico respecto al centro gravitatorio, aunque la forma concreta de la órbita difiera de la predicción newtoniana debido a la curvatura del espacio-tiempo.

La existencia simultánea de E y L permite sustituir las derivadas $\dot{t}$ y $\dot{\varphi}$ en la condición de normalización de la geodésica. Esta sustitución es el paso clave para obtener una ecuación radial efectiva y reducir el movimiento a un problema unidimensional en la coordenada r .

4.4. Condición de normalización

El movimiento geodésico debe satisfacer la condición de normalización introducida en la Ecuación 10, donde el parámetro ε fue definido en la Ecuación 11.

En el plano ecuatorial de Schwarzschild, esta condición adopta la forma:

$$-f(r)\dot{t}^2 + f(r)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = -\varepsilon \quad (55)$$

El parámetro ε permite tratar de manera unificada las geodésicas temporales y nulas. Para partículas masivas, $\varepsilon = 1$, y la trayectoria posee intervalo temporal. Para fotones, $\varepsilon = 0$, y la trayectoria es nula. Esta distinción será esencial en el análisis posterior del potencial efectivo, ya que ambos casos conducen a estructuras dinámicas diferentes.

Sustituyendo las expresiones obtenidas para $\dot{t}$ y $\dot{\varphi}$, dadas por la Ecuación 48 y la Ecuación 54, la condición de normalización queda:

$$-f(r)\left(\frac{E}{f(r)}\right)^2 + f(r)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{L}{r^2}\right)^2 = -\varepsilon \quad (56)$$

Simplificando:

$$-\frac{E^2}{f(r)} + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + \frac{L^2}{r^2} = -\varepsilon \quad (57)$$

Multiplicando toda la expresión por $f(r)$, se obtiene:

$$-E^2 + \dot{r}^2 + f(r)\frac{L^2}{r^2} = -\varepsilon f(r) \quad (58)$$

Finalmente, agrupando términos, se llega a la ecuación radial:

$$\dot{r}^2 = E^2 - f(r)\left(\varepsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (59)$$

Esta ecuación contiene toda la información necesaria para estudiar la evolución radial de una partícula masiva o de un fotón en el espacio-tiempo de Schwarzschild. La dinámica angular y temporal queda determinada por las constantes E y L , mientras que la evolución radial queda descrita por una ecuación diferencial de primer orden. A partir de esta expresión pueden analizarse tanto las propiedades cualitativas del movimiento mediante el potencial efectivo como la integración numérica de trayectorias para distintas condiciones iniciales y valores de las constantes conservadas.

4.5. Ecuación radial efectiva

La ecuación radial puede escribirse de una forma especialmente útil introduciendo un potencial efectivo. Reordenando la Ecuación 59:

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E^2 \quad (60)$$

donde el potencial efectivo general viene dado por:

$$V_{\text{eff}}(r) = f(r)\left(\varepsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (61)$$

Al sustituir explícitamente la función definida en la Ecuación 26, se obtiene:

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\varepsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (62)$$

Esta forma resulta especialmente importante porque permite reinterpretar el movimiento radial relativista de manera análoga a un problema unidimensional de mecánica clásica. La cantidad E^2 actúa como una energía total efectiva, mientras que $V_{\text{eff}}(r)$ determina las

regiones radialmente accesibles. En particular, el movimiento solo puede tener lugar en aquellas regiones donde:

$$E^2 \geq V_{\text{eff}}(r) \quad (63)$$

ya que $\dot{r}^2$ debe ser una cantidad no negativa.

Para partículas masivas, tomando $\varepsilon = 1$, el potencial efectivo adopta la forma:

$$V_{\text{eff}}^{\text{masiva}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (64)$$

En cambio, para fotones, tomando $\varepsilon = 0$, se obtiene:

$$V_{\text{eff}}^{\text{nula}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \quad (65)$$

La diferencia entre ambas expresiones es físicamente relevante. En el caso de partículas masivas aparece un término adicional asociado a la masa en reposo, mientras que para las geodésicas nulas el potencial depende únicamente del momento angular y de la estructura geométrica del espacio-tiempo. Esta diferencia será responsable de que las partículas masivas y los fotones presenten distintos tipos de trayectorias y condiciones de captura.

La ecuación radial efectiva proporciona así el punto de partida para el análisis cualitativo de las trayectorias. Los puntos de retorno radial se obtienen cuando $\dot{r} = 0$, es decir, cuando:

$$E^2 = V_{\text{eff}}(r) \quad (66)$$

Las órbitas circulares, por su parte, requieren que el radio permanezca constante. Esto implica no solo que $\dot{r} = 0$, sino también que el potencial efectivo tenga un extremo en dicho punto. Estas condiciones se expresan mediante:

$$E^2 = V_{\text{eff}}(r), \quad \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0 \quad (67)$$

El signo de la segunda derivada del potencial permitirá distinguir entre órbitas circulares estables e inestables. La interpretación general de las regiones accesibles, los puntos de

retorno y los distintos tipos de trayectoria se abordará en la Sección 5, mientras que el análisis detallado de las órbitas circulares y su estabilidad se desarrollará en la Sección 6.

De este modo, la reducción radial obtenida en este apartado constituye el puente entre la geometría de Schwarzschild y la interpretación física de las trayectorias. A partir de las simetrías de la métrica se han identificado las constantes conservadas E y L , y mediante la condición de normalización se ha reducido la dinámica geodésica a una ecuación efectiva para $r(\lambda)$. Esta formulación constituye la base tanto del análisis teórico desarrollado en los apartados siguientes como de la herramienta numérica implementada en este trabajo, permitiendo estudiar y visualizar de forma unificada órbitas, trayectorias de captura, escape, dispersión y movimiento ligado. Además, la relación dada por la Ecuación 48 permite complementar el análisis dinámico con una interpretación temporal del movimiento, especialmente en regiones próximas al horizonte.

5. Potencial efectivo y clasificación de trayectorias

La ecuación radial efectiva permite transformar el problema geodésico en una forma mucho más intuitiva desde el punto de vista dinámico. A través del potencial efectivo es posible identificar regiones accesibles, puntos de retorno y distintos comportamientos físicos sin resolver todavía cada trayectoria de manera explícita.

5.1. Interpretación del potencial efectivo

La reducción radial obtenida en la sección anterior conduce a una descripción efectiva del movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild. En esta formulación, la dinámica radial queda determinada por las constantes conservadas E y L , de acuerdo con la Ecuación 60, mientras que el potencial efectivo viene dado por la Ecuación 61 y la Ecuación 62.

Esta expresión desempeña un papel central en el análisis cualitativo de las trayectorias. Aunque el movimiento relativista tiene lugar en un espacio-tiempo curvo, la forma de la ecuación permite establecer una analogía formal con el movimiento unidimensional de una partícula sometida a un potencial. En dicha analogía, E^2 actúa como una energía total efectiva, mientras que $V_{\text{eff}}(r)$ determina qué regiones radiales son accesibles para la geodésica.

La condición básica de movimiento se obtiene imponiendo que $\dot{r}^2$ sea no negativa. Por tanto, una trayectoria solo puede existir en las regiones donde:

$$E^2 \geq V_{\text{eff}}(r) \tag{68}$$

Cuando se cumple la igualdad:

$$E^2 = V_{\text{eff}}(r) \quad (69)$$

se tiene $\dot{r} = 0$, por lo que el radio alcanza un punto de retorno radial. Esta condición, por sí sola, no implica una órbita circular: únicamente indica que la componente radial de la velocidad se anula en ese instante. En ese punto, la partícula o el fotón puede cambiar el sentido de su movimiento radial, siempre que la estructura del potencial lo permita. De este modo, el potencial efectivo permite identificar regiones de caída, escape, dispersión y movimiento ligado.

Es importante subrayar que esta interpretación no convierte el problema relativista en un problema newtoniano ordinario. La analogía es formal y resulta útil para clasificar trayectorias, pero el potencial efectivo contiene términos que proceden directamente de la geometría de Schwarzschild. En particular, la presencia del factor $f(r)$ introduce efectos relativistas asociados al horizonte, a la curvatura del espacio-tiempo y a la estructura causal de la solución.

Aunque este apartado se centra en la clasificación radial de trayectorias, la interpretación del potencial efectivo puede complementarse mediante representaciones gráficas de las regiones permitidas y de las trayectorias asociadas a distintos valores de E y L . Esta combinación de análisis teórico y visualización numérica resulta especialmente útil para identificar puntos de retorno, regímenes de captura, escape y movimiento ligado, así como para relacionar la estructura del potencial con la forma de las órbitas obtenidas. Asimismo, las trayectorias que se aproximan al horizonte presentan no solo un comportamiento dinámico característico, sino también una diferencia relevante entre el tiempo propio de la partícula y el tiempo coordinado asociado a un observador lejano.

5.2. Potencial efectivo para partículas masivas

Para partículas masivas se toma $\varepsilon = 1$. En este caso, el potencial efectivo viene dado por la Ecuación 64.

Al desarrollar esta expresión se obtiene:

$$V_{\text{eff}}^{\text{masiva}}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} \quad (70)$$

Los tres primeros términos presentan una interpretación cercana a la mecánica clásica. El término constante está asociado a la contribución de la masa en reposo, el término $-2\frac{M}{r}$ refleja la atracción gravitatoria del objeto central y el término $\frac{L^2}{r^2}$ actúa como una barrera centrífuga asociada al momento angular. Sin embargo, el último término, $-2M\frac{L^2}{r^3}$, no tiene análogo directo en el potencial newtoniano. Se trata de una corrección puramente relativista que se vuelve especialmente importante a radios pequeños [1], [7]. Este término modifica de manera sustancial la estructura del potencial y es responsable de fenómenos característicos de la Relatividad General, como la existencia de órbitas circulares inestables y de una última órbita circular estable.

Vale la pena comparar este potencial con su análogo newtoniano. En mecánica clásica, el potencial efectivo para una partícula en un campo gravitatorio central adopta la forma:

$$V_{\text{eff}}^{\text{Newton}}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} \quad (71)$$

A diferencia del potencial relativista, esta expresión no incluye el término constante asociado a la masa en reposo, ya que en mecánica clásica dicha contribución no interviene en la dinámica orbital. La comparación entre ambos potenciales debe entenderse, por tanto, a nivel de los términos dependientes de r . El primer término representa la atracción gravitatoria y el segundo la barrera centrífuga. A diferencia del caso relativista, este potencial no presenta ningún máximo para valores finitos de r cuando $L \neq 0$: la barrera centrífuga newtoniana domina a distancias suficientemente pequeñas y no aparece un comportamiento análogo a la captura relativista asociada al horizonte. En consecuencia, en la teoría newtoniana no existe ningún radio análogo a la ISCO ni a la esfera de fotones. La aparición del término adicional $-2M\frac{L^2}{r^3}$ en el potencial relativista es, por tanto, la causa directa de fenómenos sin equivalente clásico, como la existencia de órbitas circulares inestables y la última órbita circular estable en $r = 6M$.

Para valores suficientemente grandes de r , el término relativista proporcional a $\frac{1}{r^3}$ se hace pequeño, y el comportamiento se aproxima al esperado en un campo gravitatorio débil.

En cambio, cerca del objeto compacto, dicho término adquiere mayor relevancia y altera la clasificación de las trayectorias respecto al caso newtoniano.

El potencial efectivo para partículas masivas permite distinguir varios regímenes. Si E^2 se encuentra por debajo del valor asintótico del potencial en el infinito, pueden existir regiones radialmente acotadas y aparecer trayectorias ligadas, en las que la partícula oscila entre dos radios de retorno. Si E^2 es suficientemente grande, la partícula puede escapar hacia el infinito o proceder desde el infinito y sufrir una dispersión gravitatoria. Por último, si la energía y el momento angular no permiten un punto de retorno exterior, la partícula puede ser capturada y atravesar el horizonte.

Esta clasificación dependerá de la forma concreta del potencial, que a su vez está determinada por el valor de L . La influencia del momento angular sobre la forma del potencial puede apreciarse de manera especialmente clara mediante representaciones gráficas para distintos valores de L . La visualización simultánea del potencial efectivo y de las trayectorias asociadas permite relacionar directamente la estructura de los máximos y mínimos del potencial con fenómenos como el movimiento ligado, la captura o el escape. El momento angular controla la estructura del potencial efectivo y, por tanto, modifica la posibilidad de que existan órbitas ligadas, puntos de retorno o captura directa.

5.3. Potencial efectivo para fotones

Para geodésicas nulas se toma $\varepsilon = 0$. En este caso, el potencial efectivo viene dado por la Ecuación 65.

Al desarrollar la expresión:

$$V_{\text{eff}}^{\text{nula}}(r) = \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} \quad (72)$$

En comparación con el caso de partículas masivas, desaparece el término asociado a la masa en reposo. Esto refleja el carácter nulo de la trayectoria luminosa: los fotones no poseen tiempo propio ni masa en reposo, y su dinámica queda determinada por la relación entre la curvatura del espacio-tiempo y el momento angular de la geodésica.

El potencial nulo presenta una estructura especialmente relevante. Para radios grandes, el término $\frac{L^2}{r^2}$ domina y el potencial tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$. Para radios cercanos al horizonte, el factor $f(r)$ tiende a cero, de modo que el potencial también se anula en $r = 2M$. Entre ambos límites, el potencial presenta un máximo asociado a una órbita circular nula inestable.

Dicha órbita se encuentra en:

$$r = 3M \quad (73)$$

que corresponde a la esfera de fotones de Schwarzschild. En unidades físicas ordinarias, esta posición equivale a:

$$r = \frac{3GM}{c^2} \quad (74)$$

La esfera de fotones no representa una órbita estable de la luz [1], [8]. Cualquier pequeña perturbación radial hace que el fotón escape hacia el infinito o caiga hacia el agujero negro. Por ello, esta órbita actúa como una frontera dinámica entre distintos tipos de comportamiento luminoso.

La naturaleza inestable de esta órbita puede apreciarse de forma especialmente clara mediante la integración numérica de geodésicas nulas con condiciones iniciales próximas a la esfera de fotones. Pequeñas variaciones en los parámetros de la trayectoria producen comportamientos cualitativamente distintos, dando lugar a trayectorias que escapan hacia el infinito o terminan siendo capturadas por el agujero negro.

La existencia de este máximo en el potencial efectivo nulo permite comprender la transición entre trayectorias de dispersión y trayectorias de captura. Un rayo de luz procedente del infinito puede ser desviado por el campo gravitatorio y volver a escapar, o bien puede aproximarse lo suficiente como para ser capturado. La separación entre ambos comportamientos queda asociada a un valor crítico del parámetro de impacto. Este parámetro desempeña un papel fundamental en la dinámica de las geodésicas nulas y permite identificar la frontera entre trayectorias de captura y trayectorias de dispersión. Su relación con la esfera de fotones y con la estructura del potencial efectivo será analizada en los apartados posteriores.

5.4. Clasificación cualitativa de trayectorias

El potencial efectivo permite clasificar de manera cualitativa los distintos tipos de trayectorias posibles sin necesidad de resolver explícitamente el sistema completo de ecuaciones geodésicas. Esta clasificación se basa en la comparación entre el nivel de energía E^2 y la forma de $V_{\text{eff}}(r)$.

En primer lugar, pueden aparecer trayectorias de captura. Estas se producen cuando la geodésica no encuentra ningún punto de retorno exterior que impida su avance hacia radios decrecientes. En tal caso, la partícula o el fotón atraviesa el horizonte de sucesos. En coordenadas de Schwarzschild, el horizonte se sitúa en $r = 2M$, aunque la divergencia de la coordenada temporal en dicho punto es un efecto de coordenadas y no una singularidad física.

En el caso de partículas masivas, este proceso de captura puede analizarse desde dos perspectivas complementarias. Desde el punto de vista radial, la partícula atraviesa el horizonte si no existe una barrera efectiva que produzca un punto de retorno exterior. Desde el punto de vista temporal, la descripción mediante coordenadas de Schwarzschild muestra una divergencia del tiempo coordinado asociado al observador lejano, mientras que el tiempo propio de la partícula puede permanecer finito. Esta diferencia será retomada en la interpretación física de los resultados.

En segundo lugar, existen trayectorias de escape o dispersión. En ellas, la partícula o el fotón se aproxima al objeto compacto, experimenta una desviación gravitatoria y posteriormente se aleja hacia radios cada vez mayores. Este tipo de comportamiento es especialmente relevante en el caso de la luz, ya que permite interpretar fenómenos como la deflexión gravitatoria y, en contextos astrofísicos más amplios, la lente gravitatoria.

En tercer lugar, para partículas masivas pueden existir trayectorias ligadas. En este caso, el movimiento radial queda confinado entre dos puntos de retorno:

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max} \quad (75)$$

de manera que la partícula no cae al agujero negro ni escapa al infinito. Estas trayectorias son el análogo relativista de las órbitas ligadas en un campo central, aunque con diferencias

importantes respecto a las órbitas keplerianas. En particular, la relatividad introduce una precesión del periastro, de modo que las trayectorias ligadas no son, en general, curvas cerradas.

Por último, las órbitas circulares corresponden a configuraciones en las que el radio permanece constante. Para que esto ocurra, no basta con que $\dot{r} = 0$; también es necesario que el potencial efectivo tenga un extremo en el radio considerado. Las condiciones generales vienen dadas por la Ecuación 67.

La estabilidad de dichas órbitas se determina mediante el signo de la segunda derivada del potencial. Un mínimo de $V_{\text{eff}}(r)$ corresponde a una órbita circular estable, mientras que un máximo corresponde a una órbita circular inestable. Este criterio se expresa cualitativamente como:

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} > 0 \quad \text{estable}, \quad \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} < 0 \quad \text{inestable} \quad (76)$$

La clasificación anterior puede complementarse mediante la integración numérica de geodésicas para distintos valores de E , L y condiciones iniciales. La representación simultánea del potencial efectivo y de las trayectorias resultantes permite visualizar de forma directa la transición entre regímenes de captura, escape, dispersión, movimiento ligado y órbitas circulares, proporcionando una interpretación intuitiva de los resultados obtenidos analíticamente.

El estudio detallado de estas condiciones permitirá identificar radios característicos del espacio-tiempo de Schwarzschild, como la esfera de fotones definida en la Ecuación 73 y la última órbita circular estable para partículas masivas en $r = 6M$. Estos resultados muestran que la estructura orbital relativista es más rica que la newtoniana, especialmente en las regiones próximas al objeto compacto.

En este apartado, estas condiciones se introducen únicamente como criterio general de clasificación. Su aplicación detallada al cálculo de radios críticos, energías y momentos angulares orbitales se desarrollará en el apartado dedicado a las órbitas circulares y su estabilidad.

5.5. Papel del potencial efectivo en el desarrollo posterior

El análisis del potencial efectivo constituye un paso intermedio esencial entre la formulación geométrica del movimiento geodésico y la obtención de trayectorias concretas. Por un lado, proporciona una herramienta analítica para clasificar los posibles regímenes dinámicos. Por otro, permite seleccionar de forma controlada las condiciones iniciales que se emplearán posteriormente en las simulaciones numéricas.

Desde el punto de vista computacional, el potencial efectivo ofrece además un criterio para verificar la coherencia de las simulaciones. Las trayectorias numéricas deberán respetar las regiones permitidas por la condición $E^2 \geq V_{\text{eff}}(r)$, mientras que los puntos de retorno deberán aparecer cuando se satisfaga $E^2 = V_{\text{eff}}(r)$. De este modo, la formulación analítica servirá como referencia para interpretar y validar los resultados obtenidos mediante integración numérica.

En consecuencia, el potencial efectivo actúa como elemento de conexión entre el análisis teórico y el estudio numérico del movimiento geodésico. Estas ideas se desarrollarán posteriormente en la Sección 6 y en la Sección 10, mediante el estudio de órbitas características, trayectorias relativistas y simulaciones obtenidas a partir de la integración de las ecuaciones de movimiento.

6. Órbitas circulares y estabilidad orbital

Partiendo del potencial efectivo para partículas masivas obtenido en la Ecuación 64 y de las condiciones generales de circularidad introducidas en la Ecuación 67, se procede a determinar los radios para los que pueden existir órbitas circulares y a estudiar posteriormente su estabilidad.

Una órbita circular requiere que se satisfagan las condiciones de circularidad introducidas previamente en la Ecuación 67. La primera fija la energía orbital, mientras que la segunda determina los radios para los cuales puede existir una órbita circular. La estabilidad se analizará posteriormente mediante la segunda derivada del potencial efectivo.

El estudio de estas órbitas resulta especialmente relevante porque permite identificar algunos de los radios característicos más importantes del espacio-tiempo de Schwarzschild. En particular, el análisis conducirá a la obtención de la última órbita circular estable para partículas masivas, situada en $r = 6M$, así como a la distinción entre órbitas circulares estables e inestables. Estos resultados desempeñan un papel central en la dinámica relativista alrededor de objetos compactos y constituyen una referencia fundamental para la interpretación de las trayectorias obtenidas mediante integración numérica.

6.1. Órbitas circulares para partículas masivas

Para partículas masivas se toma $\varepsilon = 1$. En este caso, se parte de la expresión desarrollada del potencial efectivo obtenida en la Ecuación 70:

$$V_{\text{eff}}^{\text{masiva}}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} \quad (77)$$

Para obtener las órbitas circulares se impone la condición:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0 \quad (78)$$

Derivando respecto de r , y considerando constante el momento angular L , se obtiene:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{2M}{r^2} - \frac{2L^2}{r^3} + \frac{6ML^2}{r^4} \quad (79)$$

La condición de circularidad queda entonces:

$$\frac{2M}{r^2} - \frac{2L^2}{r^3} + \frac{6ML^2}{r^4} = 0 \quad (80)$$

Multiplicando por $\frac{r^4}{2}$ para eliminar denominadores:

$$Mr^2 - L^2r + 3ML^2 = 0 \quad (81)$$

Reagrupando los términos que contienen L^2 :

$$Mr^2 = L^2(r - 3M) \quad (82)$$

y despejando:

$$L^2 = \frac{Mr^2}{r - 3M} \quad (83)$$

Esta expresión determina el momento angular necesario para que una partícula masiva describa una órbita circular de radio r .

Además, para que L^2 sea positivo debe cumplirse:

$$r > 3M \quad (84)$$

Por tanto, las órbitas circulares temporales únicamente pueden existir para radios superiores a $3M$. El radio $r = 3M$ aparece así como un límite inferior para la existencia de órbitas circulares de partículas masivas.

No obstante, la existencia de una órbita circular no implica necesariamente que esta sea estable. Para determinar si pequeñas perturbaciones radiales hacen que la partícula permanezca próxima a la órbita o se aleje de ella, es necesario estudiar la segunda derivada del potencial efectivo. Este análisis permitirá identificar la última órbita circular estable del

espacio-tiempo de Schwarzschild y distinguir entre órbitas estables e inestables. Además, la representación gráfica del potencial efectivo y de las trayectorias asociadas proporciona una visualización directa de estas diferencias de estabilidad, complementando la interpretación analítica obtenida a partir de las ecuaciones.

6.2. Estabilidad de las órbitas circulares

La existencia de una órbita circular no implica necesariamente que esta sea estable frente a pequeñas perturbaciones radiales. Para estudiar la estabilidad se utiliza el criterio introducido previamente en la Ecuación 76.

Una órbita circular será estable si corresponde a un mínimo del potencial efectivo, mientras que será inestable si corresponde a un máximo. Por tanto, es necesario analizar el signo de la segunda derivada del potencial efectivo.

Partiendo de la expresión obtenida en la Ecuación 79:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{2M}{r^2} - \frac{2L^2}{r^3} + \frac{6ML^2}{r^4} \quad (85)$$

se deriva nuevamente respecto de r , obteniéndose:

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = -\frac{4M}{r^3} + \frac{6L^2}{r^4} - \frac{24ML^2}{r^5} \quad (86)$$

Para las órbitas circulares, el momento angular debe satisfacer la condición obtenida en la Ecuación 83:

$$L^2 = \frac{Mr^2}{r - 3M} \quad (87)$$

Sustituyendo esta expresión en la Ecuación 86 y simplificando, se obtiene:

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = \frac{2M(r - 6M)}{r^3(r - 3M)} \quad (88)$$

La estabilidad queda determinada por el signo de esta expresión. Dado que las órbitas circulares solo existen para $r > 3 M$, el denominador es positivo en toda la región físicamente permitida. Por tanto, el signo depende únicamente del factor $(r - 6M)$.

Se distinguen así tres casos. Para:

$$r > 6 M \quad (89)$$

se cumple:

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} > 0, \quad (90)$$

por lo que la órbita circular corresponde a un mínimo del potencial efectivo y resulta estable frente a pequeñas perturbaciones radiales.

Para:

$$r = 6 M \quad (91)$$

se obtiene:

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} = 0, \quad (92)$$

lo que señala la transición entre órbitas estables e inestables.

Finalmente, para:

$$3 M < r < 6 M \quad (93)$$

se cumple:

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} < 0, \quad (94)$$

por lo que la órbita circular corresponde a un máximo del potencial efectivo y resulta inestable.

El radio:

$$r = 6 M \quad (95)$$

recibe el nombre de última órbita circular estable (ISCO, *Innermost Stable Circular Orbit*). Constituye uno de los radios característicos más importantes del espacio-tiempo de Schwarzschild, ya que marca el límite interior de las órbitas circulares estables para partículas masivas.

Para radios mayores que $6M$ pueden existir órbitas circulares estables, mientras que para radios comprendidos entre $3M$ y $6M$ las órbitas circulares son necesariamente inestables. Este resultado no tiene equivalente en la teoría newtoniana y constituye una consecuencia directa de la estructura relativista del potencial efectivo.

Debe subrayarse que esta clasificación de estabilidad se refiere exclusivamente a órbitas circulares, es decir, a trayectorias con radio constante que satisfacen simultáneamente las condiciones de circularidad. Una partícula puede atravesar esas mismas regiones radiales formando parte de una trayectoria ligada, de escape o de captura, sin que por ello deba interpretarse como una órbita circular estable o inestable.

La existencia de la ISCO constituye una diferencia fundamental respecto a la mecánica newtoniana. En gravedad clásica pueden existir órbitas circulares estables a cualquier distancia del cuerpo central siempre que el momento angular sea adecuado. En Schwarzschild, sin embargo, la curvatura del espacio-tiempo impone un límite interior para la estabilidad orbital.

La transición entre órbitas estables e inestables puede apreciarse de forma especialmente clara mediante la representación gráfica del potencial efectivo y la integración numérica de trayectorias próximas a la ISCO. Pequeñas perturbaciones alrededor de órbitas situadas por encima de $r = 6M$ permanecen acotadas, mientras que por debajo de dicho radio las perturbaciones tienden a crecer y la órbita pierde su estabilidad.

Desde el punto de vista físico, este resultado implica que una partícula solo puede mantenerse en una órbita circular estable, o marginalmente estable en el caso límite, hasta $r = 6M$. Por debajo de este radio, las órbitas circulares posibles son inestables: pequeñas perturbaciones radiales no quedan confinadas alrededor del radio inicial, sino que tienden a alejar a la partícula de la configuración circular, ya sea hacia radios menores o hacia

radios mayores. Esta propiedad desempeña un papel fundamental en la física de discos de acreción alrededor de agujeros negros.

6.3. Energía de las órbitas circulares

Una vez determinada la condición de circularidad y analizada la estabilidad de las órbitas circulares, resulta posible obtener la energía asociada a dichas órbitas. Para ello se utiliza la primera de las condiciones de circularidad introducidas en la Ecuación 67.

En el caso de partículas masivas, partiendo de la expresión del potencial efectivo dada en la Ecuación 64 y utilizando la condición obtenida en la Ecuación 83:

$$L^2 = \frac{Mr^2}{r - 3M} \quad (96)$$

se obtiene:

$$E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{M}{r - 3M}\right) \quad (97)$$

El segundo factor puede simplificarse como:

$$1 + \frac{M}{r - 3M} = \frac{r - 2M}{r - 3M} \quad (98)$$

por lo que:

$$E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{r - 2M}{r - 3M} \quad (99)$$

Utilizando la identidad:

$$1 - \frac{2M}{r} = \frac{r - 2M}{r} \quad (100)$$

se llega finalmente a:

$$E^2 = \frac{(r - 2M)^2}{r(r - 3M)} \quad (101)$$

Tomando la raíz positiva, la energía por unidad de masa asociada a una órbita circular resulta:

$$E = \frac{r - 2M}{\sqrt{r(r - 3M)}} \quad (102)$$

Esta expresión muestra que la energía orbital depende únicamente del radio de la órbita considerada. Además, vuelve a aparecer el radio $r = 3M$ en el denominador, lo que confirma el papel especial que desempeña dicho radio en la estructura orbital del espacio-tiempo de Schwarzschild.

En el límite de radios grandes, $r \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$E \rightarrow 1, \quad (103)$$

resultado coherente con la interpretación de E como energía por unidad de masa medida por un observador situado en el infinito.

Por otra parte, evaluando la Ecuación 102 en la última órbita circular estable, $r = 6M$, se obtiene:

$$E = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (104)$$

Este valor corresponde a la energía específica asociada a la ISCO y constituye una magnitud de especial interés en astrofísica relativista, ya que determina el límite interior de las órbitas circulares estables alrededor de un agujero negro de Schwarzschild (ISCO, Innermost Stable Circular Orbit) [1], [9].

La dependencia de la energía orbital con el radio puede visualizarse de forma directa mediante representaciones gráficas de la Ecuación 102. Estas representaciones permiten identificar el comportamiento de la energía en el entorno de radios característicos como la ISCO y facilitan la interpretación física de la transición entre órbitas estables e inestables. Asimismo, proporcionan una referencia útil para contrastar los resultados obtenidos mediante integración numérica de trayectorias circulares y cuasi-circulares.

Las expresiones obtenidas para la energía y el momento angular permiten caracterizar completamente las órbitas circulares temporales. En el siguiente apartado se repetirá el análisis para geodésicas nulas, lo que permitirá obtener la esfera de fotones y estudiar las órbitas circulares de la luz.

6.4. Órbitas circulares nulas y esfera de fotones

El procedimiento desarrollado para partículas masivas puede aplicarse de forma análoga a las geodésicas nulas. En este caso se toma $\varepsilon = 0$. Partiendo del potencial efectivo para geodésicas nulas dado en la Ecuación 72, las órbitas circulares nulas deben satisfacer, al igual que en el caso masivo, la condición de extremo del potencial efectivo introducida en la Ecuación 67.

Por tanto, se impone:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0 \quad (105)$$

Derivando respecto de r , y considerando constante el momento angular L , se obtiene:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{2L^2}{r^3} + \frac{6ML^2}{r^4} \quad (106)$$

La condición de circularidad queda entonces:

$$-\frac{2L^2}{r^3} + \frac{6ML^2}{r^4} = 0 \quad (107)$$

Multiplicando por $\frac{r^4}{2L^2}$, resulta:

$$-r + 3M = 0 \quad (108)$$

Por tanto:

$$r = 3M \quad (109)$$

Este resultado muestra que las geodésicas nulas poseen una única órbita circular posible, situada en el radio $r = 3M$. Dicha órbita recibe el nombre de esfera de fotones y constituye una de las estructuras más características del espacio-tiempo de Schwarzschild.

Para analizar su estabilidad, se calcula la segunda derivada del potencial efectivo. Derivando nuevamente la Ecuación 106, se obtiene:

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = \frac{6L^2}{r^4} - \frac{24ML^2}{r^5} \quad (110)$$

Evalutando esta expresión en $r = 3M$:

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = \frac{6L^2}{(3M)^4} - \frac{24ML^2}{(3M)^5} \quad (111)$$

Simplificando:

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = -\frac{2L^2}{81M^4} < 0 \quad (112)$$

La segunda derivada es negativa, por lo que la órbita circular nula corresponde a un máximo del potencial efectivo. En consecuencia, la esfera de fotones es una órbita inestable.

Desde el punto de vista físico, esto significa que una pequeña perturbación radial basta para modificar de forma drástica la trayectoria del fotón. Si la perturbación desplaza al fotón hacia radios mayores, este tenderá a escapar hacia el infinito. Por el contrario, si la perturbación lo desplaza hacia radios menores, acabará siendo capturado por el agujero negro.

La inestabilidad de la esfera de fotones explica por qué no se observan anillos de luz perfectamente estacionarios alrededor de agujeros negros reales. Aunque pueden existir fotones describiendo temporalmente trayectorias próximas a $r = 3M$, cualquier perturbación termina expulsándolos hacia el infinito o conduciéndolos hacia el horizonte. Esta sensibilidad a las condiciones iniciales puede visualizarse de forma especialmente clara mediante la integración numérica de geodésicas nulas próximas a la órbita crítica, donde pequeñas variaciones en los parámetros iniciales producen comportamientos cualitativamente distintos.

Esta estructura desempeña además un papel esencial en la formación de la sombra de un agujero negro. Los fotones que llegan al observador tras recorrer trayectorias cercanas

a la esfera de fotones generan las regiones más intensamente curvadas de la imagen observada.

La esfera de fotones actúa así como una frontera dinámica entre geodésicas nulas de captura y geodésicas nulas de dispersión. Su existencia está directamente relacionada con fenómenos observacionales como la formación de sombras de agujeros negros y la aparición de imágenes altamente desviadas en procesos de lente gravitatoria fuerte.

La representación conjunta del potencial efectivo nulo y de las trayectorias obtenidas numéricamente permite interpretar de forma intuitiva el papel de la esfera de fotones como frontera dinámica entre captura y dispersión. Esta combinación de análisis analítico y visualización numérica facilita la identificación de trayectorias críticas y ayuda a relacionar la estructura del potencial con la geometría observada de las geodésicas luminosas.

El resultado obtenido confirma además el papel especial del radio $r = 3 M$, que ya había aparecido previamente como límite inferior para la existencia de órbitas circulares temporales. Sin embargo, mientras que las partículas masivas pueden describir órbitas circulares para cualquier radio superior a $3 M$, los fotones únicamente admiten una órbita circular en dicho radio, y esta resulta necesariamente inestable.

6.5. Interpretación física de los radios críticos

El análisis de las órbitas circulares realizado en los apartados anteriores permite identificar varios radios característicos del espacio-tiempo de Schwarzschild. Estos radios delimitan regiones con propiedades dinámicas diferentes y constituyen referencias fundamentales para interpretar el movimiento de partículas masivas y fotones.

El primero de ellos es el horizonte de sucesos:

$$r = 2 M, \tag{113}$$

introducido anteriormente al estudiar la geometría de Schwarzschild. Este radio marca la frontera causal del agujero negro. Una vez atravesado el horizonte, ninguna señal física puede volver a alcanzar el infinito.

Por encima del horizonte aparece la esfera de fotones:

$$r = 3 M, \quad (114)$$

obtenida en la Ecuación 109. Este radio corresponde a la única órbita circular posible para geodésicas nulas. Sin embargo, dicha órbita resulta inestable frente a perturbaciones radiales, por lo que constituye una frontera dinámica entre trayectorias luminosas de captura y de dispersión.

El mismo radio $r = 3M$ aparece también como límite inferior para la existencia de órbitas circulares temporales. Tal como muestra la Ecuación 83, las partículas masivas únicamente pueden describir órbitas circulares para radios superiores a este valor.

El tercer radio característico es la última órbita circular estable:

$$r = 6 M, \quad (115)$$

obtenida en la Ecuación 95. Este radio separa dos regímenes orbitales distintos. Para $r > 6 M$ existen órbitas circulares estables, mientras que para:

$$3 M < r < 6 M \quad (116)$$

las órbitas circulares son necesariamente inestables.

La estructura radial formada por los radios $2 M$, $3 M$ y $6 M$ no posee equivalente en la teoría newtoniana. Se trata de una consecuencia directa de la curvatura del espacio-tiempo y de la forma relativista del potencial efectivo. Estos resultados constituyen una de las manifestaciones más claras de las diferencias entre la dinámica orbital relativista y la dinámica gravitatoria clásica.

Además de su interés teórico, estos radios desempeñan un papel fundamental en diversos fenómenos astrofísicos. La esfera de fotones está relacionada con la formación de sombras de agujeros negros y con los regímenes de lente gravitatoria fuerte, mientras que la ISCO interviene en la descripción de discos de acreción y en la emisión de radiación procedente de regiones próximas al agujero negro.

Estos radios característicos constituyen además referencias naturales para la interpretación de las simulaciones numéricas desarrolladas en este trabajo. La representación conjunta de potenciales efectivos, trayectorias geodésicas y magnitudes temporales permite visualizar

de forma directa cómo el horizonte, la esfera de fotones y la ISCO condicionan la dinámica de partículas masivas y fotones en distintas regiones del espacio-tiempo.

En conjunto, los radios $2M$, $3M$ y $6M$ definen una estructura jerárquica de regiones dinámicamente distintas alrededor del agujero negro. El horizonte determina el límite causal del espacio-tiempo exterior; la esfera de fotones separa distintos regímenes de propagación luminosa; y la ISCO marca el límite interior de las órbitas circulares estables para partículas masivas.

La aparición de estas escalas características constituye una consecuencia directa de la curvatura del espacio-tiempo y muestra cómo la dinámica relativista introduce fenómenos sin equivalente en la descripción gravitatoria newtoniana.

Los resultados obtenidos en este capítulo proporcionan así una caracterización analítica de las principales estructuras orbitales del espacio-tiempo de Schwarzschild. En el capítulo siguiente se utilizarán estas predicciones para interpretar las simulaciones numéricas y las representaciones gráficas de trayectorias, potenciales efectivos y magnitudes temporales.

7. Resultados numéricos y escalas características

Tras clasificar las trayectorias y obtener los radios críticos de la geometría de Schwarzschild, resulta útil asignarles una escala física concreta. La elección de un agujero negro de referencia permitirá convertir las magnitudes geométricas en valores numéricos y disponer de una base común para interpretar las simulaciones posteriores.

7.1. Elección del objeto de estudio

Hasta este punto, el análisis se ha desarrollado en términos generales, manteniendo explícita la dependencia con la masa M del agujero negro. Esta formulación permite obtener resultados válidos para cualquier espacio-tiempo de Schwarzschild, ya que las magnitudes expresadas en unidades geométricas pueden reescalarsse posteriormente a partir de la masa del objeto considerado.

Con el fin de proporcionar una interpretación numérica concreta de los resultados obtenidos, se considerará como caso de estudio un agujero negro de masa estelar:

$$M_{\text{BH}} = 10 M_{\odot} \quad (117)$$

donde $1 M_{\odot}$ representa una masa solar.

Esta elección no supone una pérdida de generalidad, sino que permite traducir las magnitudes adimensionales obtenidas en unidades geométricas a valores físicos ordinarios. En las simulaciones se seguirá trabajando con unidades normalizadas:

$$G = c = 1, \quad M = 1, \quad (118)$$

de modo que los radios característicos aparecen en posiciones fijas como $2 M$, $3 M$ o $6 M$. La masa física seleccionada se utilizará únicamente para expresar dichas escalas en kilómetros y facilitar la interpretación de los resultados.

7.2. Radios característicos en unidades físicas

La escala geométrica asociada a una masa solar viene dada aproximadamente por:

$$\frac{GM_{\odot}}{c^2} \approx 1.477 \text{ km} \quad (119)$$

Por tanto, para el agujero negro considerado:

$$M_{\text{geom}} = \frac{GM_{\text{BH}}}{c^2} \approx 14.77 \text{ km} \quad (120)$$

A partir de esta escala pueden calcularse los radios característicos obtenidos analíticamente en el capítulo anterior. El horizonte de sucesos se encuentra en:

$$r_s = 2 M \approx 29.54 \text{ km} \quad (121)$$

La esfera de fotones se sitúa en:

$$r_{\text{ph}} = 3 M \approx 44.31 \text{ km} \quad (122)$$

Por su parte, la última órbita circular estable se encuentra en:

$$r_{\text{ISCO}} = 6 M \approx 88.62 \text{ km} \quad (123)$$

Tabla 1. Radios característicos para un agujero negro de Schwarzschild de $10 M_{\odot}$.

Magnitud	Valor en unidades de $1 M$	Valor físico
Horizonte de sucesos	$2 M$	29.54 km
Esfera de fotones	$3 M$	44.31 km
ISCO	$6 M$	88.62 km

La Tabla 1 muestra que, para un agujero negro de masa estelar de $10 M_{\odot}$, las principales estructuras dinámicas del espacio-tiempo de Schwarzschild se sitúan a escalas de unas pocas decenas de kilómetros. Esta conversión no modifica el análisis realizado en unidades

geométricas, pero permite asociar los radios $2M$, $3M$ y $6M$ a distancias físicas concretas y facilita la interpretación de las simulaciones posteriores.

7.3. Energía y momento angular en la ISCO

La última órbita circular estable constituye uno de los radios más importantes del espacio-tiempo de Schwarzschild. Por este motivo, resulta de interés evaluar en dicho radio las magnitudes dinámicas obtenidas analíticamente en el capítulo anterior.

A partir de la expresión de la energía para órbitas circulares obtenida en la Ecuación 102:

$$E = \frac{r - 2M}{\sqrt{r(r - 3M)}} , \quad (124)$$

y utilizando el valor de la ISCO:

$$r = 6M , \quad (125)$$

se obtiene:

$$E_{\text{ISCO}} = \frac{6M - 2M}{\sqrt{6M(6M - 3M)}} . \quad (126)$$

Simplificando:

$$E_{\text{ISCO}} = 4 \frac{M}{\sqrt{18M^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428 . \quad (127)$$

De forma análoga, a partir de la expresión obtenida para el momento angular orbital:

$$L^2 = \frac{Mr^2}{r - 3M} , \quad (128)$$

se obtiene:

$$L_{\text{ISCO}}^2 = \frac{M(6M)^2}{6M - 3M} = 12M^2 . \quad (129)$$

Tomando la raíz positiva:

$$L_{\text{ISCO}} = 2\sqrt{3}M \approx 3.464 M. \quad (130)$$

Las magnitudes obtenidas caracterizan completamente la última órbita circular estable. El valor $E_{\text{ISCO}} \approx 0.9428$ indica que la partícula se encuentra gravitacionalmente ligada al agujero negro. En la normalización utilizada, $E = 1$ corresponde a una partícula situada en el infinito y en reposo respecto al observador lejano, por lo que el hecho de que $E_{\text{ISCO}} < 1$ refleja la energía liberada al descender hasta la ISCO.

La diferencia:

$$1 - E_{\text{ISCO}} \approx 0.0572 \quad (131)$$

equivale aproximadamente a un 5.7% de la energía en reposo de la partícula. Este resultado proporciona una estimación de la energía que puede liberarse cuando la materia cae desde regiones lejanas hasta la ISCO, lo que permite interpretar la elevada eficiencia energética de los procesos de acreción alrededor de agujeros negros.

Por otra parte, el valor $L_{\text{ISCO}} \approx 3.464 M$ representa el momento angular específico asociado a la última órbita circular estable. Este valor actúa como referencia dinámica para las simulaciones numéricas, ya que permite reproducir la órbita circular marginalmente estable y visualizar la transición entre órbitas estables e inestables en el entorno de $r = 6 M$.

7.4. Dilatación temporal en radios característicos

Además de modificar la estructura orbital del movimiento, la geometría de Schwarzschild afecta al transcurso del tiempo. Una de las consecuencias más importantes de la Relatividad General es la dilatación temporal gravitatoria, según la cual el ritmo de un reloj depende de su posición dentro del campo gravitatorio.

Para un observador estático situado a una distancia radial r , la relación entre el tiempo propio τ y el tiempo coordinado t viene dada por la inversa de la Ecuación 38:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \quad (132)$$

Esta relación indica qué fracción del tiempo medido por un observador lejano transcurre para un observador estacionario situado a una distancia radial r del agujero negro.

Utilizando los radios característicos obtenidos anteriormente y una posición adicional próxima al horizonte, es posible evaluar cuantitativamente este efecto.

Como primer ejemplo, puede considerarse el radio correspondiente a la última órbita circular estable, $r = 6 M$, para el cual se obtiene:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816. \quad (133)$$

Este valor corresponde al factor de dilatación temporal gravitatoria de un observador estático situado en $r = 6 M$. Por tanto, un reloj estacionario colocado a este radio avanzaría al 81.6% del ritmo de un observador situado en el infinito.

No obstante, una partícula que describe una órbita circular en la ISCO no es un observador estático, sino que se encuentra en movimiento orbital. En ese caso, la relación entre tiempo propio y tiempo coordinado incorpora también el efecto asociado al movimiento de la partícula. Esta comparación se analizará separadamente en la Sección 7.5.

Como segundo radio característico puede considerarse la esfera de fotones, $r = 3 M$, para la cual resulta:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577. \quad (134)$$

Aunque la esfera de fotones corresponde a una órbita nula y no a un observador material, la evaluación de esta expresión en $r = 3 M$ resulta útil como referencia geométrica para comparar la intensidad de la dilatación temporal en radios característicos del espacio-tiempo de Schwarzschild.

Por último, si se considera una posición más próxima al horizonte, por ejemplo, $r = 2.5 M$, se obtiene:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2}{2.5}} = \sqrt{0.2} \approx 0.447. \quad (135)$$

Es decir, el tiempo propio transcurre a menos de la mitad del ritmo medido desde el infinito. Con el fin de resumir estos resultados, la tabla siguiente recoge los valores obtenidos para distintos radios de referencia.

Tabla 2. Factores de dilatación temporal para observadores estáticos situados en radios característicos.

Radio	$\frac{d\tau}{dt}$
6 M	0.816
3 M	0.577
2.5 M	0.447

Como puede observarse en la Tabla 2, la dilatación temporal gravitatoria aumenta al aproximarse al agujero negro. En el límite $r \rightarrow 2 M$, se cumple $\frac{d\tau}{dt} \rightarrow 0$, mientras que la relación inversa $\frac{dt}{d\tau}$ crece sin límite. Este comportamiento refleja la diferencia entre el tiempo propio medido localmente y el tiempo coordenado de Schwarzschild asociado a un observador lejano.

7.5. Tiempo propio y tiempo coordenado para partículas en órbita circular

El análisis anterior corresponde a observadores estáticos situados a una distancia radial fija del agujero negro. Sin embargo, las partículas que siguen geodésicas temporales se encuentran en movimiento y, por tanto, la relación entre tiempo propio y tiempo coordenado viene determinada por la constante de energía conservada.

A partir de la ecuación obtenida anteriormente para geodésicas temporales:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{f(r)}, \quad (136)$$

donde:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (137)$$

es posible estudiar cómo evoluciona el tiempo coordenado de Schwarzschild para partículas que se desplazan en órbitas circulares.

Resulta especialmente interesante evaluar esta relación en la última órbita circular estable. Utilizando el valor obtenido anteriormente para la energía en la ISCO, dado por la Ecuación 127:

$$E_{\text{ISCO}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428, \quad (138)$$

y tomando $r = 6 M$, se obtiene:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{0.9428}{1 - \frac{2}{6}} \approx 1.414. \quad (139)$$

Por tanto, para una partícula situada en la ISCO, un intervalo de un segundo de tiempo propio corresponde aproximadamente a 1.414 segundos de tiempo coordinado.

Este resultado puede compararse con el correspondiente a un observador estático situado en el mismo radio. En dicho caso:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{6}}} \approx 1.225. \quad (140)$$

La diferencia entre ambos valores refleja la contribución adicional debida al movimiento orbital de la partícula. Mientras que el observador estático únicamente experimenta dilatación temporal gravitatoria, la partícula en órbita se ve afectada simultáneamente por la curvatura del espacio-tiempo y por su movimiento alrededor del agujero negro.

Tabla 3. Comparación entre observador estático y partícula en órbita circular en la ISCO.

Situación	$\frac{dt}{d\tau}$
Observador estático en $r = 6 M$	1.225
Partícula en la ISCO	1.414

Como puede observarse en la Tabla 3, la discrepancia entre tiempo propio y tiempo coordinado depende no solo de la posición radial, sino también del estado de movimiento del observador considerado. Para el observador estático, la única contribución procede de la dilatación gravitatoria. Para la partícula en órbita circular, se añade una contribución

cinemática asociada a su movimiento orbital, de modo que ambos efectos hacen que el tiempo propio transcurra más lentamente que el tiempo coordinado.

7.6. Parámetro de impacto crítico para fotones

Además de la existencia de la esfera de fotones, las geodésicas nulas presentan otra magnitud característica de gran interés físico: el parámetro de impacto crítico. Esta cantidad permite distinguir entre rayos de luz que son capturados por el agujero negro y rayos que, tras sufrir una desviación gravitatoria, escapan nuevamente hacia regiones alejadas.

Para geodésicas nulas, la ecuación radial obtenida anteriormente puede escribirse como:

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}. \quad (141)$$

Resulta conveniente introducir el parámetro de impacto:

$$b = \frac{L}{E} \quad (142)$$

que representa la relación entre el momento angular y la energía de la geodésica.

Dividiendo la ecuación radial por E^2 , se obtiene:

$$\frac{\dot{r}^2}{E^2} = 1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{b^2}{r^2}. \quad (143)$$

La transición entre captura y escape tiene lugar cuando la geodésica alcanza el máximo del potencial efectivo nulo. Como se demostró en la Sección 6.4, dicho máximo se encuentra en la esfera de fotones:

$$r = 3M. \quad (144)$$

Por tanto, la condición crítica se obtiene imponiendo:

$$E^2 = V_{\text{eff}}^{\text{nula}}(3M). \quad (145)$$

Utilizando la expresión del potencial efectivo nulo:

$$V_{\text{eff}}^{\text{nula}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}, \quad (146)$$

se obtiene:

$$E^2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \frac{L^2}{(3M)^2}. \quad (147)$$

Simplificando:

$$E^2 = \frac{L^2}{27M^2}. \quad (148)$$

Por tanto:

$$\left(\frac{L}{E}\right)^2 = 27M^2. \quad (149)$$

Tomando la raíz positiva:

$$b_c = 3\sqrt{3}M. \quad (150)$$

Este resultado corresponde al parámetro de impacto crítico de Schwarzschild. Para rayos luminosos incidentes desde regiones alejadas, los valores

$$b > b_c \quad (151)$$

dan lugar a trayectorias de dispersión, en las que el fotón alcanza un punto de retorno exterior y vuelve a escapar hacia el infinito. En cambio, para

$$b < b_c \quad (152)$$

no existe una barrera efectiva suficiente para producir dicho retorno exterior, por lo que el fotón es capturado por el agujero negro.

Debe destacarse que b_c no coincide con el radio de la esfera de fotones, $r = 3M$. La esfera de fotones indica la posición radial de la órbita nula crítica, mientras que el parámetro de impacto crítico describe la separación transversal crítica de la trayectoria vista desde el infinito, separando las trayectorias capturadas de las trayectorias de dispersión.

Para el agujero negro considerado en este trabajo:

$$M_{\text{BH}} = 10 M_{\odot} , \quad (153)$$

la escala geométrica obtenida anteriormente es:

$$M_{\text{geom}} \approx 14.77 \text{ km} . \quad (154)$$

Por tanto:

$$b_c = 3\sqrt{3}M_{\text{geom}} \approx 76.8 \text{ km} . \quad (155)$$

Este valor proporciona una escala efectiva de captura vista desde el infinito. Variaciones pequeñas alrededor de b_c producen cambios cualitativos en la trayectoria del fotón, lo que refleja la sensibilidad dinámica asociada a la esfera de fotones y será visualizado posteriormente mediante simulaciones numéricas.

7.6.1. Ángulo de deflexión de una geodésica nula

Para las geodésicas nulas de dispersión, además de distinguir entre captura y escape mediante el parámetro de impacto, resulta posible cuantificar la desviación gravitatoria sufrida por el fotón. En ausencia de campo gravitatorio, una trayectoria rectilínea procedente de una región alejada tendría un cambio angular total igual a π entre el tramo entrante y el tramo saliente.

En presencia del agujero negro, la curvatura del espacio-tiempo modifica la trayectoria y el cambio angular total es mayor. Por ello, se define el ángulo de deflexión como:

$$\alpha = |\Delta\varphi| - \pi , \quad (156)$$

donde $\Delta\varphi$ representa la variación total de la coordenada angular durante la trayectoria de dispersión.

En el límite de campo débil, para parámetros de impacto mucho mayores que la escala geométrica M , la deflexión se aproxima por:

$$\alpha_{\text{WF}} \approx \frac{4M}{b} . \quad (157)$$

Esta expresión proporciona una referencia analítica útil para comparar con los resultados numéricos, aunque deja de ser precisa cuando el fotón atraviesa regiones próximas al agujero negro, donde las correcciones relativistas de orden superior se vuelven importantes.

7.7. Comparación de escalas características de Schwarzschild

Los resultados obtenidos en los apartados anteriores permiten comparar las principales escalas asociadas al espacio-tiempo de Schwarzschild. En unidades geométricas, las magnitudes características consideradas son:

$$r_s = 2 M, \quad r_{ph} = 3 M, \quad b_c = 3\sqrt{3}M \approx 5.196 M, \quad r_{ISCO} = 6 M. \quad (158)$$

Estas magnitudes satisfacen la relación:

$$2 M < 3 M < 3\sqrt{3}M < 6 M. \quad (159)$$

Esta jerarquía resume la estructura dinámica principal del espacio-tiempo de Schwarzschild. El horizonte de sucesos marca el límite causal exterior del agujero negro; la esfera de fotones identifica la órbita circular nula inestable; el parámetro de impacto crítico separa las geodésicas nulas capturadas de las trayectorias de dispersión; y la ISCO marca el límite interior de las órbitas circulares estables para partículas masivas.

Aunque b_c no representa un radio espacial, sino un parámetro de impacto definido desde el infinito, su inclusión en esta comparación resulta útil porque proporciona la escala característica asociada a la captura de rayos luminosos. En conjunto, estas magnitudes servirán como referencias para interpretar las representaciones gráficas y las simulaciones numéricas desarrolladas posteriormente.

7.8. Resumen de resultados numéricos

Los cálculos realizados en este capítulo permiten cuantificar las principales magnitudes características del espacio-tiempo de Schwarzschild para el caso de estudio adoptado, correspondiente a un agujero negro de masa $M_{BH} = 10 M_\odot$.

La Tabla 4 recopila los resultados numéricos más relevantes obtenidos a partir de las ecuaciones desarrolladas en los capítulos anteriores.

Tabla 4. *Resumen de resultados numéricos para un agujero negro de Schwarzschild de $10 M_{\odot}$.*

Magnitud	Valor
Horizonte de sucesos r_s	29.54 km
Esfera de fotones r_{ph}	44.31 km
ISCO r_{ISCO}	88.62 km
Energía en la ISCO E_{ISCO}	0.9428
Momento angular en la ISCO L_{ISCO}	$2\sqrt{3}M \approx 3.464 M$
Factor $\frac{d\tau}{dt}$ en $r = 6 M$	0.816
Factor $\frac{dt}{d\tau}$ para la ISCO	1.414
Parámetro de impacto crítico b_c	76.8 km

La Tabla 4 resume las escalas espaciales, dinámicas y temporales que servirán como referencia para interpretar las simulaciones posteriores. En particular, recoge la localización física de los radios críticos, las magnitudes orbitales asociadas a la ISCO, los factores temporales característicos y el parámetro de impacto crítico para geodésicas nulas.

7.9. Representaciones gráficas preliminares

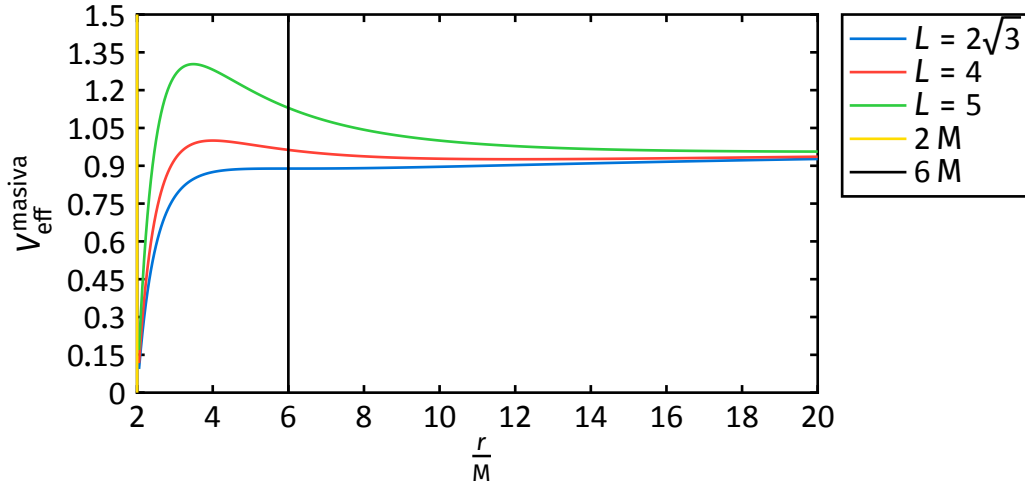
Como cierre de los resultados numéricos obtenidos en este capítulo, se incorporan representaciones gráficas preliminares de las principales magnitudes analizadas. Estas figuras permiten visualizar los resultados deducidos analíticamente antes de abordar la integración numérica completa de trayectorias.

Las líneas verticales incluidas en las figuras no forman parte de las funciones representadas, sino que actúan como referencias para localizar radios característicos del espacio-tiempo de Schwarzschild, como el horizonte de sucesos, la esfera de fotones o la última órbita circular estable.

En primer lugar, se representa el potencial efectivo para partículas masivas para distintos valores del momento angular L . Se ha incluido un valor correspondiente al momento

angular de la ISCO, junto con otros valores superiores, con el fin de ilustrar cómo evoluciona la estructura del potencial efectivo al aumentar el momento angular orbital.

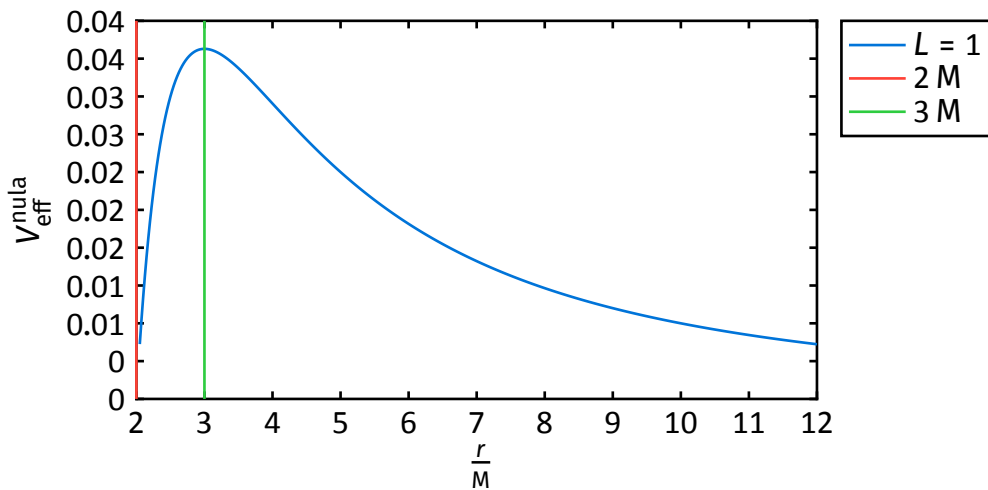
Figura 1. *Potencial efectivo para partículas masivas para distintos valores del momento angular.*



La Figura 1 muestra la aparición de regiones asociadas a órbitas circulares estables e inestables. Asimismo, permite visualizar el papel especial desempeñado por la ISCO, situada en $r = 6M$, que constituye el límite interior de las órbitas circulares estables.

En segundo lugar, se representa el potencial efectivo para geodésicas nulas. En este caso, el máximo de la curva coincide con la esfera de fotones, situada en $r = 3M$.

Figura 2. *Potencial efectivo para geodésicas nulas.*

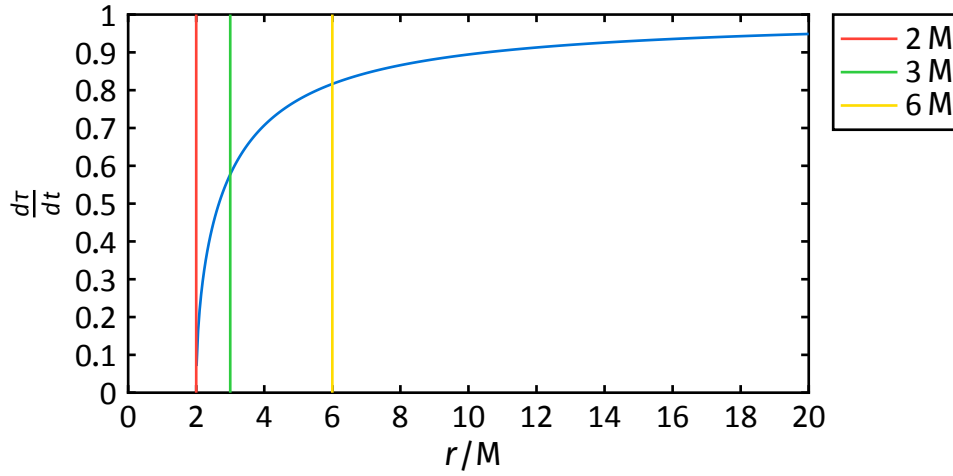


La Figura 2 permite identificar visualmente el máximo del potencial efectivo nulo. Este máximo determina la localización de la esfera de fotones y separa las trayectorias luminosas que escapan al infinito de aquellas que son capturadas por el agujero negro.

Por último, se representa el factor de dilatación temporal gravitatoria en función del radio:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (160)$$

Figura 3. Factor estático de dilatación temporal gravitatoria en función de $\frac{r}{M}$.



La Figura 3 muestra cómo el tiempo propio de un observador estático transcurre cada vez más lentamente a medida que se aproxima el horizonte de sucesos. Las líneas verticales permiten identificar los valores correspondientes a radios característicos previamente estudiados, en particular la esfera de fotones y la ISCO.

En conjunto, estas representaciones permiten visualizar la estructura de los potenciales efectivos, la localización de radios característicos y el comportamiento temporal asociado a la geometría de Schwarzschild. Además, sirven como referencia previa para interpretar las trayectorias obtenidas posteriormente mediante integración numérica.

8. Metodología de simulación numérica

El desarrollo analítico realizado hasta este punto proporciona las ecuaciones necesarias para estudiar el movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild. A partir de ellas, el análisis puede complementarse mediante una integración numérica que permita visualizar trayectorias concretas y comprobar cómo se manifiestan los distintos regímenes dinámicos descritos por el potencial efectivo.

La simulación numérica no se introduce aquí como una formulación física independiente, sino como una herramienta para aplicar las ecuaciones obtenidas anteriormente. Su función principal es calcular la evolución de las geodésicas para distintas condiciones iniciales y relacionar los resultados con conceptos ya establecidos, como regiones permitidas, puntos de retorno, captura, escape, dispersión y órbitas circulares.

Para ello, es necesario precisar qué ecuaciones se integran, cómo se eligen las condiciones iniciales y qué criterios se emplean para validar las trayectorias obtenidas. Estos elementos permiten asegurar que las simulaciones no sean solo representaciones gráficas, sino una prolongación coherente del análisis teórico desarrollado en los capítulos anteriores.

8.1. Ecuaciones utilizadas para el cálculo de trayectorias

Las trayectorias se calculan a partir de la reducción radial obtenida en los apartados anteriores. En el plano ecuatorial, el movimiento queda determinado por las constantes conservadas E y L , junto con la ecuación radial efectiva. Las ecuaciones básicas que se utilizarán son las obtenidas en la Ecuación 48, la Ecuación 54 y la Ecuación 59, donde la función $f(r)$ fue definida en la Ecuación 26.

El parámetro ε , definido en la Ecuación 11, permite distinguir entre los dos tipos de geodésicas que se estudian.

Estas ecuaciones proporcionan la base para calcular la evolución de $t(\lambda)$, $r(\lambda)$ y $\varphi(\lambda)$, donde λ representa el parámetro de la geodésica. En el caso de partículas masivas, este parámetro puede identificarse con el tiempo propio τ ; en el caso de fotones, se interpreta como un parámetro afín.

La ecuación radial también podrá expresarse mediante el potencial efectivo utilizando la Ecuación 60, lo que permitirá verificar de forma cualitativa si una trayectoria corresponde a captura, escape, dispersión u órbita ligada. En particular, las regiones permitidas deberán satisfacer:

$$E^2 \geq V_{\text{eff}}(r). \quad (161)$$

Para la integración numérica resulta conveniente escribir la dinámica radial en forma diferencial. Partiendo de la ecuación radial efectiva:

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E^2, \quad (162)$$

y derivando ambos miembros respecto al parámetro λ :

$$2\dot{r}\ddot{r} + \frac{dV_{\text{eff}}}{dr}\dot{r} = 0. \quad (163)$$

Dividiendo por $2\dot{r}$, válido en los tramos en que $\dot{r} \neq 0$, se obtiene:

$$\ddot{r} = -\frac{1}{2} \frac{dV_{\text{eff}}}{dr}. \quad (164)$$

En los puntos de retorno, donde $\dot{r} = 0$, esta expresión debe entenderse por continuidad o tratarse directamente mediante la ecuación radial de primer orden, evitando dividir explícitamente por una velocidad radial nula.

En la implementación numérica, el problema se escribe como un sistema de primer orden introduciendo la variable auxiliar:

$$v_r = \dot{r}. \quad (165)$$

De este modo, la evolución se calcula a partir del sistema:

$$\dot{r} = v_r, \quad \dot{v}_r = -\frac{1}{2} \frac{dV_{\text{eff}}}{dr}, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}, \quad \dot{t} = \frac{E}{f(r)}. \quad (166)$$

Debe destacarse que la integración numérica se realiza a partir de las ecuaciones relativistas reducidas de Schwarzschild, sin emplear aproximaciones de campo débil. Las expresiones de campo débil utilizadas posteriormente se introducen únicamente como referencias analíticas de comparación para determinados casos, como la precesión del periastro o la deflexión de geodésicas nulas.

Las constantes conservadas E y L permanecen fijas durante toda la simulación, mientras que el parámetro ε determina si se estudia una geodésica temporal o nula. Esta formulación permite integrar numéricamente trayectorias próximas a radios críticos, órbitas inestables y procesos de captura o dispersión, manteniendo una conexión directa con la ecuación radial efectiva deducida previamente.

8.2. Condiciones iniciales y tipos de trayectorias

Las simulaciones se realizan fijando un conjunto de condiciones iniciales y parámetros dinámicos que determinan de forma unívoca la geodésica estudiada. Entre los valores necesarios se encuentran el radio inicial r_0 , el ángulo inicial φ_0 , la energía E , el momento angular L , la velocidad radial inicial $\dot{r}_0$ y el tipo de geodésica, determinado por el valor de ε .

De forma general, se toma:

$$r(0) = r_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (167)$$

junto con una elección de E y L compatible con la región permitida por el potencial efectivo.

Se estudian distintos tipos de trayectorias, entre ellas: trayectorias de captura, en las que la partícula o el fotón atraviesa el horizonte; trayectorias de escape o dispersión, en las que el objeto se aproxima al agujero negro y posteriormente se aleja; órbitas ligadas de partículas masivas, confinadas entre radios de retorno; y trayectorias críticas asociadas a órbitas circulares inestables o a la esfera de fotones.

Las condiciones iniciales se seleccionan de forma que permitan reproducir situaciones físicas representativas identificadas mediante el análisis teórico. En particular, se consideran configuraciones próximas a radios críticos como la esfera de fotones y la ISCO, así como casos situados en distintas regiones del potencial efectivo. De este modo, las trayectorias obtenidas permiten estudiar la transición entre distintos regímenes dinámicos y contrastar visualmente la localización de puntos de retorno, órbitas circulares, radios críticos y regiones de captura o escape.

8.3. Estrategia de integración numérica

La fase numérica del trabajo consiste en integrar las ecuaciones geodésicas reducidas para obtener la evolución de $r(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ y $t(\lambda)$. A partir de la solución radial y angular se reconstruye la trayectoria orbital en el plano ecuatorial mediante la transformación:

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi). \quad (168)$$

Esta representación permite visualizar de manera directa la geometría de las órbitas alrededor del agujero negro.

La implementación numérica se ha desarrollado íntegramente en Python. La resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias se realiza mediante algoritmos de integración adaptativa proporcionados por la biblioteca SciPy [10], mientras que la representación gráfica de los resultados se lleva a cabo mediante Matplotlib [11]. La interfaz interactiva desarrollada para la exploración de trayectorias y potenciales efectivos se implementa mediante PyQt.

Aunque la herramienta permite seleccionar métodos alternativos de integración, como RK45, los resultados presentados en este trabajo se han obtenido empleando principalmente DOP853. Este método explícito de orden elevado resulta adecuado para trayectorias que requieren alta precisión numérica, especialmente en configuraciones sensibles próximas a radios críticos.

Como referencia del contexto computacional, existen herramientas especializadas en Relatividad General, como GYOTO para trazado relativista de rayos [12] y EinsteinPy para

cálculo simbólico y numérico en problemas relativistas [13]. En este trabajo no se emplean como base de la implementación, ya que el análisis se apoya en una herramienta propia construida a partir de las ecuaciones deducidas previamente.

8.4. Representaciones gráficas y criterios de validación

Los resultados numéricos se presentan mediante representaciones gráficas que permiten comparar directamente las trayectorias simuladas con las predicciones obtenidas analíticamente.

Se presta especial atención a la representación de trayectorias en el plano orbital, distinguiendo entre captura, escape, dispersión, movimiento ligado y configuraciones circulares. Asimismo, se estudian casos próximos a la esfera de fotones y a la última órbita circular estable, con el fin de analizar el comportamiento de las trayectorias cerca de radios críticos.

La validez física de las simulaciones se comprueba verificando que las trayectorias respetan las regiones permitidas por el potencial efectivo:

$$E^2 \geq V_{\text{eff}}(r), \quad (169)$$

y que los puntos de retorno aparecen en las posiciones donde se cumple:

$$E^2 = V_{\text{eff}}(r). \quad (170)$$

Además, se comprueba que las simulaciones reproducen los radios característicos obtenidos analíticamente, especialmente la esfera de fotones en $r = 3 M$ y la ISCO en $r = 6 M$.

Junto a las trayectorias orbitales, se generan representaciones complementarias del potencial efectivo, la evolución radial y las magnitudes temporales asociadas a la geometría de Schwarzschild. Estas figuras permiten contrastar visualmente el comportamiento observado en las simulaciones con las predicciones analíticas desarrolladas en los capítulos anteriores.

La metodología descrita establece así el procedimiento seguido para conectar los resultados teóricos con las simulaciones numéricas. Antes de presentar los casos simulados, en la

Sección 9 se describe la herramienta desarrollada y sus principales capacidades de cálculo, visualización y análisis.

9. Herramienta de simulación desarrollada

El análisis numérico se apoya en una herramienta propia diseñada específicamente para este trabajo. Su finalidad es reunir en un mismo entorno la integración de geodésicas, la representación del potencial efectivo y la visualización de trayectorias, de modo que los resultados analíticos puedan explorarse de forma directa e interactiva.

9.1. Objetivo y papel dentro del trabajo

El simulador se ha desarrollado como apoyo al estudio del movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild, permitiendo pasar de las ecuaciones deducidas previamente a trayectorias concretas que puedan representarse, compararse e interpretarse físicamente.

El simulador implementa directamente las ecuaciones geodésicas reducidas deducidas en los capítulos anteriores, utilizando como parámetros fundamentales la energía específica E , el momento angular específico L y el tipo de geodésica considerado, determinado por el parámetro ε . De este modo, la herramienta permite estudiar de forma unificada geodésicas temporales, asociadas a partículas masivas, y geodésicas nulas, asociadas a fotones.

Su papel dentro del trabajo es doble. Por un lado, permite visualizar trayectorias representativas como órbitas circulares, órbitas ligadas con precesión, procesos de captura, trayectorias de escape y dispersión de fotones. Por otro lado, proporciona un medio para contrastar los resultados numéricos con las predicciones analíticas obtenidas mediante el potencial efectivo, los radios críticos y las condiciones de estabilidad orbital.

En consecuencia, la herramienta no actúa únicamente como un recurso gráfico, sino como un entorno de análisis que conecta la formulación matemática del problema con la evolución concreta de las geodésicas simuladas.

9.2. Estructura general de la herramienta

La herramienta desarrollada se organiza en varios módulos complementarios, cada uno de ellos orientado al análisis de un aspecto concreto del movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Todos los módulos se basan en las ecuaciones deducidas en los capítulos anteriores y utilizan como parámetros fundamentales la energía específica E , el momento angular específico L y el tipo de geodésica considerado.

Tabla 5. Estructura funcional de la herramienta de simulación desarrollada.

Módulo	Funcionalidad principal	Interpretación física
Simulador principal	Integra numéricamente geodésicas temporales y nulas y muestra las magnitudes asociadas a la trayectoria calculada.	Permite estudiar órbitas circulares, órbitas ligadas, captura, escape y dispersión, incorporando para geodésicas temporales la comparación entre observador estático y partícula simulada.
Explorador de potencial efectivo	Representa $V_{\text{eff}}(r)$ junto con el nivel energético E^2 .	Permite identificar regiones permitidas, puntos de retorno, máximos, mínimos y radios críticos.
Comparador de trayectorias	Muestra simultáneamente varias geodésicas con distintos parámetros iniciales.	Facilita el análisis de la sensibilidad dinámica y de la transición entre distintos regímenes de movimiento.
Referencia estática	Incorpora una pestaña independiente que representa la referencia estática de dilatación temporal gravitatoria de Schwarzschild, $\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - 2\frac{M}{r}}$.	Permite visualizar la dependencia radial de la dilatación temporal para observadores estáticos y usarla como referencia geométrica común.
Configuraciones predefinidas	Incluye escenarios físicos ya parametrizados.	Permite reproducir la ISCO, la esfera de fotones, la precesión, la captura y la dispersión.

Esta organización permite utilizar la herramienta como un entorno integrado de análisis, en el que las predicciones analíticas obtenidas a partir del potencial efectivo pueden compararse directamente con las trayectorias generadas mediante integración numérica.

9.3. Simulación de geodésicas temporales y nulas

La funcionalidad principal de la herramienta consiste en integrar numéricamente geodésicas temporales y nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Para ello se emplean las ecuaciones deducidas previamente para $\dot{t}$, $\dot{\varphi}$ y la evolución radial, junto con las constantes conservadas E y L .

La distinción entre partículas masivas y fotones se introduce mediante el parámetro ε , tomando $\varepsilon = 1$ para geodésicas temporales y $\varepsilon = 0$ para geodésicas nulas. Esta formulación permite utilizar una misma estructura numérica para estudiar ambos tipos de movimiento, modificando únicamente el tipo de geodésica y los parámetros físicos seleccionados.

En los apartados siguientes se describen por separado las capacidades de la herramienta para el análisis de geodésicas temporales y nulas, prestando atención a los regímenes dinámicos más relevantes en cada caso.

9.3.1. Geodésicas temporales

Las geodésicas temporales describen el movimiento de partículas masivas en el espacio-tiempo de Schwarzschild y corresponden al caso $\varepsilon = 1$ en la formulación utilizada. La herramienta permite integrar numéricamente estas trayectorias a partir de la energía específica E , el momento angular específico L y las condiciones iniciales seleccionadas.

A partir de la evolución de $r(\lambda)$ y $\varphi(\lambda)$, el simulador reconstruye la trayectoria orbital en el plano ecuatorial y la compara con la estructura del potencial efectivo correspondiente. De este modo, es posible identificar si la trayectoria pertenece a un régimen ligado, de escape, de captura o circular.

En el caso de trayectorias ligadas, la herramienta permite visualizar la oscilación radial entre dos puntos de retorno determinados por la condición $E^2 = V_{\text{eff}}(r)$. Además, estas

simulaciones muestran de forma directa la precesión relativista del periastro, característica de las órbitas ligadas en Schwarzschild y ausente en el problema kepleriano clásico.

Para trayectorias de captura, el simulador muestra la caída de la partícula hacia radios próximos al horizonte cuando no existe una barrera efectiva capaz de producir un punto de retorno exterior. En cambio, para valores de energía compatibles con el escape, la partícula puede alejarse hacia regiones cada vez más distantes del agujero negro.

La herramienta permite también reproducir órbitas circulares estables e inestables. En particular, resulta posible estudiar configuraciones próximas a la última órbita circular estable, situada en $r = 6 M$, y comprobar visualmente la transición entre estabilidad e inestabilidad orbital deducida a partir del potencial efectivo.

En conjunto, el módulo de geodésicas temporales permite conectar las predicciones analíticas obtenidas para partículas masivas con trayectorias numéricas concretas, proporcionando una interpretación visual de la estabilidad orbital, los puntos de retorno, la captura, el escape y la precesión relativista.

9.3.2. Geodésicas nulas

Además de las trayectorias de partículas masivas, la herramienta permite estudiar geodésicas nulas, correspondientes a la propagación de fotones en el espacio-tiempo de Schwarzschild. En la formulación utilizada, estas trayectorias se obtienen tomando $\varepsilon = 0$ en la ecuación radial efectiva.

En este caso, la dinámica queda determinada por la relación entre la energía E y el momento angular L , o de forma equivalente por el parámetro de impacto $b = \frac{L}{E}$. La herramienta permite visualizar cómo diferentes valores de este parámetro modifican la trayectoria luminosa, dando lugar a regímenes de dispersión, captura o comportamiento crítico.

Uno de los casos más relevantes es la esfera de fotones, situada en $r = 3 M$. Como se dedujo analíticamente, esta configuración corresponde a una órbita circular nula inestable. La simulación permite observar que pequeñas variaciones de las condiciones iniciales producen

comportamientos cualitativamente distintos: el fotón puede escapar hacia el infinito o ser capturado por el agujero negro.

La herramienta permite también estudiar trayectorias próximas al parámetro de impacto crítico $b_c = 3\sqrt{3}M$. Esta funcionalidad resulta especialmente útil para visualizar la transición entre captura y dispersión, así como la sensibilidad dinámica asociada a las geodésicas nulas cercanas a la esfera de fotones.

Aunque el objetivo del simulador no es generar imágenes astrofísicas realistas, estas trayectorias permiten interpretar los mecanismos geométricos fundamentales relacionados con la desviación gravitatoria de la luz, la captura de fotones y la formación de sombras de agujeros negros.

En conjunto, el módulo de geodésicas nulas conecta la estructura del potencial efectivo nulo con la propagación de la luz en el entorno de un agujero negro de Schwarzschild, proporcionando una interpretación visual de la esfera de fotones, el parámetro de impacto crítico, la captura y la dispersión gravitatoria.

9.3.3. Influencia de la energía y del momento angular

La herramienta permite analizar de forma directa la influencia de las constantes conservadas E y L sobre la dinámica geodésica. Como se dedujo en los capítulos anteriores, estas magnitudes determinan la evolución radial y angular de la trayectoria, así como su clasificación física.

La energía específica E controla las regiones radialmente accesibles mediante la condición $E^2 \geq V_{\text{eff}}(r)$. Por ello, al modificar su valor pueden aparecer o desaparecer puntos de retorno, dando lugar a trayectorias ligadas, procesos de captura o trayectorias de escape.

El momento angular específico L modifica la estructura del potencial efectivo mediante la barrera centrífuga. Su variación altera la existencia de máximos, mínimos y regiones permitidas, condicionando la aparición de órbitas circulares, trayectorias ligadas y comportamientos críticos.

En el caso de partículas masivas, la combinación de E y L permite explorar la transición entre órbitas ligadas, escape y captura. Para geodésicas nulas, el cociente $b = \frac{L}{E}$ determina el régimen de propagación de la luz y permite estudiar la transición entre dispersión y captura alrededor del parámetro de impacto crítico.

De este modo, la modificación controlada de E y L convierte la herramienta en un entorno de exploración dinámica, en el que los cambios observados en las trayectorias pueden relacionarse directamente con la estructura del potencial efectivo y con las predicciones analíticas desarrolladas previamente.

9.4. Estudio del potencial efectivo y radios críticos

El potencial efectivo constituye uno de los elementos centrales de la herramienta desarrollada, ya que permite relacionar directamente la evolución de las trayectorias con las predicciones analíticas obtenidas en los capítulos anteriores. El simulador incorpora un módulo específico para representar $V_{\text{eff}}(r)$ junto con el nivel energético E^2 , facilitando la identificación de regiones permitidas, puntos de retorno y configuraciones críticas.

La visualización del potencial se realiza de forma simultánea a la representación de las trayectorias orbitales. De este modo, es posible comprobar si una geodésica permanece en una región ligada, si encuentra un punto de retorno, si escapa hacia radios grandes o si es capturada por el agujero negro. Esta comparación proporciona un criterio visual directo para interpretar la condición $E^2 \geq V_{\text{eff}}(r)$.

La herramienta permite además modificar los parámetros físicos que intervienen en el potencial, especialmente la constante de energía E , el momento angular L y el tipo de geodésica considerado. Cada variación modifica la forma del potencial o el nivel energético representado, lo que permite observar de manera inmediata cómo cambian las regiones accesibles y los regímenes dinámicos posibles.

El módulo incorpora también referencias visuales asociadas a los radios característicos del espacio-tiempo de Schwarzschild, como el horizonte de sucesos, la esfera de fotones y la ISCO. Estas referencias permiten situar cada trayectoria respecto a las estructuras críticas

obtenidas analíticamente y facilitan la interpretación física de configuraciones próximas a captura, dispersión, órbitas circulares o movimiento ligado.

Además, el explorador incorpora un cuadro interpretativo que clasifica la estructura radial accesible a partir de la comparación entre E^2 y $V_{\text{eff}}(r)$. Cuando esta comparación da lugar a varias regiones permitidas separadas por regiones prohibidas, la herramienta permite seleccionar la región radial analizada, distinguiendo entre ramas interiores asociadas a captura, regiones ligadas o ramas exteriores asociadas a escape o dispersión. De este modo, el módulo evita identificar un único par de parámetros (E, L) con una trayectoria única cuando la estructura del potencial admite varias interpretaciones físicas posibles.

En conjunto, el estudio del potencial efectivo dentro de la herramienta permite conectar la clasificación analítica de trayectorias con los resultados de la integración numérica, proporcionando una forma directa de visualizar máximos, mínimos, puntos de retorno, radios críticos y transiciones entre distintos regímenes dinámicos.

9.4.1. Comparación simultánea de trayectorias

Además del análisis individual de geodésicas, la herramienta permite representar simultáneamente varias trayectorias obtenidas a partir de diferentes valores de energía, momento angular o condiciones iniciales. Esta funcionalidad resulta especialmente útil para estudiar la sensibilidad del movimiento geodésico frente a pequeñas variaciones de los parámetros físicos.

La comparación conjunta permite visualizar de forma directa transiciones entre distintos regímenes dinámicos, como el paso de una trayectoria ligada a una trayectoria de escape, o de una trayectoria de dispersión luminosa a una trayectoria de captura. Estas transiciones son especialmente relevantes cerca de configuraciones críticas, como la ISCO, la esfera de fotones o el parámetro de impacto crítico.

Desde el punto de vista físico, esta funcionalidad permite relacionar la evolución de varias geodésicas con la estructura del potencial efectivo correspondiente. De este modo, la comparación simultánea no solo proporciona una representación visual de distintas

trayectorias, sino que permite interpretar cómo pequeñas diferencias en E , L o b modifican cualitativamente el comportamiento final del sistema.

En conjunto, el comparador de trayectorias constituye una herramienta útil para estudiar la sensibilidad dinámica del espacio-tiempo de Schwarzschild y para visualizar la transición entre captura, escape, dispersión y movimiento ligado.

9.4.2. Escenarios predefinidos y exploración de parámetros

La herramienta permite construir y analizar distintas configuraciones físicas representativas del movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Estas configuraciones abarcan tanto geodésicas temporales como geodésicas nulas, e incluyen situaciones asociadas a órbitas circulares, trayectorias ligadas, captura, escape, dispersión y regímenes próximos a radios críticos.

Con el fin de facilitar el análisis, el simulador incorpora escenarios predefinidos asociados a algunos de los fenómenos más relevantes estudiados en el trabajo. Entre ellos se incluyen configuraciones relacionadas con la ISCO, la esfera de fotones, la precesión relativista, la captura gravitatoria, la dispersión de fotones y un caso de validación en régimen de campo débil para comparar la precesión numérica con la aproximación analítica de primer orden.

Además de utilizar estas configuraciones predefinidas, la herramienta permite modificar de forma interactiva los parámetros físicos de la simulación, como la energía específica E , el momento angular específico L , el radio inicial, la velocidad radial inicial y el tipo de geodésica considerado. Cada modificación se refleja directamente en las representaciones gráficas, permitiendo observar cómo cambian la trayectoria, el potencial efectivo y la clasificación física del movimiento.

Esta exploración resulta especialmente útil para estudiar transiciones entre distintos regímenes dinámicos. Pequeñas variaciones de los parámetros pueden transformar una trayectoria ligada en una trayectoria de escape, una órbita casi circular en una captura, o una geodésica nula de dispersión en una trayectoria capturada. De este modo, la herramienta permite visualizar de forma directa la sensibilidad del sistema cerca de configuraciones críticas.

En conjunto, los escenarios predefinidos y la exploración interactiva de parámetros convierten el simulador en un entorno de análisis flexible, capaz de conectar los resultados analíticos con trayectorias concretas y de facilitar la interpretación física de los distintos regímenes geodésicos estudiados en el trabajo.

9.5. Interfaz y capacidades de visualización

Además de la integración numérica de las ecuaciones geodésicas, la herramienta incorpora una interfaz gráfica diseñada para facilitar la exploración visual del movimiento en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Desde esta interfaz es posible seleccionar el tipo de geodésica, modificar los parámetros físicos y numéricos de la simulación y visualizar de forma inmediata las trayectorias y magnitudes asociadas.

Figura 4. Vista general de la herramienta desarrollada para el estudio de geodésicas de Schwarzschild. Se muestran los controles de configuración física y numérica, la representación de trayectorias orbitales, el potencial efectivo, la evolución radial y, para geodésicas temporales, la comparación entre el observador estático y la partícula simulada.



La Figura 4 muestra la organización general de la herramienta desarrollada. En ella se integran los controles de configuración, la representación de la trayectoria orbital, el potencial efectivo, la evolución radial y las magnitudes temporales asociadas a la simulación.

La visualización conjunta de estos elementos permite relacionar directamente las condiciones iniciales seleccionadas con el comportamiento obtenido mediante integración numérica. De este modo, el usuario puede comprobar en una misma ventana si la trayectoria corresponde a una órbita ligada, una configuración circular, un proceso de captura, una trayectoria de escape o una dispersión gravitatoria.

La herramienta distingue entre la referencia estática general de dilatación temporal y la dilatación temporal asociada a una trayectoria concreta. Para ello se incorpora una pestaña independiente de referencia estática, en la que se representa la relación $\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - 2\frac{M}{r}}$ en función del radio. Esta representación no depende de ninguna simulación concreta y actúa como referencia geométrica común para interpretar la intensidad del campo gravitatorio.

En el simulador principal, en cambio, el panel temporal queda reservado para las magnitudes asociadas a la geodésica calculada. En el caso de partículas masivas, dicho panel compara el factor correspondiente a un observador estático situado en el mismo radio instantáneo de la trayectoria con el factor temporal propio de la partícula simulada. Esta comparación permite distinguir entre la dilatación puramente gravitatoria asociada a la posición radial y la relación temporal experimentada por una partícula masiva en movimiento.

Para geodésicas nulas, la herramienta no representa un factor temporal propio del fotón, ya que estas trayectorias no poseen tiempo propio asociado. En ese caso, el panel informa explícitamente de que el tiempo propio no está definido para geodésicas nulas, manteniendo separada la referencia estática en su pestaña independiente.

La interfaz incorpora también referencias visuales asociadas a radios característicos del espacio-tiempo de Schwarzschild, así como opciones de comparación y exploración de trayectorias. Estas funcionalidades facilitan el análisis de configuraciones próximas a regiones críticas, donde pequeñas variaciones de los parámetros pueden producir cambios cualitativos en la evolución de la geodésica.

La interfaz cuenta además con herramientas de animación que permiten seguir la evolución de la trayectoria calculada sobre las distintas representaciones gráficas. De este modo, es posible observar de forma dinámica cómo cambian la posición orbital, la coordenada radial

y las magnitudes temporales durante la integración, lo que facilita la interpretación física de la simulación más allá de las figuras estáticas.

La herramienta permite también seleccionar distintas masas físicas para el objeto central y traducir automáticamente las escalas geométricas empleadas en la simulación a unidades físicas, como kilómetros. Esta funcionalidad no modifica la integración numérica, que se realiza en unidades normalizadas con $G = c = M = 1$, pero facilita la interpretación de los radios característicos para distintos tipos de agujeros negros.

Asimismo, la interfaz incorpora opciones de exportación que permiten guardar tanto la vista completa de cada simulación como los paneles gráficos individuales, facilitando su inclusión posterior en el análisis de resultados y en los anexos.

En conjunto, la interfaz gráfica constituye el elemento que conecta la formulación matemática, la integración numérica y la interpretación física de los resultados, permitiendo utilizar la herramienta como un entorno interactivo de análisis del movimiento geodésico.

9.6. Validación física de las simulaciones

La herramienta desarrollada se ha validado comprobando que las trayectorias obtenidas mediante integración numérica reproducen las restricciones analíticas deducidas en los capítulos anteriores. En particular, se ha verificado la coherencia entre la evolución de las geodésicas, la estructura del potencial efectivo y la conservación de las magnitudes dinámicas del movimiento.

Tabla 6. *Criterios utilizados para validar físicamente las simulaciones.*

Criterio de validación	Comprobación realizada
Regiones permitidas	Las trayectorias respetan la condición $E^2 \geq V_{\text{eff}}(r)$ durante la integración.
Puntos de retorno	Los cambios de sentido radial aparecen en las posiciones donde $E^2 = V_{\text{eff}}(r)$.
Radios críticos	Las simulaciones reproducen configuraciones asociadas a $r = 3 M$ y $r = 6 M$.
Regímenes dinámicos	La herramienta distingue correctamente entre órbitas ligadas, captura, escape, dispersión y órbitas circulares.
Conservación numérica	El residuo de la ecuación radial efectiva se mantiene pequeño durante las simulaciones.

Estos criterios permiten comprobar que la herramienta no genera trayectorias arbitrarias, sino soluciones coherentes con la formulación geodésica desarrollada previamente. La comparación entre trayectoria orbital, evolución radial y potencial efectivo proporciona una validación directa de cada simulación.

Además, la herramienta permite contrastar los efectos temporales asociados a la geometría de Schwarzschild. Las magnitudes relacionadas con la dilatación temporal muestran el comportamiento esperado al aproximarse a regiones de campo gravitatorio intenso, en concordancia con las expresiones analíticas obtenidas anteriormente.

En conjunto, la validación realizada confirma que la implementación reproduce de forma coherente las propiedades fundamentales del movimiento geodésico en Schwarzschild y proporciona un entorno adecuado para el análisis físico de las simulaciones presentadas en la Sección 10.

10. Resultados de simulación y análisis físico

La herramienta desarrollada permite llevar la formulación teórica anterior a casos concretos de movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild. En esta parte se analizan simulaciones representativas de partículas masivas y fotones, con el propósito de comprobar cómo aparecen en trayectorias concretas los regímenes previstos por el potencial efectivo, las condiciones de circularidad y los radios críticos.

Las simulaciones presentadas no constituyen una derivación independiente de las ecuaciones, ya que se obtienen a partir de la formulación desarrollada en los capítulos anteriores. Su interés reside en comprobar la coherencia física de la implementación y en visualizar de forma directa fenómenos cuya interpretación resulta menos inmediata a partir de las expresiones analíticas.

Para cada caso se presenta la configuración empleada, la figura generada y el análisis físico correspondiente. La interpretación se centra en la relación entre la trayectoria orbital, la estructura del potencial efectivo, la evolución radial, los puntos de retorno, los radios característicos y las condiciones de captura, escape, dispersión o movimiento ligado.

10.1. Lectura de las figuras de simulación

Las figuras presentadas en este capítulo proceden de los distintos módulos de la herramienta desarrollada y tienen como objetivo facilitar la interpretación física de las trayectorias obtenidas mediante integración numérica.

En las simulaciones individuales, la herramienta muestra de forma conjunta varias magnitudes asociadas a una misma geodésica. La representación superior izquierda corresponde a la trayectoria orbital en el plano ecuatorial. La representación superior derecha muestra

el potencial efectivo asociado a la configuración estudiada, junto con el nivel energético de la geodésica y los radios característicos relevantes.

La gráfica inferior izquierda representa la evolución radial $r(\lambda)$ durante la integración numérica, permitiendo identificar puntos de retorno, regiones ligadas, procesos de captura o trayectorias de escape. Asimismo, se incluye una estimación del error de conservación asociado a la ecuación radial efectiva.

Por último, la representación inferior derecha muestra las magnitudes temporales o diagnósticas asociadas a la trayectoria simulada. En el caso de geodésicas temporales, este panel compara el factor correspondiente a un observador estático situado en el mismo radio instantáneo de la partícula, $\frac{d\tau_{\text{est}}}{dt} = \sqrt{1 - 2\frac{M}{r(\tau)}}$, con el factor temporal propio de la partícula simulada, $\frac{d\tau_{\text{part}}}{dt} = \frac{1 - 2\frac{M}{r(\tau)}}{E}$. Esta comparación permite distinguir entre la dilatación gravitatoria asociada únicamente a la posición radial y la relación temporal experimentada por una partícula masiva en movimiento.

Para geodésicas nulas, la representación temporal no muestra un factor propio del fotón, ya que estas trayectorias no poseen tiempo propio asociado. En estos casos, el panel indica explícitamente que el tiempo propio no está definido para geodésicas nulas.

La interpretación conjunta de estas magnitudes permite relacionar directamente la trayectoria obtenida mediante integración numérica con la estructura del potencial efectivo y con los resultados analíticos desarrollados en capítulos anteriores.

En algunos casos, como en la comparación de trayectorias próximas al parámetro de impacto crítico, la figura procede del módulo comparador de trayectorias. En estas representaciones el objetivo no es analizar una única geodésica mediante todos sus paneles, sino comparar de forma directa varias trayectorias y visualizar la transición entre distintos regímenes dinámicos.

10.2. Órbita circular estable

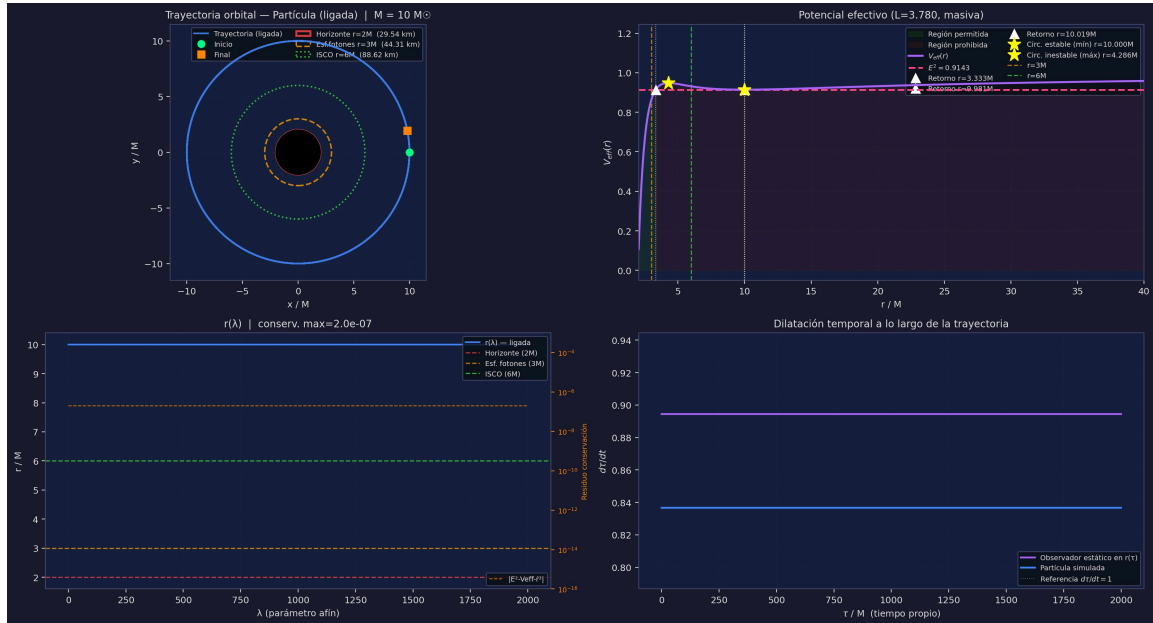
Las órbitas circulares estables constituyen una de las soluciones más importantes del movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Como se dedujo en el análisis del potencial efectivo para partículas masivas, estas configuraciones aparecen en los mínimos

de $V_{\text{eff}}(r)$ y son estables frente a pequeñas perturbaciones radiales. La simulación de este tipo de trayectorias proporciona una de las comprobaciones más directas de la coherencia entre los resultados analíticos obtenidos previamente y la implementación numérica desarrollada en este trabajo.

La configuración estudiada corresponde a una partícula masiva con energía específica $E = 0.956183$ y momento angular específico $L = 3.779645$, situada inicialmente en el radio $r = 10 M$.

Estos valores no se han escogido de forma arbitraria, sino a partir de las condiciones analíticas de órbita circular deducidas previamente. Al fijar $r = 10 M$ en la expresión de la energía para órbitas circulares, dada por la Ecuación 102, y en la expresión del momento angular, dada por la Ecuación 83, se obtienen los valores $E \approx 0.956183$ y $L \approx 3.779645 M$. Además, como el radio seleccionado satisface $r = 10 M > 6 M$, el criterio de estabilidad de la Ecuación 88 predice que la órbita corresponde a un mínimo del potencial efectivo y, por tanto, debe ser estable.

Figura 5. Órbita circular estable obtenida mediante integración numérica de las ecuaciones geodésicas para una partícula masiva situada en $r = 10 M$.



La Figura 5 muestra una trayectoria circular de radio prácticamente constante alrededor del agujero negro. Este comportamiento puede apreciarse tanto en la representación orbital

como en la evolución radial $r(\lambda)$, donde la coordenada radial permanece esencialmente invariable durante toda la integración.

Los resultados numéricos obtenidos indican valores de $r_{\min} = 10 M$ y $r_{\max} = 10.000\,005 M$, por lo que las variaciones radiales son despreciables frente a la escala característica del problema. Este resultado confirma que la trayectoria permanece confinada en una órbita circular con una precisión numérica elevada.

Desde el punto de vista físico, el comportamiento observado es completamente coherente con las predicciones obtenidas mediante el análisis del potencial efectivo desarrollado en capítulos anteriores. El radio de la órbita se encuentra por encima de la ISCO, situada en $r = 6 M$, dentro de la región donde existen órbitas circulares estables para partículas masivas. Asimismo, la representación del potencial efectivo muestra que la trayectoria se localiza en un mínimo local de $V_{\text{eff}}(r)$, exactamente como predice el criterio analítico de estabilidad orbital.

La concordancia entre la trayectoria orbital, la evolución radial y la estructura del potencial efectivo constituye una comprobación de consistencia de la simulación. Aunque las trayectorias se obtienen mediante integración numérica de las mismas ecuaciones deducidas previamente, la coincidencia observada confirma que la implementación reproduce correctamente la dinámica esperada para este tipo de configuraciones.

La comparación temporal mostrada en el panel inferior derecho refleja que, al tratarse de una órbita circular de radio prácticamente constante, tanto el factor del observador estático como el factor propio de la partícula permanecen constantes durante la integración. Para el observador estático situado en $r = 10 M$ se obtiene $\frac{d\tau_{\text{est}}}{dt} \approx 0.894$, mientras que para la partícula simulada se obtiene $\frac{d\tau_{\text{part}}}{dt} \approx 0.837$. Esta diferencia muestra que la partícula en órbita no solo está afectada por la dilatación gravitatoria asociada al radio, sino también por su movimiento orbital.

Por último, el residuo máximo asociado a la conservación de la ecuación radial efectiva es del orden de $2 \cdot 10^{-7}$, indicando que las magnitudes conservadas permanecen prácticamente constantes durante toda la integración. Este resultado proporciona una validación adicional de la precisión numérica alcanzada por el simulador.

En conjunto, este caso reproduce correctamente una de las soluciones fundamentales del movimiento geodésico en la geometría de Schwarzschild y constituye un primer ejemplo de la coherencia existente entre las predicciones analíticas obtenidas mediante el potencial efectivo y los resultados proporcionados por la simulación numérica.

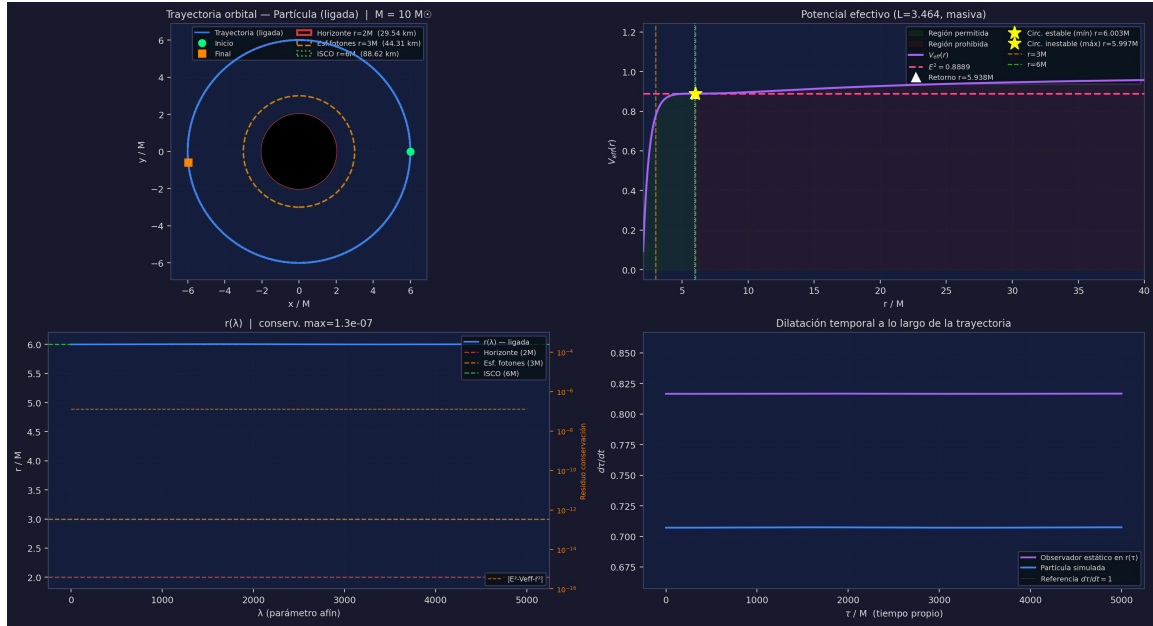
10.3. Última órbita circular estable (ISCO)

La última órbita circular estable, conocida habitualmente como ISCO (Innermost Stable Circular Orbit), constituye uno de los resultados más importantes obtenidos en el análisis del movimiento de partículas masivas en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Como se dedujo anteriormente, la condición de estabilidad orbital conduce a un radio crítico situado en $r_{\text{ISCO}} = 6 M$, que marca la frontera entre las órbitas circulares estables y las órbitas circulares inestables.

La simulación mostrada en la Figura 6 corresponde precisamente a esta configuración crítica. La partícula se sitúa inicialmente en $r_0 = 6 M$, con energía específica $E = 0.942809$ y momento angular específico $L = 3.464\,102 M$, valores que coinciden con los obtenidos analíticamente para la ISCO.

La elección de estos parámetros procede directamente de la condición de última órbita circular estable deducida en el análisis de estabilidad. El radio $r = 6 M$ viene dado por la Ecuación 95 como frontera entre órbitas circulares estables e inestables. Al sustituir este radio en las expresiones de las órbitas circulares se obtiene la energía de la ISCO, recogida en la Ecuación 127, y el momento angular correspondiente, dado por la Ecuación 130. Por tanto, el preset reproduce explícitamente la configuración circular marginalmente estable predicha por el análisis del potencial efectivo.

Figura 6. Simulación correspondiente a la última órbita circular estable (ISCO) de una partícula masiva en el espacio-tiempo de Schwarzschild.



La Figura 6 muestra una trayectoria prácticamente circular situada exactamente en el radio crítico predicho por la teoría. A diferencia del caso estudiado anteriormente para $r = 10 M$, la órbita se encuentra ahora en la frontera entre estabilidad e inestabilidad, por lo que pequeñas perturbaciones pueden producir desviaciones apreciables del movimiento circular ideal.

Este comportamiento puede observarse en la evolución radial mostrada en la parte inferior izquierda de la figura. Aunque el radio permanece próximo a $6 M$ durante toda la integración, aparecen pequeñas variaciones numéricas, obteniéndose valores comprendidos entre $r_{\min} = 6 M$ y $r_{\max} = 6.004\,903 M$. Estas oscilaciones son muy reducidas, pero reflejan el carácter marginal de la estabilidad orbital en esta configuración.

La representación del potencial efectivo proporciona una interpretación directa de este resultado. Tal como se dedujo en el análisis teórico, la ISCO corresponde a una configuración marginalmente estable, situada en el punto de transición entre órbitas circulares estables e inestables. En consecuencia, la órbita se encuentra en un régimen crítico para el cual pequeñas perturbaciones pueden producir respuestas más sensibles que en las órbitas circulares estables situadas a radios mayores.

La concordancia entre el radio obtenido numéricamente y el valor analítico $r = 6 M$ constituye una comprobación especialmente relevante de la implementación desarrollada. La simulación reproduce correctamente el radio crítico deducido teóricamente y muestra el comportamiento esperado para una órbita situada en el límite de estabilidad.

La comparación temporal mostrada en el panel inferior derecho permite distinguir entre el observador estático situado en el radio de la ISCO y la partícula masiva que describe la órbita circular. Para el observador estático en $r = 6 M$ se obtiene $\frac{d\tau_{\text{est}}}{dt} \approx 0.816$, mientras que para la partícula simulada se obtiene $\frac{d\tau_{\text{part}}}{dt} \approx 0.707$. Este último valor es coherente con la relación inversa $\frac{dt}{d\tau} \approx 1.414$ obtenida analíticamente para una partícula en la ISCO. La diferencia entre ambos factores refleja que la partícula no solo está sometida a la dilatación gravitatoria asociada al radio, sino también al efecto cinemático debido a su movimiento orbital.

Por último, el residuo máximo de conservación de la ecuación radial efectiva es del orden de $1.3 \cdot 10^{-7}$, valor adecuado para la interpretación cualitativa de una configuración marginalmente estable. En conjunto, este resultado confirma que la herramienta reproduce correctamente una de las estructuras más importantes de la dinámica geodésica en la geometría de Schwarzschild y verifica numéricamente la existencia de la última órbita circular estable obtenida mediante el análisis analítico previo.

10.4. Órbita ligada con precesión relativista

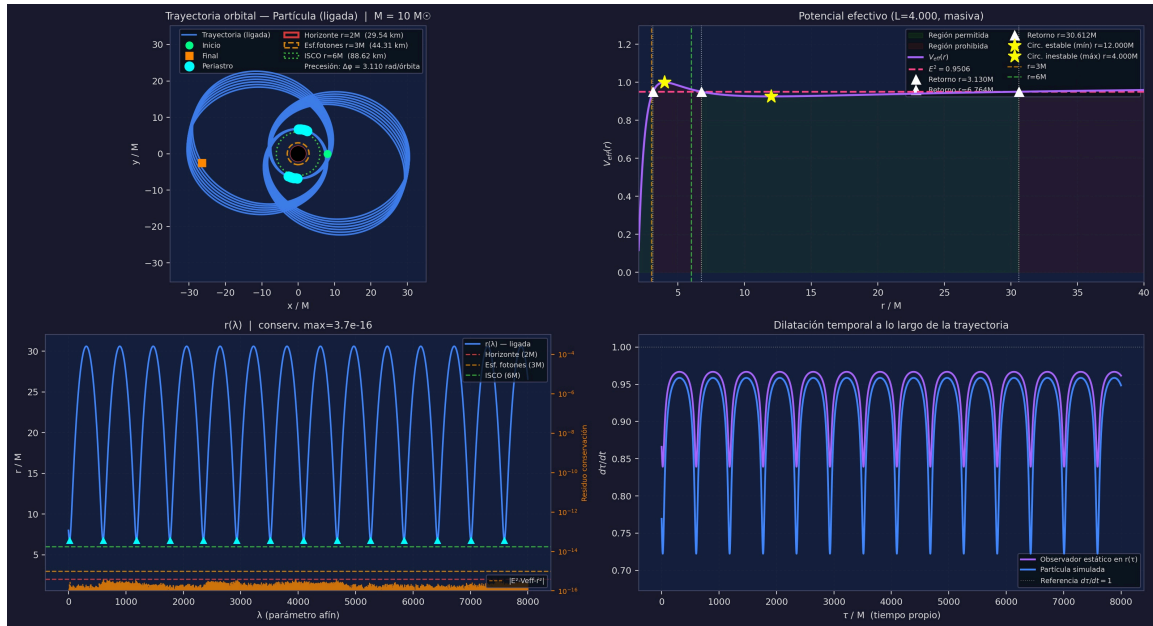
Uno de los fenómenos más característicos del movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild es la aparición de precesión relativista en las órbitas ligadas. A diferencia de lo que ocurre en la mecánica newtoniana, donde las órbitas elípticas son curvas cerradas, las correcciones relativistas introducidas por la geometría del espacio-tiempo provocan una rotación progresiva de la dirección del periastro tras cada revolución.

La simulación mostrada en la Figura 7 corresponde a una partícula masiva con energía específica $E = 0.975$ y momento angular específico $L = 4.0$, situada inicialmente en $r_0 = 8 M$.

La elección de estos parámetros se basa en la estructura del potencial efectivo masivo definido en la Ecuación 64. Para $E = 0.975$ y $L = 4.0$, el nivel energético E^2 corta al potencial efectivo en dos puntos de retorno radiales, generando una región permitida acotada de acuerdo con la condición general $E^2 \geq V_{\text{eff}}(r)$ de la Ecuación 68. Los extremos de dicha región vienen determinados por la condición de punto de retorno $E^2 = V_{\text{eff}}(r)$, dada en la Ecuación 69. Por ello, al situar la partícula inicialmente dentro de esa región, se espera una trayectoria ligada. Además, al encontrarse el periastro relativamente próximo a la ISCO, los efectos relativistas deben producir una precesión apreciable del periastro.

Estas condiciones generan una órbita ligada en la que la partícula permanece confinada entre dos puntos de retorno radiales sin escapar al infinito ni ser capturada por el agujero negro.

Figura 7. Órbita ligada con precesión relativista obtenida mediante integración numérica de las ecuaciones geodésicas.



La Figura 7 muestra claramente que la trayectoria no forma una curva cerrada. Tras cada revolución, el periastro aparece desplazado respecto a la vuelta anterior, de modo que la órbita no se repite exactamente como en el caso kepleriano clásico.

En la simulación representada, el avance del periastro es especialmente acusado y cercano a media vuelta por revolución. Por ello, los puntos de máximo acercamiento al agujero negro aparecen casi en lados opuestos en revoluciones sucesivas, dando lugar en la figura

a una estructura visual dominada por dos lóbulos principales. Esta forma no debe interpretarse como dos órbitas distintas, sino como una única trayectoria ligada con precesión relativista. Si se acumulara un número mucho mayor de revoluciones, el desplazamiento progresivo del periastro daría lugar a una estructura global de tipo roseta.

La evolución radial confirma la existencia de un movimiento ligado. La partícula oscila periódicamente entre un radio mínimo de $r_{\min} = 6.764 M$ y un radio máximo de $r_{\max} = 30.612 M$, en perfecto acuerdo con la estructura del potencial efectivo mostrada en la parte superior derecha de la figura. Tal como se dedujo en el análisis teórico, estos radios corresponden a los puntos de retorno determinados por la condición $E^2 = V_{\text{eff}}(r)$.

La representación del potencial efectivo permite interpretar físicamente la trayectoria observada. El nivel energético de la partícula se sitúa por encima del mínimo del potencial pero por debajo de la barrera exterior, dando lugar a una región radialmente permitida acotada entre dos puntos de retorno. Esta configuración es precisamente la que permite la existencia de órbitas ligadas en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

La figura muestra además una precesión aproximada de $\Delta\varphi = 3.11$ rad por órbita. Aunque el valor exacto depende de las condiciones iniciales seleccionadas, el resultado ilustra de forma directa el efecto acumulativo de la curvatura del espacio-tiempo sobre la dinámica orbital. La rotación progresiva del periastro observada en la simulación constituye una manifestación visual inmediata de este fenómeno relativista.

La comparación temporal asociada a esta trayectoria refleja el carácter no circular de la órbita ligada. Al oscilar la partícula entre el periastro y el apoastro, el radio cambia a lo largo de la integración y, con ello, también varían los factores temporales representados. El factor correspondiente al observador estático toma valores comprendidos aproximadamente entre 0.839 y 0.967, mientras que el factor propio de la partícula simulada varía entre 0.722 y 0.959. Esta diferencia muestra que la relación entre tiempo propio y tiempo coordinado depende tanto de la posición radial instantánea como del movimiento orbital de la partícula. En promedio, el cociente integrado entre tiempo propio y tiempo coordinado resulta $\frac{\tau}{t} \approx 0.907$.

Por último, el residuo máximo asociado a la conservación de la ecuación radial efectiva es del orden de $3.7 \cdot 10^{-16}$, indicando una conservación numérica excelente durante toda la integración. La concordancia entre la trayectoria orbital, los puntos de retorno observados y la estructura del potencial efectivo proporciona una comprobación adicional de la coherencia entre los resultados analíticos desarrollados previamente y las simulaciones obtenidas mediante integración numérica.

10.5. Captura gravitatoria de una partícula masiva

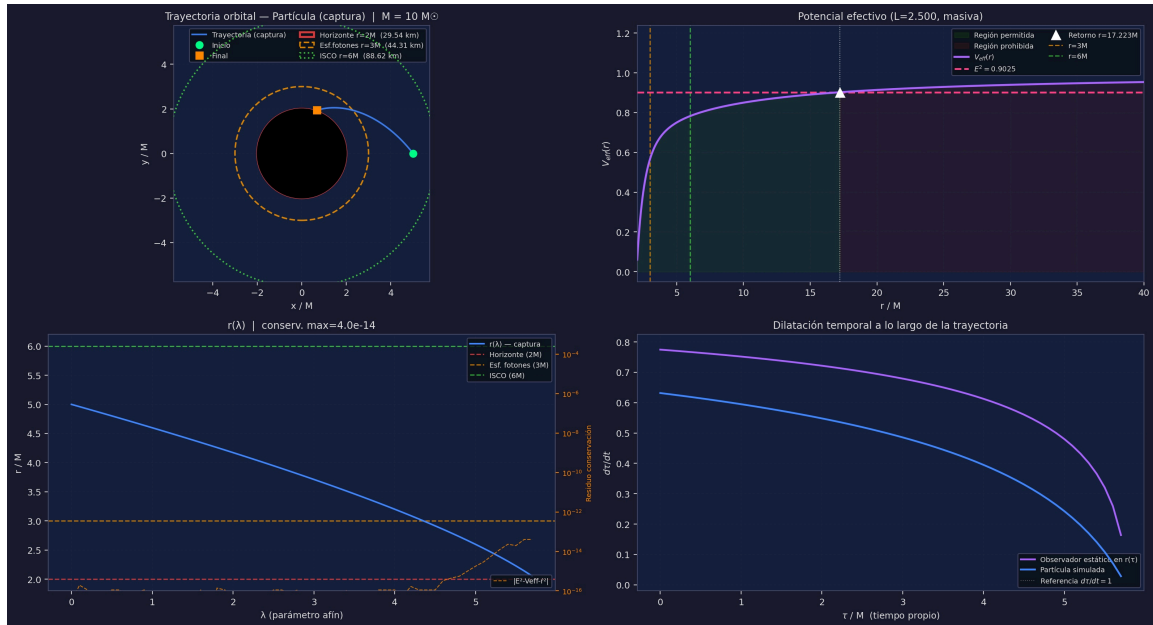
Además de las órbitas ligadas y de las configuraciones circulares estudiadas anteriormente, el potencial efectivo para partículas masivas permite la existencia de trayectorias de captura gravitatoria. Estas situaciones aparecen cuando las condiciones iniciales de la partícula no permiten la existencia de un punto de retorno que actúe como barrera frente a la caída hacia regiones cada vez más próximas al agujero negro.

La simulación mostrada en la Figura 8 corresponde a una partícula masiva con energía específica $E = 0.950$ y momento angular específico $L = 2.500$, situada inicialmente en $r_0 = 5 M$.

En este caso, los parámetros se han seleccionado para representar un régimen de captura identificado a partir del potencial efectivo masivo. Como $E < 1$, la partícula no representa un objeto incidente desde el infinito, ya que la región asintótica no es accesible para ese valor de la energía. En su lugar, se considera una condición inicial localizada en la región exterior cercana al agujero negro, con $r_0 = 5 M$ y movimiento radial dirigido hacia el interior.

Al comparar E^2 con $V_{\text{eff}}(r)$ mediante la condición de movimiento permitido de la Ecuación 68, se observa que existe un punto de retorno exterior que delimita la región radial accesible. Sin embargo, dicho punto queda a radios mayores que la posición inicial y no actúa como barrera frente a la caída. Entre r_0 y el horizonte no aparece ningún punto de retorno capaz de invertir el movimiento radial, por lo que la partícula evoluciona hacia radios progresivamente menores.

Figura 8. Trayectoria de captura gravitatoria para una partícula masiva en el espacio-tiempo de Schwarzschild.



La Figura 8 muestra una trayectoria abierta que termina en las proximidades del horizonte. A diferencia de los casos analizados anteriormente, la partícula no permanece confinada entre dos puntos de retorno ni describe órbitas estables alrededor del agujero negro. Por el contrario, la coordenada radial disminuye de forma continua hasta alcanzar valores muy próximos al horizonte de sucesos situado en $r = 2M$.

Este comportamiento puede observarse con claridad en la evolución radial representada en la parte inferior izquierda de la figura. El radio decrece monótonamente desde $r_{\text{max}} = 5M$ hasta alcanzar valores próximos a $r_{\text{min}} = 2.055M$, sin que aparezcan oscilaciones ni puntos de retorno intermedios a lo largo de la trayectoria integrada. La ausencia de un punto de retorno interior entre la posición inicial y el horizonte constituye una característica fundamental de esta trayectoria de captura.

La interpretación física de este resultado se obtiene directamente a partir del potencial efectivo. La gráfica superior derecha muestra que el nivel energético de la partícula no da lugar a una región ligada acotada entre dos puntos de retorno, como ocurría en las órbitas precesantes. Como consecuencia, una vez iniciada la caída, no existe ninguna barrera efectiva capaz de invertir el movimiento radial y producir un retorno hacia radios mayores.

La simulación proporciona así una representación directa del proceso de captura gravitatoria predicho por el análisis teórico. La ausencia de una órbita estable y de un punto de retorno interior que detenga la caída conduce a la evolución de la partícula hacia el agujero negro, reproduciendo el comportamiento esperado a partir de la estructura del potencial efectivo desarrollada en capítulos anteriores.

La comparación temporal adquiere especial relevancia en este caso, ya que la partícula se aproxima progresivamente al horizonte. Durante la caída, el factor correspondiente al observador estático disminuye desde valores próximos a 0.775 hasta aproximadamente 0.164, reflejando el aumento de la dilatación temporal gravitatoria al reducirse el radio. El factor propio de la partícula simulada disminuye todavía más, desde aproximadamente 0.632 hasta 0.028, debido a la combinación entre el campo gravitatorio intenso y el movimiento de caída. Como consecuencia, el cociente integrado entre tiempo propio y tiempo coordinado resulta $\frac{\tau}{t} \approx 0.338$, mostrando la fuerte separación entre ambos tiempos en una trayectoria de captura.

Por último, el residuo máximo asociado a la conservación de la ecuación radial efectiva es del orden de $4.0 \cdot 10^{-14}$, indicando una conservación numérica excelente durante toda la integración. La concordancia entre la trayectoria obtenida, la evolución radial observada y las predicciones derivadas del potencial efectivo constituye una nueva comprobación de consistencia de la implementación numérica desarrollada en este trabajo.

10.6. Esfera de fotones

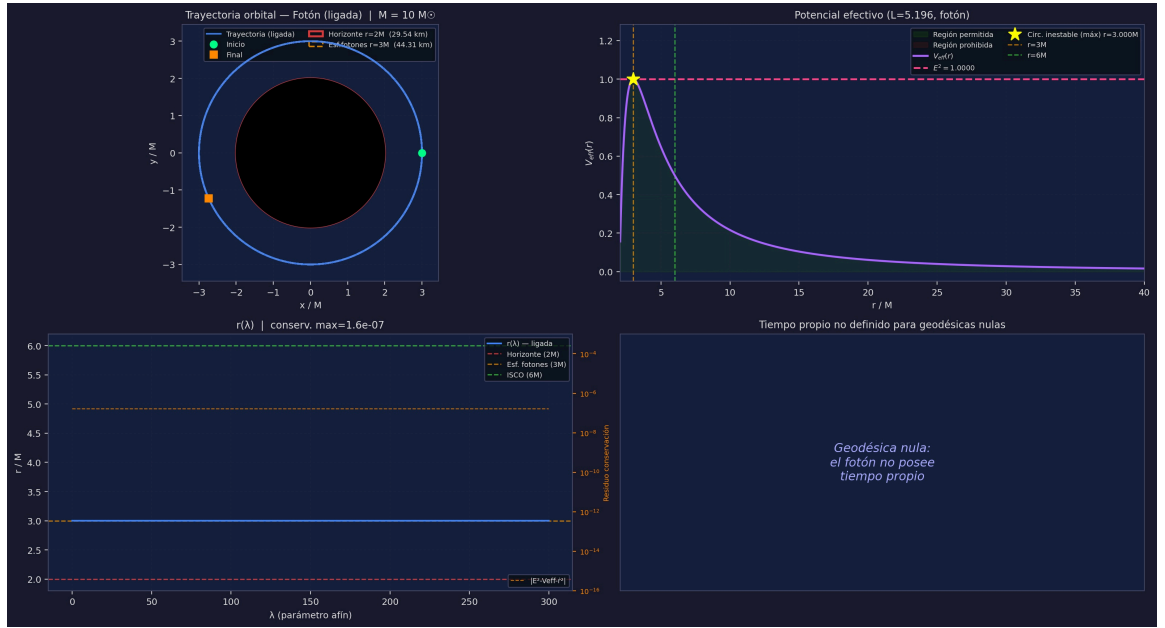
Entre las soluciones más características de las geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild destaca la denominada esfera de fotones. Como se dedujo en el análisis del potencial efectivo para fotones, existe una órbita circular situada en $r = 3M$, que constituye la única órbita circular posible para la luz en esta geometría. Sin embargo, a diferencia de las órbitas circulares estables estudiadas para partículas masivas, esta configuración corresponde a un máximo del potencial efectivo y, por tanto, es intrínsecamente inestable.

La simulación mostrada en la Figura 9 reproduce precisamente esta situación crítica. El fotón se sitúa inicialmente en $r_0 = 3M$, con constante de energía $E = 1$ y momento angular

conservado $L = 5.196\,152\,M$. En geodésicas nulas, la elección $E = 1$ corresponde a una normalización convencional del parámetro afín y no supone una restricción física, ya que la trayectoria queda determinada por el cociente $b = \frac{L}{E}$.

La elección de estos valores procede directamente de la condición de órbita circular nula. Como se dedujo en la Ecuación 109, la única órbita circular posible para geodésicas nulas se encuentra en $r = 3\,M$. Además, el parámetro de impacto crítico viene dado por la Ecuación 150, es decir, $b_c = 3\sqrt{3}M \approx 5.196\,152\,M$. Al haberse fijado $E = 1$, el valor de L coincide numéricamente con b_c , de modo que tomar $L = 5.196\,152\,M$ reproduce directamente la configuración crítica asociada a la esfera de fotones.

Figura 9. Órbita circular nula correspondiente a la esfera de fotones en el espacio-tiempo de Schwarzschild.



La Figura 9 muestra una trayectoria circular de radio constante situada exactamente en $r = 3\,M$. La evolución radial confirma este comportamiento, obteniéndose $r_{\min} = r_{\max} = 3\,M$ durante toda la integración numérica.

En esta simulación, el panel temporal no muestra un factor propio asociado al fotón, ya que las geodésicas nulas no poseen tiempo propio. La trayectoria luminosa satisface $d\tau = 0$, por lo que no existe un reloj que pueda acompañar al fotón a lo largo de su movimiento. Por este motivo, la herramienta indica explícitamente que el tiempo propio no está definido

para geodésicas nulas, manteniendo la referencia estática de dilatación temporal separada en su módulo independiente.

La interpretación física de esta configuración se obtiene directamente a partir de la gráfica del potencial efectivo. Tal como se predijo analíticamente, la órbita se localiza en un máximo de $V_{\text{eff}}(r)$, marcado en la figura mediante la posición correspondiente a la órbita circular inestable. Esta característica distingue de forma fundamental la esfera de fotones de las órbitas circulares estables estudiadas para partículas masivas.

La naturaleza inestable de esta órbita implica que cualquier perturbación, por pequeña que sea, modifica cualitativamente la evolución posterior del fotón. Una ligera disminución del parámetro de impacto conduce a trayectorias de captura, mientras que un ligero aumento permite que el fotón escape hacia regiones alejadas. Por este motivo, la esfera de fotones actúa como frontera dinámica entre ambos comportamientos y desempeña un papel fundamental en la estructura global de las geodésicas nulas.

La simulación proporciona así una verificación directa de uno de los resultados analíticos más importantes obtenidos para las geodésicas nulas. La coincidencia exacta entre el radio predicho teóricamente y el radio obtenido numéricamente constituye una comprobación adicional de la consistencia de la implementación desarrollada.

Además, la esfera de fotones posee una relevancia física que trasciende el estudio puramente geométrico de las geodésicas. Las trayectorias luminosas próximas a esta región están estrechamente relacionadas con la formación de sombras de agujeros negros y con la aparición de fotones fuertemente desviados observados en las proximidades de objetos compactos. Aunque la herramienta desarrollada no pretende reproducir imágenes astrofísicas realistas, sí permite visualizar de forma directa la estructura geométrica responsable de dichos fenómenos.

Por último, el residuo máximo asociado a la conservación de la ecuación radial efectiva es del orden de $1.6 \cdot 10^{-7}$, indicando que la integración mantiene una precisión adecuada durante toda la simulación. En conjunto, este resultado confirma la existencia de la órbita circular nula en $r = 3M$ y reproduce correctamente la estructura crítica predicha por el análisis del potencial efectivo para fotones.

10.7. Trayectorias próximas al parámetro de impacto crítico

El análisis del potencial efectivo para geodésicas nulas mostró que existe un valor crítico del parámetro de impacto, $b_c = 3\sqrt{3}M$, que separa las trayectorias de captura de aquellas que consiguen escapar al infinito. Este resultado constituye una consecuencia directa de la existencia de la esfera de fotones en $r = 3M$ y representa una de las estructuras dinámicas más importantes del movimiento de la luz en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

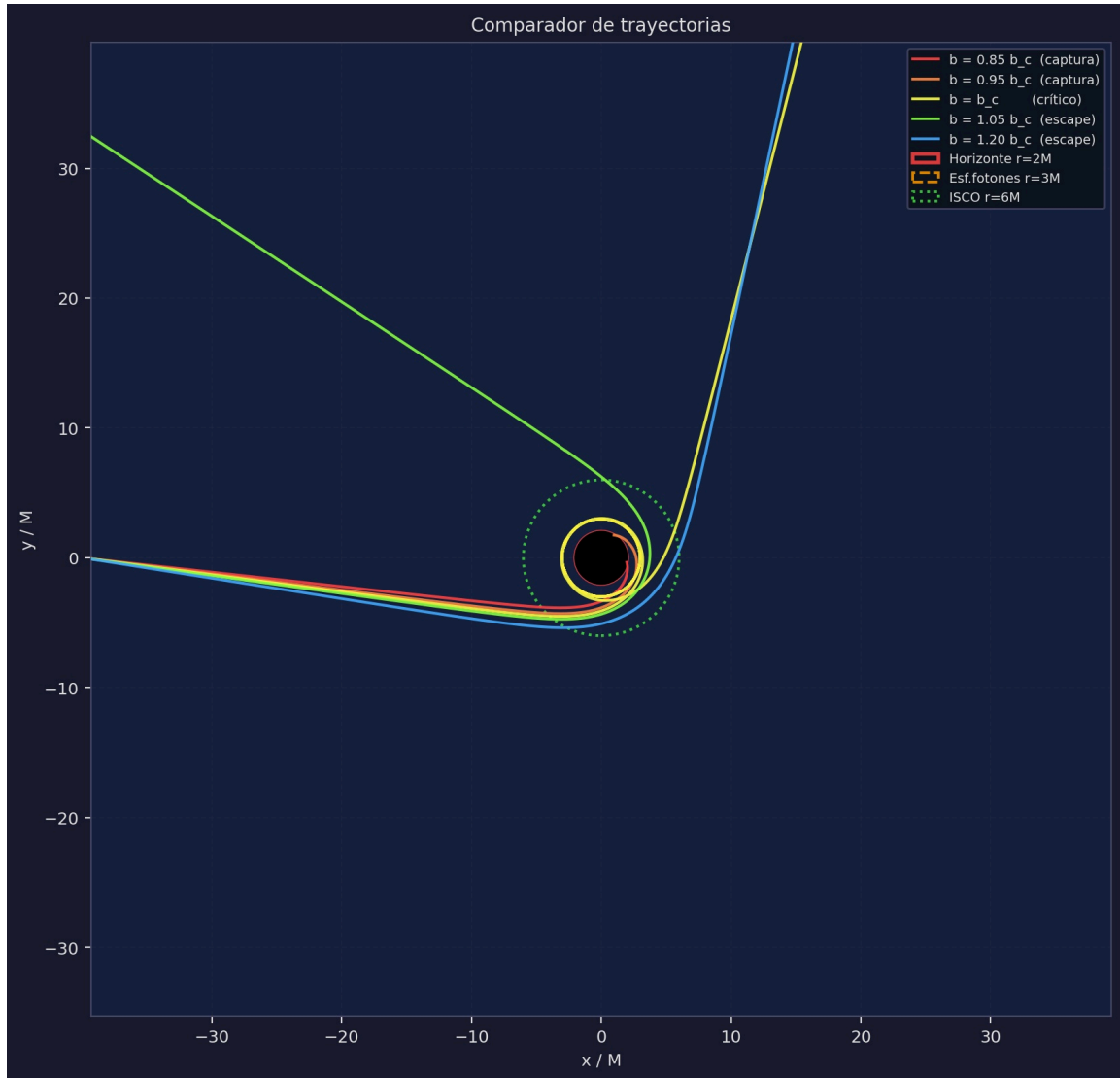
Con el fin de visualizar este comportamiento, se ha utilizado el comparador de trayectorias para representar simultáneamente varias geodésicas nulas con valores del parámetro de impacto situados a ambos lados del umbral crítico.

Los valores seleccionados para este comparador se han construido a partir del parámetro de impacto crítico deducido en la Ecuación 150. Como el parámetro de impacto se define mediante $b = \frac{L}{E}$ en la Ecuación 142, y en estas simulaciones se toma $E = 1$, variar L equivale a variar directamente b . Los casos $0.85b_c$ y $0.95b_c$ quedan por debajo del umbral crítico y, por tanto, deben conducir a captura. El caso $b = b_c$ representa la trayectoria crítica asociada a la esfera de fotones, mientras que los valores $1.05b_c$ y $1.20b_c$ quedan por encima del umbral y deben producir trayectorias de escape o dispersión. De este modo, el preset permite comprobar visualmente la frontera dinámica entre captura y dispersión predicha por el análisis teórico.

Esta figura procede del módulo comparador de trayectorias de la herramienta y muestra, en una única representación, varias geodésicas nulas con distintos valores del parámetro de impacto. Su objetivo es visualizar de forma directa cómo cambia el comportamiento orbital al variar b , mostrando la transición entre captura, comportamiento crítico y dispersión.

Al tratarse de geodésicas nulas, estas trayectorias no poseen tiempo propio asociado. En consecuencia, la interpretación física debe realizarse a partir de la geometría de las trayectorias y de su comparación con el parámetro de impacto crítico, sin atribuir a los fotones una magnitud temporal propia.

Figura 10. Comparación de trayectorias luminosas para distintos valores del parámetro de impacto en las proximidades del valor crítico $b_c = 3\sqrt{3}M$.



La Figura 10 muestra de forma simultánea cinco trayectorias correspondientes a los valores $0.85b_c$, $0.95b_c$, b_c , $1.05b_c$ y $1.20b_c$. Todas ellas parten desde el mismo radio inicial y difieren únicamente en el valor del parámetro de impacto. Esta representación permite visualizar de forma inmediata la transición entre los distintos regímenes dinámicos predichos por el análisis teórico.

Las trayectorias correspondientes a $0.85b_c$ y $0.95b_c$ terminan siendo capturadas por el agujero negro. Aunque inicialmente experimentan una desviación gravitatoria significativa, la influencia de la curvatura del espacio-tiempo resulta suficiente para impedir su escape y conducir las finalmente hacia el horizonte de sucesos.

Por el contrario, las trayectorias asociadas a $1.05b_c$ y $1.20b_c$ sobreviven al encuentro gravitatorio y consiguen escapar nuevamente hacia regiones alejadas. En estos casos la luz experimenta una desviación apreciable, pero no alcanza la región de captura asociada a la esfera de fotones.

Especial interés presenta la trayectoria correspondiente a $b = b_c$. Como se dedujo analíticamente en la Sección 7.6, este valor constituye la frontera entre captura y escape. La trayectoria crítica permanece durante un tiempo prolongado en las proximidades de la esfera de fotones, describiendo varias vueltas alrededor del agujero negro antes de abandonar finalmente la región central. Este comportamiento refleja la naturaleza inestable de la órbita nula situada en $r = 3M$ y pone de manifiesto la sensibilidad extrema del sistema frente a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales.

La comparación simultánea de todas las trayectorias permite visualizar de forma directa el significado físico del parámetro de impacto crítico. Variaciones relativamente pequeñas de b alrededor de b_c producen cambios cualitativos en la evolución de la geodésica, transformando trayectorias capturadas en trayectorias de escape. Este comportamiento constituye una manifestación directa de la estructura del potencial efectivo para fotones y de la influencia ejercida por la esfera de fotones sobre la propagación de la luz.

La concordancia entre los resultados observados y las predicciones obtenidas mediante el análisis del potencial efectivo proporciona una validación adicional de la implementación numérica desarrollada. En particular, la simulación reproduce correctamente el valor crítico $b_c = 3\sqrt{3}M \approx 5.196\,152\,M$, así como la transición entre los regímenes de captura y dispersión asociados a dicho umbral.

10.8. Casos adicionales de simulación: partículas masivas

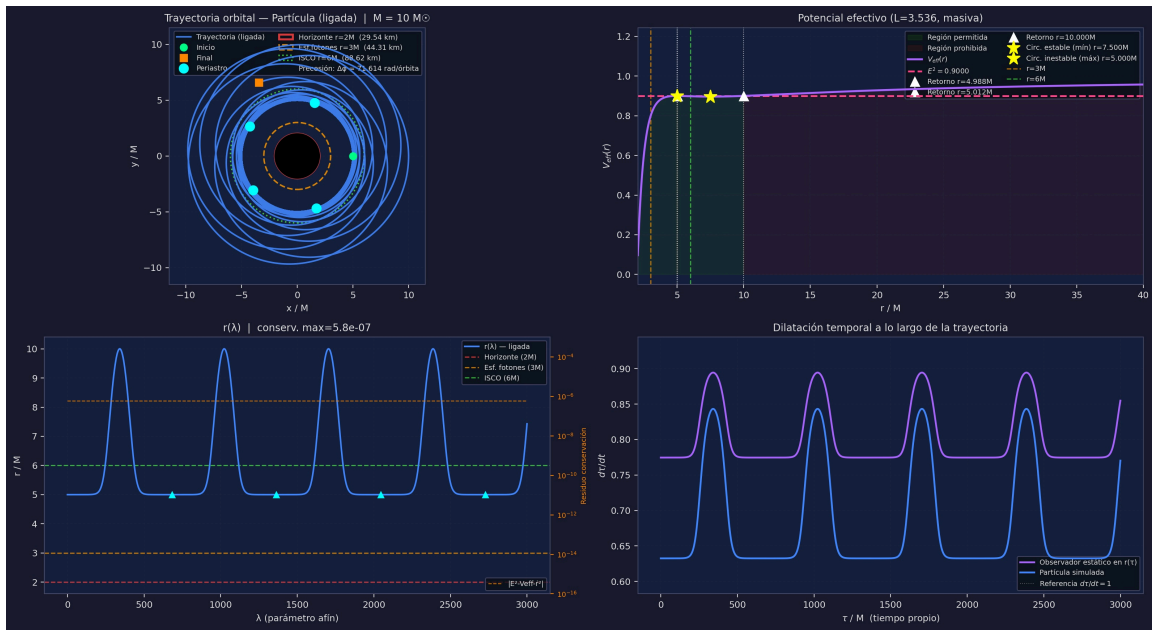
Este apartado reúne simulaciones de partículas masivas en regímenes dinámicos adicionales a los casos tratados inicialmente. Su finalidad es ampliar la comprobación de la herramienta frente a situaciones previstas por el potencial efectivo masivo, como órbitas circulares inestables, trayectorias de escape y validación en régimen de campo débil.

10.8.1. Trayectoria perturbada próxima a la órbita circular inestable en $r = 5 M$

Las órbitas circulares situadas entre la esfera de fotones ($r = 3 M$) y la ISCO ($r = 6 M$) constituyen soluciones matemáticamente válidas de las ecuaciones geodésicas para partículas masivas, pero presentan un carácter dinámicamente inestable. Tal como se dedujo en el análisis del potencial efectivo, estas configuraciones se corresponden con máximos locales de $V_{\text{eff}}(r)$, por lo que pequeñas perturbaciones pueden provocar desviaciones significativas respecto de la órbita circular ideal.

La simulación mostrada en la Figura 11 corresponde a una configuración próxima a la órbita circular inestable situada en $r = 5 M$.

Figura 11. Comportamiento de una partícula masiva en las proximidades de la órbita circular inestable situada en $r = 5 M$.



La Figura 11 muestra cómo la trayectoria permanece inicialmente próxima al radio crítico, pero acaba desarrollando oscilaciones radiales de gran amplitud. Este comportamiento constituye una manifestación directa de la inestabilidad asociada al máximo del potencial efectivo. A diferencia de las órbitas circulares estables estudiadas en el capítulo principal, pequeñas desviaciones respecto del radio de equilibrio no son corregidas por la dinámica del sistema, sino que tienden a amplificarse progresivamente.

Debe señalarse que la órbita circular inestable propiamente dicha corresponde a una configuración de radio constante situada en $r = 5 M$. La trayectoria simulada no permanece exactamente en esa configuración circular, sino que representa una perturbación de dicha órbita, por lo que desarrolla una oscilación radial de gran amplitud entre radios próximos a $r = 5 M$ y $r = 10 M$.

La evolución temporal del radio permite observar con claridad este fenómeno. La partícula permanece durante intervalos prolongados cerca de $r = 5 M$, pero periódicamente se aleja hasta alcanzar radios próximos a $r = 10 M$ antes de regresar nuevamente hacia la región central. Este comportamiento refleja la sensibilidad característica de las órbitas asociadas a máximos del potencial efectivo.

La gráfica del potencial efectivo confirma esta interpretación. La trayectoria se sitúa en las proximidades del máximo localizado en $r = 5 M$, precisamente la condición identificada analíticamente como criterio de inestabilidad orbital. La simulación proporciona así una representación visual directa del resultado teórico obtenido previamente.

Desde el punto de vista físico, este ejemplo resulta especialmente útil para ilustrar la diferencia entre existencia y estabilidad de una órbita. Aunque la solución circular existe matemáticamente, cualquier perturbación suficientemente pequeña provoca que la partícula abandone la configuración de equilibrio. Este comportamiento contrasta con el observado para órbitas situadas por encima de la ISCO, donde las perturbaciones generan únicamente pequeñas oscilaciones alrededor del radio de equilibrio.

El residuo máximo de conservación obtenido durante la integración permanece del orden de 10^{-7} , compatible con la precisión observada en el resto de simulaciones y suficiente para garantizar que el comportamiento mostrado corresponde a un efecto físico asociado a la estructura del potencial efectivo y no a un artefacto numérico.

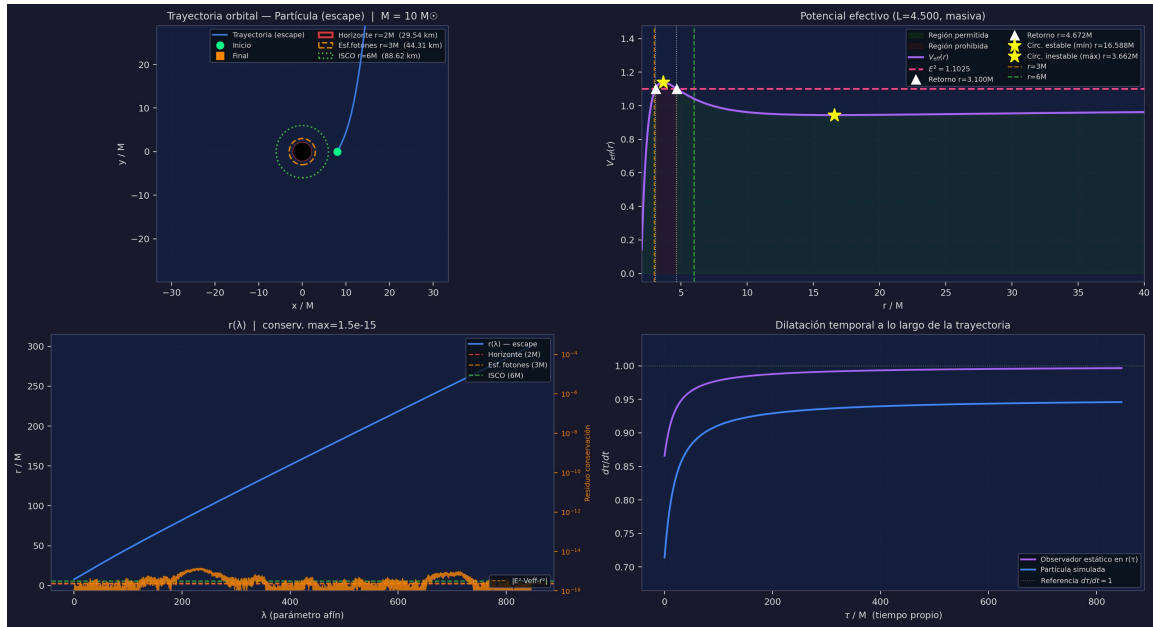
10.8.2. Trayectoria de escape relativista

Además de las trayectorias ligadas y de captura estudiadas en el cuerpo principal del trabajo, la geometría de Schwarzschild permite la existencia de trayectorias de escape en las que una partícula masiva consigue abandonar indefinidamente la región gravitatoria del

agujero negro. Este comportamiento aparece cuando la energía específica de la partícula supera el umbral necesario para alcanzar regiones arbitrariamente alejadas del objeto central.

La simulación mostrada en la Figura 12 corresponde a una partícula masiva con energía específica $E = 1.05$, momento angular específico $L = 4.5$ y radio inicial $r_0 = 8 M$. Estas condiciones iniciales sitúan a la partícula en un régimen dinámico dominado por el escape, permitiéndole alejarse progresivamente del agujero negro.

Figura 12. Trayectoria de escape para una partícula masiva con energía específica superior a la energía de reposo.



La Figura 12 muestra cómo la partícula abandona rápidamente la región central y continúa alejándose sin presentar nuevos puntos de retorno. A diferencia de las órbitas ligadas analizadas anteriormente, el movimiento radial no queda confinado entre dos radios extremos, sino que evoluciona hacia valores cada vez mayores de r .

Este comportamiento puede interpretarse directamente a partir de la gráfica del potencial efectivo. La línea correspondiente a E^2 se sitúa por encima del valor asintótico del potencial para radios grandes. Como consecuencia, la ecuación radial efectiva admite movimiento incluso para radios arbitrariamente grandes, permitiendo que la partícula alcance regiones muy alejadas del agujero negro. Esta situación contrasta con la observada en las órbitas ligadas, donde la existencia de puntos de retorno impide el escape.

La evolución radial confirma esta interpretación. El radio aumenta de forma aproximadamente monótona a lo largo de la integración numérica, alcanzando valores próximos a 300 M sin mostrar indicios de retorno hacia la región central. Los resultados exportados indican un valor máximo de $r_{\max} \approx 300 M$, limitado únicamente por el criterio de parada de la simulación y no por restricciones dinámicas del movimiento.

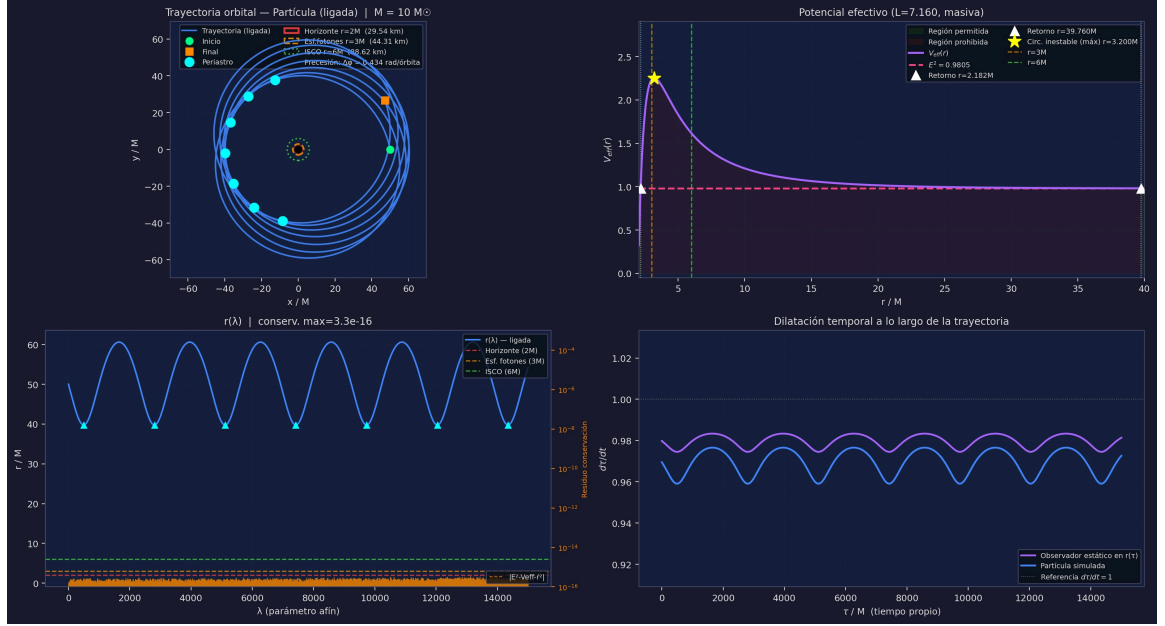
Desde el punto de vista físico, este ejemplo ilustra la transición entre movimientos ligados y movimientos no ligados en la geometría de Schwarzschild. Mientras que las trayectorias ligadas permanecen confinadas por la estructura del potencial efectivo, las trayectorias de escape poseen energía suficiente para superar la influencia gravitatoria del agujero negro y propagarse indefinidamente hacia regiones exteriores.

Por último, la conservación de la ecuación radial efectiva presenta un residuo máximo del orden de 10^{-15} durante toda la integración numérica, lo que indica una excelente estabilidad del procedimiento empleado y proporciona una validación adicional de los resultados obtenidos.

10.8.3. Validación en régimen de campo débil

Como caso adicional de partícula masiva, se incluye una simulación de una órbita ligada en régimen de campo débil. A diferencia de las trayectorias próximas a la ISCO, en esta configuración la partícula se mantiene a radios alejados del agujero negro, con valores comprendidos aproximadamente entre $r_{\min} = 39.76 M$ y $r_{\max} = 60.6 M$. En este régimen, las correcciones relativistas son más pequeñas y la precesión del periastro puede compararse con la aproximación analítica de primer orden.

Figura 13. Panel completo correspondiente a la validación de la precesión relativista en régimen de campo débil.



La Figura 13 muestra el panel completo exportado por la herramienta para este caso de validación. La simulación proporciona una precesión numérica de aproximadamente 0.434 rad por órbita, frente al valor analítico de campo débil $6\frac{\pi}{p} \approx 0.393$ rad por órbita, donde p representa el semilatus rectum de la órbita ligada. La discrepancia relativa, del orden del 10.5%, es coherente con el carácter aproximado de la expresión de primer orden, que no incluye correcciones relativistas de orden superior.

Además, el residuo máximo de conservación de la ecuación radial efectiva es del orden de $3.3 \cdot 10^{-16}$, lo que confirma la excelente estabilidad numérica de la integración en este caso.

10.9. Casos adicionales de simulación: fotones

Este apartado reúne simulaciones de geodésicas nulas en regímenes de captura y dispersión. Su finalidad es mostrar de forma aislada cómo el parámetro de impacto determina el comportamiento de las trayectorias luminosas en relación con el valor crítico $b_c = 3\sqrt{3}M$.

Al tratarse de geodésicas nulas, no se define un tiempo propio asociado al fotón. Por ello, aunque la herramienta permite analizar la trayectoria, el potencial efectivo y, cuando

procede, el ángulo de deflexión, los diagnósticos temporales indican que la dilatación temporal propia no es aplicable para estas trayectorias.

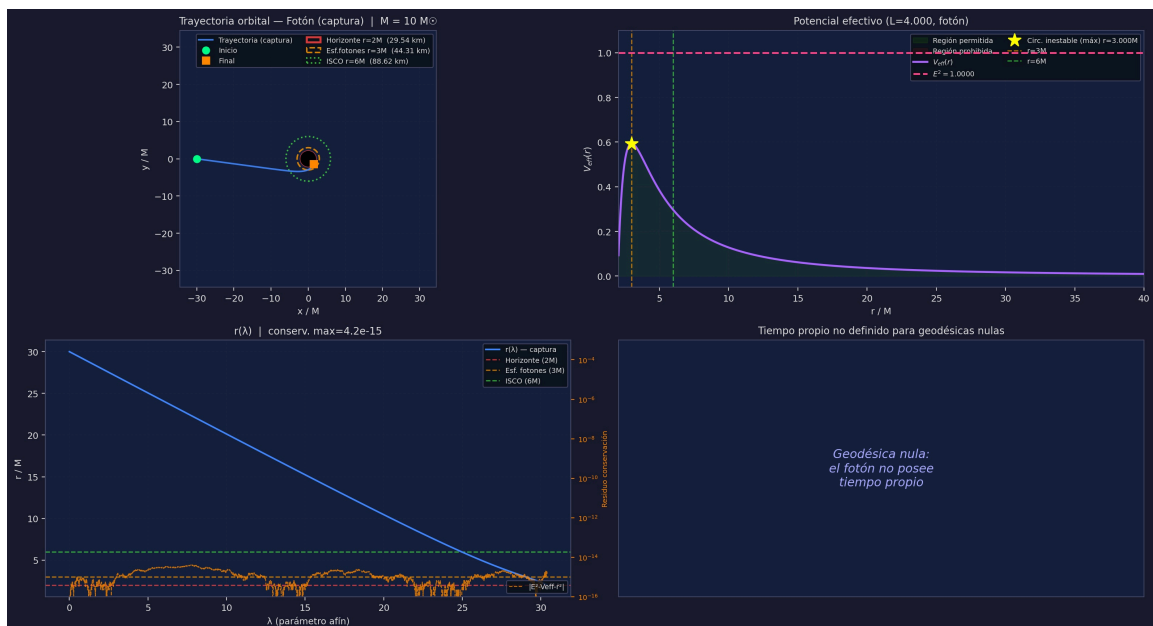
Las configuraciones consideradas se han escogido variando el parámetro de impacto $b = \frac{L}{E}$. De este modo, se presentan dos ejemplos representativos: una trayectoria de captura para un valor subcrítico de b y una trayectoria de dispersión para un valor superior al umbral crítico.

10.9.1. Captura de fotones

La captura de fotones constituye uno de los comportamientos fundamentales de las geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Este régimen aparece cuando el parámetro de impacto del fotón es inferior al valor crítico $b_c = 3\sqrt{3}M$, de modo que la trayectoria no dispone de un punto de retorno exterior capaz de evitar la caída hacia el agujero negro.

La simulación mostrada en la Figura 14 corresponde a un fotón con energía $E = 1$, momento angular $L = 4$ y radio inicial $r_0 = 30 M$. En este caso, el parámetro de impacto viene dado por $b = \frac{L}{E} = 4 M$, valor inferior al parámetro crítico, por lo que la trayectoria queda clasificada como captura.

Figura 14. Trayectoria de captura de un fotón con parámetro de impacto inferior al valor crítico.



La Figura 14 muestra cómo el fotón parte desde una región alejada, se aproxima al agujero negro y termina atravesando la región próxima al horizonte. La evolución radial confirma este comportamiento: el radio decrece desde $r_0 = 30 M$ hasta alcanzar un valor mínimo próximo a $r_{\min} = 2.009 M$, muy cercano al horizonte de sucesos situado en $r = 2 M$.

La interpretación física se obtiene directamente a partir del potencial efectivo nulo. Al ser $b < b_c$, el fotón no encuentra una barrera efectiva suficiente para producir una trayectoria de dispersión. Por tanto, una vez que se aproxima a la región central, la curvatura del espacio-tiempo conduce inevitablemente a la captura.

Este caso complementa el análisis principal del parámetro de impacto crítico. Mientras que en el cuerpo del trabajo se estudió la transición entre captura y escape mediante varias trayectorias próximas a b_c , aquí se muestra de forma aislada un ejemplo claro de captura para un valor subcrítico del parámetro de impacto.

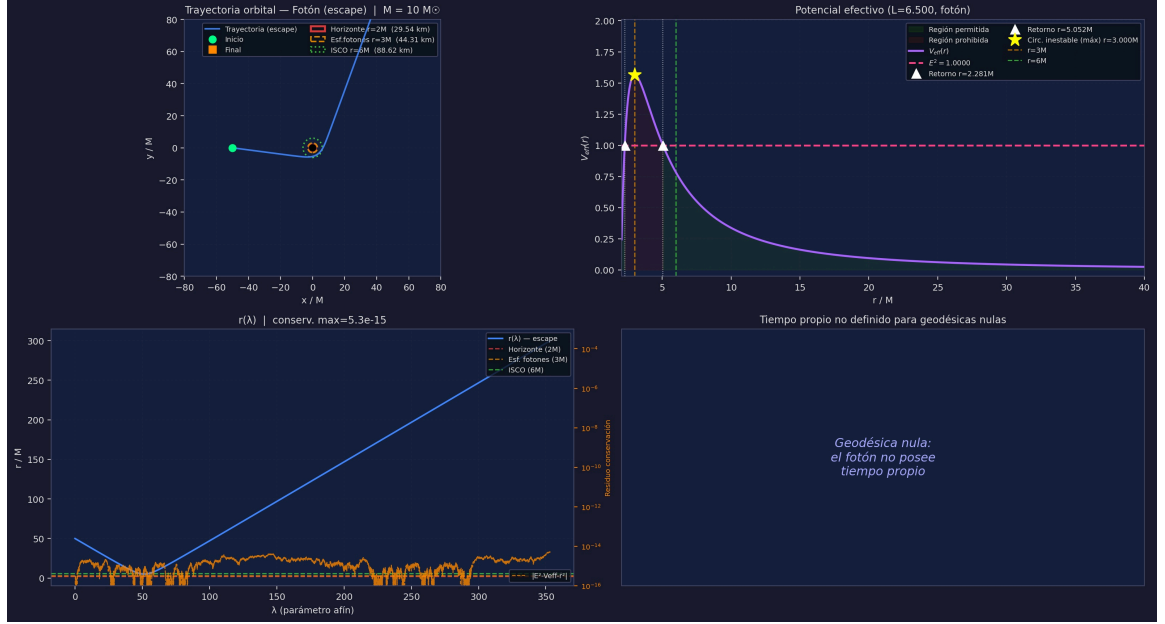
Por último, el residuo máximo de conservación de la ecuación radial efectiva es del orden de $4.2 \cdot 10^{-15}$, lo que indica una excelente precisión numérica durante la integración.

10.9.2. Dispersión gravitatoria de fotones

La dispersión gravitatoria constituye el comportamiento complementario a la captura para las geodésicas nulas. Este régimen aparece cuando el parámetro de impacto del fotón supera el valor crítico $b_c = 3\sqrt{3}M$, permitiendo que la trayectoria experimente una desviación significativa al atravesar la región de campo gravitatorio intenso y posteriormente vuelva a alejarse hacia el infinito.

La simulación mostrada en la Figura 15 corresponde a un fotón con energía $E = 1$, momento angular $L = 6.5$ y radio inicial $r_0 = 50 M$. En este caso, el parámetro de impacto viene dado por $b = \frac{L}{E} = 6.5 M$, valor claramente superior al umbral crítico, por lo que la trayectoria pertenece al régimen de dispersión.

Figura 15. *Dispersión gravitatoria de un fotón con parámetro de impacto superior al valor crítico.*



La Figura 15 muestra cómo el fotón parte desde una región alejada, se aproxima al agujero negro y experimenta una desviación gravitatoria apreciable antes de escapar nuevamente hacia radios cada vez mayores. A diferencia de la captura estudiada en el apartado anterior, la trayectoria no alcanza la región próxima al horizonte de sucesos y consigue abandonar el entorno gravitatorio tras superar el punto de máximo acercamiento.

La evolución radial confirma este comportamiento. El radio disminuye inicialmente desde $r_0 = 50 M$ hasta alcanzar un mínimo de aproximadamente $r_{\min} = 5.05 M$, tras lo cual vuelve a crecer de forma monótona. La existencia de este punto de retorno constituye precisamente la característica que distingue las trayectorias de dispersión de aquellas asociadas al régimen de captura.

Con el fin de cuantificar la desviación observada, se calculó el ángulo de deflexión gravitatoria mediante la Ecuación 156. Para esta simulación se obtuvo un cambio angular total:

$$|\Delta\varphi| = 4.340885 \text{ rad}, \quad (171)$$

lo que conduce a:

$$\alpha = |\Delta\varphi| - \pi = 1.199292 \text{ rad} = 68.7144^\circ. \quad (172)$$

La Tabla 7 resume las magnitudes principales asociadas a esta trayectoria de dispersión.

Tabla 7. *Magnitudes cuantitativas obtenidas para la dispersión gravitatoria de un fotón con $b = 6.5M$.*

Magnitud	Valor
E	1.000000
L	6.500000
$b = \frac{L}{E}$	6.5 M
$r_{\min}$	5.052 244 M
$ \Delta\varphi $	4.340 885 rad
α	1.199 292 rad = 68.7144°
$\alpha_{\text{WF}} = 4\frac{M}{b}$	0.615 385 rad = 35.2589°
Residuo máximo	$4.663 \cdot 10^{-15}$

La comparación con la aproximación de campo débil dada por la Ecuación 157 muestra que:

$$\alpha_{\text{WF}} = 0.615\,385\,\text{rad} = 35.2589^\circ, \quad (173)$$

valor claramente inferior al obtenido mediante la integración numérica. Esta diferencia es esperable, ya que la trayectoria simulada alcanza un radio mínimo $r_{\min} \approx 5.05\,M$, por lo que el fotón atraviesa una región de campo gravitatorio fuerte. En consecuencia, la expresión de campo débil subestima la deflexión real y resulta necesario integrar numéricamente la geodésica para obtener una estimación adecuada del ángulo de dispersión.

La interpretación física puede obtenerse directamente a partir del potencial efectivo nulo. En este caso, la energía del fotón resulta insuficiente para atravesar la barrera efectiva asociada al máximo localizado en la esfera de fotones. Como consecuencia, el movimiento radial se invierte en el punto de retorno y la trayectoria vuelve a dirigirse hacia regiones alejadas del agujero negro.

Este fenómeno constituye una manifestación directa de la curvatura del espacio-tiempo y representa uno de los ejemplos más intuitivos de desviación gravitatoria de la luz. Aunque la simulación no pretende reproducir observaciones astrofísicas reales, sí permite visualizar con claridad el mecanismo geométrico responsable de la deflexión de trayectorias luminosas en presencia de un campo gravitatorio intenso.

Por último, la conservación de la ecuación radial efectiva presenta un residuo máximo del orden de 10^{-15} durante toda la integración, lo que confirma la excelente estabilidad numérica de la simulación y la consistencia de los resultados obtenidos.

10.10. Conclusiones de las simulaciones

Las simulaciones desarrolladas en este capítulo han permitido visualizar de forma directa los principales regímenes dinámicos del movimiento geodésico en el espacio-tiempo de Schwarzschild. En todos los casos, las trayectorias obtenidas mediante integración numérica muestran una concordancia clara con las predicciones analíticas derivadas del potencial efectivo, las condiciones de circularidad y los radios críticos estudiados previamente.

Para partículas masivas, la herramienta reproduce correctamente la existencia de órbitas circulares estables para radios superiores a la ISCO, así como la configuración crítica situada en $r = 6M$. También permite visualizar órbitas ligadas con precesión relativista, trayectorias de captura, configuraciones circulares inestables, trayectorias de escape y casos de validación en régimen de campo débil. En conjunto, estos ejemplos muestran de forma directa la relación entre los puntos de retorno, la estructura del potencial efectivo y el comportamiento orbital resultante.

En el caso de las geodésicas nulas, las simulaciones confirman la existencia de la esfera de fotones en $r = 3M$ y su carácter inestable. Asimismo, la comparación de trayectorias próximas al parámetro de impacto crítico $b_c = 3\sqrt{3}M$, junto con los casos de captura y dispersión gravitatoria de fotones, permite visualizar la transición entre los distintos comportamientos posibles de la luz en regiones próximas al agujero negro.

De forma global, las simulaciones reproducen correctamente los radios característicos, los puntos de retorno y los distintos regímenes de movimiento previstos por el análisis teórico. Además, los residuos de conservación obtenidos durante las integraciones permanecen pequeños, lo que proporciona una comprobación adicional de la precisión numérica de la implementación desarrollada.

Como síntesis cuantitativa, la Tabla 8 recoge algunas de las magnitudes más representativas obtenidas mediante la herramienta. Estos valores permiten comparar directamente varios

de los escenarios estudiados y muestran la coherencia entre la integración numérica, la conservación de las constantes del movimiento y las predicciones analíticas del potencial efectivo.

Tabla 8. *Resumen cuantitativo de las simulaciones representativas.*

Simulación	Resultado cuantitativo principal	Residuo máximo
Órbita circular estable	$r_{\min} = 10 M$ $r_{\max} = 10.000\,005 M$	$\approx 2 \times 10^{-7}$
ISCO	$r_{\min} = 6 M$ $r_{\max} = 6.004\,903 M$	1.3×10^{-7}
Órbita ligada con precesión	$\Delta\varphi = 3.11$ rad por órbita	3.7×10^{-16}
Captura gravitatoria masiva	Captura hacia el horizonte ($r \rightarrow 2 M$)	4.0×10^{-14}
Esfera de fotones	$r = 3 M$ órbita nula circular inestable	1.6×10^{-7}
Trayectoria próxima a b_c	$b = 5.196\,672 M$ $r_{\min} = 3.024\,762 M$	8.9×10^{-15}

El análisis temporal incorporado en las simulaciones permite además distinguir entre la referencia estática de dilatación temporal gravitatoria y la relación temporal asociada a una partícula masiva en movimiento. En las geodésicas temporales, la comparación entre el factor del observador estático y el factor propio de la partícula muestra que la dilatación temporal depende tanto de la posición radial como del estado dinámico de la trayectoria. En cambio, en las geodésicas nulas no se representa un tiempo propio del fotón, ya que estas trayectorias satisfacen $d\tau = 0$. Esta distinción refuerza la coherencia física de la herramienta y evita confundir la referencia geométrica estática con la evolución temporal de una geodésica concreta.

En conjunto, el capítulo muestra que la herramienta desarrollada reproduce de forma consistente los principales fenómenos geodésicos del espacio-tiempo de Schwarzschild. La combinación de trayectoria orbital, potencial efectivo, evolución radial, magnitudes temporales y residuos de conservación permite interpretar cada simulación desde una perspectiva física y numérica, reforzando la conexión entre el desarrollo analítico y la visualización computacional.

11. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido estudiar el movimiento geodésico de partículas masivas y fotones en el espacio-tiempo de Schwarzschild mediante una combinación de desarrollo analítico y simulación numérica. A partir de la métrica de Schwarzschild se han deducido las constantes conservadas asociadas a las simetrías temporal y rotacional, así como la ecuación radial efectiva que permite describir la dinámica mediante un potencial efectivo.

El análisis del potencial efectivo ha permitido clasificar los principales regímenes de movimiento: órbitas circulares, trayectorias ligadas, captura, escape y dispersión. Esta formulación ha mostrado que fenómenos aparentemente distintos pueden entenderse a partir de una misma estructura matemática, determinada por la relación entre la energía, el momento angular y la geometría del espacio-tiempo.

Entre los resultados más relevantes se encuentran la obtención de la última órbita circular estable para partículas masivas, situada en $r = 6M$, la esfera de fotones en $r = 3M$ y el parámetro de impacto crítico $b_c = 3\sqrt{3}M$ para geodésicas nulas. Estos radios y escalas características no poseen equivalente directo en la dinámica newtoniana y constituyen manifestaciones claras de la curvatura relativista del espacio-tiempo.

El trabajo también ha permitido estudiar la relación entre tiempo propio y tiempo coordinado en la geometría de Schwarzschild. La dilatación temporal gravitatoria, junto con los efectos asociados al movimiento orbital, muestra que la curvatura no solo modifica la forma de las trayectorias, sino también la medida del tiempo para distintos observadores.

Como parte central del trabajo se ha desarrollado una herramienta propia de simulación numérica e interpretación visual. Esta herramienta integra las ecuaciones geodésicas redu-

cidas, representa trayectorias orbitales, potenciales efectivos, radios críticos y magnitudes temporales, y permite explorar de forma interactiva distintos regímenes dinámicos.

El código fuente de la herramienta desarrollada se encuentra disponible en el repositorio [GitHub del proyecto](#), con el fin de facilitar la consulta de la implementación, la reproducción de las simulaciones y su posible ampliación futura.

Asimismo, la herramienta desarrollada permite separar de forma explícita la referencia estática de dilatación temporal gravitatoria de la evolución temporal asociada a una geodésica concreta. En las partículas masivas, esta distinción permite comparar el factor temporal de un observador estático con el factor propio de la partícula en movimiento, mostrando que la relación entre tiempo propio y tiempo coordinado depende tanto de la posición radial como del estado dinámico de la trayectoria. En el caso de las geodésicas nulas, la herramienta mantiene la interpretación física correcta al indicar que los fotones no poseen tiempo propio asociado.

Las simulaciones obtenidas reproducen de forma coherente las predicciones analíticas desarrolladas previamente. En particular, permiten visualizar órbitas circulares estables, la ISCO, órbitas ligadas con precesión relativista, procesos de captura, la esfera de fotones y la transición entre captura y dispersión de geodésicas nulas. La concordancia entre los resultados numéricos y la estructura del potencial efectivo confirma la consistencia física de la implementación desarrollada.

Desde el punto de vista metodológico, la combinación de análisis matemático y simulación computacional ha resultado especialmente útil para interpretar fenómenos relativistas que no siempre son intuitivos a partir de las ecuaciones. La herramienta desarrollada no sustituye al tratamiento analítico, sino que lo complementa y permite visualizar de forma directa cómo la geometría de Schwarzschild condiciona la dinámica de partículas y fotones.

El alcance del trabajo se ha limitado a la solución de Schwarzschild, correspondiente a un objeto compacto estático, esféricamente simétrico, no cargado y sin rotación. Esta restricción ha permitido realizar un estudio completo y controlado del problema, aunque deja fuera efectos propios de agujeros negros rotantes, como el arrastre de referencia, la ergosfera o la diferencia entre órbitas prógradas y retrógradas.

Como líneas futuras, resultaría natural extender la herramienta al estudio de geodésicas en la métrica de Kerr, incorporar técnicas de trazado de rayos relativista y profundizar en fenómenos observacionales como la sombra de agujeros negros, la lente gravitatoria fuerte o la dinámica de discos de acreción. Estas extensiones permitirían conectar de forma más directa la formulación teórica con escenarios astrofísicos realistas.

En conjunto, el trabajo muestra cómo la geometría del espacio-tiempo determina de forma precisa el movimiento de partículas y fotones en Relatividad General. El caso de Schwarzschild proporciona un marco suficientemente simple para desarrollar el análisis de manera explícita, pero lo bastante rico como para revelar fenómenos fundamentales como la ISCO, la esfera de fotones, la captura gravitatoria, la precesión relativista y la dilatación temporal.

Anejo A: Exportaciones y datos numéricos

Ejemplo de archivo TXT exportado

La herramienta desarrollada permite exportar automáticamente la información relevante de cada simulación en formato de texto. Estos archivos recogen las condiciones físicas y numéricas empleadas durante la integración, así como varias magnitudes útiles para verificar la coherencia del resultado obtenido.

La Tabla 9 muestra un ejemplo representativo de la información exportada para una órbita circular estable.

Tabla 9. *Ejemplo representativo de la información exportada automáticamente por la herramienta.*

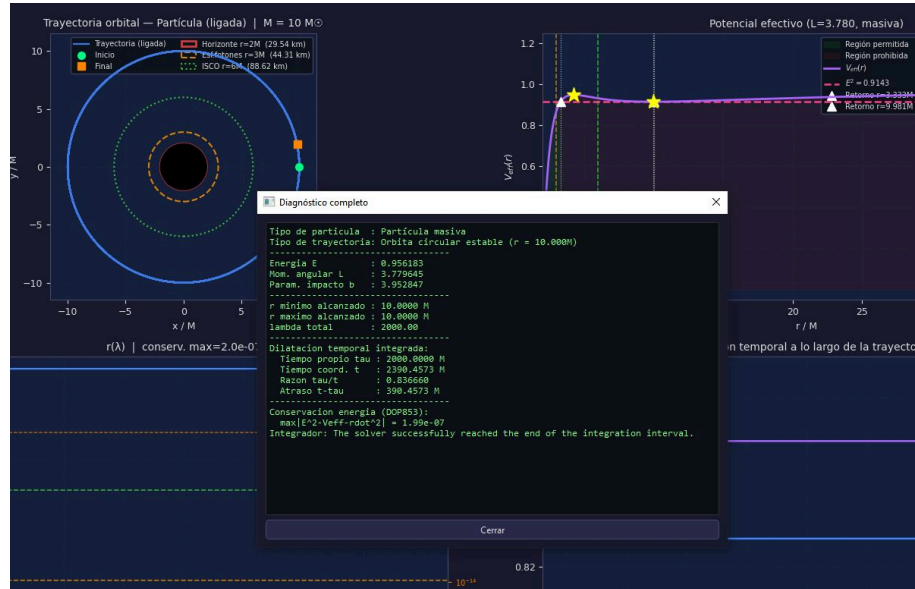
Parámetro	Valor
Tipo de trayectoria	Órbita circular estable
E	0.956183
L	3.779645
b	3.952847
$r_{\min}$	10 M
$r_{\max}$	10 M
τ	2000 M
t	2390.4573 M
Razón $\frac{\tau}{t}$	0.836660
Residuo máximo	$1.99 \cdot 10^{-7}$

Estos datos permiten documentar cada simulación de forma reproducible y comparar de manera directa distintas configuraciones físicas sin depender únicamente de las representaciones gráficas.

Diagnóstico completo de la simulación

Además de la exportación en formato TXT, la herramienta incorpora una ventana de diagnóstico completo accesible desde la interfaz principal. Esta funcionalidad resume el tipo de trayectoria, las constantes conservadas, los radios extremos alcanzados, las magnitudes temporales y los indicadores de conservación numérica.

Figura 16. Ventana de diagnóstico completo generada por la herramienta para una simulación de órbita circular estable.



La Figura 16 muestra un ejemplo correspondiente a una órbita circular estable. En ella se observa cómo la herramienta presenta de forma estructurada los parámetros físicos y numéricos de la simulación, facilitando la interpretación y validación del resultado.

Desde el punto de vista numérico, una de las magnitudes más importantes es el residuo asociado a la ecuación radial efectiva:

$$|E^2 - V_{\text{eff}}(r) - \dot{r}^2|, \quad (174)$$

que permite comprobar la conservación de la relación dinámica durante la integración. Valores pequeños de esta cantidad indican que la solución numérica reproduce correctamente las ecuaciones geodésicas utilizadas.

Magnitudes cuantitativas calculadas automáticamente

Además de las representaciones gráficas, la herramienta calcula automáticamente magnitudes cuantitativas que permiten documentar y validar las simulaciones realizadas. Entre ellas se incluyen radios extremos, residuos de conservación, precesión relativista del periastro, comparación con aproximaciones analíticas y ángulos de deflexión para geodésicas nulas.

Estas magnitudes proporcionan una referencia numérica complementaria a las figuras y permiten comprobar de forma directa la coherencia entre la integración numérica, las constantes conservadas y las predicciones obtenidas a partir del potencial efectivo.

En los apartados siguientes se recogen algunos ejemplos representativos de estas capacidades, utilizados como apoyo cuantitativo a los resultados presentados en el cuerpo principal del trabajo.

Precesión relativista del periastro

Para las órbitas ligadas de partículas masivas, la herramienta detecta automáticamente los periastrós sucesivos de la trayectoria. Una vez integrada numéricamente la geodésica, los periastrós se identifican como mínimos locales de la función radial $r(\lambda)$.

Si $\varphi_{p,i}$ representa el valor de la coordenada angular acumulada en el periastro i , la precesión numérica media se calcula midiendo el exceso angular respecto a una vuelta completa:

$$\Delta\varphi_{\text{num}} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} [\varphi_{p,i+1} - \varphi_{p,i} - 2\pi], \quad (175)$$

donde N es el número total de periastrós detectados. Esta expresión no introduce una nueva ecuación física, sino que define el procedimiento numérico empleado por la herramienta para estimar la precesión media a partir de la trayectoria integrada.

En la implementación se utiliza la coordenada angular acumulada, evitando saltos artificiales asociados a la periodicidad 2π . De este modo, la precesión numérica se obtiene directamente de la simulación, sin recurrir a aproximaciones de campo débil.

La expresión:

$$\Delta\varphi \approx \frac{6\pi}{p} \quad (176)$$

se utiliza únicamente como referencia analítica de comparación en el régimen de campo débil, donde p representa el semilatus rectum de la órbita ligada. Esta fórmula se obtiene a partir de la ecuación orbital relativista mediante una expansión de primer orden en $\frac{M}{p}$ y corresponde al resultado clásico de la precesión relativista del periastro.

Dicha expresión es válida cuando $\frac{M}{p}$ es pequeño, por lo que resulta útil como referencia para órbitas alejadas del agujero negro, aunque deja de ser precisa cuando la trayectoria penetra en regiones más relativistas.

Como caso de validación se consideró una órbita ligada con periastro medio $r_{\text{peri}} = 39.759\,565\,M$ y apoastro medio $r_{\text{apo}} = 60.601\,968\,M$. Para esta configuración se obtuvo un semilatus rectum $p = 48.016\,562\,M$ y una excentricidad $e = 0.207673$. La simulación proporcionó una precesión media de $\Delta\varphi_{\text{num}} = 0.433\,78$ rad por órbita, mientras que la aproximación analítica dio $\Delta\varphi_{\text{anal}} = 0.392\,564$ rad por órbita, con una discrepancia relativa del 10.50%.

Este resultado muestra que la aproximación de campo débil reproduce correctamente el orden de magnitud de la precesión cuando la órbita se mantiene suficientemente alejada del agujero negro. La diferencia observada puede atribuirse a correcciones relativistas de orden superior no incluidas en la expresión aproximada.

En cambio, para una órbita más próxima al agujero negro, caracterizada por un periastro medio $r_{\text{peri}} \approx 6.764\,M$, la discrepancia relativa aumenta hasta aproximadamente el 82.8%. Este comportamiento confirma la pérdida de validez de la aproximación de campo débil en regiones cercanas a la ISCO, donde los efectos relativistas son mucho más intensos.

Esta configuración se incorporó como preset de validación en campo débil dentro de la herramienta. Su objetivo no es introducir un fenómeno físico nuevo, sino comprobar que la integración numérica reproduce correctamente el comportamiento esperado en el límite perturbativo.

Dilatación temporal integrada

Para partículas masivas, el parámetro afin utilizado en la integración coincide con el tiempo propio τ de la partícula, es decir, $\lambda = \tau$. Por tanto, el tiempo propio acumulado se obtiene directamente a partir del intervalo total de integración. Esto permite comparar el tiempo experimentado por la partícula con el tiempo coordenado t asociado a un observador situado en el infinito.

El tiempo coordenado acumulado se calcula integrando la ecuación temporal de la geodésica:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{f(r)}, \quad (177)$$

de modo que:

$$\text{si } t(0) = 0, \quad t(\tau_f) = \int_0^{\tau_f} \left(\frac{E}{f(r(\tau))} \right) d\tau \quad (178)$$

A partir de ambas magnitudes se obtiene la razón integrada $\frac{\tau}{t}$, que permite comparar el tiempo experimentado por la partícula con el tiempo coordenado asociado a un observador situado en el infinito.

Como ejemplo representativo de órbita circular estable, para una trayectoria situada en $r = 10 M$ se obtuvo un tiempo propio acumulado $\tau = 2000 M$ y un tiempo coordenado $t = 2390.4573 M$, lo que corresponde a una razón $\frac{\tau}{t} = 0.836660$.

En la órbita circular marginalmente estable, situada en $r = 6 M$, la diferencia entre ambos tiempos es mayor. En este caso, la simulación proporcionó $\tau = 5000 M$ y $t = 7069.735452 M$, obteniéndose una razón $\frac{\tau}{t} = 0.707240$. La diferencia acumulada entre ambos tiempos fue de aproximadamente $2069.7 M$.

La comparación entre ambos casos confirma que la discrepancia entre tiempo propio y tiempo coordinado aumenta al disminuir el radio orbital. Este resultado es coherente con la intensificación de los efectos relativistas en regiones más próximas al agujero negro.

Análisis temporal de la trayectoria

Además de la dilatación temporal integrada, los archivos de diagnóstico exportados incorporan un análisis temporal asociado a la trayectoria calculada. Para geodésicas temporales, la herramienta evalúa el factor de dilatación correspondiente a un observador estático situado en el mismo radio instantáneo de la partícula:

$$\frac{d\tau_{\text{est}}}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r(\tau)}}, \quad (179)$$

y lo compara con el factor temporal propio de la partícula simulada:

$$\frac{d\tau_{\text{part}}}{dt} = \frac{1 - \frac{2M}{r(\tau)}}{E}. \quad (180)$$

De este modo, el archivo TXT recoge los valores mínimo, máximo y medio de ambos factores durante la integración. Esta información permite distinguir entre la contribución gravitatoria asociada únicamente a la posición radial y la relación temporal experimentada por una partícula masiva en movimiento.

En el caso de geodésicas nulas, el diagnóstico indica explícitamente que la dilatación temporal propia no es aplicable, ya que los fotones no poseen tiempo propio asociado a su trayectoria. Esta distinción evita atribuir a las geodésicas nulas una magnitud temporal que solo está definida para trayectorias temporales.

Conservación numérica de la ecuación radial efectiva

La estabilidad de las simulaciones se evaluó monitorizando durante toda la integración el residuo asociado a la ecuación radial efectiva:

$$|E^2 - V_{\text{eff}}(r) - \dot{r}^2|. \quad (181)$$

Idealmente, esta cantidad debe permanecer nula a lo largo de la trayectoria, por lo que su magnitud constituye un indicador directo de la precisión de la integración numérica y de la conservación de las constantes del movimiento.

En el caso de validación de la precesión en campo débil se obtuvo un residuo máximo de $3.054 \cdot 10^{-16}$ y un residuo medio de $9.060 \cdot 10^{-17}$, valores compatibles con una conservación numérica excelente.

Para la órbita ligada con precesión relativista fuerte se obtuvo también una conservación muy precisa, con un residuo máximo de $9.444 \cdot 10^{-13}$ y un residuo medio de $4.927 \cdot 10^{-13}$ durante toda la integración.

En configuraciones críticas como la ISCO o la esfera de fotones, los residuos alcanzan valores del orden de 10^{-7} . Este comportamiento no indica una inconsistencia física del modelo, sino que refleja la mayor sensibilidad dinámica de órbitas marginalmente estables o inestables, donde pequeñas perturbaciones numéricas pueden amplificarse durante integraciones prolongadas.

En conjunto, los residuos obtenidos muestran que la herramienta conserva adecuadamente la ecuación radial efectiva y reproduce de forma estable la dinámica geodésica en los regímenes estudiados.

Parámetros utilizados en las simulaciones principales

La siguiente tabla resume las configuraciones físicas empleadas en las simulaciones más representativas analizadas en el cuerpo principal del trabajo. Se incluyen tanto geodésicas temporales como geodésicas nulas, indicando las constantes conservadas y el radio inicial utilizado en cada caso.

Tabla 10. *Parámetros físicos utilizados en las simulaciones principales del trabajo.*

Caso	Tipo	E	L	$\frac{r_0}{M}$
Órbita circular estable	Masiva	0.956183	3.779645	10
ISCO	Masiva	0.942809	3.464102	6
Precesión relativista	Masiva	0.975000	4.000000	8
Captura gravitatoria	Masiva	0.950000	2.500000	5
Esfera de fotones	Fotón	1.000000	5.196152	3
Parámetro de impacto crítico	Fotón	1.000000	≈ 5.196152	30

Los casos seleccionados cubren los fenómenos más relevantes estudiados en el espacio-tiempo de Schwarzschild. En conjunto, permiten analizar órbitas circulares estables, estabilidad marginal en la ISCO, precesión relativista, captura gravitatoria de partículas masivas, la órbita nula crítica asociada a la esfera de fotones y la transición entre captura y dispersión gobernada por el parámetro de impacto crítico.

Información numérica adicional

Todas las simulaciones presentadas en este trabajo se han realizado en unidades geometrizadas, adoptando la convención:

$$G = c = M = 1, \quad (182)$$

de modo que las distancias, tiempos y masas quedan expresados en una misma escala natural. Esta elección simplifica las ecuaciones geodésicas y permite centrar el análisis en la estructura dinámica del espacio-tiempo de Schwarzschild.

La integración numérica se ha llevado a cabo mediante el método DOP853, un integrador explícito de orden elevado con control adaptativo del paso. Este método ajusta automáticamente el tamaño de paso en función del error estimado, resultando adecuado para trayectorias que requieren alta precisión numérica.

En todas las simulaciones se ha empleado una tolerancia de 10^{-10} . La configuración numérica utilizada se resume en la Tabla 11.

Tabla 11. *Configuración numérica empleada en las simulaciones.*

Parámetro numérico	Valor
Método de integración	DOP853
Variable de integración	λ (parámetro afín)
Control de paso	Adaptativo
Tolerancia	10^{-10}
Unidades	$G = c = M = 1$
Magnitud monitorizada	$ E^2 - V_{\text{eff}}(r) - \dot{r}^2 $
Error típico	10^{-7} a 10^{-15}

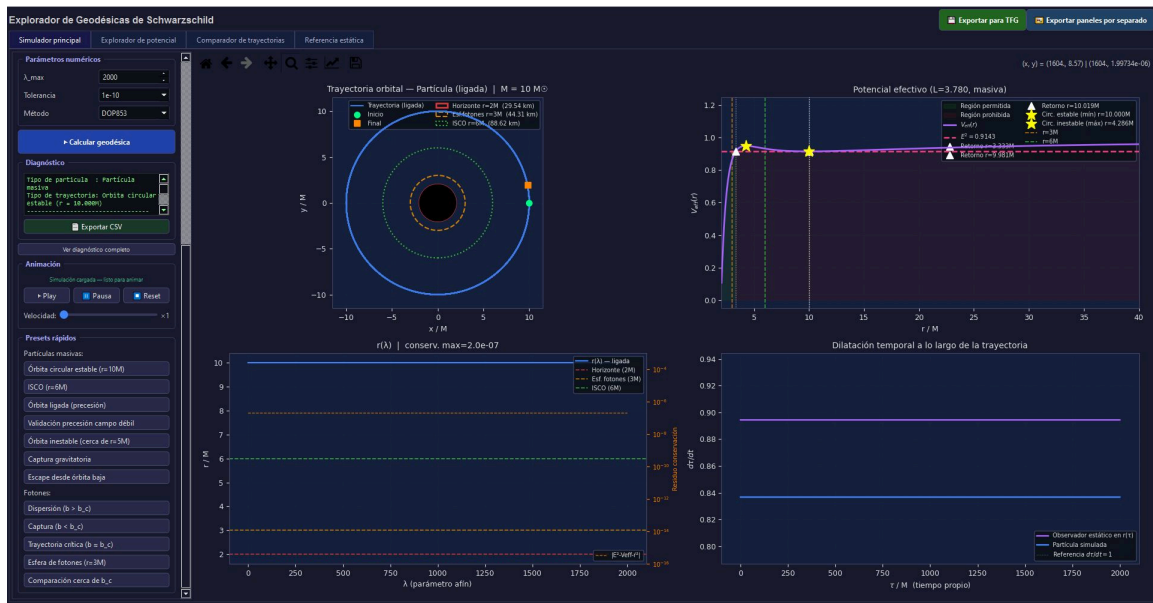
La Tabla 11 recoge los principales parámetros numéricos utilizados durante el desarrollo de las simulaciones.

Anejo B: Capturas adicionales de la herramienta

Simulador principal

La Figura 17 muestra la pestaña principal de la herramienta desarrollada. Desde este entorno se configuran las condiciones físicas y numéricas de la simulación, se seleccionan los presets de interés y se ejecuta la integración numérica de las ecuaciones geodésicas.

Figura 17. Vista general del simulador principal.



La interfaz permite visualizar simultáneamente la trayectoria orbital, el potencial efectivo, la evolución radial y, para geodésicas temporales, la comparación entre el factor temporal de un observador estático situado en el mismo radio instantáneo y el factor propio de la partícula simulada. Esta disposición facilita la interpretación conjunta de los resultados físicos y numéricos obtenidos, manteniendo separada la referencia estática general en un módulo independiente.

Referencia estática de dilatación temporal gravitatoria.

La Figura 18 muestra el módulo independiente dedicado a la referencia estática de dilatación temporal gravitatoria en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Figura 18. *Módulo independiente de referencia estática de dilatación temporal gravitatoria.*



Este módulo representa la relación $\frac{dt}{dt_0} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$ en función del radio. A diferencia del panel temporal del simulador principal, esta gráfica no está asociada a una trayectoria geodésica concreta, sino a observadores estáticos situados a distintos radios. Por ello, debe interpretarse como una referencia geométrica general para estudiar cómo varía la dilatación temporal gravitatoria con la coordenada radial.

En las simulaciones principales, el panel temporal se interpreta de forma distinta: para partículas masivas compara el factor del observador estático evaluado sobre el radio instantáneo de la trayectoria con el factor propio de la partícula simulada; para fotones, indica que el tiempo propio no está definido para geodésicas nulas.

Explorador de potencial efectivo

La Figura 19 muestra el módulo dedicado al análisis interactivo del potencial efectivo. En la captura se representa un caso de partícula masiva con $E = 0.975$ y $L = 4.0$, junto con los radios característicos, las regiones permitidas y los puntos de retorno del movimiento.

Figura 19. Explorador interactivo del potencial efectivo.



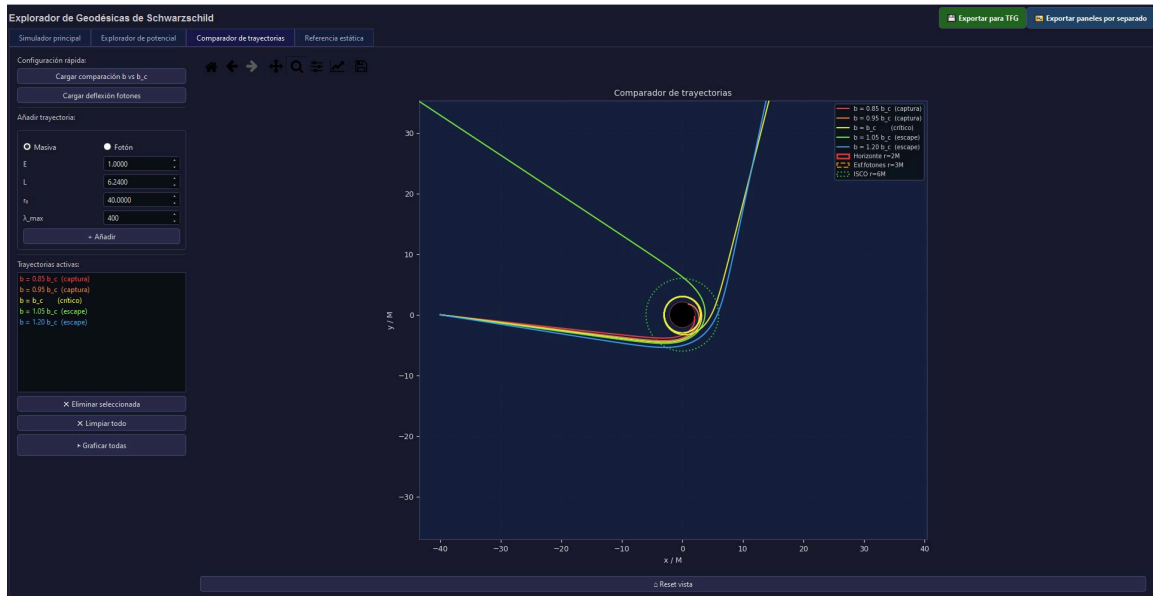
Este módulo permite estudiar de forma aislada la influencia de los parámetros conservados sobre la estructura del potencial, identificando máximos, mínimos, puntos de retorno y cambios de régimen dinámico.

Además de la representación gráfica, el módulo incorpora un panel lateral de información que resume automáticamente la interpretación física de la configuración seleccionada. En este panel se indican el tipo de régimen dinámico identificado, los parámetros empleados, la existencia de máximos, mínimos y puntos de retorno del potencial efectivo, así como una breve interpretación cualitativa de la trayectoria esperada. Esta información complementa la gráfica y facilita la lectura física del potencial sin necesidad de realizar manualmente cada comprobación.

Comparador de trayectorias

La Figura 20 muestra el comparador de trayectorias utilizado para representar simultáneamente varias geodésicas. En este ejemplo se comparan trayectorias luminosas con distintos valores del parámetro de impacto alrededor del valor crítico b_c .

Figura 20. Comparador de trayectorias para geodésicas próximas al parámetro de impacto crítico.

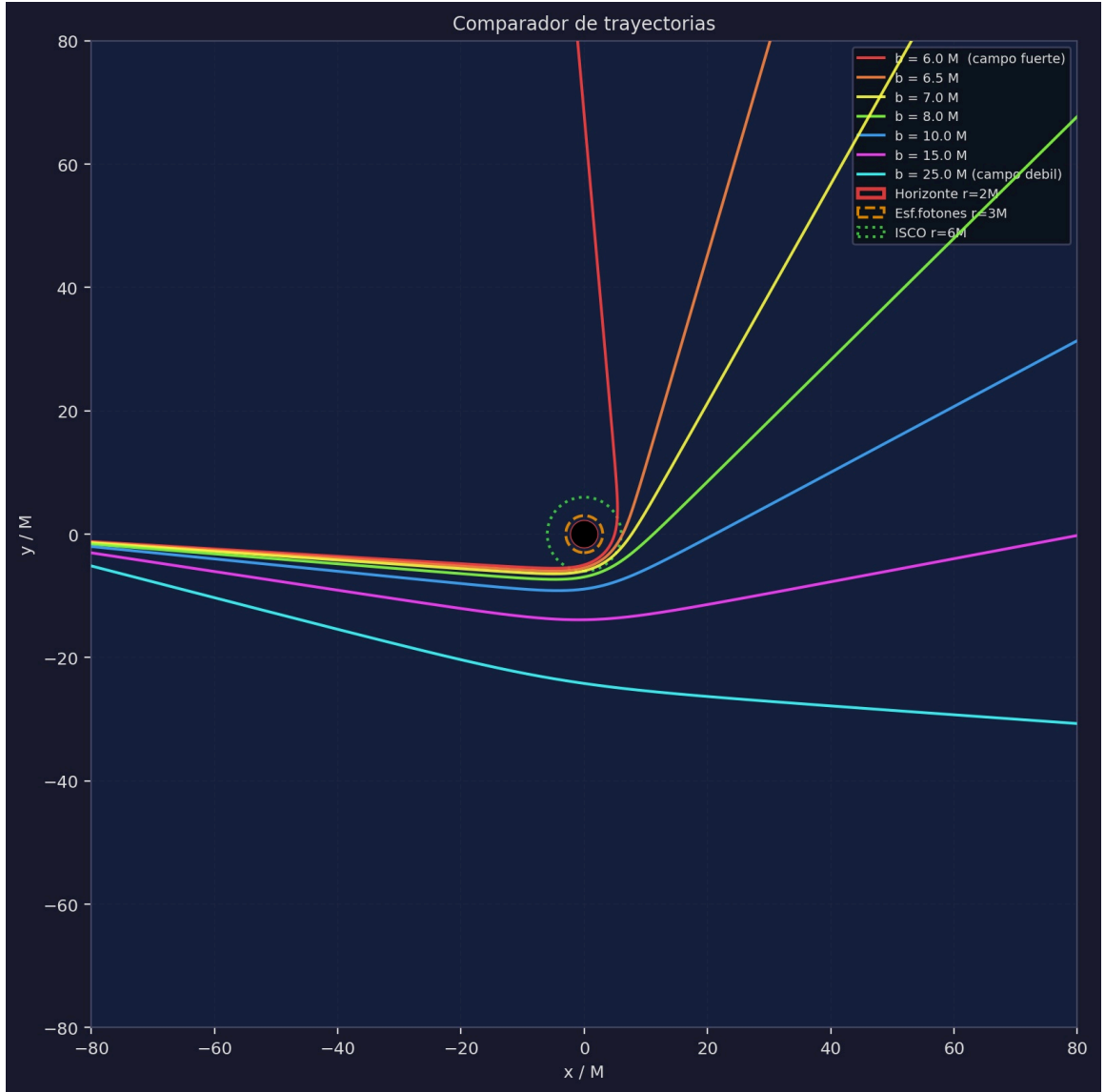


La representación conjunta permite visualizar de forma inmediata la transición entre captura, trayectoria crítica y escape, mostrando la sensibilidad del sistema frente a pequeñas variaciones del parámetro de impacto.

Comparador de deflexión de fotones

La Figura 21 muestra una configuración adicional del comparador de trayectorias dedicada al estudio de la deflexión gravitatoria de fotones. En este caso se representan simultáneamente varias geodésicas nulas con distintos valores del parámetro de impacto b , todas ellas con energía $E = 1$ y radio inicial $r_0 = 100 M$.

Figura 21. Comparador de trayectorias para el análisis de la deflexión gravitatoria de fotones con distintos valores del parámetro de impacto.



La Figura 21 permite visualizar cómo la desviación gravitatoria disminuye al aumentar el parámetro de impacto. Para valores próximos al valor crítico $b_c = 3\sqrt{3}M$, las trayectorias experimentan una curvatura mucho más intensa y alcanzan radios mínimos más próximos al agujero negro. En cambio, para valores grandes de b , la trayectoria se aproxima progresivamente al régimen de campo débil, en el que la deflexión puede compararse con la aproximación $\alpha_{WF} \approx \frac{4M}{b}$.

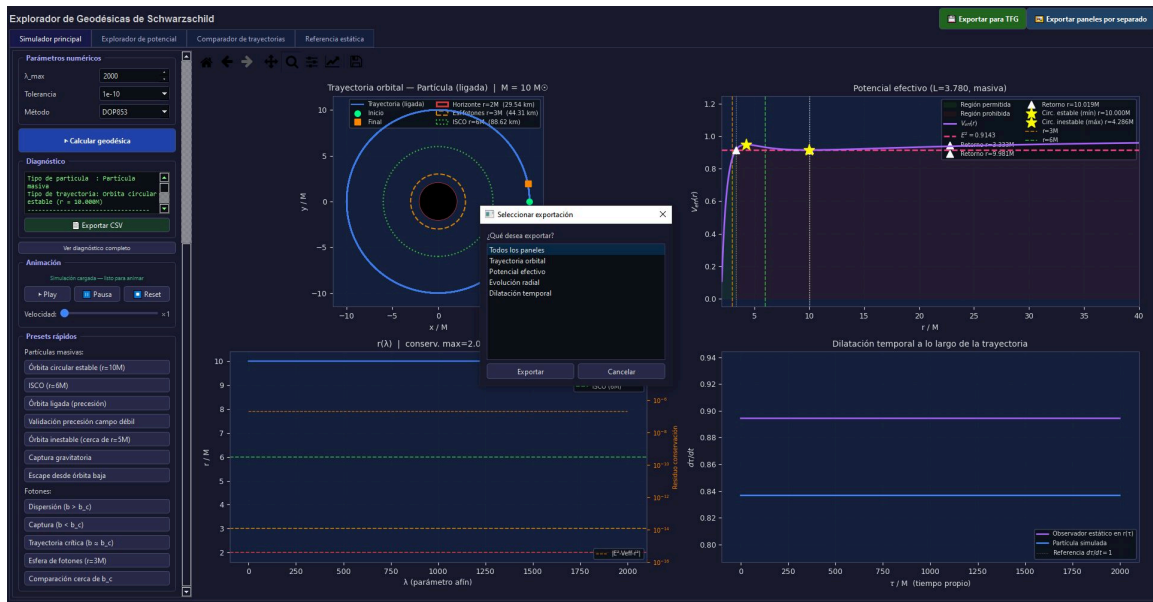
Esta funcionalidad complementa el análisis cuantitativo de la deflexión presentado en la Sección 10.9.2 y muestra que la herramienta permite comparar de forma simultánea varios

regímenes de dispersión luminosa, desde configuraciones de campo fuerte hasta trayectorias de campo débil.

Sistema de exportación

La Figura 22 muestra el sistema de exportación integrado en la herramienta. Esta funcionalidad permite guardar tanto el panel completo de simulación como los paneles gráficos individuales asociados a cada caso estudiado. Además, la herramienta permite generar automáticamente archivos de texto con los parámetros físicos, las magnitudes numéricas y los metadatos necesarios para documentar cada simulación.

Figura 22. Sistema de exportación de figuras y datos integrado en la herramienta.



El sistema de exportación facilita la documentación sistemática de los resultados, permitiendo guardar las figuras utilizadas en la memoria, generar ampliaciones individuales de las gráficas principales y conservar los metadatos necesarios para reproducir cada simulación.

Bibliografía

- [1] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, 1983.
- [2] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison-Wesley, 2003.
- [3] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, 2004.
- [4] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [5] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [6] K. Schwarzschild, «On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory», *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 189-196, 1916.
- [7] C. W. Misner, K. S. Thorne, y J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [8] V. P. Frolov y I. D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [9] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [10] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, y others, «SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python», *Nature Methods*, vol. 17, pp. 261-272, 2020.
- [11] J. D. Hunter, «Matplotlib: A 2D Graphics Environment», *Computing in Science & Engineering*, vol. 9, n.º 3, pp. 90-95, 2007.

- [12] F. H. Vincent, T. Paumard, E. Gourgoulhon, y G. Perrin, «GYOTO: A New General Relativistic Ray-Tracing Code», *Classical and Quantum Gravity*, vol. 28, n.º 22, p. 225011, 2011.
- [13] N. Mohan, A. Bhat, G. B. Mathews, y others, «EinsteinPy: A Community Python Package for General Relativity», *Journal of Open Source Software*, vol. 5, n.º 52, p. 2508, 2020.
- [14] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, y A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [15] H. C. Ohanian y R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, 3.ª ed. Cambridge University Press, 2013.