



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

Uso de la expresión gráfica para la
mejora del aprendizaje de polinomios
y resolución de ecuaciones en 2º de ESO

Presentado por: Sergio Gómez Jiménez
Línea de investigación: Métodos pedagógicos (Matemáticas)
Director/a: Pedro Aurelio Viñuela Villa

Ciudad: Málaga

Fecha: 15 de mayo de 2014

Resumen

Este trabajo se ha centrado en estudiar la enseñanza de la asignatura de matemáticas, a través del uso de la expresión gráfica como medio para mejorar el aprendizaje de polinomios y resolución de ecuaciones. Comienza con la realización de una investigación para fundamentar la base teórica de la influencia de la expresión gráfica y su uso tradicional en el aprendizaje matemático, así como el correspondiente a las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de dichos contenidos seleccionados. Seguidamente, se presenta un trabajo de campo mediante el cual se han recopilado datos relevantes del contexto educativo seleccionado y sobre la experiencia en el uso de este tipo de metodología. Posteriormente se presenta la propuesta didáctica que integra los fundamentos teóricos estudiados en la primera y se apoya en los datos obtenidos del trabajo de campo. La propuesta metodológica se centra en el bloque de contenidos referente a polinomios y resolución de ecuaciones en 2º curso de ESO, con la idea de mostrar sus beneficios en las primeras etapas del aprendizaje y sus posibilidades de extenderse a otras fases del aprendizaje y contenidos. Como conclusión del desarrollo del presente trabajo se extrae que el uso de la expresión gráfica, en combinación con un rol distinto por parte del profesor, permite establecer mejoras positivas en la puesta en práctica de los contenidos tratados.

Palabras clave: expresión gráfica, polinomios, resolución de ecuaciones, trabajo cooperativo.

Abstract

This work has focused on studying the teaching of the mathematics through the use of graphic expression as a means to enhance learning and solving polynomial equations. It begins with the completion of an investigation to substantiate the theoretical basis of the influence of graphic expression and its traditional use in mathematical learning and the corresponding difficulties that the students in learning these selected contents. Next, a field in which relevant data have been collected from selected educational context and the experience in using this type of methodology is presented. Subsequently, the methodological approach that integrates the theoretical principles studied in the first and relies on data obtained from the field work is presented. The methodology focuses on the content block concerning polynomials and solving equations in 2nd year of ESO, with the idea of showing their benefits in the early stages of learning and their ability to spread to other phases of learning and content. Concluding the development of this work is drawn that the use of graphic expression, in combination with a different role for the teacher, allows for positive improvements in the implementation of content covered.

Keywords: graphic expression, polynomials, solving equations, collaborative work.

Índice de Contenidos

1. Introducción	1
1.1. Presentación.....	1
1.2. Justificación.....	2
2. Planteamiento del problema.....	3
2.1. Definición del problema	3
2.2. Objetivos	3
2.3. Metodología.....	4
2.4. Justificación de la bibliografía utilizada	5
3. Marco teórico	7
3.1. Marco legal	7
3.1.1. Ley Orgánica de Educación (LOE)	7
3.1.2. Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE).....	7
3.1.3. Enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.....	8
3.1.4. Enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.....	9
3.1.5. Breve análisis sobre las finalidades del currículo de matemáticas y la acción docente	9
3.2. Evaluación de la situación actual	10
3.2.1. El informe PISA.....	10
3.2.2. Informe TALIS.....	10
3.2.3. Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS) 2011.....	11
3.3. Didáctica del álgebra.....	12
3.3.1. Resolución de problemas	12
3.3.2. Capacidades de los alumnos respecto del álgebra.....	12
3.3.3. Dificultades del álgebra en Secundaria.....	13
3.3.4. La variable en el álgebra	13
3.3.5. El signo igual.....	14
3.3.6. El uso de notaciones	14
3.3.7. Las funciones y sus gráficas	15
3.4. Representación gráfica en matemáticas	15
3.4.1. ¿Cómo hacer que los estudiantes usen la representación?	17
3.4.2. La vida real y las representaciones	18
4. Estudio de campo.....	20
4.1. Justificación.....	20
4.2. Objetivos del trabajo de campo.....	20
4.3. Metodología y materiales empleados.....	21
4.4. Marco contextual del trabajo de campo.....	22
4.4.1. Descripción del contexto del colegio	22
4.4.2. Contexto de la entrevista	23
4.5. Resultados	23
4.5.1. Entrevista al Tutor de Matemáticas	23
4.5.2. Entrevista al Coordinador del Departamento de Matemáticas	25
4.5.3. Entrevista al Director Pedagógico del Centro.....	26
4.6. Análisis de los resultados obtenidos	26
4.6.1. Características del alumnado y nivel de conocimientos previos.....	26
4.6.2. Dificultades habituales en la didáctica de polinomios y resolución de ecuaciones	27
4.6.3. Uso de metodología activa	27
4.6.4. Uso de la representación gráfica como metodología activa	28
4.7. Interpretación de los resultados.....	29
5. Propuesta didáctica	30
5.1. Presentación	30
5.2. Objetivos de la propuesta didáctica	30
5.2.1. Objetivos generales	30

5.2.2. Objetivos didácticos	31
5.2.3. Objetivos propios de la metodología	31
5.3. Competencias	32
5.4. Contenidos seleccionados	33
5.5. Estructura cooperativa de la actividad.....	33
5.5.1. Grupos de clase y rol del profesor	33
5.5.2. Grupo de trabajo cooperativo	34
5.6. Organización del aula.....	34
5.7. Metodología.....	35
5.7.1. Fase 1: Explicación de los contenidos.....	35
5.7.2. Fase 2: Explicación de los contenidos.....	37
5.8. Evaluación.....	38
6. Aportaciones del trabajo	39
7. Discusión	40
8. Conclusiones	41
9. Limitaciones del trabajo.....	44
10. Líneas de investigación futura.....	45
11. Bibliografía.....	46
11.1. Referencias	46
11.2. Bibliografía complementaria	50
12. Anexos	51
12.1. Entrevista al Tutor de Matemáticas.....	51
12.2. Entrevista al Coordinador del Departamento de Matemáticas.....	53
12.3. Entrevista al Director Pedagógico del Centro	54
12.4. Matriz de evaluación.....	55
12.5. Ejemplos de la metodología en polinomios.....	56
12.6. Ejemplos de la metodología en sistemas de ecuaciones.....	57
12.7. Ejemplos de problemas para la metodología.....	58

Índice de Cuadros

Cuadro N° 1. Marco legal.	5
Cuadro N° 2. Resultados TALIS 2009.	11
Cuadro N° 3. Capacidades a desarrollar por el alumno.	12
Cuadro N° 4. Recomendaciones para el estudio del álgebra.	13
Cuadro N° 5. Niveles del paso de letras a variables.	14
Cuadro N° 6. Relación de destinatarios y objetivos de la entrevista.	21
Cuadro N° 7. Datos de la entrevista al Tutor de Matemáticas.	23
Cuadro N° 8. Datos de la entrevista al Coordinador de Matemáticas.	25
Cuadro N° 9. Datos de la entrevista al Director Pedagógico.	26
Cuadro N° 10. Objetivos de la propuesta.	30
Cuadro N° 11. Objetivos didácticos.	31
Cuadro N° 12. Objetivos propios de la metodología.	31
Cuadro N° 13. Contenidos seleccionados para la propuesta.	33
Cuadro N° 14. Desarrollo de la fase 1 de la propuesta.	36
Cuadro N° 15. Dificultad algebraica desarrollada en la fase 1.	36
Cuadro N° 16. Tareas y habilidades desarrolladas en la fase 1.	37
Cuadro N° 17. Desarrollo de la fase 2 de la propuesta.	37
Cuadro N° 18. Desarrollo de la fase 2 de la propuesta.	38
Cuadro N° 19. Aspectos a valorar en la evaluación.	38
Cuadro N° 20. Matriz de evaluación.	55

Índice de Figuras

Figura N° 1. Representación del contenido seis.	16
Figura N° 2. Fases de resolución de un problema.	19

Índice de Gráficos

Gráfico N° 1. Estructura de una tarea por yuxtaposición y comparación.	18
Gráfico N° 2. Estudio de diferentes polinomios.	56
Gráfico N° 3. Clasificación de sistemas de ecuaciones.	57

Índice de Imágenes

Imagen N° 1. Ubicación del centro.	22
Imagen N° 2. Configuración de grupos cooperativos.	34
Imagen N° 3. Entrevista al Tutor de Matemáticas.	52
Imagen N° 4. Entrevista al Coordinador del Departamento de Matemáticas.	53
Imagen N° 5. Entrevista al Coordinador del Departamento de Matemáticas.	54
Imagen N° 6. Empleo de problemas para la metodología.	58

1. Introducción

1.1. Presentación

Son varios los autores que hacen patentes en sus trabajos la necesidad de hallar nuevas metodologías de enseñanzas que mejoren el rendimiento de los alumnos de Secundaria en la asignatura de matemáticas. Dichas teorías coinciden en la necesidad de acudir a metodologías en las que el alumno participe del proceso de enseñanza y adquiera una actitud activa en la construcción de su estructura cognitiva (Chambers y Timlim, 2013).

En este sentido el trabajo surge de la gran ayuda que supone las interpretaciones y planteamientos gráficos en la resolución de ejercicios y problemas matemáticos, así como a la fijación de los contenidos, a los cuales no se les da la debida importancia en el currículo actual de la etapa. El uso de la representación gráfica, como demostramos en el marco teórico, en combinación con una metodología activa, propicia la interpretación de los contenidos, un aprendizaje visual y activo, la fijación de los conceptos y la apertura a formas nuevas de resolución (Sfard, 1987).

Hay que partir de las creencias que los alumnos tienen sobre las matemáticas y a partir de ellas trabajando con estas metodologías cambiar su motivación y cambiar la percepción de aquellas creencias. Actualmente existen dos concepciones extremas sobre cómo se entienden las matemáticas. Una de ellas considera que el alumno debe adquirir primero una base matemática de manera axiomática, para que, a partir de ella, resuelva los problemas que se le presenten. La otra consiste en lo que algunos autores describen como “concepción constructivista”, que defiende la estrecha relación que debe existir entre las matemáticas y sus aplicaciones en todo el currículo y aspectos cotidianos del alumno (Godino, Batanero y Font, 2003).

Como consecuencia de la primera concepción, la visión social de las matemáticas es de respeto, pues consideran las matemáticas, casi siempre innecesarias para la vida cotidiana, ya que están llenas de razonamientos puramente teóricos, rigor, ligadas al mundo de las ciencias o de las finanzas y, por ende, desprovistas de creatividad y destinadas a unos pocos (Gómez-Chacón, 2000). Por lo tanto debemos desprendernos de esta visión distorsionada de la asignatura y mostrársela a los alumnos como un conjunto de conocimientos que a menudo desempeña un papel de primera necesidad para resolver determinados problemas prácticos de las propias matemáticas o de otros conocimientos (Godino, Batanero y Font, 2003).

Los profesores de matemáticas tienen una función fundamental en la enseñanza de la materia, por lo que deben desarrollar metodologías activas que permitan al

alumno, además de adquirir los conocimientos propios de la asignatura, competencias y habilidades en otras áreas necesarias para su vida. Por esto la propuesta se basa en el estudio del trabajo simultáneo de expresión gráfica y analítica, de forma que el alumnado, trabajando el dibujo, comprenda las repercusiones en las distintas expresiones, para que pueda llegar a la resolución por ambos medios y extrapolar los datos a situaciones cercanas a su día a día.

1.2. Justificación

Los resultados de algunos informes y estudios internacionales como PISA 2013 o TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study), muestran que España debe mejorar en materia de enseñanza, más aún en matemáticas, donde nos situamos bastante por debajo de la media de la OCDE.

Uno de los caballos de batalla de los alumnos, en dichas pruebas, es el álgebra, que supone una gran dificultad respecto de la aritmética que han estudiado hasta el momento. Hay que apuntar también, que este tema, a menudo, se presenta mediante clases magistrales, lo que hace muy difícil su seguimiento y lleva a unos malos resultados. Esta situación desemboca, desde la experiencia personal vivida como alumno de Secundaria, en reuniones de varios compañeros para estudiar y superar los contenidos, hacer puestas en común y solventar dudas.

Surge así la metodología activa, como uno de los recursos para afrontar el álgebra, que en combinación con el estudio de una carrera técnica años más tarde, dan como resultado la unión de ambos conceptos para facilitar el aprendizaje de los contenidos y buscar una metodología que, apoyada en la expresiones gráfica, sirva de nexo de unión entre los contenidos matemáticos y los aspectos cotidianos del alumno, aprendiendo a través de la interacción con la representación y cambiando la forma tradicional de aprendizaje matemático.

Por otro lado, y aunque la situación ha mejorado sensiblemente respecto del aprendizaje activo, en el periodo de práctica y experiencia docente se ha observado que los métodos gráficos, para las enseñanza del álgebra, es un procedimiento complementario, que se reserva a los finales de las unidades, si la temporalización lo permite, y que no forman parte de la metodología habitual del aula. Además el alumnado sigue presentando problemas con el cambio de la aritmética al álgebra, suponiendo un salto bastante grande y abstracto para los conceptos matemáticos que ha venido tratando hasta el momento. Todo ello, junto al estudio de autores que anteriormente han tratado el tema, ha llevado al desarrollo de la presente metodología para cambiar la actitud de los alumnos frente al álgebra, mejorar su comprensión en las primeras fases del proceso cognitivo y su autonomía.

2. Planteamiento del problema

2.1. Definición del problema

Sfard (1987) realizó un estudio en el que intentaba determinar si los alumnos concebían las funciones de manera operativa o estructural, esto es, si veían las funciones como la correspondencia entre dos conjuntos o como un algoritmo para el cálculo de una magnitud cambiante por medio de otra. De los resultados, el autor establece que los símbolos y definiciones que se enseñan en la escuela son claramente estructurales. Este enfoque tradicional de la enseñanza del álgebra se manifiesta poco eficaz y afirma que el uso de la representación gráfica permite una concepción operacional, lo cual precipita el aprendizaje y favorece la comprensión, de los procesos y algoritmos, antes de ser traducidos a definiciones estructurales. Sin embargo, la expresión gráfica es algo que queda enfocada en la ESO solo a ciertas unidades como las funciones o la geometría.

Dichos aspectos se comprobaron también durante el periodo de prácticas de este máster universitario, por ello el presente trabajo se ha querido centrar en el escaso uso de métodos gráficos en la resolución de problemas y ejercicios matemáticos en unidades didácticas distintas a las que tradicionalmente se viene haciendo.

La metodología que se estudia a lo largo de este trabajo se basa en el impacto de la representación gráfica en las primeras fases de interpretación de los contenidos matemáticos. Con este proceso se plantea la posibilidad de mejorar aspectos problemáticos de la realidad educativa, para mejorar la comprensión de la materia sobre todo en las primeras fases de asimilación y comprensión de los contenidos.

2.2. Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo es:

Proponer y desarrollar una metodología para enseñar polinomios y la resolución de ecuaciones en 2º de ESO basada en el trabajo de la expresión gráfica.

Los objetivos específicos que llevarán al cumplimiento correcto del objetivo principal son los siguientes:

- Averiguar los principales problemas que suelen darse en alumnos de 2º de ESO durante el aprendizaje de polinomios y la resolución de ecuaciones.
- Proponer una metodología, que basada en la expresión gráfica, mejore la actitud de los alumnos frente a dicha materia.

- Plantear los contenidos y actividades gráficas de forma que permitan al alumno desarrollar su capacidad de reflexión y autonomía en la resolución de polinomios y ecuaciones.
- Establecer modelos de resolución de ejercicios, basados en métodos gráficos, que contribuyan a agilizar el planteamiento y solución de los mismos.

2.3. Metodología

Para obtener los datos necesarios, el presente trabajo, sienta sus bases en la investigación bibliográfica y en un estudio de campo.

La investigación bibliográfica se ha centrado en obras que estudian los métodos de enseñanza, el uso de los polinomios y de las ecuaciones como formas de resolver problemas de la vida cotidiana. Basándose en estos, a su vez, en:

- *Análisis de datos de estudios evaluativos.* Se han revisado informes emitidos por los organismos oficiales que, periódicamente, analizan y evalúan la situación actual en materia de educación, por medio de las publicaciones que emite el Gobierno español, alojadas en la página oficial web del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- *Estudio de la legislación vigente.* Realizando un análisis de las indicaciones que recoge la legislación sobre los contenidos curriculares seleccionados para la etapa educativa que nos ocupa. Dicha información se ha consultado en la página web anterior y los documentos que recogen en las adaptaciones de la Comunidad Autónoma de Andalucía recogidos en la página web de la Junta de Andalucía área de Educación.
- *Estudio de las teorías existentes.* Realizada mediante las siguientes vías de documentación: a) consulta de autores, artículos y documentos en los que se tratan los temas que afectan a este trabajo, realizando dichas búsquedas a través de la biblioteca virtual de la UNIR, Dialnet y el buscador Google Académico; b) se han adquirido obras relevantes de consulta; c) prestamos de la biblioteca de la Universidad de Málaga; d) consultas en los sitios web que se indican en el apartado de referencias bibliográficas.

Una vez fundamentada la base teórica, y apoyada en ella, se plantea el capítulo 4. Estudio de campo, en el que se extraen los datos necesarios para adecuar la propuesta didáctica al contexto seleccionado. Dicho estudio, que consiste en una serie de entrevistas al Tutor de Matemáticas, al Coordinador del Departamento de Matemáticas y al Director Pedagógico de las Escuelas del Ave María en Málaga,

comprueba la eficacia del método propuesto para trabajar con alumnos 2º de ESO en los siguientes aspectos:

- Conocimientos previos de los alumnos respecto de la representación gráfica de los polinomios y resolución de ecuaciones (capítulo 4.5.1.).
- Capacidad del alumno para relacionar lo estudiado con aspectos gráficos o cotidianos (capítulo 4.5.1. y 4.5.2.).
- Planteamiento, mediante aplicaciones con PDI (Pizarra Digital Interactiva) o material gráfico (Representaciones en la pizarra, fichas preparadas, estudio de gráficas), de representaciones para el estudio activo, la comparativa con expresiones analíticas y correlación entre ambas (capítulo 4.5.3.).
- Interpretación de los datos que aporta un enunciado para la resolución o planteamiento de ejercicios por medios gráficos (capítulo 4.5.2.).
- Evaluación de los conocimientos adquiridos por el alumnado, de la fijación de los contenidos y de las competencias alcanzadas (capítulo 4.5.1.-4.5.3.).

Basándose en los datos obtenidos del marco teórico y del trabajo de campo se realiza la propuesta didáctica (capítulo 5.). Dicha propuesta didáctica se enfoca a la enseñanza de polinomios y resolución de ecuaciones en 2º de ESO, mediante el uso de la expresión gráfica. Se contribuye así al desarrollo de la competencia cultural y artística, la competencia matemática, aprender a aprender, lingüística, etc.

2.4. Justificación de la bibliografía utilizada

Para el desarrollo del marco teórico del presente trabajo se han considerado una serie de obras, registradas en el Cuadro Nº 1, teniendo presente tres criterios fundamentales. El primero de ellos respecto a la relevancia, de manera que la fuente tenga relación directa con la temática elegida. El segundo se basa en considerar que todas son publicaciones de prestigio profesional, con un vocabulario adecuado a la temática y un registro académico apropiado. Como tercer requisito, se ha procurado que los autores de las obras sean reconocidos en la materia que tratan y de actualidad, con la intención de evitar recoger información obsoleta o refutada en los últimos años.

Cuadro Nº 1. Marco legal.

-La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE, núm. 106, 2006).
-El Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre en que se establecen las enseñanzas mínimas para la Educación Secundaria Obligatoria (BOE, núm. 5, 2007).
-La adaptación del anterior Real Decreto a la Comunidad Autónoma de Andalucía con el Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a dicha etapa (BOJA, núm. 156, 2007).
-La Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa (BOJA, núm. 171, 2007, p. 23).

-La nueva Ley Orgánica 8/2013, de 9 diciembre, para la mejora de la calidad educativa (BOE, núm. 295, 2013, p.97861) de la que se hace un breve análisis para mostrar los cambios que se van a producir sobre los temas que afectan a este trabajo.

Nota: Legislación revisada para elaborar el marco legal. Fuente: Elaboración propia.

A la hora de estudiar la didáctica general de los contenidos seleccionados, se ha considerado la obra de Chambers y Timlin (2013), *Teaching Mathematics in the Secondary School*. En este libro se aportan ideas interesantes sobre el aprendizaje activo y el beneficio del trabajo en grupo en las actividades de aula. Para estudiar las dificultades habituales en el aprendizaje del álgebra, se ha revisado la obra de Godino y Font (2003), *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*.

Se han analizado las indicaciones de Goñi et al. (2011a), en el libro titulado *Didáctica de las matemáticas*. Se trata de una obra colectiva coordinada por Jesús María Goñi, en la que se recogen aspectos de interés relacionados con la legislación, los nuevos enfoques educativos, consideraciones en la elaboración de unidades didácticas y otros datos sobre la interacción comunicativa en las clases de matemáticas y el lenguaje empleado, entre los que incluye la representación gráfica.

Para fundamentar algunos datos existentes sobre el uso de la representación gráfica y su impacto en la implantación, se ha revisado las aportaciones de Duval (1993) en su libro titulado *El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial*. Y Duval (2006) en su libro *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. En esos trabajos el autor analiza específicamente la repercusión de la expresión gráfica en las matemáticas, la representación semiótica en las mismas y la habilidad para cambiar entre los diferentes lenguajes analítico, gráfico, icónico, etc.

También se han recogido algunas de las aportaciones de Pimm (1990) de su libro *El lenguaje matemático en el aula*, que trata de los tipos de lenguaje posibles en el aula de matemáticas y analiza la expresión gráfica como uno de estos lenguajes, su relación con los restantes, el complemento que supone y sus propiedades.

Se trabaja con la obra de Kaput (1992) *Handbook of Research Mathematics Teaching and Learning*, en la que se estudia un marco conceptual basado en la representación gráfica y se entiende como un sistema de caracteres físicos con los cuales es posible representar ideas y procesos matemáticos.

Sfard (1987) en su obra *Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural* nos plantea dos visiones de entender y poner en prácticas las matemáticas, que pueden ser de manera estructural u operativa, según se entiendan las mismas como la aplicación de algoritmos o como relación entre dos conjuntos.

3. Marco teórico

3.1. Marco legal

3.1.1. Ley Orgánica de Educación (LOE)

La Ley Orgánica de Educación 2/2006, de 3 de mayo, fue promulgada con el objetivo de mejorar la educación en todas sus etapas, hecho que se venía solicitando, desde los años noventa, como consecuencia de varios estudios y evaluación, con resultados poco positivos para el sistema de educativo español.

En su artículo 22 establece los principios generales para la ESO, y refiere, en su apartado 2, que la finalidad de dicha etapa educativa consiste en lograr que los alumnos y alumnas adquieran los elementos básicos de la cultura, especialmente en sus aspectos humanístico, artístico, científico y tecnológico, en definitiva, que les prepararán para incorporarse para estudios posteriores, la inserción laboral y, en consecuencia les formarán para la vida como ciudadanos.

Entre los objetivos citados en el artículo 23, encontramos, en el apartado f), el de: “Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia” (BOE, núm. 106,2006, p. 17169). En el apartado l) del mismo artículo, se halla otra muestra de cómo dicha normativa considera la expresión gráfica: “Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación” (BOE, núm. 106,2006, p. 17170).

En cuanto a la adquisición de la competencia matemática viene reflejada dentro de los principios pedagógicos, como una de las enseñanzas a las que se ha de prestar especial atención en la ESO (BOE, núm. 106, 2006, p. 17170).

3.1.2. Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)

La reforma promovida por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 diciembre, para la mejora de la calidad educativa, surge ante la elevada tasa de abandono de la educación y los malos resultados obtenidos en las últimas evaluaciones educativas, según el informe PISA del año 2013, que pone de manifiesto un nivel insuficiente en comprensión lectora, competencia matemática y competencia lectora, encontrándose la educación actual muy por debajo del promedio de los países de la OCDE, como en el preámbulo V comprobamos (BOE, núm. 295, 2013, p. 97861).

En el preámbulo IV se manifiesta la necesidad de: “[...] propiciar las condiciones que permitan el oportuno cambio metodológico, de forma que el alumnado sea un elemento activo en el proceso de aprendizaje [...]” (BOE, núm. 295, 2013, p. 97860).

Hay que destacar que dicha normativa, en su artículo 27 sobre los programas de mejora del aprendizaje y del rendimiento, propugna una metodología práctica y activa, que hacemos nuestra en este trabajo fin de máster:

[...] se utilizará una metodología específica a través de una organización de contenidos, actividades prácticas y, en su caso, de materias diferente a la establecida con carácter general, con la finalidad de que los alumnos y alumnas puedan cursar el cuarto curso por la vía ordinaria y obtengan el título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria (BOE, núm. 295, 2013, p. 97876).

3.1.3. Enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria

El Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre (BOE, núm. 5, 2007), regula las enseñanzas mínimas del currículo de matemáticas para Secundaria, que será complementado por la normativa vigente en cada comunidad autónoma. Entre los objetivos para la Secundaria que se establecen en ella, interesa destacar, para nuestro marco teórico, los puntos 4, 5 y 10, en los que se alude a la expresión gráfica y a la necesidad de establecer relaciones con la vida cotidiana, como estímulos de la creatividad y la imaginación y que pueden influir en la mayoría de áreas del currículo de matemáticas:

- Punto 4. Identificar elementos matemáticos presentes en fuentes de información, medios de comunicación, internet, publicidad, etc. de forma que se analicen críticamente las funciones que desempeñan dichos elementos y se valore su aportación en la mejora de la comprensión.
- Punto 5. Identificar formas y relaciones espaciales de la vida cotidiana, analizar sus propiedades, sus relaciones geométricas y la belleza que generan, a la vez que estimulan la creatividad y la imaginación.
- Punto 10. Integrar los conocimientos matemáticos con el conjunto de saberes que se van adquiriendo en otras áreas, para poder ser empleadas de formar creativa, analítica y crítica (BOE, núm. 5, 2007, p. 752).

Los objetivos anteriores se suman a los contenidos de 2º de ESO, destacando en el bloque 5 (funciones y gráficas), las aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación o la importancia de la representación a partir de una tabla de valores, de un enunciado o una expresión algebraica sencilla (BOE, núm. 5, 2007, p. 754).

3.1.4. Enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía

En la Comunidad Autónoma de Andalucía las enseñanzas mínimas exigidas para la etapa de Secundaria se recogen en: a) el Decreto 231/2007 (31 de julio), por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a dicha etapa; b) en la Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa. En ambos documentos, para los objetivos, nos remiten al Anexo I del Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre como podemos comprobar en el capítulo 2, punto 2, del artículo 5, del Decreto 231/2007 (BOJA, núm. 156, 2007, p. 16), y en el artículo 2 de la Orden de 10 de agosto de 2007 (BOJA, núm. 171, 2007, p. 23).

3.1.5. Breve análisis sobre las finalidades del currículo de matemáticas y la acción docente

Si observamos las citadas leyes que regulan el currículo de matemáticas en Educación Secundaria, podemos apreciar la falta de claridad de la administración respecto de la finalidad de la enseñanza de matemáticas (Goñi, 2011b).

La normativa conduce al profesorado a elaborar su propuesta de enseñanza a través de: a) proyectos de concreción curricular, b) proyecto curricular de centro (PCC) y c) programación de aula (PA). Sin embargo, la realidad es otra, debido a las diferencias existentes entre las bases de la legislación y las de los proyectos educativos, lo que provoca que, tanto los centros como el profesorado deban definir la finalidad de sus enseñanzas (Goñi, 2011b, p. 16).

En consecuencia, se llega a lo que Goñi (2011b) denomina “currículum propositivo”, que consiste en seleccionar entre la gran cantidad de propuestas que encontramos en libros, páginas web, etc. para trabajar sobre aquello que se debe enseñar. Para ello el autor establece tres funciones principales de las matemáticas que hay que tener en cuenta para dicha selección.

- Las matemáticas como conocimiento que desarrolla capacidades cognitivas de alto valor.
- Las matemáticas como instrumento que sirve para trabajar en otras áreas, sobre todo científicas.
- La aplicación funcional de las matemáticas, su utilización en diferentes ámbitos de la vida diaria (Goñi, 2011b).

El sistema educativo español tiene una disposición jerarquizada respecto de la formación que establece. Esto quiere decir que los cursos superiores dependen de

finalidades que se deben de haber alcanzado en cursos inferiores. Goñi (2011b) indica, como ejemplo, la realización del examen de selectividad, que condiciona, en muchos casos, la finalidad de las matemáticas, enfocándola como herramienta y superponiéndola a las otras dos funciones.

Afortunadamente hoy existen cada vez más corrientes que tratan de hacer frente a esta cultura y se comienzan a establecer enseñanzas más amplias y abiertas, de forma que se entronca mejor con lo dispuesto en el currículo de orden general (Goñi, 2011b). Lo que se persigue con el presente trabajo es proponer una metodología que cumpliendo la normativa legal, trate las tres finalidades de las matemáticas expuestas.

3.2. Evaluación de la situación actual

3.2.1. El informe PISA

El informe PISA (Programme for International Student Assessment) es un estudio impulsado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) que evalúa el compromiso de los gobiernos respecto a sus sistemas educativos.

Dicho informe realiza evaluaciones sobre las competencias lectora, matemática y científica sobre los 66 países entre los que se encuentra España.

Respecto de nuestro país, analizamos los datos significativos del último informe realizado (2013), que interesan para este trabajo y lo apoyan:

- La competencia matemática ha tenido resultados similares a lo largo de los ejercicios (2000-03, -06, -09 y 2013), encontrándose, en 2013, por debajo de los valores promedios de la OCDE (Ministerio de Educación, 2013, p. 2).
- Los niveles de rendimiento en competencia matemática hacen que España se sitúe en la mitad de la tabla, con resultados significativamente inferiores respecto de otros países participantes, ya que solo un 8% del alumnado alcanza niveles altos de rendimiento (Ministerio de Educación, 2013, p. 2).

Esos datos reflejan la necesidad de actuaciones orientadas a atender y a mejorar los resultados obtenidos. Por lo tanto los resultados del informe PISA se han tenido muy en cuenta en la selección de contenidos para desarrollar el presente trabajo.

3.2.2. Informe TALIS

La OCDE realiza, a través del informe TALIS (Teaching and Learning International Survey), una comparación a nivel internacional de las prácticas

docentes en los diferentes países. Tal informe de 2013 ha contado con la participación de 34 países y publicará los resultados en junio de 2014.

De los resultados de TALIS (2009, p. 13), importa destacar, para este trabajo, los obtenidos en relación a la mejora de las prácticas de enseñanza. A continuación se enumeran en el Cuadro N° 2 las conclusiones más significativas:

Cuadro N° 2. Resultados TALIS 2009.

-Los profesores, por lo general, tienen una actitud positiva hacia el aprendizaje activo, en el que su papel consiste en apoyar y guiar el aprendizaje.
-En España, el aprendizaje constructivista se considera como complemento. Son similares las preferencias entre una enseñanza basada en la transmisión directa de conocimientos o la asentada en prácticas constructivistas.
-Sin embargo, en matemáticas dichas prácticas se tienden a estructurar y no es habitual que se orienten al alumno. En el documento se sugiere expresamente a los profesores de matemáticas que se amplíe el repertorio para mejorar en este aspecto.

Nota: Resultados TALIS 2009 respecto a la mejora de las prácticas de enseñanza.

Fuente: Elaboración propia basada en las conclusiones de TALIS (2009).

En las conclusiones finales de TALIS 2009 se incide en la falta de profesorado cualificado, debido en muchos casos, a demandas insatisfechas de la formación necesaria para su desarrollo profesional y la falta de recursos para dicha enseñanza.

Estas conclusiones y las anteriores, animan al diseño de una metodología constructivista que aporte soluciones a estas cuestiones. Este trabajo fin de máster diseña un modelo que ayudará a otros profesores en la docencia de las matemáticas.

3.2.3. Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS) 2011

El informe TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) recoge resultados de evaluaciones internacionales, realizadas a alumnos de 4º y 8º de Primaria (equivalente este último a 2º de ESO) por la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement). En él participan agencias gubernamentales e instituciones de investigación de más de 70 países.

Dicha evaluación comenzó en 1995, se realiza cada cinco años, y aporta información sobre el nivel de dominio de los conceptos, contenidos y procedimientos matemáticos, que se espera que los alumnos hayan adquirido en los niveles educativos citados. Centra su atención en los bloques principales de la asignatura como son: números, álgebra, geometría, funciones y gráficas, y estadística y probabilidad, teniendo en cuenta en dichas valoraciones las influencias que pueden ejercer factores como la sociedad, la escuela y el ambiente familiar.

Los países, que mejores resultados obtienen, son, para ambos cursos, los del Este Asiático, con Corea del Sur a la cabeza. El aspecto positivo es que desde 1995, se ha observado una mejora internacional respecto a los resultados obtenidos por los alumnos de 4º de primaria. Sin embargo no sucede lo mismo con los alumnos de 2º

de ESO, los cuales han bajado y solo nueve países han mejorado su puntuación, frente a los once que han obtenido peores resultados.

Centrándonos en España, el informe TIMSS 2011 recoge que obtuvo 482 puntos, frente a los 519, que obtuvo de media la Unión Europea, y a los 522 de la media de los países de la OCDE. Esta clasificación supone que los alumnos son capaces de aplicar conocimientos matemáticos básicos en situaciones sencillas, pero no tienen la misma capacidad frente a resolver problemas, situaciones complejas o razonadas.

3.3. Didáctica del álgebra

3.3.1. Resolución de problemas

El desarrollo del conocimiento, a través de situaciones en las que se genera una problemática en diferentes contextos, es vital para la adquisición de competencias básicas (Goñi, 2011c). Tal desarrollo nos permite crear una situación que, aun teniendo respuesta matemática, se pueden acercar a situaciones cotidianas o a otras áreas del conocimiento, lo que permite ser flexibles y desarrollar otras competencias.

Cuando hablamos de enseñar matemáticas, en cualquiera de sus disciplinas, en la mayoría de los casos, lo hacemos de resolución de problemas. Tal hecho favorece la creación de estructuras cognitivas matemáticas que se asocian a otros bloques mediante procesos tales como representar la información, esquematizarla, organizarla, formular conjeturas y justificar los resultados (Goñi, 2011c). De los anteriores procesos es consciente el Real Decreto 1631/2006 y se refleja con especial matización en los criterios de evaluación para las distintas etapas de Secundaria.

3.3.2. Capacidades de los alumnos respecto del álgebra

Goñi (2011c) refiere que el informe PISA entiende el álgebra como una herramienta que permite expresar los cambios o las regularidades existentes en todo tipo de situaciones. Para que este objetivo se pueda alcanzar, dicho autor establece que el alumno debe desarrollar capacidades que se recogen en el Cuadro N° 3.

Cuadro N° 3. Capacidades a desarrollar por el alumno.

1.	<i>Comprender patrones, relaciones y funciones</i> , es decir, descubrir regularidades en secuencias geométricas para posteriormente ampliarlas a patrones numéricos y llevarlas a la descripción de relaciones funcionales.
2.	<i>Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos</i> , esto es, comprender el concepto de variable en los inicios, desarrollar habilidades para hallar expresiones equivalentes y adquirir fluidez en las operaciones con símbolos.
3.	<i>Modelos para representar y comprender relaciones</i> , esto es, modelar matemáticamente fenómenos de naturaleza diversa para predecir o extraer conclusiones del contexto.
4.	<i>Analizar el cambio en contextos diversos</i> , es decir, utilizar el lenguaje algebraico para estudiar las relaciones y dependencias existentes entre variables.

Nota: Capacidades que el alumno debe desarrollar. Fuente: Goñi (2011c, p. 74).

El hecho de alcanzar tales capacidades confirma que el álgebra es una herramienta que el alumnado puede utilizar en contextos diversos, permitiendo expresar la generalidad, como afirman Chambers y Timlin (2013, p. 189).

Por todo lo expuesto, necesitamos establecer una serie de consideraciones al diseñar actividades para la enseñanza y resolución de sistemas de ecuaciones lineales en el aula. Siguiendo a Chambers y Timlin (2013), exponemos en el Cuadro N° 4 las recomendaciones y consideraciones para estudiar álgebra en estos niveles:

Cuadro N° 4. Recomendaciones para el estudio del álgebra.

1.	Las expresiones algebraicas se entienden mejor cuando se tiene la experiencia de generarlas personalmente, más que si se plantean como algo impuesto desde fuera.
2.	Hacer y construir expresiones algebraicas es la mejor forma para aprender el proceso de deshacer, concepto importante para aprender a resolver ecuaciones.
3.	Evitar la memorización mecánica de pasos y adquirir el conocimiento del concepto de ecuación. Haciendo que el alumno se sienta cómodo con el álgebra desde los primeros pasos.
4.	En sistemas de ecuaciones es bueno comenzar por experimentar la obtención de soluciones por sentido común para desarrollar confianza suficiente y pasar a los distintos métodos de solución.
5.	El método gráfico es importante puesto que ayuda a representar los sistemas de ecuaciones en un lenguaje matemático distinto.
6.	Evitar ejemplos que asocien las letras a la idea de elementos que no sean números. Ejemplo: $(5a + 4b) + (6a+2b)$ explicado como $a =$ ajos y $b =$ berenjenas que sumados dan 11 ajos y 6 berenjenas $(11a + 6a)$. Esto dificultaría la posibilidad de entender operaciones como ab o a^2 .

Nota: Recomendaciones para el estudio del álgebra en Secundaria. Fuente: Chambers y Timlin (2013, p. 189).

Podemos observar cómo en la recomendación cinco, se hace hincapié en la importancia en el método gráfico al aportar nuevas perspectivas y posibilidades de entendimiento.

3.3.3. Dificultades del álgebra en Secundaria

Hay que tener en cuenta que según Godino y Font (2003), para el alumnado, en los primeros años de la ESO, el salto de la aritmética al álgebra es grande, por suponerle la necesidad de abstracción y de generalización un gran esfuerzo. En consecuencia los primeros pasos hacia la comprensión y el razonamiento algebraico deben ser cercanos con los de la aritmética generalizada.

En el cambio de la aritmética al álgebra, los métodos de representación matemáticas pueden ayudar si plantean situaciones intermedias y cercanas a la cotidianidad del alumno, al favorecer la comprensión de los nuevos conceptos (variables, igualdades, notaciones, etc.), que plantean dificultades en dicho proceso.

3.3.4. La variable en el álgebra

El primer concepto que dificulta el proceso de abstracción hacia el álgebra es la variable. A través de diferentes investigaciones (Kuchemann, 1981, citado en Godino

et al., 2003), se ha podido reconocer que los alumnos dan el paso del uso de letras al dominio de las variables por medio de los siguientes seis estadios o niveles:

Cuadro Nº 5. Niveles del paso de letras a variables.

1.	<i>Letra evaluada.</i> Asignan un valor numérico a las letras. Ejemplo: En la ecuación $5 + 2x = 13$ si se le pregunta ¿Cuánto vale x ? responden 4 con un simple cálculo mental.
2.	<i>Letra ignorada.</i> Ignoran la presencia de la letra o no le dan ningún significado. Ejemplo: Si se les pregunta el valor de $a + b + 2$ sabiendo que $a + b$ es igual a 27, responden 29 sin pensar sobre el valor de a , b o la suma $a + b$.
3.	<i>Letra usada como objeto.</i> Se le asocia a la letra un objeto concreto. Ejemplo: Cuando la expresión $3m + 7m$ es asociada a la frase “tres manzanas y siete manzanas”
4.	<i>Letra usada como incógnita específica.</i> Consideran las letras como un número desconocido y específico. Ejemplo: A la pregunta, ¿Cuál es el resultado de añadir 4 a $3n$? Pueden responder $3n$ y $4,7n$ o 7. Los elementos se combinan sin tener en cuenta la presencia de la letra.
5.	<i>Letra usada como un número generalizado.</i> La letra se ve como la representación de diferentes valores en lugar de uno solo. Ejemplo: Si se les pregunta por los valores de a cuando $a + a = 10$, ofrecen uno o varios números que cumplan la condición, sin reconocer la necesidad de listar todos los valores.
6.	<i>Letra usada como variable.</i> La letra se reconoce como un rango de valores no especificados. Ejemplo: Si se pregunta, ¿Qué es mayor $3n$ o $n + 3$? El alumno es capaz de considerar todos los números, aunque pueda basarse en ejemplos específicos para tomar la decisión.

Nota: Niveles en la transición de letra a variable. Fuente: Godino et al. (2003, p. 814).

3.3.5. El signo igual

Otro error, generalizado en la comprensión de las ecuaciones, es la interpretación de la igualdad. Varios estudios (Godino et al., 2003, p. 815), manifiestan que el alumno tiende a interpretar el signo igual como la separación entre el problema y la respuesta. De esta forma, la expresión $2 + 3 = 5$ es interpretada en la mayoría de los casos, como la suma de dos más tres, que da como resultado 5, y no como la equivalencia entre expresiones $2 + 3$ y 5.

Caso similar es la expresión $3 + _ = 5$. En esta secuencia se plantea la búsqueda de un valor único y no una variable, por eso es importante que el profesor tenga en cuenta la necesidad de dar opciones para ampliar el significado del signo igual y el uso de variables.

3.3.6. El uso de notaciones

Una dificultad añadida para el alumnado proviene de los convenios en el uso de notaciones, ya que a menudo, se usan expresiones que pueden parecer similares a las empleadas en aritmética, sin embargo, tienen significados muy distintos en álgebra (Godino et al., 2003, p. 816).

Claro ejemplo de esto puede ser que en álgebra la expresión ab significa $a \cdot b$, pero, en aritmética: $3 \cdot 5 \neq 35$. Esto mismo ocurre con la expresión algebraica $ab = ba$, mientras que, en aritmética, obtenemos que $35 \neq 53$.

En las operaciones con fracciones suelen darse y advertirse muchos errores por la eliminación de denominadores de forma directa en casos en los que no deberían suprimirse. Se da el caso de alumnos que consideran que en una ecuación “los denominadores siempre se simplifican y se van” (Godino et al., 2003, p. 816).

3.3.7. Las funciones y sus gráficas

Otra de las dificultades que experimentan muchos estudiantes de álgebra es que tienen muchos problemas para establecer la conexión entre los datos numéricos y los datos gráficos, problemas con los ejes cartesianos y problemas en las rectas numéricas con las escalas (Vergnaud y Errecalde, 1980).

Por otro lado un estudio realizado por Dreyfus y Eisenberg (1981) sobre 440 estudiantes sobre la imagen, antiimagen, crecimiento, valores y pendientes en tres formatos de representación gráfica, dio como conclusión que los estudiantes más capaces preferían el formato gráfico para todos los conceptos, mientras los estudiantes menos capaces preferían un formato de tablas, sugiriendo así que la didáctica en este área debe introducirse en un formato u otro según las capacidades.

Cabe destacar otro estudio realizado por Markovits, Eylon y Bruckheimer (1983), sobre la concepción gráfica que tenían los alumnos, en el que encontraron que, con independencia del contexto, la concepción que tenían respecto de la función era lineal. La mayoría de las funciones que dibujaron los estudiantes se componían de segmentos rectos.

3.4. Representación gráfica en matemáticas

Según Duval (1993) la palabra *representación* tiene un doble valor en matemáticas, por ser, a la vez, importante y marginal. Una escritura, un símbolo, una notación, figuras, etc. son ejemplos de representaciones (Kaput, 1992).

Kaput (1992) nos propone los sistemas de representación como un conjunto de caracteres físicos con los cuales es posible representar ideas y procesos matemáticos. En este sentido dicho autor nos dice que el aprendizaje se realiza gracias a la interacción entre dos mundos: el mundo de las operaciones mentales y el mundo de las operaciones físicas en el que se crean y manipulan los objetos pertenecientes a los sistemas de representación dado. En ambos mundos se representan ideas y procesos matemáticos. Cuando se va del mundo mental al mundo físico se hace una proyección en material existente o se produce un nuevo material; cuando se va del mundo físico al mundo mental se hace una lectura activa o una evocación pasiva.

Los distintos sistemas utilizados como métodos de representación en matemáticas son: figuras, gráficas, escritura simbólica (escritura de números, escritura algebraica, etc.), además del lenguaje natural oral o escrito (Duval, 1993).

Es fundamental para la actividad matemática el uso de representaciones gráficas, pero ellas son solo uno de los recursos que se utilizan en nuestra comunidad para constituir significados, aunque se consideran importantes y necesarias para la comprensión del resto de los bloques de la asignatura. La enseñanza de las matemáticas y el uso de la representación gráfica tienen una doble contradicción, ya que necesitan de dicho lenguaje para ser transmitidas a los estudiantes, pero a la vez, puede volverse un obstáculo de comprensión, si el alumno no es capaz de separar representación gráfica y contenido.

Pimm (1990) analiza la expresión de *las matemáticas son un lenguaje* con el objetivo de arrojar luz sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Afirma que, según tal aseveración, la competencia comunicativa se convierte en una cuestión primordial; por lo tanto, cobra especial importancia la forma de cómo se modifica el lenguaje al comunicar y transmitir ideas matemáticas; de tales procesos participan las representaciones, por ser parte intrínseca de las matemáticas.

En matemáticas, el aprendizaje de los objetos es conceptual; el alumno no entra en contacto directo con un determinado objeto, sino con una representación o representaciones de dicho objeto matemático. Podría, incluso, afirmarse que todo concepto matemático remite a otro concepto mental y que, por tanto, existe una obligación de representación. Por ejemplo, el número seis suele ser representado con el signo “6”, pero dicho signo no es realmente el concepto de seis, sino tan solo una de las numerosas formas de representarlo (Duval, 1993).

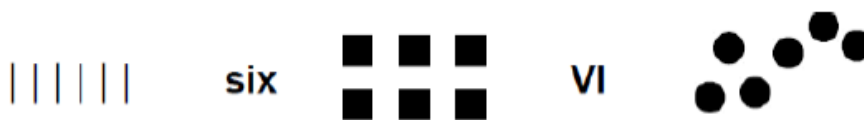


Figura N° 1. Representación del contenido seis. Fuente: Rojas (2012, p. 2).

Dichas representaciones pueden resaltar distintas características o elementos diferenciadores del concepto que pretenden representar. De igual forma que una caricatura resalta aspecto que no hace una fotografía, una determinada configuración de puntos, como la primera que encontramos de izquierda a derecha, puede sugerir descomposiciones del tipo $2+2+2$ ó $3+3$. Es por esto que Duval (1993, p. 18) establece tres aspectos de las representaciones que no deben confundirse:

- El objeto representado.

- El contenido de la representación, es decir, lo que presenta del objeto.
- El registro o forma de la representación.

En el caso de las matemáticas Duval (1993, p. 18) reconoce que el uso de estos sistemas de representación y su transformación son *una exigencia cognitiva necesaria y fundamental*, llegando, incluso, a afirmar que:

Estos sistemas semióticos [...] son tan necesarios para el desarrollo del pensamiento matemático como la innovación y el perfeccionamiento de instrumentos de óptica o de medida en otras disciplinas científicas. La mediación semiótica es tan indispensable en matemáticas como la mediación instrumental para la observación de los fenómenos (Duval, 1993, pp. 18-19).

Basándonos en estas ideas desarrolladas por el autor, deducimos que:

- Los objetos matemáticos se pueden disponer con una gran variedad de registros.
- La naturaleza de los objetos matemáticos permite que la manera de acceder a ellos sea a través de la representación.
- La representación puede resaltar unas características determinadas del objeto, pero no otras. En consecuencia, cuantos más sistemas de representación se dominen, mejor será el conocimiento del objeto.

3.4.1. ¿Cómo hacer que los estudiantes usen la representación?

Duval (2006, p. 159) nos muestra como la mayoría de los profesores son conscientes del potencial que las representaciones gráficas suponen en el aprendizaje de los distintos bloques. Es importante, pues, que los alumnos trabajen con símbolos, figuras, modelos espaciales, etc., y sean capaces de identificar el mismo patrón en diferentes representaciones y contextos. Es interesante, además, operar conjuntamente expresión algebraica y gráfica, para llegar a exposiciones visuales correspondientes a líneas, curvas, superficies, que deberían siempre relacionarse como si se asociaran imágenes con palabras.

Dicho autor también argumenta que no consiste en representar sin sentido y que existen dos dimensiones semánticas: una es la del contenido que representa y que es intrínseca al registro expresado, y la otra, la del objeto que representa y que es independiente o va más allá de la expresión inicial. De esta forma el alumno puede representar una recta, una parábola, un círculo, etc., pero debe comprender que, aunque las tres son visualizaciones diferentes, representan tres objetos matemáticos definidos siempre por el concepto de función, que es el que caracteriza el objeto geométrico. Ambos deben entenderse de forma diferente (representación del objeto y del contenido) para mejorar la capacidad cognitiva (Duval, 2006, p. 159).

En consecuencia, la representación gráfica es una herramienta útil, considerada como un elemento de explotación del contenido matemático al realizar variaciones, comparaciones y análisis en distintas situaciones, que permiten un registro que se construye *en la cabeza de los alumnos* (Duval, 2006, p. 162). Esos procesos facilitan que el alumno sea capaz de asociarlos a otras situaciones, hecho que permite acceder a una verdadera comprensión conceptual. Un ejemplo sería el Gráfico N° 1:

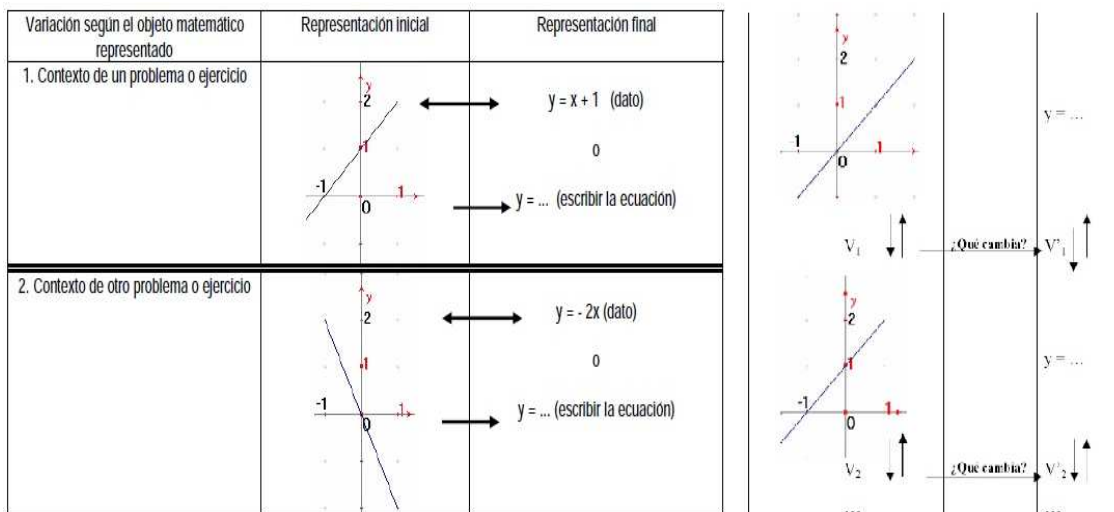


Gráfico N° 1. Estructura de una tarea por yuxtaposición y comparación. Fuente: Duval (2006, p. 161).

En estos dos casos, comprobamos cómo operar con las ecuaciones desde dos puntos distintos: a) por medio de la yuxtaposición (izquierda), en la que se asocia la expresión a una representación y se consigue que el alumno sea capaz de generar la representación a partir de una expresión, o a la inversa. Al proceder de esa forma el alumno puede trabajar en ejercicios o contextos distintos, para estudiar los aspectos que cambian de uno a otro; b) por medio de la comparación (derecha), para realizar un ejercicio de análisis sobre los cambios que se producen en las representaciones tras los diferentes cambios de registros (Duval, 2006, p. 162).

3.4.2. La vida real y las representaciones

Los problemas de la vida real son frecuentemente empleados en educación porque se piensa que confieren significado al aprendizaje de las matemáticas. Pero existe otra interesante razón: conllevan a que los alumnos utilicen sus experiencias y representaciones mentales. De esta forma comprenderán los conceptos matemáticos y tendrán sentido sus representaciones semióticas. Conviene emplear problemas de la vida del alumno para hacer la transición entre aritmética y álgebra, y obtener de

esta forma un amplio repertorio de problemas reales, según las situaciones y procedimientos matemáticos (Duval, 2006, p. 163).

Duval (2006, pp. 163-164) establece que esos tipos de problemas permiten un amplio catálogo de representaciones que recojan las experiencias o los pasos matemáticos que hay que desarrollar. Con tal proceder, se reflexiona sobre la resolución del problema, y permite a profesor y alumno trabajar en las diferentes vías para alcanzar la mejor propuesta. Este tipo de resoluciones son llamadas por el autor como *representación auxiliar*, y ayudan al estudiante a comprender cada etapa del proceso de resolución, haciéndolo más accesible. Dichas representaciones auxiliares pueden ser de tres tipos y se emplean en las tres fases del proceso de resolución, como observamos en la Figura N° 2. El primer tipo de representación auxiliar es la representación icónica, la cual solo se puede emplear en la primera fase de resolución. Tal limitación se debe a que dichas representaciones permiten al alumno interpretar la información del problema, pero son muy diferentes de aquellas que pueden ayudarles a resolver las operaciones matemáticas como son el segundo tipo, representaciones semióticas usadas para la conversión de las icónicas en expresiones, y el tercer tipo que permite operar con las expresiones para hallar la solución, encajando en las fases dos y tres de resolución respectivamente.

Las representaciones icónicas están indicadas para la transición del enunciado al problema matemático, aspecto importante para el presente trabajo por ayudar al alumno a reflexionar y asimilar los contenidos en la fase receptiva del aprendizaje.

Las diversas representaciones semióticas necesitadas para plantear el problema (sus condiciones, datos y pregunta) y resolverlo	Tres clases de representaciones auxiliares posibles para resolver el problema	El problema del aprendizaje con el que se enfrenta el profesor
<p>FASE I</p> <p>Los problemas para aplicar los procedimientos matemáticos en los problemas de la vida real: (problemas verbales con datos, pertinentes o no)</p>	<p>A. Dibujos de una situación de la vida real</p>	
<p>FASE II</p> <p>La conversión en expresiones simbólicas que encajen con el procedimiento matemático pertinente</p>	<p>B. Bidimensional y organización semántica para discriminar lo que es relevante de lo que no lo es en expresiones verbales describiendo la situación</p>	<p>¿Qué tipo de REPRESENTACIÓN AUXILIAR y para qué?</p>
<p>FASE III</p> <p>Solución por tratamiento (La transformación de representaciones dentro del mismo registro)</p>	<p>C. La visualización matemática para comprender el procedimiento (Las líneas numéricas, los diagramas,...)</p>	

Figura N° 2. Fases de resolución de un problema. Fuente: Duval (2006, p. 164).

4. Estudio de campo

4.1. Justificación

La realización del presente trabajo está motivada por las experiencias recogidas durante el periodo de prácticas de este Máster universitario en el colegio El Romeral y Las Escuelas del Ave María de Málaga. Durante las prácticas en estos centros se pudo comprobar la diferencia de competencias alcanzadas por el alumnado cuando se usa una metodología activa en la docencia de las matemáticas, respecto de cuando se hace de forma estructural.

Ambos centros empleaban metodologías distintas, siendo una más operativa y la otra puramente teórica y alcanzaban niveles de resultados en el alumnado distintos. Los alumnos que aprendían mediante el uso comparativo de expresión gráfica y analítica mostraban mayor solvencia y entendimiento frente a nuevas problemáticas que se le pudieran plantear. Sin embargo los que aprendían, exclusivamente, a nivel teórico mostraban agilidad en las resoluciones, pero limitaciones para afrontar nuevos planteamientos.

Por este motivo se decide estudiar la influencia de la expresión gráfica como metodología activa, comenzando por conformar un marco teórico basado en estudios y experiencias de autores que han trabajado en el tema.

El trabajo de campo, en este sentido, es parte fundamental del estudio, pues recoge datos relevantes de esta realidad educativa, lo que permite reunir experiencias sobre el trabajo activo, basado en la expresión gráfica, problemas habituales en la enseñanza de polinomios y resolución de ecuaciones, conocimientos previos sobre el trabajo con expresiones gráficas y el estudio de las actividades que pueden aportar un mejor resultado.

4.2. Objetivos del trabajo de campo

El objetivo principal del trabajo de campo es recoger información directa del contexto al que se orienta la propuesta didáctica. Para conseguirlo se han perseguido los siguientes objetivos específicos:

- Extraer información sobre las características del alumnado y el nivel de conocimientos previos respecto de los polinomios y la resolución de ecuaciones.
- Analizar las dificultades habituales encontradas en la didáctica de los contenidos que se trabajan.

- Estudiar las experiencias llevadas a cabo hasta ahora en clase de matemáticas con metodologías gráficas y los resultados obtenidos.

4.3. Metodología y materiales empleados

Para poder realizar la extracción de datos en el tiempo disponible, se ha optado por realizar entrevistas a tres agentes educativos distintos del centro: Tutor de Matemáticas de 2º ESO, Director pedagógico y Coordinador del Departamento de Matemáticas. Para tal fin, se ha considerado una metodología apropiada porque facilita la recolección de los aspectos cualitativos y prácticos que interesan a este trabajo, así como situarnos con facilidad en la realidad educativa seleccionada. Dichas entrevistas han sido dirigidas, orientadas y estructuradas según se muestra en el Cuadro N° 6.

Para la puesta en práctica de estas entrevistas, se consultó a la dirección del centro la posibilidad de llevar a cabo las mismas, y los horarios convenientes. Una vez aceptada la propuesta por parte de la dirección, y con la autorización expresa de los entrevistados para hacer público sus opiniones, se procedió a establecer las diferentes citas con cada una de los agentes, planteándoles la situación y los objetivos del presente trabajo y del estudio de campo. Se aseguró el anonimato y confidencialidad en el tratamiento de sus respuestas.

Cuadro N° 6. Relación de destinatarios y objetivos de la entrevista.

<i>Agentes</i>	<i>Información a extraer</i>
<i>Tutor de Matemáticas de 2º de ESO.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Características generales del grupo elegido. • Nivel de conocimientos previos de los alumnos en polinomios y resolución de ecuaciones. • Dificultades encontradas en el aprendizaje de los contenidos tratados. • Experiencias con metodología activa en el aula de matemáticas. • Experiencias de expresión gráfica como metodología activa.
<i>Coordinador del departamento de matemáticas.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Características generales de los alumnos en Secundaria. • Dificultades que se perciben en el alumnado para alcanzar las diferentes competencias desde las matemáticas. • Experiencias con metodología activa en el área de matemáticas. • Experiencias de expresión gráfica como metodología activa. • Dificultades formativas percibidas en el alumnado para integrar una metodología activa.
<i>Director pedagógico.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Feedback general de la práctica docente realizada hasta ahora en el área de matemáticas. • Dificultades y ventajas formativas percibidas en la comunidad educativa para integrar una metodología activa. • Impacto percibido sobre la expresión gráfica en alumnos de Secundaria como forma de mejorar el aprendizaje de las matemáticas.

Nota: Destinatarios y objetivos de la entrevista. Fuente: Elaboración propia.

Cada una de las entrevista se estructura conforme a una batería de preguntas (adjuntas en los anexos de este trabajo) y se anotan las respuestas para el posterior análisis y valoración de los resultados obtenidos.

en la formación profesional, y cuentan con muchos talleres y ciclos formativos, pero también con bachillerato de ciencias, tecnología y humanidades, lo que permite alcanzar titulaciones superiores.

4.4.2. Contexto de la entrevista

La hora y lugar de la entrevista fueron fijadas en el centro según la disponibilidad de los participantes: por la tarde, tras terminar la jornada educativa. La entrevista con el Tutor de Matemáticas de 2º de ESO, la primera, fue realizada en el aula, tras terminar las clases, a continuación, con el Coordinador del Departamento, el cual fue entrevistado en su despacho. En último lugar se entrevistó el Director Pedagógico, en uno de los despacho de la secretaría del Centro.

El ambiente en todas las entrevistas ha sido cordial, relajado y cercano, lo que, propició, junto al anonimato, la fiabilidad de la información recogida.

4.5. Resultados

4.5.1. Entrevista al Tutor de Matemáticas

En el Cuadro N° 7 se sintetizan los datos obtenidos a través de la entrevista realizada el 25/04/2014 al Tutor de Matemáticas de 2º de ESO de las Escuelas del Ave María de Málaga.

Cuadro N° 7. Datos de la entrevista al Tutor de Matemáticas.

<i>Número de alumnos.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • 25
<i>Modalidad.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • A
<i>Edad de los alumnos.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • 13-14 años
<i>Nivel de conocimientos de matemáticas.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Bastante malo en general
<i>Diversidad de la clase.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • 3 alumnos con matemáticas de 1º suspensas. • 1 alumno que se encuentra repitiendo 2º. • 1 alumno con necesidades educativas especiales.
<i>Resultados obtenidos en matemáticas en la 2ª evaluación.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Regular. Hay 5 alumnos que destacan, 12 alumnos más que superaron la asignatura con notas entorno al bien, 3 alumnos suspensos, pero cercanos al aprobado y 5 alumnos que suspendieron con notas muy bajas
<i>Motivación del alumnado.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Media. Hay alumnos que tienen sus metas muy claras, otros estudian por las notas, y sus padres y otros alumnos consideran que no saben matemáticas y que se le dan mal.
<i>Conocimientos previos de polinomios y resolución de ecuaciones.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Bajos, es un tema en el que no se profundiza en primero y los alumnos no llegan con los conceptos muy claros.
<i>Dificultades específicas con polinomios y resolución de ecuaciones.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Dificultades en la traducción de los enunciados al álgebra • Problemas con el concepto de variables. • Errores con la igualdad y los cambios de signos. • Conflictos con fracciones y potencias. • Desinterés por el método gráfico al encontrarlo como un complemento. • Serias dificultades para simplificar ecuaciones. • Apuros para resolver problemas de sistemas de ecuaciones.

<i>Metodología didáctica empleada con polinomios y resolución de ecuaciones.</i>	<ul style="list-style-type: none"> Las clases alternan explicaciones del profesor, siguiendo el libro de texto del curso, junto con la resolución de ejercicios que propone el mismo. Los alumnos trabajan por parejas y son evaluados por realizar dichas tareas, su comportamiento y una evaluación final.
<i>Recursos que se emplean.</i>	<ul style="list-style-type: none"> Libro de texto de clase. En ocasiones se usan fichas y ejercicios de refuerzo.
<i>Participación del alumno en la construcción del conocimiento.</i>	<ul style="list-style-type: none"> El aprendizaje suele ser pasivo, aunque los alumnos participan de las correcciones de ejercicios.
<i>Criterios de evaluación para polinomios y resolución de ecuaciones.</i>	<ul style="list-style-type: none"> Qué se evalúa: <ul style="list-style-type: none"> Razonamiento lógico. Planteamiento de las ecuaciones en los problemas. Precisión y rigor de los procedimientos empleados. Actividades de cuaderno. Participación Cómo se evalúa: <ul style="list-style-type: none"> Evaluación continua: 40% Examen: 60%
<i>Frecuencia de uso de metodología activa.</i>	<ul style="list-style-type: none"> Esporádicamente se realizan sesiones donde se debate en clase el uso de la temática estudiada, casi siempre tras las evaluaciones previas de las unidades. Se realizan ejercicios donde los alumnos van ayudando a su resolución, participan de las correcciones y plantean alternativas hasta llegar a la solución correcta. Uso habitual en las correcciones y el trabajo de ejercicios.
<i>Consideraciones positivas hechas sobre la metodología activa.</i>	<ul style="list-style-type: none"> El alumno mejora su capacidad de aprendizaje debido a la implicación en la materia. Se considera importante para el proceso de enseñanza. Al trabajar en parejas se barajan más hipótesis para solventar el ejercicio y el alumno gana en seguridad. Se realizan aportaciones y correcciones mutuamente, ganando en la comprensión de la materia. Se considera ideal que la clase se pueda dividir siempre en un tiempo de explicaciones por parte del docente y otro para que ellos construyan su conocimiento matemático.
<i>Dificultades a la hora de aplicar trabajo cooperativo en el aula.</i>	<ul style="list-style-type: none"> Los alumnos hablan y lo asocian a pasarlo bien. Dificultades para evaluar. Aparecen alumnos que distraen a sus compañeros, se aprovechan de su trabajo e intenta sacar buena nota con el mínimo esfuerzo. Dificultades en la gestión del tiempo. Tendencia de los grupos a preguntarse unos a otros y copiar los ejercicios, aprovechando correcciones de otros grupos.
<i>Forma de evaluar el aprendizaje activo.</i>	<ul style="list-style-type: none"> Se evalúa el proceso. Su uso debe repercutir en el examen individual de cada alumno.
<i>Uso de la representación gráfica en el aprendizaje de polinomios y resolución de ejercicios.</i>	<ul style="list-style-type: none"> Como complemento. Se emplea una vez se termina la unidad para consolidar la misma. Se usa poco y muchas veces se recorta debido a la temporalización de las unidades. Se reconoce su beneficio pero conlleva más tiempo para las explicaciones sobre todo al inicio. Los ejercicios conllevan mayor preparación.
<i>Experiencia del uso de la expresión gráfica como metodología activa para el aprendizaje de polinomios y resolución de ecuaciones.</i>	<ul style="list-style-type: none"> Las experiencias en otros cursos han sido positivas alcanzando un nivel alto de dominio en la resolución de ecuaciones y polinomios. Mejora de las primeras fases del aprendizaje y conceptos de polinomios y ecuaciones. Los alumnos entienden dicho bloque como algo real, útil y cercano a ellos.

Nota: Datos de la entrevista al Tutor de Matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

4.5.2. Entrevista al Coordinador del Departamento de Matemáticas

En el Cuadro N° 8 se sintetizan los datos obtenidos a través de la entrevista realizada el 25/04/2014 al Coordinador del Departamento de Matemáticas de las Escuelas del Ave María de Málaga.

Cuadro N° 8. Datos de la entrevista al Coordinador de Matemáticas.

<i>Nivel de conocimiento de los alumnos sobre la expresión gráfica.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Medio bajo. Los alumnos lo ven como un tipo de ejercicio más, no como herramienta de estudio. • Se preocupan de saber lo básico para su representación. • No tienen mucha autonomía dibujando, ni suelen cuestionarse su utilidad, sustituyen puntos para entregar el ejercicio.
<i>Aspectos que se tratan en la asignatura basándose en métodos de expresión gráfica.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Viene empleándose en representación de funciones, geometría y probabilidad. • Esporádicamente se usan ejercicios como representación de enteros sobre una recta o algún juego para la comprensión de la unidad.
<i>Tratamiento de la expresión gráfica.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Se enfocan como métodos de resolución, más que de aprendizaje de los contenidos. • En muchas unidades es un complemento que se da al final, si la temporalización lo permite, o es un método de resolución más. • Se enfoca como un ente matemático y no se suele relacionar con aspectos o situaciones cotidianas.
<i>Frecuencia de uso de metodologías activas.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Depende mucho del curso, en base a como sea el grupo, su comportamiento y el aprovechamiento que se hace de las mismas. • Suele emplearse la participación del alumnado para corregir en común los ejercicios en la pizarra. • Los alumnos además trabajan en pareja en el trabajo diario de clase. • No suelen participar de las explicaciones del docente salvo algún interrogatorio o debate que se plantee.
<i>Consideraciones positivas hechas sobre metodologías activas.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Mejora el aprendizaje de los contenidos. • El aprendizaje es más sólido y duradero, suele ser mejor retenido. • Los alumnos comparten ideas, dudas y se ayudan. • Permite trabajar competencias que de otra forma sería inviable en el aula.
<i>Dificultades a la hora de aplicar trabajo cooperativo en el aula.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Diferencia en los tiempos de aprendizaje de unos grupos con otros. • Necesidad de más tiempo para el desarrollo de las unidades. • Los alumnos tienden a pensar que es tiempo libre. • Algunos alumnos sienten inseguridad al volver al trabajo individual.
<i>Experiencia del uso de la expresión gráfica como metodología activa para el aprendizaje de polinomios y resolución de ecuaciones.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • No es un tema en el que se suele usar el método gráfico en las explicaciones de clase para el aporte de contenidos. • Se emplea como uno de los métodos de resolución. • Se reconoce que puede mejorar las primeras fases del conocimiento, en combinación con una metodología activa. • Implica mayor tiempo y preparación de los ejercicios y fichas de clase.
<i>Capacidad del alumno para relacionar aspectos gráficos y cotidianos.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Los alumnos rara vez relacionan las representaciones gráficas con su día a día. Entienden que la representación de rectas, curvas y gráficas es algo estrictamente matemático. • Las actividades realizadas con fichas, juegos o enunciados de situaciones reales sí consiguen que el alumno relacione matemáticas y la cotidianidad.
<i>Valoración sobre el uso pedagógico de la expresión gráfica como metodología activa en matemáticas.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • La valoración es positiva. • Si se combina la manipulación de las expresiones gráficas con los contenidos de la unidad, el aprendizaje en sus primeras fases mejora. • También lo hace en su fase retentiva y expresiva. • El alumno encuentra mayor sentido y utilidad a aquello que estudia.

Nota: Datos de la entrevista al Coordinador de Matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

4.5.3. Entrevista al Director Pedagógico del Centro

En el Cuadro N° 9 se sintetizan los datos obtenidos a través de la entrevista realizada el 25/04/2014 al Director Pedagógico de las Escuelas del Ave María de Málaga.

Cuadro N° 9. Datos de la entrevista al Director Pedagógico.

<p><i>Valoración sobre el uso pedagógico de la expresión gráfica como metodología activa en matemáticas.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • En primaria es algo que es la base del aprendizaje, siempre se aprende jugando, manipulando, descubriendo y hay actividades con colores, música y dinamismo. • En Secundaria este factor se pierde. Se tiende a clases estáticas, donde la participación del alumnado va disminuyendo junto a su implicación. • Predomina en esta etapa un aprendizaje memorístico, más que fruto del razonamiento de aquello que se está aprendiendo. • Una diferencia importante es que en primaria los alumnos aprenden porque les gusta, se divierten y comparten con sus compañeros. En Secundaria aprenden porque tienen que aprobar los exámenes. • Esto repercute en la motivación del alumno y también en la retención o aprendizaje real de los contenidos, que por norma general son olvidados tras el examen.
<p><i>Dificultades para diseñar metodologías activas en Secundaria.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Una de las principales dificultades es la edad en la que se encuentra el alumnado. Sus prioridades cambian y ven las actividades mediante juegos como una pérdida de tiempo. Se sienten por lo general mayores para eso, opinando que no les aporta nada. • Sin duda otra de las limitaciones es la estructuración y temporalización que por normativa soporta la Secundaria. Ello repercute en una serie de asignaturas, con unos bloques fijados y un tiempo para desarrollar cada uno. Por tanto existe poca flexibilidad y si una unidad se prolonga es en decremento de las otras. • Por estos dos puntos anteriores, muchos profesores tienden a clases más teóricas donde sea posible dar todo el temario y donde el alumno tiene una menor implicación. Hay que sumar la jornada y horarios del profesor de Secundaria, que deja poco margen para la preparación de ejercicios y actividades de metodología más activa y que necesitan de más dedicación por parte del docente.
<p><i>Experiencia del uso de la expresión gráfica como metodología activa.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • El uso de métodos gráficos en los que se apoyan los contenidos teóricos es siempre positivo de cara al aprendizaje de los mismos. • Las experiencias mejoran si la metodología gráfica no solo constituye un apoyo, sino que se hace al alumno partícipe del aprendizaje mediante la manipulación y observación de la misma. • Es una metodología muy posible, no solo por la gran cantidad de actividades que se pueden plantear, sino por las ventajas que nos aportan hoy día recursos como las pizarras digitales, proyectores o Tablet, que permiten que el alumno aprenda interactuando con dichos contenidos.

Nota: Datos de la entrevista al Director Pedagógico. Fuente: Elaboración propia.

4.6. Análisis de los resultados obtenidos

4.6.1. Características del alumnado y nivel de conocimientos previos

Dentro de los objetivos de este trabajo de campo está la necesidad de evaluar las características y los conocimientos previos del grupo al cual está dirigida la propuesta didáctica. Esto nos permite adecuar la propuesta para que pueda ser llevada a cabo dentro del contexto elegido.

De los datos reflejados en el Cuadro N° 7 podemos afirmar que el grupo elegido presenta un nivel de conocimientos matemáticos bajo. Son 25 alumnos de los que 17 de ellos aprobaron en la evaluación anterior y 8 de ellos suspendieron. Además los contenidos seleccionados suponen un problema para el alumnado pues es un bloque en el que no se profundiza en primero y por lo que no llegan con los conceptos muy claros. Esto supone un contexto adecuado en el que poner en práctica la nueva metodología activa, basada en la expresión gráfica, para recuperar el nivel necesario y adquirir los nuevos contenidos matemáticos.

Respecto de la diversidad, en el aula encontramos tres alumnos que tienen las matemáticas del curso anterior suspensas, un alumno que repite todo el curso y un alumno con necesidades educativas especiales que precisa de adaptación curricular. Ello no supondrá un problema para la aplicación de la metodología propuesta, pues los contenidos partirán desde cero y al ser un proceso activo y en parejas cuentan con el apoyo de los compañeros y del docente.

4.6.2. Dificultades habituales en la didáctica de polinomios y resolución de ecuaciones

A excepción de unos cuantos alumnos, la falta de motivación es uno de los principales problemas que presenta el alumnado respecto de la asignatura de matemáticas, con lo que la didáctica de polinomios y resolución de ecuaciones por medio de la expresión gráfica, en combinación con una metodología activa, tiene grandes posibilidades de incidir positivamente en su actitud frente a la asignatura.

A la hora de diseñar las actividades y contenidos de la propuesta didáctica se tendrá en cuenta dicha falta de motivación y se trabajarán las expresiones analíticas y gráficas a la misma de vez, persiguiendo la implicación de los alumnos, las resoluciones por parejas, las exposiciones comunes en la pizarra y dedicar gran parte del tiempo para el trabajo en clase. Dichas actividades serán cercanas a la cotidianidad del alumnado e irán ganando en abstracción conforme aumenten los conocimientos adquiridos. Todo ello para propiciar un ambiente de trabajo en clase que favorezca la implicación de los alumnos, encontrando un mayor sentido a aquello que hacen y por consiguiente mejorando la motivación.

4.6.3. Uso de metodología activa

Como podemos observar en los Cuadros N° 7 y 8, el trabajo en grupo es una actividad que se da con frecuencia en el aula de matemáticas. Los tres agentes coinciden en el beneficio que aporta una metodología activa para la construcción del

conocimiento. Sin embargo, se percibe en la entrevistas problemas en su aplicación relacionados con la evaluación de las capacidades adquiridas por cada uno de los alumnos, las calificaciones individuales y el control de las actividades. Muchos alumnos entienden que trabajar en clase y en grupo es tener tiempo libre. Otros intentan aprovecharse del trabajo de los compañeros para trabajar menos y sacar buenas notas. Buscan el camino para copiar las actividades, aprovechan las correcciones a otros grupos y distraen a los compañeros. Por lo general los alumnos se consideran demasiado mayores para realizar algunas de estas actividades, a lo que hay que sumar la gestión del tiempo y la necesidad de unas pautas de comportamiento, por parte del docente. Todo ello lleva a que muchos profesores cuestionen la viabilidad de la metodología, apoyados en el trabajo previo que precisa su puesta en marcha, la ajustada temporalización disponible y la dedicación que requiere.

4.6.4. Uso de la representación gráfica como metodología activa

Podemos observar, de la información extraída en el Cuadro N° 9, como la valoración del uso de la representación gráfica, para mejorar el aprendizaje matemático, es positiva. Es una dinámica que ya causa buenos resultados en primaria y que, previa adaptación a la edad y realidad del alumnado de secundaria, puede aportar muchos beneficios en la implicación del alumnado, la construcción del conocimiento y la mejora del aprendizaje. El director pedagógico manifiesta que dicha metodología repercute en un cambio de actitud del alumnado y por tanto en la motivación frente a la asignatura. Por otro lado matiza las ventajas que supone su uso en las primeras fases del aprendizaje, mejorando la recepción de los contenidos, la expresión de los mismos y la extensión de aquello que se aprende a otras áreas.

En los Cuadros N° 7 y 8 podemos ver como el uso de la representación gráfica no forma parte de las prácticas habituales del aula y su uso es entendido como algo complementario y que está sujeto a la temporalización de las unidades. Aunque se sabe que aporta ventajas, se da prioridad a los contenidos teóricos y matizan que los alumnos entienden la representación de polinomios y ecuaciones como algo puramente matemático sin relación con la vida cotidiana o un tipo de ejercicio. Podemos decir que dichas prácticas gráficas no son enfocadas como medio para el aprendizaje, sino solo como un medio de resolución más y rara vez existe un apoyo sobre ellas para el desarrollo de las unidades. Es una forma de expresión que suele usarse en temas muy específicos como geometría y que rápidamente es asociado con un consumo de tiempo excesivo y mayor necesidad de preparación.

4.7. Interpretación de los resultados

Al comprobar los datos obtenidos, con las teorías estudiadas en el marco teórico, verificamos que la realidad educativa corrobora el énfasis que los autores hacen en los errores comunes del estudio del álgebra y la aplicación de métodos gráficos en Secundaria.

El hecho de que las teorías hagan hincapié en aspectos de la enseñanza del álgebra como la necesidad de construir conocimiento, participar del aprendizaje y experimentarlo en contextos diversos, aplicarlo a la resolución de problemas de la vida cotidiana y favorecer la relación con los aspectos gráficos, hace inevitable observar las carencias del grupo en ese sentido. Por ello se, ofrece la oportunidad de aportar una solución apropiada, a las actuales necesidades de motivación que tienen los alumnos del grupo, mediante el empleo puntual de una nueva metodología.

Después de analizar la problemática observada en la metodología activa, podemos establecer que para su aplicación se necesita de un trabajo de desarrollo previo, fundamental para conseguir el objetivo de modificar la actitud del alumnado. Dicha metodología, en combinación con la expresión gráfica, debe convertirse en la forma de actuar durante el desarrollo de la unidad, siendo valorado como un contenido más. Tampoco se puede olvidar el trabajo de desarrollo que necesitan este tipo de metodologías, el tiempo de preparación, el de ejecución en el aula, etc., lo que supone un reto para el profesorado y los contenidos y temporalizaciones que se imponen desde las diferentes legislaciones.

De los datos obtenidos podemos observar que la expresión gráfica puede constituir un medio interesante para incidir de forma positiva en los aspectos problemáticos relacionados con la motivación del alumnado y el desempeño de la metodología activa. Sin duda, los beneficios que ya se están viendo en las etapas de Educación Primaria, como manifiesta el director pedagógico, hace que su progresivo desarrollo en la Educación Secundaria, adaptado a las necesidades de la etapa, pueda aportar beneficios que deriven en interesantes innovaciones pedagógicas.

El hecho de que el estudio de campo se haya realizado sobre una muestra reducida de la realidad educativa y, sin embargo, ésta encuentre apoyo a su problemática en las teorías extraídas de experiencias llevadas a cabo en contextos más amplios, permite la posibilidad de considerar que la propuesta didáctica que propone este trabajo, pueda servir también de solución a otros contextos educativos que motivaron la elaboración de las propias teorías.

5. Propuesta didáctica

5.1. Presentación

Los temas elegidos para la propuesta didáctica son los polinomios y la resolución de sistemas de ecuaciones; por representar el primero el inicio del lenguaje algebraico, y el segundo, la de mayor dificultad que afrontan los alumnos de 2º ESO.

Esta propuesta pretende ilustrar una metodología activa, basada en la expresión gráfica, capaz de solventar algunos de los aspectos problemáticos que se dan en el estudio del álgebra, de forma que sirva para el cambio de actitud del alumnado y la mejora del aprendizaje frente a dichos contenidos

Según se desprende del estudio de campo y del marco teórico, dicha metodología causa un buen impacto en el alumnado, puesto que aumenta la participación e implicación, la interacción con la materia que se estudia y la ruptura que supone con respecto a las prácticas habituales del aula. Permite un contexto en el que el docente tendrá oportunidad de regular y orientar la actividad desde cero hasta alcanzar los objetivos establecidos.

La intención de esta propuesta es reflejar una metodología, pero no el diseño específico de una unidad didáctica, por lo que los apartados siguientes engloban los conceptos teóricos y prácticos estudiados hasta ahora, con el fin de proporcionar una adecuada fundamentación conceptual. Por lo tanto, las actividades y temporalizaciones que se indican, deben considerarse un ejemplo para ilustrar y ayudar a la comprensión de la metodología. Hay que destacar el uso de las recomendaciones de Goñi y López (2011d, p. 125) sobre los elementos que conviene tener en cuenta a la hora de programar y planificar las actividades de aula.

5.2. Objetivos de la propuesta didáctica

5.2.1. Objetivos generales

Los objetivos generales dictados por el currículo para esta propuesta se corresponden con los extraídos del Real Decreto 1631/2006 (BOE, núm. 5, 2007, p. 752), recogido en el siguiente cuadro:

Cuadro Nº 10. Objetivos de la propuesta.

-Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos, como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
-Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, para que sea capaz de elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas.
-Manifiestar una actitud positiva ante la resolución de problemas. Mostrar confianza en la capacidad para enfrentarse a ellos. Adquirir un nivel de autoestima que le permita disfrutar de los aspectos

creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
-Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes adquiridos desde las distintas áreas, de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
-Identificar formas y relaciones espaciales presentes en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

Nota: Objetivos generales de la propuesta. Fuente: Elaboración propia.

5.2.2. Objetivos didácticos

El objetivo didáctico es el instrumento que recoge de manera clara y precisa las intenciones educativas de la propuesta didáctica (Goñi et al., 2011d, p. 127). En el Cuadro N° 11 se muestran los objetivos directamente relacionados con los contenidos matemáticos que el alumno tiene que aprender.

Cuadro N° 11. Objetivos didácticos.

1.	Interpretar y operar con los elementos básicos del lenguaje algebraico (polinomios), analítica y gráficamente.
2.	Utilizar las técnicas y procedimientos básicos del cálculo algebraico para sumar, restar o multiplicar polinomios y fracciones algebraicas sencillas.
3.	Comprobar si un par de números es o no solución de un sistema de ecuaciones, argumentando la validez de los resultados.
4.	Distinguir los tipos de sistemas, según la existencia o no de soluciones y el número de éstas, utilizando como argumento la representación gráfica de las ecuaciones.
5.	Resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante el método gráfico y experimentar la representación gráfica y modificación de los sistemas y sus soluciones a través de WolframAlpha. Comprobar después los resultados por cualquiera de los tres métodos analíticos: sustitución, igualación y reducción.
6.	Plantear, resolver y representar problemas de la vida cotidiana a través de la elaboración de sistemas de ecuaciones.

Nota: Objetivos didácticos de la propuesta. Fuente: Elaboración propia.

5.2.3. Objetivos propios de la metodología

Además de los objetivos planteados hasta ahora, en el Cuadro N° 12 se recogen los objetivos propios de la metodología.

Cuadro N° 12. Objetivos propios de la metodología.

	<i>Competencias:</i>
1.	Comunicar al alumno la metodología para la unidad, los objetivos y los criterios de evaluación de la actividad cooperativa.
2.	Trabajar actividades en grupo donde se genere reflexión, curiosidad, interdependencia y autonomía
3.	Guiar las actividades de trabajo en grupo para asegurar la participación de todos los alumnos, su implicación y un cambio de actitud frente a la materia.
4.	Reflejar un uso sencillo de la expresión gráfica, que ayude a la construcción del conocimiento matemático y sea adaptable a otros contenidos.
	<i>Tareas:</i>
1.	Construir conceptos y relaciones entre los resultados gráficos y analíticos.
2.	Desarrollar capacidades para elaborar conjeturas, aproximaciones a los resultados o procedimientos de resolución de problemas.
	<i>Habilidades:</i>
1.	Desarrollar la capacidad de visualización, para la generalización de propiedades y la clasificación de sistemas de ecuaciones.
2.	Realizar construcciones gráficas de las expresiones algebraicas.
3.	Ser capaz de interpretar, entender y comunicar la información gráfica.
4.	Aplicar las estrategias aprendidas a otros contextos de resolución de problemas.

Nota: Objetivos de la metodología. Fuente: Elaboración propia.

5.3. Competencias

A continuación se detalla la contribución que la propuesta didáctica presente hace a las competencias básicas que se establecen en el Real Decreto 1631/2006 (BOE, núm. 5, 2007, p. 686).

-Competencia en comunicación lingüística. Al ser el alumno capaz de extraer información de un enunciado, entenderlo y transferirlo al lenguaje algebraico, dicho alumno podrá describir el proceso seguido y expresar tanto por escrito, como oralmente, las ideas y conclusiones personales.

-Competencia matemática. Al contribuir al desarrollo de conceptos matemáticos como los polinomios y las ecuaciones, a su razonamiento, a su expresión mediante el lenguaje algebraico y a la resolución de problemas de la vida cotidiana.

-Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico. Al expresar problemas y situaciones de la vida real que pueden ser solucionados o expresados mediante el uso de polinomios y sistemas de ecuaciones, estudiando sus representaciones gráficas para el análisis de: relaciones entre dos magnitudes (velocidad/tiempo, velocidad/distancia recorrida, etc.), trayectorias, diagramas, etc.

-Tratamiento de la información y competencia digital. A través del empleo de medios digitales como WolframAlpha u otros portales online que permiten la representación y solución de polinomios y sistemas de ecuaciones, facilitando su estudio y comprensión.

-Competencia social y ciudadana. Mediante el trabajo cooperativo, se favorece la discusión y valoración de distintos puntos de vista entre los compañeros, se defienden los propios argumentos y se valoran reflexiones ajenas, con el fin de desarrollar un trabajo en grupo.

-Competencia cultural y artística. Al ser el alumno introducido en la historia de las ecuaciones y polinomios, estudiar como surgieron, como se entendían, y su evolución a lo largo de la historia hasta nuestros días.

-Competencia para aprender a aprender. Los contenidos seleccionados ayudan al alumno a desarrollar destrezas como la autonomía, la capacidad de investigación, la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficacia el propio trabajo y enfrentarse a nuevas situaciones o problemas.

-Autonomía e iniciativa personal. Desarrollando en el alumno espíritu crítico frente a las ideas y prejuicios para que planifique sus estrategias y asuma el reto de investigar, elaborar y transmitir conocimiento.

5.4. Contenidos seleccionados

Los contenidos seleccionados en la elaboración de esta propuesta se han expresado en el siguiente cuadro:

Cuadro Nº 13. Contenidos seleccionados para la propuesta.

Polinomios y Sistemas de ecuaciones.	Breve introducción histórica sobre los polinomios y los sistemas de ecuaciones, cuándo y cómo surgieron, para qué se empleaban y cómo han evolucionado hasta nuestros días.
Polinomios	Definición de monomios y polinomios.
	Suma y diferencia de monomios y polinomios.
	Producto de monomios, monomios y polinomios y polinomios.
Sistemas de ecuaciones	Definición de sistemas de ecuaciones.
	Clasificación de sistemas de ecuaciones: sistema compatible determinado, sistema compatible indeterminado y sistema incompatible.
	Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales: gráfico, sustitución, igualación y reducción.
	Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones.

Nota: Resumen de contenidos de la propuesta. Fuente: Elaboración propia.

Como se recogen en el Real Decreto 1631/2006 (BOE, núm. 5, 2007, p. 754), los contenidos seleccionados pertenecen al bloque 3 (Álgebra), cuyo tratamiento engloba aspectos como: la transformación de las ecuaciones en otras equivalentes, significado y soluciones de las ecuaciones, interpretación de las soluciones, etc.

5.5. Estructura cooperativa de la actividad

La asignatura de Matemáticas tiende a considerarse como una materia que, por su naturaleza, debe ser aprendida en solitario. Sin embargo, son varias las investigaciones que ponen de manifiesto el beneficio de tratar la construcción del conocimiento matemático a través de procesos de aprendizaje participativos y constructivistas (Pons et al., 2008). Dichas investigaciones demuestran que el trabajo cooperativo en matemáticas mejora significativamente el rendimiento académico, sobre todo, si los contenidos son parcial o totalmente novedosos.

5.5.1. Grupos de clase y rol del profesor

El profesor se encarga de crear los diferentes grupos de trabajo en el aula y de guiar todo el proceso. Debe cuidar la buena organización y funcionamiento de los diferentes grupos, de que se cumplan los hitos establecidos y las actividades se desarrollen dentro del tiempo disponible.

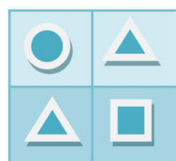
Para ello deberá realizar las tareas siguientes:

- Decidir la formación de los grupos y los roles para cada uno de los integrantes.
- Explicar los objetivos que se pretenden llevar a cabo a través de las actividades.
- Exponer con claridad los criterios de evaluación de las actividades.

- Conducir y corregir el trabajo de los diferentes grupos.

5.5.2. Grupo de trabajo cooperativo

Para la puesta en práctica de la propuesta didáctica se formarán grupos de 4 alumnos cada uno. Siguiendo las recomendaciones de Pujolás (2008) sobre la formación de los equipos, cuidaremos que cada grupo esté siempre integrado, en la medida de lo posible, por una configuración heterogénea como la reflejada en la imagen siguiente.



: Alumno más capaz (rendimiento, motivación, organización).

: Alumno medio.

: Alumno con necesidad de apoyo.

Imagen N° 2. Configuración de grupos cooperativos. Fuente: Pujolás (2008).

Aunque el profesor ejercerá de guía y conductor de todas las tareas, asignará la responsabilidad de administrar cada uno de los grupos a uno de los alumnos con mayor capacidad. Su misión será la de portavoz del grupo y la de asegurar que todos los integrantes participen en las actividades de manera adecuada para conseguir los objetivos de los ejercicios.

Es posible que, por las necesidades del aula o el número de alumnos, tengan que surgir grupos de tres o cinco miembros. En ellos, se seguirá el mismo criterio, para buscar que el equipo conformado tenga el mayor equilibrio posible entre los tres tipos de alumnado. En estos grupos, se trabajará de la misma forma, puesto que la cantidad de ejercicios asignados está en función del número de alumnos.

En la fase de trabajo, cada uno de los miembros del grupo resolverá un ejercicio asignado, y, después, el equipo hará una puesta en común para estudiar cada uno de los resultados, por qué se llegan a esas soluciones y si son válidas, a continuación emitirá un informe de las conclusiones a las que ha llegado.

5.6. Organización del aula

Al tratarse de una metodología activa y cooperativa, es necesario que dichos grupos se organicen en el aula, físicamente juntos, para el intercambio de

información, su estudio y la organización del equipo frente a las actividades. Por tanto, la clase se configurará, habitualmente, en grupos de cuatro. Pero hay que considerar, también, el desarrollo de actividades individuales, que exige que los alumnos trabajen por separado, permite poner en práctica la autonomía adquirida, evita el intercambio de información, crea un ambiente más reflexivo, y facilita desarrollar los conocimientos adquiridos en las fases de trabajo cooperativo. De esta forma el docente puede evaluar al alumno por su evolución en el trabajo en grupo y a nivel individual, para establecer una visión amplia de cada uno de ellos.

5.7. Metodología

Esta propuesta metodológica se desarrolla para el aprendizaje de polinomios y sistemas de ecuaciones y es aplicable a otros contenidos del álgebra, pues comparte la misma base teórica.

Como ya hemos argumentado, no se trata del desarrollo de una unidad, sino de exponer la metodología, por lo que las actividades y ejemplos expuestos son orientaciones para la aplicación de la metodología. Igual ocurre con la temporalización, que, inicialmente, se plantea para una extensión de ocho sesiones de 50 minutos, por ser esta la duración de las clases durante el periodo de prácticas y corresponder a dos semanas de trabajo, pero que debe ser adaptada a las necesidades, temporalizaciones y contenidos que cada docente estime oportuno.

Las clases, a su vez, se dividen en dos fases: una primera de 20 minutos para la explicación de los nuevos contenidos o la corrección de tareas pendientes; una segunda, de 30 minutos en la que los alumnos trabajan en grupo y ponen en práctica los contenidos adquiridos. En ambas fases la expresión gráfica, como medio de enseñanza y aprendizaje, será la protagonista de explicaciones y actividades.

Dado que no es muy usual el trabajo en grupo en matemáticas, y que se requiere de organización, la primera sesión servirá para la preparación de los grupos, la aclaración del funcionamiento de clase, los objetivos a alcanzar, introducir los contenidos que se van a trabajar, las instrucciones para el desarrollo de actividades y los criterios que serán tenidos en cuenta para evaluar.

5.7.1. Fase 1: Explicación de los contenidos

Tras la primera sesión introductoria, y una vez configurados los grupos, en la fase 1 de las siguientes sesiones se trabajan los contenidos, desde los polinomios hasta llegar a los sistemas de ecuaciones, comenzando por representaciones gráficas, para ver cada una de sus partes, así como la correspondencia con su expresión

analítica, que permite trabajar en ambos sentidos por comparación y yuxtaposición, según plantea Duval (2006, p. 161). El trabajo se desarrollará de acuerdo a la descripción del siguiente cuadro:

Cuadro N° 14. Desarrollo de la fase 1 de la propuesta.

Contenidos	¿Qué se aprende?	¿Cómo se aprende?	
Polinomios	Concepto de monomio	Observación directa de las expresiones gráficas y su manipulación	Ejemplo: Representar en la pizarra, de manera aproximada cada uno de los monomios y polinomios
	Concepto de polinomio		Ejemplo: Uso de Wólfram Alpha, o una serie de representaciones sobre la pizarra para visualizar y comprender cada uno de los tipos.
	Tipos de polinomios		
	Suma de monomios y polinomios		
	Producto de monomios y polinomios		
Sistemas de ecuaciones	Concepto de sistema de ecuaciones	Observación directa de las expresiones gráficas y su manipulación	Ejemplo: Representar dos líneas que se cortan y deducir sus expresiones algebraicas.
	Clasificación de sistemas de ecuaciones		Ejemplo: Representar gráficamente los distintos tipos de sistemas, comparando las diferencias.
	Métodos de resolución		Ejemplo: Comenzar con una resolución mediante método gráfico y comparar los resultados con los obtenidos por métodos analíticos.
	Resolución de problemas mediante sistemas		Ejemplo: Realizando problemas de situaciones reales y que pueden ser solucionados mediante sistemas de ecuaciones.

Nota: Desarrollo de la fase 1 de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, lo importante no es la exactitud de las representaciones, sino que los alumnos entiendan: que un monomio es una recta, que según su término independiente cambia de inclinación o posición; que un polinomio, dependiendo de su grado, representa curvas que varían en forma y puntos de corte; qué cambios se originan al sumar o multiplicar monomios o polinomios. Con la representación de sistemas de ecuaciones conseguimos que los alumnos comprendan que son rectas que, según su posición, pueden clasificarse, tener solución, etc., y hacer más cercana la transición a los distintos métodos de resolución.

Cuadro N° 15. Dificultad algebraica desarrollada en la fase 1.

<i>Dificultad desarrollada</i>	
Mediante la expresión gráfica y el paso a expresiones algebraicas el alumno es introducido en el concepto de variables, coeficientes y términos independiente, así como el uso de la variable.	Uso de variables
A través de estudiar gráficamente cómo afectan las distintas operaciones algebraicas y que cambios se producen, el alumno maneja el concepto de igualdad y el nuevos convenio de notaciones.	Igualdades
	El uso de las notaciones

Nota: Dificultad algebraica desarrollada en la fase 1. Fuente: Elaboración propia.

La propuesta metodológica también ayuda en el desarrollo de las siguientes tareas y habilidades:

Cuadro N° 16. Tareas y habilidades desarrolladas en la fase 1.

Tareas		Habilidades	
De conceptualización	Construcción de conceptos y relaciones geométricas.	Visuales	A través de las representaciones gráficas.
		De dibujo	Sirviendo de apoyo para los planteamientos y resolución de ejercicios.

Nota: Tareas y habilidades desarrolladas en la fase 1. Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, abordaremos la primera fase de la clase y sentaremos la base sobre la que establecer las actividades a desempeñar por los grupos, ayudándonos de la representación para crear un nivel intermedio entre la realidad y los conceptos matemáticos. En los Anexos 12.5., 12.6. y 12.7, se recogen ejemplos de polinomios, sistemas de ecuaciones y problemas que muestran unas líneas generales de la metodología expuesta.

5.7.2. Fase 2: Explicación de los contenidos

En esta segunda fase se plantean las actividades que desarrollarán los grupos, para que los alumnos pongan de manifiesto los conceptos sobre polinomios y sistemas de ecuaciones aprendidos en la primera fase. En esta segunda fase, expresan gráficamente las expresiones algebraicas, pueden clasificarlas, aproximarse a su solución y resolverlas exactamente por métodos analíticos.

Cuadro N° 17. Desarrollo de la fase 2 de la propuesta.

Contenidos	¿Qué se aprende?	¿Cómo se aprende?	
Polinomios	A clasificar los diferentes tipos de polinomios y a operar con ellos.	Mediante la aplicación online Wolfram Alpha o la representación manual de cada una de las expresiones.	Ejemplo: Se aporta una representación de un polinomio a cada uno de los componentes del grupo, para que realicen una clasificación y argumenten el grado del mismo.
			Ejemplo: Se aporta un polinomio a cada componente para ser representado. Una vez realizado, se le suma un monomio y se estudian ambas representaciones, argumentando las diferencias.
Sistemas de ecuaciones	A clasificar los diferentes tipos de sistemas, resolverlos por diferentes métodos y aplicarlos en situaciones cotidianas.	Mediante la aplicación online Wolfram Alpha o la representación manual de cada una de las expresiones.	Ejemplo: Cada uno de los miembros representa un sistema de ecuaciones, clasificándolo según tenga o no solución y argumentándolo con sus compañeros.
			Ejemplo: Mediante el método gráfico, anticipar la solución del sistema de ecuaciones dado a cada miembro, para, después, ser resuelto de forma analítica y comprobar la predicción.

Nota: Desarrollo de la fase 2 de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia.

Al igual que en la primera, esta segunda fase está orientada al desarrollo de algunas habilidades y tareas por parte de los alumnos.

Cuadro N° 18. Desarrollo de la fase 2 de la propuesta.

<i>Tareas</i>		<i>Habilidades</i>	
De aprendizaje	Los alumnos se valdrán de relaciones y conceptos algebraicos ya aprendidos, para obtener lo que en cada tipo de problema se pide y construir así su conocimiento.	De comunicación	A través del manejo del lenguaje algebraico.
		De dibujo	En las resoluciones, el alumno podrá valerse de sus representaciones o incluso ayudarse de Wolfram Alpha, y mejorar su capacidad de análisis.
		De razonamiento	A lo largo de todo el proceso de resolución de sistemas y problemas y a la hora de defender los resultados obtenidos.
De demostración	Los alumnos tendrán que argumentar que los resultados obtenidos son los correctos y que los distintos métodos han sido aplicados de forma adecuada.	De aplicación o transferencia	Mediante aplicación de los conceptos adquiridos a la resolución de sistemas de ecuaciones, a los problemas cotidianos del alumno, y a su uso en otras áreas.

Nota: Desarrollo de la fase 1 de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia.

Con esta segunda fase completamos las etapas por las que transcurre el aprendizaje de polinomios y sistemas de ecuaciones, para cerrar la secuencia:

Visualización – Abstracción- Creación del conocimiento - Argumentación

5.8. Evaluación

Al tratarse de una metodología que mezcla trabajo individual y grupal, puede resultar compleja la evaluación de los alumnos, por ello se propone que debe tener en cuenta los aspectos recogidos en el siguiente cuadro:

Cuadro N° 19. Aspectos a valorar en la evaluación.

Examen individual	Según rubrica que se incorpora en anexo
Trabajo en grupo	Comportamiento del grupo.
	Actividades realizadas.
	Argumentaciones y justificaciones de las actividades.
Cuaderno de clase del alumno	Completo, organizado y limpio

Nota: Aspectos a valorar en la evaluación. Fuente: Elaboración propia.

Para la valoración del examen se propone la utilización de una matriz de evaluación. Los criterios de evaluación del Cuadro N° 20 del Anexo se han elaborado con Rubistar (ALTEC, 2008) y han sido adaptados a los contenidos que se han desarrollado (polinomios y sistemas de ecuaciones).

Por todo ello, la nota será individual, pero recogerá factores de la participación en el grupo, su implicación y el trabajo observado.

6. Aportaciones del trabajo

La principal aportación del trabajo es mostrar los beneficios del uso de la representación gráfica en el aprendizaje de polinomios y resolución de ecuaciones en 2º de ESO, contribuyendo así, entre otros, al desarrollo de la competencia matemática, cultural y artística, aprender a aprender, etc.

Aunque el estudio de campo realizado muestre que algunos aspectos de esta disciplina artística son empleados en el aula para complementar la enseñanza de las áreas desarrolladas, este trabajo tiene como objetivo mostrar una metodología en la que la representación gráfica forma parte del método de enseñanza, y no se limita a un complemento final y ayudando desde el inicio a la mejora de la fase receptiva de la información, así como la expresiva. Es decir, transformar dicha representación gráfica en herramienta metodológica propia de la disciplina y que se puede transferir a la práctica educativa, pudiendo ser incluso combinada con otro tipo de herramientas TIC o incluso software de representación tridimensional, fomentando el uso de las tecnologías y ofrecer propuestas que, además de la mejora de las competencias ya citadas, puedan contribuir a la mejora de la competencia digital.

La propuesta metodológica trata de ofrecer a los docentes una opción más para el trabajo con polinomios y resolución de ecuaciones, para que puedan existir alternativas, aumentar el interés y la motivación del alumnado hacia los contenidos trabajados, e intentar mejorar los resultados de esta área, que resulta especialmente difícil para los alumnos, según consideran los autores e informes recogidos en el marco teórico. Son, pues las técnicas de representación, como las que se han descrito en la propuesta didáctica, las que configuran una participación activa del sujeto, ya que combinan trabajo individual y trabajo cooperativo, lo que contribuye a un cambio de actitud del alumno frente a contenidos, que, tradicionalmente, se venían estudiando de forma individual y teórica.

7. Discusión

En la enseñanza del álgebra es fundamental el uso de metodologías en las que el alumnado pueda asociar la materia a contextos diversos, experimentando y relacionando conceptos en la resolución de problemas (Goñi, 2011c). Esto no debe estar reñido con la exigencia del docente en la exigencia de destreza, rigor y la precisión necesarios en el desarrollo de los algoritmos matemáticos. En este sentido la aparición de errores matemáticos en el desarrollo de procesos de resolución se deben considerar como elementos que hay que corregir y evaluar. El empleo de la expresión gráfica como herramienta de apoyo en la resolución de ecuaciones o en el desarrollo de polinomios, no debe relajar al alumno en este sentido debiendo ser consciente de que resuelve un ejercicio matemático y debe dar una respuesta adecuada para esta materia.

Son varios los autores que afirman que una metodología activa puede derivar en problemas de comportamiento, falta de comunicación en alumnos que sean de diferentes culturas, implicación desigual de los miembros, etc. Sin embargo dichos aspectos pueden ser resueltos con la planificación adecuada, el establecimiento de unas pautas de comportamiento y la implicación del alumnado en las normas de convivencia y comportamiento. No hay que olvidar que el uso de la metodología propuesta no debe limitarse a la ejecución de pasos descontextualizados, sino que debe ser enfocada por el docente como medio de aproximación a los conceptos matemáticos que se transmiten, a las relaciones humanas y sociales, al intercambio de experiencias y la transmisión de los contenidos.

La repercusión positiva de la expresión gráfica en la construcción del conocimiento matemático es un hecho probado como manifiesta Duval (2006). Sin embargo como se observó en el periodo de prácticas no suele formar parte de los recursos del docente, limitándose en muchos de los casos a un complemento que se le muestra al alumno al final del desarrollo de los contenidos, debido a la necesidad de preparación de los recursos gráficos necesarios, falta de destreza con los medios de representación gráfica, la carga de trabajo o la falta de tiempo disponible para cuidar los puntos precisos para la adecuada implantación, por lo que necesario un cambio de actitud en este sentido por parte el profesorado.

8. Conclusiones

A lo largo del presente trabajo hemos estudiado cómo la representación gráfica aporta beneficios en el aprendizaje de contenidos matemáticos, en el desarrollo de habilidades y en la adquisición de competencias propias de las matemáticas y de otras áreas. Se propone, por tanto, una metodología activa, basada en la representación gráfica, para 2º de ESO, que ayude en el aprendizaje de una temática tradicionalmente árida para el alumnado, como son los polinomios y la resolución de ecuaciones.

Por ello se plantea el siguiente objetivo principal y los siguientes objetivos específicos enumerados a continuación:

1. El objetivo principal consiste en: “Proponer y desarrollar una metodología para enseñar polinomios y resolución de ecuaciones en 2º de ESO, basada en el trabajo de la expresión gráfica”. Para cumplir con este objetivo se han estudiado a autores de referencia en el uso de la expresión gráfica en la docencia, sus experiencias, aportaciones y estudios teóricos, estableciendo así un marco teórico que ha servido de base para enfocar el estudio de campo, en el que se recogen las opiniones de un Tutor de Matemáticas, un Coordinador del Departamento de Matemáticas y un Director Pedagógico, para, con todo ello, realizar la propuesta didáctica basada en la expresión gráfica como metodología activa en la docencia.
2. El primer objetivo específico consiste en: “Averiguar los principales problemas que suelen darse en alumnos de 2º de ESO”. En este sentido, se han estudiado y comprendido, a través del estudio de campo (Capítulo 4) y del marco teórico (Capítulo 3), cuáles son los principales problemas que los alumnos presentan, habitualmente, en el aprendizaje del álgebra. Se ha observado el esfuerzo que supone para el alumnado el paso de la aritmética al álgebra para poder actuar en los errores que se producen en relación a las variables, el significado de la igualdad en la ecuación, la representación gráfica de ecuaciones, así como los derivados de los convenios de notación. Se considera cumplido el objetivo, como comprobamos en los capítulos 3.3. y 3.4. (Didáctica del álgebra y Representación gráfica en matemáticas).
3. El segundo objetivo específico consiste en: “Proponer una metodología, que basada en la expresión gráfica, mejore la actitud de los alumnos frente a dicha materia”. Para ello, en el trabajo de campo se ha comprobado que los polinomios y ecuaciones no son bien acogidos por el alumnado debido a las ideas preconcebidas y por ser considerados, de antemano, difíciles, hecho que

confirman los docentes entrevistados, cuyo testimonio se recoge en el capítulo 4, además de los autores estudiados en el marco teórico. Como respuesta a dicha problemática, se propone el uso de una metodología activa, basada en la expresión gráfica, para mejorar la imagen conceptual y actitud que tiene el alumnado frente a los polinomios y la resolución de ecuaciones, con especial incidencia en la necesidad de hacer dichos contenidos cercanos y aprender interactuando con las representaciones (capítulo 2.3. Metodología). Este tipo de metodología, como expresan los autores recogidos en el capítulo 3.4. (Representación gráfica en matemáticas), mejora la comprensión y representación de las ecuaciones que, inicialmente, suponían una gran dificultad. Hecho que también corroboran los tres agentes entrevistados en los capítulos 4.5.1-4.5.3. del estudio de campo. Dicho objetivo se ha alcanzado como podemos ver en el capítulo 5 (Propuesta didáctica).

4. El tercer objetivo específico. Consistente en: “Plantear los contenidos y actividades gráficas de forma que permitan al alumno desarrollar su capacidad de reflexión y autonomía en la resolución de polinomios y ecuaciones”. Por medio de la representación gráfica, tal y como comprobamos en el capítulo 3.4. (Representación gráfica en matemáticas), podemos crear un aprendizaje basado en la comparación y yuxtaposición de expresiones analíticas y gráficas, induciendo a los alumnos a la reflexión sobre los resultados obtenidos y mejorando la fase receptiva del aprendizaje. El alumnado consigue, a través de estas actividades, interpretar cada uno de los términos de los polinomios y las ecuaciones porque entiende su función y, consecuentemente, mejora la comprensión de los contenidos, hecho que comparten los agentes entrevistados en el estudio de campo, y que se apoya en la base teórica del capítulo 3.4.1. (¿Cómo hacer que los estudiantes usen la representación?). Por ello se considera cumplido dicho objetivo.
5. El cuarto objetivo específico consiste en: “Establecer modelos de resolución de ejercicios, basados en métodos gráficos, que contribuyan a agilizar el planteamiento y solución de los mismos”. En el trabajo de campo se ha comprobado que los alumnos que aprenden mediante el uso de metodologías gráficas obtienen mejoras de rendimiento y agilidad en resolución de sistemas de ecuaciones, recogido en el capítulo 3.3.7. (Las funciones y sus gráficas), donde se llega a la conclusión de que los estudiantes más capaces prefieren el formato gráfico para la adquisición de conceptos. Dichas herramientas permiten al alumnado intuir, de forma aproximada y rápida, cuáles serán los valores de la

solución, comprobar el resultado obtenido mediante procesos analíticos, tener mayor seguridad en los procesos de resolución, etc., con el consiguiente aumento de la motivación. Por ello el objetivo se ha cumplido.

Superados estos cuatro objetivos específicos y el objetivo principal, se considera que se ha alcanzado la meta propuesta para el presente trabajo fin de máster, y que se ha aportado una metodología que ayuda en la docencia de las matemáticas, en cuanto a los contenidos tratados, y que puede ser extensible a otros bloques temáticos.

9. Limitaciones del trabajo

Aunque las conclusiones del trabajo muestran que se han alcanzado todos los objetivos que se perseguían para la resolución de ecuaciones y polinomios, la limitación de tiempo ha sido un hándicap para la realización de este trabajo, permitiendo sentar las líneas generales para la metodología propuesta, pero no pudiendo profundizar en todos aspectos. En este sentido en el presente trabajo se han acotado los contenidos a ciertos aspectos del álgebra, para el curso de 2º de ESO, centrándonos en las mayores dificultades para los alumnos.

Así mismo el trabajo de campo llevado a cabo ha sido realizado sobre un contexto poco amplio, limitándose a una pequeña muestra de alumnos, por lo que los datos obtenidos, aunque representativos, no pueden reflejar toda la realidad educativa.

La propuesta didáctica contribuye a valorar la aplicación de la metodología. Sin embargo, sería necesaria su aplicación real en el ejercicio docente, que aunque previsto en el estudio de campo, puede distar en cierta manera del devenir en las aulas. Esto permitiría sin duda valorar los resultados en condiciones reales y ayudaría a ampliar y reforzar aspectos de la propuesta a fin de completarla.

Por otro lado el trabajo cuenta con referencias teóricas sobre la influencia en alumnado de la metodología propuesta, pero no incluye un análisis pormenorizado y real sobre las repercusiones en grupos mayores de alumnos para los contenidos seleccionados.

Por otro lado los recursos con los que se ha trabajado la metodología propuesta han sido los facilitados por el centro y equipo docente del mismo, siendo esta solo una representación de los disponibles hoy en día para la puesta en funcionamiento de la misma.

10. Líneas de investigación futura

Con vistas a futuras investigaciones cabe ampliar el contexto empleado en el trabajo de campo, de forma que pueda ser mejor contrastado en diferentes aulas y situaciones, pudiendo limar aspectos que no den los resultados deseados y añadir otros que puedan contribuir a la metodología expuesta.

El estudio de dicha metodología puede ser ampliado para ser aplicado con otros recursos y herramientas diferentes a las empleadas, a fin de ganar en el proceso cognitivo e implicación de los alumnos y crear un repertorio amplio de herramientas que permita adaptarnos a las necesidades específicas de cada aula. Profundizando en el empleo de recursos digitales o la aplicación de la misma a la resolución de situaciones de la vida real se podrían mejorar la competencia digital y la interacción con el mundo físico, competencia social y ciudadana. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación constituyen un aspecto interesante en el que profundizar, pues son muchas las aplicaciones, herramientas y materiales que surgen casi a diario, las cuales tienen una gran repercusión en la motivación del alumnado respecto del aprendizaje. Ejemplo de ello es sin duda el empleo de la pizarra digital en esta metodología, que puede aportar muchos beneficios, tanto en el trabajo cooperativo, como en la asimilación de los contenidos.

Otro aspecto destacable, en el que profundizar más, es en el estudio del trabajo cooperativo, en combinación con dicha metodología, para mejorar la aplicación de la misma, la motivación de los alumnos, las relaciones humanas, el ambiente de trabajo en clase, orientar los contenidos y las actividades.

Todos estas líneas de mejora, deben repercutir, además, en un punto fundamental, como es el de ampliar el ámbito de aplicación, de forma que la metodología pueda ser llevada a otras unidades, bloques de contenidos de la asignatura de matemáticas, niveles de Secundaria u otras materias. El beneficio que aporta puede emplearse al trabajo de otras competencias, distintas a las ya tratadas.

11. Bibliografía

11.1. Referencias

- Alayo, F. (Trad.) (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. País Vasco: Editorial Ellacuría. Recuperado el 26/04/2014 de <http://www.iesmarquesdesantillana.org/files/01065.pdf>
- ALTEC (2008). *Rubistar*. [Página web para crear rúbricas]. Recuperado el 26/04/2014 de <http://rubistar.4teachers.org>
- Casacuberta, C. (2000). *Álgebra Lineal y Geometría*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Chambers, P. y Timlin, R. (2013). *Teaching Mathematics in the Secondary School* (2ª Ed.). Londres: SAGE Publications.
- Corbalán, F. (2006). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Editorial Graó.
- Corbalán, F. (2008). *Las matemáticas de los no matemáticos*. Barcelona: Editorial Graó.
- Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria obligatoria en Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (8 de agosto de 2007), núm. 156, pp. 16-25. Recuperado el 26/04/2014 de <http://www.adideandalucia.es/normas/decretos/Decreto%20231-2007%20Ensenanzas%20Secundaria.pdf>
- Duval, R. (1993). *El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial*. México: Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. University of Crete, Department of Education.
- Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1981). Function concepts: Intuitive baseline. En Comiti, C. y Vergnaud, G. (Eds.) (1981). *Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 183-188). Grenoble: IMAG.

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. En Godino, J. D. (Dir.), *Matemáticas y su didáctica para maestros* (pp. 7-154). Recuperado el 26/04/2014 de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf
- Gómez, G. R., Flores, J. G., y Jiménez, E. G. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada: Aljibe. Recuperado el 26/04/2014 de <http://media.utp.edu.co/institutoambiental2011/archivos/metodologia-de-lainvestigacion-cualitativa/investigacioncualitativa.doc>
- Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.
- Goñi, J. M. (2011b). Las finalidades del currículo de matemáticas en Secundaria y bachillerato. En Goñi, J. M. (coord.) (2011a). *Didáctica de las matemáticas* (pp. 9-25). Barcelona: Editorial Graó.
- Goñi, J. M. (coord.) (2011c). *Complementos de formación disciplinar*. Barcelona: Editorial Graó.
- Junta de Andalucía consejería de Educación, Cultura y Deporte. Revisado el 26/04/2014 de <http://www.juntadeandalucia.es/educacion>
- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Educations. En Grouws, D. (Ed.) (1992). *Handbook of Research Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 515-556). New York: MacMillan.
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado (4 de mayo de 2006), núm. 106, pp. 17158-17207. Recuperado el 26/04/2014 de <http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado (10 de diciembre de 2013), núm. 295, pp. 97858-97921. Recuperado el 26/04/2014 de <https://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf>
- Markovits, Z., Eylon, B. S. y Bruckheimer, M. (1983). Functions-linearity unconstrained. En Hershkowitz, R. (Ed.) (1983). *Proceedings of the*

Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 271-277). Rehovot: Weizmann Institute of Science.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Revisado el 26/04/2014 de <http://www.mecd.gob.es/portada-mecd/>

Ministerio de Educación (2013). *PISA 2013. Programa de Evaluación Internacional de los Alumnos. OCDE Informe español*. Madrid: Autor. Recuperado el 26/04/2014 de <http://www.mecd.gob.es/prensa-mecd/dms/mecd/prensa-mecd/actualidad/2013/12/20131203-pisa/pisa-2012.pdf>

Mullis, V. S., Martin, Michael O., Foy, Pierre y Arora, Alka (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. Recuperado el 26/04/2014 de http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf

OCDE (2009). *Informe TALIS. La creación de entornos eficaces de enseñanza y aprendizaje. Síntesis de los primeros resultados*. Santillana Educación. Recuperado el 26/04/2014 de <http://www.oecd.org/centrodemexico/medios/43058438.pdf>

OCDE (2013). *ESPAÑA—Nota País—Resultados PISA 2012*. Recuperado el 26/04/2014 de <http://estaticos.elmundo.es/documentos/2013/12/03/pisa-espana.pdf>

OCDE (2013). *PISA 2012 Results in Focus*. PISA, OECD Publishing. Recuperado el 26/04/2014 de <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf>

Orden de 10-8-2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (30 de agosto de 2007), núm. 171, pp. 23-65. Recuperado el 26/04/2014 de <http://www.adideandalucia.es/normas/ordenes/Orden%2010-8-2007%20Curriculo%20Secundaria.pdf>

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ediciones Morata.

- Pons, R. M., Serrano, J. M., y González Herrero, M. E. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido. *Anales de psicología*, 24(2), 253-261. Recuperado el 26/04/2014 de <http://digitum.um.es/xmlui/handle/10201/8175>
- Pujolás i Masset, P. (2008). *9 Ideas clave. El aprendizaje cooperativo*, (Vol. 8). Barcelona: Graó.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (5 enero 2007), núm. 5, pp. 677-773. Recuperado el 26/04/2014 de <http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf>
- Rojas, P. J. (2012). Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital matemática, educación e internet*, 12(1), 1-5. Recuperado el 26/04/2014 de http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Secciones/Didactica_y_Software/P_Rojas_V12N1_2011/P_Rojas_V12N1_2011.pdf
- Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. En Bergeron, J. C.; Herscovics, N. y Kieran, C. (Eds.) (1987). *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 162-169). Montréal: Université de Montréal.
- Vergnaud, G. y Errecalde, P. (1980). Some steps in the understanding and the use of scales and axis by 10-13 year old students. En Karplus, R. (Ed.) (1980). *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education* (pp. 285-291). Berkeley: University of California.

11.2. Bibliografía complementaria

- Miranda, A., Fortes, C. y Gil, M. D. (2009). Dificultades del aprendizaje de las matemáticas. Un enfoque evolutivo. Archidona (Málaga): Ediciones Aljibe.
- Rojano, M. T. (2010). *Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos*. *Números*, (75), 5-20. Recuperado el 26/04/2014 de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3323486>
- The Algebra Project. (2013). *The Algebra Project*. Recuperado el 26/04/2014 de <http://www.álgebra.org/>
- Universidad Internacional de La Rioja (2014). *Estrategias de aprendizaje*. Documento de la asignatura “Estrategias de aprendizaje” del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria. Logroño: Autor.
- Universidad Internacional de La Rioja (2014). *Recursos didácticos para Matemáticas*. Documento de la asignatura “Recursos didácticos para Matemáticas” del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria. Logroño: Autor.

12. Anexos

12.1. Entrevista al Tutor de Matemáticas

Guía de preguntas al Tutor de Matemáticas del grupo de 2º de ESO:

1. ¿Cuántos alumnos tiene el grupo de matemáticas?
2. ¿Qué edad tienen aproximadamente?
3. ¿Cómo es la diversidad de la clase?
4. ¿Hay algún caso de NEE?
5. ¿Cómo son los resultados obtenidos en matemáticas hasta ahora?
6. ¿Cómo crees que es la motivación del alumnado con la asignatura de matemáticas?
7. ¿Cuál es su nivel de conocimientos en polinomios y resolución de ecuaciones?
8. ¿Cuáles son las dificultades más habituales a la hora de abordar los polinomios y la resolución de ecuaciones?
9. ¿Resuelven ecuaciones y polinomios sin problema con cualquiera de los tres métodos básicos de resolución?
10. ¿Resuelven con el método gráfico de resolución?
11. ¿Cuál es el método que más les gusta? ¿Cuál el que menos?
12. ¿Se desarrolla en clase una metodología activa y participativa con los alumnos?
13. ¿Son capaces de aplicar polinomios y ecuaciones a problemas de la vida cotidiana?
14. ¿Cuáles dirías que son las dificultades principales que tienen los alumnos con los polinomios y las ecuaciones?
15. ¿Cuál es la metodología empleada para la enseñanza de polinomios y resolución de ecuaciones?
16. ¿Participan los alumnos de manera activa en la elaboración de sus conocimientos de sistemas de ecuaciones?
17. ¿Qué criterios de evaluación se emplea para evaluar a los alumnos en los conocimientos de polinomios y sistemas de ecuaciones? ¿Se evalúa el trabajo y la participación en clase?
18. ¿Disponéis de actividades de trabajo en grupo o cooperativo?
19. ¿Con qué frecuencia se dan las actividades de trabajo cooperativo?
20. ¿Qué beneficios crees que aporta ese tipo de actividades en los procesos de aula?

21. ¿Qué aspectos negativos puede traer consigo la aplicación de esta metodología?
22. ¿Se evalúa el trabajo en grupo o cooperativo? ¿Cómo se evalúa?
23. ¿Cuáles consideras que son las mayores dificultades a la hora de evaluar el trabajo cooperativo?
24. ¿Con qué frecuencia haces uso de la representación gráfica en clase de matemáticas?
25. ¿Se hace uso de la representación gráfica para el aprendizaje de polinomios y la resolución de ejercicios?
26. ¿Cuáles crees que son las ventajas e inconvenientes del uso de la representación gráfica?
27. ¿Cuál ha sido la experiencia del uso de la expresión gráfica como metodología activa en aprendizaje de polinomios y resolución de ecuaciones?
28. ¿Participan los alumnos de estas representaciones como parte del proceso de aprendizaje de la unidad?
29. ¿Ayuda esta metodología a la construcción del conocimiento matemático?
30. ¿Crees que el uso de una metodología activa, basada en el uso de la representación gráfica mejoraría las primeras fases del aprendizaje?
31. ¿Está el alumno hoy día motivado? ¿Cuál es el grado de motivación e implicación del aula?
32. ¿Puede este tipo de metodologías causar reflexión en el alumno, mejorar su implicación y motivación?

Imagen N° 3. Entrevista al Tutor de Matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

12.2. Entrevista al Coordinador del Departamento de Matemáticas

Guía de preguntas al Coordinador del Departamento de Matemáticas de Secundaria

1. ¿Cuál es el nivel de conocimientos de los alumnos sobre expresión gráfica?
2. ¿Qué aspectos de la asignatura se tratan basándose en métodos de expresión gráfica?
3. ¿Disponéis actividades de trabajo en grupo o cooperativo?
4. ¿Con qué frecuencia se dan las actividades de trabajo cooperativo?
5. ¿Qué beneficios crees que aporta ese tipo de actividades en tus procesos de aula?
6. ¿Qué aspectos negativos crees que puede traer consigo la aplicación de esta metodología?
7. ¿Se evalúa el trabajo en grupo o cooperativo? ¿Cómo se evalúa?
8. ¿Cuáles consideras que son las mayores dificultades a la hora de evaluar el trabajo cooperativo?
9. ¿Se hace uso de la representación gráfica para el aprendizaje de polinomios y la resolución de ejercicios?
10. ¿Cuál es el uso que sueles darle a la representación gráfica?
11. ¿Tienes alguna experiencia que consideres positiva a través de este tipo de metodología?
12. ¿Encuentras algún aspecto negativo en el uso de la representación gráfica?
13. ¿Has realizado alguna actividad didáctica con tus alumnos a través de la representación gráfica?
14. ¿Crees que la formación del profesorado es problema a la hora de realizar metodologías activas o el uso de la expresión gráfica?
15. ¿Crees que tiene algún beneficio para tus alumnos el uso de la representación gráfica?
16. ¿Cuáles crees que son los cursos más apropiados para establecer actividades didácticas a través de la expresión gráfica?
17. ¿Puede este tipo de metodologías causar reflexión en el alumno, mejorar su implicación y motivación?

Imagen N° 4. Entrevista al Coordinador del Departamento de Matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

12.3. Entrevista al Director Pedagógico del Centro

Guía de preguntas al Director Pedagógico del Centro:

1. ¿De qué manera benefician el empleo de metodologías activas en primaria?
2. ¿Son necesarias metodologías activas con el alumnado de Secundaria?
3. ¿Cree que existe diferencia entre la construcción de un conocimiento matemático, como consecuencia de una metodología activa, y el aprendizaje memorístico?
4. ¿Cómo ayuda la implicación del alumnado en los procesos de aprendizaje?
5. ¿Cuáles son las dificultades que encontramos habitualmente para el diseño de metodologías activas en Secundaria?
6. ¿Cómo influye la temporalización y programaciones en este tipo de actividades?
7. ¿Suelen usar los profesores dicha metodología?
8. ¿Qué dificultades se aprecian en el uso de metodologías activas? ¿Cuáles son sus causas?
9. ¿Es bueno el empleo de métodos gráficos en los que se apoyen los contenidos teóricos?
10. ¿Puede el método gráfico, en combinación con una metodología activa, ayudar a la construcción del conocimiento matemático? ¿Podría ser la directriz que marca el aprendizaje?
11. ¿Qué repercusión tiene este tipo de aprendizaje sobre la motivación del alumnado? ¿Y en el profesorado?
12. ¿Crees que hay algún aspecto negativo que deba cuidarse sobre el uso de una metodología activa basada en la expresión gráfica?
13. ¿Crees que el empleo de la expresión gráfica, combinado con una metodología activa, puede ser aplicado a otros bloques de la asignatura?

Imagen N° 5. Entrevista al Coordinador del Departamento de Matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

12.4. Matriz de evaluación

Cuadro N° 20. Matriz de evaluación.

Categoría	4 Excelente	3 Muy bien	2 Aceptable	1 Mal
Orden y organización (10%)	El examen es presentado de una manera ordenada, clara y organizada que es fácil de leer.	El examen es presentado de una manera ordenada y organizada que es, por lo general, fácil de leer.	El examen es presentado en una manera organizada, pero puede ser difícil de leer.	El examen se ve descuidado y desorganizado. Es difícil saber qué información está relacionada.
Terminología matemática y notación empleada (10%)	La terminología y notación fueron siempre usadas correctamente, haciendo fácil de entender lo que se ha hecho.	La terminología y notación fueron empleadas, por lo general, de forma adecuada, entendiéndose lo que se ha hecho.	La terminología y notación algebraica fueron empleadas con algún error y no es fácil entender lo que se ha hecho.	Hay poco uso o inapropiado de la terminología y las notaciones algebraicas
Razonamiento matemático (20%)	Usa razonamiento matemático complejo y refinado.	Usa razonamiento matemático efectivo.	Muestra alguna evidencia de razonamiento matemático.	Poca evidencia de razonamiento matemático.
Estrategia y procedimientos (10%)	Por lo general, usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas.	Por lo general, usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	Usa algunas veces una estrategia efectiva para resolver problemas.	Raramente usa una estrategia efectiva para resolver problemas.
Conceptos matemáticos (20%)	La explicación demuestra completo entendimiento del concepto matemático usado.	La explicación demuestra entendimiento sustancial del concepto matemático.	La explicación demuestra algún entendimiento del concepto matemático.	La explicación demuestra un entendimiento muy limitado del concepto matemático.
Problemas y ejercicios resueltos (10%)	Todos los problemas y ejercicios fueron resueltos.	Todos los problemas y ejercicios, menos 1, fueron resueltos.	Todos los problemas y ejercicios, menos 2, fueron resueltos.	Varios de los problemas y ejercicios no fueron resueltos.
Errores matemáticos (10%)	Más del 90% de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	Entre el 80% y el 90% de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	La mayor parte de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	Existen muchos pasos y soluciones con errores matemáticos.
Explicación (10%)	La explicación es detallada y clara.	La explicación es clara.	La explicación es débil pero incluye componentes críticos.	La explicación es difícil de entender y no incluye componentes críticos.

Nota: Matriz de evaluación. Fuente: Elaboración propia.

12.5. Ejemplos de la metodología en polinomios

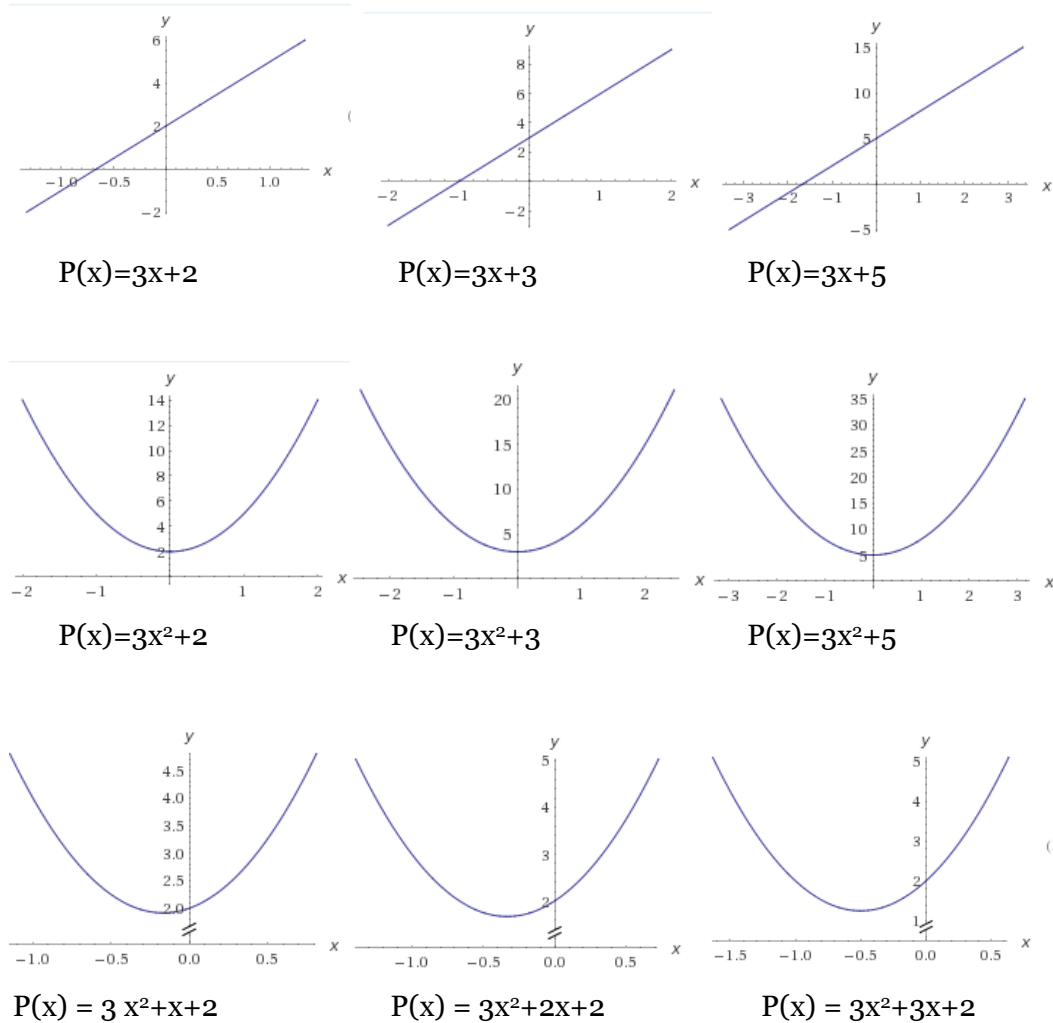
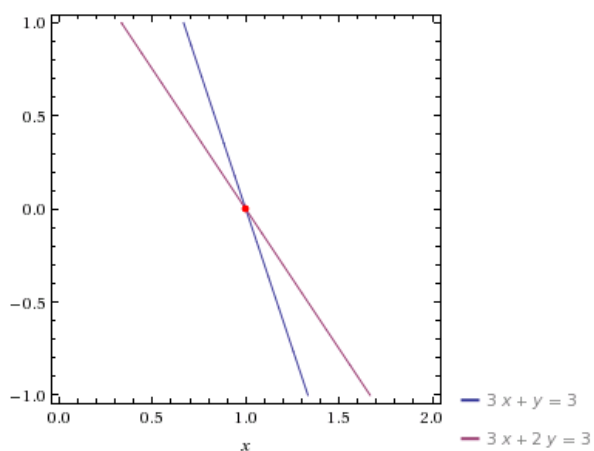


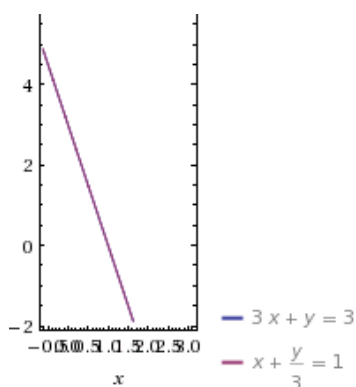
Gráfico N° 2. Estudio de diferentes polinomios. Fuente: Elaboración propia mediante Wolfram Alpha.

En el primer ejemplo el alumno puede entender cómo afecta el cambio del término independiente en los polinomios. En la segunda secuencia el alumno comprende cómo hablar de un polinomio de segundo grado, es hacerlo de una curva, que igual que en el caso anterior, varía su posición según cambie el término independiente. Con las últimas expresiones gráficas el alumno asimila como, al aumentar el valor del coeficiente x , la curva se desplaza hacia la izquierda, si es positiva o a la derecha, si es negativa.

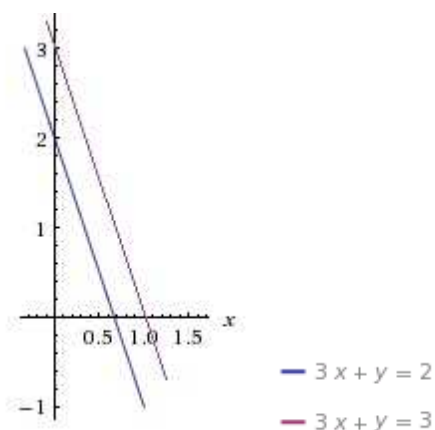
12.6. Ejemplos de la metodología en sistemas de ecuaciones



Sistema compatible determinado



Sistema compatible indeterminado



Sistema incompatible

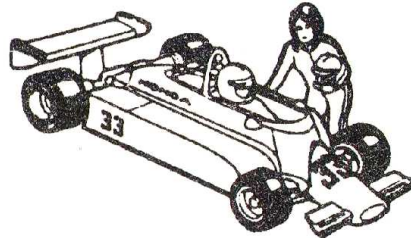
Gráfico N° 3. Clasificación de sistemas de ecuaciones. Fuente: Elaboración propia mediante Wolfram Alpha.

Estos ejemplos ayudan al estudiante a comprender la clasificación de sistemas de ecuaciones y asimilar que sucede en cada uno de los casos. De esta forma entienden que cuando resuelven un sistema, están hallando el punto de intersección de dos rectas.

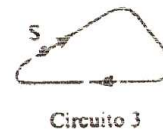
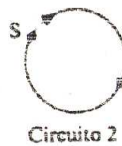
12.7. Ejemplos de problemas para la metodología

A4. DISEÑO DE GRAFICAS A PARTIR DE DIBUJOS

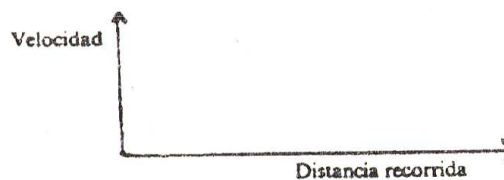
Carreras de coches



¿Cómo crees que varía la velocidad de un coche cuando está dando la segunda vuelta en cada uno de los tres circuitos dibujados abajo? (A = punto de salida). ↗



Explica tus respuestas en cada caso, por escrito y mediante una gráfica. Indica claramente las suposiciones que realices.



Compara tus resultados con los de tus compañeros. Intentar realizar tres gráficas que todos creáis que son correctas.

Mira de nuevo la gráfica que has dibujado para el tercer circuito. Para ver si es correcta, responde a las siguientes preguntas mirando sólo tu gráfica. Cuando hayas hecho esto, comprueba tus respuestas mirando de nuevo el dibujo del circuito. Si encuentras algún error, dibuja de nuevo tu gráfica.

Imagen Nº 6. Ejemplo de problemas para la metodología Fuente: Alayo (1990, p. 29).