



Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología

Grado en Física

**La paradoja EPR y las desigualdades de  
Bell: un análisis teórico de la no localidad  
cuántica**

|                                           |                        |
|-------------------------------------------|------------------------|
| Trabajo de fin de estudio presentado por: | Alejandro Aramayo Ruiz |
| Director/a/es:                            | Jorge Giner Navarro    |
| Fecha:                                    | 2026-07-12             |

*A mis padres, por haberme apoyado siempre.  
Y a la curiosidad, por ser el impulso que me lleva a seguir  
aprendiendo.*

— Alejandro Aramayo Ruiz

## Resumen

En sistemas bipartitos de espín  $\frac{1}{2}$ , ciertas correlaciones cuánticas entran en conflicto con las restricciones impuestas por los modelos locales de variables ocultas. Este Trabajo Fin de Grado recorre ese problema desde la paradoja EPR hasta la cota de Tsirelson, pasando por la desigualdad original de Bell y por la formulación de Clauser, Horne, Shimony y Holt (CHSH). A partir del cálculo explícito de las correlaciones del estado singlete, se muestra que la mecánica cuántica viola esas restricciones, aunque no de manera arbitraria: la propia teoría fija un límite preciso a esa violación. Por último, se introducen matrices de densidad y estados de Werner para mostrar que, en estados mixtos, el entrelazamiento no basta por sí solo para garantizar la violación de la desigualdad CHSH.

**Palabras clave:** paradoja EPR, desigualdades de Bell, desigualdad CHSH, cota de Tsirelson, estados de Werner.

## Abstract

In bipartite spin-1/2 systems, certain quantum correlations are incompatible with the constraints imposed by local hidden-variable models. This thesis traces the development of this problem from the EPR paradox to Tsirelson's bound via Bell's original inequality and the Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) formulation. By explicitly calculating the correlations of the singlet state, it shows that quantum mechanics violates those constraints, but not arbitrarily: the theory itself sets a precise upper bound on such violations. Finally, density matrices and Werner states are introduced to show that, for mixed states, entanglement alone does not guarantee a violation of the CHSH inequality.

**Keywords:** EPR paradox, Bell inequalities, CHSH inequality, Tsirelson bound, Werner states.

## Índice de contenidos

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Introducción .....                                                             | 1  |
| 2. Formalismo cuántico para sistemas bipartitos de dos niveles .....              | 3  |
| 2.1. Sistemas de dos niveles y observables de espín .....                         | 4  |
| 2.2. Producto tensorial y observables locales .....                               | 6  |
| 2.3. Estados puros bipartitos: producto y entrelazamiento .....                   | 7  |
| 2.4. Regla de Born, valores esperados y correlaciones .....                       | 8  |
| 2.5. El estado singlete: estructura y correlaciones .....                         | 10 |
| 3. La paradoja EPR y la reformulación de Bohm .....                               | 14 |
| 3.1. Del formalismo bipartito al problema de la completitud .....                 | 14 |
| 3.2. El argumento EPR original: realidad, completitud y localidad .....           | 16 |
| 3.3. La estructura lógica del dilema EPR .....                                    | 18 |
| 3.4. La reformulación de Bohm-Aharonov: de las variables continuas al espín ..... | 19 |
| 3.5. El argumento EPR-Bohm con el estado singlete .....                           | 21 |
| 3.6. Del problema EPR-Bohm a la formalización de Bell .....                       | 23 |
| 4. La desigualdad original de Bell y su significado físico .....                  | 25 |
| 4.1. Del problema EPR-Bohm a los modelos locales de variables ocultas .....       | 26 |
| 4.2. Variables ocultas y distribución estadística .....                           | 27 |
| 4.3. Funciones de respuesta deterministas y condición de localidad .....          | 29 |
| 4.4. Independencia estadística de las elecciones de medida .....                  | 31 |
| 4.5. Anticorrelación perfecta y reducción a una única función de respuesta .....  | 32 |
| 4.6. Derivación de la desigualdad original de Bell .....                          | 33 |
| 4.7. Violación cuántica a partir de las correlaciones del singlete .....          | 35 |
| 4.8. Alcance físico de la violación .....                                         | 37 |

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.9. Limitaciones de la desigualdad original y transición a CHSH .....            | 39 |
| 5. La desigualdad CHSH y las correlaciones cuánticas del singlete .....           | 40 |
| 5.1. De la desigualdad original de Bell a la formulación CHSH .....               | 41 |
| 5.2. Dos elecciones de medida por observador y correlaciones en el modelo local . | 43 |
| 5.3. Derivación de la cota local de CHSH .....                                    | 45 |
| 5.4. Evaluación cuántica de la combinación CHSH en el singlete .....              | 47 |
| 5.5. Elección de direcciones y violación de la cota local .....                   | 49 |
| 5.6. Alcance de la formulación CHSH y transición al operador CHSH .....           | 51 |
| 6. El operador CHSH y la cota de Tsirelson .....                                  | 53 |
| 6.1. De la combinación CHSH al operador CHSH .....                                | 54 |
| 6.2. Cuadrado del operador CHSH y papel de los conmutadores .....                 | 56 |
| 6.3. Norma operatorial y derivación de la cota de Tsirelson .....                 | 58 |
| 6.4. Saturación de la cota en el estado singlete .....                            | 60 |
| 6.5. Significado físico de las cotas local, cuántica y algebraica .....           | 63 |
| 7. Extensión a estados mixtos: matrices de densidad y estados de Werner .....     | 65 |
| 7.1. Matrices de densidad, valores esperados y traza parcial .....                | 65 |
| 7.2. Separabilidad y entrelazamiento en estados mixtos .....                      | 69 |
| 7.3. Estados de Werner de dos qubits .....                                        | 70 |
| 7.4. Correlaciones y violación CHSH en estados de Werner .....                    | 71 |
| 7.5. Transposición parcial y umbral de entrelazamiento .....                      | 74 |
| 7.6. Separación entre entrelazamiento y violación CHSH .....                      | 77 |
| 8. Conclusiones .....                                                             | 79 |
| Bibliografía .....                                                                | 82 |

## 1. Introducción

La mecánica cuántica de sistemas compuestos obliga a formular con precisión un problema que en sistemas individuales no aparece del mismo modo. Cuando dos subsistemas se preparan en un estado conjunto, las correlaciones entre los resultados de medida ya no tienen por qué admitir una descripción en términos de propiedades locales preexistentes atribuidas por separado a cada parte [1]. En el caso bipartito de espín  $\frac{1}{2}$ , ese problema adopta una forma especialmente clara y, al mismo tiempo, todavía manejable. Sobre esa base, el trabajo estudia cómo surgen correlaciones incompatibles con las restricciones de los modelos locales de variables ocultas. También examina por qué la mecánica cuántica viola esas restricciones en la formulación de Clauser, Horne, Shimony y Holt (CHSH), publicada en 1969 [2], y por qué, aun así, esa violación no puede crecer sin límite, sino que queda acotada por un máximo preciso [3].

La formulación original del problema aparece en el artículo de Einstein, Podolsky y Rosen de 1935 [4]. La objeción de EPR no se reduce a una incomodidad general ante la teoría cuántica, sino que apunta a una cuestión de completitud. Si una magnitud puede predecirse con certeza sin perturbar directamente el sistema al que se atribuye, parece natural preguntarse si ese valor no debería formar parte ya de la realidad física antes de la medida [4]. A partir de esa idea se abre una alternativa bien conocida: o la mecánica cuántica es incompleta, o las nociones clásicas de localidad y realidad no pueden mantenerse sin revisión. La reformulación de Bohm-Aharonov, de 1957, traslada esta discusión al lenguaje de las correlaciones de espín y proporciona el marco más útil para seguirla en sistemas bipartitos de dos niveles [5].

Bell dio en 1964 el paso decisivo al mostrar que esa discusión podía traducirse a desigualdades concretas que toda teoría local de variables ocultas debería satisfacer [1]. Con ello,

el problema dejó de depender solo de intuiciones generales sobre la realidad física y pasó a expresarse en términos cuantitativos. Ese cambio articula el recorrido que lleva de EPR a Bell, de Bell a CHSH [2] y de CHSH a la cota de Tsirelson, establecida en 1980 [3]. Por eso, la cuestión no se reduce a comprobar que un marco local de variables ocultas resulta insuficiente; también exige entender qué rasgo matemático de la teoría cuántica fija el valor máximo de la violación y por qué la propia teoría impone ese límite [3].

La elección de sistemas bipartitos de espín  $\frac{1}{2}$  responde a esa lógica. En ellos ya aparecen los ingredientes esenciales del problema: producto tensorial, estados entrelazados, observables locales de espín, desigualdades de Bell y un límite cuántico bien definido para la magnitud de su violación. Además, este escenario permite cálculos explícitos con matrices de Pauli, valores esperados y estados de Bell sin que la complejidad formal desplace el centro del análisis. El resultado es un marco técnicamente manejable que conserva, al mismo tiempo, los elementos conceptuales que hacen relevante la discusión de Bell.

Hay, además, una razón formativa para seguir este itinerario. A lo largo del Grado en Física, el producto tensorial, la paradoja EPR, la reformulación de Bohm-Aharonov, las desigualdades de Bell, CHSH, la cota de Tsirelson y las matrices de densidad suelen aparecer repartidos en asignaturas distintas y con grados de detalle muy desiguales. Por eso no siempre se ve con claridad cómo se encadenan ni qué papel cumple cada uno dentro del problema general.

El trabajo reconstruye esa secuencia con el detalle necesario para que sus distintas partes no aparezcan como piezas aisladas. Para ello, establece primero el formalismo de los sistemas bipartitos de espín  $\frac{1}{2}$ ; examina después la paradoja EPR y la reformulación de Bohm-Aharonov; deriva a continuación la desigualdad original de Bell y la desigualdad CHSH; y estudia el operador CHSH para obtener la cota de Tsirelson.

Por último, el análisis se extiende al caso de estados mixtos. Mientras se trabaja solo con estados puros, puede quedar la impresión de que el entrelazamiento y la violación de CHSH van siempre de la mano. El ejemplo de los estados de Werner, introducidos en 1989, permite matizar esa idea y mostrar que la relación entre ambos fenómenos es más sutil de lo que sugiere el caso ideal [6].

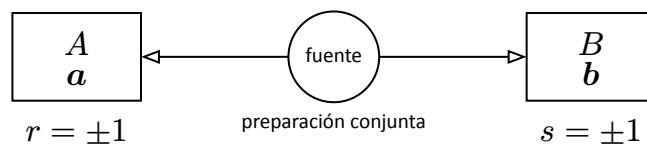
## 2. Formalismo cuántico para sistemas bipartitos de dos niveles

En sistemas bipartitos de espín  $\frac{1}{2}$ , basta con unos pocos ingredientes para formular con precisión el problema EPR-Bohm: espacios de Hilbert de dimensión dos, producto tensorial, observables locales, estados producto, estados entrelazados y correlaciones de medida. Este escenario permite trabajar con cálculos explícitos sin perder los rasgos conceptuales que más adelante intervendrán en la discusión de EPR-Bohm y en las desigualdades de Bell [1], [5].

La situación física de referencia es la de dos partículas preparadas conjuntamente, sobre las que después se miden componentes de espín en direcciones elegidas de manera independiente. Desde el principio es importante distinguir entre resultados locales, probabilidades conjuntas y correlaciones, porque las desigualdades de Bell no se formulan sobre resultados aislados, sino sobre restricciones que deben satisfacer ciertas correlaciones.

Esta situación puede representarse esquemáticamente separando la preparación común del par de las dos mediciones locales realizadas sobre los subsistemas  $A$  y  $B$ .

**Figura 1.** *Escenario bipartito con fuente común y medidas locales.*



Fuente: Elaboración propia.

## 2.1. Sistemas de dos niveles y observables de espín

Un sistema cuántico de dos niveles se representa mediante un espacio de Hilbert complejo de dimensión dos, denotado por  $\mathcal{H}$  e isomorfo a  $\mathbb{C}^2$ . En el contexto considerado, ese espacio describe el grado de libertad de espín de una partícula de espín  $\frac{1}{2}$ , sin considerar otros grados de libertad, como los espaciales. Fijada la dirección  $z$ , los estados propios de la componente de espín en esa dirección forman una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ , que se escribirá como  $|+_z\rangle$  y  $|-_z\rangle$ . Una vez elegida esta base, se usará la notación abreviada  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$ , salvo cuando convenga recordar explícitamente la dirección asociada.

La elección inicial de la dirección  $z$  no introduce una dirección física privilegiada. Su función es fijar una base de referencia en la que escribir vectores y operadores. Las demás direcciones de medida se incorporarán mediante combinaciones lineales de las matrices de Pauli.

En la base  $|+\rangle, |-\rangle$ , las matrices de Pauli son [7]

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Estas matrices son hermíticas y, por tanto, pueden representar observables cuánticos. Además, satisfacen relaciones algebraicas que reflejan el carácter dicotómico de la medida de espín normalizada: cada componente tiene cuadrado igual a la identidad y los anticonmutadores vienen dados por la delta de Kronecker. En forma compacta,

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= I, \quad i \in \{x, y, z\}, \\ \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i &= 2\delta_{i,j} I. \end{aligned} \quad (2)$$

También será útil la identidad de producto

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{i,j} I + i \sum_k \varepsilon_{i,j,k} \sigma_k, \quad (3)$$

donde  $\varepsilon_{i,j,k}$  es el símbolo de Levi-Civita.

Sea ahora  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^3$  una dirección unitaria. El vector  $\mathbf{a}$  representa la orientación del analizador de espín, y el observable de espín normalizado en esa dirección se define por

$$\sigma_{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} = a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z, \quad (4)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ . Este operador corresponde a la componente de espín normalizada asociada a la dirección  $\mathbf{a}$ .

Como los coeficientes  $a_i a_j$  son simétricos bajo el intercambio de índices, solo contribuye la parte simétrica del producto de matrices, es decir, el anticonmutador. A partir de la relación anterior,

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{a}}^2 &= \left( \sum_i a_i \sigma_i \right) \left( \sum_j a_j \sigma_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i a_j (\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i) \\ &= \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{i,j} I = |\mathbf{a}|^2 I = I. \end{aligned} \quad (5)$$

De forma más general, para dos direcciones unitarias  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{c}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{a}} \sigma_{\mathbf{c}} &= \sum_{i,j} a_i c_j \sigma_i \sigma_j \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) I + i(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (6)$$

Por tanto,

$$[\sigma_{\mathbf{a}}, \sigma_{\mathbf{c}}] = 2i(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (7)$$

Esta expresión muestra que las componentes de espín asociadas a direcciones no colineales no conmutan.

Como  $\sigma_{\mathbf{a}}^2 = I$  y  $\sigma_{\mathbf{a}}$  es hermítico, sus autovalores pertenecen a  $\{-1, +1\}$ . Además, al ser una combinación lineal de matrices de Pauli de traza nula, también tiene traza nula, de modo que aparecen ambos signos. El observable físico de espín es  $S_{\mathbf{a}} = \frac{\hbar}{2} \sigma_{\mathbf{a}}$ , con autovalores  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , pero aquí será más conveniente trabajar con  $\sigma_{\mathbf{a}}$ . La razón es simple: las

correlaciones relevantes para Bell y CHSH se expresan de manera natural en términos de variables normalizadas que toman valores en  $\{-1, +1\}$  [1], [2].

## 2.2. Producto tensorial y observables locales

El problema EPR-Bohm no se refiere a una única partícula, sino a una pareja preparada como un solo sistema físico y medida después en dos partes distintas. Por ello, no basta con duplicar la descripción de un sistema de dos niveles; debe construirse un espacio de estados para el sistema compuesto. En mecánica cuántica, esa construcción se realiza mediante el producto tensorial.

Sean  $\mathcal{H}_A \cong \mathbb{C}^2$  y  $\mathcal{H}_B \cong \mathbb{C}^2$  los espacios de Hilbert de dos subsistemas etiquetados como  $A$  y  $B$ . El espacio del sistema compuesto es

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (8)$$

Si  $|+\rangle_A, |-\rangle_A$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}_A$  y  $|+\rangle_B, |-\rangle_B$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}_B$ , entonces una base natural de  $\mathcal{H}_{AB}$  es

$$|+\rangle_A |+\rangle_B, |+\rangle_A |-\rangle_B, |-\rangle_A |+\rangle_B, |-\rangle_A |-\rangle_B. \quad (9)$$

La yuxtaposición  $|\mu\rangle_A |\nu\rangle_B$  abrevia  $|\mu\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B$ , con  $\mu, \nu \in \{+, -\}$ . Los observables locales de espín correspondientes a medidas en direcciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se representan por  $\sigma_{\mathbf{a}} \otimes I_B$  e  $I_A \otimes \sigma_{\mathbf{b}}$ , donde  $I_A$  e  $I_B$  son las identidades en  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente. Aquí la palabra *local* tiene un sentido estrictamente algebraico: el operador actúa de manera no trivial sobre uno de los dos factores del producto tensorial. Esa noción no debe confundirse con la localidad física que interviene en la discusión de Bell [1].

Los observables locales asociados a subsistemas distintos conmutan. En efecto,

$$(\sigma_{\mathbf{a}} \otimes I_B)(I_A \otimes \sigma_{\mathbf{b}}) = \sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}} = (I_A \otimes \sigma_{\mathbf{b}})(\sigma_{\mathbf{a}} \otimes I_B), \quad (10)$$

y por tanto

$$[\sigma_{\mathbf{a}} \otimes I_B, I_A \otimes \sigma_{\mathbf{b}}] = 0. \quad (11)$$

Para un par fijo de direcciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , esta conmutación permite asociar una distribución conjunta a los dos resultados locales. No supone todavía ninguna hipótesis física de localidad; solo refleja que los operadores actúan sobre factores distintos del espacio compuesto. Si la medida en  $A$  produce un resultado normalizado  $r = \pm 1$  y la medida en  $B$  produce un resultado normalizado  $s = \pm 1$ , el producto de resultados es  $rs$ . El operador cuyo valor esperado proporciona el promedio de ese producto es  $\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}}$ .

### 2.3. Estados puros bipartitos: producto y entrelazamiento

El espacio del sistema compuesto permite distinguir, en el caso de estados puros, entre preparaciones factorizables y preparaciones no factorizables. Esta distinción no es solo una cuestión de notación: en un estado producto, el valor esperado de un producto de observables locales factoriza; en un estado puro entrelazado, esa factorización no puede asumirse como propiedad general. En el caso de dos sistemas de dos niveles, esta diferencia puede verse de forma explícita mediante los coeficientes del estado en la base producto.

Un estado puro general del sistema bipartito es un vector normalizado de  $\mathcal{H}_{AB}$  y puede escribirse como

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\mu \in \{+, -\}, \nu \in \{+, -\}} c_{\mu, \nu} |\mu\rangle_A |\nu\rangle_B, \quad \sum_{\mu \in \{+, -\}, \nu \in \{+, -\}} |c_{\mu, \nu}|^2 = 1. \quad (12)$$

El estado es producto si existen  $|\varphi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$  y  $|\chi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$  tales que

$$|\psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B. \quad (13)$$

Si

$$|\varphi\rangle_A = \alpha |+\rangle_A + \beta |-\rangle_A, \quad |\chi\rangle_B = \gamma |+\rangle_B + \delta |-\rangle_B, \quad (14)$$

entonces

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B &= \alpha\gamma |+\rangle_A |+\rangle_B + \alpha\delta |+\rangle_A |-\rangle_B \\ &\quad + \beta\gamma |-\rangle_A |+\rangle_B + \beta\delta |-\rangle_A |-\rangle_B. \end{aligned} \quad (15)$$

La consecuencia física de esta factorización aparece ya en los valores esperados de observables locales. Si el estado es producto, entonces

$$\langle \varphi \otimes \chi | \sigma_a \otimes \sigma_b | \varphi \otimes \chi \rangle = \langle \varphi | \sigma_a | \varphi \rangle \langle \chi | \sigma_b | \chi \rangle. \quad (16)$$

Para un estado puro producto, el valor esperado conjunto del producto de dos observables locales se reduce, por tanto, al producto de dos valores esperados locales. En un estado entrelazado, en cambio, esta reducción no puede tomarse como una propiedad general de las correlaciones locales, porque el estado no admite una descomposición como producto de estados de cada subsistema. Un estado puro bipartito es, precisamente, entrelazado si no admite una factorización de la forma anterior [8].

Esta noción debe separarse de la no localidad en sentido de Bell. El entrelazamiento es una propiedad del estado, mientras que la no localidad de Bell concierne a si las correlaciones generadas por ese estado pueden reproducirse mediante un modelo local de variables ocultas [9]. Esta diferencia reaparecerá al comparar el caso ideal del singlete con estados mixtos. En ese contexto, el entrelazamiento por sí solo no garantiza necesariamente la violación de la desigualdad CHSH.

En el caso bipartito de dos niveles, la factorizabilidad de los estados puros puede examinarse mediante la matriz de coeficientes

$$C_\psi = \begin{pmatrix} c_{+,+} & c_{+,-} \\ c_{-,+} & c_{-,-} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Si el estado es producto, entonces

$$C_\psi = \begin{pmatrix} \alpha\gamma & \alpha\delta \\ \beta\gamma & \beta\delta \end{pmatrix}, \quad \det C_\psi = c_{+,+}c_{-,-} - c_{+,-}c_{-,+} = 0. \quad (18)$$

Recíprocamente, en dimensión  $2 \times 2$ , la condición  $\det C_\psi = 0$  equivale a que  $C_\psi$  tenga rango uno y, por tanto, a que el estado sea producto. Si  $\det C_\psi \neq 0$ , la matriz de coeficientes tiene rango dos y el estado es entrelazado. El criterio queda restringido aquí a estados puros; el tratamiento de estados mixtos requerirá matrices de densidad.

## 2.4. Regla de Born, valores esperados y correlaciones

El formalismo anterior solo adquiere contenido físico cuando se especifica cómo se obtienen probabilidades y valores esperados a partir de un estado. En mecánica cuántica,

esa conexión viene dada por la regla de Born. En el problema EPR-Bohm no bastan las probabilidades de resultados locales: lo esencial son las probabilidades conjuntas y las correlaciones entre los dos resultados normalizados.

Para un estado puro  $|\psi\rangle$  y un observable  $O$ , el valor esperado de  $O$  se define por

$$\langle O \rangle_\psi = \langle \psi | O | \psi \rangle. \quad (19)$$

En particular, para la medida de  $\sigma_a$ , los proyectores espectrales asociados a los resultados  $r \in \{-1, +1\}$  son

$$\Pi_r^{(a)} = \frac{1}{2}(I + r\sigma_a). \quad (20)$$

Estos operadores satisfacen

$$\Pi_+^{(a)} + \Pi_-^{(a)} = I, \quad \Pi_r^{(a)} \Pi_s^{(a)} = \delta_{r,s} \Pi_r^{(a)}. \quad (21)$$

Los operadores  $\Pi_r^{(a)}$  corresponden a las dos alternativas posibles de la medida de  $\sigma_a$ . En el caso bipartito, la probabilidad conjunta de obtener  $r$  en  $A$  y  $s$  en  $B$  al medir en las direcciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  es

$$p_\psi(r, s | \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \psi | \Pi_r^{(a)} \otimes \Pi_s^{(b)} | \psi \rangle, \quad r, s \in \{-1, +1\}. \quad (22)$$

La notación  $p_\psi(r, s | \mathbf{a}, \mathbf{b})$  indica que la distribución depende tanto del estado preparado como de las direcciones elegidas para las dos medidas. A partir de estas probabilidades conjuntas, la correlación se define como el valor medio del producto de los resultados:

$$E_\psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{r \in \{-1, +1\}, s \in \{-1, +1\}} r s p_\psi(r, s | \mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (23)$$

Si  $R$  y  $S$  denotan las variables aleatorias asociadas a los resultados locales, el producto  $RS$  vale  $+1$  cuando ambos resultados tienen el mismo signo y vale  $-1$  cuando tienen signos opuestos. Por tanto, la correlación puede escribirse también como

$$E_\psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_\psi(R = S | \mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_\psi(R \neq S | \mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (24)$$

En esta expresión, el primer término agrupa los dos pares de resultados coincidentes y el segundo los dos pares de resultados opuestos. Así,  $E_\psi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  no describe el resultado de una única repetición del experimento, sino el sesgo estadístico entre coincidencias y anticoincidencias al repetir muchas veces la misma preparación con las mismas direcciones de medida. Esta lectura conecta de manera directa las correlaciones cuánticas con las restricciones impuestas por modelos locales de variables ocultas.

Usando que

$$\sum_{r \in \{-1, +1\}} r \Pi_r^{(\mathbf{a})} = \sigma_{\mathbf{a}}, \quad \sum_{s \in \{-1, +1\}} s \Pi_s^{(\mathbf{b})} = \sigma_{\mathbf{b}}, \quad (25)$$

se obtiene la forma operatorial

$$\begin{aligned} E_\psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \sum_{r,s} rs \langle \psi | \Pi_r^{(\mathbf{a})} \otimes \Pi_s^{(\mathbf{b})} | \psi \rangle \\ &= \left\langle \psi \left| \left( \sum_r r \Pi_r^{(\mathbf{a})} \right) \otimes \left( \sum_s s \Pi_s^{(\mathbf{b})} \right) \right| \psi \right\rangle \\ &= \langle \psi | \sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}} | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Esta es la forma de la correlación que se comparará con las restricciones de Bell. Si  $E_\psi = 1$ , hay correlación perfecta; si  $E_\psi = -1$ , hay anticorrelación perfecta; y, si  $E_\psi = 0$ , el promedio del producto de resultados se anula. En general, esta última condición no debe confundirse automáticamente con independencia estadística; solo afirma que, al promediar, las coincidencias y anticoincidencias se compensan.

## 2.5. El estado singlete: estructura y correlaciones

El estado bipartito central para el problema EPR-Bohm es el singlete, uno de los cuatro estados de Bell. Recibe este nombre porque, al acoplar dos espines  $\frac{1}{2}$ , describe el sector de espín total cero del par. Su importancia no se debe solo a que sea un ejemplo sencillo de estado entrelazado, sino a que sus correlaciones pueden calcularse de forma explícita y poseen una dependencia angular muy simple. Por eso constituye el estado natural para

formular la versión de Bohm del problema EPR y para enlazarla con las desigualdades de Bell.

El singlete se define como

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A |-\rangle_B - |-\rangle_A |+\rangle_B). \quad (27)$$

Este estado satisface

$$(\sigma_k \otimes I_B + I_A \otimes \sigma_k) |\psi^-\rangle = 0, \quad k \in \{x, y, z\}. \quad (28)$$

Esta identidad es la forma operatorial de la afirmación anterior: el espín total del par se anula, salvo el factor común  $\frac{\hbar}{2}$  que relaciona  $\sigma_k$  con el observable físico de espín. Por linealidad, la misma relación se extiende a cualquier dirección unitaria  $\mathbf{a}$ :

$$(\sigma_{\mathbf{a}} \otimes I_B + I_A \otimes \sigma_{\mathbf{a}}) |\psi^-\rangle = 0. \quad (29)$$

Esto no equivale a asignar de antemano dos espines clásicos opuestos. Además, el singlete es entrelazado, pues su matriz de coeficientes es

$$C_{\psi^-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det C_{\psi^-} = \frac{1}{2} \neq 0. \quad (30)$$

Para calcular sus correlaciones, conviene recordar la acción de las matrices de Pauli sobre la base:

$$\begin{aligned} \sigma_x |+\rangle &= |-\rangle, & \sigma_x |-\rangle &= |+\rangle, \\ \sigma_y |+\rangle &= i |-\rangle, & \sigma_y |-\rangle &= -i |+\rangle, \\ \sigma_z |+\rangle &= |+\rangle, & \sigma_z |-\rangle &= -|-\rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

Para componentes iguales, basta un cálculo representativo:

$$(\sigma_x \otimes \sigma_x) |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle_A |+\rangle_B - |+\rangle_A |-\rangle_B) = -|\psi^-\rangle. \quad (32)$$

Del mismo modo se comprueba que  $(\sigma_y \otimes \sigma_y) |\psi^-\rangle = -|\psi^-\rangle$  y  $(\sigma_z \otimes \sigma_z) |\psi^-\rangle = -|\psi^-\rangle$ , de donde

$$\langle \psi^- | \sigma_i \otimes \sigma_i | \psi^- \rangle = -1, \quad i \in \{x, y, z\}. \quad (33)$$

Esta igualdad significa que, si en ambos subsistemas se mide la misma componente cartesiana, los resultados normalizados son siempre opuestos. Lo que se ha calculado es una propiedad de las correlaciones de medida del estado conjunto, no la existencia previa de valores definidos para todas las direcciones posibles.

Para componentes distintas, un ejemplo representativo es

$$\begin{aligned} (\sigma_x \otimes \sigma_y) |\psi^- \rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (|-\rangle_A |+\rangle_B + |+\rangle_A |-\rangle_B), \\ \langle \psi^- | \sigma_x \otimes \sigma_y | \psi^- \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Los demás casos con  $i \neq j$  se anulan por el mismo mecanismo: ortogonalidad de la base producto y cancelación debida al signo antisimétrico del singlete. En consecuencia,

$$\langle \psi^- | \sigma_i \otimes \sigma_j | \psi^- \rangle = -\delta_{i,j}. \quad (35)$$

Para direcciones arbitrarias,

$$\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}} = \sum_{i,j} a_i b_j \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad (36)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \langle \psi^- | \sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}} | \psi^- \rangle \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \langle \psi^- | \sigma_i \otimes \sigma_j | \psi^- \rangle \\ &= -\sum_{i,j} a_i b_j \delta_{i,j} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (37)$$

Si  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , entonces

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos \theta, \quad E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1. \quad (38)$$

La misma información puede expresarse en términos de probabilidades conjuntas. Usando la forma proyectiva de la regla de Born,

$$\Pi_r^{(a)} \otimes \Pi_s^{(b)} = \frac{1}{4}(I_A + r\sigma_a) \otimes (I_B + s\sigma_b), \quad (39)$$

y teniendo en cuenta que para el singlete los valores esperados locales se anulan,

$$\langle \psi^- | \sigma_a \otimes I_B | \psi^- \rangle = 0, \quad \langle \psi^- | I_A \otimes \sigma_b | \psi^- \rangle = 0, \quad (40)$$

se obtiene

$$p_{\psi^-}(r, s | \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4}(1 - r s \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (41)$$

Al sumar sobre el resultado del otro subsistema se obtienen los marginales locales

$$p_{\psi^-}(r | \mathbf{a}) = \frac{1}{2}, \quad p_{\psi^-}(s | \mathbf{b}) = \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Por tanto, cada medida local es estadísticamente equilibrada: no hay preferencia local por  $+1$  ni por  $-1$ . Además, estos marginales no dependen de la dirección elegida en el otro subsistema. La estructura física del singlete no reside en un sesgo local, sino en la dependencia angular de la distribución conjunta.

La fórmula  $E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos \theta$  recoge tres casos especialmente transparentes: para  $\theta = 0$  hay anticorrelación perfecta, para  $\theta = \frac{\pi}{2}$  la correlación media se anula y para  $\theta = \pi$  la correlación vale  $+1$ . En general, la dependencia relevante es geométrica y viene dada por el ángulo relativo entre las dos direcciones de medida.

Los marginales locales equilibrados, la anticorrelación perfecta para direcciones iguales y la dependencia angular de las correlaciones constituyen el punto de partida formal para la reformulación de Bohm del problema EPR. Con esta estructura, una medición en un subsistema permite inferir con certeza el resultado opuesto que se obtendría en el otro si también se midiera en la misma dirección. Bell traducirá después esa posibilidad de predicción perfecta en restricciones cuantitativas sobre correlaciones reproducibles mediante una descripción local de variables ocultas [1], [5].

### 3. La paradoja EPR y la reformulación de Bohm

Una vez fijado el formalismo de los sistemas bipartitos de dos niveles, el foco pasa de la descripción de estados y observables a la interpretación de sus correlaciones de medida. En el singlete, cada subsistema considerado por separado no muestra un sesgo estadístico hacia ninguno de los dos resultados posibles, mientras que los resultados conjuntos dependen de forma precisa del ángulo entre las direcciones de medida. Ahí es donde el formalismo bipartito deja de ser solo una descripción algebraica y empieza a plantear una pregunta física.

La paradoja EPR aparece cuando esa posibilidad de predicción con certeza se aplica a un sistema distante. Si el valor de una magnitud puede conocerse con certeza sin perturbar físicamente el sistema al que se atribuye, parece natural preguntarse si dicho valor debería formar parte ya de la realidad física de ese sistema [4]. La reformulación de Bohm-Aharonov traslada esta cuestión al caso de espín  $\frac{1}{2}$ , donde los resultados son dicotómicos y las correlaciones del singlete pueden expresarse de manera especialmente directa [5]. Sobre esa base se entiende el paso posterior de Bell: convertir el problema de realidad, localidad y completitud en restricciones matemáticas sobre correlaciones observables [1].

#### 3.1. Del formalismo bipartito al problema de la completitud

El paso hacia el problema EPR-Bohm se apoya en una distinción ya introducida en el formalismo bipartito: la separación entre información local e información conjunta. Para el estado singlete introducido en el capítulo anterior (véase Ecuación 27), cada subsistema considerado por separado no muestra preferencia estadística por ninguno de los dos resultados posibles; sus marginales locales se recogen en Ecuación 42.

Los resultados conjuntos, en cambio, no son en general independientes. Como se obtuvo en Ecuación 37, la correlación entre dos medidas de espín normalizadas viene dada por

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (43)$$

En particular, si ambos observadores miden la misma dirección,

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1. \quad (44)$$

Como los resultados normalizados solo pueden tomar los valores  $+1$  y  $-1$ , esta igualdad expresa anticorrelación perfecta: para medidas en la misma dirección, los resultados son siempre opuestos. Si el observador asociado al subsistema  $A$  obtiene  $+1$ , el observador asociado al subsistema  $B$  obtendrá  $-1$  al medir esa misma componente; si en  $A$  se obtiene  $-1$ , entonces en  $B$  se obtendrá  $+1$ .

Si se denotan por  $R_A$  y  $R_B$  los resultados normalizados obtenidos en los dos lados, entonces, para medidas en la misma dirección,

$$P_{\psi^-}(R_B = -r \mid R_A = r; \mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1, \quad r \in \{-1, +1\}. \quad (45)$$

En efecto, usando Ecuación 41 con  $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ ,

$$p_{\psi^-}(r, s \mid \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \frac{1}{4}(1 - rs). \quad (46)$$

De aquí se sigue que  $p_{\psi^-}(r, -r \mid \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \frac{1}{2}$ , mientras que  $p_{\psi^-}(r, r \mid \mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ . Junto con el marginal local recogido en Ecuación 42, esto da

$$P_{\psi^-}(R_B = -r \mid R_A = r; \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \frac{p_{\psi^-}(r, -r \mid \mathbf{a}, \mathbf{a})}{p_{\psi^-}(r \mid \mathbf{a})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1. \quad (47)$$

La certeza aparece, por tanto, en la relación entre ambos resultados, no en el valor aislado de cada uno antes de la medida. El singlete no permite predecir de antemano qué resultado concreto obtendrá un observador individual, pero sí permite predecir condicionalmente el resultado remoto cuando ambos lados miden la misma dirección. La información físicamente decisiva no está en un sesgo observable en cada lado, sino en la estructura de la distribución conjunta.

En ese punto surge la pregunta que motivó el argumento EPR. Si una medición realizada en un subsistema permite predecir con certeza el resultado que se obtendría en el otro, y si ambos subsistemas están espacialmente separados, ¿cómo debe interpretarse esa predicción? Una posibilidad es considerar que el resultado remoto estaba ya determinado antes de la medida. Otra es aceptar que la medición local modifica de algún modo la situación física del sistema distante. También puede cuestionarse el propio paso desde “predecible con certeza” hasta “realidad física preexistente”.

Ese es el núcleo del argumento EPR. No parte de una negación de las predicciones cuánticas, sino de una pregunta sobre su interpretación: si la teoría permite predicciones perfectas en determinadas condiciones, ¿representa el estado cuántico toda la información física relevante? En ese sentido, la cuestión inicial no es si la mecánica cuántica es empíricamente correcta, sino si su descripción puede considerarse completa [4].

Las desigualdades de Bell no introducen un problema distinto, sino que dan forma cuantitativa a la tensión conceptual planteada por EPR-Bohm. Bell no surge de una mera insatisfacción filosófica ante la mecánica cuántica, sino de un problema concreto entre tres elementos: correlaciones cuánticas perfectas, un criterio de realidad basado en la predicción con certeza y una noción local de separación física. La paradoja EPR introduce ese problema, y la reformulación de Bohm-Aharonov lo hace especialmente transparente en el caso de espín  $\frac{1}{2}$  [5].

### 3.2. El argumento EPR original: realidad, completitud y localidad

El artículo de Einstein, Podolsky y Rosen de 1935 planteó una objeción precisa a la interpretación de la mecánica cuántica como descripción completa de la realidad física [4]. La dificultad no consistía en que la teoría produjera predicciones equivocadas, sino en que, al aceptar ciertas predicciones cuánticas junto con una noción local de separación entre sistemas, parecía quedar abierta la posibilidad de que el estado cuántico no representara todos los elementos de realidad atribuibles al sistema.

El argumento comienza con el criterio de realidad. Según EPR, si puede predecirse con certeza el valor de una magnitud física sin perturbar de ningún modo el sistema correspon-

diente, entonces existe un elemento de realidad asociado a esa magnitud. Este criterio no pretende ser una definición completa de realidad física, sino una condición suficiente. Su función es delimitar una situación en la que la atribución de realidad parece inevitable: si el resultado puede conocerse con certeza sin intervención física sobre el sistema, entonces no parece razonable considerar que ese resultado dependa de la medición posterior.

A este criterio se añade la noción de completitud. Una teoría física sería completa si todo elemento de la realidad física tuviera una representación dentro de la teoría. Por tanto, si a partir del criterio anterior se identifican elementos de realidad que no aparecen representados en el estado cuántico, la conclusión natural es que la mecánica cuántica no proporciona una descripción completa en el sentido de EPR. La discusión no se centra entonces en la capacidad predictiva de la teoría, sino en la relación entre sus objetos matemáticos y aquello que se considera físicamente real.

La tercera pieza del razonamiento es la localidad. Si dos sistemas están espacialmente separados, una operación realizada sobre uno de ellos no debería alterar físicamente el otro de manera instantánea. Esta hipótesis permite interpretar una predicción remota como una inferencia sobre una propiedad del sistema distante, no como una modificación producida por la medición local. Sin esta condición, el criterio de realidad no podría aplicarse del mismo modo, porque la predicción del resultado remoto podría depender de una perturbación física inducida por la medida realizada en el otro subsistema.

En la formulación original, EPR trabajó con variables continuas, especialmente posición y momento. En una notación moderna, la estructura idealizada del argumento puede expresarse mediante correlaciones perfectas en la posición relativa y el momento total del par. Los observables globales  $X_1 - X_2$  y  $P_1 + P_2$  son compatibles, pues, usando  $[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{i,j}I$ ,

$$[X_1 - X_2, P_1 + P_2] = 0. \quad (48)$$

En un estado con valores definidos de esas magnitudes globales, una medición de  $X_1$  permite inferir  $X_2$ , mientras que una medición de  $P_1$  permite inferir  $P_2$ . Sin embargo, para el segundo sistema considerado por separado,

$$[X_2, P_2] = i\hbar I, \quad (49)$$

de modo que posición y momento no son observables compatibles. No se trata de medir ambas magnitudes en el segundo sistema en una misma realización, sino de que la elección realizada sobre el primer sistema permitiría inferir una u otra. Si esa elección y esa medición local no perturban el sistema distante, entonces las magnitudes inferidas parecen corresponder a elementos de realidad del segundo sistema.

El punto delicado es que el formalismo de la mecánica cuántica no asigna simultáneamente valores definidos a observables incompatibles como posición y momento dentro de un mismo estado del segundo sistema. Sin embargo, el razonamiento EPR, al combinar predicción con certeza y localidad, parece conducir a la atribución simultánea de elementos de realidad asociados a esas magnitudes. De ahí se obtiene la conclusión de incompletitud: el estado cuántico no representaría todos los elementos de realidad que el argumento obliga a reconocer.

Esta conclusión tiene un alcance preciso. EPR no demuestra una contradicción interna de la mecánica cuántica. Tampoco establece todavía una desigualdad experimentalmente contrastable. Su argumento muestra que la interpretación del estado cuántico como descripción completa entra en tensión con ciertos supuestos sobre realidad y localidad. Bell abordará el problema de otro modo: lo traducirá en restricciones cuantitativas para toda teoría local de variables ocultas [1].

### 3.3. La estructura lógica del dilema EPR

El argumento EPR se comprende con mayor claridad cuando se separa su estructura lógica de los detalles técnicos de la formulación original. El uso de posición y momento no es lo esencial; lo decisivo es cómo una predicción perfecta conduce, bajo determinados supuestos, al problema de la completitud.

El razonamiento puede reconstruirse a partir de tres elementos. Por un lado, se aceptan predicciones cuánticas que establecen correlaciones perfectas entre dos sistemas. A ello se añade el criterio de realidad: si el valor de una magnitud puede predecirse con certeza sin perturbar el sistema, entonces esa magnitud corresponde a un elemento de realidad.

Finalmente, se mantiene una hipótesis de localidad: la medición realizada en un sistema no modifica físicamente el sistema distante. Al combinar estos elementos, la posibilidad de predecir resultados remotos parece conducir a la atribución de elementos de realidad que no aparecen representados en la descripción cuántica del sistema distante.

El argumento es, por tanto, condicional. Si se aceptan las predicciones cuánticas y se mantienen el criterio de realidad y la localidad, la descripción cuántica no puede considerarse completa en el sentido de EPR. De forma equivalente, si se defiende su completitud, debe revisarse al menos uno de esos dos supuestos. El argumento no decide por sí solo cuál de estas posibilidades debe aceptarse.

Esta localidad física debe distinguirse de la localidad algebraica introducida en el formalismo bipartito. Allí, un observable como  $\sigma_a \otimes I_B$  se denominaba local porque actúa de forma no trivial solo sobre el subsistema  $A$ . Del mismo modo,  $I_A \otimes \sigma_b$  actúa de forma no trivial solo sobre el subsistema  $B$ . Esa estructura algebraica permite describir mediciones asociadas a subsistemas distintos, pero no equivale por sí sola a la hipótesis física de separación que interviene en EPR.

En EPR, la localidad expresa la hipótesis de que una medición realizada sobre un sistema no altera físicamente al otro de manera instantánea cuando ambos están espacialmente separados. Más adelante, Bell precisará esta idea mediante restricciones sobre la dependencia de los resultados respecto de las elecciones de medida. El argumento EPR requiere, por tanto, algo más que el producto tensorial: requiere una interpretación física de la separación entre sistemas.

Identificado este núcleo lógico, el argumento puede trasladarse a un escenario más simple basado en dos partículas de espín  $\frac{1}{2}$ .

### 3.4. La reformulación de Bohm-Aharonov: de las variables continuas al espín

La formulación original de EPR es conceptualmente fundamental, pero resulta menos adecuada para conectar con Bell. El uso de variables continuas, como posición y momento, introduce una complejidad técnica que no resulta esencial para el núcleo del argumento. La reformulación de Bohm-Aharonov traslada la discusión a sistemas de espín  $\frac{1}{2}$ , donde

los resultados posibles son dicotómicos y las correlaciones pueden expresarse mediante el formalismo desarrollado anteriormente [5].

El cambio de escenario no modifica la estructura lógica del problema. La pregunta sigue siendo si una predicción perfecta sobre un sistema distante, obtenida sin perturbarlo físicamente, obliga a atribuir a ese sistema una propiedad previa a la medida. Lo que cambia es el soporte formal. En lugar de posición y momento, se consideran componentes de espín en distintas direcciones. Cada medición de una componente de espín normalizada produce un resultado  $+1$  o  $-1$ , lo que permite formular el problema en términos de variables discretas.

La ventaja de este cambio es que los resultados de medida quedan ya en la forma que necesitará Bell. Las desigualdades de Bell se expresan de manera natural mediante resultados dicotómicos y correlaciones entre pares de resultados. El formalismo de espín  $\frac{1}{2}$  proporciona exactamente ese marco: los observables locales son de la forma  $\sigma_a \otimes I_B$  e  $I_A \otimes \sigma_b$ , y el producto de los resultados queda representado por  $\sigma_a \otimes \sigma_b$ . La versión de Bohm-Aharonov elimina así complicaciones técnicas innecesarias y deja el problema en el lenguaje que Bell utilizará después.

El estado singlete desempeña en esta reformulación el papel central. Si ambas partículas se miden en la misma dirección, los resultados aparecen perfectamente anticorrelacionados:

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1. \quad (50)$$

Si las direcciones son distintas, la correlación depende únicamente del ángulo relativo entre ellas:

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos \theta. \quad (51)$$

La dependencia angular permite conservar la riqueza del problema sin trabajar con observables de espectro continuo como posición y momento. Además, la anticorrelación perfecta para direcciones iguales proporciona el tipo de predicción con certeza que el argumento EPR necesita.

Así se obtiene una versión del problema EPR más simple y calculable, pero equivalente en lo esencial. En el escenario de espín no se necesitan estados idealizados de posición

y momento ni correlaciones continuas. Bastan dos resultados posibles por cada medición y la estructura geométrica de las correlaciones del singlete. El problema de completitud queda concentrado en una pregunta más simple: si el resultado remoto puede predecirse con certeza al medir la misma dirección, ¿debe considerarse que ese resultado estaba ya determinado antes de la medida?

Esta formulación no resuelve por sí sola el problema EPR, pero lo hace más preciso. Al pasar a resultados  $+1$  y  $-1$ , el problema queda expresado en el mismo lenguaje que después utilizará Bell para construir sus desigualdades. Esa continuidad es la razón por la que la reformulación de Bohm-Aharonov resulta especialmente adecuada para el análisis de la no localidad cuántica.

### 3.5. El argumento EPR-Bohm con el estado singlete

Consideremos dos partículas de espín  $\frac{1}{2}$  preparadas en el estado singlete y posteriormente separadas. Un observador asociado al subsistema  $A$  mide la componente de espín normalizada en una dirección  $a$ . Otro observador, asociado al subsistema  $B$ , puede medir la componente correspondiente en la misma dirección. La predicción cuántica establece que, si ambos miden en esa dirección, los resultados serán siempre opuestos.

En términos de resultados individuales, si en  $A$  se obtiene  $+1$ , entonces en  $B$  se obtendría  $-1$  al medir la misma componente. Si en  $A$  se obtiene  $-1$ , entonces en  $B$  se obtendría  $+1$ . La predicción es perfecta, aunque el resultado concreto obtenido en  $A$  no pueda anticiparse antes de la medición. La certeza no se refiere a cada resultado por separado, sino a la relación entre ambos.

El razonamiento EPR depende entonces de la hipótesis de localidad. Si las partículas están suficientemente separadas y la medición realizada en  $A$  no perturba físicamente la partícula situada en  $B$ , entonces el resultado que se obtendría en  $B$  parece estar determinado antes de su medición. La medición en  $A$  no crearía el resultado remoto, sino que permitiría inferirlo. Bajo el criterio de realidad de EPR, esa posibilidad de predicción con certeza justificaría atribuir al sistema  $B$  un elemento de realidad asociado a la componente de espín en la dirección considerada.

El argumento adquiere más fuerza porque la preparación del singlete no selecciona una dirección espacial privilegiada: la dirección relevante queda fijada por la elección del dispositivo de medida. El observador en  $A$  podría escoger una dirección  $a$  o una alternativa  $c$ . No se trata de medir ambas componentes en una misma realización, sino de considerar elecciones posibles distintas. Bajo la hipótesis de localidad, esa elección local no debería modificar las propiedades atribuibles al sistema distante. Así, para cada elección, las predicciones del singlete permitirían inferir con certeza el resultado correspondiente en  $B$  si allí se midiera la misma dirección. Si se mantiene que la elección realizada en  $A$  no perturba el sistema distante, parece obligado atribuir al sistema  $B$  elementos de realidad asociados a distintas posibles componentes de espín.

Aquí aparece el punto delicado del razonamiento EPR-Bohm. En mecánica cuántica, las componentes de espín correspondientes a direcciones distintas no son, en general, observables compatibles. Para dos direcciones no colineales  $a$  y  $c$ , esta incompatibilidad queda reflejada en

$$[\sigma_a, \sigma_c] = 2i(a \times c) \cdot \sigma, \quad (52)$$

que solo se anula cuando  $a \times c = 0$ , es decir, cuando las direcciones son colineales. La descripción cuántica ordinaria de una partícula no asigna simultáneamente valores definidos a todas las componentes posibles de espín. Sin embargo, el razonamiento EPR-Bohm, al combinar predicción con certeza y localidad, conduce a atribuir valores definidos a mediciones alternativas.

La conclusión es, por tanto, condicional. No se ha demostrado todavía que existan tales valores ni que las correlaciones cuánticas sean incompatibles con una condición de localidad en el sentido técnico que Bell precisará. Si se aceptan las predicciones cuánticas, el criterio de realidad de EPR y la ausencia de perturbación física a distancia, entonces parece necesario atribuir al sistema remoto propiedades que no aparecen en la descripción cuántica de ese subsistema.

En el escenario de Bohm-Aharonov, el problema de la completitud queda reformulado de este modo. El estado cuántico conjunto describe correctamente las correlaciones, pero, bajo una lectura local de las predicciones perfectas, parece no representar todos los valores

que deberían considerarse físicamente reales. Esa es precisamente la clase de conclusión que EPR quería defender: la mecánica cuántica funcionaría como teoría predictiva, pero no como descripción completa de la realidad física.

El paso hacia Bell consiste en tomar en serio esa posibilidad y preguntarse qué consecuencias tendría. Si existiera una descripción más completa, capaz de asignar respuestas definidas a las mediciones posibles y compatible con una condición de localidad, entonces sus correlaciones no podrían ser arbitrarias. Deberían satisfacer ciertas restricciones matemáticas. La desigualdad original de Bell surge de formular y explotar esa exigencia.

### 3.6. Del problema EPR-Bohm a la formalización de Bell

El argumento EPR-Bohm deja planteado el problema, pero no proporciona todavía una prueba cuantitativa contra las teorías locales. EPR sugiere que, si se mantienen ciertos supuestos, la mecánica cuántica debería ser incompleta. Bohm-Aharonov ofrece un escenario especialmente claro para expresar esa dificultad mediante partículas de espín  $\frac{1}{2}$  y correlaciones del singlete. Bell convierte esa posibilidad en una pregunta precisa: qué tendría que cumplir cualquier teoría que intentara completar la descripción cuántica mediante variables adicionales sin abandonar la localidad.

Una descripción local más completa no solo tendría que reproducir las predicciones perfectas del singlete, sino también precisar qué restricciones impone la localidad cuando se comparan correlaciones asociadas a distintas direcciones de medida.

La novedad de Bell consiste en no dejar esa dificultad en el plano interpretativo. No se limita a afirmar que una descripción local parece problemática. Formaliza de manera general ese tipo de descripción y demuestra que, bajo esas hipótesis, las correlaciones observables deben obedecer ciertas desigualdades. La comparación con el singlete muestra entonces que las correlaciones cuánticas no satisfacen esas restricciones.

La desigualdad original de Bell aparece así como la consecuencia matemática de tomar en serio la posibilidad sugerida por EPR-Bohm. EPR plantea la cuestión de la completitud a partir de predicciones perfectas y localidad. Bohm-Aharonov reformula esa cuestión en términos de espín y del estado singlete. Bell convierte esa dificultad en un resultado

matemático: si las correlaciones procedieran de un modelo local con respuestas definidas, deberían cumplir una desigualdad.

## 4. La desigualdad original de Bell y su significado físico

El escenario de Bohm-Aharonov permite formular la tensión EPR en la forma que Bell va a analizar. En el estado singlete, la anticorrelación perfecta para medidas en una misma dirección permite inferir con certeza el resultado remoto, aunque el resultado local concreto no pueda anticiparse a partir del estado cuántico. Si esa inferencia se combina con el criterio EPR de realidad y con una condición de localidad física, aparece la posibilidad de una descripción más completa en la que las mediciones de espín consideradas tengan respuestas definidas [4], [5]. Bell toma esa posibilidad como punto de partida, pero cambia el tipo de pregunta. Ya no se trata solo de discutir si la mecánica cuántica es completa, sino de determinar qué restricciones deberían satisfacer las correlaciones de una descripción local de ese tipo [1].

Lo decisivo es que una descripción local más completa no tendría que explicar únicamente la anticorrelación perfecta para direcciones iguales. También tendría que reproducir, de manera coherente, las correlaciones obtenidas al comparar distintas direcciones de medida. El problema deja entonces de estar centrado en una única predicción perfecta y pasa a formularse como una cuestión sobre la estructura estadística de una familia de correlaciones. Si las respuestas locales estuvieran fijadas por una información adicional asociada a cada preparación, esa misma información tendría que servir como soporte común para las distintas elecciones posibles de medida. Esa exigencia es la que convierte el problema EPR-Bohm en una restricción cuantitativa.

Bell formaliza este planteamiento mediante modelos locales de variables ocultas. En la derivación intervienen cuatro elementos: la descripción estadística de las preparaciones, la asignación de respuestas a las mediciones posibles, la condición de localidad y la independencia estadística entre la información asociada a la preparación y las elecciones de

medida. La anticorrelación perfecta del singlete permite después simplificar el modelo y obtener una restricción entre correlaciones correspondientes a distintas direcciones.

Sobre esta base se deriva la desigualdad original de Bell. Su interés no reside solo en su forma algebraica, sino en que expresa una consecuencia necesaria de las hipótesis anteriores. La comparación con la correlación cuántica del singlete, obtenida en la ecuación 37, muestra que la restricción no se satisface para ciertas elecciones de direcciones. La conclusión es precisa: bajo las hipótesis formuladas, no existe un modelo local de variables ocultas de ese tipo que reproduzca la familia de correlaciones del singlete. Esto no implica comunicación superlumínica ni descarta toda forma de realismo; identifica el punto concreto en el que la estructura de las correlaciones cuánticas entra en conflicto con una descripción local más completa en el sentido considerado.

#### 4.1. Del problema EPR-Bohm a los modelos locales de variables ocultas

La formalización de Bell no exige construir una teoría microscópica concreta. Basta con especificar de manera general qué tendría que aportar una descripción más completa compatible con la localidad y capaz de reproducir la familia de correlaciones del singlete [1]. En el escenario de Bohm-Aharonov, esta representación resulta especialmente directa: cada medición de una componente de espín normalizada produce un resultado  $+1$  o  $-1$ , y las correlaciones se expresan como promedios del producto de dos resultados [5].

La idea central es que una misma preparación cuántica puede corresponder, en una descripción más completa, a realizaciones individuales caracterizadas por cierta información adicional. Esa información no se introduce para definir un nuevo observable cuántico, sino para representar aquello que el estado cuántico ordinario no especificaría por completo.

Un modelo local de variables ocultas debe entenderse aquí en ese sentido general. No se presupone una teoría clásica particular ni se identifica esa información con una magnitud directamente medible dentro del formalismo cuántico estándar. El término “oculta” indica solamente que dicha información no forma parte de la descripción cuántica usual del estado. Para el argumento de Bell no importa su naturaleza microscópica concreta, sino

las restricciones que aparecen si se exige que esa información determine las respuestas locales de manera compatible con una condición de localidad.

La dificultad no está en reproducir una correlación aislada, sino en integrar en un mismo esquema las respuestas asociadas a distintas elecciones de medida. Una descripción local más completa no puede limitarse a reproducir la anticorrelación perfecta cuando ambos lados miden la misma dirección. También debe reproducir, al menos en promedio, las correlaciones correspondientes a otras parejas de direcciones. La restricción característica del argumento de Bell surge al exigir que todas esas correlaciones procedan de una misma estructura local subyacente, y no de los detalles de una teoría microscópica particular.

En la desigualdad original de Bell, el carácter determinista de las respuestas no aparece como una hipótesis gratuita. Está motivado por el propio razonamiento EPR-Bohm. Si el resultado remoto puede predecirse con certeza y si la medición local no perturba físicamente el sistema distante, entonces una descripción local completa debería contener ya la información necesaria para fijar la respuesta correspondiente. Esta conclusión no equivale a afirmar que la mecánica cuántica asigne de antemano valores definidos a todos los observables de espín; expresa lo que tendría que ocurrir dentro de una descripción local más completa que quisiera reproducir las predicciones perfectas del singlete.

La discusión queda así desplazada desde la inferencia de un resultado remoto en una situación de predicción perfecta hacia la consistencia global de una familia de correlaciones. El primer paso consiste en introducir la información adicional asociada a cada preparación individual y la distribución estadística con la que aparece en un conjunto de repeticiones del experimento. A partir de ahí podrá formularse la correlación local como un promedio sobre preparaciones, antes de precisar las respuestas locales y la condición de localidad.

#### 4.2. Variables ocultas y distribución estadística

El modelo separa la preparación cuántica repetida en el experimento de sus realizaciones individuales. En cada repetición se prepara un par de partículas bajo el mismo procedimiento macroscópico, pero una descripción más completa podría atribuir a cada par una especificación adicional que no aparece en el estado cuántico ordinario.

Se denotará esa información adicional por  $\lambda$ . El símbolo  $\lambda$  no designa aquí una única variable escalar ni un observable cuántico; representa, de forma genérica, el conjunto de parámetros adicionales que caracterizarían una preparación individual dentro de un espacio de posibilidades  $\Lambda$ . Lo importante para el argumento no es la naturaleza microscópica concreta de esos parámetros, sino el hecho de que el modelo asigna a cada repetición algún valor  $\lambda \in \Lambda$ .

Como el experimento no se reduce a una única realización, sino que consiste en muchas repeticiones de una misma preparación, el modelo debe especificar también cómo aparecen esos valores de  $\lambda$  en el conjunto de pares preparados. Esta información se codifica mediante una distribución estadística  $\rho(\lambda)$  sobre  $\Lambda$ . Se exigirá que

$$\rho(\lambda) \geq 0, \quad \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) = 1. \quad (53)$$

La primera condición expresa que  $\rho(\lambda)$  tiene el papel de una densidad de probabilidad; la segunda fija su normalización. La notación  $\int_{\Lambda} d\lambda$  se usará de forma general. Si el conjunto de variables ocultas fuera discreto, la integral debería entenderse como la suma correspondiente. Esta elección de notación no supone, por tanto, que  $\Lambda$  sea necesariamente un espacio continuo ordinario.

La distribución  $\rho(\lambda)$  recoge la estadística de esas realizaciones individuales. No es una probabilidad cuántica obtenida mediante la regla de Born ni convierte  $\lambda$  en una magnitud observable del formalismo cuántico estándar. Su función es más precisa: promediar las respuestas que el modelo atribuye a las distintas realizaciones ocultas de una misma preparación experimental.

Esta distinción es esencial para la comparación con las correlaciones cuánticas. En mecánica cuántica, la correlación  $E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se obtiene como valor esperado del observable  $\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}}$  en el estado singlete. En un modelo local de variables ocultas, en cambio, la correlación se construirá como un promedio estadístico sobre las realizaciones individuales caracterizadas por  $\lambda$ . La tarea será entonces determinar qué forma pueden tener esos promedios si, además, las respuestas locales respetan una condición de localidad.

Todavía no se ha especificado cómo dependen los resultados de medida de  $\lambda$  ni de las direcciones elegidas. Lo único establecido hasta ahora es el soporte estadístico del modelo: cada par preparado puede estar asociado a una información adicional  $\lambda$ , y el conjunto de repeticiones viene descrito por una distribución normalizada  $\rho(\lambda)$ .

### 4.3. Funciones de respuesta deterministas y condición de localidad

Para que el modelo produzca predicciones sobre resultados de medida, no basta con introducir la variable  $\lambda$  y su distribución. Hay que especificar qué resultado atribuye el modelo a una medición de espín en cada lado del sistema. En el escenario considerado, cada medida de una componente de espín normalizada tiene dos resultados posibles,  $+1$  y  $-1$ . Por ello, las respuestas locales del modelo se representarán mediante funciones que toman valores dicotómicos.

Si el observador asociado al subsistema  $A$  mide la componente de espín en la dirección  $\mathbf{a}$ , el modelo asigna una respuesta

$$A(\mathbf{a}, \lambda) \in \{-1, +1\}. \quad (54)$$

Del mismo modo, si el observador asociado al subsistema  $B$  mide en la dirección  $\mathbf{b}$ , el modelo asigna una respuesta

$$B(\mathbf{b}, \lambda) \in \{-1, +1\}. \quad (55)$$

En forma conjunta,

$$A(\mathbf{a}, \lambda) \in \{-1, +1\}, \quad B(\mathbf{b}, \lambda) \in \{-1, +1\}. \quad (56)$$

Estas funciones no son observables cuánticos. No actúan sobre un espacio de Hilbert ni se obtienen diagonalizando operadores. Representan, dentro del modelo local de variables ocultas, qué resultado quedaría asociado a una preparación individual caracterizada por  $\lambda$  si se eligiera una determinada dirección de medida. La formulación condicional es importante: el modelo permite comparar respuestas asociadas a distintas elecciones posibles, aunque en una realización concreta solo se mida una dirección en cada lado.

El carácter determinista de estas funciones no se introduce aquí como una suposición arbitraria desconectada del argumento EPR-Bohm. La motivación procede de la predicción con certeza para direcciones iguales en el singlete. Si se mantiene que la medición realizada en un lado no perturba físicamente el sistema distante, entonces una descripción local más completa debe contener la información necesaria para fijar la respuesta que se obtendría en el otro lado. Bell toma en serio esa posibilidad y estudia qué consecuencias tendría para las correlaciones [1].

La condición de localidad se expresa como una restricción sobre las dependencias de estas funciones. La respuesta atribuida al lado  $A$  puede depender de  $\mathbf{a}$  y de la información  $\lambda$  asociada a la preparación, pero no de  $\mathbf{b}$ . De manera análoga, la respuesta atribuida al lado  $B$  puede depender de  $\mathbf{b}$  y de  $\lambda$ , pero no de  $\mathbf{a}$ . Por eso se escriben las funciones como  $A(\mathbf{a}, \lambda)$  y  $B(\mathbf{b}, \lambda)$ , y no como funciones que dependan simultáneamente de las dos direcciones de medida.

Esta localidad es una hipótesis física sobre la estructura del modelo. No debe confundirse con la localidad algebraica de los operadores  $\sigma_{\mathbf{a}} \otimes I_B$  e  $I_A \otimes \sigma_{\mathbf{b}}$ , introducida al construir el formalismo bipartito. Allí la palabra local indicaba que un operador actuaba de forma no trivial sobre uno de los factores del producto tensorial. Aquí, en cambio, la localidad significa que la respuesta asignada a un subsistema no depende de la elección de medida realizada en el subsistema distante.

Dadas estas funciones de respuesta, la correlación predicha por el modelo local de variables ocultas, abreviado como LHV a partir de la expresión inglesa *local hidden variables*, se obtiene promediando el producto de resultados sobre la distribución de variables ocultas:

$$E_{\text{LHV}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda). \quad (57)$$

Esta expresión es el análogo, dentro del modelo de variables ocultas, de la correlación cuántica calculada mediante valores esperados. Sin embargo, su estructura es distinta. En lugar de partir de un estado vectorial y de operadores de espín, parte de respuestas definidas para cada preparación individual y de un promedio estadístico sobre  $\lambda$ . La desigualdad de Bell surgirá al imponer que estas respuestas locales, con una misma distri-

bución de variables ocultas, sean capaces de reproducir correlaciones asociadas a distintas direcciones de medida.

#### 4.4. Independencia estadística de las elecciones de medida

Además de la localidad de las funciones de respuesta, la derivación necesita una hipótesis sobre la relación entre las variables ocultas asociadas a la preparación y las direcciones de medida elegidas posteriormente. La distribución  $\rho(\lambda)$  debe describir el conjunto de pares preparados, no depender de qué direcciones se elijan para medir en una repetición concreta. Esta condición suele formularse como independencia estadística de las elecciones de medida respecto de las variables ocultas.

En la notación introducida, la hipótesis se expresa como

$$\rho(\lambda \mid \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \rho(\lambda). \quad (58)$$

Esto significa que, una vez fijado el procedimiento de preparación, la distribución de los valores de  $\lambda$  no cambia al condicionar por las direcciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  seleccionadas para los analizadores. La preparación del par y la elección de los ajustes de medida se tratan, por tanto, como estadísticamente independientes.

Esta hipótesis no coincide con la localidad. La localidad restringe de qué puede depender cada respuesta; la independencia estadística restringe de qué pueden depender las distribuciones asociadas a la preparación. Tampoco afirma que los resultados obtenidos en los dos lados sean independientes ni que las correlaciones deban factorizarse como producto de promedios locales. La estructura de correlación sigue estando contenida en las funciones  $A(\mathbf{a}, \lambda)$  y  $B(\mathbf{b}, \lambda)$ , y en el promedio sobre  $\lambda$ . Lo que se excluye es que la distribución de las variables ocultas dependa de las direcciones de medida que se van a comparar.

Esta condición se vuelve necesaria al considerar varias correlaciones con distintas elecciones de direcciones. Para derivar una desigualdad entre  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $E(\mathbf{a}, \mathbf{c})$  y  $E(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ , todas esas cantidades deben calcularse usando la misma distribución  $\rho(\lambda)$ . Si la distribución pudiera cambiar con cada par de direcciones, la comparación algebraica perdería su base

común. La desigualdad no se obtiene de cada correlación por separado, sino de la posibilidad de referirlas todas a una misma estructura estadística subyacente.

#### 4.5. Anticorrelación perfecta y reducción a una única función de respuesta

La desigualdad original de Bell se apoya de manera esencial en una propiedad específica del singlete: la anticorrelación perfecta para medidas en la misma dirección. Como se obtuvo en la ecuación 37, la correlación cuántica del singlete satisface

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1. \quad (59)$$

Si el modelo local de variables ocultas pretende reproducir esta predicción para cualquier dirección  $\mathbf{a}$ , entonces debe cumplirse

$$E_{\text{LHV}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{a}, \lambda) = -1. \quad (60)$$

Ahora bien, para cada valor de  $\lambda$ , el producto  $A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{a}, \lambda)$  solo puede valer  $+1$  o  $-1$ . Además,  $\rho(\lambda)$  es una distribución positiva y normalizada. Por tanto, un promedio de cantidades que nunca son menores que  $-1$  solo puede ser igual a  $-1$  si esas cantidades valen  $-1$  para casi todo  $\lambda$  respecto de la distribución  $\rho$ .

De ahí se obtiene, para casi todo  $\lambda$ ,

$$A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{a}, \lambda) = -1, \quad (61)$$

o, de forma equivalente,

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{a}, \lambda). \quad (62)$$

La expresión “para casi todo  $\lambda$ ” indica que pueden excluirse, como máximo, conjuntos de medida nula respecto de  $\rho(\lambda)$ . Esta precisión es importante: no basta con que la anticorrelación aparezca solo en promedio por cancelaciones entre distintos valores de  $\lambda$ . Como los productos locales solo toman los valores  $+1$  y  $-1$ , reproducir una anticorrelación perfecta exige que el producto sea  $-1$  en cada preparación individual salvo excepciones estadísticamente irrelevantes.

Esta conclusión pertenece al modelo local de variables ocultas, no a la mecánica cuántica ordinaria. En el formalismo cuántico, la igualdad  $E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1$  se obtiene como una propiedad de la correlación del estado singlete. No implica por sí sola que la teoría cuántica asigne valores definidos a todas las componentes de espín antes de la medida. La relación anterior surge al exigir que un modelo local con respuestas definidas reproduzca esa predicción perfecta.

Gracias a esta reducción, la respuesta del lado  $B$  para una dirección dada puede expresarse en términos de la respuesta del lado  $A$  para esa misma dirección. En particular,

$$B(\mathbf{b}, \lambda) = -A(\mathbf{b}, \lambda) \quad (63)$$

para casi todo  $\lambda$ . Sustituyendo esta relación en la correlación local general, se obtiene

$$E_{\text{LHV}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda). \quad (64)$$

En lo que sigue se escribirá simplemente  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cuando no haya ambigüedad y se esté trabajando dentro del modelo local reducido. Así,

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda). \quad (65)$$

Esta forma es característica de la desigualdad original de Bell. La anticorrelación perfecta permite eliminar una de las dos funciones de respuesta y expresar todas las correlaciones en términos de una única familia de respuestas  $A(\mathbf{a}, \lambda)$ . A partir de esta estructura se obtiene la restricción algebraica que se derivará a continuación.

#### 4.6. Derivación de la desigualdad original de Bell

Consideremos tres direcciones de medida  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ . Dentro del modelo local reducido por la anticorrelación perfecta, las correlaciones vienen dadas por

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda), \quad (66)$$

y de forma análoga para los demás pares de direcciones. La derivación de la desigualdad consiste en comparar dos correlaciones que comparten la dirección  $\mathbf{a}$ .

Partimos de la diferencia

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) \\ &\quad + \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda). \end{aligned} \quad (67)$$

Agrupando ambos términos,

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) (A(\mathbf{c}, \lambda) - A(\mathbf{b}, \lambda)). \quad (68)$$

Para obtener una forma que permita acotar esta expresión, se inserta el factor  $A(\mathbf{b}, \lambda)^2 = 1$ , válido porque las respuestas toman valores  $\pm 1$ . Así,

$$A(\mathbf{c}, \lambda) - A(\mathbf{b}, \lambda) = A(\mathbf{b}, \lambda) (A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) - 1). \quad (69)$$

Por tanto,

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) (A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) - 1). \quad (70)$$

Tomando valor absoluto y aplicando la desigualdad triangular,

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) |A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda)| |A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) - 1|. \quad (71)$$

Como  $A(\mathbf{a}, \lambda)$  y  $A(\mathbf{b}, \lambda)$  valen  $\pm 1$ , se cumple

$$|A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda)| = 1. \quad (72)$$

Además, el producto  $A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)$  también toma los valores  $+1$  o  $-1$ . Por ello,

$$|A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) - 1| = 1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda). \quad (73)$$

En efecto, si el producto vale  $+1$ , ambos lados son cero; si vale  $-1$ , ambos lados son dos.

Así,

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) (1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)). \quad (74)$$

Usando la normalización de  $\rho(\lambda)$ ,

$$\int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) (1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)) = 1 - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda). \quad (75)$$

Pero, por la forma reducida de la correlación,

$$E(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda). \quad (76)$$

Sustituyendo este resultado, se obtiene finalmente

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + E(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (77)$$

Esta es la desigualdad original de Bell en la forma que se usará en este capítulo. Su contenido no depende de una elección particular de las funciones  $A$  ni de una forma concreta para  $\rho(\lambda)$ . Se sigue únicamente de la existencia de respuestas dicotómicas definidas, de la condición de localidad, de la independencia estadística de las elecciones de medida y de la reducción producida por la anticorrelación perfecta del singlete [1].

La importancia del resultado está precisamente en esa generalidad. Cualquier modelo que tenga la estructura descrita debe producir correlaciones que satisfagan la ecuación 77. Por tanto, basta encontrar correlaciones cuánticas del singlete que violen esta desigualdad para mostrar que no pueden reproducirse mediante un modelo local de variables ocultas de este tipo.

#### 4.7. Violación cuántica a partir de las correlaciones del singlete

La comparación con la mecánica cuántica se realiza usando la correlación del singlete obtenida en la ecuación 37:

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (78)$$

Si  $\theta$  es el ángulo entre las dos direcciones, esta expresión se escribe como

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos \theta. \quad (79)$$

Para mostrar la violación de la desigualdad original de Bell, basta elegir tres direcciones coplanarias  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  tales que

$$\theta_{a,b} = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_{b,c} = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_{a,c} = 2\frac{\pi}{3}. \quad (80)$$

Con esta elección,

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (81)$$

mientras que

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad (82)$$

y

$$E_{\psi^-}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}. \quad (83)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 77, el lado izquierdo resulta

$$|E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{c})| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 1. \quad (84)$$

El lado derecho es

$$1 + E_{\psi^-}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (85)$$

La desigualdad exigiría entonces

$$1 \leq \frac{1}{2}, \quad (86)$$

lo cual es imposible. Por tanto, las correlaciones cuánticas del singlete violan la desigualdad original de Bell para esta elección de direcciones [1].

El cálculo es sencillo, pero su significado es importante. La ecuación 77 no es una aproximación ni una propiedad particular de un modelo específico de variables ocultas. Es una

consecuencia general de las hipótesis formuladas en las subsecciones anteriores. La violación muestra que la familia de correlaciones del singlete no puede reproducirse mediante un modelo local de variables ocultas con esa estructura.

La violación no procede de un sesgo local en los resultados. Como se obtuvo en la ecuación 42, los marginales locales del singlete son equilibrados. El conflicto aparece al considerar simultáneamente varias correlaciones asociadas a distintas direcciones de medida. Cada correlación cuántica aislada puede parecer compatible con alguna descripción particular; lo que falla es la posibilidad de integrarlas todas en una misma estructura local con respuestas definidas.

#### 4.8. Alcance físico de la violación

La violación obtenida en la subsección anterior debe interpretarse con precisión. Lo que se ha mostrado es que, bajo las hipótesis formuladas, no existe un modelo local de variables ocultas que reproduzca la familia de correlaciones del singlete. La conclusión no es simplemente que “la naturaleza sea no local” en un sentido absoluto ni que Bell refute toda forma posible de realismo. El resultado identifica una incompatibilidad concreta entre ciertas correlaciones cuánticas y una clase bien definida de descripciones locales.

Las hipótesis usadas son concretas. Cada preparación individual se caracteriza mediante información adicional  $\lambda$  distribuida según  $\rho(\lambda)$ ; las mediciones consideradas tienen respuestas definidas; la respuesta en un lado no depende de la dirección elegida en el otro; y la distribución de variables ocultas asociada a la preparación no depende de las elecciones de medida. Además, la anticorrelación perfecta del singlete permite reducir la estructura del modelo a una única función de respuesta. La desigualdad se sigue de este conjunto de condiciones.

La violación cuántica obliga, por tanto, a abandonar al menos una de esas condiciones si se quiere reproducir todas las correlaciones del singlete. La lectura física depende de qué hipótesis se considere revisable. Lo que no puede mantenerse es la combinación completa de respuestas definidas, localidad en el sentido de Bell, independencia estadística de las

elecciones de medida y reproducción de la anticorrelación perfecta junto con las demás correlaciones angulares del singlete.

Esta conclusión tampoco implica comunicación superlumínica. De forma más explícita, al sumar la distribución conjunta del singlete sobre el resultado del otro subsistema se obtiene

$$p_{\psi^-}(r \mid \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{s \in \{-1, +1\}} p_{\psi^-}(r, s \mid \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}, \quad (87)$$

y, análogamente,

$$p_{\psi^-}(s \mid \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{r \in \{-1, +1\}} p_{\psi^-}(r, s \mid \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}. \quad (88)$$

Por tanto, cada observador local obtiene resultados equilibrados, sin que su distribución dependa de la dirección elegida por el observador distante. La estructura no clásica aparece en la distribución conjunta, no en los marginales locales. Por eso no proporciona un mecanismo de señalización.

Conviene distinguir, entonces, entre dos afirmaciones. La primera es la ausencia de señalización: la distribución local de resultados no depende de la dirección elegida en el otro subsistema; en el singlete, además, esa distribución es equilibrada entre  $+1$  y  $-1$ . La segunda es la incompatibilidad global de las correlaciones con un modelo local de variables ocultas. La primera propiedad impide interpretar la violación como un mecanismo de comunicación directa. La segunda muestra que las correlaciones conjuntas poseen una estructura que no puede reducirse a respuestas locales definidas promediadas sobre una misma distribución de variables ocultas.

El significado físico de la desigualdad de Bell reside precisamente en separar estas cuestiones. No basta con decir que el singlete está entrelazado, ni basta con observar que sus marginales son equilibrados. La dependencia angular de sus correlaciones no satisface las restricciones que impondría una descripción local más completa del tipo considerado. La tensión inicial de EPR-Bohm queda así transformada en un resultado cuantitativo.

#### 4.9. Limitaciones de la desigualdad original y transición a CHSH

Esa transformación cuantitativa es especialmente clara en la desigualdad original de Bell. La anticorrelación perfecta del singlete para direcciones iguales permite imponer, dentro del modelo local,  $B(\mathbf{a}, \lambda) = -A(\mathbf{a}, \lambda)$  y expresar las correlaciones mediante una sola familia de respuestas. De ahí se obtiene una restricción sencilla entre tres correlaciones, suficiente para mostrar que las correlaciones cuánticas del singlete no satisfacen las condiciones impuestas por una descripción local de ese tipo [1].

La claridad de esta forma tiene una contrapartida. La derivación depende de esa reducción obtenida a partir de la anticorrelación perfecta, de modo que queda ligada a una estructura asimétrica con tres direcciones. Esta dependencia no debilita el resultado, pero sí delimita su alcance: para comparar correlaciones sin recurrir a esa simplificación resulta natural una formulación más simétrica.

Con ello queda fijado el conflicto en la forma más directamente ligada a las predicciones perfectas del singlete. CHSH conserva esa lógica, pero la reorganiza en una combinación más simétrica de correlaciones que no requiere identificar previamente, para una misma dirección, la respuesta de un lado con la opuesta del otro [2].

## 5. La desigualdad CHSH y las correlaciones cuánticas del singlete

Tras el resultado obtenido con la desigualdad original de Bell, la formulación CHSH conserva ese núcleo, pero reorganiza la comparación de correlaciones de un modo más simétrico [2]. Al introducir dos direcciones de medida por observador, la restricción local pasa a formularse sobre la compatibilidad conjunta de cuatro correlaciones.

Esta modificación evita que la derivación dependa de identificar, para una misma dirección, la respuesta de un lado con la opuesta del otro. La estructura común viene dada ahora por el mismo espacio de variables ocultas  $\Lambda$  y por una misma distribución  $\rho(\lambda)$  para todas las elecciones de medida consideradas. Por ello, las cuatro correlaciones no pueden variar de manera independiente dentro de un modelo local de variables ocultas. La combinación CHSH que las agrupa debe satisfacer una cota común y expresa precisamente esa restricción global sobre correlaciones entre resultados dicotómicos.

La comparación con la mecánica cuántica se apoya en el resultado ya establecido para el singlete,

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (89)$$

obtenido en Ecuación 37. Al insertar esta correlación angular en la combinación CHSH, aparecen elecciones de direcciones para las que la predicción cuántica supera la cota local. Lo que se obtiene así es un valor concreto de la combinación CHSH para el singlete, no una afirmación sobre el máximo permitido por la mecánica cuántica.

Es esencial no identificar los dos niveles de descripción que intervienen en la comparación. En el modelo local,  $A(\mathbf{a}, \lambda)$ ,  $A(\mathbf{a}', \lambda)$ ,  $B(\mathbf{b}, \lambda)$  y  $B(\mathbf{b}', \lambda)$  son funciones de respuesta

dicotómicas asociadas a realizaciones individuales caracterizadas por  $\lambda$ ; no actúan sobre un espacio de Hilbert ni representan observables cuánticos. En la descripción cuántica, esas mismas direcciones aparecen en las correlaciones del singlete, calculadas a partir de observables de espín. El contraste entre ambas descripciones se formulará comparando una misma combinación estadística. En el modelo local, esa combinación está sometida a la cota local; en el singlete, queda determinada por la dependencia angular  $-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

### 5.1. De la desigualdad original de Bell a la formulación CHSH

El paso de la desigualdad original de Bell a la formulación CHSH no cambia el núcleo físico del problema. En ambos casos se comparan correlaciones cuánticas con las restricciones impuestas por una descripción local de variables ocultas. Lo que cambia es la forma algebraica en la que se extrae esa restricción. En la formulación original, la anticorrelación perfecta del singlete para direcciones iguales permitió imponer, dentro del modelo local, la relación  $B(\mathbf{a}, \lambda) = -A(\mathbf{a}, \lambda)$  para casi todo  $\lambda$ . Gracias a esa reducción, todas las correlaciones pudieron escribirse en términos de una única familia de respuestas  $A(\mathbf{a}, \lambda)$ .

La desigualdad obtenida entonces fue

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + E(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (90)$$

Su fuerza conceptual procede de que surge directamente de las hipótesis locales formuladas a partir del razonamiento EPR-Bohm [1]. Sin embargo, su derivación queda ligada a una propiedad muy específica del singlete: la anticorrelación perfecta. Además, la reducción a una sola función de respuesta introduce una asimetría en la formulación, porque la respuesta de un lado queda expresada mediante la del otro para la misma dirección. Esa asimetría no es un error, pero sí limita la forma en que la desigualdad organiza las correlaciones.

La formulación CHSH elimina esa dependencia directa de la anticorrelación perfecta. En lugar de partir de tres direcciones y reducir las respuestas a una única función, considera dos elecciones posibles de medida en cada subsistema. Para el lado  $A$  se toman las direcciones  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}'$ ; para el lado  $B$ , las direcciones  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{b}'$ . El foco pasa entonces de tres

correlaciones ligadas por la reducción  $B = -A$  a cuatro correlaciones entre pares de elecciones locales.

Para estas cuatro elecciones, la combinación CHSH toma la forma

$$S = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}'). \quad (91)$$

El signo negativo del último término no atribuye un papel físico especial a esa pareja de direcciones. Fija una convención algebraica para construir la combinación de cuatro correlaciones. Otras elecciones de signos, relacionadas por cambios de nombre de las direcciones o por inversiones de resultados, dan lugar a formas equivalentes. Basta fijar una convención y mantenerla al comparar los modelos locales con las correlaciones cuánticas.

En esta formulación,  $S$  es una magnitud estadística, no un operador cuántico. Cada término  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  representa una correlación entre dos resultados dicotómicos, y la combinación completa compara cuatro correlaciones que un mismo modelo local debe describir de manera coherente. La presencia de los cuatro términos no significa que las cuatro parejas de direcciones se midan simultáneamente en una misma repetición. Significa que el modelo debe asignar respuestas a las elecciones posibles y usar la misma distribución  $\rho(\lambda)$  para todas ellas.

Aquí reside la diferencia estructural con la desigualdad original. En Bell, la anticorrelación perfecta permitió simplificar el modelo antes de obtener la desigualdad. En CHSH, la restricción nace de exigir que las respuestas locales asociadas a  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{b}'$  puedan integrarse en una misma descripción estadística local. La comparación con la mecánica cuántica no dependerá de una correlación aislada, sino de la restricción que esas hipótesis imponen sobre los cuatro términos que aparecen en Ecuación 91.

Esta reorganización conserva el propósito del argumento de Bell, pero lo sitúa en una forma más adecuada para comparar modelos locales y correlaciones cuánticas del singlete. La definición de esas cuatro correlaciones dentro del modelo local completa la transición desde Bell hacia CHSH, sin recurrir a la reducción específica basada en la anticorrelación perfecta.

## 5.2. Dos elecciones de medida por observador y correlaciones en el modelo local

Una vez introducida la combinación CHSH, hay que precisar cómo se construyen sus cuatro correlaciones dentro de un modelo local de variables ocultas. A diferencia de la desigualdad original de Bell, no se usará la anticorrelación perfecta para identificar la respuesta de un lado con la opuesta del otro. El modelo debe conservar dos familias de respuestas locales, una para cada subsistema, y asignarlas a las elecciones posibles de medida.

Para el observador asociado al subsistema  $A$ , las dos direcciones disponibles serán  $a$  y  $a'$ . Para el observador asociado al subsistema  $B$ , las dos direcciones disponibles serán  $b$  y  $b'$ . En una repetición concreta solo se elige una pareja de direcciones, pero el modelo local debe estar definido para todas las alternativas que podrían seleccionarse. Por tanto, para cada valor de la variable oculta  $\lambda$ , se introducen las funciones de respuesta

$$\begin{aligned} A(x, \lambda) &\in \{-1, +1\}, \quad x \in \{a, a'\}, \\ B(y, \lambda) &\in \{-1, +1\}, \quad y \in \{b, b'\}. \end{aligned} \tag{92}$$

Estas cantidades son funciones de respuesta del modelo local. No son operadores cuánticos ni actúan sobre el espacio de Hilbert del sistema bipartito. Su función es indicar qué resultado atribuye el modelo a una realización individual caracterizada por  $\lambda$  cuando se elige una determinada dirección de medida. Que el modelo esté definido para las distintas elecciones posibles solo significa que una misma descripción local debe asignar respuestas coherentes a las alternativas que podrían elegirse; no que todas ellas se midan simultáneamente en una misma repetición.

La condición de localidad conserva la misma estructura conceptual que en el capítulo anterior. La respuesta en  $A$  puede depender de la dirección elegida en  $A$  y de la variable  $\lambda$ , pero no de la dirección elegida en  $B$ . De manera análoga, la respuesta en  $B$  puede depender de la dirección elegida en  $B$  y de  $\lambda$ , pero no de la dirección elegida en  $A$ . Por eso se escriben funciones como  $A(a, \lambda)$  y  $B(b', \lambda)$ , y no funciones que dependan simultáneamente de las elecciones de ambos observadores.

También se mantiene la independencia estadística entre la preparación y las elecciones de medida. En el contexto CHSH, esto significa que la misma distribución  $\rho(\lambda)$  debe servir para las cuatro parejas de direcciones consideradas:

$$\rho(\lambda \mid \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\lambda), \quad \mathbf{x} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{a}'\}, \quad \mathbf{y} \in \{\mathbf{b}, \mathbf{b}'\}. \quad (93)$$

Esta condición permite que las cuatro correlaciones se comparen dentro de una misma combinación. Si la distribución de variables ocultas cambiara con cada pareja de direcciones, las cuatro cantidades que aparecen en CHSH no estarían referidas a una misma estadística subyacente.

En esta formulación se trabaja con respuestas deterministas. Para obtener la cota local de CHSH, esto no supone una restricción esencial: los modelos locales estocásticos pueden descomponerse como promedios de asignaciones deterministas, o bien incorporarse a una variable oculta ampliada que incluya la aleatoriedad auxiliar. Por ello, basta considerar funciones de respuesta con valores en  $\{-1, +1\}$ .

Para cada pareja de direcciones  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ , con

$$\mathbf{x} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{a}'\}, \quad \mathbf{y} \in \{\mathbf{b}, \mathbf{b}'\}, \quad (94)$$

la correlación predicha por el modelo local se define como el promedio del producto de las respuestas:

$$E_{\text{LHV}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{x}, \lambda) B(\mathbf{y}, \lambda). \quad (95)$$

De esta expresión se obtienen las cuatro correlaciones que intervienen en la combinación CHSH:

$$\begin{aligned} E_{\text{LHV}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad E_{\text{LHV}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}'), \\ E_{\text{LHV}}(\mathbf{a}', \mathbf{b}), \quad E_{\text{LHV}}(\mathbf{a}', \mathbf{b}'). \end{aligned} \quad (96)$$

Todas ellas se calculan con la misma distribución  $\rho(\lambda)$  y con funciones locales definidas para las dos elecciones de cada observador. La diferencia con la desigualdad original está en la forma del modelo. Aquí no se impone la relación  $B(\mathbf{a}, \lambda) = -A(\mathbf{a}, \lambda)$ , sino que se conservan explícitamente las respuestas locales de ambos lados.

Al sustituir las cuatro correlaciones locales en Ecuación 91, la cantidad CHSH predicha por el modelo local puede escribirse como

$$S_{\text{LHV}} = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) (A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) + A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda) + A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)). \quad (97)$$

Hasta aquí no se ha usado ninguna desigualdad. Solo se ha expresado la combinación CHSH como un promedio sobre realizaciones individuales caracterizadas por  $\lambda$ . La restricción local surgirá al analizar el valor que puede tomar, para cada  $\lambda$ , la combinación de cuatro productos que aparece dentro de la integral.

### 5.3. Derivación de la cota local de CHSH

La expresión obtenida en Ecuación 97 permite derivar la restricción local de CHSH sin introducir todavía ningún elemento cuántico adicional. El punto de partida es analizar la combinación que aparece dentro de la integral, es decir, el valor que tomaría la expresión CHSH para una realización individual caracterizada por un valor fijo de  $\lambda$ .

Definimos, para cada  $\lambda$ ,

$$s(\lambda) = A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) + A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda) + A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda). \quad (98)$$

Con esta notación, la cantidad CHSH predicha por el modelo local puede escribirse como

$$S_{\text{LHV}} = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) s(\lambda). \quad (99)$$

La restricción local aparece porque los cuatro productos que forman  $s(\lambda)$  no son independientes. Para un mismo valor de  $\lambda$ , el modelo local asigna simultáneamente las respuestas correspondientes a las cuatro elecciones posibles de medida. Reagrupando los términos de Ecuación 98, se obtiene

$$s(\lambda) = A(\mathbf{a}, \lambda)(B(\mathbf{b}, \lambda) + B(\mathbf{b}', \lambda)) + A(\mathbf{a}', \lambda)(B(\mathbf{b}, \lambda) - B(\mathbf{b}', \lambda)). \quad (100)$$

Ahora se usa únicamente que las respuestas del lado  $B$  son dicotómicas,

$$B(\mathbf{b}, \lambda), \quad B(\mathbf{b}', \lambda) \in \{-1, +1\}. \quad (101)$$

Por tanto, para cada  $\lambda$  solo pueden darse dos posibilidades. Si las dos respuestas del lado  $B$  coinciden,

$$B(\mathbf{b}, \lambda) = B(\mathbf{b}', \lambda), \quad (102)$$

entonces

$$B(\mathbf{b}, \lambda) + B(\mathbf{b}', \lambda) = \pm 2, \quad B(\mathbf{b}, \lambda) - B(\mathbf{b}', \lambda) = 0. \quad (103)$$

En este caso, Ecuación 100 queda reducido a

$$s(\lambda) = \pm 2A(\mathbf{a}, \lambda). \quad (104)$$

Como  $A(\mathbf{a}, \lambda) \in \{-1, +1\}$ , se obtiene  $s(\lambda) = \pm 2$ .

Si, por el contrario, las dos respuestas del lado  $B$  son opuestas,

$$B(\mathbf{b}, \lambda) = -B(\mathbf{b}', \lambda), \quad (105)$$

entonces

$$B(\mathbf{b}, \lambda) + B(\mathbf{b}', \lambda) = 0, \quad B(\mathbf{b}, \lambda) - B(\mathbf{b}', \lambda) = \pm 2. \quad (106)$$

En este segundo caso,

$$s(\lambda) = \pm 2A(\mathbf{a}', \lambda), \quad (107)$$

y de nuevo, como  $A(\mathbf{a}', \lambda) \in \{-1, +1\}$ , se obtiene  $s(\lambda) = \pm 2$ .

Así, para todo valor de  $\lambda$  para el que estén definidas las funciones de respuesta,

$$|s(\lambda)| = 2. \quad (108)$$

La cota local se obtiene al promediar esta igualdad puntual sobre la distribución de variables ocultas. Usando la positividad y la normalización de  $\rho(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned}
 |S_{\text{LHV}}| &= \left| \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) s(\lambda) \right| \\
 &\leq \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) |s(\lambda)| \\
 &= \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) 2 \\
 &= 2.
 \end{aligned} \tag{109}$$

Por tanto, toda descripción local de variables ocultas con la estructura considerada debe satisfacer

$$|S_{\text{LHV}}| \leq 2. \tag{110}$$

Esta es la cota local de la desigualdad CHSH. Su contenido no procede de acotar por separado cada una de las cuatro correlaciones, ya que esa estimación solo daría la cota algebraica  $|S| \leq 4$ . La restricción más fuerte surge de que, para cada  $\lambda$ , el modelo asigna conjuntamente las respuestas locales asociadas a las cuatro elecciones posibles, y de que las cuatro correlaciones se promedian después con una misma distribución  $\rho(\lambda)$ .

La cota local dada en Ecuación 110 resume, por tanto, una consecuencia directa de las hipótesis del modelo local: respuestas dicotómicas, localidad de las funciones de respuesta e independencia estadística de las elecciones de medida. La comparación con la mecánica cuántica se hará aplicando la misma combinación  $S$  a las correlaciones del singlete.

#### 5.4. Evaluación cuántica de la combinación CHSH en el singlete

Una vez obtenida la cota local de CHSH, hay que evaluar la misma combinación de correlaciones dentro de la descripción cuántica. La comparación debe hacerse con la misma convención de signos fijada en Ecuación 91, pero ahora las correlaciones no se calculan como promedios de funciones de respuesta, sino como valores esperados de observables de espín en el estado singlete.

Para cualquier par de direcciones  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ , el resultado obtenido en Ecuación 37 da

$$E_{\psi^-}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \psi^- | \sigma_{\mathbf{x}} \otimes \sigma_{\mathbf{y}} | \psi^- \rangle = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (111)$$

En particular, esta expresión puede aplicarse a las cuatro parejas de direcciones que aparecen en la combinación CHSH, con

$$\mathbf{x} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{a}'\}, \quad \mathbf{y} \in \{\mathbf{b}, \mathbf{b}'\}. \quad (112)$$

Por tanto, para el singlete se define

$$S_{\psi^-} = E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E_{\psi^-}(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - E_{\psi^-}(\mathbf{a}', \mathbf{b}'). \quad (113)$$

Sustituyendo la correlación angular del singlete en cada uno de los cuatro términos,

$$\begin{aligned} S_{\psi^-} &= -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' - \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \\ &= -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{b}') - \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}'). \end{aligned} \quad (114)$$

Esta forma muestra que el valor de la combinación CHSH en el singlete depende únicamente de la geometría relativa entre las cuatro direcciones de medida. Si  $\theta_{x,y}$  denota el ángulo entre las direcciones  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ , la misma expresión puede escribirse como

$$S_{\psi^-} = -\cos \theta_{a,b} - \cos \theta_{a,b'} - \cos \theta_{a',b} + \cos \theta_{a',b'}. \quad (115)$$

En este punto todavía no se ha introducido el operador CHSH. Lo que se ha construido es una combinación estadística de cuatro correlaciones cuánticas, cada una de ellas asociada a una pareja de direcciones de medida. Al igual que en el caso local, no se supone que las cuatro parejas de observables se midan simultáneamente en una misma repetición del experimento; cada correlación corresponde a una elección de ajustes y se obtiene al repetir la preparación del singlete bajo esas condiciones.

La diferencia con el modelo local está en la estructura que genera las correlaciones. En el modelo local, las cuatro correlaciones deben proceder de funciones de respuesta definidas para cada valor de  $\lambda$  y promediadas con una misma distribución  $\rho(\lambda)$ ; por eso la combinación CHSH queda sometida a la cota local. En la descripción cuántica, en cambio, las cuatro correlaciones se obtienen a partir del mismo estado  $|\psi^-\rangle$  y de los observables de espín correspondientes. La comparación queda reducida a encontrar direcciones de medida para las que la combinación cuántica supere en módulo la cota local 2.

### 5.5. Elección de direcciones y violación de la cota local

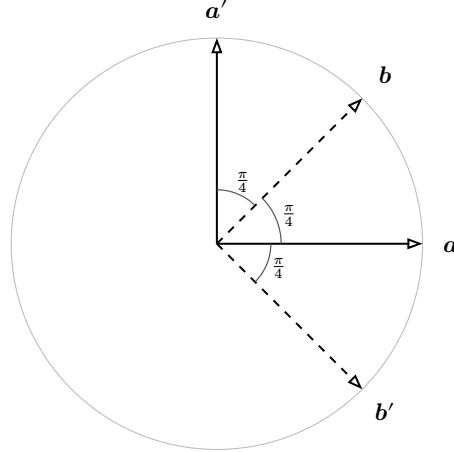
Para mostrar explícitamente la violación de la cota local, basta elegir cuatro direcciones de medida para las que el valor cuántico de la combinación CHSH supere la cota local dada en Ecuación 110. La forma Ecuación 114 sugiere escogerlas de modo que  $\mathbf{b} + \mathbf{b}'$  sea paralela a  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b} - \mathbf{b}'$  sea paralela a  $\mathbf{a}'$ , con orientaciones que hagan que ambas contribuciones a  $S_{\psi}$  tengan el mismo signo. Una elección coplanaria concreta que satisface estas relaciones es

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{a}' = (0, 1, 0), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \mathbf{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0). \quad (116)$$

Estas cuatro direcciones son unitarias y satisfacen  $\mathbf{b} + \mathbf{b}' = \sqrt{2}\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b} - \mathbf{b}' = \sqrt{2}\mathbf{a}'$ .

La figura siguiente muestra la configuración coplanaria correspondiente. Las flechas continuas representan las dos direcciones de medida del subsistema  $A$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}'$ ; las discontinuas, las del subsistema  $B$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{b}'$ . Se trata de ajustes alternativos empleados en las cuatro correlaciones de CHSH, no de mediciones simultáneas en una misma realización.

**Figura 2.** Direcciones coplanarias empleadas para evaluar CHSH en el singlete.



Fuente: Elaboración propia.

A partir de esta configuración, los productos escalares necesarios son

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (117)$$

y

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (118)$$

Usando la correlación del singlete,

$$E_{\psi^-}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad (119)$$

se obtiene

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}') = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (120)$$

y también

$$E_{\psi^-}(\mathbf{a}', \mathbf{b}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad E_{\psi^-}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (121)$$

Sustituyendo estos cuatro valores en la combinación CHSH definida en Ecuación 91,

$$S_{\psi^-} = E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E_{\psi^-}(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - E_{\psi^-}(\mathbf{a}', \mathbf{b}'), \quad (122)$$

se obtiene

$$S_{\psi^-} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}. \quad (123)$$

Por tanto,

$$|S_{\psi^-}| = 2\sqrt{2}. \quad (124)$$

Este valor supera la cota local dada en Ecuación 110, ya que

$$2\sqrt{2} > 2. \quad (125)$$

Así, para la elección de direcciones dada en Ecuación 116, las correlaciones cuánticas del singlete violan la desigualdad CHSH. La desigualdad local exigiría  $|S| \leq 2$ , mientras que la mecánica cuántica predice  $|S_{\psi^-}| = 2\sqrt{2}$ .

El signo negativo de  $S_{\psi^-}$  no tiene un significado físico especial. Procede de la convención de signos adoptada en la definición de la combinación CHSH y de la elección concreta de direcciones. Lo relevante para la comparación con la cota local es el valor absoluto de

la combinación. Con otras convenciones equivalentes, o invirtiendo algunas etiquetas de resultados, se obtendría el mismo módulo.

La violación no aparece en una correlación aislada. Cada una de las cuatro correlaciones anteriores toma un valor permitido entre  $-1$  y  $+1$ . El conflicto surge al exigir que las cuatro procedan simultáneamente de una misma estructura local de variables ocultas. En el modelo local, esa compatibilidad conjunta fuerza la cota  $|S_{\text{LHV}}| \leq 2$ ; en el singlete, la dependencia angular de las correlaciones permite alcanzar  $2\sqrt{2}$  para la elección anterior.

### 5.6. Alcance de la formulación CHSH y transición al operador CHSH

La formulación CHSH refuerza el resultado obtenido con la desigualdad original de Bell. La desigualdad original se apoyaba en la anticorrelación perfecta del singlete para direcciones iguales y permitía reducir las dos funciones de respuesta locales a una sola. En cambio, CHSH trabaja directamente con dos elecciones de medida por observador y no necesita imponer de antemano la relación  $B(\mathbf{a}, \lambda) = -A(\mathbf{a}, \lambda)$ . Por eso ofrece una forma más simétrica y general de expresar la restricción local [2].

El resultado central del capítulo puede resumirse en dos pasos. Primero, todo modelo local de variables ocultas con respuestas dicotómicas, localidad de las funciones de respuesta e independencia estadística de las elecciones de medida debe satisfacer

$$|S_{\text{LHV}}| \leq 2. \quad (126)$$

Segundo, las correlaciones cuánticas del estado singlete, evaluadas para una elección adecuada de direcciones, dan

$$|S_{\psi^-}| = 2\sqrt{2}. \quad (127)$$

La comparación entre ambas expresiones muestra que las correlaciones del singlete no pueden reproducirse mediante un modelo local de variables ocultas con la estructura considerada. Esta conclusión no depende de una imperfección algebraica de la desigualdad ni de una elección aislada de correlaciones: procede de comparar cuatro correlaciones que, en un modelo local, deberían integrarse en una misma descripción estadística subyacente.

La elección anterior muestra que la mecánica cuántica puede superar la cota local, pero no establece por sí sola el mayor valor permitido por la teoría. En ese cálculo, el valor  $2\sqrt{2}$  aparece como resultado de una elección concreta de observables de espín en el singlete. Para decidir si es un máximo general, hay que estudiar la estructura operatorial de la combinación CHSH.

Hasta ahora,  $S$  se ha tratado como una combinación estadística de correlaciones. En la descripción cuántica, cada una de esas correlaciones puede escribirse como el valor esperado de un observable de la forma  $\sigma_x \otimes \sigma_y$ . Por tanto, resulta natural reunir los cuatro términos en un único operador,

$$\hat{S}_{\text{CHSH}} = \sigma_a \otimes \sigma_b + \sigma_a \otimes \sigma_{b'} + \sigma_{a'} \otimes \sigma_b - \sigma_{a'} \otimes \sigma_{b'}. \quad (128)$$

De forma equivalente,

$$\hat{S}_{\text{CHSH}} = \sigma_a \otimes (\sigma_b + \sigma_{b'}) + \sigma_{a'} \otimes (\sigma_b - \sigma_{b'}). \quad (129)$$

Con esta notación, el valor cuántico de la combinación CHSH en un estado puro  $|\psi\rangle$  puede escribirse como

$$S_\psi = \langle \psi | \hat{S}_{\text{CHSH}} | \psi \rangle. \quad (130)$$

En particular, para el singlete y para las direcciones usadas en Ecuación 116, esta expresión reproduce el valor calculado anteriormente. La ventaja de introducir el operador no es repetir esa evaluación concreta, sino estudiar de manera general qué valores puede tomar  $\langle \psi | \hat{S}_{\text{CHSH}} | \psi \rangle$  dentro de la mecánica cuántica.

A partir de aquí, el operador CHSH es el objeto natural para estudiar la cota de Tsirelson: aunque la violación cuántica supera la cota local 2, no puede crecer arbitrariamente, sino que queda limitada por una cota cuántica máxima igual a  $2\sqrt{2}$  [3]. CHSH no solo muestra la incompatibilidad entre el singlete y los modelos locales de variables ocultas, sino que también plantea la pregunta de qué estructura matemática de la mecánica cuántica fija el límite exacto de esa violación.

## 6. El operador CHSH y la cota de Tsirelson

El capítulo anterior mostró que las correlaciones del singlete pueden superar la cota local de CHSH. Por un lado, todo modelo local de variables ocultas con la estructura considerada debe satisfacer

$$|S_{\text{LHV}}| \leq 2. \quad (131)$$

Por otro lado, una elección adecuada de direcciones en el singlete da

$$|S_{\psi^-}| = 2\sqrt{2}. \quad (132)$$

Ese resultado prueba una violación de la desigualdad CHSH, pero no basta para saber si  $2\sqrt{2}$  es solo un valor alcanzable o el máximo permitido por la teoría cuántica. Para responder a esa pregunta, los cuatro términos de la combinación CHSH deben reunirse en un único operador hermítico.

El paso al operador CHSH conserva el carácter dicotómico de los resultados, pero cambia el nivel de descripción: las elecciones de medida pasan a representarse mediante observables cuánticos. El parecido de la notación no debe inducir a confusión. En el modelo local,  $A(\mathbf{a}, \lambda)$  y  $B(\mathbf{b}, \lambda)$  eran funciones de respuesta con valores  $\pm 1$  para cada realización caracterizada por  $\lambda$ ; aquí, en cambio,  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  y  $B'$  serán operadores hermíticos.

La posibilidad de superar la cota local está ligada a la incompatibilidad entre alternativas de medida de un mismo subsistema. Algebraicamente, esa incompatibilidad aparece en los conmutadores  $[A, A']$  y  $[B, B']$  al calcular el cuadrado del operador CHSH. A partir de esta estructura se obtiene la cota de Tsirelson [3],

$$|\langle \hat{S}_{\text{CHSH}} \rangle| \leq 2\sqrt{2}. \quad (133)$$

La mecánica cuántica queda así situada entre dos extremos: supera la cota local 2, pero no alcanza la cota algebraica 4. En términos de cotas máximas,

$$2 < 2\sqrt{2} < 4. \quad (134)$$

El análisis de CHSH muestra, por tanto, dos aspectos complementarios: la incompatibilidad de ciertas correlaciones cuánticas con los modelos locales considerados y la existencia de un límite impuesto por la propia estructura cuántica.

### 6.1. De la combinación CHSH al operador CHSH

En la formulación CHSH del capítulo anterior,  $S$  se introdujo como una combinación de cuatro correlaciones. Cada una de ellas correspondía a una elección de medida en el primer subsistema y a otra en el segundo. En la descripción cuántica, esas correlaciones pueden escribirse como valores esperados de productos tensoriales de observables. El paso al operador CHSH consiste en reunir esos cuatro valores esperados en una única expresión operatorial.

Con la notación ya fijada,  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  y  $B'$  son observables hermíticos dicotómicos, con autovalores normalizados  $\pm 1$ , de modo que

$$A^2 = A'^2 = I_A, \quad B^2 = B'^2 = I_B. \quad (135)$$

La notación recuerda a la usada en el modelo local de variables ocultas, pero aquí  $A$  y  $A'$  son observables cuánticos sobre  $\mathcal{H}_A$ , mientras que  $B$  y  $B'$  lo son sobre  $\mathcal{H}_B$ .

Para un estado puro normalizado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , la correlación cuántica asociada a los observables  $A$  y  $B$  se escribe como

$$E_{\psi(A,B)} = \langle \psi | A \otimes B | \psi \rangle. \quad (136)$$

La misma expresión se aplica a las otras parejas de observables. Con la convención de signos usada en Ecuación 91, la combinación CHSH queda dada por

$$S_\psi = E_{\psi(A,B)} + E_{\psi(A,B')} + E_{\psi(A',B)} - E_{\psi(A',B')}. \quad (137)$$

Al sustituir cada correlación por su valor esperado, se obtiene

$$S_\psi = \langle \psi | A \otimes B | \psi \rangle + \langle \psi | A \otimes B' | \psi \rangle + \langle \psi | A' \otimes B | \psi \rangle - \langle \psi | A' \otimes B' | \psi \rangle. \quad (138)$$

Esto permite definir el operador CHSH asociado a esas cuatro elecciones de medida:

$$\hat{S}_{\text{CHSH}} = A \otimes B + A \otimes B' + A' \otimes B - A' \otimes B'. \quad (139)$$

Por linealidad del valor esperado,

$$S_\psi = \langle \psi | \hat{S}_{\text{CHSH}} | \psi \rangle. \quad (140)$$

El operador  $\hat{S}_{\text{CHSH}}$  es hermítico, ya que el producto tensorial de dos observables hermíticos es hermítico y la suma real de operadores hermíticos también lo es. Su valor esperado representa, por tanto, una cantidad real. Esta agrupación no introduce una medición simultánea de las cuatro parejas de observables; solo expresa algebraicamente, en un único valor esperado, las cuatro correlaciones que forman la combinación CHSH.

En el caso de espín  $\frac{1}{2}$  considerado hasta ahora, estos observables se obtienen tomando

$$A = \sigma_a, \quad A' = \sigma_{a'}, \quad B = \sigma_b, \quad B' = \sigma_{b'}. \quad (141)$$

Con esta identificación, Ecuación 139 reproduce el operador introducido al final del capítulo anterior. Trabajar ahora con la forma abstracta dada por  $A, A', B$  y  $B'$  permite separar con claridad qué parte del argumento depende solo del carácter dicotómico de los observables y qué parte depende de la no conmutatividad de las alternativas de medida.

La forma equivalente

$$\hat{S}_{\text{CHSH}} = A \otimes (B + B') + A' \otimes (B - B') \quad (142)$$

será especialmente útil para estudiar su cuadrado. Los operadores correspondientes a subsistemas distintos conmutan una vez insertados en el producto tensorial; por ejemplo,  $A \otimes I_B$  conmuta con  $I_A \otimes B$ . La incompatibilidad, si existe, se localiza dentro de cada subsistema: entre  $A$  y  $A'$ , y entre  $B$  y  $B'$ . Esa será la diferencia algebraica esencial respecto de la combinación local de variables ocultas.

## 6.2. Cuadrado del operador CHSH y papel de los conmutadores

La forma factorizada del operador CHSH permite calcular su cuadrado sin expandir directamente los dieciséis productos. A partir de Ecuación 142, escribimos

$$\hat{S}_{\text{CHSH}} = A \otimes (B + B') + A' \otimes (B - B'). \quad (143)$$

Para abreviar la notación, definimos

$$X = B + B', \quad Y = B - B'. \quad (144)$$

Entonces

$$\hat{S}_{\text{CHSH}} = A \otimes X + A' \otimes Y. \quad (145)$$

El cálculo del cuadrado exige conservar el orden de los operadores que actúan sobre un mismo subsistema. En cambio, la multiplicación de productos tensoriales se realiza mediante

$$(M \otimes N)(P \otimes Q) = MP \otimes NQ. \quad (146)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\text{CHSH}}^2 &= (A \otimes X + A' \otimes Y)^2 \\ &= A^2 \otimes X^2 + AA' \otimes XY + A'A \otimes YX + A'^2 \otimes Y^2. \end{aligned} \quad (147)$$

Usando que los observables son dicotómicos,

$$A^2 = A'^2 = I_A, \quad B^2 = B'^2 = I_B, \quad (148)$$

los dos términos cuadráticos en el segundo subsistema se simplifican como

$$\begin{aligned} X^2 &= (B + B')^2 \\ &= B^2 + BB' + B'B + B'^2 \\ &= 2I_B + BB' + B'B, \end{aligned} \quad (149)$$

y

$$\begin{aligned}
 Y^2 &= (B - B')^2 \\
 &= B^2 - BB' - B'B + B'^2 \\
 &= 2I_B - BB' - B'B.
 \end{aligned} \tag{150}$$

Al sumarlos se obtiene

$$X^2 + Y^2 = 4I_B. \tag{151}$$

Los términos cruzados contienen la información no conmutativa. En efecto,

$$\begin{aligned}
 XY &= (B + B')(B - B') \\
 &= B^2 - BB' + B'B - B'^2 \\
 &= -BB' + B'B \\
 &= -[B, B'],
 \end{aligned} \tag{152}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
 YX &= (B - B')(B + B') \\
 &= B^2 + BB' - B'B - B'^2 \\
 &= BB' - B'B \\
 &= [B, B'].
 \end{aligned} \tag{153}$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión de  $\hat{S}_{\text{CHSH}}^2$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_{\text{CHSH}}^2 &= I_A \otimes (X^2 + Y^2) + AA' \otimes XY + A'A \otimes YX \\
 &= 4I_A \otimes I_B - AA' \otimes [B, B'] + A'A \otimes [B, B'] \\
 &= 4I_A \otimes I_B - (AA' - A'A) \otimes [B, B'] \\
 &= 4I_A \otimes I_B - [A, A'] \otimes [B, B'].
 \end{aligned} \tag{154}$$

Así, con la convención de signos adoptada para la combinación CHSH,

$$\hat{S}_{\text{CHSH}}^2 = 4I_A \otimes I_B - [A, A'] \otimes [B, B']. \tag{155}$$

La identidad anterior pone de manifiesto el rasgo algebraico decisivo: la posibilidad de superar la cota local queda ligada a la presencia de conmutadores locales no nulos. Si al

menos uno de los pares de alternativas locales fuera compatible, es decir, si  $[A, A'] = 0$  o  $[B, B'] = 0$ , el producto  $[A, A'] \otimes [B, B']$  se anularía y se obtendría

$$\hat{S}_{\text{CHSH}}^2 = 4I_A \otimes I_B. \quad (156)$$

Por tanto, la posibilidad de violar la cota local no procede únicamente de que los observables tengan resultados  $\pm 1$ , sino de que las alternativas de medida de un mismo subsistema puedan ser incompatibles.

En el caso de observables de espín, esta no conmutatividad ya apareció en la relación

$$[\sigma_{\mathbf{a}}, \sigma_{\mathbf{c}}] = 2i(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (157)$$

Cuando las direcciones de medida de un mismo subsistema no son colineales, las alternativas correspondientes no conmutan. El cálculo de  $\hat{S}_{\text{CHSH}}^2$  hace explícito que esa incompatibilidad entra en la combinación CHSH a través del término  $-[A, A'] \otimes [B, B']$ . Con ello, acotar el valor cuántico de CHSH se reduce a controlar el tamaño de ese término.

### 6.3. Norma operatorial y derivación de la cota de Tsirelson

El cálculo del cuadrado del operador CHSH reduce el problema a acotar el término de conmutadores. A partir de la subsección anterior,

$$\hat{S}_{\text{CHSH}}^2 = 4I_A \otimes I_B - [A, A'] \otimes [B, B']. \quad (158)$$

Para extraer de esta identidad una cota sobre los valores esperados, basta introducir la norma operatorial. Si  $M$  es un operador sobre un espacio de Hilbert de dimensión finita, su norma se define como

$$\|M\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|M|\varphi\rangle\|. \quad (159)$$

En particular, si  $M$  es hermítico, su norma coincide con el mayor valor absoluto de sus autovalores; por ello, para cualquier estado normalizado  $|\psi\rangle$ , se cumple

$$|\langle\psi|M|\psi\rangle| \leq \|M\|. \quad (160)$$

La estrategia es, entonces, acotar la norma del operador para obtener una cota uniforme sobre todos sus valores esperados. Como  $A, A', B$  y  $B'$  son observables hermíticos dicotómicos, sus autovalores pertenecen a  $\{-1, +1\}$ . Por tanto,

$$\|A\| = \|A'\| = 1, \quad \|B\| = \|B'\| = 1. \quad (161)$$

La norma operatorial es submultiplicativa, es decir,

$$\|MN\| \leq \|M\| \|N\|. \quad (162)$$

Aplicando esta propiedad al conmutador de los dos observables del primer subsistema,

$$\begin{aligned} \|[A, A']\| &= \|AA' - A'A\| \\ &\leq \|AA'\| + \|A'A\| \\ &\leq \|A\| \|A'\| + \|A'\| \|A\| \\ &= 2. \end{aligned} \quad (163)$$

Del mismo modo,

$$\|[B, B']\| \leq 2. \quad (164)$$

Además, la norma del producto tensorial factoriza:

$$\|X \otimes Y\| = \|X\| \|Y\|. \quad (165)$$

Así, el término de conmutadores queda acotado por

$$\|[A, A'] \otimes [B, B']\| = \|[A, A']\| \|[B, B']\| \leq 4. \quad (166)$$

Usando ahora la expresión de  $\hat{S}_{\text{CHSH}}^2$  y la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} \|\hat{S}_{\text{CHSH}}^2\| &\leq \|4I_A \otimes I_B\| + \|[A, A'] \otimes [B, B']\| \\ &\leq 4 + 4 = 8. \end{aligned} \quad (167)$$

El operador  $\hat{S}_{\text{CHSH}}$  es hermítico, de modo que

$$\|\hat{S}_{\text{CHSH}}^2\| = \|\hat{S}_{\text{CHSH}}\|^2. \quad (168)$$

Se obtiene entonces

$$\|\hat{S}_{\text{CHSH}}\|^2 \leq 8, \quad (169)$$

y por tanto

$$\|\hat{S}_{\text{CHSH}}\| \leq 2\sqrt{2}. \quad (170)$$

Finalmente, para cualquier estado puro normalizado  $|\psi\rangle$ ,

$$|S_\psi| = |\langle\psi|\hat{S}_{\text{CHSH}}|\psi\rangle| \leq \|\hat{S}_{\text{CHSH}}\| \leq 2\sqrt{2}. \quad (171)$$

Esta es la cota de Tsirelson para la combinación CHSH en el marco considerado [3]. No se ha usado ninguna propiedad específica del singlete ni de una elección concreta de direcciones. La cota se sigue del carácter hermítico y dicotómico de los observables, de la estructura de producto tensorial entre los dos subsistemas y del modo en que los conmutadores locales entran en el cuadrado del operador CHSH.

Aunque se ha escrito la estimación para estados puros, el límite no depende de esa restricción. Al pasar al formalismo de matrices de densidad, los valores esperados se obtienen como promedios convexos de valores esperados en estados puros, de modo que ningún estado mixto puede superar la misma cota.

El resultado muestra que la mecánica cuántica permite superar la cota local 2, pero no de forma arbitraria. El valor  $2\sqrt{2}$  queda identificado como una cota superior general para los valores cuánticos de la combinación CHSH. Para que esta cota sea realmente el máximo cuántico, queda por mostrar que puede alcanzarse. Esa comprobación se obtiene al volver al caso del singlete y a la elección de direcciones que ya produjo  $|S_{\psi-}| = 2\sqrt{2}$ .

#### 6.4. Saturación de la cota en el estado singlete

La desigualdad obtenida en la subsección anterior muestra que ningún valor esperado cuántico de la combinación CHSH puede superar  $2\sqrt{2}$  en módulo. Para que esa cota sea el máximo cuántico, también debe comprobarse que algún estado y alguna elección de observables la alcanzan. El mismo ejemplo que antes mostraba una violación concreta de CHSH sirve ahora para comprobar, desde el punto de vista operatorial, que la cota es alcanzable.

Consideremos de nuevo la elección

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{a}' = (0, 1, 0), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \mathbf{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0). \quad (172)$$

Los observables correspondientes son

$$A = \sigma_{\mathbf{a}} = \sigma_x, \quad A' = \sigma_{\mathbf{a}'} = \sigma_y, \quad (173)$$

y

$$B = \sigma_{\mathbf{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y), \quad B' = \sigma_{\mathbf{b}'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - \sigma_y). \quad (174)$$

Con esta elección, el operador CHSH definido en Ecuación 139 toma la forma

$$\hat{S}_{\text{CHSH}} = \sigma_x \otimes B + \sigma_x \otimes B' + \sigma_y \otimes B - \sigma_y \otimes B'. \quad (175)$$

Agrupando los términos del segundo subsistema,

$$\hat{S}_{\text{CHSH}} = \sigma_x \otimes (B + B') + \sigma_y \otimes (B - B'). \quad (176)$$

Como

$$B + B' = \sqrt{2}\sigma_x, \quad B - B' = \sqrt{2}\sigma_y, \quad (177)$$

se obtiene

$$\hat{S}_{\text{CHSH}} = \sqrt{2}(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (178)$$

Para el singlete se obtuvo que

$$(\sigma_x \otimes \sigma_x)|\psi^-\rangle = -|\psi^-\rangle, \quad (\sigma_y \otimes \sigma_y)|\psi^-\rangle = -|\psi^-\rangle. \quad (179)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\text{CHSH}} |\psi^-\rangle &= \sqrt{2}(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y) |\psi^-\rangle \\ &= \sqrt{2}(-|\psi^-\rangle - |\psi^-\rangle) \\ &= -2\sqrt{2} |\psi^-\rangle. \end{aligned} \quad (180)$$

El singlete es, en esta configuración, un autovector del operador CHSH con autovalor  $-2\sqrt{2}$ . En consecuencia,

$$S_{\psi^-} = \langle \psi^- | \hat{S}_{\text{CHSH}} | \psi^- \rangle = -2\sqrt{2}, \quad (181)$$

y por tanto

$$|S_{\psi^-}| = 2\sqrt{2}. \quad (182)$$

El signo negativo procede de la convención adoptada para la combinación CHSH y de la elección concreta de direcciones. Para la comparación con la cota de Tsirelson, lo relevante es el valor absoluto.

Esta elección también permite ver el papel de la incompatibilidad entre observables locales. En el primer subsistema se tiene

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z. \quad (183)$$

Para los observables del segundo subsistema,

$$[B, B'] = -2i\sigma_z. \quad (184)$$

Ambos conmutadores tienen norma 2, que es el máximo compatible con la estimación usada en la derivación de la cota. Esta observación no basta por sí sola para garantizar la saturación, pero muestra que la elección considerada alcanza el tamaño máximo de los conmutadores que intervienen en la estimación. La saturación se completa porque el singlete es precisamente un autovector asociado al autovalor extremo del operador CHSH correspondiente.

Queda demostrado así que  $2\sqrt{2}$  no es únicamente una cota superior, sino una cota alcanzable. En consecuencia, la cota de Tsirelson es óptima para la combinación CHSH en el marco considerado.

## 6.5. Significado físico de las cotas local, cuántica y algebraica

La cota de Tsirelson sitúa la violación CHSH entre la restricción local y la cota puramente algebraica. La combinación CHSH admite distintas cotas según la estructura que se exige a las correlaciones. En el recorrido seguido hasta ahora aparecen tres límites distintos,

$$|S|_{\text{local}} \leq 2, \quad |S|_{\text{cuántico}} \leq 2\sqrt{2}, \quad |S|_{\text{alg}} \leq 4. \quad (185)$$

La cota local procede de las hipótesis que definen el modelo de variables ocultas considerado. Las cuatro correlaciones que aparecen en CHSH no pueden elegirse de forma independiente, porque todas deben surgir de una misma distribución  $\rho(\lambda)$  y de funciones de respuesta locales definidas para las cuatro elecciones de medida. Esa compatibilidad conjunta fuerza la restricción

$$|S_{\text{LHV}}| \leq 2. \quad (186)$$

Por eso la cota local no se obtiene simplemente acotando cada correlación por separado. Su origen está en la posibilidad de describir todas las respuestas mediante una misma estructura estadística local.

La cota cuántica tiene otro origen. En mecánica cuántica, las correlaciones se calculan como valores esperados de productos tensoriales de observables. Al reunir los cuatro términos en el operador  $\hat{S}_{\text{CHSH}}$ , el máximo valor posible queda controlado por su norma operatorial. El cálculo del cuadrado del operador mostró que los conmutadores locales  $[A, A']$  y  $[B, B']$  son los términos que permiten superar la cota local. Sin embargo, esos mismos términos quedan acotados por el carácter dicotómico de los observables. De ahí se obtiene

$$|\langle \hat{S}_{\text{CHSH}} \rangle| \leq 2\sqrt{2}. \quad (187)$$

La misma estructura que permite la violación impone también su límite. La no conmutatividad de las alternativas de medida en cada subsistema permite que el valor cuántico supere 2, pero la estructura operatorial de la teoría impide que la combinación CHSH crezca sin restricción.

La cota algebraica es menos restrictiva porque no incorpora ni la estructura local de variables ocultas ni la estructura operatorial cuántica. Si no se impone ninguna condición

de compatibilidad local o cuántica y solo se exige que cada correlación esté entre  $-1$  y  $+1$ , entonces

$$\begin{aligned} |S| &= |E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| \\ &\leq |E(a, b)| + |E(a, b')| + |E(a', b)| + |E(a', b')| \\ &\leq 4. \end{aligned} \tag{188}$$

Esta estimación solo usa que cada correlación individual es un número comprendido entre  $-1$  y  $+1$ . No expresa una condición física específica sobre cómo deben producirse conjuntamente esas correlaciones. Por eso la cota algebraica es mayor que la cota cuántica.

La comparación entre las tres cotas resume el resultado central del capítulo. La mecánica cuántica no queda encerrada en la cota local de los modelos de variables ocultas considerados, pero tampoco permite cualquier conjunto de correlaciones algebraicamente posible. Para la combinación CHSH se obtiene la jerarquía

$$2 < 2\sqrt{2} < 4. \tag{189}$$

El singlete muestra que la cota local puede violarse, y la cota de Tsirelson muestra que esa violación tiene un máximo fijado por la propia teoría cuántica. Así, el valor  $2\sqrt{2}$  no es solo el resultado de una elección particular de direcciones, sino el límite superior de la violación cuántica de CHSH.

Hasta aquí, el ejemplo físico central ha sido el singlete, un estado puro entrelazado que alcanza la máxima violación cuántica de CHSH. Ese caso muestra de forma especialmente clara la incompatibilidad entre las correlaciones del singlete y los modelos locales de variables ocultas considerados. Sin embargo, no resuelve por sí solo la relación general entre entrelazamiento y violación CHSH. Para abordar esa cuestión es necesario pasar del caso ideal de estados puros al formalismo de estados mixtos.

## 7. Extensión a estados mixtos: matrices de densidad y estados de Werner

La cota de Tsirelson fija el máximo valor que puede alcanzar la combinación CHSH dentro de la mecánica cuántica. En el capítulo anterior, ese límite se obtuvo a partir de la estructura operatorial de los observables dicotómicos y se comprobó que el singlete lo satura para una elección adecuada de direcciones. Queda, sin embargo, una cuestión distinta: si el entrelazamiento, entendido como propiedad del estado, basta por sí solo para producir una violación CHSH.

Para abordar esa cuestión hay que pasar de estados puros a estados mixtos. Una preparación ya no tiene por qué describirse mediante un único vector de estado, sino mediante una matriz de densidad que representa una mezcla estadística de preparaciones puras. Este cambio de formalismo obliga también a precisar la noción de entrelazamiento: en estados mixtos, no basta con preguntar si el estado total se escribe como producto de sus estados reducidos, sino si admite una descomposición convexa en estados producto.

Los estados de Werner de dos qubits proporcionan un ejemplo especialmente adecuado para estudiar este punto, porque interpolan entre el singlete y el estado máximamente mixto y permiten comparar de forma explícita el umbral de entrelazamiento con el umbral de violación CHSH [6]. Con ello se verá que, en estados mixtos, la relación entre entrelazamiento y violación CHSH es más sutil que en el caso ideal del singlete.

### 7.1. Matrices de densidad, valores esperados y traza parcial

Hasta ahora, los estados cuánticos se han representado mediante vectores normalizados. Esa descripción es suficiente para tratar estados puros, como el singlete, pero no permite

describir de manera general una preparación que contenga mezcla estadística. En ese caso, el sistema no queda representado por un único vector de estado, sino por un operador que incorpora los pesos estadísticos de las distintas posibilidades. El formalismo adecuado para tratar esta situación es el de las matrices de densidad [8]. En este capítulo, cuando no aparezca el argumento  $\lambda$ , el símbolo  $\rho$  denotará una matriz de densidad, no la distribución de variables ocultas usada en los capítulos anteriores.

Si  $P_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  denota el proyector asociado al estado puro  $|\psi_i\rangle$ , una mezcla estadística de esos estados se representa mediante

$$\rho = \sum_i p_i P_i, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1. \quad (190)$$

Los coeficientes  $p_i$  representan los pesos estadísticos de una descomposición concreta de la preparación. La matriz  $\rho$  no describe una superposición coherente de los estados  $|\psi_i\rangle$ , sino un promedio estadístico. Además, una misma matriz de densidad puede admitir más de una descomposición de este tipo; lo que determina las predicciones estadísticas es  $\rho$ , no una elección particular de los estados  $|\psi_i\rangle$  y de los pesos  $p_i$ .

Una matriz de densidad satisface tres propiedades básicas:

$$\rho = \rho^\dagger, \quad \rho \geq 0, \quad \text{Tr}(\rho) = 1. \quad (191)$$

La primera condición expresa hermiticidad. En la forma anterior se obtiene porque los proyectores  $P_i$  son hermíticos y los pesos  $p_i$  son reales:

$$\rho^\dagger = \left( \sum_i p_i P_i \right)^\dagger = \sum_i p_i P_i^\dagger = \sum_i p_i P_i = \rho. \quad (192)$$

La segunda condición significa que  $\rho$  es un operador positivo. Para cualquier vector  $|\varphi\rangle$ ,

$$\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle = \sum_i p_i \langle\varphi|P_i|\varphi\rangle \geq 0, \quad (193)$$

porque cada  $P_i$  es un proyector y  $p_i \geq 0$ . La tercera condición fija la normalización. Como los proyectores asociados a estados puros normalizados tienen traza unidad,

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i p_i \text{Tr}(P_i) = \sum_i p_i = 1. \quad (194)$$

El caso puro se recupera cuando la matriz de densidad coincide con un único proyector. Si el estado puro es  $|\psi\rangle$ , se escribirá

$$\rho_\psi = P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (195)$$

En este caso,

$$\rho_\psi^2 = \rho_\psi, \quad (196)$$

porque  $P_\psi$  es un proyector. Para matrices de densidad de traza unidad, esta idempotencia caracteriza a los estados puros. En un estado mixto general no se cumple  $\rho^2 = \rho$ .

Además de codificar mezclas estadísticas, la matriz de densidad permite escribir los valores esperados de una forma común para estados puros y mixtos. Si  $O$  es un observable, se define

$$\langle O \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho O). \quad (197)$$

Para una mezcla de la forma anterior,

$$\langle O \rangle_\rho = \text{Tr}\left(\left(\sum_i p_i P_i\right) O\right) = \sum_i p_i \text{Tr}(P_i O). \quad (198)$$

Como  $\text{Tr}(P_i O)$  coincide con el valor esperado de  $O$  en el estado puro  $|\psi_i\rangle$ , el valor esperado en la mezcla es el promedio ponderado de los valores esperados correspondientes a los estados puros que intervienen en la preparación.

En particular, si el estado es puro,

$$\langle O \rangle_{\rho_\psi} = \text{Tr}(P_\psi O) = \langle \psi | O | \psi \rangle. \quad (199)$$

Así, la expresión con traza reproduce la regla de Born ya usada para estados puros y la extiende de manera natural a estados mixtos. Esta será la forma adecuada para calcular las correlaciones CHSH cuando el estado del sistema bipartito no sea un vector puro, sino una matriz de densidad.

En un sistema bipartito, la matriz de densidad actúa sobre el espacio compuesto

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (200)$$

A partir de la matriz de densidad total  $\rho$ , las descripciones reducidas de los subsistemas se obtienen mediante la traza parcial:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho), \quad \rho_B = \text{Tr}_A(\rho). \quad (201)$$

La matriz  $\rho_A$  describe el subsistema  $A$  cuando se ignora el subsistema  $B$ , mientras que  $\rho_B$  describe el subsistema  $B$  cuando se ignora  $A$ . Si se usa una base producto  $|i\rangle_A |j\rangle_B$ , la traza parcial respecto de  $B$  puede escribirse en componentes como

$$(\rho_A)_{i,k} = \sum_j \rho_{ij,kj}. \quad (202)$$

De manera análoga, la traza parcial respecto de  $A$  viene dada por

$$(\rho_B)_{j,l} = \sum_i \rho_{ij,il}. \quad (203)$$

La función de estas matrices reducidas puede verse a partir de los valores esperados locales. Si  $O_A$  es un observable que actúa solo sobre el primer subsistema, entonces

$$\text{Tr}(\rho(O_A \otimes I_B)) = \text{Tr}(\rho_A O_A). \quad (204)$$

Del mismo modo, si  $O_B$  actúa solo sobre el segundo subsistema,

$$\text{Tr}(\rho(I_A \otimes O_B)) = \text{Tr}(\rho_B O_B). \quad (205)$$

Por tanto, la traza parcial proporciona la descripción necesaria para calcular todas las magnitudes locales de un subsistema sin conservar explícitamente la información del otro. Sin embargo, la matriz total  $\rho$  contiene también la información sobre las correlaciones entre ambos subsistemas, que no queda determinada en general por  $\rho_A$  y  $\rho_B$  por separado.

Esta diferencia será relevante al estudiar estados mixtos bipartitos. Las matrices reducidas describen lo que se observa localmente, pero la cuestión del entrelazamiento depende de la estructura global de la matriz de densidad. Por eso, al estudiar separabilidad y entrelaza-

miento en estados mixtos, no bastará con mirar las descripciones reducidas; será necesario atender a la forma completa de  $\rho$ .

## 7.2. Separabilidad y entrelazamiento en estados mixtos

En el caso de estados puros bipartitos, la noción de entrelazamiento se formuló mediante la factorizabilidad del vector de estado. Un estado puro era producto si podía escribirse como un tensor de dos estados locales, uno en  $\mathcal{H}_A$  y otro en  $\mathcal{H}_B$ ; si no admitía una factorización de ese tipo, se consideraba entrelazado. Al pasar a estados mixtos, esta caracterización deja de ser suficiente, porque una matriz de densidad puede describir una mezcla estadística de distintas preparaciones.

La diferencia aparece ya en el caso de estados producto mixtos. Si  $\rho_A$  y  $\rho_B$  son matrices de densidad de los dos subsistemas, entonces

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B \tag{206}$$

describe un estado sin correlaciones entre ambos subsistemas. Sin embargo, en estados mixtos puede haber correlaciones estadísticas sin que exista entrelazamiento. Por ello, no basta con preguntar si el estado total se escribe como un único producto  $\rho_A \otimes \rho_B$ .

La noción adecuada es la de separabilidad. Un estado bipartito mixto es separable si puede escribirse como una combinación convexa de estados producto,

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B, \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1. \tag{207}$$

Aquí  $\rho_k^A$  y  $\rho_k^B$  son matrices de densidad de los subsistemas  $A$  y  $B$ , respectivamente. La interpretación es que el estado total puede entenderse como una mezcla estadística de preparaciones producto. Las correlaciones que aparezcan en un estado separable proceden entonces de la mezcla estadística entre esos productos, no de entrelazamiento entre los subsistemas.

Un estado mixto es entrelazado si no admite ninguna descomposición de la forma Ecuación 207. Esta definición es más exigente que la simple condición de no ser producto. Un estado puede no factorizar como  $\rho_A \otimes \rho_B$  y, aun así, ser separable si admite una

descomposición convexa en estados producto. Por tanto, en estados mixtos, la ausencia de factorización global no basta para concluir que existe entrelazamiento.

En el caso particular de los estados puros, esta definición reproduce la noción ya utilizada. Si la matriz de densidad asociada a un estado puro bipartito es separable, entonces el vector de estado correspondiente es factorizable; si el vector puro no es factorizable, su matriz de densidad no admite una descomposición separable. Así, para estados puros, la definición convexa coincide con la distinción anterior entre estados producto y estados entrelazados [8].

La separabilidad permite distinguir entre correlaciones estadísticas compatibles con mezclas de preparaciones producto y correlaciones que no admiten una descomposición de ese tipo. Esta distinción será necesaria para comparar dos preguntas diferentes. La primera es si un estado mixto es separable o entrelazado. La segunda es si las correlaciones que produce pueden superar la cota local de CHSH.

Los estados de Werner de dos qubits proporcionan un ejemplo en el que ambas cuestiones pueden compararse de forma explícita y en el que los umbrales correspondientes no coinciden. Por eso resultan adecuados para mostrar que, en estados mixtos, el entrelazamiento no basta por sí solo para garantizar la violación de la desigualdad CHSH.

### 7.3. Estados de Werner de dos qubits

Una vez introducida la noción de separabilidad para estados mixtos, conviene fijar una familia concreta en la que pueda compararse de forma explícita el entrelazamiento con la violación CHSH. El ejemplo que se usará para ello es la familia de estados de Werner de dos qubits, construida a partir del singlete y del estado máximamente mixto [6].

En el caso considerado aquí, se define

$$\rho_{W(p)} = pP_{\psi^-} + (1-p)\frac{I_4}{4}, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (208)$$

Aquí  $P_{\psi^-}$  denota el proyector sobre el estado singlete definido en Ecuación 27, e  $I_4$  es la identidad en el espacio bipartito  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . El parámetro  $p$  controla el peso relativo de la parte singlete frente al término de ruido blanco.

Los dos extremos de la familia son especialmente simples. Para  $p = 1$  se recupera el singlete puro,

$$\rho_{W(1)} = P_{\psi^-}. \quad (209)$$

Para  $p = 0$  se obtiene

$$\rho_{W(0)} = \frac{I_4}{4}. \quad (210)$$

En este último caso, el estado es proporcional a la identidad: no selecciona ninguna dirección privilegiada ni contiene correlaciones asociadas al singlete. El término  $\frac{I_4}{4}$  representa, por tanto, el estado máximamente mixto en el espacio de dos qubits.

Para valores intermedios de  $p$ , el estado  $\rho_{W(p)}$  interpola entre esos dos casos. Puede entenderse como una mezcla en la que una contribución de peso  $p$  procede del singlete y una contribución de peso  $1 - p$  corresponde a ruido blanco. Esta forma resulta especialmente útil porque permite degradar de manera controlada las correlaciones del singlete sin abandonar el marco de dos qubits.

El estado  $\rho_{W(p)}$  es una matriz de densidad válida para todo  $0 \leq p \leq 1$ . En efecto, tanto  $P_{\psi^-}$  como  $\frac{I_4}{4}$  son matrices de densidad: son hermíticas, positivas y de traza unitaria. Como  $\rho_{W(p)}$  es una combinación convexa de ambas, con coeficientes  $p$  y  $1 - p$  no negativos y suma igual a uno, también es hermítica, positiva y de traza unitaria.

Esta familia resulta útil porque permite separar dos preguntas que en el caso del singlete puro aparecen unidas. Por un lado, puede estudiarse para qué valores de  $p$  el estado sigue siendo entrelazado. Por otro, puede calcularse para qué valores de  $p$  sus correlaciones violan la desigualdad CHSH. La comparación entre ambos umbrales mostrará que, en estados mixtos, el entrelazamiento no basta por sí solo para garantizar la violación de CHSH.

#### 7.4. Correlaciones y violación CHSH en estados de Werner

Una vez definida la familia  $\rho_{W(p)}$ , puede calcularse cómo cambian las correlaciones de espín respecto al caso puro del singlete. Escribiendo el estado de Werner como

$$\rho_{W(p)} = pP_{\psi^-} + (1-p)\frac{I_4}{4}, \quad (211)$$

donde  $P_{\psi^-}$  denota el proyector sobre el estado singlete, la correlación asociada a dos direcciones de medida  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se define mediante

$$E_{W(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \text{Tr}(\rho_{W(p)}(\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}})). \quad (212)$$

Por linealidad de la traza,

$$\begin{aligned} E_{W(\mathbf{a},\mathbf{b})} &= p \text{Tr}(P_{\psi^-}(\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}})) \\ &\quad + \frac{1-p}{4} \text{Tr}(I_4(\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}})). \end{aligned} \quad (213)$$

El primer término coincide con la correlación del singlete. Como se obtuvo en Ecuación 37,

$$\text{Tr}(P_{\psi^-}(\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}})) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (214)$$

El segundo término no contribuye. En efecto, como  $I_4$  es la identidad en el espacio de dos qubits,

$$\text{Tr}(I_4(\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}})) = \text{Tr}(\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}}). \quad (215)$$

Además, la traza de un producto tensorial factoriza, de modo que

$$\text{Tr}(\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}}) = \text{Tr}(\sigma_{\mathbf{a}}) \text{Tr}(\sigma_{\mathbf{b}}). \quad (216)$$

Cada operador  $\sigma_{\mathbf{a}}$  es una combinación lineal de matrices de Pauli, y todas ellas tienen traza nula. Por tanto,

$$\text{Tr}(\sigma_{\mathbf{a}}) = 0, \quad \text{Tr}(\sigma_{\mathbf{b}}) = 0, \quad (217)$$

y el término proporcional a  $\frac{I_4}{4}$  no aporta correlación de espín. Se obtiene así

$$E_{W(\mathbf{a},\mathbf{b})} = -p\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (218)$$

Esta expresión muestra que el estado de Werner conserva la dependencia angular del singlete, pero con una amplitud reducida por el factor  $p$ . Para  $p = 1$  se recupera la corre-

lación del singlete, mientras que para  $p = 0$  la correlación se anula para cualquier par de direcciones.

La consecuencia para la combinación CHSH es directa. Para una elección fija de direcciones  $a, a', b$  y  $b'$ , cada una de las cuatro correlaciones de Werner es  $p$  veces la correlación correspondiente del singlete. Por tanto,

$$S_{W(a,a',b,b')} = p S_{\psi^-}(a, a', b, b'). \quad (219)$$

Al variar las direcciones unitarias de medida, el conjunto sobre el que se maximiza es el mismo en ambos casos. Como  $p \geq 0$ , el factor  $p$  puede extraerse del máximo del valor absoluto, de modo que

$$\max_{a,a',b,b'} |S_W| = p \max_{a,a',b,b'} |S_{\psi^-}|. \quad (220)$$

El capítulo anterior mostró que el máximo valor absoluto alcanzable por la combinación CHSH en el singlete es  $2\sqrt{2}$ . Se obtiene así

$$|S|_{\max}(\rho_{W(p)}) = 2\sqrt{2}p. \quad (221)$$

La violación de la desigualdad CHSH exige que el valor absoluto de la combinación supere la cota local,

$$|S| > 2. \quad (222)$$

Usando Ecuación 221, esta condición equivale a

$$2\sqrt{2}p > 2, \quad (223)$$

o, de forma equivalente,

$$p > \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (224)$$

Por tanto, en el escenario CHSH considerado, hay violación precisamente cuando el peso de la parte singlete supera el umbral  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Para  $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$  la combinación CHSH puede alcanzar la cota local, pero no superarla; para  $p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  no hay violación CHSH. El umbral así obtenido

coincide con el que resulta de aplicar a esta familia el criterio necesario y suficiente de Horodecki para la violación CHSH de estados mixtos de dos qubits [10].

Este resultado caracteriza el umbral de violación CHSH, no la separabilidad del estado. Para compararlo con el entrelazamiento de  $\rho_{W(p)}$ , hay que estudiar la positividad de su transpuesta parcial.

## 7.5. Transposición parcial y umbral de entrelazamiento

Para comparar el umbral de violación CHSH con el umbral de entrelazamiento, hay que determinar para qué valores de  $p$  el estado de Werner es separable. En el caso de dos qubits puede usarse el criterio de transposición parcial positiva. Esta herramienta reduce el problema de separabilidad de la familia  $\rho_{W(p)}$  a una condición explícita sobre los autovalores de una matriz.

La transposición parcial se define respecto de una base producto. Si los elementos de matriz de un estado bipartito se escriben como  $\rho_{ij,kl}$ , donde los índices  $i, k$  corresponden al primer subsistema y  $j, l$  al segundo, la transposición parcial respecto de  $B$  intercambia los índices del segundo subsistema:

$$(\rho^{T_B})_{ij,kl} = \rho_{il,kj}. \quad (225)$$

De forma equivalente, si  $E_{ik}^A$  y  $E_{jl}^B$  denotan los operadores elementales de matriz en los dos subsistemas, entonces

$$E_{ik}^A \otimes E_{jl}^B \mapsto E_{ik}^A \otimes E_{lj}^B. \quad (226)$$

Esta operación no representa, en general, una transformación física permitida sobre el estado. Su utilidad aquí es algebraica: permite obtener una condición de separabilidad. Si un estado es separable,

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B, \quad p_k \geq 0, \quad \sum_k p_k = 1, \quad (227)$$

entonces su transpuesta parcial puede escribirse como

$$\rho^{T_B} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes (\rho_k^B)^T. \quad (228)$$

Como la transposición ordinaria conserva la positividad, cada  $(\rho_k^B)^T$  sigue siendo positiva. Por tanto, todo estado separable tiene transpuesta parcial positiva:

$$\rho \text{ separable} \Rightarrow \rho^{T_B} \geq 0. \quad (229)$$

En dimensión arbitraria, esta condición no siempre es suficiente para asegurar separabilidad. Sin embargo, en sistemas de dos qubits sí lo es: un estado de dos qubits es separable si y solo si su transpuesta parcial es positiva [11], [12]. Por eso, para la familia de Werner de dos qubits, basta estudiar cuándo  $\rho_{W(p)}^{T_B}$  tiene todos sus autovalores no negativos.

En la base ordenada

$$|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle, \quad (230)$$

el estado de Werner puede escribirse como

$$\rho_{W(p)} = \begin{pmatrix} \frac{1-p}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+p}{4} & -\frac{p}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{2} & \frac{1+p}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-p}{4} \end{pmatrix}. \quad (231)$$

Para calcular los autovalores, conviene fijarse en el bloque no diagonal: tras la transposición parcial, es ese bloque el que pasa a acoplar  $++$  con  $--$ , y ahí aparecerá el autovalor relevante. La transposición parcial respecto de  $B$  deja invariantes los términos diagonales y desplaza los términos no diagonales que acoplan  $+-$  con  $-+$  hacia las entradas que acoplan  $++$  con  $--$ . Así,

$$\rho_{W(p)}^{T_B} = \begin{pmatrix} \frac{1-p}{4} & 0 & 0 & -\frac{p}{2} \\ 0 & \frac{1+p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+p}{4} & 0 \\ -\frac{p}{2} & 0 & 0 & \frac{1-p}{4} \end{pmatrix}. \quad (232)$$

Esta matriz queda separada en un bloque  $2 \times 2$  que actúa sobre el subespacio generado por  $++$  y  $--$ , y dos entradas diagonales iguales a  $\frac{1+p}{4}$ . El bloque no trivial es

$$\begin{pmatrix} \frac{1-p}{4} & -\frac{p}{2} \\ -\frac{p}{2} & \frac{1-p}{4} \end{pmatrix}. \quad (233)$$

Sus autovalores son

$$\frac{1-p}{4} + \frac{p}{2} = \frac{1+p}{4}, \quad \frac{1-p}{4} - \frac{p}{2} = \frac{1-3p}{4}. \quad (234)$$

Junto con las dos entradas diagonales restantes, los autovalores de  $\rho_{W(p)}^{T_B}$  son por tanto

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1+p}{4}, \quad \lambda_4 = \frac{1-3p}{4}. \quad (235)$$

Para  $0 \leq p \leq 1$ , los tres primeros autovalores son siempre no negativos. La positividad de la transpuesta parcial queda determinada únicamente por el último autovalor:

$$\frac{1-3p}{4} \geq 0. \quad (236)$$

Esta condición equivale a

$$p \leq \frac{1}{3}. \quad (237)$$

Por el criterio PPT para dos qubits, se obtiene entonces que  $\rho_{W(p)}$  es separable si y solo si

$$p \leq \frac{1}{3}. \quad (238)$$

De forma equivalente,  $\rho_{W(p)}$  es entrelazado si y solo si

$$p > \frac{1}{3}. \quad (239)$$

Así, la familia de Werner queda dividida por el umbral  $p = \frac{1}{3}$ : para  $p \leq \frac{1}{3}$ , el estado es separable y puede entenderse como una mezcla convexa de estados producto; para  $p > \frac{1}{3}$ , el estado es entrelazado. Este umbral no coincide, en general, con el de violación CHSH obtenido en Ecuación 224.

## 7.6. Separación entre entrelazamiento y violación CHSH

Los dos umbrales obtenidos para la familia de Werner permiten comparar de manera directa entrelazamiento y violación CHSH. Por un lado, el criterio de transposición parcial positiva aplicado en Ecuación 239 muestra que  $\rho_{W(p)}$  es entrelazado si y solo si

$$p > \frac{1}{3}. \quad (240)$$

Por otro lado, el cálculo de las correlaciones de Werner dio en Ecuación 224 la condición de violación CHSH,

$$p > \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (241)$$

Como

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (242)$$

existe un intervalo no vacío de valores de  $p$  para el que ambas condiciones no coinciden. En concreto, el intervalo

$$\frac{1}{3} < p \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (243)$$

define una región en la que el estado de Werner es entrelazado, pero no viola la desigualdad CHSH.

La razón se ve al comparar los resultados anteriores. Si  $p > \frac{1}{3}$ , la transpuesta parcial de  $\rho_{W(p)}$  deja de ser positiva, de modo que el estado ya no es separable. Sin embargo, mientras  $p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , el valor máximo de la combinación CHSH satisface

$$|S|_{\max}(\rho_{W(p)}) = 2\sqrt{2}p \leq 2. \quad (244)$$

Por tanto, en esa región el estado posee entrelazamiento, pero sus correlaciones no superan la cota local de CHSH. En el extremo  $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$  se alcanza la cota local, pero no se viola, porque la violación requiere estrictamente  $|S| > 2$ .

Este resultado matiza la imagen que podía sugerir el caso del singlete. Para  $p = 1$ , el estado de Werner coincide con el singlete y alcanza la máxima violación cuántica de CHSH. Al disminuir  $p$ , el término de ruido blanco reduce todas las correlaciones de espín por el factor  $p$ . El entrelazamiento, sin embargo, persiste por encima del umbral  $p = \frac{1}{3}$ , mientras que la violación CHSH deja de producirse para  $p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . La pérdida de violación CHSH se produce, por tanto, antes de que desaparezca el entrelazamiento.

Para esta familia de estados mixtos de dos qubits, el entrelazamiento no basta por sí solo para garantizar la violación de la desigualdad CHSH. Esta afirmación se restringe al escenario estudiado: no descarta la violación de otras desigualdades de Bell ni establece la existencia de un modelo local para todo posible conjunto de medidas [9].

Los estados de Werner separan, dentro de un ejemplo calculable de dos qubits, la propiedad de estar entrelazado de la capacidad de violar CHSH. El intervalo Ecuación 243 muestra que ambas nociones coinciden en el singlete puro, pero no en estados mixtos: incluso en la formulación CHSH, la no localidad de Bell no puede identificarse sin más con el entrelazamiento.

## 8. Conclusiones

Este trabajo ha reconstruido el recorrido que lleva de la paradoja EPR a las desigualdades de Bell y a la cota de Tsirelson en el marco de sistemas bipartitos de espín  $\frac{1}{2}$ . El análisis muestra que la dificultad no aparece en una propiedad local aislada de cada partícula, sino en el modo en que el estado conjunto organiza las correlaciones de medida. La pregunta inicial de EPR, formulada en términos de realidad, completitud y localidad, acaba tomando una forma precisa. Determinadas correlaciones cuánticas no pueden proceder de una descripción local de variables ocultas con respuestas predefinidas.

El estado singlete concentra esa idea de forma especialmente clara. Cada subsistema por separado presenta marginales equilibrados, de modo que no aparece ningún sesgo local que permita anticipar el resultado de una medición individual. Sin embargo, las correlaciones conjuntas vienen dadas por  $E_{\psi^-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . Esta expresión resume la diferencia entre considerar cada parte por separado y estudiar el sistema como un todo. El singlete no describe dos espines clásicos previamente opuestos en todas las direcciones, sino un estado conjunto cuya información física aparece en la comparación entre resultados.

Desde la perspectiva EPR-Bohm, la predicción perfecta del resultado remoto permite plantear la cuestión de la completitud. Si se aceptan las predicciones cuánticas, el criterio de realidad de EPR y la ausencia de perturbación física a distancia, entonces parece necesario atribuir al sistema remoto propiedades que no están representadas en su descripción cuántica local. El argumento no demuestra todavía una incompatibilidad cuantitativa con la localidad, pero sí deja claro qué combinación de supuestos queda en tensión. Bell toma precisamente esa tensión y la transforma en una condición matemática.

Bajo las hipótesis utilizadas en el trabajo, las respuestas locales quedan definidas para cada realización individual, dependen solo de la elección local y de la variable oculta, y se promedian con una distribución independiente de las elecciones de medida. La anticorrelación perfecta del singlete permite obtener entonces una restricción que las correlaciones cuánticas violan para ciertas direcciones. La formulación CHSH expresa el mismo conflicto de una forma más simétrica, al reunir cuatro correlaciones que, en un modelo local, tendrían que proceder de una misma estructura estadística.

La formulación CHSH concentra la incompatibilidad de forma especialmente clara. Todo modelo local de variables ocultas con la estructura considerada satisface  $|S_{LHV}| \leq 2$ , mientras que el singlete alcanza  $|S_{\psi^-}| = 2\sqrt{2}$  para una elección adecuada de observables. La violación no aparece porque una correlación individual tome un valor imposible. Lo que falla es la posibilidad de integrar simultáneamente las cuatro correlaciones cuánticas en una misma descripción local con respuestas predefinidas. Esta violación, además, no altera los marginales locales, que siguen siendo independientes de la elección remota. Por eso no proporciona un mecanismo de señalización superlumínica. La diferencia entre la descripción cuántica y la local aparece en las correlaciones conjuntas, no en una transmisión observable de información.

La cota de Tsirelson completa el análisis de la violación cuántica. El valor  $2\sqrt{2}$  no es solo un ejemplo de violación, sino el máximo permitido por la mecánica cuántica para la combinación CHSH en el marco estudiado. Al introducir el operador CHSH, el cálculo de su cuadrado muestra que la superación de la cota local está ligada a la no conmutatividad de las alternativas de medida en cada subsistema. Sin embargo, esa misma estructura operatorial impone un límite mediante la norma del operador. Por eso la mecánica cuántica queda situada entre la cota local y la cota algebraica, según la jerarquía  $2 < 2\sqrt{2} < 4$ . La teoría permite correlaciones más fuertes que las compatibles con los modelos locales considerados, pero no permite correlaciones arbitrarias.

El paso a estados mixtos ha servido para matizar la relación entre entrelazamiento y violación CHSH. En el singlete puro ambas nociones aparecen juntas, ya que el estado es entrelazado y alcanza la máxima violación cuántica. Los estados de Werner muestran que esa coincidencia no es una equivalencia general. Para la familia  $\rho_{W(p)}$ , la violación CHSH

aparece solo cuando  $p > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , mientras que el criterio de transposición parcial positiva establece que hay entrelazamiento para  $p > \frac{1}{3}$ . Por tanto, en el intervalo  $\frac{1}{3} < p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  hay estados mixtos entrelazados que no violan CHSH. El entrelazamiento es una propiedad del estado, mientras que la violación CHSH es una propiedad de ciertas correlaciones frente a una restricción local concreta.

El recorrido seguido delimita también el alcance del trabajo. No se ha buscado clasificar todas las formas posibles de no localidad ni todas las desigualdades de Bell, sino estudiar con detalle el paso de EPR-Bohm a Bell, CHSH, Tsirelson y Werner en el caso bipartito de espín  $\frac{1}{2}$ . Dentro de ese marco, el resultado de conjunto es claro. Las correlaciones del singlete no admiten una descripción local de variables ocultas del tipo considerado. La máxima violación cuántica de CHSH viene dada por la cota de Tsirelson. El entrelazamiento, aunque es central en el problema, no basta por sí solo para asegurar la violación CHSH en estados mixtos.

Después de Bell, la cuestión ya no puede formularse solo en términos de qué valor tenía cada partícula antes de la medida. Se trata de saber si un sistema compuesto puede entenderse como una suma de partes que llevan escritas de antemano todas sus respuestas posibles. El singlete muestra que esa imagen no basta. Sus correlaciones superan la cota local y, al mismo tiempo, obedecen la cota de Tsirelson. Por eso la mecánica cuántica no rompe el orden físico, sino que revela una forma de orden que no es clásica. En los sistemas entrelazados, lo decisivo no siempre pertenece a las partículas tomadas una a una. A veces pertenece al estado conjunto que las une.

## Bibliografía

- [1] J. S. Bell, «On the Einstein Podolsky Rosen Paradox», *Physics Physique Fizika*, vol. 1, n.º 3, pp. 195-200, 1964, doi: [10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195](https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195).
- [2] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, y R. A. Holt, «Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories», *Physical Review Letters*, vol. 23, n.º 15, pp. 880-884, 1969, doi: [10.1103/PhysRevLett.23.880](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.880).
- [3] B. S. Cirel'son, «Quantum Generalizations of Bell's Inequality», *Letters in Mathematical Physics*, vol. 4, n.º 2, pp. 93-100, 1980, doi: [10.1007/BF00417500](https://doi.org/10.1007/BF00417500).
- [4] A. Einstein, B. Podolsky, y N. Rosen, «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?», *Physical Review*, vol. 47, n.º 10, pp. 777-780, 1935, doi: [10.1103/PhysRev.47.777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777).
- [5] D. Bohm y Y. Aharonov, «Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky», *Physical Review*, vol. 108, n.º 4, pp. 1070-1076, 1957, doi: [10.1103/PhysRev.108.1070](https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1070).
- [6] R. F. Werner, «Quantum States with Einstein-Podolsky-Rosen Correlations Admitting a Hidden-Variable Model», *Physical Review A*, vol. 40, n.º 8, pp. 4277-4281, 1989, doi: [10.1103/PhysRevA.40.4277](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.4277).
- [7] J. J. Sakurai y J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 3.ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2020. doi: [10.1017/9781108587280](https://doi.org/10.1017/9781108587280).
- [8] M. A. Nielsen y I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. doi: [10.1017/CBO9780511976667](https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667).

- [9] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, y S. Wehner, «Bell Nonlocality», *Reviews of Modern Physics*, vol. 86, n.º 2, pp. 419-478, 2014, doi: [10.1103/RevModPhys.86.419](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.419).
- [10] R. Horodecki, P. Horodecki, y M. Horodecki, «Violating Bell Inequality by Mixed Spin-1/2 States: Necessary and Sufficient Condition», *Physics Letters A*, vol. 200, n.º 5, pp. 340-344, 1995, doi: [10.1016/0375-9601\(95\)00214-N](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00214-N).
- [11] A. Peres, «Separability Criterion for Density Matrices», *Physical Review Letters*, vol. 77, n.º 8, pp. 1413-1415, 1996, doi: [10.1103/PhysRevLett.77.1413](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413).
- [12] M. Horodecki, P. Horodecki, y R. Horodecki, «Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions», *Physics Letters A*, vol. 223, n.º 1-2, pp. 1-8, 1996, doi: [10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).