



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

**El arte prerrománico asturiano
y las tecnologías de la
información y la comunicación
para la enseñanza de Geometría
en 3º de Educación Secundaria
Obligatoria**

Presentado por: Francisco Jesús Álvarez García
Tipo de trabajo: Propuesta de intervención
Director/a: Ignacio Carlos Maestro Cano

Ciudad: Gijón
Fecha: Febrero de 2019

RESUMEN

La presente propuesta de intervención pretende obtener una mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque Geometría impartido en el 3^{er} curso de Educación Secundaria Obligatoria. Se busca la creación de aprendizaje significativo mediante métodos basados en el constructivismo y empleando como recurso didáctico el arte prerrománico asturiano, declarado Patrimonio de la Humanidad en 1985, cuya observación permitirá construir unos cimientos basados en la realidad sobre los que se puedan apoyar los conceptos teóricos que constituyen la materia a impartir. Para trabajar estos conceptos se propone el empleo de recursos TIC que permitan al alumnado un tratamiento más atractivo de los conceptos a estudiar, así como familiarizarse con programas informáticos de uso ampliamente extendido.

Palabras clave: matemáticas, geometría, 3º ESO, arte prerrománico asturiano, TIC.

ABSTRACT

The present intervention proposal aims to obtain an improvement in the teaching-learning process of the Geometry Block taught in the 3rd year of secondary school. The creation of meaningful learning is sought through constructivism-based methods and using Asturian pre-Romanesque art, declared as World Heritage in 1985, as a didactic resource whose observation will allow to build a reality-based foundation on which the theoretical concepts that constitute the subject to impart can be supported. In order to work with these concepts, the use of ICT resources is proposed, which allows the students to have a more attractive treatment of the concepts to be studied, as well as to familiarize themselves with widely used computer programs.

Key words: Mathematics, Geometry, 3rd year of secondary school, Asturian pre-Romanesque art, ICT.

ÍNDICE

1. Justificación	1
2. Planteamiento del problema	2
2.1. Aplicaciones de la geometría e interrelaciones con otras materias.....	2
2.2. Arte prerrománico asturiano	4
2.3. Empleo de recursos TIC	6
3. Objetivos	8
3.1. Objetivo principal.....	8
3.2. Objetivos secundarios	9
4. Marco teórico	9
4.1. Informes PISA 2015, PISA 2012, TALIS 2013 y TALIS-PISA Link.....	9
4.2. Pedagogía y geometría	13
4.2.1. Piaget e Inhelder y la hipótesis de la primacía topológica.....	13
4.2.2. El matrimonio Van Hiele y los niveles de razonamiento geométrico	15
4.2.3. Duval y el cambio de registro semiótico	16
4.3. Los dispositivos digitales en la enseñanza de matemáticas	18
4.4. Relación entre el software a emplear y la enseñanza	19
4.4.1. La hoja de cálculo en el sistema educativo.....	19
4.4.2. La realidad aumentada en educación.....	19
4.4.3. La edición de imágenes como recurso didáctico.....	20
4.4.4. Mapas interactivos y geolocalización	20
4.5. El arte prerrománico asturiano.....	21
4.6. Metodología colaborativa y basada en la realidad.....	23
4.7. Estudios sobre competencias matemática y aprender a aprender, inteligencias y metacognición	24
4.8. Evaluación: la rúbrica y la matriz DAFO	25
5. Propuesta didáctica	27
5.1. Marco legal	27
5.1.1. Objetivos para ESO.....	27
5.1.2. Competencias generales	28
5.1.3. Temas transversales	29
5.1.4. Contenidos del bloque Geometría.....	30
5.2. Diseño de la propuesta	31
5.3. Cronograma de la propuesta, etapas y metodología.....	31
5.3.1. Acciones previas a la realización de las actividades.....	34
5.3.2. Actividades de la propuesta de intervención	35
5.4. Recursos necesarios	50
5.5. Competencias y objetivos trabajados.....	50
5.6. Evaluación de la actividad.....	54
5.7. Evaluación de la propuesta	54
5.8. Atención a la diversidad	56
6. Conclusiones	57
7. Limitaciones	58

8. Líneas de investigación futura	59
9. Referencias bibliográficas	61
11. Anexos	70
11.1. Anexo I: Contenidos, criterios de evaluación y estándares evaluables de los bloques Geometría y Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	70
11.2. Anexo II: rúbrica de evaluación de la actividad Per speculum	75
11.3. Anexo III: rúbrica de evaluación de la actividad Axis	76
11.4. Anexo IV: rúbrica de evaluación de la actividad Traslatio imperii	77
11.5. Anexo V: rúbrica de evaluación de la actividad Graeca sunt, non leguntur	78
11.6. Anexo VI: rúbrica de evaluación de la actividad Tótum Revólutum	79
11.7. Anexo VII: rúbrica de evaluación de las actividades Quo vadis?/ Citius, altius, fortius	80
11.8. Anexo VIII: Guía rápida de manejo de vectores en la hoja de cálculo	81
11.9. Anexo IX: Cuestionario de evaluación para los alumnos	82
11.10. Anexo X: Glosario de la geometría a tratar en el arte prerrománico	83
11.10.1. Santullano (Oviedo)	83
11.10.2. San Tirso (Oviedo)	84
11.10.3. Foncalada (Oviedo)	85
11.10.4. Santa María del Naranco (Oviedo)	85
11.10.5. San Miguel de Lillo (Oviedo)	88
11.10.6. Cripta de Santa Leocadia en la catedral de Oviedo	90
11.10.7. Capilla de San Miguel en la catedral de Oviedo	91
11.10.8. Torre Vieja de San Salvador (Oviedo)	91
11.10.9. Santa María de Bendones (Oviedo)	92
11.10.10. San Pedro de Nora (Las Regueras)	92
11.10.11. Santo Adriano de Tuñón (Santo Adriano)	93
11.10.12. Santa Cristina de Lena (Lena)	94
11.10.13. Santa María de Arbazal (Villaviciosa)	96
11.10.14. San Salvador de Valdediós (Villaviciosa)	96
11.10.15. San Salvador de Priesca (Villaviciosa)	98
11.10.16. Santiago de Gobiendes (Colunga)	99
11.10.17. Santianes de Pravia (Pravia)	100
11.10.18. San Andrés de Bedriñana (Villaviciosa)	101
11.10.19. San Martín de Argüelles (Siero)	102
11.10.20. San Miguel de Villardevayo (Llanera)	102
11.10.21. Santa Eulalia de Morcín (Morcín)	102
11.10.22. San Martín de Laspra (Castrillón)	103
11.10.23. San Cipriano de Pillarno (Castrillón)	104
11.10.24. San Lorenzo de Cortina (Avilés)	104
11.10.25. San Francisco (Avilés)	105
11.10.26. Santiago de Sariego (Sariego)	105
11.10.27. San Román de Sariego (Sariego)	106
11.10.28. Santo Tomé de Priandi (Nava)	106
11.10.29. Cementerio de Nava (Nava)	107

11.10.30.	San Bartolomé de Puelles (Villaviciosa).....	107
11.10.31.	San Martín del Mar (Villaviciosa)	108
11.10.32.	San Martín de Salas (Salas)	108
11.10.33.	San Miguel de Bárcena (Tineo)	110
11.10.34.	San Pedro de Ese de Calleras (Tineo).....	111
11.10.35.	Orfebrería: Cruz de los Ángeles (Oviedo).....	111
11.10.36.	Orfebrería: Cruz de la Victoria (Oviedo)	112
11.10.37.	Orfebrería: Arqueta de las Ágatas (Oviedo)	113
11.10.38.	Orfebrería: Arqueta de San Genadio (Astorga).....	114

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Resultados de la encuesta realizada en 2002 a docentes de primaria y secundaria de la Comunidad de Madrid acerca del uso de las TIC en el aula	7
Tabla 2. Objetivos generales de la ESO a nivel de programación didáctica.....	27
Tabla 3. Competencias clave y su relación con las matemáticas.	29
Tabla 4. Contenidos del Bloque Geometría de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO	30
Tabla 5. Etapas de la propuesta educativa y competencias trabajadas en cada una de ellas...	51
Tabla 6. Relaciones entre contenidos, objetivos definidos, actividades criterios de evaluación y estándares evaluables.....	53
Tabla 7. Porcentaje de evaluación total para cada actividad	54
Tabla 8. Matriz DAFO	54
Tabla 9. Adaptaciones de la propuesta según el tipo de necesidad educativa especial.....	56
Tabla 10. Contenidos, criterios de evaluación y estándares evaluables de los bloques Geometría y Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	70
Tabla 11. Rúbrica de evaluación de la actividad Per Seculorum	75
Tabla 12. Rúbrica de evaluación de la actividad Axis	76
Tabla 13. Rúbrica de evaluación de la actividad Traslatio imperii	77
Tabla 14. Rúbrica de evaluación de la actividad Graeca sunt, non leguntur	78
Tabla 15. Rúbrica de evaluación de la actividad Tótum Revolútum.....	79
Tabla 16. Rúbrica de evaluación de las actividades Quo vadis?/ Citius, altius, fortius.....	80

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Comparativa entre la imagen icónica y la real de las vistas desde Santa María del Naranco.....	4
Figura 2. Resultados obtenidos de la encuesta realizada en 2012 a estudiantes universitarios sobre conocimientos de procesadores de texto y hojas de cálculo	8
Figura 3. Puntuación media en matemáticas en alumnos y alumnas de 15 años.....	10
Figura 4. Comparativa entre TALIS 2013 y PISA 2012, con los países participantes en TALIS-PISA Link sombreados en gris.....	11
Figura 5. ISEC de los países participantes en el Informe PISA 2015	12
Figura 6. Decoración interior de Santullano.	21
Figura 7. Ventana de San Miguel de Lillo	22
Figura 8. Comparativa entre la Cruz de los Ángeles (808) y la Cruz de la Victoria (908).....	22
Figura 9. Simetría, giro y traslación en el cancel de Santa Cristina de Lena y en la celosía de San Miguel de Lillo y semejanza entre polígonos en la celosía de San Miguel de Villardevayo	32
Figura 10. Pasos a seguir para la obtención de la contraseña de la hoja de cálculo	35
Figura 11. A1: pinturas murales de Santullano	36
Figura 12. A1: ventana de San Lorenzo de Cortina.....	37
Figura 13. A1: ventana de San Martín de Salas.....	37
Figura 14. A1: dintel de ventana trifora de San Martín de Salas	37
Figura 15. A1: base de la Arqueta de las Ágatas	37
Figura 16. A2: acróstico de Silo de Santianes de Pravia	39
Figura 17. A2: reconstrucción del acróstico de Silo.....	39
Figura 18. A3: arco interior de San Miguel de Lillo.....	40
Figura 19. A3: celosía de San Miguel de Villardevayo	40
Figura 20. A3: celosía de San Martín del Mar	40
Figura 21. A3: cancel de San Francisco	41
Figura 22. Codificación QR de la imagen del cancel de San Francisco	42
Figura 23. A4: celosía de Santullano	42
Figura 24. A4: cancel de Santianes de Pravia	42

Figura 25. A4: copia de la celosía original de la fachada sur de San Salvador de Valdediós ..	43
Figura 26. Flor del agua (gris) junto con las circunferencias necesarias para generarla	43
Figura 27. A5: cuerpo central de la Cruz de la Victoria	44
Figura 28. A5: detalle de la fachada oeste de Santa María del Naranco	45
Figura 29. A5: columnas de San Tirso	45
Figura 30. A6: inscripción de San Martín de Salas	47
Figura 31. A6: celosía de San Andrés de Bedriñana	47
Figura 32. A6: cancel de Santa Cristina de Lena	47
Figura 33. A6: pinturas murales de Santullano	47
Figura 34. Ventana de Santullano 1	83
Figura 35. Ventana de Santullano 2	83
Figura 36. Ventana de Santullano 3	83
Figura 37. Ventana de Santullano 4	83
Figura 38. Pinturas murales de Santullano 1.....	84
Figura 39. Pinturas murales de Santullano 2	84
Figura 40. Simetría de San Tirso.....	85
Figura 41. Decoración de los capiteles de San Tirso.....	85
Figura 42. Foncalada 1	85
Figura 43. Foncalada 2.....	85
Figura 44. Fachada este de Santa María del Naranco	86
Figura 45. Fachada oeste de Santa María del Naranco	86
Figura 46. Fachada norte de Santa María del Naranco	86
Figura 47. Columnas soguedas con animales enfrentados en los capiteles de Santa María del Naranco.....	87
Figura 48. Columnas soguedas con motivos florales en los capiteles de Santa María del Naranco.....	87
Figura 49. Medallones simétricos de Santa María del Naranco	87
Figura 50. Medallones simétricos dos a dos de Santa María del Naranco	87
Figura 51. Paneles con figuras enfrentadas de Santa María del Naranco	87
Figura 52. Celosía de la fachada este de San Miguel de Lillo 1	88
Figura 53. Celosía de la fachada este de San Miguel de Lillo 2.....	88
Figura 54. Celosía de la fachada sur de San Miguel de Lillo	88
Figura 55. Arcos interiores de San Miguel de Lillo	89
Figura 56. Bases de las columnas de San Miguel de Lillo	89
Figura 57. Jamba del pórtico de San Miguel de Lillo	90
Figura 58. Pintura interior de San Miguel de Lillo.....	90
Figura 59. Lápidas de la Cripta de Santa Leocadia	90
Figura 60. Ventana de la Cripta de Santa Leocadia	90
Figura 61. Fachada de la Capilla de San Miguel	91
Figura 62. Torre Vieja de San Salvador	91
Figura 63. Celosía de Santa María de Bendones 1	92
Figura 64. Celosía de Santa María de Bendones 2	92
Figura 65. Celosía de San Pedro de Nora 1	93
Figura 66. Celosía de San Pedro de Nora 2	93
Figura 67. Pinturas de Santo Adriano de Tuñón	93
Figura 68. Celosía exterior de Santa Cristina de Lena 1	94
Figura 69. Celosía exterior de Santa Cristina de Lena 2	94
Figura 70. Celosías interiores de Santa Cristina de Lena	94
Figura 71. Columnas y grabados decorativos de Santa Cristina de Lena	95
Figura 72. Cancel de Santa Cristina de Lena	95
Figura 73. Arco de Santa María de Arbazal	96
Figura 74. Ventana bífora de San Salvador de Valdediós	96
Figura 75. Ventana trífora de San Salvador de Valdediós.....	96
Figura 76. Ventana de la fachada oeste de San Salvador de Valdediós	97
Figura 77. Copia de la celosía original de la fachada sur de San Salvador de Valdediós.....	97
Figura 78. Pinturas de San Salvador de Valdediós 1	97
Figura 79. Pinturas de San Salvador de Valdediós 2	97
Figura 80. Pinturas de San Salvador de Valdediós 3	97
Figura 81. Ventana de San Salvador de Priesca 1	98
Figura 82. Ventana de San Salvador de Priesca 2	98
Figura 83. Pinturas de San Salvador de Priesca 1	98

Figura 84. Pinturas de San Salvador de Priesca 2	98
Figura 85.. Pinturas de San Salvador de Priesca 3	98
Figura 86. Pinturas de San Salvador de Priesca 4	98
Figura 87. Arquería perimetral de la sala central de San Salvador de Priesca	99
Figura 88. Capitel de una columna de Santiago de Gobiendes	99
Figura 89. Ventana bífora de Santianes de Pravia	100
Figura 90. Ventana de contorno de herradura de Santianes de Pravia	100
Figura 91. Cancel de Santianes de Pravia	100
Figura 92. Acróstico de Silo de Santianes de Pravia	101
Figura 93. Reconstrucción del acróstico de Silo	101
Figura 94. Ventana de San Andrés de Bedriñana	101
Figura 95. Celosía de San Andrés de Bedriñana	101
Figura 96. Celosía de San Martín de Argüelles 1	102
Figura 97. Celosía de San Martín de Argüelles 2	102
Figura 98. Celosía de San Miguel de Villardevayo	102
Figura 99. Jambas de Santa Eulalia de Morcín 1	103
Figura 100. Jambas de Santa Eulalia de Morcín 2	103
Figura 101. Celosía de Santa Eulalia de Morcín	103
Figura 102. Ventana bífora de San Martín de Laspra	104
Figura 103. Ventana bífora de San Cipriano de Pillarno	104
Figura 104. Ventana bífora de San Lorenzo de Cortina	105
Figura 105. Cancel de San Francisco	105
Figura 106. Ventana bífora de Santiago de Sariego	106
Figura 107. Ventanas bíforas de Santiago de Sariego 2	106
Figura 108. Ventana bífora de San Román de Sariego	106
Figura 109. Ventana bífora de Santo Tomás de Priandi	106
Figura 110. Ventana bífora del Cementerio de Nava	107
Figura 111. Ventana bífora de San Bartolomé de Puelles	107
Figura 112. Pila bautismal de San Bartolomé de Puelles	107
Figura 113. Celosía de San Martín del Mar	108
Figura 114. Inscripción de San Martín de Salas 1	108
Figura 115. Inscripción de San Martín de Salas 2	108
Figura 116. Inscripción de San Martín de Salas 3	109
Figura 117. Ventana bífora de San Martín de Salas	109
Figura 118. Dintel de ventana trífora de San Martín de Salas 1	109
Figura 119. Dintel de ventana trífora de San Martín de Salas 2	110
Figura 120. Dintel de ventana trífora de San Martín de Salas 3	110
Figura 121. Ventana bífora de San Miguel de Bárcena	110
Figura 122. Inscripción funeraria de San Miguel de Bárcena	110
Figura 123. Venta bífora de San Pedro de Ese de Calleras	111
Figura 124. Cruz de los Ángeles	111
Figura 125. Reverso de la Cruz de los Ángeles	111
Figura 126. Detalle de la decoración del camafeo de la Cruz de los Ángeles	112
Figura 127. Decoración central de la Cruz de los Ángeles	112
Figura 128. Cruz de la Victoria	112
Figura 129. Reverso de la Cruz de la Victoria	112
Figura 130. Detalle de la decoración de uno de los brazos terminado en triple lóbulo y del cuerpo central de la Cruz de la Victoria	113
Figura 131. Arqueta de las Ágatas	113
Figura 132. Base de la Arqueta de las Ágatas	114
Figura 133. Arqueta de San Genadio	114

1. *Justificación*

El estudio de las matemáticas en nuestro país, partiendo de datos obtenidos tanto del último informe PISA (*Programme for International Students Assessment*), publicado en 2015, como del informe TALIS (*Teaching and Learning International Survey*), publicado en 2012, muestra unos resultados que, si bien se han mantenido relativamente estables desde 2003 hasta 2015, se encuentran aún por debajo de la media generada a partir de los resultados obtenidos en los países estudiados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), lo que muestra que aún existe un gran margen de mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje en lo que a las matemáticas se refiere. Más aún si tenemos en cuenta la disminución de dicha media respecto a estudios anteriores, lo que indica que, en un sistema que se encuentra en decrecimiento, alcanzar la media no implica excelencia, sino que hay que superarla holgadamente para alcanzar un nivel considerado aceptable históricamente hablando.

Dentro del todo que componen las matemáticas, el campo de la geometría es una parte importante al haber sido en los orígenes generador de la propia ciencia, para pasar más adelante, a partir de la nueva geometría definida por Isaac Barrow (*Lectiones Opticae et Geometricae*, 1669), a ser tratada como un imprescindible en el cálculo matemático, al comenzar a considerarse que los resultados analíticos deben ser refrendados por resultados geométricos y a la inversa. De este modo, los resultados obtenidos en los informes PISA 2015 y TALIS 2012 reflejan directamente los resultados obtenidos en geometría concretamente.

A pesar de ser parte tan importante, la enseñanza de la geometría se ve perjudicada por una serie de cuestiones complementarias centradas principalmente en la metodología a emplear. En estudios referentes a este tema, se observa que la geometría se presenta al alumnado como un producto final, impidiendo el desarrollo de conocimiento propio, el desarrollo de la creatividad y el aprendizaje significativo (Hernández y Villalba, 2001, citados por Gamboa y Vargas, 2013). Barrantes (2002, citado por Vargas y Villalba, 2013) señala además que el método a seguir en la enseñanza de geometría se encuentra desconectado de la realidad, lo que lo coloca en total oposición a uno de los mayores pilares del constructivismo y, por tanto, hace que se resienta el aprendizaje profundo, responsable de la interrelación de conceptos y del desarrollo de la metacognición (Entwistle, 1983).

En relación con la enseñanza de la geometría y el empleo de tecnologías de la información y la comunicación (TIC en adelante), la metodología, si bien ha

experimentado mejoras en los últimos años con la creación de programas específicos y la paulatina introducción de la pizarra interactiva en las aulas, sigue siendo escasa y dependiente de los recursos de cada centro, siendo el método tradicional de clases magistrales y uso de papel y lápiz la metodología imperante (Paredes, Iglesias y Ortiz, 2007, citados por Vargas y Villalba, 2013).

La inclusión del arte prerrománico asturiano en esta propuesta de intervención viene motivada por la estrecha relación existente entre el arte arquitectónico y la geometría, así como por los conceptos para la potenciación del aprendizaje referidos a la significatividad definidos tanto por Díaz Barriga (2003) como por el matrimonio Van Hiele (1986, citado por Fouz, 2001), que implican que el estudio de objetos existentes relacionados con la materia resulta beneficioso para el aprendizaje de ésta.

2. Planteamiento del problema

La problemática a enfrentar en el presente apartado consta de varios frentes, ya que se está tratando de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría, la difusión del arte arquitectónico regional y la competencia digital mediante el empleo de recursos TIC.

Cada uno de estos apartados presenta sus propios problemas, los cuales se estudiarán por separado antes de poder ser integrados en un todo, siguiendo el principio heurístico de división de problemas. Se pueden seguir muchos métodos para abordar la resolución de un problema una vez lo hemos dividido en sus partes, pero los autores que han tratado el tema concuerdan en que inicialmente se debe comprender dicho problema (Polya, 1965) o bien familiarizarse con él (Mason, Burton y Stacey, 1982), de modo que a continuación se hará un repaso por las características de los apartados anteriormente mencionados.

2.1. Aplicaciones de la geometría e interrelaciones con otras materias

La geometría conforma todo un bloque de contenidos de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y, aparte de las propias asignaturas referentes a las matemáticas, se relaciona directamente con las siguientes asignaturas:

- Física y Química, troncal de segundo y tercer curso de ESO, así como troncal de opción de cuarto curso en la opción de enseñanzas académicas. Emplea la geometría para el estudio de las estructuras moleculares orgánicas.
- Educación Plástica, Visual y Audiovisual, específica de primer y tercer curso de ESO y específica de opción de cuarto curso en la opción de enseñanzas aplicadas. Estudia geometría como punto de partida del bloque dedicado al dibujo técnico.
- Dibujo Técnico I, troncal de opción de primer curso en Bachillerato por la modalidad de Ciencias, aunque también se considera específica en caso de no escogerse como troncal, y específica de primer curso en Bachillerato por la modalidad de Artes. En esta asignatura la geometría representa todo un bloque de contenidos.
- Dibujo Técnico II, troncal de opción en segundo curso de Bachillerato por la modalidad de Ciencias, o bien específica en caso de no elegirla como troncal, y específica en segundo curso de Bachillerato por la modalidad de Artes. Dedicar todo un bloque de contenidos al estudio de la geometría.
- Fundamentos del Arte I, general troncal de primer curso en Bachillerato por la modalidad de Artes. En esta asignatura la geometría se estudia junto con las matemáticas relacionándolas con la arquitectura.
- Fundamentos del Arte II, general troncal de segundo curso de Bachillerato por la modalidad de Artes. La geometría aquí se estudia de manera análoga a como se hacía en Fundamentos del Arte I.

La geometría está íntimamente relacionada con la construcción y la edificación, como se sabe por textos conservados de las antiguas civilizaciones egipcia y babilónica. En el papiro de Ahmes, escrito aproximadamente en el año 1650 a. C. en Egipto, ya se maneja la geometría para trabajar conceptos relacionados con la cuadratura del círculo, empleada para el cálculo del volumen de silos de cereales o la parcelación. Siglos después, Euclides dedicaría 9 de los 13 libros que componen “Los elementos” al estudio de la geometría, 6 de ellos al estudio de la geometría plana y 3 al de la geometría de los sólidos, lo que da una idea de la importancia histórica de esta rama de las matemáticas.

No obstante, se considera que la geometría como tal nace en Mesopotamia cerca del año 3000 a. C. Se conservan problemas escritos en escritura cuneiforme cuya resolución se basa en el cálculo de los catetos de triángulos rectángulos generados a partir de vigas apoyadas sobre paredes (Moreles, 2006).

La geometría se puede relacionar de una forma fácil e intuitiva con la historia y la edificación, por lo que es una opción lógica para ligarla al arte prerrománico.

2.2. *Arte prerrománico asturiano*

El arte prerrománico es uno de los emblemas de Asturias, llegando al punto de adoptar los icónicos ventanales de Santa María del Naranco como uno de los emblemas oficiales de la comunidad autónoma. En la figura 1 se puede ver una comparativa entre el emblema y las vistas desde los ventanales.



Figura 1. Comparativa entre la imagen icónica y la real de las vistas desde Santa María del Naranco.

Fuente: elaboración propia. La imagen de la izquierda ha sido extraída del BOPA nº157, de 7 de julio de 2001. La imagen de la derecha ha sido extraída de turismoasturias.es.

Tres de las principales edificaciones del arte prerrománico asturiano (Santa María del Naranco, San Miguel de Lillo y Santa Cristina de Lena) fueron reconocidas por la UNESCO como Patrimonio de la Humanidad el 6 de diciembre de 1985 al cumplir tres de los diez posibles criterios de selección para su inclusión en la lista patrimonial, siendo necesario cumplir al menos uno de los citados criterios para ser incluido en dicha lista. En 1998 se amplió la lista al resto del arte prerrománico. Los criterios cumplidos son los siguientes:

- Criterio I: representar una obra maestra del genio creativo humano. Su cumplimiento fue concedido debido a que “la arquitectura prerrománica asturiana representa un logro artístico único que no es una metamorfosis del arte paleocristiano ni una característica del arte carolingio. Estas iglesias que

son de diseño basilical, completamente abovedadas, y que usan columnas en lugar de muelles, tienen decoraciones muy ricas inspiradas en elementos árabes, así como formas que las asocian con los grandes santuarios de Asia Menor” (UNESCO, 1985).

- Criterio II: exhibir un importante intercambio de valores humanos, en un lapso temporal o dentro de un área cultural del mundo, sobre desarrollos en arquitectura o tecnología, artes monumentales, planificación urbana o diseño de paisajes. Se concede su cumplimiento en base a que “los monumentos asturianos han ejercido una influencia decisiva en el desarrollo de la arquitectura medieval en la península ibérica” (UNESCO, 1985).
- Criterio IV: ser un ejemplo sobresaliente de un tipo de edificio, conjunto arquitectónico o tecnológico o paisaje que ilustre una etapa significativa en la historia humana. Este criterio se cumple al considerarse que “los palacios e iglesias en los alrededores de Oviedo ofrecen un testimonio eminente de la civilización del pequeño Reino cristiano de Asturias durante el esplendor del Emirato de Córdoba” (UNESCO, 1985).

No obstante, a pesar de su contrastada relevancia cultural, su estudio en los centros escolares no se realiza en profundidad. La inmensa mayoría de las 38 edificaciones, restos o reliquias que componen el prerrománico asturiano permanecen desconocidas para el público en general al centrarse la promoción principalmente en unas pocas obras localizadas en la zona central de la comunidad y que cuentan con mejores accesos.

En el currículo de Enseñanza Secundaria Obligatoria del Principado de Asturias el prerrománico únicamente se estudia en los bloques Arte y Pervivencia en la actualidad de la asignatura Cultura Clásica, específica de la opción de Enseñanzas Aplicadas. En el currículo de Bachillerato del Principado de Asturias se estudia en el bloque De Roma al Románico de la asignatura Fundamentos del Arte I, troncal de la modalidad de Artes, en el bloque La Edad Media de la asignatura Historia de España, troncal de las modalidades de Ciencias, Humanidades y Ciencias Sociales y Arte y en el bloque Nacimiento de la Tradición Artística Occidental de la asignatura Historia del Arte, troncal de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, siendo esta asignatura la única que menciona explícitamente algunas de las obras que componen el prerrománico en sus criterios de evaluación.

Como se puede ver, el estudio de este estilo artístico, dependiendo de opción y modalidad, se limita a un mínimo de un bloque y un máximo de tres en toda la ESO y

el Bachillerato, por lo que conviene incluirlo en la enseñanza de Matemáticas de cara a aumentar su difusión.

Además, como se expondrá más adelante, el arte prerrománico tiene una sólida base geométrica centrada en los movimientos en el plano, siendo estos parte integrante de los contenidos del bloque Geometría de la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas.

2.3. Empleo de recursos TIC

Las TIC se hallan en pleno proceso de integración dentro del ámbito educativo. Las tres grandes razones que motivan su uso en las aulas son la alfabetización digital del alumnado, la mejora de la productividad y la posibilidad de innovación en busca de mejores resultados y reducción del fracaso escolar (Marqués, 2012) y han sido definidas como las impulsoras de un nuevo escenario holístico en el que se integren totalmente en los centros educativos, provocando una fuerte transformación de estos (Majó, 2003, citado por Marqués, 2012).

De todos modos, su integración, como la de cualquier elemento nuevo en un sistema, trae consigo una serie de dificultades. Hay que tener en cuenta que, siguiendo la teoría ecológica del desarrollo humano (Bronfenbrenner, 1979), que permite diferenciar entre microsistemas (familias, aulas...), exosistemas (contextos con influencia sobre los microsistemas del alumnado y a los que no pueden acceder para modificarlos) y macrosistemas (instituciones que conforman la legislación educativa), la irrupción de las TIC supone una alteración de todos los mesosistemas que relacionan los sistemas anteriores, de modo que necesitan de una reestructuración total que genera incontables posibilidades positivas pero también trae enormes problemas al tratar de equilibrar las relaciones intersistémicas.

Las problemáticas de la inclusión de las TIC han sido estudiadas por diversos autores. En la tabla 1 se pueden ver los resultados obtenidos en una encuesta realizada entre docentes de primaria y secundaria de la Comunidad de Madrid en 2002. Estos resultados, obtenidos hace más de 15 años, muestran un profesorado polarizado frente al reconocimiento de las TIC como una herramienta potente y necesaria para la adaptación tanto del profesorado como del alumnado a la nueva situación definida por el auge de internet pero que a la vez no muestra predisposición a emplearlo en las aulas.

Tabla 1. Resultados de la encuesta realizada en 2002 a docentes de primaria y secundaria de la Comunidad de Madrid acerca del uso de las TIC en el aula

TABLA 1. ACTITUDES HACIA LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN (TIC)							
ACTITUDES	EN DESACUERDO		INDECISO	DE ACUERDO		\bar{X}	s
	TOTAL	PARCIAL		PARCIAL	TOTAL		
1. El ordenador y las nuevas tecnologías son para mí una gran ayuda profesional.	1,28	5,13	8,55	42,74	42,31	4,20	0,89
2. Para mí es importante el uso de los recursos tecnológicos.	1,28	2,77	7,87	40,21	47,87	4,31	0,83
3. Me gusta trabajar con el ordenador.	2,15	4,29	9,44	42,06	42,06	4,18	0,92
4. Usar Internet es un reto que estoy abordando o pienso abordar.	6,33	6,11	5,46	34,93	47,16	4,10	1,15
5. Si no aprendo a usar Internet me quedaré desfasado.	5,41	7,14	4,11	23,16	60,17	4,26	1,16
6. Es complicado utilizar las TIC en mi práctica docente; no me compensa el esfuerzo.	29,57	15,43	18,26	30,65	6,09	2,68	1,34
7. El uso de Internet me estimula aumentando mi motivación como profesor.	11,54	14,53	18,16	35,47	20,30	3,38	1,28
8. El uso de las TIC permite mejorar la calidad de la educación.	3,23	7,96	14,84	36,77	37,20	3,97	1,06
9. Las TIC aumentan la participación activa de los estudiantes.	1,51	4,31	15,95	42,24	35,99	4,07	0,91
10. Con las TIC se alcanzan mejor los objetivos educativos.	5,15	10,73	33,26	31,55	19,31	3,49	1,08
11. Las TIC aumentan la responsabilidad del estudiante en el propio proceso de aprendizaje.	6,71	11,04	35,50	30,52	16,23	3,39	1,09
12. Mediante Internet se estimula el trabajo cooperativo.	6,48	12,74	26,35	36,29	18,14	3,47	1,12
13. Las TIC introducen una mayor flexibilidad, favorecen el aprendizaje individualizado y personalizado.	2,40	5,66	22,22	42,70	27,02	3,86	0,96
14. Los recursos tecnológicos nos ayudan a prestar una mejor atención a la diversidad.	3,48	5,43	21,30	41,74	28,04	3,85	1,00
15. No creo que el uso docente de Internet incremente la motivación de los estudiantes.	2,81	5,40	14,69	44,49	32,61	3,99	0,97
16. Las TIC son instrumentos excelentes para la innovación educativa.	1,53	3,06	12,04	43,98	39,39	4,17	0,87
17. No necesito Internet para enseñar mi materia.	27,43	25,70	14,04	22,68	10,15	2,62	1,36
18. Tengo intención de utilizar Internet con mis alumnos.	11,74	13,26	21,30	26,09	27,61	3,45	1,33
19. Estoy dispuesto a colaborar en proyectos educativos que utilicen Internet.	4,57	7,83	28,04	32,17	27,39	3,70	1,09
20. Las nuevas tecnologías e Internet son una imposición de los grupos dominantes.	34,06	26,03	18,44	15,40	6,07	2,33	1,26
21. Las TIC aportan mejoras a la sociedad que no se podrían conseguir por otros medios.	5,63	12,34	23,16	39,39	19,48	3,55	1,11
22. El acceso a Internet incrementa las diferencias sociales entre países y dentro de cada sociedad.	14,19	18,56	23,14	29,69	14,41	3,12	1,27
23. Internet permite organizarse a los desfavorecidos.	12,53	16,04	36,26	27,25	7,91	3,02	1,12
24. Internet es un mecanismo más de control sobre las personas por parte de los Estados y grupos dominantes.	25,55	20,96	28,60	18,56	6,33	2,59	1,23

Fuente: Carballo y Fernández, 2005

Con el paso del tiempo, ya en 2011, las problemáticas referidas al uso de las TIC se pueden resumir en la necesidad de más tiempo para la preparación de la docencia y averías y problemas relacionados con la conexión a internet o de funcionamiento de

programas instalados en los ordenadores, mientras que el 91% de los profesores y el 75% de los alumnos consideran que las TIC ayudan en la mejora de los aprendizajes (Domingo y Marqués, 2011), quedando así demostrada la utilidad de las TIC como elemento potenciador del proceso de enseñanza-aprendizaje.

A pesar de estos resultados, en una encuesta realizada a estudiantes universitarios en 2013 destinada a medir el nivel de su competencia digital en diversos apartados se obtuvo como resultado que apenas la mitad afirmaba tener “bastante” conocimiento sobre procesadores de texto y que sólo un tercio decían tener “algún conocimiento” sobre hojas de cálculo. Estos resultados pueden verse en la figura 2.

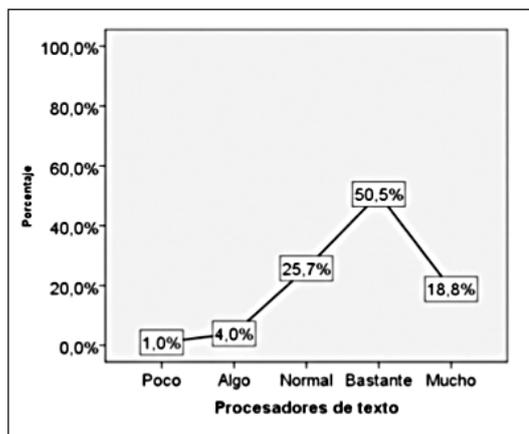


FIGURA 5
PROCESADORES DE TEXTO

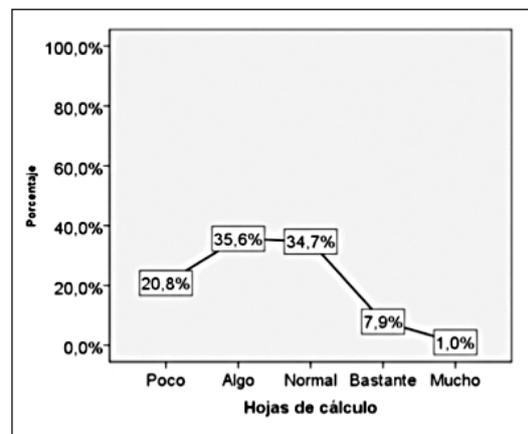


FIGURA 6
HOJAS DE CÁLCULO

Figura 2. Resultados obtenidos de la encuesta realizada en 2012 a estudiantes universitarios sobre conocimientos de procesadores de texto y hojas de cálculo

Fuente: Centeno y Cubo, 2013

A la vista de estos resultados queda claro que, si bien las TIC se están introduciendo favorablemente en las aulas, esto no implica que la competencia digital del alumnado mejore sólo por el hecho de manejar programas informáticos, sino que es necesaria una formación más específica.

3. Objetivos

3.1. Objetivo principal

El objetivo principal del presente trabajo de fin de máster es la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque de Geometría de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de Educación Secundaria Obligatoria mediante el diseño de una propuesta de intervención que cristalice en una situación

didáctica siguiendo los principios del constructivismo, de tal modo que se eviten las presentaciones de la materia de estudio de modo axiomático, el cual no favorece la construcción de aprendizaje significativo, a pesar de tener valor en otros campos, como puede ser la investigación.

Concretamente, se busca que el alumnado participante investigue y reconozca los conceptos geométricos propios de la asignatura y curso basándose en arquitectura existente, de forma que puedan apreciar de primera mano representaciones tangibles de dichos conceptos y observar su utilidad y empleabilidad en la realidad. De este modo, el nivel de razonamiento geométrico abstracto que se desea alcanzar obtiene un andamiaje basado en la realidad sobre el que apoyarse.

3.2. Objetivos secundarios

Las características de diseño de la propuesta de intervención hacen que aparezcan una serie de objetivos secundarios vinculados al principal y necesarios para el cumplimiento de éste:

- Ampliación del conocimiento de la historia de las matemáticas mediante la inclusión de conceptos arquitectónicos, en este caso focalizados en una época y región concretas, pero con posibilidad de expandirse mucho más allá.
- Mejora de las habilidades necesarias para el correcto uso de diversos programas informáticos.
- Experiencia de trabajo colaborativo en un entorno real.
- Interrelación de la competencia matemática con el resto de competencias, así como de la propia asignatura con otras materias.

4. Marco teórico

4.1. Informes PISA 2015, PISA 2012, TALIS 2013 y TALIS-PISA Link

Una medida de la calidad de la educación de un país o economía concreta del mundo es proporcionada cada tres años en el informe PISA. Los datos del año 2018 serán publicados en 2019, de modo que se emplearán los datos existentes al respecto referentes al año 2015. En concreto, se pondrá el foco sobre el aprendizaje de

matemáticas en España. El Informe PISA 2015 aporta unos resultados a comparar con la media obtenida por los países miembros de la OCDE, como puede verse en la figura 3.

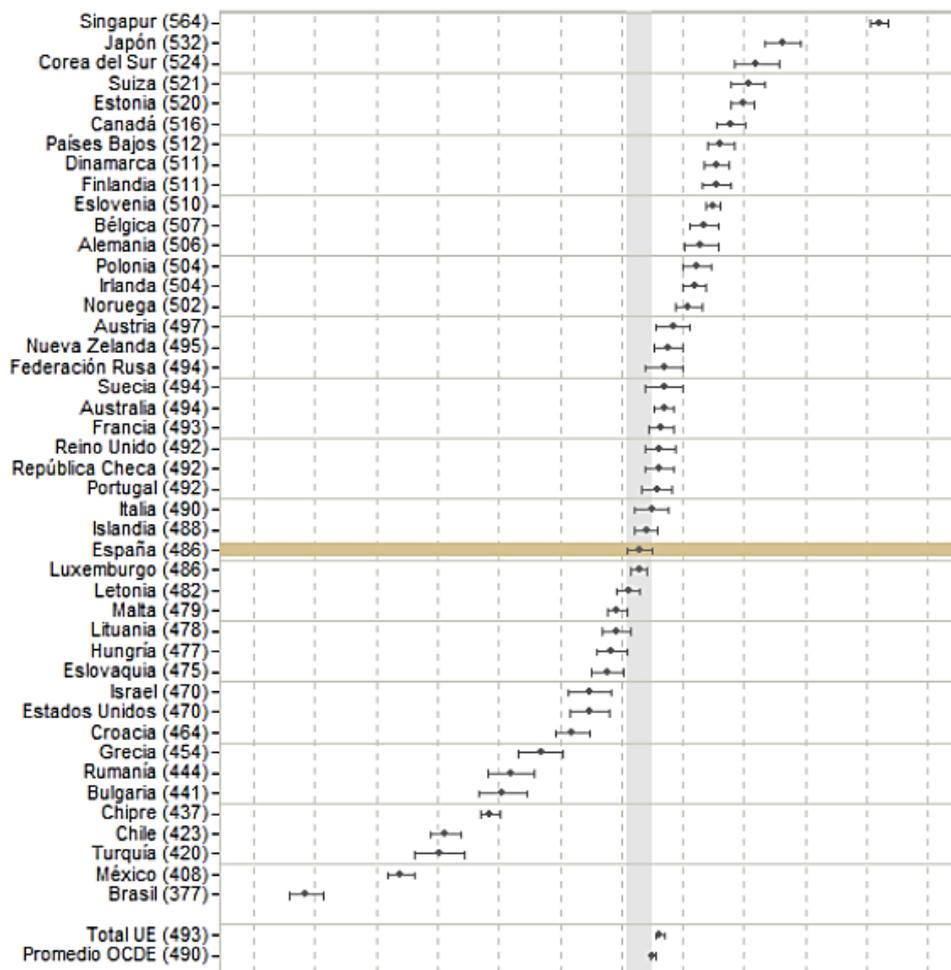


Figura 3. Puntuación media en matemáticas en alumnos y alumnas de 15 años.

Fuente: Informe PISA 2015

En la anterior figura se puede apreciar que la media de la OCDE es de 490 puntos, mientras que la media en España es de 486 puntos, estando levemente por debajo de la media en lo que a resultados se refiere.

Por otra parte, a la hora de otorgar posiciones en la clasificación de países participantes, es conveniente no confiar ciegamente en los datos mostrados por el informe PISA 2015, basados en resultados obtenidos puros y duros. Otro estudio realizado por la OCDE es el estudio TALIS, enfocado a medir las prácticas de enseñanza y aprendizaje de los centros. Se realiza cada 5 años, estando disponibles a día de hoy los del último estudio realizado en 2013, los cuales se han podido comparar con los resultados obtenidos en PISA 2012. No obstante, cabe la duda acerca de si el

profesorado evaluado por TALIS se corresponde con el que ha impartido clase a los alumnos cuyos resultados muestra PISA, de modo que existe un tercer estudio a tener en cuenta: el informe TALIS-PISA *Link*, que relaciona a nivel de centro los resultados obtenidos en TALIS 2013 y PISA 2012 (Fernández, Martínez y Rodríguez, 2016) y cuyos resultados comparados pueden verse en la figura 4.

	TOTAL TALIS	Posición		Posición	TOTAL PISA	
E.A.U. (Abu Dabi)	82,4	1		1	555,7	Singapur
Portugal	78,2	2		2	542,5	Corea
Dinamarca	77,7	3		3	540,4	Japón
Australia	76,6	4		4	529,4	Finlandia
Rumanía	76,6	5		5	526,1	Estonia
R.U. (Inglaterra)	76,3	6		6	522,2	Canadá
Bulgaria	76	7		7	520,5	Polonia
México	75,7	8		8	518,8	Países Bajos
Italia	73,6	9		9	512,5	Australia
Polonia	73,5	10		10	509,3	Bélgica (Flandes)
Singapur	73,3	11		11	502,5	R.U. (Inglaterra)
Canadá	72,7	12		12	500,1	República Checa
Serbia	71,8	13		13	499,8	Francia
Eslovaquia	70,7	14		14	498,2	Dinamarca
Letonia	70,6	15		15	495,9	Noruega
República Checa	69,8	16		16	493,8	Letonia
Israel	69,7	17		17	489,6	España
España	69,4	18		18	489,5	Italia
Chile	69,1	19		19	488	Portugal
Noruega	69,1	20		20	484,5	Islandia
Brasil	68,2	21		21	482,4	Croacia
Suecia	67,8	22		22	482,1	Suecia
Estonia	67,8	23		23	474,1	Israel
Francia	67,4	24		24	471,9	Eslovaquia
Malasia	67,1	25		25	446,6	Serbia
Bélgica (Flandes)	66,1	26		26	441,4	E.A.U. (Abu Dabi)
Croacia	65,5	27		27	440,4	Bulgaria
Finlandia	64,9	28		28	440,3	Rumanía
Países Bajos	64,1	29		29	436,3	Chile
Islandia	63	30		30	417,3	México
Japón	59,8	31		31	412,7	Malasia
Corea	57,1	32		32	398,9	Brasil

Figura 4. Comparativa entre TALIS 2013 y PISA 2012, con los países participantes en TALIS-PISA Link sombreados en gris

Fuente: Fernández, Martínez y Rodríguez, 2016

De este modo se evidencia que los datos aportados por PISA, a pesar de mostrar resultados obtenidos en áreas concretas de conocimiento, no son reflejo de la calidad educativa de los países participantes sino sólo, obviamente, de dichos resultados obtenidos. Por otra parte, los indicadores de TALIS, basados en formación, experiencia y situación laboral del profesorado, así como en características de cada centro y de su dirección, adolecen del uso de ciertos indicadores subjetivos, como los empleados para medir la autopercepción del profesorado, lo que hace necesario mejorar ambos estudios mediante el replanteamiento de los procesos de evaluación a emplear (Fernández, Martínez y Rodríguez, 2016). No obstante, el hecho de que

España aparezca en posiciones prácticamente idénticas en ambos estudios es un indicador de que se deben mejorar tanto los resultados obtenidos como el proceso de enseñanza-aprendizaje que lleva a dichos resultados. Esta relación directa entre enfoques de aprendizaje y resultados académicos se ha probado en los países de la OCDE (Informe *Student Approaches to Learning*, 2003, citado por Maquilón y Hernández, 2011), lo que permite inferir que el problema reside primigeniamente en el propio proceso de enseñanza-aprendizaje.

Otro factor a tener en cuenta es el socioeconómico, ya que se ha demostrado que un mayor nivel socioeconómico suele traer consigo efectos positivos sobre el rendimiento académico (Piñero y Rodríguez, 1998, citados por Edel, 2003). Con ese dato en mente, tanto el informe PISA como el TALIS emplean el Índice Social, Económico y Cultural (ISEC), en el que se representa el nivel económico, cultural y de recursos en cada país, como se puede ver en la figura 5.

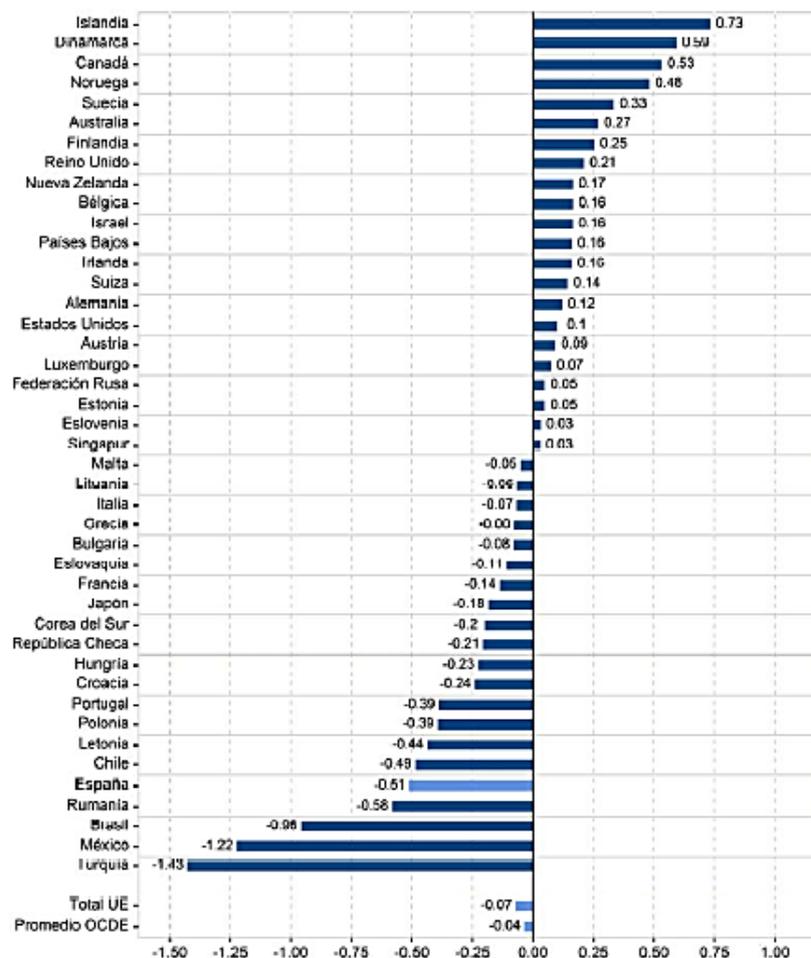


Figura 5. ISEC de los países participantes en el Informe PISA 2015

Fuente: Informe PISA 2015

A la vista de la figura se puede observar que el ISEC de España es de $-0,51$, muy por debajo tanto de la media de la OCDE, $-0,04$, como de la media de la Unión Europea, $-0,07$. Empleando como base este factor, se puede concluir que el problema es también de carácter socioeconómico.

Con estos dos indicadores, el proceso de enseñanza-aprendizaje y los factores socioeconómicos se muestran claves a la hora de definir las causas del bajo rendimiento de España en lo que a matemáticas se refiere.

4.2. Pedagogía y geometría

Los procesos de enseñanza-aprendizaje, definidos como uno de los principales factores a estudiar y mejorar según los resultados empíricos obtenidos en los estudios citados en el anterior apartado, han sido objeto de reflexiones teóricas por parte de reputados investigadores. En concreto, el foco se pondrá sobre la enseñanza de matemáticas y, más en concreto, de geometría.

4.2.1. Piaget e Inhelder y la hipótesis de la primacía topológica

Jean Piaget y Bärbel Inhelder iniciaron los estudios acerca de la capacidad de niños y niñas de desarrollar una representación espacial, basándose en dos hipótesis iniciales: la hipótesis constructivista, que defiende que la representación espacial depende del desarrollo psicomotriz, capaz de desarrollar sistemas operacionales, y la hipótesis de la primacía topológica, basada en el desarrollo lógico y progresivo de la serie ideas topológicas - relaciones proyectivas - relaciones euclídeas (Camargo, 2011). Los elementos de la serie definida se componen de propiedades topológicas, como conectividad o continuidad, proyectivas, como rectilinealidad o curvilinealidad, y euclídeas, como paralelismo o perpendicularidad. De este modo se pueden asociar ambas hipótesis al comprobar que el desarrollo lógico de la serie definida en la hipótesis de la primacía topológica sigue el curso de desarrollo psicomotriz en que se basa la hipótesis constructivista, es decir, a medida que se tiene un mayor control físico y mental del entorno aumentan las capacidades de definir dicho entorno en términos geométricos progresivamente más complejos. Actualmente, la hipótesis constructivista ha sido probada, mientras que la hipótesis de la primacía topológica ha dado resultados tanto a su favor como en su contra cuando se han repetido los experimentos fundacionales de dicha hipótesis, estando los resultados desfavorables basados principalmente en los materiales usados en los experimentos, cuyas propiedades geométricas concretas son objeto de discusión (Martin, 1976, citado por Camargo, 2011). A pesar de eso, la hipótesis de la supremacía topológica ha generado

una gran cantidad de material, tanto de estudio como a emplear en la docencia de geometría, centrado en la identificación de propiedades geométricas en elementos bidimensionales y tridimensionales (Fisher, 1965, citado por Camargo, 2011).

Esta hipótesis ha sido clave también en el estudio de las representaciones geométricas, observándose una relación entre el control psicomotriz y la capacidad de representación de figuras geométricas, de modo que, a medida que avanza el control sobre la psicomotricidad, aumenta el grado de complejidad representado en la figura geométrica. Las observaciones realizadas muestran que en edades tempranas se da mayor importancia al hecho de que las figuras sean cerradas, para posteriormente dar mayor relevancia a características basadas en paralelismo y perpendicularidad de los lados y finalmente tratar de desarrollar congruencias angulares (Camargo, 2011). Esta progresión se entrelaza con la percepción espacial, ya que se puede percibir que la geometría representada depende cada vez más de la observación del contexto espacial, en el que primero se encuentra la figura a solas, luego la figura y el punto de vista de un observador y por último la figura y sus relaciones observadas con otras figuras. Este aumento de la percepción contextual implica el uso de una especie de sistema de coordenadas bidimensional que rápidamente se convierte en tridimensional, siendo la adopción de un sistema de referencia euclídeo tridimensional la culminación de un proceso que no depende de cualidades innatas, sino del aprendizaje basado en la generación y comparación de figuras, si bien es cierto que características ambientales pueden acelerar o frenar dicho proceso (Clements y Battista, 1992, citados por Camargo, 2011).

Este proceso, que requiere del dominio espacial, implica, según el constructivismo, que la persona que supera un área de conocimiento integra ese conocimiento en sí misma, lo que permite la definición de la tríada piagetiana, es decir, el proceso intra-inter-trans, que refleja directamente los conceptos expuestos en este apartado. En la tríada piagetiana intra hace referencia al análisis de un objeto, inter a las relaciones y transformaciones entre objetos y trans a la comprensión de estructuras cuya creación se basa en dichas relaciones (Barroso y Martel, 2008), pudiéndose encontrar esta tríada en el proceso de construcción de cualquier conocimiento. En concreto, en su relación con la geometría hay que destacar tres etapas en la generación de esta rama de las matemáticas: intrafigural (estudio de figuras geométricas como relaciones entre los elementos de dichas figuras, iniciado por Euclides), interfigural (puesta en relación de figuras entre sí) y transfigural (las figuras se integran en construcciones realizables). Estas etapas se siguen en la resolución de problemas geométricos en los que el punto de partida es la demostración de una propiedad geométrica determinada, iniciándose la estrategia de resolución en el estudio de la figura que contiene dicha

propiedad, pasando posteriormente al empleo de conocimientos relacionados con la geometría de la figura de partida, la descomposición de dicha figura en otras figuras que la componen y las relaciones entre las subfiguras generadas o bien entre la figura inicial y otras semejantes. Por último, la etapa transfigural permite generar estructuras más complejas cuya construcción implica la demostración de la propiedad a demostrar a partir de la figura inicial y las relaciones estudiadas en la segunda etapa (Barroso y Martel, 2008). Se comprueba así que los problemas geométricos más complejos pueden resolverse mediante el estudio de los problemas simples que los componen, empleando para ello relaciones que, a pesar de ser complejas, se basan también en relaciones más sencillas a las que sólo hace falta aplicar un cambio de posición o escala, siendo el sistema de coordenadas euclídeas la principal herramienta a manejar en esos casos, la cual, como se ha visto, surge primigeniamente de la observación de figuras simples y aisladas. En otras palabras, según los experimentos de Piaget e Inhelder, la geometría más compleja sólo necesita de estudio y de una base psicomotriz que haga que el contexto espacial sea relevante y perceptible (Inhelder, Piaget y Szeminska, 1960).

La didáctica de la geometría, que avanzaría posteriormente con el matrimonio Van Hiele, se apoya indudablemente en las hipótesis manejadas por Piaget e Inhelder, lo que la liga indefectiblemente al constructivismo y hace de ella una herramienta básica para la resolución de problemas basada en representación, justificación, visualización y conceptualización (Camargo, 2011).

4.2.2. El matrimonio Van Hiele y los niveles de razonamiento geométrico

A partir de los estudios de Piaget e Inhelder, Dina y Pierre Van Hiele desarrollan los cinco niveles de razonamiento geométrico. Las características generales de estos niveles son la jerarquización y la secuencialidad, ya que cada nivel se apoya en el anterior, y la estrecha relación entre el lenguaje empleado y los propios niveles, debido a que la información generada en cada nivel puede implicar cambios en los conceptos anteriores, por lo que la forma de referirse a esos conceptos varía, de modo que lo que para una persona en un nivel es cierto puede no serlo para otra persona en distinto nivel (Rojas, 2005).

Los niveles de razonamiento geométrico definidos por el matrimonio Van Hiele son los siguientes (Rojas, 2005):

- Visualización o reconocimiento: los elementos observados se ven como un todo en el que no hay lugar para propiedades matemáticas.
- Análisis: se comienzan a percibir las características de las figuras observadas en el anterior nivel y a descomponer las figuras en elementos más simples que permiten la generalización, aunque las propiedades matemáticas aún no pueden ser explicadas.
- Deducción informal: se establecen relaciones entre las propiedades observadas anteriormente, lo que permite la interrelación y la deducción de figuras con características similares.
- Deducción formal: se emplea el razonamiento formal, pasando la deducción de ser más o menos intuitiva a componerse de axiomas y teoremas geométricos.
- Rigor: se pueden analizar los métodos deductivos, compararlos entre sí y determinar la rigurosidad de cada uno de ellos, lo que implica la comprensión geométrica de forma abstracta. Este nivel implica un grado de abstracción tan elevado que hace que generalmente se considere aparte del resto de niveles (Gamboa y Vargas, 2013).

Aunque se empleen como punto de partida, se pueden ver avances respecto a las teorías de Piaget y una mayor profundización en los temas a tratar, principalmente en el énfasis sobre la importancia del lenguaje a emplear. No obstante, hay también discrepancias entre Piaget y los Van Hiele, siendo una de las principales el hecho de que Piaget le da preeminencia al desarrollo biológico sobre el aprendizaje, cosa que los Van Hiele no contemplan de igual manera. Piaget es de la opinión de que una persona nace con una estructura cerebral superior y que sólo necesita acceder a ella, mientras que los Van Hiele son partidarios de que dicha estructura se cimienta en conocimientos anteriores y no existe sin ellos, de manera que los conceptos teóricos se construyen gracias a los procesos de enseñanza-aprendizaje (Torre, 2003).

4.2.3. Duval y el cambio de registro semiótico

Prosiguiendo con el estudio del lenguaje típico de las matemáticas, aparece el problema de la trasposición del lenguaje matemático al mundo no matemático, es decir, el cambio de registro semiótico: hay que distinguir entre una representación y aquello que se representa (Duval, 1998, citado por Quesada y Torregrosa, 2007). Según las hipótesis de Duval, la actividad geométrica involucra tres clases de procesos

cognitivos, como son la visualización, el razonamiento y la construcción, los cuales deben tratarse por separado ya que implican diferentes formas de razonamiento. Para explicar la visualización como el proceso de transferencia entre realidad y representación es necesario emplear el término *aprehensión*, entendido como captar la esencia de las cosas sin juzgar, afirmar o negar. Duval emplea tres *aprehensiones* para exponer sus hipótesis: la *aprehensión perceptiva*, o identificación simple e intuitiva de una figura a partir de su representación, la *aprehensión discursiva*, o asociación de una configuración identificada con sus conceptos matemáticos asociados o a la inversa, y la *aprehensión operativa*, o modificación de la configuración identificada para obtener la resolución de un problema geométrico, pudiendo esta *aprehensión* ser de cambio figural, si se añade o eliminan elementos geométricos a los ya existentes, o de reconfiguración, si se modifican los elementos geométricos para generar una nueva configuración (Quesada y Torregrosa, 2007).

Los registros de representación geométricos y los cambios de uno a otro pasan a cobrar tanta importancia de cara a las matemáticas como el cálculo, debido a que, por sus propias características, el lenguaje matemático viene a menudo expresado en forma de representación esquemática y es necesario convertir dicha representación en numérica para poder operar, o a la inversa en caso de querer esquematizar. Sea como sea, en la actualidad, como se ha mencionado anteriormente, la geometría y el cálculo han de validarse nuevamente desde la formulación de la nueva geometría de Barrow, lo que hace que el cambio de registro semiótico sea imprescindible. Por ello, el razonamiento de Duval, que comprende el proceso configural (*aprehensión operativa*), el proceso discursivo natural (comunicación ordinaria) y el proceso discursivo teórico (deducción, tanto en lenguaje simbólico como natural), se muestra como una herramienta importante a la hora de enfrentar los cambios de registro semióticos en matemáticas (Quesada y Torregrosa, 2007).

En el caso de la enseñanza de matemáticas, es importante que el alumnado sea capaz de distinguir entre un objeto matemático representado y su representación semiótica, debido a que conceptos matemáticos como números y funciones son sólo accesibles mediante representaciones semióticas y, no sólo eso, el objetivo último no es representarlos, sino trabajar con ellos, para lo que es necesario modificar las representaciones o incluso los registros, llegando al punto en el que se puede afirmar que sin mediaciones semióticas no es posible la actividad matemática. La exposición de varias representaciones semióticas al mismo tiempo es un buen método para que los estudiantes sean capaces de asociar unos contextos con otros (Duval, 2006).

4.3. Los dispositivos digitales en la enseñanza de matemáticas

El proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas se está viendo transformado de manera pausada pero imparable por el uso de dispositivos tecnológicos, hasta el punto en que se aventura que en relativamente poco tiempo la manera de enseñar, aprender, comprender y aplicar los conocimientos matemáticos habrá cambiado completamente (Orozco y Labrador, 2006). Ya se ha demostrado la capacidad de la tecnología digital gráfica para la mejora de la inteligencia geométrico-espacial, así como la abstracción y la representación icónica (Feldstein, 2005, citado por Orozco y Labrador, 2006).

El empleo de calculadoras gráficas tanto dentro como fuera del aula se ha extendido y la concepción de dispositivos tecnológicos capaces de realizar cálculos complejos en cuestión de fracciones de segundo ha ido variando desde simples herramientas a una especie de “cerebro auxiliar” que permite procesar vastas cantidades de información numérica y resolver complejos programas matemáticos (Araya, 2003, citado por Orozco y Labrador, 2006). Esta misma relación entre el ser humano y la tecnología ha sido estudiada por otros autores, como Tikhomirov (1981, citado por Villareal, 2000), quien define tres teorías para explicar dicha relación: sustitución, suplementación y reorganización. Mientras que la primera de ellas identifica al ser humano y a la máquina a nivel intelectual, las otras dos hacen referencia a los dispositivos digitales como suplementos del pensamiento humano que incrementan la velocidad y el volumen de procesamiento de información a la vez que modifican la estructura de la función intelectual humana, ya que ésta no tiene que dedicarse en parte a la resolución de cálculos complejos o intrincadas representaciones gráficas.

Otro aspecto de las matemáticas que se ve mejorado gracias a la ayuda de dispositivos informáticos es la conversión, o transformación de una representación en otra representación de distinto registro semiótico (Duval, 1993, citado por Hitt, 1998). La habilidad de representar un mismo concepto matemático en diversos registros semióticos es clave para la visualización matemática (Hitt, 1998), además de ser imprescindible en el cálculo matemático, dada la anteriormente citada necesidad de contrastar los resultados analíticos con resultados geométricos y a la inversa (Barrow, 1669).

4.4. *Relación entre el software a emplear y la enseñanza*

4.4.1. La hoja de cálculo en el sistema educativo

La hoja de cálculo lleva utilizándose como recurso TIC desde principios de los años 80 en países como Reino Unido o Australia, debido a su extendido uso en el mercado laboral, tanto en el campo industrial como en el científico (Squires y McDougall, 1997).

La hoja de cálculo es un programa que permite realizar operaciones matemáticas de cualquier grado de complejidad, debido a su capacidad para el empleo de fórmulas, tanto propias y características del sistema como programadas por el usuario. También es capaz de generar información gráfica partiendo de los datos que se le introduzcan.

Un aspecto de la hoja de cálculo que no se debe obviar es que ofrece al estudiante un ejemplo continuo de conversión entre distintos registros semióticos, debido a que se debe tener en cuenta que determinados signos no representan lo mismo en lenguaje escrito tradicional que en el lenguaje con el que el usuario se comunica con el programa, siendo el principal y más claro exponente el signo "=", que algebraicamente representa una relación entre dos términos de una igualdad pero que en la hoja de cálculo representa la asignación de un valor concreto a una celda, lo que obliga al usuario a ejercitar continuamente la conversión (Arnau y Puig, 2006)

4.4.2. La realidad aumentada en educación

El uso de *Quick Response codes* (códigos QR en adelante) como puerta de entrada a la noción de realidad aumentada es un concepto que se usa cada vez más en publicidad y productos de consumo, así como medio de difusión cultural y pedagógico. Actualmente, museos y centros de interpretación optan cada vez más por el empleo de estos sistemas como medios de difusión, debido al atractivo que presenta el hecho de poder insertar objetos virtuales en entornos reales (Ruiz, 2011), en lo que se denomina realidad mezclada (Kishino, 1994, citado por Ruiz, 2011).

Su empleo en las aulas lleva explorándose desde los años 90, con propuestas como *Magic Book*, desarrollada en la Universidad de Washington y una de las primeras en mostrar el valor pedagógico de esta fusión entre realidad y tecnología (Billinghurst, 2001, citado por Ruiz, 2011). En la actualidad, con más del 85% de la población mundial en posesión de dispositivos telefónicos móviles inteligentes, las posibilidades didácticas que oferta la realidad aumentada son cada vez mayores (Estrada y Cantero, 2014).

Investigaciones realizadas sobre el uso de códigos QR en educación dan como resultado que es un concepto aún por explorar pero que, gracias a su versatilidad, es fácilmente adaptable al nivel educativo de cada grupo de alumnos y sus entornos culturales y familiares, generando en la mayoría de los casos reacciones positivas referentes a los procesos de enseñanza-aprendizaje en los que se ha empleado, tanto a nivel de secundaria como universitario (Román y Martín, 2013). En estudios realizados sobre el uso de códigos QR como recurso de una unidad didáctica se ha observado que sus principales ventajas son el bajo coste de producción, la portabilidad y el acceso instantáneo a la información, siendo sus principales desventajas cuestiones relacionadas con el correcto funcionamiento de internet vía wifi y la necesidad de comprobar que todos los estudiantes tienen acceso a la tecnología necesaria para emplear el recurso (Sandoval, 2016), teniendo en cuenta que, con acceso a internet, tanto la codificación como la descodificación de los códigos QR pueden hacerse de modo gratuito.

4.4.3. La edición de imágenes como recurso didáctico

Los programas de edición de imágenes empleados como recurso en procesos de enseñanza-aprendizaje permiten la manipulación y construcción de imágenes de forma más rápida y sencilla que los tradicionales recursos didácticos manipulativos, de los que no dejan de ser una actualización complementaria, haciendo posible que los estudiantes sean conscientes del proceso a través del cual construyen un significado, ya que conocen el estado de una imagen antes y después de ser manipulada, pudiendo retrotraerse al estado inicial con rapidez, lo que les permite contemplar todo el proceso, reflexionar sobre él y aumentar de ese modo su multialfabetización al convertirse, no sólo en espectadores, sino también en generadores de contenidos (Buckingham, 2015).

4.4.4. Mapas interactivos y geolocalización

La geolocalización como recurso didáctico permite la mejora del aprendizaje situado al posibilitar la asociación de contenidos digitales a una ubicación física. La creación de mapas interactivos temáticos generados de manera colaborativa mediante la combinación de datos y la posibilidad de comunicación gracias al Sistema de Posicionamiento Global (en adelante GPS por sus siglas en inglés, *Global Positioning System*) resultan especialmente motivadores para los estudiantes al generar entornos de aprendizaje más ricos y atractivos (Gros y Forés, 2013).

En la actualidad, la geolocalización y la realidad aumentada se emplean como recursos didácticos combinados muy a menudo, debido a la posibilidad conjunta que ofrecen de creación de entornos virtuales situados en el mundo real y ubicados mediante geolocalización (Leiva y Moreno, 2015).

4.5. *El arte prerrománico asturiano*

El arte monumental prerrománico asturiano data de los siglos VIII y IX y se basa parcialmente en el arte arquitectónico romano y el áulico constantiniano, aunque sus prototipos difieren claramente de los modelos anteriores debido a la inclusión de modificaciones derivadas del propio arte de la zona y de la idiosincrasia de los autoproclamados reyes que encargaron su construcción, siendo como eran montañeses y fugitivos de la España musulmana (Bango, 1996).

El arte pictórico con calidades de estucado que se encuentra en el interior de los monumentos se basa en la tradición tardorromana local y destaca por estar pintado sobre los muros con fines decorativos o funcionales y efectos claroscuro. Puertas, jambas, dinteles, ventanas y demás elementos estructurales u ornamentales están a menudo decorados con relieves historiados, motivos florales o simbología local enraizada con los orígenes paganos de la zona (Bango, 1996). Este simbolismo pagano patente en la decoración se explica por la escasa romanización de los pueblos norteños y por el débil y escaso dominio visigodo posterior, de modo que el cristianismo no se instaure oficialmente hasta el reinado de Alfonso II en el siglo VIII, siendo hasta el siglo VI excepcionalmente escasos e incluso cuestionables los restos cristianos encontrados (Barbero y Vigil, citados por Fernández, 1993). El arte decorativo del prerrománico, tanto escultórico como pictórico, presenta patrones geométricos basados en traslaciones, giros y simetrías, como puede verse en las figuras 6 y 7.



Figura 6. Decoración interior de Santullano.

Fuente: lne.es



Figura 7. Ventana de San Miguel de Lillo

Fuente: jdiezarnal.com

Los tesoros y reliquias que se conservan de la época están también repletos de simbolismo y particulares composiciones iconográficas, mostrando una curiosa evolución en los diseños en breves periodos de tiempo, como la que se puede observar en el diseño de la Cruz de los Ángeles, realizada en el año 808, y la Cruz de la Victoria, que data del año 908, ambas reflejadas en la figura 8 (Bango, 1996).



Figura 8. Comparativa entre la Cruz de los Ángeles (808) y la Cruz de la Victoria (908)

Fuente: elaboración propia. Imágenes extraídas de el.tesorodeoviedo.es

Existe cierta controversia acerca del uso real que tenían las edificaciones del prerrománico asturiano. Tradicionalmente se ha supuesto que eran iglesias debido a la influencia clerical que se ejercía sobre los reyes que iniciaron sus construcciones, pero distribuciones poco habituales como la que se encuentra en Santa María del Naranco, conocida por ese nombre desde su posterior conversión a templo, descartan

totalmente que sea una iglesia en origen, aunque tampoco permiten definirla como palacio, siendo la opinión actual que se tratara de una edificación empleada para festejos y otro tipo de actividades lúdicas (Bango, 1996).

4.6. Metodología colaborativa y basada en la realidad

Una vez se ha llegado a la conclusión de que parte importante del problema en los malos resultados obtenidos en matemáticas en España tiene una base metodológica, se antoja necesario que la metodología a emplear en la propuesta tenga alta relevancia cultural y alta actividad social, siendo éstas técnicas contrastadas para favorecer el aprendizaje del alumnado (Díaz Barriga, 2003).

Estas características se dan por definición en el aprendizaje basado en proyectos (en adelante ABP), metodología desarrollada por Cristina Pelusca y enfocada inicialmente a los estudios de arquitectura, lo que permite establecer un nexo con el estudio del arte prerrománico.

El ABP es una metodología cimentada en el constructivismo mediante la cual los alumnos y alumnas interactúan de forma grupal con su entorno cultural, potenciando así tanto su propio desarrollo cognitivo como el de sus compañeros y compañeras (Vygotsky, 1995).

Una medida de la importancia del trabajo en equipo se basa en las experiencias de Piaget, contrastadas posteriormente por Vygotsky. Piaget, tras estudiar el comportamiento de niños y niñas, desarrolla su teoría sobre el egocentrismo infantil, según la cual sólo existen dos tipos de conversaciones entre niños: las egocéntricas y las socializadas. Cuando se emplea el lenguaje egocéntrico, la persona habla sólo sobre sí misma, sin tener en cuenta al interlocutor y sin esperar respuesta o incluso atención. El empleo del lenguaje socializado, por el contrario, busca la comunicación en el grupo, tratando de obtener un intercambio de información, sea cual sea el cariz de la conversación. Además, parte de los pensamientos egocéntricos quedan incluso sin ser formulados debido a que, por su propia naturaleza egocéntrica, son incomunicables. Para que puedan ser expresados necesitan de la capacidad de adopción de un punto de vista externo (Piaget, 1923, citado por Vygotsky, 1995). El lenguaje egocéntrico no comienza a desaparecer hasta que surge la necesidad y el deseo de comunicarse con otros seres humanos. Vygotsky, tratando de comprobar la veracidad de los resultados obtenidos por Piaget en sus experimentos, opta por repetirlos, obteniendo resultados prácticamente idénticos, aunque su explicación teórica acerca del porqué de este hecho se basa en el empleo del lenguaje egoísta cada vez que aparece una dificultad

inesperada, y que este tipo de lenguaje es un intento de manifestar públicamente la aparición de esa dificultad con conceptos que no se poseen debido a lo inesperado del hecho, lo que lleva a un intento de comunicación con otras personas (Vygotsky, 1995).

De estos hechos se desprende que, frente a la aparición de la adversidad en la realidad, el ser humano necesita de la comunicación con el grupo, cosa que no puede lograr si no es capaz de dominar el lenguaje socializado.

4.7. Estudios sobre competencias matemática y aprender a aprender, inteligencias y metacognición

Las matemáticas, basándose en las ideas lógicas sobre las que se sustentan, son un pilar fundamental para la competencia aprender a aprender, en tanto que ésta se fundamenta en la metacognición o capacidad de conocer y regular los propios procesos de aprendizaje. El dominio del lenguaje (incluyendo el lenguaje matemático), del cálculo aritmético, de los procesos lógicos deductivos e inductivos y de la capacidad de modelización de problemas favorecen y complementan el desarrollo de la competencia aprender a aprender, siempre y cuando el método de enseñanza-aprendizaje seleccionado priorice el aprendizaje profundo y otorgue protagonismo al razonamiento de los estudiantes frente a la clase magistral (Peñalva, 2010). En concreto, se debe evitar en la medida de lo posible el uso de presentaciones axiomáticas, clásicas en la enseñanza de matemáticas y útiles si se emplean con fines científicos y definitorios, pero no válidas a la hora de construir aprendizaje realmente significativo (Brousseau, 1986).

Las cadenas de razonamiento, que muestran el proceso deductivo recorrido, son más esclarecedoras acerca de la capacidad intelectual de una persona que la exactitud de una respuesta (Piaget, citado por Gardner, 1983), mostrando también una representación más realista de la zona de desarrollo potencial de esa persona que si simplemente reprodujese un dato memorizado previamente (Vygotsky, citado por Gardner, 1983).

La noción de que la lógica es unitaria se ha demostrado errónea observando fenómenos propios de la mecánica cuántica, cuya explicación es totalmente contraintuitiva (Okón, 2016) e ilógica (Morata, 2015) según los parámetros por los que el ser humano se ha regido tradicionalmente. De este modo, partiendo de la teoría de las inteligencias múltiples desarrollada por Howard Gardner, la inteligencia lógico-matemática pierde su concepción de unicidad y pasa a relacionarse de modo más

abierto con el resto de inteligencias, siendo una de ellas la inteligencia espacial, cuyo desarrollo depende de cualidades organizativas que siguen también patrones de razonamiento lógico y sirve como base comparativa entre dos elementos físicos, entre dichos elementos y sus representaciones simbólicas y entre esas representaciones simbólicas (Gardner, 1983), lo que hace que la inteligencia espacial ocupe un puesto elevado entre el resto de inteligencias, a la par que la lógico-matemática, suponiendo que las consideremos distintos tipos de inteligencia y no dos formas de expresión de una misma entidad como opinaba Piaget (Gardner, 1983). Cabe destacar el hecho de que se ha probado que la inteligencia espacial no depende totalmente del sentido de la vista, ya que, aunque características físicas como el color o la perspectiva son respectivamente imposibles o muy complejas de percibir para una persona invidente, otras como la contemplación de un cuadro se han mostrado posibles gracias a conversiones entre registros semióticos (Kennedy, 1974), lo que se debe tener en cuenta a la hora de tratar con estudiantes con necesidades educativas especiales.

La metacognición, definida por John Flavell en 1976 como conocimiento de nivel superior, sigue los principios desarrollados por Piaget en lo que respecta a la reflexión como método de resolución de problemas, pasando ésta de ser automática en origen a poder llegar a ser regulada de modo activo y consciente. La metacognición, base de la competencia aprender a aprender, se ha mostrado como un elemento fundamental en el aprendizaje, generando resultados pobres en aquellos estudiantes que no son capaces de dominarla (Gaibao, Murcia et al, 2012), de modo que la potenciación de este elemento mediante la enseñanza de matemáticas se muestra como algo positivo.

4.8. Evaluación: la rúbrica y la matriz DAFO

La forma en la que una evaluación es planteada condiciona obligatoriamente el aprendizaje de los estudiantes, por lo que resulta chocante que en la investigación de los procesos de enseñanza-aprendizaje no se dé una mayor relevancia al método de evaluación. Los métodos tradicionales como los exámenes con preguntas a desarrollar y los test han demostrado su utilidad, pero sólo permiten comprobar el grado de aprendizaje estratégico o superficial que la persona a evaluar demuestra, quedando el aprendizaje profundo, se emplee o no, sin indicadores válidos demostrables cuando se usan los mencionados métodos de evaluación. El empleo de la rúbrica corrige ese defecto al proporcionar al evaluado los criterios por los que se guía el evaluador, así como indicadores del método a seguir para resolver las cuestiones planteadas. También ayuda a desarrollar la metacognición, debido a que la persona evaluada,

conocedora de los fines buscados, debe organizar sus propios procesos cognitivos para alcanzar tales fines, y es un apoyo importante en el desarrollo del pensamiento crítico, ya que enfrenta las ideas preconcebidas surgidas de la lectura de los enunciados con los fines reales, permitiendo comparar ambas percepciones y ayudando a distinguir lo considerado importante de lo considerado superfluo. La rúbrica, o plantilla de evaluación, aporta al estudiante ideas sobre el trabajo realizado más allá de la simple nota obtenida y permite al evaluador organizar y secuenciar los procesos en enseñanza-aprendizaje que desea desarrollar. Respecto a su elaboración, hay diversidad de opiniones, desde las que defienden que la elabore totalmente el docente hasta las que prefieren que evaluado y evaluador la elaboren conjuntamente, pasando por las que ven necesario que se deje un espacio para el debate sobre la propia rúbrica por parte del alumnado (Conde y Pozuelos, 2007).

Antes de enfrentar a los estudiantes al proceso de evaluación mediante rúbrica, conviene explicarles en qué consiste y enseñarles ejemplos que les ayuden a familiarizarse con ellas. En el caso del trabajo en grupo, se ha considerado que es adecuada una escala de valoración de 4 columnas, con 3 categorías que implican distintos grados de aprobado y una categoría que implica suspenso (Chica, 2011).

En lo que respecta al método DAFO (Debilidades, Amenazas, Fortalezas y Oportunidades), surge como un método estratégico de planificación que integra el nivel socioeconómico de los agentes implicados en el entorno, la concepción del territorio como algo más que un espacio físico y la consideración de objetivo y estrategias en sentido dinámico y adaptativo respecto a un entorno cambiante (Gil, 2001). En lo que se refiere a la práctica educativa, el método DAFO se basa en el planteamiento de cuestiones que diagnostiquen la situación presente, proyecten situaciones futuras y prevean acciones posibles teniendo en cuenta condicionantes, tanto negativos como positivos, que puedan influir en las acciones a seguir. Estas cuestiones se basan en criterios internos (Debilidades y Fortalezas) y externos (Amenazas y Oportunidades). Esto permite el empleo de conceptos teóricos alternativos y la observación de problemáticas desde nuevos ángulos, en lo que se define como una nueva cultura de organización del trabajo (Colás y Pablos, 2004).

5. Propuesta didáctica

5.1. Marco legal

5.1.1. Objetivos para ESO

Para la ESO, al igual que para Bachillerato, se especifican unos objetivos generales a alcanzar una vez terminada cada una de las etapas.

Por una cuestión de afinidad temática, se han seleccionado estos objetivos del Boletín Oficial del Principado de Asturias, aunque la propuesta no se ciñe a una región concreta, sino que se podría llevar a cabo en cualquier comunidad autónoma. Los objetivos pueden verse en la tabla 2 (D 43/2015, del 10 de junio).

Tabla 2. Objetivos generales de la ESO a nivel de programación didáctica

Objetivos de programación didáctica para la ESO	Objetivo general de la materia	Objetivo general de la etapa
1. Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a las demás personas, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.		X
2. Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.	X	
3. Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos y ellas. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que spongán discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.		X
4. Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con las demás personas, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.		X
5. Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.	X	
6. Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.	X	
7. Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en su persona, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.	X	

8. Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, en su caso, en la lengua asturiana, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.	X	
9. Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.		X
10. Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de otras personas, así como el patrimonio artístico y cultural.	X	
11. Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de otras personas, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.		X
12. Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.	X	
13. Conocer y valorar los rasgos del patrimonio lingüístico, cultural, histórico y artístico de Asturias, participar en su conservación y mejora y respetar la diversidad lingüística y cultural como derecho de los pueblos e individuos, desarrollando actitudes de interés y respeto hacia el ejercicio de este derecho.	X	

Fuente: elaboración propia, a partir del Decreto 43/2015, del 10 de junio.

Cabe destacar el hecho de que varios de los objetivos marcados como “objetivos generales de la materia” pueden ser compartidos por otras materias, pero se ha optado por señalarlos como objetivos de las matemáticas debido a que sin su correcto dominio no se pueden alcanzar plenamente.

5.1.2. Competencias generales

Las competencias clave se recogen en la tabla 3 (art. 2.2, RD 1105/2014, de 26 de diciembre), donde se puede ver su relación con la enseñanza de matemáticas. La legislación al respecto dice explícitamente que se potenciarán de modo especial las competencias en comunicación lingüística, matemática y básicas en ciencia y tecnología.

Tabla 3. Competencias clave y su relación con las matemáticas.

Competencias	Aspectos trabajados en las matemáticas
Comunicación lingüística	<p>Expresión oral y escrita en la formulación y exposición de ideas, así como en su comprensión y argumentación a favor o en contra de diversas hipótesis.</p> <p>Empleo de lenguaje sintético, simbólico, preciso y abstracto.</p> <p>Permite cuantificar la realidad para una mejor interpretación.</p>
Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología	<p>Todo el currículo de la materia contribuye a la adquisición de esta competencia. La ciencia y la tecnología no pueden comprenderse sin el correcto dominio de la competencia matemática.</p>
Competencia digital	<p>Uso de calculadoras, ordenadores y programas informáticos.</p>
Aprender a aprender	<p>Elaboración de estrategias para el análisis y la resolución de problemas.</p> <p>La inteligencia metacognitiva se ve especialmente potenciada por la conjunción de esta competencia y las matemáticas.</p>
Competencias sociales y cívicas	<p>Obtención de criterios científicos para la predicción y toma de decisiones en el ámbito social y ciudadano.</p> <p>Comprensión de información gráfica y estadística de los medios de comunicación.</p>
Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor	<p>Planificación, valoración y toma de decisiones.</p> <p>Heurística.</p>
Conciencia y expresión cultural	<p>Las matemáticas en sí mismas son tanto una aportación cultural como una referencia para su aprendizaje.</p> <p>La geometría en concreto es fundamental para la comprensión de determinadas expresiones culturales.</p>

Fuente: elaboración propia a partir del artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre.

5.1.3. Temas transversales

El currículo de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas se encuentra organizado en cinco bloques que forman un todo integrado y que debe ser tratado como tal. Estos bloques son: Procesos, Métodos y actitudes en matemáticas, Números y Álgebra, Geometría, Funciones y Estadística y Probabilidad.

De estos bloques, Procesos, métodos y actitudes en matemáticas es un bloque que se desarrolla a lo largo de toda la etapa y que debe ser considerado transversal. Su desarrollo debe ir paralelo al del resto de bloques ya que es el eje fundamental de la materia al basarse en principios matemáticos básicos como son la resolución de problemas, la investigación, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para el trabajo científico y el uso de medios tecnológicos.

También serán temas transversales, aunque no específicos de matemáticas: educación moral y cívica, para la paz, para la salud, para la igualdad entre sexos, ambiental, sexual, del consumidor, vial e intercultural. Por ello, se seguirán y promoverán conductas que potencien estas educaciones y no se consentirán actitudes que vayan encaminadas a impedir su consecución. Basándose en esto, cuando se construyan grupos de trabajo se harán mixtos sexual y culturalmente siempre que sea posible, al tiempo que se adaptarán temas relacionados con la asignatura a los temas transversales.

5.1.4. Contenidos del bloque Geometría

Los contenidos a tratar en el bloque de Geometría en la asignatura seleccionada para la presente propuesta de intervención pueden verse en la tabla 4.

Tabla 4. Contenidos del Bloque Geometría de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO

Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas (3º de ESO)
Bloque 3. Geometría
<ul style="list-style-type: none"> - Geometría del plano. Segmentos y ángulos en las figuras geométricas. - Lugar geométrico. Determinación de figuras geométricas planas a partir de ciertas propiedades. - Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. - Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías en el plano. - Uso de los movimientos para el análisis y la representación de figuras y representaciones geométricas. - Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza en el arte y en los objetos cotidianos. - Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros. - La esfera. Intersecciones de planos y esferas. - El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto. - Resolución de problemas de interpretación de mapas y planos. - Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Fuente: elaboración propia a partir del Currículo de ESO publicado por la Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias, 2015.

5.2. Diseño de la propuesta

El diseño de esta propuesta didáctica se engloba en el segundo ámbito curricular, dentro del cual estaría situada en el nivel 3.

Se pretende trabajar el bloque Geometría en su totalidad mediante una serie de actividades. En el Anexo I se puede ver dicho bloque junto con sus contenidos, criterios de evaluación y estándares evaluables. También se ha incluido el bloque Procesos, métodos y actitudes en matemáticas debido a su carácter transversal, por lo que debe trabajarse en todos los bloques que componen la asignatura.

5.3. Cronograma de la propuesta, etapas y metodología

La actividad se realizará en grupos de 2-3 personas, formados del modo más heterogéneo posible, a lo largo de varias sesiones definidas posteriormente en cada actividad.

Las actividades se han nombrado en latín debido a que éste era el idioma culto empleado durante la época histórica en la que se desarrolla el arte prerrománico, pudiendo encontrarse inscripciones en ese idioma en muchos de los monumentos que se conservan hoy en día. De este modo se trabajan especialmente las competencias comunicación lingüística y conciencia y expresión cultural. Para la correcta resolución de las actividades cada grupo debe superar una serie de etapas, las cuales se describen a continuación:

1. Trabajo con conceptos geométricos estudiados en el bloque Geometría.

La arquitectura prerrománica, como se puede ver en el Anexo X, presenta los conceptos a estudiar en este bloque: semejanza, traslación, giro y simetría en el plano, así como el uso de estos movimientos para la definición de figuras y elementos geométricos y aplicaciones del teorema de Tales. Los grupos deberán trabajar sobre una serie de imágenes que reflejan determinadas obras del arte prerrománico asturiano en las que tendrán que identificar y manipular transformaciones geométricas de cara a obtener un mayor dominio sobre ellas al verlas reflejadas sobre una base real, lo que permitirá crear una estructura sobre la que apoyar sus conocimientos. En la figura 9 se pueden ver ejemplos de los conceptos geométricos a estudiar.

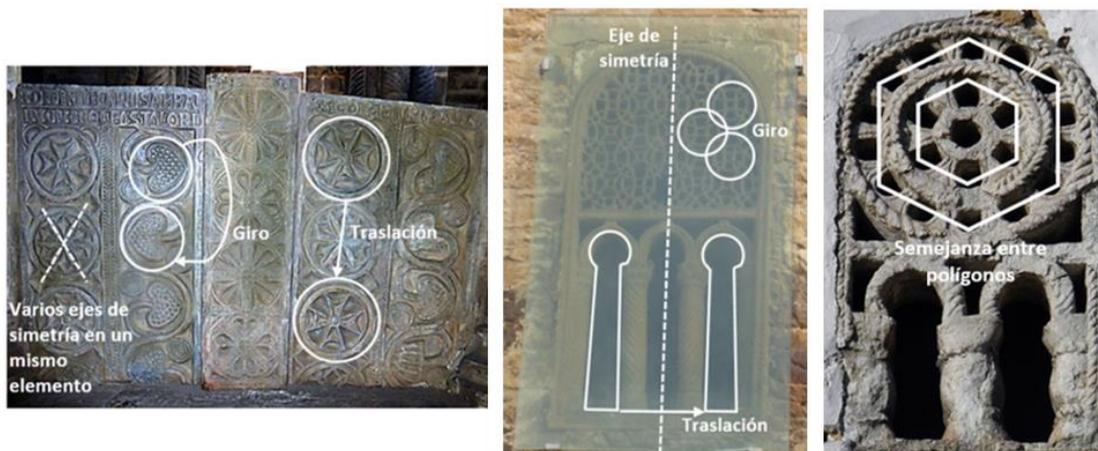


Figura 9. Simetría, giro y traslación en el cancel de Santa Cristina de Lena y en la celosía de San Miguel de Lillo y semejanza entre polígonos en la celosía de San Miguel de Villardevayo

Fuente: elaboración propia.

2. Edición de imágenes de la geometría específica proporcionada.

Se pedirá a los grupos que editen las imágenes que se les proporcionan. Para ello, valdrá cualquier programa de edición de imágenes que incorpore el ordenador, como puede ser *Paint* o la propia hoja de cálculo, los cuales suelen formar parte de los paquetes comúnmente instalados en los ordenadores, como sería el caso del paquete *Microsoft Office*. En caso de no disponer de estos paquetes, se puede descargar de modo gratuito algún programa que posea las características de funcionamiento necesarias. Una buena elección es el programa *Gimp*, cuya descarga puede hacerse desde el siguiente enlace <https://the-gimp.softonic.com/>.

3. Generar y descifrar códigos QR.

En ocasiones se pedirá a los grupos que generen o descifren códigos QR. Una de las primeras acciones que deben realizar es descifrar uno de ellos para obtener la contraseña que permita el acceso a la hoja de cálculo, así como una de las últimas será generar un nuevo código QR que codifique la nueva contraseña de acceso a la hoja de cálculo. Además, durante las actividades los grupos tendrán que generar o descifrar imágenes codificadas en forma de códigos QR.

Se pueden codificar imágenes o textos en línea sin necesidad de descargar programas, por ejemplo, desde la página <http://www.codigos-qr.com/generador-de-codigos-qr/>. Para descifrar los códigos QR se pueden subir directamente a internet sin necesidad de descargar ningún programa, como sucede en la página <http://www.codigos-qr.com/lector-qr-online/>, pero es preferible la descarga de un programa que permita la lectura de los códigos desde un dispositivo que disponga de cámara. Se puede descargar un lector de modo gratuito desde la página <http://www.quickmark.com.tw/En/basic/downloadMain.asp>.

Al convertirse en generadores de información y emplear los medios digitales como territorio de expresión multimedia se está trabajando la competencia digital.

4. Generar y cambiar la contraseña de la hoja de cálculo. Trabajo con la hoja de cálculo.

Para cambiar la contraseña de la hoja de cálculo, cada grupo se encontrará, tras descifrar el código QR, frente a tres afirmaciones, dos de las cuales son verdaderas y una de ellas falsa. Deberán buscar información por medios convencionales, como revistas, periódicos o programas de televisión, o tecnológicos, realizando búsquedas en internet. Esto favorece su capacidad de distinguir información fiable, así como les permite interactuar con esa misma información y las personas que la han generado, lo que constituye dos de las metáforas empleadas para definir la Web 2.0: la biblioteca universal y el ecosistema artificial, permitiendo así una mejora de su multialfabetización en general y de su alfabetización informacional en particular.

Además, mediante el análisis de las afirmaciones a estudiar, se potenciará también la competencia en conciencia y expresión cultural, así como el sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor, necesario para gestionar conocimientos o habilidades enfocados a la consecución de objetivos.

Se debe cambiar la contraseña por una nueva a descifrar por otro grupo. Para ello se deben generar las tres afirmaciones partiendo de las mismas bases con las que se generaron las anteriores. Debido a esto, los miembros del grupo potenciarán principalmente sus competencias en conciencia y expresión cultural y sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor, pudiendo trabajar también otras competencias dependiendo de lo que elijan preguntar.

En lo que respecta a la hoja de cálculo, se trabajarán en ella utilidades poco comunes dentro de este tipo de programas, aunque muy útiles, como el trabajo con vectores o la edición de imágenes, buscando que el alumnado descubra nuevas opciones de manejo. Generalmente, la hoja de cálculo suele formar parte del paquete *Microsoft Office*, pero, de no tener este paquete instalado en los ordenadores, puede descargarse una hoja de cálculo de forma gratuita en la dirección <https://www.openoffice.org/es/descargar/>.

5. Geolocalización

Cada grupo debe geolocalizar los lugares en los que se ubican las obras con las que han trabajado en las actividades, para lo que deberán emplear un mapa interactivo, lo que implica el uso de un ordenador con acceso a internet. El mapa interactivo que permita la medición por coordenadas de forma gratuita de uso más extendido es *Google Maps*, al que se puede acceder a través del siguiente enlace <https://www.google.com.br/maps>.

En este apartado se potenciarán la competencia digital y la competencia matemática y básica en ciencia y tecnología al tener que manejar coordenadas de longitud y latitud en la geolocalización, así como la competencia conciencia y expresión cultural.

6. Evaluación del trabajo de otros grupos y *feedforward*

Cada grupo evaluará el trabajo de otro grupo. Esta evaluación consistirá en explicar a los evaluados qué podrían haber hecho para mejorar la resolución de las actividades, estimulándose así la idea del empleo de *feedforward* en las evaluaciones.

Debido al carácter evaluativo de esta parte de la actividad, se trabajarán todas las competencias anteriormente nombradas, así como la competencia social y cívica al tener que evaluar de forma justa a sus propios compañeros. Tras la evaluación se hará un breve debate en el que comentar cuestiones referentes a todas las actividades.

5.3.1. Acciones previas a la realización de las actividades

El punto de partida requiere por parte del profesor las siguientes acciones:

- Generar una hoja de cálculo con contraseña. La hoja debe tener ocho pestañas con los nombres de cada una de las actividades evaluables.
- Generar un código QR con tres afirmaciones, de tal forma que dos de ellas sean verdaderas y una falsa. El dato clave que se encuentre en la falsa, una vez corregido, debe ser la contraseña que permite desbloquear la hoja de cálculo. Es conveniente que las afirmaciones sean de temas que interrelacionen la actualidad con asignaturas concretas del curso, ya que de ese modo se obtiene una mayor relevancia cultural, la cual, combinada con la actividad social derivada de la agrupación, es clave para conseguir un aprendizaje profundo (Díaz Barriga, 2003).
- Generar una carpeta para cada grupo en la que se alojen los archivos de la hoja de cálculo y el código QR anteriormente nombrados, así como los enunciados de las actividades y las rúbricas de evaluación. Estas carpetas se alojarán a su vez en una carpeta compartida para facilitar su acceso desde el resto de ordenadores y la generación de hipervínculos cuando sea necesaria.

5.3.2. Actividades de la propuesta de intervención

Actividad 0: *Gratam Regnum Asturorum*

Nombre: la traducción del nombre de la actividad es “bienvenidos al Reino de los astures”, el cual se extendió desde el 718, fecha de elección de Pelayo como líder rebelde frente al Califato Omeya hasta el 925, en el que Fruela II une los territorios al Reino de León. Es en este periodo en el que se desarrolla el arte prerrománico a tratar en las siguientes actividades.

Contenidos: patrimonio arqueológico, restos y vestigios de época prerromana existentes en Asturias.

Recursos: ordenador, hoja de cálculo, conexión a internet, lector de códigos QR.

Desarrollo: actividad introductoria en la que se definirán los grupos y se asignará a cada uno una carpeta de trabajo en la que se incluyan los archivos definidos anteriormente. Se explicará brevemente el funcionamiento de las siguientes actividades y se proyectará el vídeo “Arte prerrománico asturiano”, disponible en <https://www.youtube.com/watch?v=vbNKG3qeF88>, en el que se explican las nociones básicas del arte prerrománico.

Una vez visto el vídeo, se pasará a descifrar el código QR para obtener la contraseña de acceso a la hoja de cálculo. En la figura 10 se pueden ver los pasos a seguir en esta fase de la actividad.

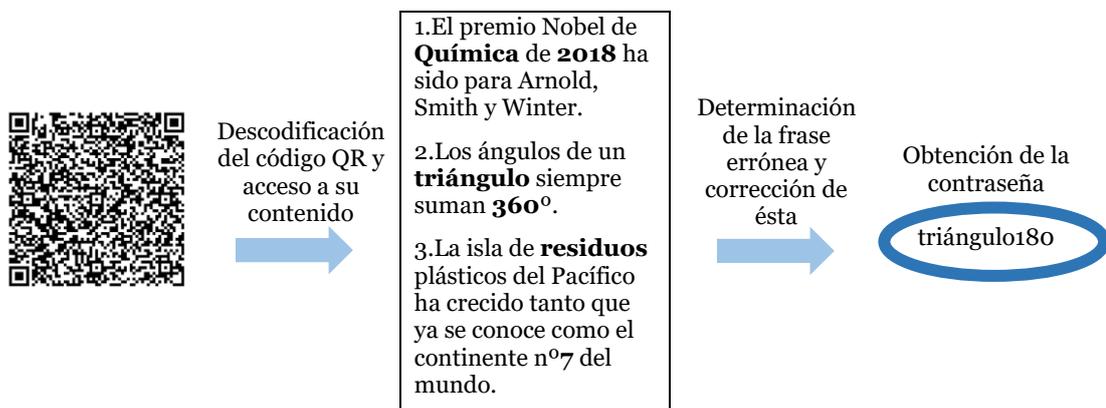


Figura 10. Pasos a seguir para la obtención de la contraseña de la hoja de cálculo

Fuente: elaboración propia.

Temporalización: 1 sesión.

Evaluación: no evaluable.

Actividad 1: *Per speculum*

Nombre: el nombre es un fragmento de un pasaje de “El nombre de la rosa”, de Umberto Eco (1980), en el que se hace referencia a descifrar enigmas. Su traducción es “a través del espejo” y se ha seleccionado para la actividad en la que se trabajará la simetría debido a que los espejos siempre forman imágenes simétricas con lo que se refleja en ellos.

Contenidos: simetría axial y central en el plano, reconocimiento de este tipo de movimiento en el arte, representación geométrica, uso de herramientas tecnológicas en el estudio de la geometría.

Recursos: ordenador, hoja de cálculo, editor de imágenes, conexión a internet.

Desarrollo: se hará una breve exposición a modo de recordatorio al inicio de la actividad para reforzar los conceptos de simetría axial y central en el plano.

En la correspondiente pestaña de la hoja de cálculo cada grupo encontrará las siguientes imágenes, así como el enunciado.



Figura 11. A1: pinturas murales de Santullano

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/santullano.html>



Figura 12. A1: ventana de San Lorenzo de Cortina
Fuente: <https://bit.ly/2SOmpRf>



Figura 13. A1: ventana de San Martín de Salas
Fuente: <https://bit.ly/2M2NNZb>



Figura 14. A1: dintel de ventana trífora de San Martín de Salas
Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-san-martin-de-salas/1360.html>

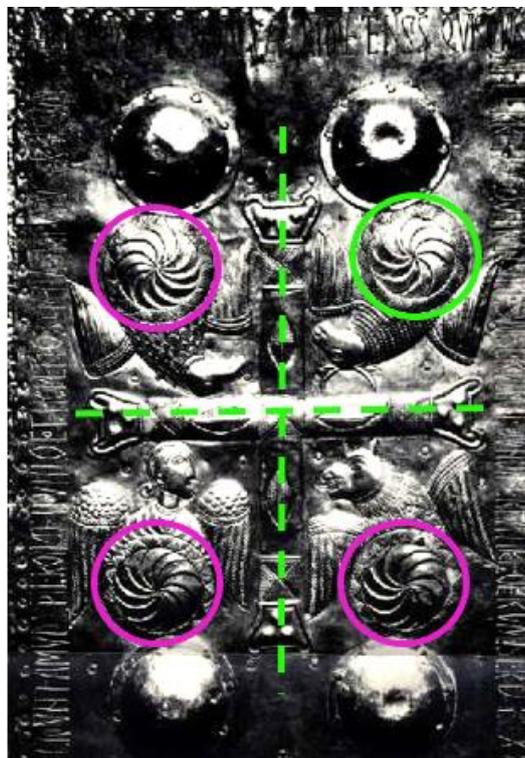


Figura 15. A1: base de la Arqueta de las Ágatas
Fuente: <http://mundodelahistoriadelarte.blogspot.com/2013/04/la-caja-de-las-agatas.html>

La actividad consiste en los siguientes pasos:

- En la imagen de las pinturas murales de Santullano se han seleccionado 4 elementos marcando sus bordes en color verde. Indicad si hay simetría entre cada una de las seis parejas de elementos, independientemente de su color y sus motivos interiores, y, si la hay, definid si es axial o central y dibujad, mediante un programa de tratamiento de imágenes, los ejes o planos de simetría existentes. Emplead una copia de la imagen para cada simetría encontrada, generad una composición en la que aparezcan todas las imágenes, codificadla en forma de código QR y pegad el código al lado de la imagen en la misma hoja de cálculo.
- Las imágenes de las ventanas bíforas de San Lorenzo de Cortina y San Martín de Salas presentan simetría central. Examinad cada imagen en su conjunto y sus elementos por separado y dibujad todos los planos de simetría encontrados sobre una copia de la imagen. Pegad la copia editada junto a la original.
- En la imagen del dintel de la ventana trífora de San Martín de Salas, ¿es posible generar todo el dintel partiendo de la figura encerrada en el triángulo verde y empleando sólo siete simetrías? Si es posible, indicad mediante imágenes los contornos de las figuras a generar en cada paso y el lugar aproximado de los ejes de simetría. Si no es posible en siete, hacedlo en las que podáis. Guardad una composición que incluya todas las imágenes necesarias y pegadla al lado de la imagen dada en la hoja de cálculo.
- En la base de la Arqueta de las Ágatas, empleando los ejes de simetría definidos en línea verde a trazos y partiendo de la figura encerrada en el círculo verde, ¿es posible generar las figuras encerradas en los círculos violetas? ¿Cuántas simetrías se necesitan? Escribid vuestras conclusiones al lado de la imagen.

Temporalización: 1 sesión.

Evaluación: mediante rúbrica de evaluación, disponible en el Anexo II.

Actividad 2: Vector

Nombre: la palabra vector es de origen latino y hace referencia a aquel que transporta algo o a alguien.

Contenidos: vectores, uso de herramientas tecnológicas en el estudio de la geometría.

Recursos: ordenador, hoja de cálculo.

Desarrollo: esta actividad está enfocada al manejo de vectores en la hoja de cálculo, lo que será necesario para la actividad de giros y la de traslaciones. Se comenzará con una breve exposición de los fundamentos básicos de los vectores. En la correspondiente pestaña de la hoja de cálculo se encontrarán las siguientes imágenes, así como el enunciado y la guía rápida de manejo de vectores en la hoja de cálculo del Anexo VIII.



Figura 16. A2: acróstico de Silo de Santianes de Pravia

Fuente:
<http://www.jdiezarnal.com/santianesdepravia.html>

T	I	C	E	F	S	P	E	C	N	C	E	P	S	F	E	C	I	T
I	C	E	F	S	P	E	C	N	I	N	C	E	P	S	F	E	C	I
C	E	F	S	P	E	C	N	I	R	I	N	C	E	P	S	F	E	C
E	F	S	P	E	C	N	I	R	P	R	I	N	C	E	P	S	F	E
F	S	P	E	C	N	I	R	P	O	P	R	I	N	C	E	P	S	F
S	P	E	C	N	I	R	P	O	L	O	P	R	I	N	C	E	P	S
P	E	C	N	I	R	P	O	L	I	L	O	P	R	I	N	C	E	P
E	C	N	I	R	P	O	L	I	S	I	L	O	P	R	I	N	C	E
P	E	C	N	I	R	P	O	L	I	L	O	P	R	I	N	C	E	P
S	P	E	C	N	I	R	P	O	L	O	P	R	I	N	C	E	P	S
F	S	P	E	C	N	I	R	P	O	P	R	I	N	C	E	P	S	F
E	F	S	P	E	C	N	I	R	P	R	I	N	C	E	P	S	F	E
C	E	F	S	P	E	C	N	I	R	I	N	C	E	P	S	F	E	C
I	C	E	F	S	P	E	C	N	I	N	C	E	P	S	F	E	C	I
T	I	C	E	F	S	P	E	C	N	C	E	P	S	F	E	C	I	T

Figura 17. A2: reconstrucción del acróstico de Silo

Fuente: <https://bit.ly/2QFURvg>

La actividad se basa en el acróstico de Silo de Santianes de Pravia. Partiendo de su reconstrucción y sabiendo que en la inscripción descifrada se puede leer la expresión “*Silo princeps fecit*”, generad dos conjuntos distintos de vectores que, partiendo de la letra S central (marcada en verde), recorran todas las letras de la expresión. Obtened la suma de cada conjunto de vectores y definid el ángulo que forman dichos vectores con una línea horizontal. Utilizad la guía rápida para el manejo de vectores en la hoja de cálculo para la realización de la actividad. Editad una copia de la imagen para representar los vectores y pegad ésta junto a la original. Escribid los resultados obtenidos junto a la imagen editada.

Temporalización: 1/2 sesión.

Evaluación: actividad no evaluable.

Actividad 3: Axis

Nombre: significa “eje”, como los ejes de giro que se trabajarán en esta actividad, pero no sólo eso, sino que el axis, primera vértebra completa de la zona cervical, es quien permite el giro lateral del cuello.

Contenidos: giro en el plano, reconocimiento de este tipo de movimiento en el arte, representación geométrica, uso de herramientas tecnológicas en el estudio de la geometría.

Recursos: ordenador, hoja de cálculo, editor de imágenes, lector de códigos QR, conexión a internet.

Desarrollo: se comenzará con una exposición en la que se haga hincapié en los conceptos relacionados con el giro en el plano.

En la correspondiente pestaña de la hoja de cálculo cada grupo encontrará las siguientes imágenes, así como el enunciado.



Figura 18. A3: arco interior de San Miguel de Lillo

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/sanmigueldelillo.html>



Figura 19. A3: celosía de San Miguel de Villardevayo

Fuente: <https://bit.ly/2skmpwH>

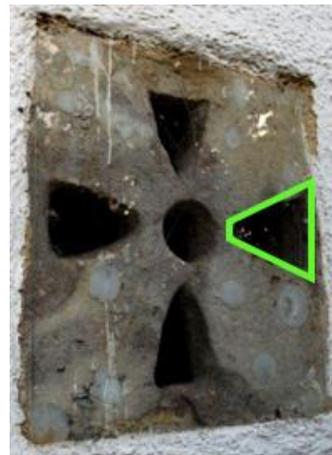


Figura 20. A3: celosía de San Martín del Mar

Fuente: <https://bit.ly/2TK90tu>



Figura 21. A3: cancel de San Francisco

Fuente: <https://bit.ly/2SQ5FZB>

Esta actividad se desarrollará íntegramente en la hoja de cálculo. Para su correcto desarrollo es necesario saber cómo medir ángulos de giro, como se ha practicado en la anterior actividad.

La actividad consiste en los siguientes pasos:

- En la imagen del arco interior de San Miguel de Lillo hay dos figuras encerradas en un círculo verde y otro violeta. Definid el centro de giro de cada una y obtened el ángulo de giro de cada repetición de las figuras. Emplead una copia de la imagen para la figura del círculo verde y otra para la del violeta y pegadlas al lado de la original.
- En las celosías de San Miguel de Villardevayo y San Martín del Mar dibujad el centro de giro y definid el ángulo de giro de las figuras remarcadas en verde en una copia de cada imagen. Pegad las imágenes editadas al lado de las originales.
- En la imagen del cancel de San Francisco hay dos figuras encerradas en una elipse verde y otra violeta. ¿Pueden el resto de figuras similares generarse mediante giros en el plano a partir de las seleccionadas? En caso afirmativo, señalad el centro de rotación e indicad el ángulo de giro. En caso negativo, explicad por qué. Se debe guardar una copia por cada centro de rotación obtenido para cada figura (esta imagen se entregará al grupo en forma de código QR y deberá ser descodificada).



Figura 22. Codificación QR de la imagen del cancel de San Francisco
Fuente: elaboración propia.

Temporalización: 1/2 sesión.

Evaluación: mediante rúbrica de evaluación, disponible en el Anexo III.

Actividad 4: *Traslatio imperii*

Nombre: traducido como “traslado del imperio”, es un concepto referente al movimiento o traslación del centro del poder imperial de un lugar a otro a lo largo del tiempo. Esta actividad está centrada en el estudio de la traslación en el plano.

Contenidos: traslación en el plano, reconocimiento de este tipo de movimiento en el arte, representación geométrica, uso de herramientas tecnológicas en el estudio de la geometría.

Recursos: ordenador, hoja de cálculo, editor de imágenes, conexión a internet.

Desarrollo: se comenzará con una breve exposición a modo de recordatorio de la actividad 2 y de los fundamentos básicos de la traslación en el plano.

En la correspondiente pestaña de la hoja de cálculo cada grupo encontrará las siguientes imágenes, así como el enunciado.



Figura 23. A4: celosía de Santullano
Fuente: <https://bit.ly/2HeorIQ>



Figura 24. A4: cancel de Santianes de Pravia
Fuente: <https://bit.ly/2RMIRN3>

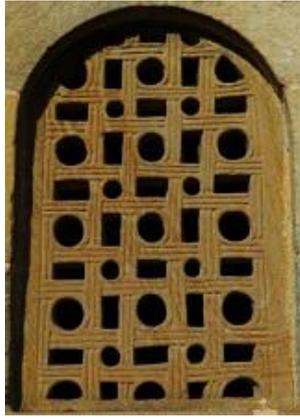


Figura 25. A4: copia de la celosía original de la fachada sur de San Salvador de Valdediós

Fuente: <https://bit.ly/2QEREvV>

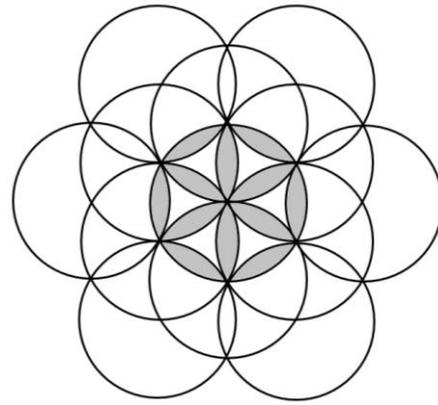


Figura 26. Flor del agua (gris) junto con las circunferencias necesarias para generarla

Fuente: elaboración propia.

La actividad consiste en los siguientes pasos:

- Partiendo de cualquiera de las figuras de la celosía de Santullano, definid al menos dos vectores de distinto módulo cuya repetición permita generar completamente la celosía por traslación. Dibujad los vectores sobre una copia de la imagen y pegad ésta junto a la original.
- A partir del cancel de Santianes de Pravia, sin tener en cuenta el marco, y partiendo de cualquiera de las figuras, definid al menos dos vectores de distinto módulo cuya repetición permita generar el cancel por traslación. En caso de que haya más de un tipo de figura que presente traslación, identificad su contorno marcándolo en rojo mediante el uso de un programa de edición de imágenes empleando una copia de la imagen dada y pegadla junto a la original.
- En la imagen de la copia de la celosía original de la fachada sur de San Salvador de Valdediós, definid el elemento que sirve como base para generar toda la celosía mediante traslación en el plano, sin tener en cuenta que se utilice completamente o no. Marcad el contorno del elemento en rojo mediante un programa de edición de imágenes utilizando una copia de la dada y pegad ésta junto a la original.
- La figura conocida como “flor del agua” es una representación solar muy común en la simbología empleada en la arquitectura y decoración asturiana. Es posible construir una partiendo de una circunferencia mediante el uso de traslaciones en el plano. En la hoja de cálculo o bien en el programa de tratamiento de imágenes, dibujad una circunferencia y definid el vector o

vectores de traslación que permiten generar completamente la flor del agua a partir de la circunferencia inicial. Indicad su contorno una vez finalizada y codificad la imagen en forma de código QR. Pegad el código generado en la hoja de cálculo junto con la imagen que codifica.

Temporalización: 1 sesión.

Evaluación: mediante rúbrica de evaluación, disponible en el Anexo IV.

Actividad 5: *Graeca sunt, non leguntur*

Nombre: traducido como “está en griego, no se lee”, es una nota común en las traducciones de textos latinos por los escribas medievales. Estos textos solían contener palabras en griego que los escribas no sabían traducir, de modo que simplemente las marcaban. Se ha elegido este nombre por Grecia, lugar de nacimiento de Tales de Mileto, en cuyo teorema se basa esta actividad.

Contenidos: teorema de Tales, división de un segmento en partes proporcionales, representación geométrica, uso de herramientas tecnológicas en el estudio de la geometría.

Recursos: ordenador, hoja de cálculo, editor de imágenes, conexión a internet.

Desarrollo: al inicio de la actividad se hará una breve explicación del teorema de Tales y sus usos, haciendo hincapié en el desarrollo original del teorema para el cálculo de la altura de las pirámides.

En la correspondiente pestaña de la hoja de cálculo cada grupo encontrará las siguientes imágenes, así como el enunciado.



Figura 27. A5: cuerpo central de la Cruz de la Victoria

Fuente: <http://catedraldeoviedo.com/camara-santa/>



Figura 28. A5: detalle de la fachada oeste de Santa María del Naranco

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

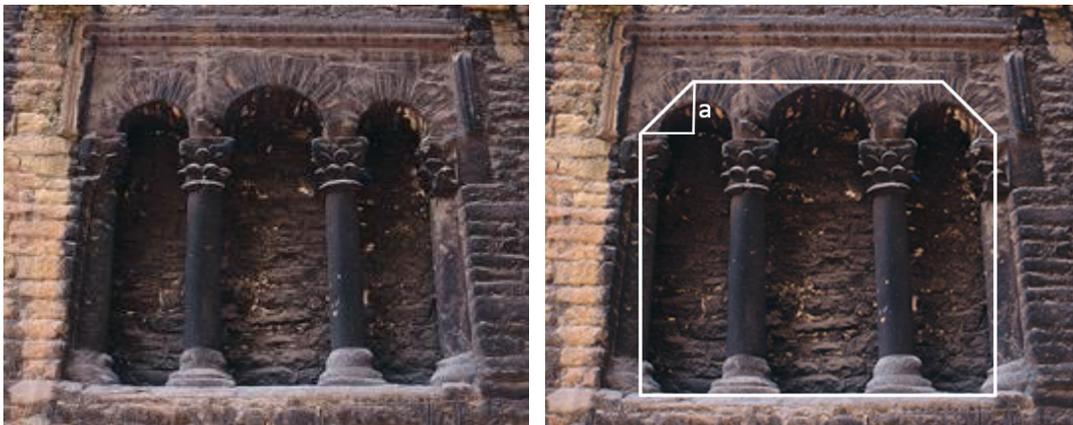


Figura 29. A5: columnas de San Tirso

Fuente: <https://www.turismoasturias.es>

La actividad consiste en los siguientes pasos:

- El patrón de la pedrería que decora el cuerpo central de la Cruz de la Victoria permite definir dos polígonos como los de la imagen. ¿Qué nombre reciben? El lado del polígono de mayor tamaño mide 6 cm. El polígono de menor tamaño encierra un área de $77,25 \text{ cm}^2$ y presenta un perímetro de 32 cm. ¿Cuánto mide el lado del polígono menor? ¿Cuánto miden el área y el perímetro del polígono mayor? ¿Cuál es su razón de semejanza? Si suponemos que el polígono de mayor tamaño constituye la base de un prisma de 10 cm de altura y que el de menor tamaño es la base de un agujero que lo atraviesa de extremo a extremo, ¿cuál es el volumen del prisma resultante? Escribid los resultados obtenidos al lado de la imagen, junto con las explicaciones que consideréis necesarias.

- Los ventanales tríforos de la fachada oeste de Santa María del Naranco permiten definir dos polígonos que los encierran. ¿Qué nombre reciben estos polígonos? El lado inferior del polígono de mayor tamaño mide 4 m, el lado superior mide 3 m, el lado vertical mide 2,5 m y la altura total del polígono es de 3 m. Sabiendo que es simétrico, ¿cuánto miden su área y su perímetro? La razón de semejanza que mantiene con el polígono de menor tamaño es 3. ¿Cuánto miden los lados, área y perímetro del polígono menor? ¿Qué relación hay entre los ángulos de ambos polígonos? Escribid vuestras respuestas al lado de la imagen.
- Las columnas exteriores de San Tirso permiten definir un polígono semejante al definido por los ventanales de Santa María del Naranco. Sabiendo que el segmento $a=30$ cm, calculad por semejanza de triángulos las dimensiones, área y perímetro del polígono de San Tirso comparándolo con cualquiera de los definidos en Santa María del Naranco. Escribid vuestra respuesta y razonamiento al lado de la imagen e insertad dos triángulos con los que representar gráficamente la semejanza. Sobre una copia de la imagen de San Tirso representad gráficamente cómo dividiríais el lado más largo del polígono en cinco partes iguales y pegad la imagen editada al lado de la original.

Temporalización: 1 sesión.

Evaluación: mediante rúbrica de evaluación, disponible en el Anexo V.

Actividad 6: Tótum Revolútum

Nombre: la traducción es “todo revuelto”. Se ha escogido este nombre porque en esta actividad se trabajarán conjuntamente los conceptos geométricos trabajados por separado en las actividades anteriores.

Contenidos: movimientos en el plano (simetría, giro y traslación), semejanza, reconocimiento de estos movimientos en el arte, representación geométrica, uso de herramientas tecnológicas en el estudio de la geometría.

Recursos: ordenador, hoja de cálculo, editor de imágenes, conexión a internet.

Desarrollo: en la correspondiente pestaña de la hoja de cálculo cada grupo se encontrará las siguientes imágenes, así como el enunciado.



Figura 30. A6: inscripción de San Martín de Salas

Fuente: <https://bit.ly/2M2NNZb>

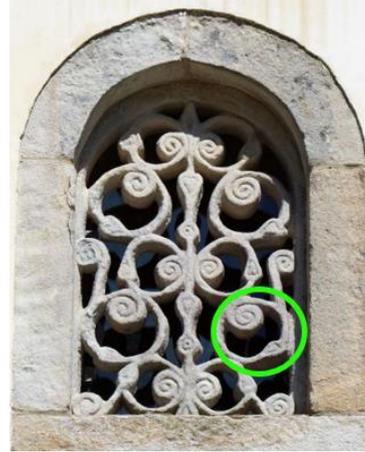


Figura 31. A6: celosía de San Andrés de Bedriñana

Fuente: <https://bit.ly/2AFLvDI>



Figura 32. A6: cancel de Santa Cristina de Lena

Fuente: <https://bit.ly/2Rnahdd>

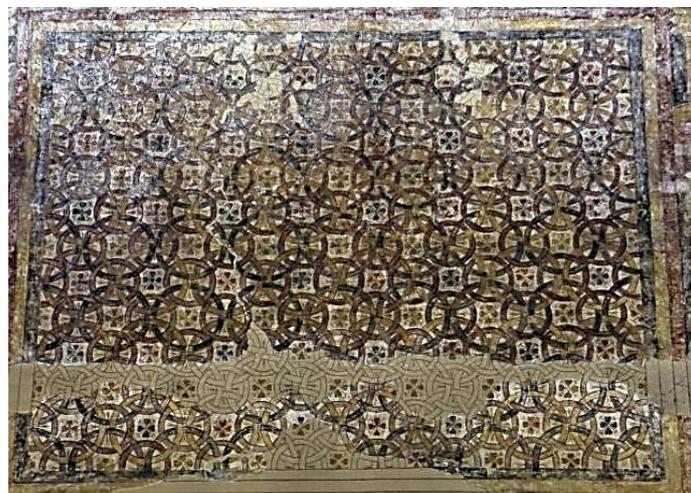


Figura 33. A6: pinturas murales de Santullano

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/santullano.html>

La actividad consiste en los siguientes pasos:

- En la imagen de la inscripción de San Martín de Salas, partiendo de la figura encerrada en la elipse verde, definid al menos dos formas de generar todo el marco empleando las transformaciones geométricas estudiadas. La explicación debe quedar escrita al lado de la figura en la hoja de cálculo.
- ¿Es posible generar los diez motivos circulares de la celosía de San Andrés de Bedriñana partiendo de la figura encerrada en el círculo verde? Emplead simetría, giro, traslación y semejanza. Haced una copia de la imagen para cada transformación que apliquéis, explicando de qué se trata y señalando ejes o centros empleados, así como marcando los contornos generados en cada transformación. Los valores de los grados en las rotaciones y de escalas en las semejanzas deben ser aproximados. Una vez terminado, generad una composición que incluya todas las imágenes empleadas y pegadla junto a la imagen original, así como su codificación en forma de código QR.
- En la imagen del cancel de Santa Cristina de Lena definid al menos 3 giros, 3 simetrías y 3 traslaciones entre los elementos que lo componen. Representad todas las transformaciones pedidas sobre una copia de la imagen original y pegadla junto a ésta.
- En la imagen de las pinturas murales de Santullano definid el menor número de elementos necesarios para generar todo el mural plano, sin tener en cuenta el color y explicad a qué transformaciones habría que someterlos. Señalad el contorno de los elementos seleccionados en una copia de la imagen y pegadla junto a la original.

Temporalización: 1 sesión.

Evaluación: mediante la rúbrica de evaluación, disponible en el Anexo VI.

Actividad 7: *Quo vadis?*

Nombre: literalmente “¿a dónde vas?”. Expresión del latín conocida popularmente por la película homónima de 1951 que da nombre a la actividad centrada en la geolocalización.

Contenidos: longitud y latitud de un punto, uso de herramientas tecnológicas en el estudio de la geometría.

Recursos: ordenador, hoja de cálculo, conexión a internet.

Desarrollo: se comenzará con un breve recordatorio de los conceptos de longitud y latitud.

Conocidos los nombres de las edificaciones que contienen las imágenes trabajadas en las actividades anteriores, obtened la longitud y latitud de su localización y escribidlo al lado de su nombre en la hoja de cálculo.

Una vez finalizado el paso anterior, pensad en las tres nuevas frases que utilizaréis para generar la nueva contraseña de vuestra hoja de cálculo, empleando en cada una de ellas un nombre y un número. Codificad las tres frases en forma de código QR y pegad el nuevo código como imagen en la carpeta de vuestro grupo.

Temporalización: 1 sesión.

Evaluación: conjunta con la actividad 8, mediante rúbrica de evaluación, disponible en el Anexo VII.

Actividad 8: *Citius, altius, fortius*

Nombre: la expresión “más rápido, más alto, más fuerte”, lema inaugural de los primeros Juegos Olímpicos de la Edad Moderna (Atenas, 1896), se ha seleccionado para la actividad centrada en el *feedforward*, por su parecido conceptual en lo que a mejora de resultados se refiere.

Contenidos: revisión de los resultados y búsqueda de otras formas de resolución (contenidos pertenecientes al bloque transversal Procesos, métodos y actitudes en matemáticas).

Recursos: ordenador, hoja de cálculo, editor de imágenes, lector de códigos QR.

Desarrollo: se comenzará definiendo el concepto de *feedforward* a los grupos, haciendo hincapié en la mejora de resultados obtenidos.

A cada grupo se le asignará la carpeta de otro grupo. Tendréis que descodificar el código QR, obtener la contraseña de la hoja de cálculo y, tras observar el trabajo de vuestros compañeros y compañeras, escribir en la pestaña de esta actividad los comentarios que veáis de ayuda para mejorar los resultados obtenidos por el otro grupo, pudiendo también editar imágenes si lo veis necesario. A continuación, se hará un pequeño debate para que cada grupo comente brevemente sus impresiones.

Temporalización: 1 sesión.

Evaluación: conjunta con la actividad 7, mediante rúbrica de evaluación, disponible en el Anexo VII.

5.4. *Recursos necesarios*

Los recursos que necesita la propuesta son principalmente recursos materiales. El *software* a emplear se ha seleccionado teniendo en cuenta que todos los programas informáticos necesarios presentan versiones gratuitas o bien con *copyleft*, lo que permite su uso sin necesidad de pago o registro, facilitando de este modo su acceso a todo el mundo.

Los programas informáticos de edición de imágenes, hoja de cálculo, y generación de códigos QR necesitarán de ordenadores en los que poder ejecutarse.

Los mapas interactivos requerirán de ordenadores con conexión a internet para poder ser consultados.

Los programas de lectura de códigos QR necesitarán de un dispositivo portátil (teléfono, ordenador o tableta) con cámara integrada en el que se pueda instalar. Esta instalación requerirá de conexión a internet en el propio dispositivo móvil o bien de conectividad para instalar el programa previamente descargado en un ordenador con conexión a internet.

En el caso de tener la posibilidad de desplazarse hasta alguna de las localizaciones, es conveniente contar con un guía como recurso humano para que pueda explicar en mayor profundidad cada una de las muestras del arte prerrománico en su contexto histórico y arquitectónico.

5.5. *Competencias y objetivos trabajados*

En la tabla 5 se pueden ver las competencias trabajadas en las etapas que constituyen cada actividad. La competencia aprender a aprender se puede encontrar en todas las etapas debido al carácter grupal de resolución de la actividad, así como la competencia en comunicación lingüística, trabajada principalmente mediante el empleo de los razonamientos necesarios para poder superar cada etapa.

Tabla 5. Etapas de la propuesta educativa y competencias trabajadas en cada una de ellas

Etapa	Competencia trabajada
Trabajo con conceptos geométricos estudiados en el bloque Geometría	Competencia matemática y básica en ciencia y tecnología.
Edición de imágenes de la geometría específica proporcionada	Aprender a aprender. Comunicación lingüística. Competencia digital. Conciencia y expresión cultural. Competencia matemática y básica en ciencia y tecnología.
Generar y descifrar códigos QR	Aprender a aprender. Comunicación lingüística. Competencia digital.
Generar y cambiar la contraseña de la hoja de cálculo. Trabajo con la hoja de cálculo	Aprender a aprender. Comunicación lingüística. Competencia digital. Conciencia y expresión cultural. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.
Geolocalización	Aprender a aprender. Comunicación lingüística. Competencia digital. Conciencia y expresión cultural. Competencia matemática y básica en ciencia y tecnología.
Evaluación del trabajo de otros grupos y <i>feedforward</i>	Aprender a aprender. Comunicación lingüística. Competencia digital. Conciencia y expresión cultural. Competencia matemática y básica en ciencia y tecnología. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor. Social y cívica.

Fuente: elaboración propia.

Partiendo de los estándares evaluables recogidos en el anexo I del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, y en el Currículo de ESO y relaciones entre sus elementos publicado por la Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias en 2015 los objetivos didácticos trabajados en la propuesta educativa son los siguientes:

- Identificar patrones en contextos geométricos (O1).
- Emplear diversos registros para exponer la resolución alcanzada de un problema (O2).
- Aplicar las matemáticas a contextos de la realidad (O3).

- Emplear herramientas tecnológicas interactivas para la comprensión de conceptos geométricos y su representación (O4).
- Generar y compartir documentos multimedia (O5).
- Establecer relaciones de proporcionalidad entre figuras geométricas (O6).
- Reconocer elementos de movimientos en el plano presentes en el arte (O7).
- Identificar centros, ejes y planos de simetría en el arte (O8).
- Localizar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud (O9)
- Utilizar el Teorema de Tales para calcular longitudes indirectamente (O10).

En la tabla 6 se pueden ver las relaciones entre contenidos, objetivos definidos, actividades, criterios de evaluación y estándares evaluables:

Tabla 6. Relaciones entre contenidos, objetivos definidos, actividades criterios de evaluación y estándares evaluables

CONTENIDOS	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES EVALUABLES
Movimientos en el plano: simetría	O1, O2, O3, O7, O8	A1, A6	<ol style="list-style-type: none"> Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos. 	<ol style="list-style-type: none"> Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.
Movimientos en el plano: giro	O1, O2, O3, O7	A3, A6		
Movimientos en el plano: traslación	O1, O2, O3, O7	A4, A6		
Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas.	O1, O2, O3, O6, O10	A5, A6		
Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en los objetos cotidianos	O1, O3, O7, O8	A1, A3, A4, A6		
Uso de los movimientos para el análisis y la representación de figuras y representaciones geométricas.	O1, O3, O6, O7, O8, O10	A1, A3, A4, A5, A6		
El globo terráqueo. Coordenadas gráficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.	O3, O9	A7		
Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	O4, O5	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7		

Fuente: elaboración propia.

5.6. Evaluación de la actividad

Para la evaluación de cada actividad se emplearán las rúbricas de evaluación disponibles en los anexos mencionados anteriormente. Para la evaluación global se seguirán los porcentajes definidos para cada actividad en la tabla 7.

Tabla 7. Porcentaje de evaluación total para cada actividad

Actividad	Porcentaje en la evaluación
A0: <i>Gratam Regnum Asturorum</i>	-
A1: <i>Per speculum</i>	15%
A2: <i>Vector</i>	-
A3: <i>Axis</i>	15%
A4: <i>Traslatio imperii</i>	15%
A5: <i>Graeca sunt, non leguntur</i>	15%
A6: <i>Tótum Revolútum</i>	25%
A7: <i>Quo vadis?</i>	15%
A8: <i>Citius, altius, fortius</i>	

Fuente: elaboración propia.

5.7. Evaluación de la propuesta

Para la autoevaluación de la propuesta se empleará una matriz DAFO que deberá ser elaborada por el docente encargado de la puesta en práctica y revisada en cada año lectivo en que se utilice, ya que, por sus propias características, la matriz DAFO tiene en cuenta periodos temporales concretos y entornos cambiantes. La matriz de evaluación inicial puede verse en la tabla 8.

Tabla 8. Matriz DAFO

DEBILIDADES	AMENAZAS
<ul style="list-style-type: none"> Falta de formación del profesorado en actividades TIC. Desconocimiento generalizado del arte prerrománico. Imposibilidad de validar resultados esperados en la propuesta en situaciones reales. 	<ul style="list-style-type: none"> Descoordinación interdepartamental en el centro. Falta de recursos TIC en el centro. Legislación cambiante respecto a contenidos tratados.
FORTALEZAS	OPORTUNIDADES
<ul style="list-style-type: none"> Atractivo de los recursos TIC. Elevada relevancia cultural y alta actividad social. Integración de las matemáticas con otras materias. 	<ul style="list-style-type: none"> Colaboración interdepartamental en el centro. Mejora de multialfabetización. Adquisición de competencias referentes al empleo de las matemáticas, uso de dispositivos informáticos y conocimiento de la cultura y el arte de una región concreta.

Fuente: elaboración propia

La matriz DAFO permite visualizar conjuntamente los puntos fuertes de la propuesta, los puntos débiles, los factores que pueden dificultar o imposibilitar su ejecución y las oportunidades que ofrece la propuesta si se consigue realizar de un modo satisfactorio.

En el apartado de las debilidades, el punto común es la falta de formación. En este caso esta carencia es doble, al referirse por un lado a la formación del profesorado en el empleo de actividades TIC y por otro a la formación en lo que al arte prerrománico se refiere, puntos explorados con anterioridad en el presente trabajo y que implican un esfuerzo por parte del profesorado y las instituciones para su superación. Otra debilidad importante a tener en cuenta es intrínseca a la propuesta en sí y se refiere al hecho de no haber sido probada en escenarios reales, cosa normal durante su desarrollo, pero que debe ser subsanada de cara a mostrar su potencial.

Directamente relacionado con las debilidades se encuentra el apartado de las amenazas. A la debilidad de la formación en el empleo de actividades TIC se añade la posible falta de recursos de este tipo presentes en el centro, lo que directamente puede impedir que se desarrolle la propuesta. La descoordinación interdepartamental no representa una amenaza inicialmente, pero, de no implicarse el profesorado de otros departamentos didácticos relacionados, el potencial de interrelación entre matemáticas y otras materias se ve mermado, lo que le resta impacto sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje. Por último, una amenaza a tener en muy en cuenta es el cambio de contenidos en los currículos educativos, ya que el prerrománico, como se ha comentado anteriormente, se encuentra paradójicamente reconocido a nivel internacional, pero escasamente presente en los planes de estudios, de modo que, si en un cambio de contenidos se viera aún más relegado, la propuesta educativa perdería relevancia.

Las fortalezas de la propuesta se basan en la propia metodología seleccionada. Los recursos TIC presentan un mayor atractivo para el alumnado que los recursos tradicionales, lo que favorece captar su interés. La elevada relevancia cultural, utilizada en el estudio de las características del arte prerrománico y en la creación de las preguntas a resolver en la obtención de contraseñas, así como la alta actividad social, estimulada mediante el trabajo en equipo, se han mostrado claves a la hora de obtener aprendizaje significativo. La integración de las matemáticas con otras asignaturas es también un elemento positivo a la hora de mostrar los contenidos del currículo como un todo relacionado y no como áreas de conocimiento desconectadas entre sí.

Las oportunidades hacen referencia claramente a la mejora de las debilidades y la erradicación de las amenazas. Así como la descoordinación departamental es una amenaza, si ésta se supera se genera innegablemente la colaboración entre departamentos. La superación de las debilidades referentes al uso de recursos TIC representa una mejora de la competencia digital, tanto de profesorado como de alumnado, lo que repercute positivamente en la dotación de herramientas TIC en el centro. La multialfabetización es también un resultado directo de esta mejora de la competencia digital. El proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas se ve beneficiado en estas circunstancias, que es lo que se busca primordialmente. Por último, el arte prerrománico, al aumentar su difusión, aumenta también sus probabilidades de permanecer en sucesivas revisiones de planes de estudios.

La heteroevaluación de la propuesta será realizada por el alumnado participante gracias al empleo de un formulario elaborado mediante el uso de la técnica de Likert, de cara a medir el grado de conformidad que muestra cada alumno individualmente respecto a las afirmaciones que se les presentan en cada apartado del cuestionario. A estas cuestiones se añadirá un apartado sobre qué les ha parecido más y menos interesante de la actividad y otro para la propuesta de mejoras. El cuestionario de evaluación a emplear puede verse en el Anexo IX.

5.8. Atención a la diversidad

En lo referente a la atención a la diversidad y la adaptación de la propuesta de intervención, en la tabla 9 se pueden ver las adaptaciones contempladas en función de las necesidades educativas especiales que puedan presentar los estudiantes. Un rasgo común a todos los tipos de necesidades educativas especiales estudiadas es que el alumnado que se pueda englobar en cualquiera de los grupos necesitará un extra de atención por parte de sus profesores.

Tabla 9. Adaptaciones de la propuesta según el tipo de necesidad educativa especial

Necesidades educativas especiales	Adaptación
Discapacidad motriz	Será necesario un ordenador con carcasa de adaptación para facilitar su uso.
Discapacidad visual	Empleo de instrumentos de ampliación de la imagen en el uso de los ordenadores, como pueden ser lupas o programas magnificadores de pantalla, que permiten la ampliación de la imagen total o la ampliación parcial de las zonas por las que se desplaza el ratón. Empleo de recursos materiales tiflotécnicos, como maquetas de las obras a analizar, y redacción de los objetivos y la rúbrica de evaluación en braille en caso de ceguera total.

Discapacidad auditiva	Al ser ésta una propuesta de actividades principalmente visual, el empleo de refuerzos extraordinarios no será especialmente necesario.
Trastorno del espectro autista	Explicación previa e individualizada de los objetivos a conseguir, así como de la rúbrica de evaluación, de modo que la actividad quede totalmente estructurada. Colocarlo en las primeras mesas del aula, cerca del profesor, y tratar de minimizar ruidos u otras molestias, como puede ser el sonido del ventilador del ordenador.
Trastorno por déficit de atención con hiperactividad	Explicación individualizada de los objetivos y la rúbrica de evaluación, empleando para ello recursos gráficos que permitan el refuerzo memorístico y espacial, como puede ser explicar la actividad mediante un ejemplo resuelto. Cuando las respuestas del estudiante sean incongruentes será necesario repetir la situación que haya provocado este hecho, ya que indicarán una caída en el nivel de atención prestada.
Trastorno disocial	Adaptación de los recursos gráficos empleados y organización progresiva del nivel de dificultad para poder mantener bajo control los niveles de ansiedad que el estudiante pueda mostrar.
Trastorno negativista desafiante	Negociación y designación de roles dentro del grupo de trabajo desde el primer momento. Negociación previa de las obras concretas que el estudiante quiera analizar dentro de la actividad para mantener bajo control los niveles de ansiedad.
Discapacidad intelectual	Empleo de recursos materiales manipulables, como maquetas o puzles, para facilitar su comprensión de la actividad, proporcionándole más tiempo si es necesario o disminuyendo su carga de trabajo en caso de que no sea posible la adaptación temporal, como puede ser trabajar un menor número de obras en cada actividad, teniendo en cuenta que la dificultad de las seleccionadas sea adecuada a su nivel. A la hora de evaluar, adaptar la rúbrica considerando el crecimiento personal sobre la exigencia curricular y el rendimiento académico. Explicar esto mismo a sus compañeros en la etapa de <i>feedforward</i> .
Altas capacidades	En el Anexo X se puede ver un glosario de la geometría ornamental del arte prerrománico asturiano, de la que sólo se ha empleado una selección para la realización de las actividades, de modo que es posible profundizar más en el tema mediante el empleo de las imágenes que no se han utilizado. Otra opción es pasar de trabajar con transformaciones en el plano a transformaciones en el espacio, como las mostradas en los capiteles de muchas de las columnas recogidas en el glosario.

Fuente: elaboración propia a partir de Luque y Luque, 2013, Fuentes, Ferrari et al, 2006, Romero, Maestú et al, 2006, Quiroga, Paradiso et al, 2004, Beltrán, Benítez, Parada y Reyes, 2016, Verdugo y Rodríguez, 2012, y Boal y Expósito, 2011.

6. Conclusiones

El principal objetivo de este trabajo de fin de máster era conseguir una mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque de Geometría empleando principios constructivistas y evitando presentaciones axiomáticas. Durante el desarrollo de la actividad, el alumnado tiene como guía al docente, pero debe construir su propio conocimiento a partir de sus propias experiencias, al mismo tiempo que debe

colaborar con sus compañeros y evaluar y ser evaluado por otros grupos, por lo que, desde un punto de vista teórico, se puede afirmar que el objetivo principal se cumple, teniendo en cuenta los postulados expuestos en el marco teórico acerca de la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Respecto a los objetivos secundarios definidos, no es erróneo considerar que se ha profundizado en la relación entre arquitectura histórica y matemáticas más de lo que se define en el currículo oficial para la ESO, así como se han empleado programas informáticos poco utilizados o a los que se suele dar otro uso principal en entornos educativos. También se ha seguido la norma de emplear alta actividad social y alta relevancia cultural. Por tanto, siempre desde un marco teórico, los objetivos secundarios se pueden considerar cumplidos.

No obstante, hay que tener en cuenta que, por motivos organizativos y temporales, la propuesta de actividad no ha podido probarse empíricamente en un entorno real, por lo que no se puede afirmar que los objetivos se hayan cumplido más que desde un estricto punto de vista teórico. Muchas teorías referentes a la pedagogía no han podido ser probadas incluso partiendo de estudios empíricos, de modo que esta propuesta, la cual cuenta con una parte importante referente al uso de TIC, cosa aún relativamente novedosa a día de hoy, no puede ser validada más que mediante su puesta en práctica y sucesivas repeticiones hasta confirmar la norma.

A pesar de ello, al igual que sucede con la teoría de la primacía topológica de Piaget e Inhelder, a pesar de no poder ser demostrado de modo empírico, la realización de este trabajo de fin de máster ha servido como punto de partida para la investigación y el descubrimiento de conceptos teóricos, probados y no probados, pero igualmente interesantes. De igual modo, la búsqueda de información y la constatación de la rigurosidad de ésta, provenga de la fuente que provenga, exige un esfuerzo considerable que da una medida de la enorme importancia de la formación continua del profesorado.

7. *Limitaciones*

La principal limitación enfrentada durante la realización de esta propuesta de intervención ha sido relativa a la calidad de la información encontrada, cuya verificación ha exigido un esfuerzo considerablemente superior al esperado inicialmente. El hecho de disponer de motores de búsqueda especializados que permitan un primer filtrado de la extensa bibliografía que se recoge en internet hace suponer que el grueso del trabajo de recopilación de información estará dedicado a la

búsqueda de conceptos teóricos que no hayan sido probados como erróneos y que ayuden en la definición de la propuesta, pero la realidad es que, a pesar de la especialización, la cantidad de información que se encuentra a disposición del usuario es tan vasta que el hecho de que una teoría se trate como probada no determina la veracidad de dicha teoría, sino que exige de la búsqueda de más información que confirme la obtenida, así como la constatación de la no existencia de documentación que defina dicha teoría como errónea. Este hecho demuestra sobradamente la importancia de la multialfabetización, así como la complejidad de encontrar información rigurosa y relevante.

Esta limitación se ha visto agravada especialmente por la escasez del tiempo, no tanto por las propias limitaciones temporales de las fechas de entrega, sino por la cantidad de tiempo empleado en desechar información no rigurosa.

8. Líneas de investigación futura

Como línea de investigación futura, la presente propuesta de intervención, siempre que se pruebe útil, puede emplearse como punto de partida para ampliar el uso de esta metodología a otras obras y observar las transformaciones geométricas realizadas en conceptos arquitectónicos de distintos contextos, lo que puede dar lugar al trazado de un mapa temporal de la evolución artística y geográfica y, por tanto, a afianzar la relación entre las matemáticas y otras disciplinas como la historia o el dibujo técnico. Además, dentro de la propia asignatura, la investigación realizada por cada alumno se puede aprovechar para relacionar la geometría con conceptos algebraicos, estadísticos y de representación de funciones, lo que permitiría interrelacionar los bloques de la propia asignatura, generando un todo más compacto.

Las hipótesis de Piaget e Inhelder, así como de Dina y Pierre Van Hiele, coinciden en que un mayor control del espacio tridimensional que rodea a una persona permite a dicha persona aumentar su capacidad para definir ese espacio en términos geométricos progresivamente más complejos, pudiendo llegar a alcanzar un grado de conocimiento abstracto superior que permita el dominio de la geometría de un modo riguroso, tanto si se accede a esos conocimientos, como si han de construirse. La expresión de dichos conocimientos, así como su relación con otros contextos, necesita un vehículo que sea capaz de cambiar según el grado de comprensión alcanzado y que pueda ser exportado a diferentes registros semióticos de modo aprehensivo, tal como defiende Duval. Estas hipótesis, que se han empleado como base en esta propuesta de intervención, conforman por sí solas toda una línea de investigación que debe seguir

explotándose, dado que el mero hecho de su estudio genera inherentemente un mayor conocimiento geométrico.

La potenciación de la competencia digital, en concreto en lo referente a temas de seguridad, como el cifrado y el empleo de contraseñas, es algo que puede ser extendido a otras áreas. Las nuevas tecnologías en materia educativa son cada vez más utilizadas y el alumnado debe recibir formación al respecto de la salvaguarda de su propio trabajo que pueda ser aplicada en el futuro, tanto en su vida privada como en su vida laboral, lo que abre una línea de investigación referente a las actitudes que se deben desarrollar frente al empleo seguro de programas informáticos.

El empleo de *feedforward*, cuyos beneficios están empezando a ser cuantificados, también representa un nuevo objeto de estudio y análisis, de cara a pulir y mejorar la que parece será una importante herramienta a emplear en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

9. Referencias bibliográficas

- Arnau, D., Puig, L. (2006). *Análisis de las actuaciones de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo. Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp. 153-162. Córdoba, España: Universidad de Córdoba. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2728880.pdf>
- Bango, I. (1996). *El prerrománico asturiano*. Historia del Arte vol. 2. La Edad Media, pp. 129-133. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Barroso, M., Martel, J. (2008). *Caracterización geométrica del desarrollo de la triada piagetiana*. Educación Matemática, vol. 20, n^o1, pp. 89-102. México D. F., México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v20n1/v20n1a5.pdf>
- Beltrán, K., Benítez, C., Parada, V., Reyes, K. (2016). *Metodologías y estrategias para el trabajo con estudiantes que presentan Trastorno Negativista Desafiante*. Seminario de Título para optar al grado académico de Licenciada en Educación y al título de Profesor de Educación Diferencial mención Deficiencia Mental. Los Ángeles, Chile: Universidad de Concepción. Recuperado de <http://repositorio.udec.cl/handle/11594/2324>
- Boal, M., Expósito, M. (2011). *Medidas de intervención específicas para alumnos con altas capacidades en la Comunidad de Madrid: Respuestas educativas y programa de enriquecimiento*. Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo, capítulo 3, pp. 57-64. Madrid, España: Fundación SM. Recuperado de http://www.fundacionpryconsa.es/media/Altas_capacidades_y_aprendizaje_cooperativo.pdf
- Bronfenbrenner, U. (2002). *La Ecología del Desarrollo Humano*. Barcelona, España: Editorial Paidós.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Burdeos, Francia: Universidad de Burdeos. Recuperado de <https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/34037997/FundamentosBrousseau.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1542052607&Signature=unduiXM6%2F3voPfUCwpImehJIcM>

- M%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DFundamentos_Brousseau.pdf
- Buckingham, D. (2015). *Educación en medios. Alfabetización, aprendizaje y cultura contemporánea*. Barcelona, España: Editorial Paidós. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/David_Buckingham3/publication/48078341_Educacion_en_medios_alfabrtizacion_aprendizaje_y_cultura_contemporanea/links/55144b010cf283ee08351412.pdf
- Camargo, L. (2011). *El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría*. Revista Colombiana de Educación, n°60, pp. 41-60. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de <http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n60/n60a3.pdf>
- Carballo, R., Fernández, M. (2005). *La actitud del profesorado de Primaria y Secundaria de la Comunidad de Madrid ante las TIC: problemática y claves para su integración*. Actas del XII Congreso Nacional de Modelos de Investigación Educativa: Investigación en Innovación Educativa. La Laguna, España. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Javier_Rodriguez-Santero/publication/282085527_RASGOS_PERSONALES_Y_ACADEMICOS_ASOCIADOS_A_LA_TENDENCIA_AL_ABANDONO_DE_LOS_ESTUDIANTES_DE_PEDAGOGIA_EN_LA_ASIGNATURA_ANALISIS_DE_DATOS/links/5602a1b108ae0b84c4d22595/RASGOS-PERSONALES-Y-ACADEMICOS-ASOCIADOS-A-LA-TENDENCIA-AL-ABANDONO-DE-LOS-AS-ESTUDIANTES-DE-PEDAGOGIA-EN-LA-ASIGNATURA-ANALISIS-DE-DATOS.pdf#page=236
- Centeno, G., Cubo, S. (2013). *Evaluación de la competencia digital y de las actitudes hacia las TIC del alumnado universitario*. Revista de Investigación Educativa, vol. 31, núm. 2, pp. 517-53. Murcia, España: Asociación Interuniversitaria de Investigación Pedagógica. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/2833/283328062005.pdf>
- Chica, E. (2011). *Una propuesta de evaluación para el trabajo en grupo mediante rúbrica*. Revista Escuela Abierta, n°14, pp. 67-81. Sevilla, España: Fundación San Pablo Andalucía CEU. Recuperado de http://www.ceuandalucia.es/escuelaabierta/pdf/articulos_ea14pdf/ea14_chica.pdf
- Colás, P., Pablos, J. (2004). *La formación del profesorado basada en redes de aprendizaje virtual: aplicación de la técnica DAFO*. Revista Electrónica-

Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información. Salamanca, España: Universidad de Salamanca. Recuperado de https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/24626/file_1.pdf?sequence=1

Conde, A., Pozuelos, F. (2007). *Las plantillas de evaluación (rúbrica) como instrumento para la evaluación formativa. Un estudio de caso en el marco de la reforma de la enseñanza universitaria en el EEES*. Revista Investigación en la Escuela, nº63, pp. 77-90. Sevilla, España: Universidad de Sevilla. Recuperado de https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/60895/R63_6.pdf?sequence=1

Consejería de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Currículo de Bachillerato y relaciones entre sus elementos*. Oviedo, España: Dirección General de Formación Profesional, Desarrollo Curricular e Innovación Educativa. Servicio de Ordenación y Evaluación Educativa.

Consejería de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Currículo de ESO y relaciones entre sus elementos*. Oviedo, España: Dirección General de Formación Profesional, Desarrollo Curricular e Innovación Educativa. Servicio de Ordenación y Evaluación Educativa.

Decreto 43/2015, de 10 de junio, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en el Principado de Asturias. Boletín Oficial del Principado de Asturias nº150, del 30 de junio de 2015. Recuperado de <https://sede.asturias.es/bopa/2015/06/30/2015-10785.pdf>

Díaz Barriga, F. (20 de octubre, 2003). *Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo*. Revista Electrónica de Investigación Educativa, vol. 5, nº2. México D. F., México. Recuperado de <https://redie.uabc.mx/redie/article/view/85/1396>

Domingo, M., Marques, P. (2011). *Aulas 2.0 y uso de las TIC en la práctica docente*. Revista Comunicar, vol. XIX, nº37. Andalucía, España: Grupo Comunicar. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3734127>

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, vol. 9, nº1, pp. 143-168. Madrid, España: Real

- Sociedad Matemática Española. Recuperado de <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546>
- Edel, R. (2003). *El rendimiento académico: concepto, investigación y desarrollo*. Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación vol. 1, nº2. Madrid, España: Universidad Autónoma de Madrid. Recuperado de https://repositorio.uam.es/bitstream/handle/10486/660693/REICE_1_2_7.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Entwistle, N. (1983). *Styles of Learning and Teaching. An integral Outline of educational Psychology*. Chichester, Inglaterra: John Wiley and Sons.
- Estrada, M., Cantero, E. (2014). *Decodificando mi flora. Uso de dispositivos móviles y tablets en educación*. Revista Bio-Grafía, nº extraordinario, II Congreso Nacional de Investigación en Enseñanza de la Biología. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de <https://doi.org/10.17227/20271034.vol.onum.obio-grafia515.525>
- Fernández, F. (1993). *Lugares de culto en Asturias durante la época de la transición*. Asturiensia Medievalia, vol. 7, pp. 31-55. Oviedo, España: Universidad de Oviedo. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/134078.pdf>
- Fernández, M., Martínez, A., Rodríguez, J. (2016). *PISA y TALIS, ¿congruencia o discrepancia?* Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa, nº22 (1), art. M6. Valencia, España: Universidad de Valencia. Recuperado de https://www.uv.es/RELIEVE/v22n1/RELIEVEv22n1_M6.pdf
- Fouz, F. (2001). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría*. Didáctica de la Geometría nº552, Lectura nº9, págs. 92-106. Caracas, Venezuela: Universidad Nacional Abierta. Recuperado de <http://biblo.una.edu.ve/docu.7/bases/marc/texto/m2451b.pdf>
- Fuentes, J., Ferrari, M., Boada, L., Touriño, E., Artigas, J., Belinchón, M., Muñoz, J., Hervás, A., Canal, R., Hernández, J., Díez, A., Idiazábal, M., Mulas, F., Palacios, S., Tamarit, J. Martos, J., Posada, M. (2006). *Guía de buena práctica para el tratamiento de los trastornos del espectro autista*. Revista de Neurología nº43 (7), pp. 425-438. Barcelona, España: Viguera Editores. Recuperado de <https://www.adngirona.com/data/recursos/guies-de-bones-practiques-carlos-iii/44850a6f54f14ee1a3ac1ea58e8f92b4-guiatractamenttea.pdf>

- Gaibao, D., Murcia, G., Aguirre, M., Florez, M., Camacho, T., Pasive, Y. (2012). *Estrategias pedagógicas en la educación universitaria*. Pedagogía de la humanización. Bogotá, Colombia: Universidad de San Buenaventura. Recuperado de <http://biblioteca.usbbog.edu.co:8080/Biblioteca/BDigital/69243.pdf#page=24>
- Gamboa, R., Vargas, G. (2013). *El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría*. Revista Uniciencia Vol. 27, n°1, págs. 74-94. Costa Rica: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Costa Rica. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4945319>
- García, C. (2000). *El prerrománico asturiano*. Oviedo, Asturias: Ediciones Nobel.
- Gardner, H. (1994). *Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples*. México D. F., México: Fondo de Cultura Económica.
- Gil, M. (2001). *Planificación estratégica: método DAFO*. Prácticas locales de creatividad social, vol. 2, pp. 123-136. Barcelona, España: Ediciones El Viejo Topo. Recuperado de http://www.academia.edu/download/40661222/Practicas_locales_creatividad_social_libro_completo.pdf#page=123
- Gros, B., Forés, A. (2013). *El uso de la geolocalización en educación secundaria para la mejora del aprendizaje situado: análisis de dos estudios de caso*. Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, vol. 12(2), pp. 41-53. Cáceres, España: Universidad de Extremadura. Recuperado de <https://relatec.unex.es/article/view/1193/797>
- Hitt, F. (1998). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum*. Educación Matemática vol. 10, n°2, pp. 23-45. México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/10137/1/Visualizacion1998Hitt.pdf>
- Inhelder, B., Piaget, J., Szeminska, A. (1960). *The child's conception of Geometry*. Oxon, Reino Unido: Routledge. Recuperado de <https://content.taylorfrancis.com/books/download?dac=C2004-0-01021-0&isbn=9781136316661&format=googlePreviewPdf>
- Kennedy, J. (1974). *A psychology of picture perception*. Toronto, Canada: University of Toronto. Recuperado de <https://tspace.library.utoronto.ca/handle/1807/948>

- Leiva, J., Moreno, N. (2015). *Tecnologías de geolocalización y realidad aumentada en contextos educativos: experiencias y herramientas didácticas*. Revista DIM, Año 11, n°31, pp. 1-18. Barcelona, España: Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado de <https://www.raco.cat/index.php/DIM/article/download/291534/380014>
- Luque, D., Luque, M. (2013). *Necesidades Específicas de Apoyo Educativo del alumnado con discapacidades sensorial y motora*. Summa Psicológica UST vol. 10, n°2, pp. 57-72. Santiago, Chile: Universidad Santo Tomás. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4703039>
- Maquilón, J., Hernández, F. (2011). *Influencia de la motivación en el rendimiento académico de los estudiantes de formación profesional*. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 14 (1), pp. 81-100. Zaragoza, España: Asociación Universitaria de Formación del Profesorado. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3678771>
- Marqués, P. (2012). *Impacto de las TIC en la educación: funciones y limitaciones*. Revista 3Ciencias TIC, vol. 2, n°1. Valencia, España: Editorial Área de Innovación y Desarrollo
- Mason J., Burton L., Stacey K. (1982). *Pensar matemáticamente*. Barcelona, España: Editorial Labor
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2016). *PISA 2015. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español*. Madrid, España: Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Recuperado de <https://www.mecd.gob.es/inee/dam/jcr:e4224d22-f7ac-41ff-aocf-876ee5d9114f/pisa2015preliminarok.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *TALIS 2013. Estudio Internacional de la enseñanza y el aprendizaje. Informe español*. Madrid, España: Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Recuperado de https://www.oecd.org/education/school/Spain-talis-publicaciones-sep2014_es.pdf
- Moreles, U. (2006). *Acta Universitaria*, vol. 16, pp. 5-7. Guanajuato, México: Universidad de Guanajuato. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/416/41609901.pdf>
- Morata, E. (2015). *El subatomismo ilógico*. PhilArchive. Ontario, Canadá: Centre for Digital Philosophy. Recuperado de <https://philarchive.org/archive/MORS-11>

- Okón, E. (2016). *¿Es completa la mecánica cuántica? Replanteando el argumento de Einstein, Podolsky y Rosen*. Revista de Divulgación Científica del Instituto de Investigaciones Filosóficas. México D. F.: Tecnológico Nacional de México. Recuperado de <http://www.filosoficas.unam.mx/~okon/english/articulo-de-divulgacion.pdf>
- Orozco, C., Labrador, E. (2006). *La tecnología digital en educación: implicaciones en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante*. Theoria, vol. 15 (2), pp. 81-89. Recuperado de <http://www.redalyc.org/html/299/29915209/>
- Parent, M., Pressouyre, L., Portelette, F. (1985). *Convention concerning the protection of the world cultural and natural heritage, ninth ordinary session*. París, Francia: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. Recuperado de https://whc.UNESCO.org/archive/1985/sc-85-confo08-9_e.pdf
- Parent, M., Pressouyre, L., Portelette, F. (1999). *Convention concerning the protection of the world cultural and natural heritage, twenty-second session*. París, Francia: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. Recuperado de <https://whc.UNESCO.org/archive/1998/whc-98-conf203-18e.pdf>
- Peñalva, L. (enero 2010). *Las matemáticas en el desarrollo de la metacognición*. Scielo: ciencia y política. México D. F., México: Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=So188-77422010000100008&script=sci_arttext
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Toluca, México: Editorial Trillas.
- Quesada, H. Torregrosa, G. (2007). *Coordinación de procesos cognitivos en geometría*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa vol. 10 n°2, pp. 275-300. México D. F., México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n2/v10n2a5.pdf>
- Quiroga, S., Paradiso, L., Cryan, G., Auguste, L., Zaga, D. (2004). *Abordaje terapéutico para adolescentes tempranos con conductas perturbadoras: trastorno negativista desafiante y trastorno disocial*. XI Jornadas de Investigación. Facultad de Psicología. Buenos Aires, Argentina:

- Universidad de Buenos Aires. Recuperado de <https://www.aacademica.org/000-029/11>
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado nº3 del 3 de enero de 2015. Recuperado de <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>
- Rojas, C. (2005). *Mentefactos y niveles de razonamiento geométrico, según Van Hiele, en alumnas de licenciatura de Pedagogía Infantil*. Zona Próxima, nº6, pp. 82-93. Barranquilla, Colombia: Editorial Universidad del Norte. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=85300605>
- Román, P., Martín, A. (2013). *La formación de docentes en estrategias innovadoras de enseñanza y aprendizaje: los códigos de respuesta rápida o códigos QR*. Revista DIM, Año 9, nº26, pp. 1-14. Barcelona, España: Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado de https://ddd.uab.cat/pub/dim/dim_a2013m10n26/dim_a2013n26m10a5.pdf
- Romero, D., Maestú, F., González, J., Romo, C., Andrade, J. (2006). *Disfunción ejecutiva en el trastorno por déficit de atención con hiperactividad en la infancia*. Revista de Neurología nº42 (5), pp. 265-271. Barcelona, España: Viguera Editores. Recuperado de <https://www.copcv.org/db/eventos/170131182854RyHzMZUwWixB.pdf>
- Ruiz, D. (2011). *Realidad aumentada, educación y museos*. Revista Icono 14, Año 9 Vol. 2, pp. 212-226. Madrid, España: Asociación Científica Icono 14. Recuperado de <https://icono14.net/ojs/index.php/icono14/article/view/24/42>
- Sandoval, A. (2016). *Uso de códigos QR en unidades didácticas*. Revista Posgrado y Sociedad, vol. 14, nº1, pp. 39-47. Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia. Recuperado de <https://investiga.uned.ac.cr/revistas/index.php/posgrado/article/view/1491/1565>
- Squires, D., McDougall, A. (1997). *Cómo elegir y utilizar software educativo: guía para el profesorado*. Madrid, España: Ediciones Morata.
- Torre, A. (2003). *El método socrático y el modelo de Van Hiele*. Lecturas Matemáticas, vol. 24, pp. 99-121. Medellín, Colombia: Sociedad Colombiana de Matemáticas. Recuperado de <http://www.valenciad.com/Conferencias/ComunicMetodoSocrat.pdf>

- Verdugo, M., Rodríguez, A. (2012). *La inclusión educativa en España desde la perspectiva de alumnos con discapacidad intelectual, de familias y de profesionales*. Revista de Educación nº258, pp. 450-470. Madrid, España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Miguel_Verdugo/publication/278164766_The_Perspectives_of_Students_with_Intellectual_Disabilities_Families_and_Professionals_on_Inclusive_Education_in_Spain/links/5587e72b08aef58c03a068b9.pdf
- Villareal, M. (2000). *El pensamiento matemático de estudiantes universitarios de cálculo y tecnologías informáticas*. Educación Matemática vol. 12, nº2, pp. 141-145. México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática. Recuperado de <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/2/14Villareal.pdf>
- Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Fausto.

Vídeo:

- Llangreu, M. (2015). *Arte prerrománico asturiano*. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=vbNKG3qeF88>

11. Anexos

11.1. Anexo I: Contenidos, criterios de evaluación y estándares evaluables de los bloques Geometría y Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

Tabla 10. Contenidos, criterios de evaluación y estándares evaluables de los bloques Geometría y Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

BLOQUE	CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES EVALUABLES
Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	<p>Planificación del proceso de resolución de problemas.</p> <p>Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolución de subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.</p> <p>Reflexión sobre los resultados: revisión, asignación de unidades, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.</p>	<ol style="list-style-type: none"> Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones 	<p>1.1 Expresa verbalmente de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.</p> <p>2.1 Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).</p> <p>2.2 Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.</p> <p>2.3 Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.</p> <p>2.4 Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.</p> <p>3.1 Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.</p> <p>3.2 Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.</p> <p>4.1 Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas</p>

	<p>Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.</p> <p>Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y matemáticos.</p> <p>Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.</p> <p>Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para la recogida ordenada y la organización de datos; la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; la elaboración de</p>	<p>obtenidas en los procesos de investigación.</p> <ol style="list-style-type: none"> 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en internet o en otras fuentes, 	<p>importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.</p> <p>4.2 Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.</p> <p>5.1 Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico.</p> <p>6.1 Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.</p> <p>6.2 Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.</p> <p>6.3 Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.</p> <p>6.4 Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.</p> <p>6.5 Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.</p> <p>7.1 Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.</p> <p>8.1 Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.</p> <p>8.2 Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.</p> <p>8.3 Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso.</p>
--	---	---	---

	<p>informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.</p>	<p>elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo estos en entornos apropiados para facilitar la interacción.</p> <p>Debido al carácter transversal del bloque, los criterios de evaluación descritos son de aplicación en todo el bloque, dependiendo siempre de las actividades que se estén realizando.</p>	<p>8.4 Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.</p> <p>9.1 Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.</p> <p>10.1 Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.</p> <p>11.1 Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.</p> <p>11.2 Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.</p> <p>11.3 Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.</p> <p>11.4 Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.</p> <p>12.1 Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.</p> <p>12.2 Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.</p> <p>12.3 Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.</p>
--	---	---	--

Geometría	Geometría del plano. Segmentos y ángulos en las figuras geométricas.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas. 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. 5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros. 6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.3 Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.4 Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. 2.4 Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. 2.5 Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.6 Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos. 3.2 Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc. 4.2 Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. 5.1 Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario. 5.2 Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. 5.3 Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.
	Lugar geométrico. Determinación de figuras geométricas planas a partir de ciertas propiedades.		
	Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas.		
	Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías en el plano.		
	Uso de los movimientos para el análisis y la representación de figuras y representaciones geométricas.		
	Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en los objetos cotidianos.		
	Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros.		
	La esfera. Intersecciones de planos y esferas.		
El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.			

	Resolución de problemas de interpretación de mapas y planos.		5.4 Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.
	Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.		6.1 Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

Fuente: elaboración propia a partir del Currículo de ESO publicado por la Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Principado de Asturias, 2015.

11.2. Anexo II: rúbrica de evaluación de la actividad *Per speculum*

Tabla 11. Rúbrica de evaluación de la actividad *Per Seculorum*

	Mal (0-4)	Suficiente (5)	Bien (6-8)	Excepcional (9-10)	Porcentaje total
Simetría en los murales de Santullano	No es capaz de reconocer simetría central o axial en la imagen.	Reconoce simetría central y axial pero no dibuja planos ni ejes.	Reconoce simetría central y axial y dibuja planos y ejes de simetría.	Reconoce y distingue simetría central y axial, representa correctamente planos y ejes de simetría y numera las figuras.	15%
Ejes de simetría en ventanas bíforas	No reconoce correctamente los ejes de simetría en las imágenes.	Reconoce y representa los ejes de simetría de los conjuntos, pero no los de los elementos.	Reconoce y representa los ejes de simetría de conjuntos y elementos, pero no todos.	Reconoce todos los ejes de simetría y los representa correctamente.	15%
Generación del dintel de San Martín de Salas	No es capaz de generar la geometría del dintel o comete errores en la generación de simetrías.	Genera la geometría del dintel empleando diez simetrías o más.	Genera la geometría del dintel empleando ocho o nueve simetrías.	Genera toda la geometría del dintel empleando siete simetrías o menos.	15%
Simetría en la base de la Arqueta de las Ágatas	No es capaz de resolver la actividad.	Resuelve la actividad, pero no comprende por qué.	Resuelve la actividad en varios pasos.	Resuelve la actividad sin cometer errores y en un único paso.	15%
Códigos QR	No es capaz de generar códigos QR y no entiende el concepto.	Necesita de la ayuda de sus compañeros para generar códigos QR.	Genera códigos QR, pero no los comprende.	Comprende y genera códigos QR con fluidez.	5%
Hoja de cálculo	No es capaz de manejar la hoja de cálculo y no muestra interés en ello.	Maneja las funciones de la hoja de cálculo que se le piden, pero comete errores.	Maneja correctamente las funciones de la hoja de cálculo que se le piden.	Comprende y explota las posibilidades que ofrece la hoja de cálculo.	10%
Edición de imágenes	No es capaz de editar imágenes y no muestra interés en ello.	Edita imágenes con resultados evidentemente mejorables.	Edita correctamente imágenes y ofrece resultados estéticamente agradables a la vista.	Maneja correctamente el programa y es capaz de exportar ese conocimiento a otros programas.	5%
Trabajo en equipo	No trabaja en equipo y entorpece el trabajo de sus compañeros.	Trabaja en equipo, pero sólo lo estrictamente necesario. No se implica en el grupo.	Trabaja correctamente en equipo. Se implica en el funcionamiento del grupo.	Trabaja en equipo, ofrece su ayuda a sus compañeros y hace lo posible por establecer un buen clima de trabajo.	10%
Ortografía y gramática	Comete múltiples faltas de ortografía y/o gramática, o bien comete faltas graves.	Comete pocas faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	Comete 1 ó 2 faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	No comete faltas de ortografía ni de gramática.	10%

Fuente: elaboración propia.

11.3. Anexo III: rúbrica de evaluación de la actividad Axis

Tabla 12. Rúbrica de evaluación de la actividad Axis

	Mal (0-4)	Suficiente (5)	Bien (6-8)	Excepcional (9-10)	Porcentaje total
Rotación en los arcos de San Miguel de Lillo	No define centros ni ángulos de rotación.	Define centros y ángulos de rotación, pero no de todas las figuras y cometiendo errores leves.	Define correctamente centros y ángulos de rotación, pero no de todas las figuras.	Define correctamente los centros y ángulos de rotación de las figuras pedidas.	20%
Rotación en las celosías	No define centros ni ángulos de rotación.	Define centros y ángulos de rotación, pero no de todas las figuras y cometiendo errores leves.	Define correctamente centros y ángulos de rotación, pero no de todas las figuras.	Define correctamente los centros y ángulos de rotación de las figuras pedidas.	20%
Generación del cancel de San Francisco	No es capaz de resolver la actividad.	Resuelve la actividad, pero sin dar explicaciones.	Resuelve la actividad, pero comete errores leves en la explicación.	Resuelve la actividad y da una explicación correcta.	20%
Códigos QR	No es capaz de descifrar códigos QR y no entiende el concepto.	Necesita de la ayuda de sus compañeros para descifrar códigos QR.	Descifra códigos QR, pero no los comprende.	Comprende y descifra códigos QR con fluidez.	5%
Hoja de cálculo	No es capaz de manejar la hoja de cálculo y no muestra interés en ello.	Maneja las funciones de la hoja de cálculo que se le piden, pero comete errores.	Maneja correctamente las funciones de la hoja de cálculo que se le piden.	Comprende y explota las posibilidades que ofrece la hoja de cálculo.	10%
Edición de imágenes	No es capaz de editar imágenes y no muestra interés en ello.	Edita imágenes con resultados evidentemente mejorables.	Edita correctamente imágenes y ofrece resultados estéticamente agradables a la vista.	Maneja correctamente el programa y es capaz de exportar ese conocimiento a otros programas.	5%
Trabajo en equipo	No trabaja en equipo y entorpece el trabajo de sus compañeros.	Trabaja en equipo, pero sólo lo estrictamente necesario. No se implica en el grupo.	Trabaja correctamente en equipo. Se implica en el funcionamiento del grupo.	Trabaja en equipo, ofrece su ayuda a sus compañeros y hace lo posible por establecer un buen clima de trabajo.	10%
Ortografía y gramática	Comete múltiples faltas de ortografía y/o gramática, o bien comete faltas graves.	Comete pocas faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	Comete 1 ó 2 faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	No comete faltas de ortografía ni de gramática.	10%

Fuente: elaboración propia.

11.4. Anexo IV: rúbrica de evaluación de la actividad *Traslatio imperii*

Tabla 13. Rúbrica de evaluación de la actividad *Traslatio imperii*

	Mal (0-4)	Suficiente (5)	Bien (6-8)	Excepcional (9-10)	Porcentaje total
Traslación en la celosía de Santullano	No define la celosía ni representa los vectores.	Define la celosía y representa los vectores, pero necesita aplicar traslación a varios elementos diferentes.	Define la celosía aplicando traslación a un solo elemento, pero comete errores en la representación de vectores.	Define la celosía aplicando traslación a un solo elemento y sin cometer errores en la representación de vectores.	15%
Traslación en el cancel de Santianes de Pravia	No define el cancel ni representa los vectores.	Define el cancel y representa los vectores, pero necesita aplicar traslación a varios elementos diferentes.	Define el cancel aplicando traslación a un solo elemento, pero comete errores en la representación de vectores.	Define el cancel aplicando traslación a un solo elemento y sin cometer errores en la representación de vectores.	15%
Traslación en la celosía de San Salvador de Valdediós	No define el elemento base correctamente.	Define el elemento base, pero no explica cómo lo ha obtenido.	Define el elemento base, pero no explica correctamente cómo lo ha obtenido.	Define el elemento base que genera la celosía y explica correctamente en qué se ha basado para definirlo.	15%
Generación de la flor del agua	No genera la flor del agua ni define los vectores pedidos.	Genera parcialmente la flor del agua y/o no define correctamente los vectores.	Define correctamente los vectores, pero no genera totalmente la flor del agua.	Genera correctamente la flor del agua y define los vectores pedidos.	15%
Códigos QR	No es capaz de generar códigos QR y no entiende el concepto.	Necesita de la ayuda de sus compañeros para generar códigos QR.	Genera códigos QR, pero no los comprende.	Comprende y genera códigos QR con fluidez.	5%
Hoja de cálculo	No es capaz de manejar la hoja de cálculo y no muestra interés en ello.	Maneja las funciones de la hoja de cálculo que se le piden, pero comete errores.	Maneja correctamente las funciones de la hoja de cálculo que se le piden.	Comprende y explota las posibilidades que ofrece la hoja de cálculo.	10%
Edición de imágenes	No es capaz de editar imágenes y no muestra interés en ello.	Edita imágenes con resultados evidentemente mejorables.	Edita correctamente imágenes y ofrece resultados estéticamente agradables a la vista.	Maneja correctamente el programa y es capaz de exportar ese conocimiento a otros programas.	5%
Trabajo en equipo	No trabaja en equipo y entorpece el trabajo de sus compañeros.	Trabaja en equipo, pero sólo lo estrictamente necesario. No se implica en el grupo.	Trabaja correctamente en equipo. Se implica en el funcionamiento del grupo.	Trabaja en equipo, ofrece su ayuda a sus compañeros y hace lo posible por establecer un buen clima de trabajo.	10%
Ortografía y gramática	Comete múltiples faltas de ortografía y/o gramática, o bien comete faltas graves.	Comete pocas faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	Comete 1 ó 2 faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	No comete faltas de ortografía ni de gramática.	10%

Fuente: elaboración propia.

11.5. Anexo V: rúbrica de evaluación de la actividad Graeca sunt, non leguntur

Tabla 14. Rúbrica de evaluación de la actividad Graeca sunt, non leguntur

	Mal (0-4)	Suficiente (5)	Bien (6-8)	Excepcional (9-10)	Porcentaje total
Semejanza en el cuerpo central de la Cruz de la Victoria	No resuelve correctamente las cuestiones planteadas.	Comete errores en la definición de los polígonos, pero el resto de respuestas son congruentes.	Define correctamente los polígonos, pero comete errores en el cálculo del volumen del prisma.	Resuelve correctamente todas las cuestiones planteadas.	25%
Semejanza en los ventanales de Santa María del Naranco	No resuelve correctamente las cuestiones planteadas.	Comete errores en la definición del polígono mayor, pero el resto de respuestas son congruentes.	Define correctamente los polígonos, pero comete errores al explicar las relaciones entre sus ángulos.	Resuelve correctamente todas las cuestiones planteadas.	20%
Relación entre Santa María del Naranco y San Tirso	No obtiene las características del polígono solicitadas ni dibuja los triángulos semejantes o la división del lado en cinco partes iguales.	Obtiene las características del polígono, pero no dibuja los triángulos semejantes ni divide el lado seleccionado en cinco partes iguales.	Resuelve todas las cuestiones planteadas, pero emplea demasiado tiempo en cálculos redundantes.	Resuelve todas las cuestiones planteadas de la forma más rápida posible.	25%
Hoja de cálculo	No es capaz de manejar la hoja de cálculo y no muestra interés en ello.	Maneja las funciones de la hoja de cálculo que se le piden, pero comete errores.	Maneja correctamente las funciones de la hoja de cálculo que se le piden.	Comprende y explota las posibilidades que ofrece la hoja de cálculo.	10%
Trabajo en equipo	No trabaja en equipo y entorpece el trabajo de sus compañeros.	Trabaja en equipo, pero sólo lo estrictamente necesario. No se implica en el grupo.	Trabaja correctamente en equipo. Se implica en el funcionamiento del grupo.	Trabaja en equipo, ofrece su ayuda a sus compañeros y hace lo posible por establecer un buen clima de trabajo.	10%
Ortografía y gramática	Comete múltiples faltas de ortografía y/o gramática, o bien comete faltas graves.	Comete pocas faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	Comete 1 ó 2 faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	No comete faltas de ortografía ni de gramática.	10%

Fuente: elaboración propia.

11.6. Anexo VI: rúbrica de evaluación de la actividad Tótum Revólutum

Tabla 15. Rúbrica de evaluación de la actividad Tótum Revólutum

	Mal (0-4)	Suficiente (5)	Bien (6-8)	Excepcional (9-10)	Porcentaje total
Generación del marco de San Martín de Salas	No es capaz de generar el marco.	Define correctamente una forma de generar el marco.	Define dos formas de generar el marco, pero comete errores en la explicación.	Define correctamente dos formas de generar el marco.	15%
Generación de la celosía de San Andrés de Bedriñana	Genera cuatro motivos circulares como máximo.	Genera los diez motivos circulares, pero comete errores o no emplea todos los conceptos geométricos solicitados.	Genera los diez motivos circulares y emplea los conceptos geométricos solicitados, pero necesita demasiados pasos.	Genera los diez motivos circulares empleando correctamente los conceptos geométricos solicitados.	15%
Identificación de conceptos geométricos en el cancel de Santa Cristina de Lena	No reconoce los conceptos geométricos estudiados en el bloque Geometría.	Reconoce algunos conceptos geométricos presentes en las imágenes, pero no todos los pedidos.	Reconoce todos los conceptos geométricos pedidos.	Reconoce todos los conceptos geométricos y percibe las relaciones que pueden darse entre ellos en el mismo elemento.	15%
Generación del mural de Santullano	No define el elemento mínimo necesario ni genera el mural	Define varios elementos mínimos, pero explica congruentemente cómo generar el mural.	Define incorrectamente el elemento mínimo, pero explica congruentemente cómo generar el mural.	Define el elemento mínimo y explica correctamente la generación del mural.	15%
Códigos QR	No es capaz de generar códigos QR y no entiende el concepto.	Necesita de la ayuda de sus compañeros para generar códigos QR.	Genera códigos QR, pero no los comprende.	Comprende y genera códigos QR con fluidez.	5%
Hoja de cálculo	No es capaz de manejar la hoja de cálculo y no muestra interés en ello.	Maneja las funciones de la hoja de cálculo que se le piden, pero comete errores.	Maneja correctamente las funciones de la hoja de cálculo que se le piden.	Comprende y explota las posibilidades que ofrece la hoja de cálculo.	10%
Edición de imágenes	No es capaz de editar imágenes y no muestra interés en ello.	Edita imágenes con resultados evidentemente mejorables.	Edita correctamente imágenes y ofrece resultados estéticamente agradables a la vista.	Maneja correctamente el programa y es capaz de exportar ese conocimiento a otros programas.	5%
Trabajo en equipo	No trabaja en equipo y entorpece el trabajo de sus compañeros.	Trabaja en equipo, pero sólo lo estrictamente necesario. No se implica en el grupo.	Trabaja correctamente en equipo. Se implica en el funcionamiento del grupo.	Trabaja en equipo, ofrece su ayuda a sus compañeros y hace lo posible por establecer un buen clima de trabajo.	10%
Ortografía y gramática	Comete múltiples faltas de ortografía y/o gramática, o bien comete faltas graves.	Comete pocas faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	Comete 1 ó 2 faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	No comete faltas de ortografía ni de gramática.	10%

Fuente: elaboración propia.

11.7. Anexo VII: rúbrica de evaluación de las actividades Quo vadis?/ Citius, altius, fortius

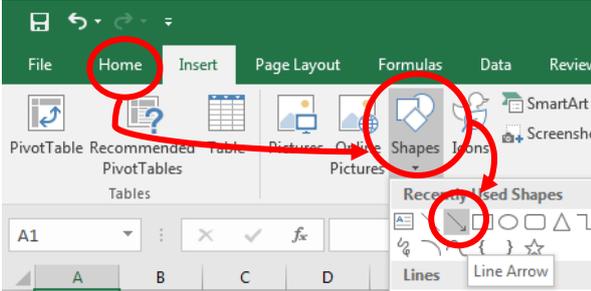
Tabla 16. Rúbrica de evaluación de las actividades Quo vadis?/ Citius, altius, fortius

	Mal (0-4)	Suficiente (5)	Bien (6-8)	Excepcional (9-10)	Porcentaje total
Geolocalización	No es capaz de geolocalizar y/o desconoce los conceptos de longitud y latitud.	Es capaz de definir una ubicación, pero no comprende los conceptos con los que trabaja.	Comprende los conceptos con los que trabaja, pero no trabaja con ellos con fluidez.	Comprende y maneja con fluidez la medición y geolocalización por coordenadas.	40%
Feedforward	Corrige injustamente y no muestra interés en los resultados de sus evaluados o en la mejora de estos.	Corrige de modo justo, pero sólo es capaz de decir qué se ha hecho bien o mal sin aportar alternativas.	Corrige de modo justo y aporta alternativas, aunque no sean especialmente adecuadas.	Corrige de modo justo, motiva y aporta alternativas reales para la mejora de los resultados.	30%
Códigos QR	No es capaz de generar ni descifrar códigos QR y no entiende el concepto.	Necesita de la ayuda de sus compañeros para generar y descifrar códigos QR.	Genera y descifra códigos QR, pero no los comprende.	Comprende, genera y descifra códigos QR con fluidez.	5%
Hoja de cálculo	No es capaz de manejar la hoja de cálculo y no muestra interés en ello.	Maneja las funciones de la hoja de cálculo que se le piden, pero comete errores.	Maneja correctamente las funciones de la hoja de cálculo que se le piden.	Comprende y explota las posibilidades que ofrece la hoja de cálculo.	5%
Trabajo en equipo	No trabaja en equipo y entorpece el trabajo de sus compañeros.	Trabaja en equipo, pero sólo lo estrictamente necesario. No se implica en el grupo.	Trabaja correctamente en equipo. Se implica en el funcionamiento del grupo.	Trabaja en equipo, ofrece su ayuda a sus compañeros y hace lo posible por establecer un buen clima de trabajo.	10%
Ortografía y gramática	Comete múltiples faltas de ortografía y/o gramática, o bien comete faltas graves.	Comete pocas faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	Comete 1 ó 2 faltas de ortografía y/o gramática, pero ninguna de gravedad.	No comete faltas de ortografía ni de gramática.	10%

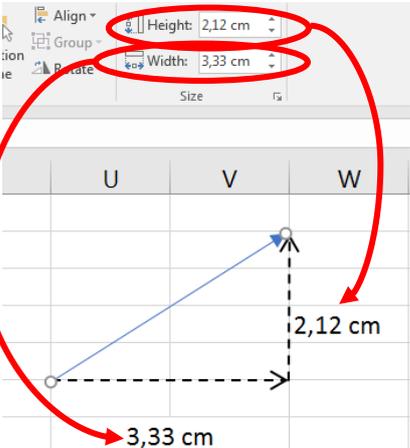
Fuente: elaboración propia.

11.8. Anexo VIII: Guía rápida de manejo de vectores en la hoja de cálculo

GUÍA RÁPIDA DE MANEJO DE VECTORES EN LA HOJA DE CÁLCULO



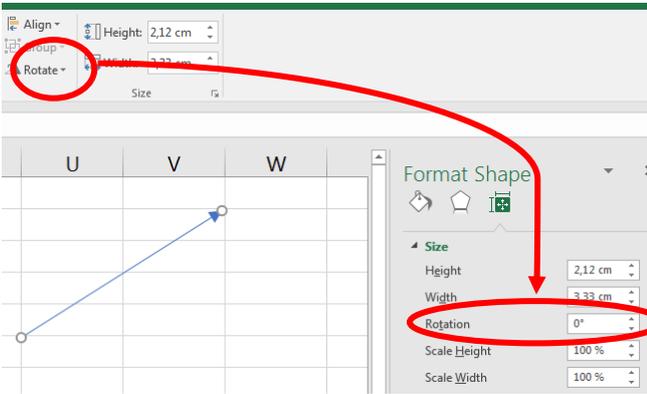
Para insertar un vector iremos a **Insert** → **Shapes** → **Line arrow**



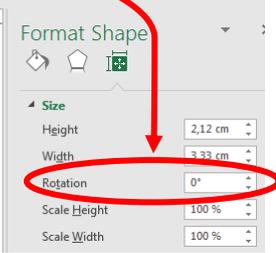
Sólo con pinchar en el vector el programa nos dará el valor de sus componentes vertical y horizontal.

Recuerda que el módulo del vector se calcula como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes.

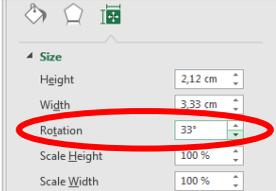
En este caso:

$$\text{Módulo} = \sqrt{2,12^2 + 3,33^2}$$


Para conocer el ángulo que forma el vector con la horizontal, hay que seleccionar el vector y hacer click en **Rotate**. Se abrirá un desplegable donde el programa nos dará por defecto el valor 0° en la casilla **Rotation**.



Aumentando o disminuyendo el valor de la casilla **Rotation** podemos colocar el vector en posición horizontal y saber de ese modo el ángulo que formaba antes de girarlo.



Para que vuelva a su posición anterior sólo hay que escribir 0° en la casilla **Rotation**.

Fuente: elaboración propia.

11.9. Anexo IX: Cuestionario de evaluación para los alumnos

Cuestionario de evaluación					
<i>Marca con un círculo la opción seleccionada</i>					
	TD	DP	N	AP	TA
El uso de ejemplos basados en un entorno real y existente me ha ayudado a comprender los conceptos geométricos que he estudiado.					
He aprendido a manejar nuevos programas informáticos y/o a dar nuevos usos a programas ya conocidos.					
Utilizar programas informáticos me ha hecho más agradable el estudio de la geometría con la que he trabajado.					
He aprendido a contrastar la información disponible en internet y a buscar en fuentes fiables.					
He aprendido conceptos que desconocía sobre el arte prerrománico y/o he reforzado los conocimientos que ya tenía.					
Trabajar en equipo me ha ayudado a entender conceptos mejor que cuando trabajo de modo individual.					
El <i>feedforward</i> de mis compañeros y compañeras me ha resultado más útil que una calificación numérica.					
Poder consultar las rúbricas de evaluación me ha ayudado a organizar mi trabajo.					
No he necesitado más ni menos tiempo del que he tenido disponible para la realización de las actividades.					
¿Tienes algún comentario con el que matizar las anteriores preguntas?					
¿Qué es lo que te ha parecido más interesante? ¿Y lo menos interesante?					
¿Qué mejoras crees que se podrían hacer a las actividades?					
<p><i>TD: total desacuerdo; DP: desacuerdo en parte; N: ni de acuerdo ni en desacuerdo; AP: de acuerdo en parte; TA: total acuerdo</i></p>					

Fuente: elaboración propia.

11.10. Anexo X: Glosario de la geometría a tratar en el arte prerrománico

A continuación, se muestra un glosario con los conceptos geométricos principales que se pueden encontrar en el prerrománico.

11.10.1. Santullano (Oviedo)

Santullano, también conocida como San Julián de los Prados, presenta características geométricas tanto en sus ventanales como en su decoración interior.

En los ventanales se pueden apreciar simetrías, giros y traslaciones, como se pueden ver en los ejemplos de las figuras 34, 35, 36 y 37.



Figura 34. Ventana de Santullano 1

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/santullano.html>



Figura 35. Ventana de Santullano 2

Fuente: <https://www.pinterest.es/pin/463237511657891191/>



Figura 36. Ventana de Santullano 3

Fuente: <https://www.pinterest.es/pin/514536326162088940/>



Figura 37. Ventana de Santullano 4

Fuente: <https://www.pinterest.es/pin/502503270893363031>

La decoración interior, aunque deteriorada, también muestra estas mismas características geométricas, como se puede observar, por ejemplo, en las figuras 38 y 39.



Figura 38. Pinturas murales de Santullano 1

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/santullano.html>

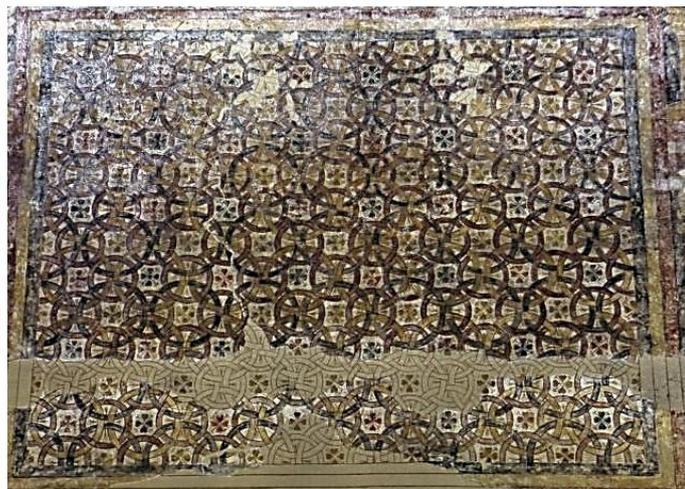


Figura 39. Pinturas murales de Santullano 2

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/santullano.html>

11.10.2. San Tirso (Oviedo)

De la edificación de San Tirso tan sólo se conserva uno de los muros, en el que se puede apreciar simetría y traslación, al igual que en la decoración con motivos florales de los capiteles, tal cual se muestran en las figuras 40 y 41.



Figura 40. Simetría de San Tirso

Fuente: <https://www.turismoasturias.es>



Figura 41. Decoración de los capiteles de San Tirso

Fuente: <https://www.arteguias.com/iglesia/santirsooviedo.htm>

11.10.3. Foncalada (Oviedo)

La Foncalada, único exponente de la arquitectura hidráulica del Alto Medievo Europeo (García, 2000), a pesar del valor añadido que presentan sus inscripciones, sólo muestra como elemento geométrico su simetría central, como se ve en las figuras 42 y 43.



Figura 42. Foncalada 1

Fuente: elaboración propia.



Figura 43. Foncalada 2

Fuente: elaboración propia.

11.10.4. Santa María del Naranco (Oviedo)

Se trata del edificio prerrománico mejor conservado y más representativo. Santa María del Naranco presenta conceptos geométricos en casi la totalidad de sus elementos ornamentales.

El mirador de la fachada este muestra simetría, giro y traslación, como puede verse en la figura 44. En el conjunto pueden incluirse la ventana trifora superior y las tres

ventanas inferiores, así como la decoración estriada de las paredes y los medallones. La fachada oeste, mostrada en la figura 45, presenta los mismos elementos, a excepción de las ventanas inferiores.



Figura 44. Fachada este de Santa María del Naranco

Fuente:
<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 45. Fachada oeste de Santa María del Naranco

Fuente:
<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

La fachada norte, así como la sur, también ofrece simetría y traslación. Puede verse en la figura 46.



Figura 46. Fachada norte de Santa María del Naranco

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

No obstante, en las columnas interiores, así como en los conjuntos entre arcos y medallones, al igual que en estos propios elementos por sí solos, es donde se presentan estos conceptos geométricos de forma más repetitiva. Pueden verse en las figuras 47 a 51.



Figura 47. Columnas soguedas con animales enfrentados en los capiteles de Santa María del Naranco

Fuente:

<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 48. Columnas soguedas con motivos florales en los capiteles de Santa María del Naranco

Fuente:

<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 49. Medallones simétricos de Santa María del Naranco

Fuente:

<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 50. Medallones simétricos dos a dos de Santa María del Naranco

Fuente:

<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 51. Paneles con figuras enfrentadas de Santa María del Naranco

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

11.10.5. San Miguel de Lillo (Oviedo)

Situada a escasos metros de Santa María del Naranco, es una de las construcciones prerrománicas que se encuentran en mejor estado de conservación, a pesar del derrumbe de 2/3 de su estructura original en el siglo XI (García, 2000). Aun así, la parte que se conserva, cerrada nuevamente en el siglo XII, se mantiene en buen estado, a pesar de requerir de protección en sus ventanales frente al clima adverso.

En dichos ventanales se pueden ver intrincados diseños que presentan simetría, giro y traslación, como se muestra en las figuras 52 a 54.



Figura 52. Celosía de la fachada este de San Miguel de Lillo 1

Fuente:

<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 53. Celosía de la fachada este de San Miguel de Lillo 2

Fuente:

<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 54. Celosía de la fachada sur de San Miguel de Lillo

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

En el interior pueden apreciarse también giros y traslaciones en la decoración de los arcos, como puede verse en la figura 55.

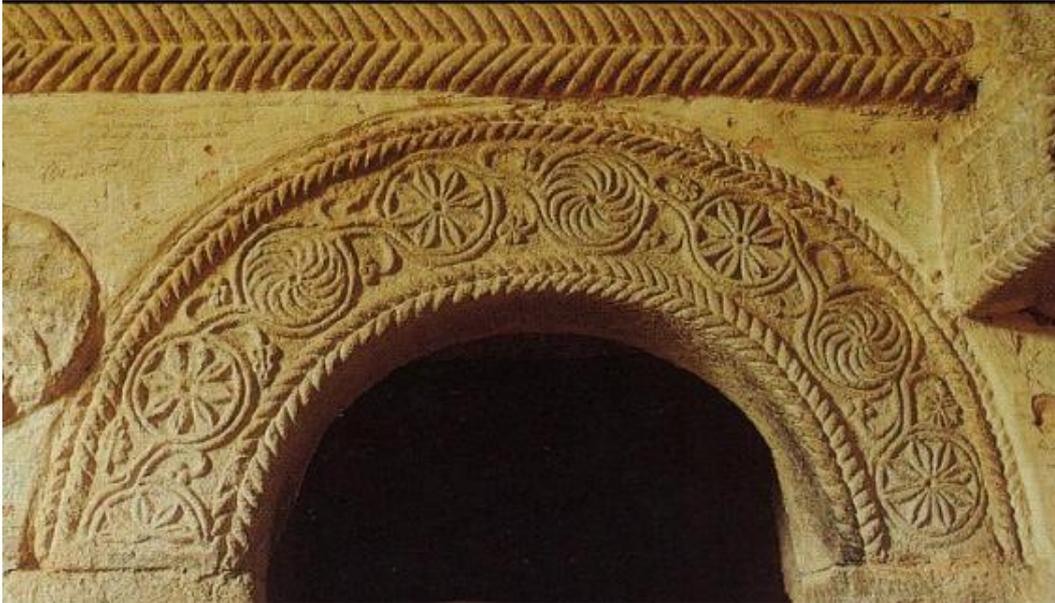


Figura 55. Arcos interiores de San Miguel de Lillo

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/sanmigueldelillo.html>

También en el interior se ven traslaciones entre varias de las figuras que decoran las bases de las columnas, como se muestra en la figura 56.

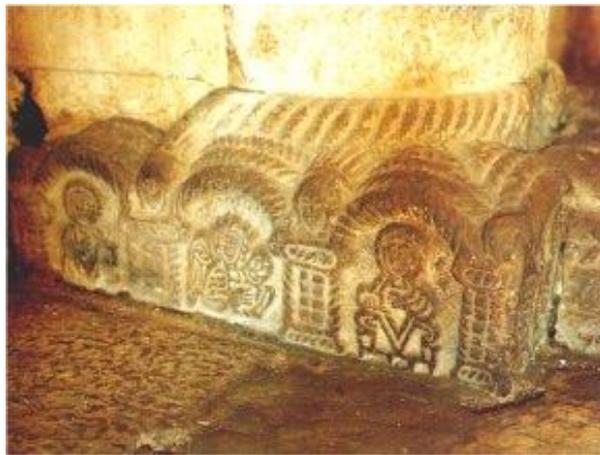


Figura 56. Bases de las columnas de San Miguel de Lillo

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/sanmigueldelillo.html>

Traslaciones, así como simetría y giros, están también presentes en la decoración de las jambas del pórtico, así como en los restos de la pintura del interior de la edificación que se conservan. Estos elementos se muestran en las figuras 57 y 58.



Figura 57. Jamba del pórtico de San Miguel de Lillo

Fuente:
<http://www.jdiezarnal.com/sanmigueldelillo.html>



Figura 58. Pintura interior de San Miguel de Lillo

Fuente:
<http://www.jdiezarnal.com/sanmigueldelillo.html>

11.10.6. Cripta de Santa Leocadia en la catedral de Oviedo

La Cripta de Santa Leocadia presenta dos lápidas funerarias decoradas con motivos geométricos, tales como simetría y traslación, como se puede ver en la figura 59. La ventana de la cripta presenta simetría central, tal cual se muestra en la figura 60.



Figura 59. Lápidas de la Cripta de Santa Leocadia

Fuente:
<https://fmartifomes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 60. Ventana de la Cripta de Santa Leocadia

Fuente:
<https://fmartifomes.com/category/prerromanico-asturiano/>

11.10.7. Capilla de San Miguel en la catedral de Oviedo

La Capilla de San Miguel está en la parte superior de la Cripta de Santa Leocadia. Sufrió importantes modificaciones en el último tercio del siglo XII y también a raíz de las luchas en la Revolución de Octubre de 1934 (García, 2000), de modo que, a pesar de sus bóvedas y columnas decoradas, el único rastro prerrománico a estudiar es su ventana, la cual muestra simetría y giro, como se aprecia en la figura 61.



Figura 61. Fachada de la Capilla de San Miguel

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

11.10.8. Torre Vieja de San Salvador (Oviedo)

La Torre Vieja de la catedral de Oviedo es una fortificación con muros de 140 cm de espesor. En el último tercio del siglo XI se le añadió un cuerpo de campanario abierto al exterior (García, 2000), por lo que, a pesar de la simetría que presenta esa parte de la estructura, en lo que se refiere al prerrománico la geometría asociada es una simetría central en los retranqueos de la fachada, como se puede ver en la figura 62.



Figura 62. Torre Vieja de San Salvador

Fuente: <https://www.xn--castillosdeespaa-lub.es/es/content/san-salvador-torre-vieja>

11.10.9. Santa María de Bendones (Oviedo)

Esta iglesia, junto con la siguiente de la lista, son las que traen aparejada mayor polémica, debido a su destrucción en la Guerra Civil y posterior restauración en 1954 (García, 2000). Los restos que se conservan son apenas una porción de pintura mural y menos de la mitad de su alzado original. En este caso, la geometría a glosar hace referencia a las celosías de las ventanas, teniendo siempre en cuenta que están restauradas y, aunque se les supone cierta similitud con la original, no hay evidencias que lo confirmen plenamente.

En las figuras 63 y 64 se pueden observar simetrías, giros y traslaciones.



Figura 63. Celosía de Santa María de Bendones 1

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 64. Celosía de Santa María de Bendones 2

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

11.10.10. San Pedro de Nora (Las Regueras)

Mismo caso que la iglesia anterior, de San Pedro de Nora tan sólo se conserva una pequeña porción de la obra, así como la planta original, fruto de excavaciones

arqueológicas, siendo el resto una reconstrucción llevada a cabo entre 1952 y 1964 (García, 2000).

Las celosías de sus ventanas muestran igualmente simetrías, giros y traslaciones, como se aprecia en las imágenes 65 y 66.



Figura 65. Celosía de San Pedro de Nora 1

Fuente:
<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 66. Celosía de San Pedro de Nora 2

Fuente:
<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

11.10.11. Santo Adriano de Tuñón (Santo Adriano)

El estado de conservación de Santo Adriano de Tuñón en la actualidad es bastante pobre. Sus celosías han sido reconstruidas y presentan formas similares a otras anteriormente citadas, como las de San Pedro de Nora.

A pesar de eso, en su interior hay también restos pictóricos, los cuales, si bien están también en mal estado de conservación, datan de la época prerrománica y presentan traslaciones, principalmente, pudiéndose intuir cierta simetría originalmente. Puede verse en la figura 67.

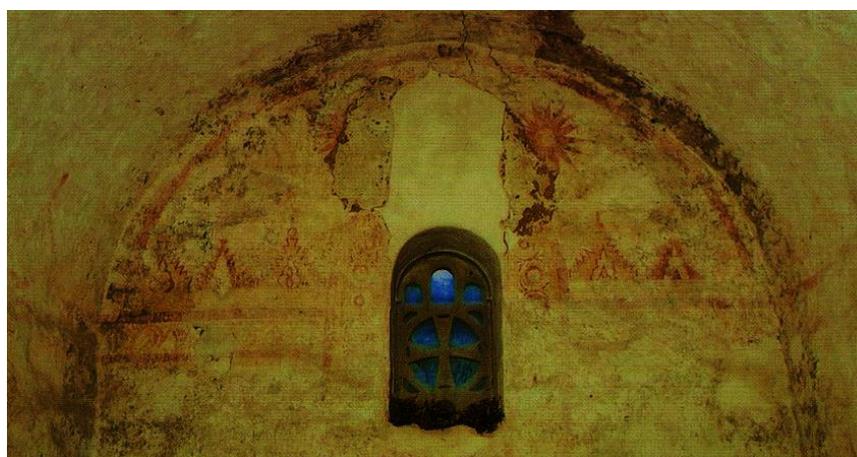


Figura 67. Pinturas de Santo Adriano de Tuñón

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/santoadriano.html>

11.10.12. Santa Cristina de Lena (Lena)

Restaurada en 1892 y reparada a causa de la Revolución de Octubre de 1934, Santa Cristina de Lena conserva la mayor parte de su construcción original, siendo las reparaciones realizadas con total rigor arqueológico (García, 2000). En lo referente a la geometría que presenta, las celosías de las ventanas exteriores muestran simetría central y traslación, como se puede ver en las imágenes 68 y 69.



Figura 68. Celosía exterior de Santa Cristina de Lena 1

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 69. Celosía exterior de Santa Cristina de Lena 2

Fuente: <http://www.romanicodigital.com/cedar/celosia-prerromanica-3020.aspx>

En las celosías interiores también se pueden observar estos conceptos geométricos, como se muestra en la imagen 70.



Figura 70. Celosías interiores de Santa Cristina de Lena

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

Los capiteles de las columnas muestran también traslación, mientras que los grabados en las puertas del ábside, con forma de columna sogueada, presentan simetría central, tanto en la decoración del propio cuerpo de la columna como en la decoración de los

capiteles, donde se ven dos leones enfrentados encerrados en triángulos sogueados. Esto puede apreciarse en la figura 71.



Figura 71. Columnas y grabados decorativos de Santa Cristina de Lena

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

El caso del cancel es especialmente llamativo, ya que en él se pueden apreciar no sólo traslaciones, giros y ciertas simetrías entre sus elementos, sino que los propios elementos las presentan observándolos por separado. Esta es una muestra del carácter pagano y cristiano de esta edificación, donde en el mismo cancel se encuentran inscrita una referencia a los apóstoles cristianos junto a representaciones de la divinidad precristiana. Puede verse en la imagen 72.

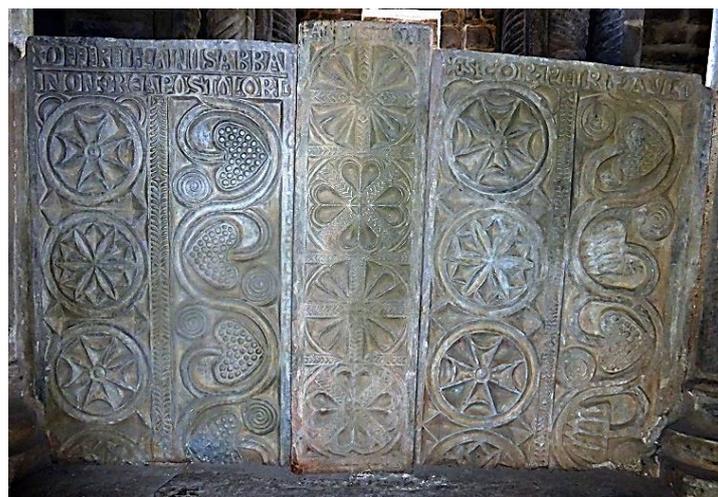


Figura 72. Cancel de Santa Cristina de Lena

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

11.10.13. Santa María de Arbazal (Villaviciosa)

La construcción prerrománica original es hoy el almacén del santuario de la contigua iglesia de Santa María de Arbazal. Se trata de una construcción popular, por lo que, a pesar de su excepcional estado de conservación, es una edificación humilde y poco ornamentada, siendo el arco que separa la cabecera de la nave el único elemento en el que podemos encontrar uno de los conceptos geométricos a estudiar: la simetría central. Este arco puede verse en la imagen 73.



Figura 73. Arco de Santa María de Arbazal

Fuente: <https://asturgeografic.blogspot.com/2013/01/santa-maria-de-arbazal.html>

11.10.14. San Salvador de Valdediós (Villaviciosa)

Esta edificación es una de las mayores y mejor conservadas obras arquitectónicas del arte prerrománico, si bien algunas de sus partes han sido restauradas y sus frescos interiores han sufrido los mismos estragos que las del resto de edificios prerrománicos.

En lo que a geometría se refiere, sus celosías y ventanas presentan simetrías y giros, como puede verse en las figuras 74 a 77.



Figura 74. Ventana bífora de San Salvador de Valdediós

Fuente: <https://bit.ly/2Rnahdd>



Figura 75. Ventana trífora de San Salvador de Valdediós

Fuente: <https://bit.ly/2Rnahdd>



Figura 76. Ventana de la fachada oeste de San Salvador de Valdediós

Fuente:
<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 77. Copia de la celosía original de la fachada sur de San Salvador de Valdediós

Fuente:
<https://www.viajesyrutas.es/2017/07/conventin-san-salvador-sta-maria-asturias.html>

Sus pinturas decorativas interiores se encuentran deterioradas, pero permiten apreciar igualmente traslaciones y simetrías. Se muestran en las imágenes 78 a 80.



Figura 78. Pinturas de San Salvador de Valdediós 1

Fuente:
<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 79. Pinturas de San Salvador de Valdediós 2

Fuente:
<https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 80. Pinturas de San Salvador de Valdediós 3

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

11.10.15. San Salvador de Priesca (Villaviciosa)

Esta edificación, de modo similar a la anterior, muestra simetría en sus celosías, como se puede apreciar en las imágenes 81 y 82.



Figura 81. Ventana de San Salvador de Priesca 1

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>



Figura 82. Ventana de San Salvador de Priesca 2

Fuente: <https://fmartifornes.com/category/prerromanico-asturiano/>

También se pueden apreciar simetrías, giros y traslaciones en las pinturas de su interior. Pueden verse en las figuras 83 a 86.



Figura 83. Pinturas de San Salvador de Priesca 1

Fuente: <https://bit.ly/2QL5nBF>



Figura 84. Pinturas de San Salvador de Priesca 2

Fuente: <https://bit.ly/2QL5nBF>



Figura 85. Pinturas de San Salvador de Priesca 3

Fuente: <https://bit.ly/2QL5nBF>



Figura 86. Pinturas de San Salvador de Priesca 4

Fuente: <https://bit.ly/2QL5nBF>

Hay que destacar también las columnas simétricas de la arquería perimetral de la sala central, en cuyos capiteles se pueden observar traslaciones, principalmente, como se muestra en la figura 87.



Figura 87. Arquería perimetral de la sala central de San Salvador de Priesca

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/sansalvadordepriesca.html>

11.10.16. Santiago de Gobiendes (Colunga)

En el caso de Santiago de Gobiendes la geometría a estudiar se limita la decoración de los capiteles de las columnas interiores, las cuales muestran simetría y traslación. Puede verse en la imagen 88.



Figura 88. Capitel de una columna de Santiago de Gobiendes

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/santiagodegobiendes.html>

11.10.17. Santianes de Pravia (Pravia)

Poco se conserva de esta edificación más allá de la planta y ciertos elementos arquitectónicos. De entre ellos, cabe destacar la ventana bífora que se conserva en el interior de la iglesia, la cual muestra simetría y traslación, como se aprecia en la figura 89, y la ventana de contorno de herradura de la figura 90, que presenta simetría central.



Figura 89. Ventana bífora de Santianes de Pravia

Fuente: <http://www.turismo-prerromanico.com/monumento/santianes-de-pravia-20130114172929/>



Figura 90. Ventana de contorno de herradura de Santianes de Pravia

Fuente: <http://www.turismo-prerromanico.com/monumento/santianes-de-pravia-20130114172929/>

También destaca el cancel, decorado de manera similar al de Santa Cristina de Lena, que presenta simetrías, giros y traslaciones, como se puede ver en la figura 91.



Figura 91. Cancel de Santianes de Pravia

Fuente: <http://www.turismo-prerromanico.com/en/monumento/santianes-de-pravia-20130315211322/>

Es también en esta edificación donde se encuentra el resto del acróstico de Silo, o piedra fundacional de esta iglesia. Destruída en 1662, tan sólo se conserva una pequeña porción (García, 2000), la cual, debido al carácter acróstico de la inscripción grabada en ella, presenta traslación entre sus letras. En las figuras 92 y 93 pueden verse el resto de la obra original y la reconstrucción con el texto completo, en el que puede leerse “*Silo princeps fecit*”.



Figura 92. Acróstico de Silo de Santianes de Pravia
Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/santianesdepravia.html>

T	I	C	E	F	S	P	E	C	N	C	E	P	S	F	E	C	I	T
I	C	E	F	S	P	E	C	N	I	N	C	E	P	S	F	E	C	I
C	E	F	S	P	E	C	N	I	R	I	N	C	E	P	S	F	E	C
E	F	S	P	E	C	N	I	R	P	R	I	N	C	E	P	S	F	E
F	S	P	E	C	N	I	R	P	O	P	R	I	N	C	E	P	S	F
S	P	E	C	N	I	R	P	O	L	O	P	R	I	N	C	E	P	S
P	E	C	N	I	R	P	O	L	I	L	O	P	R	I	N	C	E	P
E	C	N	I	R	P	O	L	I	S	I	L	O	P	R	I	N	C	E
P	E	C	N	I	R	P	O	L	I	L	O	P	R	I	N	C	E	P
S	P	E	C	N	I	R	P	O	L	O	P	R	I	N	C	E	P	S
F	S	P	E	C	N	I	R	P	O	P	R	I	N	C	E	P	S	F
E	F	S	P	E	C	N	I	R	P	R	I	N	C	E	P	S	F	E
C	E	F	S	P	E	C	N	I	R	I	N	C	E	P	S	F	E	C
I	C	E	F	S	P	E	C	N	I	N	C	E	P	S	F	E	C	I
T	I	C	E	F	S	P	E	C	N	C	E	P	S	F	E	C	I	T

Figura 93. Reconstrucción del acróstico de Silo
Fuente: <http://composi.info/mrius-serra-verbalia-juegos-de-palabras-y-esfuerzos-del-ingeni.html?page=22>

11.10.18. San Andrés de Bedriñana (Villaviciosa)

San Andrés de Bedriñana muestra simetría en sus ventanas bíforas, como puede verse en la figura 94. La figura 95 muestra la celosía de la fachada oeste, en la que se aprecian simetría, giros y traslaciones.



Figura 94. Ventana de San Andrés de Bedriñana
Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/arteromanicoasturianosan-andresdebedrinana.html>



Figura 95. Celosía de San Andrés de Bedriñana
Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/arteromanicoasturianosan-andresdebedrinana.html>

11.10.19. San Martín de Argüelles (Siero)

Esta construcción presenta simetría, giro y traslación en sus celosías, las cuales se muestran en las imágenes 96 y 97.



Figura 96. Celosía de San Martín de Argüelles 1

Fuente:
<https://www.flickr.com/photos/87007846@N07/11669017743/in/photostream/>



Figura 97. Celosía de San Martín de Argüelles 2

Fuente:
<https://www.flickr.com/photos/87007846@N07/11668745985/in/photostream/>

11.10.20. San Miguel de Villardevayo (Llanera)

San Miguel de Villardevayo presenta en su celosía simetría, giro y traslación. Puede verse en la figura 98.



Figura 98. Celosía de San Miguel de Villardevayo

Fuente: <https://asturgeografic.blogspot.com/2012/01/san-miguel-de-villardevayo.html>

11.10.21. Santa Eulalia de Morcín (Morcín)

Esta iglesia presenta en sus jambas grabados en los que se aprecian giros, traslaciones y simetría, dependiendo del grabado concreto. Pueden verse en las figuras 99 y 100.



Figura 99. Jambas de Santa Eulalia de Morcín 1

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-santa-eulalia-de-morcín/1449.html>



Figura 100. Jambas de Santa Eulalia de Morcín 2

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-santa-eulalia-de-morcín/1449.html>

Estos mismos conceptos pueden verse también en la celosía, la cual se muestra en la figura 101.



Figura 101. Celosía de Santa Eulalia de Morcín

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-santa-eulalia-de-morcín/1449.html>

11.10.22. San Martín de Laspra (Castrillón)

La geometría relacionada con San Martín de Laspra se limita a la simetría y traslación que se pueden apreciar en su ventana bífora, como se ve en la figura 102. Al igual que en San Miguel de Lillo, se le ha instalado un cristal para minimizar su deterioro.



Figura 102. Ventana bífora de San Martín de Laspra

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/san-martin-de-laspra/1428.html>

11.10.23. San Cipriano de Pillarno (Castrillón)

Al igual que en el caso anterior, aquí se muestra simetría y traslación en una ventana bífora. Se puede ver en la figura 103.



Figura 103. Ventana bífora de San Cipriano de Pillarno

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/san-cipriano-de-pillarno/1429.html>

11.10.24. San Lorenzo de Cortina (Avilés)

Como en los casos anteriores, aquí se aprecia simetría y traslación en una ventana bífora. Puede verse en la figura 104.



Figura 104. Ventana bífora de San Lorenzo de Cortina

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/san-lorenzo-de-cortina/1423.html>

11.10.25. San Francisco (Avilés)

Posee un cancel en el que se encuentra simetría y traslación en algunos de sus elementos compositivos, como se muestra en la figura 105.



Figura 105. Cancel de San Francisco

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/fragmento-de-cancel-de-san-francisco-de-aviles/1427.html>

11.10.26. Santiago de Sariego (Sariego)

En este lugar se conservan tres ventanas bíforas que presentan simetría y traslación, siendo en este caso su decoración más rica que en casos anteriores, como se puede ver en las figuras 106 y 107.



Figura 106. Ventana bífora de Santiago de Sariego
Fuente: <https://bit.ly/2DaBoiO>



Figura 107. Ventanas bíforas de Santiago de Sariego 2
Fuente: <https://bit.ly/2DaBoiO>

11.10.27. San Román de Sariego (Sariego)

Presenta simetría y traslación en su ventana bífora, mostrada en la figura 108.



Figura 108. Ventana bífora de San Román de Sariego
Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/san-roman-de-sariego/1436.html>

11.10.28. Santo Tomé de Priandi (Nava)

En su ventana bífora se pueden ver simetría y traslación, como se muestra en la figura 109.



Figura 109. Ventana bífora de Santo Tomé de Priandi
Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/santo-tomas-de-priandi/1433.html>

11.10.29. Cementerio de Nava (Nava)

Este cementerio, decorado con numerosos restos escultóricos y arquitectónicos medievales, cuenta también con una ventana prerrománica bífora con simetría y traslación, como puede verse en la figura 110.



Figura 110. Ventana bífora del Cementerio de Nava

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/capilla-del-cementerio-de-nava/1434.html>

11.10.30. San Bartolomé de Puelles (Villaviciosa)

Posee una ventana bífora con simetría y traslación, como puede verse en la figura 111, pero también se encuentra en este lugar una pila bautismal decorada en su parte superior con cordón doble, que permite intuir giro entre cada uno de los elementos del cordón, como se muestra en la figura 112.



Figura 111. Ventana bífora de San Bartolomé de Puelles

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-san-bartolome-de-puelles/1465.html>

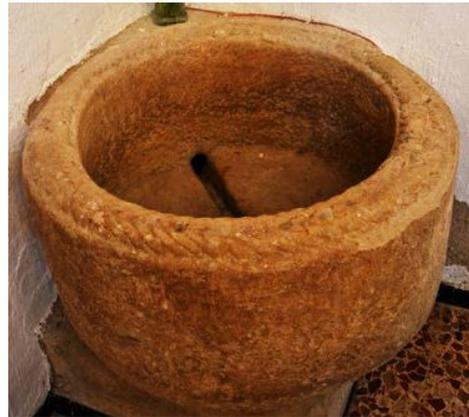


Figura 112. Pila bautismal de San Bartolomé de Puelles

Fuente: <http://elcaminodesantiagodesdeasturias.blogspot.com/2013/05/san-bartolome-de-puelles.html>

11.10.31. San Martín del Mar (Villaviciosa)

Muestra una celosía en la que se aprecian simetría y giro. Puede verse en la figura 113.



Figura 113. Celosía de San Martín del Mar

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/san-martin-de-villaviciosa/1448.html>

11.10.32. San Martín de Salas (Salas)

San Martín de Salas posee varias inscripciones, de las cuales tres presentan, respectivamente, simetría, giro y traslación (figuras 114 y 115) y simetría y giro (figura 116).



Figura 114. Inscripción de San Martín de Salas 1

Fuente:

<https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-san-martin-de-salas/1360.html>

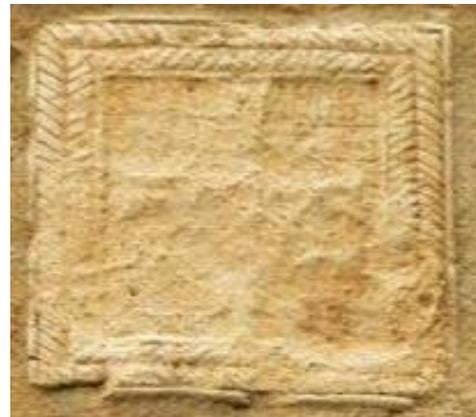


Figura 115. Inscripción de San Martín de Salas 2

Fuente:

<https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-san-martin-de-salas/1360.html>



Figura 116. Inscripción de San Martín de Salas 3

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-san-martin-de-salas/1360.html>

A estas inscripciones hay que añadirles una ventana bífora con simetría y traslación, como puede verse en la figura 117, así como tres dinteles de ventanas tríforas, las cuales, además de simetría, presentan en su decoración nuevamente simetría, giro y traslación. Estos dinteles de ventanas tríforas, a los que se han añadido posteriormente los cuerpos de las columnas en algunos casos, pueden verse en las figuras 118, 119 y 120.

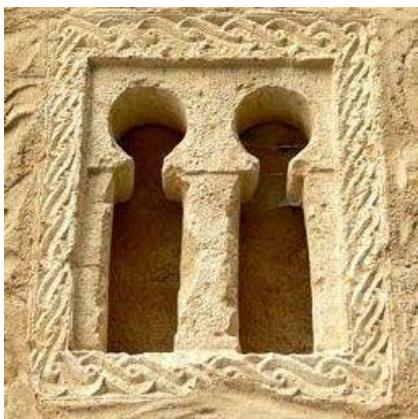


Figura 117. Ventana bífora de San Martín de Salas

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-san-martin-de-salas/1360.html>



Figura 118. Dintel de ventana trífora de San Martín de Salas 1

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-san-martin-de-salas/1360.html>



Figura 119. Dintel de ventana trifora de San Martín de Salas 2

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-san-martin-de-salas/1360.html>



Figura 120. Dintel de ventana trifora de San Martín de Salas 3

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-san-martin-de-salas/1360.html>

11.10.33. San Miguel de Bárcena (Tineo)

San Miguel de Bárcena conserva también una ventana bífora con simetría y traslación, como se ve en la figura 121, pero, además, también conserva una inscripción funeraria dedicada a Arogontine, nieta de los condes fundadores de monasterio a finales del primer tercio del siglo X (García, 2000). Dicha inscripción está formada por una serie de elementos geométricos que presentan entre sí simetría, giro y traslación, tal como se muestra en la figura 122.



Figura 121. Ventana bífora de San Miguel de Bárcena

Fuente: <https://bit.ly/2QRMTPM>



Figura 122. Inscripción funeraria de San Miguel de Bárcena

Fuente: <https://bit.ly/2Fwssab>

11.10.34. San Pedro de Ese de Calleras (Tineo)

En esta edificación se halla una ventana bífora, la cual presenta simetría y traslación, tal como se muestra en la figura 123.



Figura 123. Ventana bífora de San Pedro de Ese de Calleras

Fuente: <https://www.asturnatura.com/turismo/iglesia-de-san-pedro-de-ese-de-calleras/1463.html>

11.10.35. Orfebrería: Cruz de los Ángeles (Oviedo)

La Cruz de los Ángeles, emblema del concejo de Oviedo y cuya inscripción sigue a día de hoy apareciendo en el escudo de Asturias, presenta forma de cruz griega, pudiendo encontrar en su geometría simetría y giro, como se muestra en las imágenes 124 y 125.

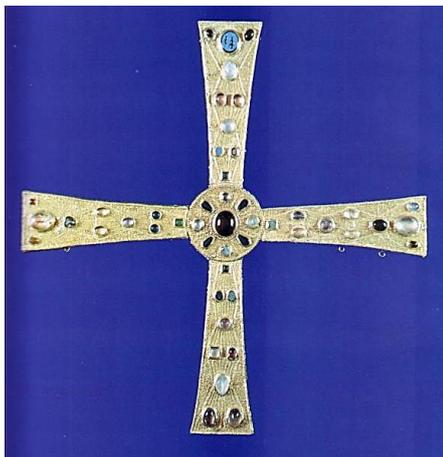


Figura 124. Cruz de los Ángeles

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/lacruzdelosangeles.html>

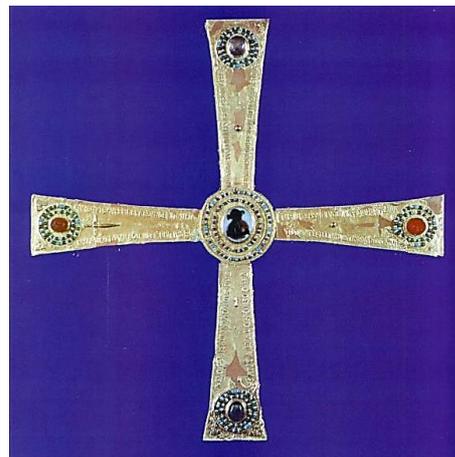


Figura 125. Reverso de la Cruz de los Ángeles

Fuente: <http://www.jdiezarnal.com/lacruzdelosangeles.html>

Su decoración a base de pedrería engastada ofrece también conceptos geométricos tales como simetría, giro y traslación, como se ve en las imágenes 126 y 127.



Figura 126. Detalle de la decoración del camafeo de la Cruz de los Ángeles

Fuente:

<http://apuntes.santanderlasalle.es/arte/prerromanico/asturiano>



Figura 127. Decoración central de la Cruz de los Ángeles

Fuente:

<http://apuntes.santanderlasalle.es/arte/prerromanico/asturiano/>

11.10.36. Orfebrería: Cruz de la Victoria (Oviedo)

La Cruz de la Victoria, presente en la bandera de Asturias, es, a diferencia de la Cruz de los Ángeles, una cruz latina. Presenta las mismas características geométricas que la anterior cruz, como se muestra en las figuras 128 y 129.

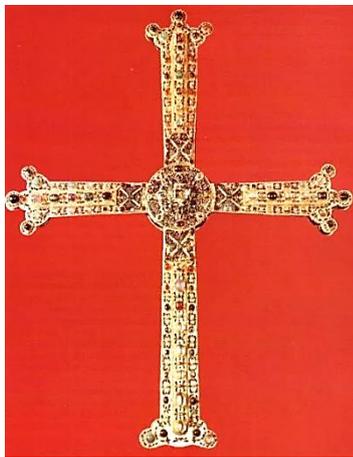


Figura 128. Cruz de la Victoria

Fuente:

<http://www.jdiezarnal.com/lacruzdelavictoria.html>



Figura 129. Reverso de la Cruz de la Victoria

Fuente:

<http://www.jdiezarnal.com/lacruzdelavictoria.html>

Su decoración presenta también simetría, giro y traslación, siendo en este caso mucho más recargada, lo que ofrece mayores posibilidades de jugar con estos conceptos geométricos, como se puede ver en la figura 130.



Figura 130. Detalle de la decoración de uno de los brazos terminado en triple lóbulo y del cuerpo central de la Cruz de la Victoria

Fuente: <http://catedraldeoviedo.com/camara-santa/>

11.10.37. Orfebrería: Arqueta de las Ágatas (Oviedo)

Se trata de una arqueta relicario con forma de prisma rectangular y tapa en forma de tronco piramidal. Su decoración, basada en láminas de ágata enmarcada en arcos de oro y pedrería, ofrece simetría, giro y traslación, como puede verse en la figura 131.



Figura 131. Arqueta de las Ágatas

Fuente: <http://catedraldeoviedo.com/camara-santa/>

La placa de plata que sella su base presenta también idénticos conceptos geométricos entre varios de sus elementos. Puede verse en la figura 132.



Figura 132. Base de la Arqueta de las Ágatas

Fuente: <http://mundodelahistoriadelarte.blogspot.com/2013/04/la-caja-de-las-agatas.html>

11.10.38. Orfebrería: Arqueta de San Genadio (Astorga)

Arqueta relicario de forma similar a la anterior, mostrando en su decoración principalmente simetría y traslación, como puede verse en la figura 133.

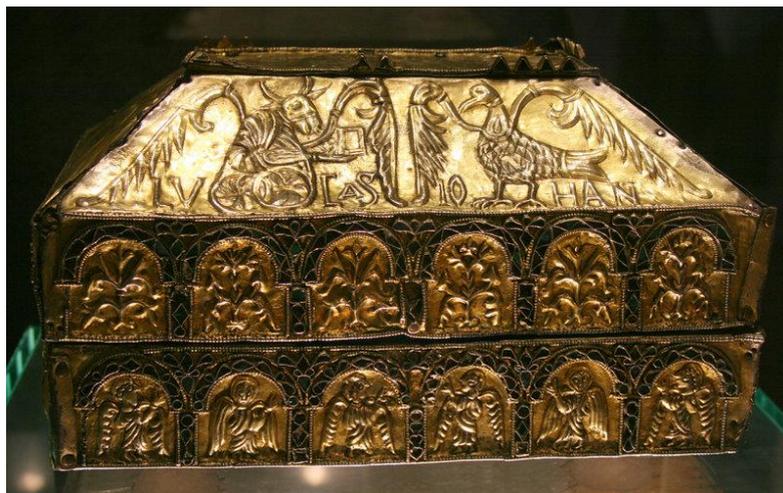


Figura 133. Arqueta de San Genadio

Fuente: http://www.el.tesorodeoviedo.es/index.php?title=Arqueta_de_San_Genadio