EL GRUPO DE TRANSFORMACIONES DE PIAGET *

por JOSE BARRIO GUTIERREZ+

1. Consideraciones previas.

La importancia del pensamiento de Piaget y de la Escuela de Ginebra en el marco de la Psicología contemporánea en general y de la Psicología evolutiva y de la educación en particular es bien conocida. De hecho, una de las corrientes psicológicas de mayor empuje en la actualidad es el cognitivismo, y las líneas maestras de esta concepción nueva de la Psicología se deben, en gran parte, a los estudios del pensador de Ginebra (1).

Todo esto es muy conocido y no vamos a insistir más en ello.

También es conocido, aunque quizás no tanto, la importancia que, dentro de la Epistemiología genética, tiene el grupo de transformaciones de Piaget, el famoso grupo INRC. El propio Piaget ha reiteradamente señalado como el núcleo central y medular de la tercera etapa en la evolución psíquica del niño; la etapa de las operaciones formales tiene como eje cardinal al grupo de referencia.

Lo realmente curioso es que, pese a la enorme importancia y trascendencia que tiene el citado grupo de transformaciones, los estudios sobre el mismo no sólo no sean legión -como deberían serlo-, sino que prácticamente son inexistentes.

* *Este artículo póstumo se publica como homenaje a la memoria de quien fue un gran universitario y un caballero (Nota del Director).*

Revista Española de Pedagogía
año XLVII, nº 183, mayo-agosto 1989

En cierto modo es algo semejante a que en el ámbito del neoconductismo no se hubiera estudiado detalladamente temas como el aprendizaje instrumental o que en la esfera del psicoanálisis no se hubiera centrado la atención de los investigador s en el estudio de lo inconsciente.

Todas estas razones son las que nos han movido a llevar a cabo un estudio, creemos que se puede calificar en justicia de bastante detenido, del grupo INRC, del grupo de transformaciones de Piaget. Este estudio ha quedado estructurado en diversas cuestiones que podrían enunciarse así:

1) Análisis de lo que significa estructura de grupo (noción no originaria de la Psicología, sino nacida en las Matemáticas).
2) Análisis del grupo de Piaget.
3) Importancia de este grupo en Psicología, especialmente en Psicología evolutiva.
4) Análisis y precisión del sentido que tal importancia tiene que tener en el ámbito de lo psicológico.

2. Concepto de grupo

Se define en matemáticas la estructura de grupo como todo un conjunto no vacio, G, dotado de una ley de composición interna que sea asociativa, que tenga elemento neutro y en el que cada uno de sus elementos tiene un elemento simétrico.

En símbolos, si x, y, z ... son elementos del conjunto G, la estructura de grupo se rige por los cuatro axiomas que enunciamos a continuación:

1º Axioma: $(\forall x)\ (\forall y)\ [\exists(x*y)]/(x*y)\in G$
2º Axioma: $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)/(x*y)*Z = x*(y*z)$
3º Axioma: $(\exists e \in G)\ (\forall x)/e*x=x*e = x$
4º Axioma: $(\forall x)\ (\exists x')/x*x' = x' * x = e$

Para aclarar la rigurosa definición matemática que hemos utilizado, quizás un poco ininteligible (especialmente en su formulación simbólica) para los no iniciados en la ciencia de Euclides, vamos a exponer un caso concreto, es decir, un ejemplo, confiando en que sea cierto el conocido apotegma latino de que 'llangum iter per sermonem, breve per exemplorum'.

La cuestión que nos planteamos es la siguiente: ¿Tiene estructura de grupo el conjunto C={0,1,2} con la ley de composición interna definida por la siguiente tabla de doble entrada?:

x	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Vamos paulatinamante viendo si se cumplen las condiciones necesarias y suficientes para que nos encontremos ante una estructura de grupo:

1) Evidentemente el conjunto C no es un conjunto vacío, ya que tiene por definición, tres elementos, el 0, el 1 y el 2 (conjunto vacio es el que no tiene ningún elemento, como, por ejemplo, el conjunto de los triángulos de ocho lados o, también el conjunto de los cuerpos celestes hechos de queso verde. La notación de un conjunto vacío es Ø).

2) La ley de composición que conecta los elementos del conjunto C es una ley de composición interna. Que la ley sea de composición *interna* quiere decir que el resultado de la composición, es decir, de la conexión de los elementos del conjunto, sea también un elemento del conjunto. Por la tabla de doble entrada vemos que, si componemos 0 y 1, el resultado es 1 (que es un elemento del conjunto); si componemos 1 y 2, el resultado es 0; si componemos 1 y 1, el resultado es 2 (que también es elemento del conjunto). Y puede comprobarse que, siempre que compongamos dos elementos del conjunto C, el resultado es también elemento de C.

3) La ley tiene que ser asociativa. Quiere esto decir que, si realizamos tres o más composiciones con elementos del conjunto C, el orden en que realicemos las composiciones parciales es indiferente. O sea, si queremos componer los elementos 0, 1 y 2, y la ley es asociativa, es indiferente componer primero el 0 y el 1, y lo que resulte con el 2, o, si se prefiere, componer primero el 1 y el 2, y lo que resulte con el 0. El resultado final será en ambos casos igual (en el supuesto indicado el resultado final es siempre 0).

La adición de números naturales, es decir, la suma corriente y moliente, es una ley asociativa de composición interna sobre el conjunto de los números naturales. Por ello se dice que es lo mismo, si compramos un bolígrafo, una goma de borrar y un cuaderno en una papelería, el orden en que el cajero sume los precios de los tres objetos: la cantidad a pagar por la compra es siempre la misma.

4) Existencia de elemento neutro. Que un elemento sea neutro quiere decir

que, compuesto con cualquier otro elemento del conjunto C, el resultado de la composición es este segundo elemento.

En el ejemplo que estudiamos hay elemento neutro, el 0, ya que si componemos 0 y 0, el resultado es 0; si componemos 0 y 1, el resultado es 1; si componemos 0 y 2, el resultado es 2.

Los matemáticos, en la práctica, para detectar el elemento neutro buscan en la tabla de doble entrada, expresiva de la ley de composición interna, cuál sea el elemento cuya fila y columna coincida con las situad as en el encabezamiento de la tabla. En nuestro caso inmediatamente se observa que tal requisito sólo se cumple en el caso del elemento 0.

5) Que cada uno de los elementos del conjunto tenga su elemento simétrico. dado un elemento cualquiera se llama su simétrico a aquel elemento del conjunto que, compuesto con el primero, da como resultado el elemento neutro.

Consultando nuestra tabla de doble entrada vemos que cada elemento tiene su simétrico. El simétrico del 0 es el mismo 0 (ya que 0 compuesto con 0 es 0, que es el elemento neutro, tal y como hemos visto en el apartado anterior). El 1 tiene como simétrico al 2, y el 2 tiene como simétrico al 1.

Como consecuencia de los analizado en los apartados anteriores 1), 2), 3), 4) y 5) podemos concluir que el *conjunto C={0, 1, 2} con la ley de composición interna definida mediante la tabla de doble entrada formulada, sí tiene estructura de grupo.*

2.1 Tipos de grupos.

Con arreglo a varios criterios clasificatorios, los matemáticos distinguen tipos muy diversos de grupos. Como es natural, no vamos a realizar aquí una clasificación exhaustiva de los grupos, pero si estudiaremos algunos de los tipos más importantes.

1) Grupo abeliano o conmutativo. Se entiende por grupo conmutativo aquél en el que la ley de composición interna se conmutativa, es decir, en el que el orden en que se realice la composición de los elementos no altere el resultado final.

El grupo que hemos estudiado anteriormente es conmutativo, ya que, al componer dos elementos, no altera el resultado final el orden en que se compongan, es decir, es lo mismo componer 1 y 2 que 2 y 1 (en ambos casos el resultado es 0).

La multiplicación de números naturales es conmutativa; por eso decimos que 'el orden de los factores no altera el producto'. Sin embargo no puede considerarse conmutativa la ingestión de alimentos, ya que no lleva al mismo resultado hacer una comida tomando sopa, solomillo y café -por este orden- que tomando café, solomillo y sopa. Tampoco sería -al decir de los mejicanos- conmutativa la operación de tomar un tequila, ya que primero se toma la sal, luego el limón y por último el tequila (si se cambia el orden y se toma el limón antes que la sal, 'la cosa no resulta').

2) Grupo finito y grupo infinito. Grupo finito es aquél cuyo conjunto tiene un número finito de elementos. Grupo infinito es aquél cuyo conjunto tiene un número infinito de elementos.

Los grupos finitos se clasifican según el número de elementos que tiene su conjunto en grupo de un elemento (o grupo unitario), grupo de dos elementos (o grupo binario), grupo de tres elementos (o grupo ternario), grupo de cuatro elementos (o grupo cuaternario), grupo de cinco elementos, grupo de seis elementos, etc.

En un grupo unitario el único elemento del grupo hace de elemento neutro, y también ese elemento único es el simétrico de sí mismo. La ley de composición interna vendría expresada en la tabla siguiente:

*	e
e	e

En un grupo binario uno de los elementos necesariamente es el elemento neutro. El otro elemento necesariamente es el simétrico de sí mismo. Si designamos por e al elemento neutro y por a al segundo elemento, la ley de composición interna vendría dada por la tabla:

*	e	a
e	e	a
a	a	e

En un grupo ternario uno de los elementos tiene que ser el elemento neutro, al que designaremos por e; si notamos a los otros dos elementos por a y b, la ley de composición interna viene expresada en la tabla:

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	a
b	b	e	a

(es el grupo al que los matemáticos denominan grupo cíclico engendrado por el elemento "a")

Con cuatro elementos existen dos grupos distintos. Uno (denominado por los matemáticos grupo *cíclico de orden 4 engendrado por el elemento a)* tiene como tabla de su ley de composición interna:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

El otro grupo cuaternario tiene como ley de composición interna la expresada en la tabla siguiente:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	-e	a
c	c	b	a	e

Este grupo cuaternario, que como puede comprobar fácilmente el lector es un grupo conmutativo (o abeliano), tiene como interesante característica y sello distintivo el que la composición de dos elementos cualesquiera del grupo -siempre que ninguno de ellos sea el elemento neutro- es igual al tercer elemento restante diferente del elemento neutro (en la tabla puede verse que, si componemos a y b, el resultado es c).

Este grupo al que nos hemos estado refiriendo últimamente es el llamado *grupo de Klein*, y tiene un altísimo interés en el estudio de las estructuras algebraicas. Podríamos decir que, si hubiera que elegir el grupo más importante entre todos los grupos, habría que elegir al grupo Klein. Pues bien, como veremos más adelante, el grupo de transformaciones de Piaget, es decir, el grupo constituido por las transformaciones de identidad, inversión, reciprocidad y correlación piagetianas es, precisamente, un "grupo de Klein".

2.2 Concepto de subgrupo.

Puede suceder que una parte H de un grupo G sea, a su vez, un grupo H. En tal caso se dice que H es un subgrupo de G.

La condición necesaria y suficiente para que H sea subgrupo de G es la siguiente: *Para que una parte H de un grupo G sea subgrupo de G es necesario y suficiente que, para todo par (x . y) de elementos de H, H también contenga también el resultado de componer x con el simétrico de y.*

La expresión simbólica de la anterior condición sería:

$$(\forall\ x \in H)\ (\forall\ y \in H)\ /\ (x * y') \in H$$

3. El grupo de Piaget.

En lo que se refiere al llamado grupo de Piaget, vamos a estudiar dos cuestiones:

1) Importancia psicológica del grupo piagetiano.
2) Análisis detenido de las características del mismo.

3.1 Importancia psicológica del grupo piagetiano.

Podríamos extendernos en múltiples consideraciones sobre la enorme trascendencia que de la Epistemiología genética asigna a la aparición de este grupo dentro de las operaciones formales que van apareciendo en la evolución psíquica del ser humano a partir de los 11 o 12 años. Pero creemos más interesante dejar la palabra primeramente a un excelente conocedor de la obra del psicólogo ginebrino y después, como colofón, al propio Piaget.

García García, refiriéndose a la evolución psíquica del adolescente nos dice los siguiente (1985, págs. 218-220).

"En la adolescencia, el sujeto alcanzará un nivel superior en el desarrollo de la inteligencia: el pensamiento formal. El razonamiento del adolescente supera las limitaciones espacio-temporales de la lógica concreta, propia de la etapa anterior. Se libera de la concrección que impone la realidad y orienta su discurso tanto hacia el pasado como hacia el futuro, lo posible y lo imposible. El adolescente no sólo opera con objetos, sino con clases y relaciones. Convierte sus procesos cognitivos en objeto del propio pensar, o de otra manera, conceptualizando su propio pensamiento. Piaget y la Escuela de Ginebra caracterizan la estructura intelectual del sujeto como pensamiento hipotético-deductivo o lógica formal. La gran novedad de esta etapa es que gracias a la diferenciación entre forma y contenido "el sujeto se hace capaz de razonar correctamente sobre proposiciones en las que no cree, o no cree aún, o sea que considera a título de puras hipótesis; se hace entonces capaz de sacar las consecuencias necesarias de verdades simplemente posibles, lo que constituye el principio del pensamiento hipotético-deductivo o formal" (Piaget-Inhelder, *La psycologie de l' enfant*, París PUF, (Trad. Morata, 1969). "El razonamiento del adolecente no está limitado a lo factual, lo percibido inmediatamente o su experiencia pasada, sino que trasciende a un campo de mera posibilidad y/o abstracción (Inhelder y Piaget, 1955). El sujeto está así capacitado para generalizar las operaciones de clasificación y ordenación, combinado entre sí tanto objetos como ideas y proposiciones.

La liberación de los mecanismos formales del pensamiento con respecto a su contenido desemboca en la elaboración de una estructura mental característica de la etapa: "el grupo conmutativo I.N.R.C." que agrupa cuatro operaciones distintas: Integridad (I), Negación (N), Reciprocidad (R) y Correlatividad (C) (Piaget e Inhelder, 1966, Trad. 1969, pág. 132-150). La consolidación de esta estructura lógica es paulatina y, además, el hecho de que el joven tenga la capacidad de pensamiento hipotético deductivo no conlleva que en todo momento recurra a tal capacidad para resolver los problemas. Por el contrario, el adolescente y también el adulto siguen empleando estrategias de razonamiento propias de estadios anteriores, como la lógica concreta.

Esta capacidad recién conquistada de razonamiento hipotético-deductivo es de gran trascendencia para la configuración de la personalidad o identidad del adolescente.

... La adquisición en esta etapa de las capacidades cognoscitivas que hemos señalado tiene importantes consecuencias en otras dimensiones del desarrollo, como la afectividad y las relaciones sociales. El poder "formular hipótesis", liberarse del aquí y ahora, y remontarse al pensamiento abstracto, convierte al adolescente en un crítico de lo real, de los valores familiares, sociales y culturales establecidos. Al comparar lo real con lo ideal se patentizan las deficiencias, falsedades e injusticias del entorno".

Sintetizando las palabras antes transcritas podemos decir que, para García García, la aparición del pensamiento formal o hipotético-deductivo *-cuyo eje cardinal es el "grupo de Piaget"-* implica nada menos que:

a) El poder orientar el discurso tanto hacia el pasado como hacia el futuro, hacia lo posible y lo imposible; el operar no sólo con objetos sino con clases y relaciones; el razonar sobre proposiciones de meras hipótesis. *En resumen, el poder construir la Ciencia.*

b) El permitir la configuración de la personalidad y de la identidad (o, si se prefiere, de la identidad personal) del adolescente.

c) El desarrollo de la afectividad del ser humano)/ El desarrollo de las relaciones sociales.

Piaget (1970, págs. 50-58) resume con gran nitidez la trascendental importancia que concede al grupo a que nos estamos refiriendo:

"Avec les estructures opératories "formelles" qui commencent à se constituer vers 11-12 ans, nous parvenons à la troisième grande etape du processus qui conduit les opérations à se libérerde la durée, c'est à-dire en fait du contexte psychologique des actions du sujet avec ce qu'elles comportent de dimension causale en plus de leurs propiétés implicatrices ou logiques, pour atteindre finalement ce caractère extemporané qui est le propre des liaisons logicomathématiques épurées.

...Les opérations "fonnelles" marquent par contre une troisième étape où la connaissance dépasse le réel lui-meme pour l'insérrer dans le possible et pour relier directement le possible cognitif, tel que par exemple la suite infinite des entiers, la puissance du continu ou simplement les seize opérations résultant des combinaisons de deux propositions p y q et de leurs négations, est essentiellement extemporané, par opposition au virtuel physique dont les réalisations se déploient dans le temps.

En effect, le premier caractère des opérations fonnelles est de pouvoir porter sur des hypothèses et non plus seulement sur les objets: c'est cette nouveauté fondamentale dont tous les auteurs ont noté l'apparition vers 11 ans. Mais elle en implique une seconde, tout aussi essentielle: les hypothèses n'etant pas des objects sont des propositions, et contenu consiste en opérations intrapositionnelles de classes, relations, etc., dont on pourrait foumir la vérification directe; il en est de même des conséquences tirées d'elles par voie inférentielle; par contre, l'opération déductive conduisant des hypothèses à leurs conclusions n'est plus du même type, mais est interpropositionnelle et consiste donc en une opération effectuée sur des opérations, cést-à-dire une opération qui doivent attendre ce dernier niveau pour se constituer, qu'il s'agisse d'utiliser les implications, etc., de la logique des propositions ou d'élaborer des relations entre relations (proportions, distributivité, etc.), de coordonner deux systèmes de réfénce, etc.

... Mais il en est une autre aussi qui est fondamentale et que l'analyse des faits psychologiques nous avait pennis de mettre en évidence vers 1948-1949 avant que les logiciens ne s'intéressent de leur coté à cette structure: c'est l'union en un seul "groupe quatemaire" (groupe de Klein) des inversions et réciprocités au sein des combinaisons propositionnelles (ou d'un "ensemble de parties" en général). Au sein des opérations concrétes il existe deux fonnes de réversibilité: l'inversion ou négation qui aboutit à annuler un terme, par exemple $+A - A = 0$, et la réciprocité ($A = B$ et $B = A$, etc.) qui aboutit à des équivalences donc à une suppression de différences. Mais si l'inversion caractérise les groupements de classes et la réciprocité ceux des relations caractérise les groupements de classes et la réciprocité ceux relations, il n'existe point encore au niveau des opérations concrètes de système d'ensemble reliant ces transfonnations en toute opération telle que $\supset \cdot$ q comporte une inverse N soit $p.\bar{q}$ et une réciproque R, soit $\bar{p} \supset \bar{q} = q \supset p$, ainsi qu'une corrélative C (soit $\bar{p}.q$ par permutation des disjonctions et de conjonctions dans sa forme normale) qui est l'inverse de sa réciproque. On a alors un groupe commutatif, NR = C; CR = N; CN = R et NCR = I, dont les transformations sont des opérations à la troisième puissance puisque les opérations qu'elles relient ainsi sont déjà de seconde puissance. Ce groupe, dont le sujet n'a naturellement auuene conscience en tant que structure, exprime néanmoins ce qu'il devient capable de faire toutes les fois qu'il distingue une inversion et une réciprocité pour les composer entre elles. Pour exemple lorsqu'ille s'agit de coordonner deux systèmes de référence, dans le cas d'un mobile A se déplaçant sur un support B, l'object A peut rester au même point en référence avec l'extérieur soit par inversion de son mouvement soit par compensation entre ses déplacements et ceux du support: or, de telles compositions ne sont anticipées qu'au présent niveau et impliquent le groupe INRC. De meme les problèmes de proportionnalité, etc., en partant des proportions logiques inhérentes à ce groupe (I : N :: C : R; etc.).L'ensemble de ces nouveautés, qui permettent enfin de parler d'opérations logique-mathématiques autonomes et bien différenciées des actions matérielles avec leur dimension causale, s'accompagne d'un ensemble corrélatif tout aussi fécond dans le domaine de la causalité elle-meme, car, dans la mesure meme de cette différenciation s'établissent des rapports de coordination et meme d'appuis mutuel sur deux paliers au moins et d'une manière qui s'apparente de plus en plus aux procédés de la pensée scientifique elle-même.

Le premier de ces paliers est celui de la lecture même des données de l'expérience physique (au sens large), car il n'existe pas d'experience pure au sens de l'empirisme et les faits ne sont accesibles qu'assimilés par le suject, ce qui suppose l'intervention d'instruments logico-mathématiques d'assimilation construisant des relations qui encadrent ou structurent ces faits et les enrichissent d'autant.

... Si ce premier palier est donc celui des opérations appliquées à l'object et assurant entre autres l'induction des lois physiques élémentaires, le second palier sera celui de l'explication casuale elle-meme, c'est-à-dire des opérations attribuées aux objects. A cet égard on observe au présent niveau le meme progrès massif dans le domaine de la casualité que dans celui des opérations logico-mathématiques.

... Au groupe INRC correspond enfin la compréhension d'un ensemble de structures physiques dont celles d'action et de réaction: par exemple le sujet comprendra, en una presse hydraulique, que l'augmentation de densité du liquide choisi s'oppose à la descente du piston, au lieu de la faciliter comme il pensait jusque-là.

... Certes la science nous a mis depuis longtemps en présence de ces convergences étonnantes entre la déduction mathématique et l'expérience, mais il est saisissant de constater qu'à des niveaux bien inférieurs à celui de ses techniques formalisantes et experimentales une intelligence encore très qualitative et à peine ouverte au calcul parvient à des correspondances analogues entre ses essais d'abstraction et ses effort d'observation tant soit peu méthodiques".

Del jugoso texto de Piaget se deduce que el eminente psicólogo asigna al grupo INRC una misión en realidad épatante y que fundamentalmente consistiría, entre otras cuestiones, en posibilitar la comprensión de temas tan complejos y trascendentales como:

1) La serie infinita de los números enteros.
2) la potencia del conjunto.
3) Las dieciséis operaciones resultantes de las combinaciones de dos proposiciones **p** y **q**.
4) La relación de causalidad.
5) la construcción de la experiencia física por el sujeto cognoscente.
6) El principio de la acción y de la reacción (el tercer principio de la Mecánica newtoniana).
7) La asombrosa y ya desde antiguo detectada convergencia entre los datos obtenidos por la deducción matemática (que prescinde totalmente de la experiencia) y la propia experiencia física. Convergencia que producía gran extrañeza en aquel amigo del gran matemático alemán Lejene-Dirichlet, que en cierta ocasión le dijo: "Es inexplicable lo que acontece con vosotros los matemáticos. Hacéis vuestros cálculos encerrados en una torre de marfil totalmente alejados de la experiencia. Pero, increiblemente, los resultados que obtenéis concuerdan hasta el último detalle con los datos que tal experiencia nos da a conocer".

3.2 *Análisis detenido de las características del grupo de Piaget.*

Comprobemos que el conjunto sobre el que se establece la estructura de grupo no es un conjunto vacio. Evidentemente así es. Se trata de un conjunto cuaternario, cuyos cuatro elementos son la transformación Identidad (I), la transformación Inversión o Negación (N), la transformación Reciprocidad (R) y la transformación Correlación (C).

Asimismo existe una ley de composición interna, definida en la siguiente tabla de doble entrada:

*	I	N	R	C
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

Fácilmente puede el lector comprobar que en efecto, es ley de composición es interna, o sea tal y como anteriormente vimos, si componemos dos elementos cualesquiera del conjunto, el resultado de la composición es también elemento de dicho conjunto (por ejemplo, R*C = N).

La ley de composición interna es asociativa, o sea, que si realizamos dos o más composiciones con los elementos del conjunto, el orden en que se lleven a cabo las composiciones parciales no influye en el resultado final (por ejemplo, (R * N) * C = R * (N * C), en ambos casos el resultado final es I).

Hay elemento neutro, que es I. (Por ejemplo, R * I = R). Por otra parte, I es el único elemento cuya fila y columna coinciden con las situadas en el encabezamiento de la tabla de doble entrada.

Cada uno de los elementos del conjunto tiene su elemento simétrico. El simétrico de I es I (dado que I * I = I). El simétrico de N es N (dado que N * N = I). El simétrico de R es R (dado que R * R = I). El simétrico de C es C (dado que C * C = I). Es decir que en el grupo de Piaget cada elemento es simétrico de sí mismo.

Como consecuencia de este análisis podemos establecer que, efectivamente, el llamado grupo de Piaget tiene verdadera estructura de grupo algebráico.

Pero, además, se trata de un grupo conmutativo o grupo abeliano, dado que el orden en que se realice la composición de los elementos no altera el resultado final (por ejemplo, R * N = N * R; en ambos casos el resultado es C). Podría comprobarse inmediatamente que la ley de composición interna es conmutativa teniendo en cuenta una regla práctica que usan los matemáticos, según la cual una ley de composición interna es conmutativa cuando su tabla de doble entrada es simétrica respecto de la diagonal principal (por diagonal principal se entiende la diagonal que va desde el extremo superior izquierdo de la tabla hasta el extremo inferior derecho de la misma).

En el caso de nuestra tabla diagonal es la señalada en el esquema; si doblásemos la tabla por dicha diagonal, los elementos que se superpondrían serían idénticos, o sea, que la tabla simétrica:

*	I	N	R	C
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

El grupo de Piaget es finito, no infinito; al tener cuatro elementos se trata de un grupo cuaternario.

De los dos posibles grupos de cuatro elementos, el grupo de Piaget no es el *grupo cíclico de orden 4* (como puede comprobarse fácilmente comparando las tablas de doble entrada de uno y otro grupo). Por el contrario, rápidamente se ve que el grupo piagetiano es *un grupo de Klein* (comprobable cotejando las dos tablas).

Resumiendo, hemos demostrado que *el grupo de transformaciones de Piaget es un grupo de Klein.*

Es interesante indicar que en el grupo de Piaget se puede señalar la existencia de subgrupos. Uno, por ejemplo, sería el constituido por los elementos I y N con la siguiente tabla de composición interna:

*	I	N
I	I	N
N	N	I

(Dejamos al lector la tarea de comprobar que, efectivamente, se trata de un subgrupo).

3.3 Algunas interesantes propiedades del grupo de Piaget.

En primer lugar vamos a definir qué entiende Piaget por I, N, R y C.

I es el símbolo de la transformación Identidad, que se define como $I(U) \Leftrightarrow U$, cualquiera que sea U. Traducida esta definición simbólica al lenguaje natural nos dice que la identidad es una transformación que no altera aquello sobre lo que se aplica.

N es el símbolo de la transformación Negación (o Inversión), que se define como N (U U')$\Leftrightarrow$ $(\overline{U\,U'})$. Es decir, la negación consiste en negar como un todo aquello sobre lo que se aplica.

R es el símbolo de la transformación Reciprocidad, que se define como R (U U')$\Leftrightarrow$ $(\overline{U\,U'})$. Es decir, l*a reciprocidad consiste en negar cada una de las partes componentes de aquello sobre lo que se aplica.*

C es el símbolo de la transfonnación Correlación, que se define como C (U U')$\Leftrightarrow$$(\overline{U\,U'})$. Es decir, *la correlación consiste en negar cada una de las partes componentes de aquello sobre lo que se aplica y al mismo tiempo negar como un todo aquello los que se aplica.*

Si concretamos algo más y designamos aquello sobre lo que se van a aplicar las transfonnaciones, no por dos universales U y U', sinó por cualquier proposición de orden tres, definiremos I, N, R, C de la forma siguiente:

$I\ (p\ q\ r) \Leftrightarrow (p\ q\ r)$
$N\ (p\ q\ r) \Leftrightarrow \overline{(p\ q\ r)}$
$R\ (p\ q\ r) \Leftrightarrow (\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{r})$
$C\ (p\ q\ r) \Leftrightarrow \overline{(\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{r})}$

Y si todavía concretamos más, y tomamos una proposición determinada de orden tres (por ejemplo, la proposición conjuntiva p q r), la definición de I, N, R, C será como sigue:

$I\ (p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r)$
$N\ (p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow (\overline{p \wedge q \wedge r}) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$ (por aplicación de una de las leyes De Morgan).
$R\ (p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})$
$C\ (p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \overline{(\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{r})} \Leftrightarrow (p \vee q \vee r)$ (por aplicación de una de las leyes De Morgan y de la ley de la doble negación).

Concretando al *máximun*, y sustituyendo las anteriores funciones proposicionales por proposiciones, la definición de I, N, R, C sería así:

p = Luis es alto
q = Antonio es bajo
r = Pedro es enano

I (Luis es alto y Antonio es bajo y Pedro es enano) equivale a (Luis es alto y Antonio es bajo y Pedro es enano).

N (Luis es alto y Antonio es bajo y Pedro es enano) equivale a (Es falso que Luis es alto, que Antonio es bajo y que Pedro es enano).

R (Luis es alto y Antonio es bajo y Pedro es enano) equivale a (Luis no es alto y Antonio no es bajo y Pedro no es enano).

C (Luis es alto y Antonio es bajo y Pedro es enano) equivale a (Es falso que Luis no es alto y que Antonio no es bajo y que Pedro no es enano (que es equivalente, aplicando una de las leyes de De Morgan y la ley de la doble negación a (Luis es alto o Antonio es bajo o Pedro es enano).

Definidas con todo rigor las cuatro transformaciones de Piaget, podemos enunciar algunas interesantes propiedades de que goza el grupo piagetiano:

1) $N\,N \Leftrightarrow R\,R \Leftrightarrow C\,C \Leftrightarrow I$
2) $N\,R \Leftrightarrow R\,N \Leftrightarrow C$
3) $R\,C \Leftrightarrow C\,R \Leftrightarrow N$
4) $C\,N \Leftrightarrow N\,C \Leftrightarrow R$

Aplicando, por ejemplo, la propiedad 2/ a las proposiciones anteriores quedaría:

(Es falso que Luis no es alto y que Antonio no es bajo y que Pedro no es enano) equivale a (Que Luis no es alto y que Antonio no es bajo y que Pedro no es enano, es falso), lo cual también equivale a (Es falso que Luis no es alto y que Antonio no es bajo y que Pedro no es enano).

Si sustituimos las funciones proposicionales p, q, r por las proposiciones Piaget es ginebrino, Hull es chino y Luria es marciano (tengamos en cuenta que, en las operaciones lógico-formales, la verdad o falsedad de las proposiciones es inoperante) la propiedad 3) diría los siguiente:

(Que Piaget no no es ginebrino y que Hull no no es chino y que Luria no no es marciano es falso equivale a (Es falso que Piaget no no es ginebrino y que Hull no no es chino y que Luria no no es marciano), lo cual a su vez equivale a (Es falso que Piaget es ginebrino y que Hull es chino y que Luria es marciano).

4. Análisis crítico de la trascendencia que en Psicología evolutiva tiene el grupo de transformaciones de Piaget.

En uno de los apartados anteriores de este estudio ya hemos indicado la importancia que por diversos autores -en concreto García García y el propio Piaget- se concede al grupo I, N, R, C en el proceso de aparición de las operaciones lógico-fonnales a lo largo de la evolución psíquica del ser humano. Pero somos de la opinión de que tal importancia, por otra parte indiscutible, tiene que ser claramente definidas en sus justos límites, ya que, en caso contrario, podría llevar a conclusiones erróneas por no decir ridículas. Es lo que, creemos, ha sucedido con alguno de los expositores de la epistemiología genética piagetiana.

A fin de llevar a cabo la misión indicada, vamos a fijarnos detenidamente en un párrafo del texto de Piaget que hemos transcrito anteriormente. Nos dice el psicólogo ginebrino:

"..Les opérations "formelles" marquent par contre une troisième étape où la connaissance dépasse le réel lui-meme pour l'insérrer dans le possible et pour relier directement le possible cognitif, tel que par exemple la suite infinite des entiers, la puissance du continu ou simplement les seize opérations résultant des combinaisons de deux propositions p y q et de leurs négations, est essentiellement extemporané, par opposition au virtuel physique dont les réalisations se déploient dans le temps". (el subrayado es nuestro).

El texto piagetiano es claro: la aparición de las operaciones formales permite al ser humano la comprensión de las dieciséis operaciones resultantes de combinar dos proposiciones y sus negaciones, es decir, la comprensión de las proposiciones de orden dos. Analicemos detenidamente esta temática.

Como es sabido, la lógica matemática divide las proposiciones de orden uno (por ejemplo, el número dos es un número par), de orden do s (por ejemplo, Los peces son vertebrados y los insectos son invertebrados), de orden tres (Cuando llueve, la circulación automovilística se hace imposible en Madrid y es preferible no sacar el coche).

Las proposiciones de orden dos son, pues, las integradas por dos proposiciones simples. El número de proposiciones de orden dos es 222=16 (dado que se combinan dos proposiciones simples, cada una de las cuales puede tener dos valores (verdadero o falso), y las proposiciones de orden dos resultantes de la combinación pueden, a su vez, tener dos valores (verdadero o falso) -es lo que los matemáticos denominan un caso de variaciones con repetición-.

¿Cuales son estas 16 proposiciones de orden dos? Como la naturaleza de una proposición lógica depende de su valor de verdad o falsedad, las distintas proposiciones de orden dos serán función de diferentes posibles valores de verdad o falsedad que puedan alcanzar, y que dependerán de los valores de verdad o falsedad de las proposiciones simples que las integran.

Acudiendo al cálculo combinatorio puede verse que estas dieciséis proposiciones son el resultado de la siguiente expresión:

$$C_4^4+C_4^3+C_4^2+C_4^1+C_4^0=1+4+6+4+1=16$$

que a su vez queda plasmada en la tabla siguiente (dividimos la tabla en dos partes para poder representarla con mayor claridad):

p q	T p q	$p \vee q$	$p \leftarrow q$	$p \rightarrow q$	$\overline{p \wedge q}$	p	$\bar{p}$	$p \veebar q$
1 1	1	1	1	1	0	1	0	0
1 0	1	1	1	0	1	1	0	1
0 1	1	1	0	1	1	0	1	1
0 0	1	0	1	1	1	0	1	0

$p \leftrightarrow q$	q	$\bar{q}$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p \leftarrow q}$	$\overline{p \rightarrow q}$	$p \wedge q$	Cpq
1	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0

Las dos primeras indican los cuatro valores posibles que pueden tener dos proposiciones simples, p y q, si se consideran sus valores conjuntamente, es decir, las dos verdaderas, la primera verdadera y la segunda falsa, la primera falsa y la segunda verdadera, las dos falsas (recordemos que la verdad se asigna con el número 1 y la falsedad con el 0).

Las restantes 16 columnas (que constituyen viendo las diferentes maneras como pueden colocarse 4 unos, 3 unos y un cero, 2 unos y 2 ceros, 1 uno y 3 ceros, 4 ceros) representan los valores de verdad o de falsedad de cada una de las proposiciones de orden dos. Así, la primera de estas columnas representa una proposición de orden dos que siempre es verdadera, con independencia de los valores de verdad o de falsedad de las dos proposiciones simples que la integran. La segunda columna representa una proposición de orden dos que sólo es falsa al ser falsas las dos proposiciones simples que la integran, y así sucesivamente. Lo importante es destacar que *estas proposiciones de orden dos se definen, única y exclusivamente, por su correspondiente columna, que técnicamente es lo que se llama su tabla veritativa o tabla de valores verdad o falsedad.*

Así, como ejemplo, vamos a fijarnos en la llamada proposición conjuntiva (en símbolos, $p \wedge q$), cuya tabla de verdad está representada en la décimo-quinta columna. Pues bien, la definición correcta -y la única correcta- de ella es decir que proposición conjuntiva es aquella proposición de orden dos que sólo es verdadera al serlo también las dos proposiciones simples que la integran. La simbolización de esta proposición es $p \wedge q$, que se lee "p y q". El signo $\wedge$ es la conectiva, llamada conjuntor. Un ejemplo de proposición conjuntiva sería *El día es hermoso y la fortuna me sonríe.*

De las dieciséis proposiciones de orden dos Piaget se refiere de modo especial a la *proposición condicional*. En efecto nos dice:

" Par contre, au niveau de la combinatorie propositionnelle, toute operation telle que $p \supset q$ comporte une inverse N soit $p.\bar{q}$ et une réciproque R soit $p \supset q = q \supset p$, ainsi qu'une corrélative C (soit $\bar{p}.q$ par permutation des disjonctions et de conjontions dans sa forme nonnalc) qui est l'inverse de sa réciproque. On a alors un groupe conmutatif, NR = C; CR = N; CN = R et NRC = I, dont les transformations sont des opérations à la troisème paissance puisque les opérations qu'elles relient ainsi sont déjà de seconde puissance".

El que Piaget se haya fijado concretamente en la proposición condicional pone de relieve el profundo conocimiento que tiene de la problemática proposicional, pues, sin duda alguna, es la proposición condicional la más compleja y la que plantea mayores y más abundantes dificultades dentro de las dieciséis proposiciones de orden dos.

Proposición condicional es aquella proposición cuya tabla veritativa es la situada en la columna cuarta, definiéndose, por tanto, como la proposición de orden dos que sólo es falsa al ser verdadera la primera de sus dos proposiciones simples integrantes (proposición que se denomina *condición, antecedente o prótasis*) y falsa la segunda (*llamada condicionado, consecuente o apódosis*). La simbolización de esta proposición es $p \rightarrow q$ que se lee *si p, entonces q*, utilizándose como conectiva el signo $\rightarrow$ llamado *condicionador*.

(El lector habrá observado que la conectiva usada por Piaget es distinta de la utilizada por nosotros. La razón de ello es que existen tres grandes escuelas de lógica matemática, la escuela inglesa o escuela de Russell, la alemana o de Hilbert y la polaca o de Lukasiewicz. Cada escuela tiene un sinónimo diferente. Así, por ejemplo en, la proposición condicional se representa en la escuela inglesa $p \supset q$, en la alemana $p \rightarrow q$ y en la polaca Cpq. Nosotros usamos la notación de la escuela de Hilbert, ya que en el momento actual, es la que se ha impuesto de manera prácticamente universal).

En realidad, y es cosa en que todos los lógicos están de acuerdo, la proposición condicional $p \to q$ no es sino una forma universalmente admitida de expresar la proposición $p \vee q$. Es decir, que$(p \to q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ (el signo $\Leftrightarrow$ se lee *equivale* a. Poniendo un ejemplo concreto, la proposición condicional *Si llueve, entonces las calles se mojan* e quivale a la proposición disyuntiva inclusiva *O no llueve o las calles se mojan*.

Dejando de lado alguno de los diversos e interesantes problemas que plantea la proposición condicional, como, por ejemplo, su diferencia con la *implicación*, pasemos a aclarar los establecido por Piaget en el texto anteriormente transcrito.

Nos dice que toda operación del tipo $p \to q$ comporta una inversa N del tipo $p \wedge \bar{q}$ (2). Efectivamente:

$(p \to q) \Leftrightarrow (\bar{p} \forall q)$, como hemos dicho hace un instante.

La inversión N consiste en negar, como un todo, aquello sobre lo que se aplica la inversión, luego:

$$N(\bar{p} \forall q) \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \forall q} \Leftrightarrow (\bar{\bar{p}} \wedge q \Leftrightarrow p \wedge \bar{q} \quad (2)$$

La recíproca consiste en negar individualmente cada una de las partes de aquello sobre lo que se aplica la reciprocidad, luego:

$$R(p \to q) \Leftrightarrow (\bar{p} \to \bar{q}) \Leftrightarrow (\bar{\bar{q}} \to \bar{\bar{p}}) \Leftrightarrow q \to p$$

La correlatividad consiste en negar individualmente cada una de las partes, y, también, la totalidad de aquello sobre lo que se aplica la correlatividad, luego:

$$R(p \to q) \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \to \bar{q}} \Leftrightarrow \overline{\bar{\bar{p}} \forall q} \Leftrightarrow \overline{p \forall q} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{\bar{q}}) \Leftrightarrow \bar{p} \wedge q$$

Ahora ya nos es fácil comprobar la verdad de la afirmación de Piaget, de que nos encontramos ante un grupo abeliano o conmutativo, en el que las transformaciones son operaciones de tercera potencia (o de tercer orden), ya que las entidades sobre las que se aplican son de segundo orden (proposiciones de orden dos).

El grupo al que se refiere Piaget tiene, como transformaciones fundamentales NR=C; CR=N; CN=R; NRC=I. Comprobemos que así es efectivamente:

$NR(p \to q) \Leftrightarrow R\ \overline{p \to q}$ (por definición de N $\Leftrightarrow \overline{\bar{p} \to \bar{q}}$ (por definición de R) $\Leftrightarrow$

$\overline{\bar{\bar{p}} \forall \bar{q}}$ (por la equivalencia entre la proposición condicional y la disyunción inclusiva)$\Leftrightarrow p \forall \bar{q}$ (por la ley de la doble negación)$\Leftrightarrow \bar{p} \forall \bar{q}$ (por la ley de Morgan referente a la disyunción inclusiva)$\Leftrightarrow$ $\bar{p} \wedge q$ (por la ley de la doble negación) $C(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \rightarrow \bar{q}}$ (por definición de C).
Como esta expresión es igual a la que aparece en tercer lugar en el razonamiento anterior, es evidente que queda demostrado que NR$\Leftrightarrow$C (Piaget utiliza el signo =; nosotros consideramos más correcto utilizar $\Leftrightarrow$ que significa "equivalente a", no "igual a". En efecto NR, hablando con propiedad, no es igual a C, sino que es equivalente a C (igual a NR solo es NR -).

$CR(p \rightarrow q) \Leftrightarrow R\ \overline{\bar{p} \rightarrow \bar{q}}$(por definición de correlación)$\Leftrightarrow \overline{\bar{\bar{p}} \rightarrow \bar{\bar{q}}}$ (por definición de reciprocidad)$\Leftrightarrow$ $\overline{p \rightarrow q}$ (por la ley de la doble negación)$\Leftrightarrow$ $\overline{\bar{p} \forall q}$ (por la equivalencia entre la proposición condicional y la disyunción inclusiva)$\Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$ (por la ley de la doble negación).

$N(p \rightarrow q) \Leftrightarrow$ $\overline{p \rightarrow q}$ (por definición de N). Como esta expresión es igual a la que aparece en cuarto lugar en el razonamiento anterior, es evidente que queda demostrado que CR$\Leftrightarrow$N.

$CN(p \rightarrow q) \Leftrightarrow N\ (\overline{\bar{p} \rightarrow \bar{q}})$ (por definición de C)$\Leftrightarrow \overline{\overline{\bar{p} \rightarrow \bar{q}}}$ (por definición de N)$\Leftrightarrow \bar{p} \rightarrow \bar{q}$ (por la ley de la doble negación)$\Leftrightarrow \bar{\bar{p}} \forall \bar{q}$(por la equivalencia entre la proposición condicional y la disyunción inclusiva)$\Leftrightarrow p \forall \bar{q}$(por la ley de la doble negación).

$R(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \rightarrow \bar{q}$ (por definición de R). Como esta expresión es igual a la que aparece en cuarto lugar en el razonamiento anterior, es evidente que queda demostrado que CN$\Leftrightarrow$R.

$NRC\ (p \rightarrow q) \Leftrightarrow RC\ \overline{(p \rightarrow q)}$ (por definición de N) $\Leftrightarrow \overline{\bar{p} \rightarrow \bar{q}}$ (por definición de R) $\Leftrightarrow \bar{p} \rightarrow \bar{q}$ (por definición de C) $\Leftrightarrow p \rightarrow q$ (por la ley de la doble negación)$\Leftrightarrow \bar{p} \forall q$ (por la equivalencia entre la proposición condicional y la disyunción inclusiva).$I(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$(por definición de I). Como esta expresión es equivalente a la que aparece en quinto lugar en el razonamiento anterior, es evidente que queda demostrado que NRC $\Leftrightarrow$ I.

Ahora bien, y con esto nos introducimos en el meollo de nuestra problemática, cuando dice Piaget que a los 11 ó 12 años surgen en el niño las operaciones formales, ¿quiero esto decir que a esa edad o a una edad próxima el ser humano tiene plena consciencia y conocimiento de dichas operaciones en general, del grupo de transformaciones piagetiano en particular y, todavía más en particular, de toda el álgebra proposicional?. Expresándonos en el lenguaje de los antiguos, a veces de enorme claridad y precisión, ¿el conocimiento de dichas operaciones formales, del grupo de Piaget y de la lógica proposicional se da en el sujeto humano a partir de los 11 ó 12 años *in actu signato*?, o por el contrario, ¿se trataría de que en el niño aparecen unas potencialidades para, lentamente y con el transcurso del tiempo, llegar a captar de un modo más consciente toda la complejidad de las citadas operaciones formales en general y del grupo piagetiano y del álgebra de proposiciones en particular?.Es decir, el conocimiento de las operaciones formales ¿se dará en el sujeto cognoscitivo no en acto, sino *in potencia* más o menos *propinqua* al acto?.

Piaget, un tanto de pasada, nos indica en un texto suyo al que nos hemos referido con frecuencia que el conocimiento que el sujeto humano tiene del grupo que estudiamos (y, por ende, de las demás operaciones formales y del álgebra proposicional) no es un conocimiento consciente, actual, claro y detallado:

"Ce groupe, dont le sujet n´a naturellement aucune conscience en tant que structure...".

El conocimiento que el niño tiene del grupo no supone más que la capacidad de poder realizar una inversión o una reciprocidad o una correlación:

"Ce groupe, dont le sujet n´a naturellement aucune conscience en tant que structure, exprime néanmoins ce qu´il devient capable de faire toutes les fois qu´il distingue une inversion et une réciprocité pour les composer entre elles".

Queda, pues, bien claro que, para Piaget, el conocimiento que en la etapa de las operaciones formales se alcanza del grupo piagetiano y de aquello con él relacionado y en él basado-como el álgebra proposicional- no no es un conocimiento claro y distinto(por hablar en cartesiano), sino únicamente la capacidad que surge en el ser humano de poder realizar inversiones, reciprocidades o correlaciones de un modo confuso e intuitivo.

Pero es más, creemos-este aspecto quizás ha sido poco desarrollado por Piaget- que esa potencialidad, que esa capacidad nunca podrá actualizarse de un modo correcto y adecuado sin el concurso de los lenguajes formales-la Matemática y la Lógica matemática-. Queremos decir con esto que el sujeto humano usando únicamente de la llamada lógica natural, usando sólo de la inteligencia natural, sin potenciarla con el conocimiento de los lenguajes formales, jamás puede llegar a dominar con perfección, por ejemplo, la lógica o álgebra proposicional.

Nuestro anterior aserto es fácil de demostrar. Prescindiendo de largas disquisiciones teóricas, nos bastara descender a unos pocos ejemplos significativos:

1/ Planteemos la siguiente cuestión: ¿Cuál es la negación de la proposición

Si Antares es una estrella, entonces Antares emite luz propia?.La respuesta que se da a esta pregunta por los diversos sujetos suele ser de lo más variopinta, pero casi sin excepción incorrecta (por ejemplo, una respuesta muy frecuente es decir que la negación pedida es la proposición *Si Antares no es una estrella, entonces no emite luz propia*, respuesta a todas luces incorrecta). La única manera de hallar con plena seguridad la solución exacta es recurriendo al lenguaje formal de la lógica matemática y razonando así:

Representando por p a la proposición *Antares es una estrella* y por q la proposición *Antares emite luz propia*, la forma simbólica de la proposición formulada es $p\to q$. La negación de esta proposición será $\overline{p\to q}$. Dado que $(p\to q)\Leftrightarrow(\bar{\bar{p}}\forall \bar{q})$ (en virtud de la equivalencia entre la proposición condicional y la disyuntiva inclusiva), $\overline{p\to q}$ es equivalente a $\overline{\bar{p}\forall q}$, y esta lo es a la vez a la proposición $\bar{\bar{p}}\wedge q$ (en virtud de la ley de Morgan para la disyunción). A su vez $p\wedge q$ equivale a $p\wedge \bar{q}$ (en virtud de la doble negación).

Como consecuencia de todo lo anterior tenemos que $\overline{p\to q}$ es equivalente a $p\wedge \bar{q}$. Luego la negación correcta de la proposición que nos ha sido dada (es decir, de la proposición. *Si Antares es una estrella, entonces emite luz propia) será Antares es una estrella y Antares no emite luz propia.*

2/ *¿Napoleón no es francés y Augusto no es romano* es la correcta negación de la proposición *Napoleón es francés y Augusto es romano?*. La mayoría de las personas a las que consultásemos (por no decir todas dirían que sí es una correcta negación. Fácilmente, recurriendo, eso sí, a la Lógica matemática, se comprueba que no es una negación bien hecha.

Napoleón Bonaparte es francés será designada por la letra p
Augusto es romano sera designada con la letra q
Napoleón Bonaparte es francés y Augusto es romano será $p\wedge q$

La negación de $p\wedge q$ es $\overline{p\wedge q}$. *Si Napoleón Bonaparte no es francés y Augusto no es romano* fuese la negación correcta de $p\wedge q$, las tablas veritativas de las proposiciones $\bar{p}\wedge\bar{q}$ y $\overline{p\wedge q}$ serían iguales (recordemos que en Lógica matemática, dos proposiciones son iguales cuando sus tablas veritativas son iguales). Construyendo ambas tablas:

Tabla veritativa de Napoleón Bonaparte no es francés y Augusto no es romano ($\bar{p}\wedge\bar{q}$):

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\overline{p\wedge q}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Tabla veritativa de Es falso que *Napoleón Bonaparte es francés y Augusto es romano*($p\wedge q$):

p	q	$\bar{p}\ \bar{q}$	$p\wedge q$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Ambas tablas son diferentes, luego queda demostrado que $\bar{p}\wedge\bar{q}$ no es la negación de $\overline{p\wedge q}$.

¿Cuál será la negación correcta? Como hemos visto, la negación de $p\wedge q$ es $\overline{p\wedge q}$. En virtud de la ley de De Morgan para la conjunción tenemos que $\overline{p\wedge q} \Leftrightarrow (\bar{p}\wedge\bar{q})$.Luego una negación correcta de la proposición dada es *Napoleón Bonaparte no es francés o Augusto no es romano.*

3) Dada la proposición *Es falso que sí sólo los hombres son ricos ,entonces son felices*, Hallar otra que sea equivalente a ésta y en la que se unen como conectivas únicamente el negador, el conjuntor y disyuntor inclusivo.

Si en los ejemplos anteriores veíamos que era prácticamente imposible hallar la respuesta adecuada sin ayudarse de la Lógica proposicional matemática; en el caso ahora planteado es absolutamente imposible. Veamos como gracias a ese poderoso instrumento potenciador de la inteligencia humana que es la Lógica matemática, la solución es fácil de encontrar.

Expresemos de una forma simbólica la proposición dada:

Los hombres son ricos......p
Los hombres son felices....q
La expresión simbólica de la proposición Es falso que sólo si los hombres son ricos, entonces son felices será (ya que se trata de una proposición bicondicional): $p\wedge q$

Ahora bien, la proposición bicondicional $p\leftrightarrow q$ es equivalente a la negación de la disyunción exclusiva $p \vee q$ (como puede comprobarse viendo que las tablas veritativas de una y otra son iguales. En efecto, tabla veritativa de $p\leftrightarrow q$:

p	q	$p\leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

tabla veritativa de $\overline{p \underline{\forall} q}$:

p	q	$p \underline{\forall} q$	$\overline{p \forall q}$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

comprobamos que, efectivamente, coinciden, luego las dos proposiciones son equivalentes. En consecuencia podemos escribir que $\overline{p \leftrightarrow q} \Leftrightarrow \overline{\overline{p \forall q}}$ y, en virtud de la ley de la doble negación (o ley involutiva, como también es llamada), $\overline{p \leftrightarrow q} \Leftrightarrow (p \underline{\forall} q)$.

Pero $p \underline{\forall} q$ es equivalente a $(p \forall q) \wedge \overline{p \wedge q}$ (como puede comprobarse viendo que las tablas veritativas de ambas proposiciones son iguales; en efecto, tabla veritativa de $p \underline{\forall} q$:

p	q	$p \forall q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

tabla veritativa de $p \forall q \wedge p \wedge q$

p	q	$p \forall q$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$(p \forall q) \wedge \overline{p \wedge q}$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

(ambas son iguales).

En consecuencia podemos escribir que $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow [(p \forall q) \wedge p \wedge q]$

Luego la proposición equivalente pedida será: *Los hombres son ricos o los hombres son felices, y es falso que los hombres sean ricos y que los hombres sean felices.*

¿Puede alguien creer que sin la ayuda de la Lógica matemática y usando sólo la inteligencia natural se puede llegar a esta solución correcta?.

Como consecuencia y último colofón de todo lo anteriormente expuesto creemos poder establecer las siguientes conclusiones:

1) Cuando Piaget dice que la aparición en el niño de 11 o 12 años del grupo INRC tiene como misión posibilitar la comprensión del tema relativo a las dieciséis proposiciones resultantes de las combinaciones de dos proposiciones p y q, tal afirmación tiene que ser entendida en el sentido de

a) La aparición del grupo INRC significa que el sujeto humano se abre la posibilidad de llegar a la comprensión de la compleja temática referente a las 16 proposiciones de orden dos.

b) La recta comprensión de la temática antes aludida es imposible usando exclusivamente la razón natural, es decir, mediante el uso de la razón espontánea.

c) Sólo es viable llegar a tal recta comprensión utilizando un instrumento fuertemente potenciador de la capacidad natural de la razón humana, instrumento que en este caso concreto es el lenguaje de la Lógica matemática.

Creemos que, sin duda alguna, este es el pensamiento que subyace en la tesis de Piaget, como no podía ser menos dada la altísima formación matemática del psicólogo suizo; pero no es menos cierto que no aparece dicho pensamiento explicitado con la suficiente extensión y claridad en los escritos piagetianos.

4.1. Las operaciones formales y la serie infinita de los números enteros.

Un texto muy significativo de Piaget es aquél en el que nos dice :

"Les operation"fonnelles" marquent par contre une troisiéme étape où la connaissance dépasse le réel lui-meme pour l'insérer dans le possible et pour relier directement le possible cognitif, tel que par exemple la suite infinie des entiers... est essentiellement extemporáne, par opposition au virtuel physique dont les réalisations se déploient dans le temps".

Hace referencia aquí Piaget al conocimiento de algo tan importante y de tan peculiar y compleja naturaleza como es la serie de los números enteros. El psicólogo ginebrino destaca como factores típicos y constitutivos de este conocimiento:

a) Que se supera y se transciende lo real, factor indudable ya que, en ultima instancia, todo ente matemático está más allá de la estricta realidad. Ya desde Platón se destacó el que las entidades matemáticas no son algo real, sino algo ideal (según Platón, ubicadas en el Κοσμος νcηος).El intentar plasmar en lo real lo matemático únicamente conduce a su adulteración y a que pierda su verdadera naturaleza. No se puede construirun triangulo real. Por"muy bien" que este hecho, dibujado, construido, no será el tal "triángulo" más que una pobre, imperfecta -y por ello inadecuada e incorrecta copia del verdadero triángulo, del triángulo ideal (como puede comprobarse, al menos en este punto tiene vigencia el mito de la caverna platónico).

b)Transcendemos lo real y con ello nos insertamos en la esfera de lo posible.Como tantas veces, Piaget es de una precisión y exactitud loables. En efecto, el ámbito de lo matemático no es, según acabamos de ver, lo real, sino lo posible.Reiteradamente se ha hecho observar, especialmente por el gran matemático alemán David Hilbert y por su escuela formalista, que *en Matemáticas existencia equivale a carencia de contradicción, es decir, a posibilidad.* Un ente es posible cuando entre las notas integrantes de su concepto no hay contradicción -*"por eso no es posible el pentágono de quince lados"*-.

c)Lo posible se liga con lo necesario sin la indispensable mediación de lo concreto. En efecto, establecida la posibilidad de un ente matemático, tal ente se hace un ser necesario, es decir, *que es como es, y no puede ser de una forma distinta.* Establecida la posibilidad de la existencia - existencia matemática, bien entendido- del triángulo (dado que entre sus notas construtivas no hay contradicción), el triángulo pasa a insertarse en el reino de lo necesario y así todas sus propiedades serán necesarias (necesariamente la suma de sus ángulos internos será igual a 180º, etc., etc.).

d) Con el conocimiento de la serie infinita de los enteros penetramos en lo intemporal. Es esta, la intemporalidad, una de las característica más significativas de lo matemático, frente a la temporalidad inevitable de lo real físico. Todo acontecer físico está encuadrado en las coordenadas espacio-temporales una realidad física exenta de temporalidad se nos presenta como ininteligible. Por el contrario, lo matemático transciende la temporalidad. Nuevamente se presenta como válida la concepción que de los seres matemáticos -enclavados en el intemporal mundo inteligible- nos dejó Platón.

Ahora bien, ¿Cómo hay que entender este conocimiento de la serie de los enteros que, según Piaget aparece en la etapa de las operaciones formales, es decir, a partir de los 11 o 12 años?.Creemos que con las mismas características que encontrábamos al estudiar el conocimiento por parte del niño en su tercera gran etapa evolutiva respecto de las dieciséis proposiciones de orden dos. Es decir:

a)La aparición del grupo INRC significa únicamente que en el niños se abre la posibilidad de llegar a la comprensión de la compleja temática referente a la serie infinita de los números enteros.

b)La recta comprensión de esta temática es imposible usando solamente la razón natural, es decir, mediante el uso de la razón espontánea.

c)Sólo es viable llegar a tal recta comprensión utilizando un instrumento fuertemente potenciador de la capacidad natural de la razón humana, instrumento que en este caso concreto es el lenguaje formal de las Matemáticas y, más en concreto, de la teoría de series.

De esta forma es como podrá el sujeto humano llegar a comprender cuestiones tan abstrusas como:

1) La diferencia entre series infinitas y series indefinidas. La confusión entre lo infinito y lo indefinido ha llevado al hombre a innumerables errores ((uno bien famoso y conocido desde antiguo es la aporía de Aquiles y la tortuga de Zenón de Elea,y, en general, la mayor parte de los argumentos que formularon los eleatas contra el movimiento). Ahora bien, la capacidad natural de la razón del niño y también del adulto no es suficiente para llegar a diferenciar con nitidez lo infinito y lo indefinido.

Consideremos la serie de los inversos o seria armónica:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots,\frac{1}{n}$$

La suma de los términos de la serie es:

Términos	Suma acumulada
$1 = 1$	1
$\frac{1}{2} = 0{,}5$	1.5
$\frac{1}{3} = 0{,}3333$	1.8333
$\frac{1}{4} = 0{,}25$	2.0833
$\frac{1}{5} = 0{,}2$	2.2833
$\frac{1}{6} = 0{,}1666$	2.45
$\frac{1}{7} = 0{,}1428$	2.5928
$\frac{1}{8} = 0{,}125$	2.7178

El limite de esta suma es infinito.

Analicemos ahora la serie de los inversos cuadrados:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots,\frac{1}{n}$$

La suma de los términos de esta serie es:

Términos	Suma acumulada
$1 = 1$	1
$\frac{1}{2} = 0{,}5$	1,25
$\frac{1}{3} = 0{,}3333$	1,3611
$\frac{1}{4} = 0{,}25$	1,4236
$\frac{1}{5} = 0{,}2$	1,4636
$\frac{1}{6} = 0{,}1666$	1,4913

El limite de esta suma (frente a lo que creerá el que sólo se guía por la razón natural,por el uso espontáneo de la razón) es $\frac{\pi}{6}$

Pensamos que este sencillo ejemplo es más que suficiente para demostrar nuestra tesis.

Y lo mismo acontece si nos introducimos en la temática relativa a la numerabilidad o no numerabilidad de la serie (o mejor, del conjunto) de los números enteros.

Se dice que un conjunto infinito (como lo es el conjunto de los números enteros) es numerable cuando tiene la misma potencia que el conjunto N de los números naturales , es decir, cuando ambos conjuntos son equipotentes. Y es equipotente con N cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto N y los del conjunto considerado, en este caso el de los números enteros.

Pues bien,dado que el conjunto de los enteros comprende los números enteros positivos y los negativos, y dado que el conjunto N sólo comprende los números naturales, parece lógico que ambos conjuntos no sean equipotentes, ya que el de los números enteros tiene más elementos que el de los números naturales. Esto parece cosa del más elemental sentido común. Nada más erróneo. En este caso el sentido común, como en tantas ocasiones,no es sino fuente de crasos errores (por algo decía Einstein que el sentido común era el conjunto de prejuicios que la sociedad imbuye al individuo durante los primeros dieciocho años de la vida). El conjunto de los números enteros-positivos y negativos- y el conjunto de los números naturales son equipotentes, ya que entre ellos se puede establecer una correspondencia biunívoca.

Es evidente que la razón natural del hombre (al fin y al cabo eso es lo que se llama "sentido común") nunca puede llegar a tal conclusión. Es más, cuando las Matemáticas nos dicen que ambos conjuntos son equipotentes, la razón natural "se resiste" a admitirlo. O dicho de otro modo, que la aparición y desarrollo normal de las operaciones formales a lo largo del periodo evolutivo del psiquismo humano no conduce de facto a tal resultado. Lo único que establece es la posibilidad de llegar a él, una vez que la mente humana se apoya en el báculo del lenguaje formal de las Matemáticas.

Y todavía se podría aducir más ejemplos "extraños" para el sentido común, como lo es el que al tratarse de conjuntos infinitos el todo puede ser igual a una de sus partes o, si se prefiere en el lenguaje de la teoría de conjuntos, que al tratar con conjuntos infinitos puede suceder que un conjunto sea equipotente con un sub conjunto propio del mismo. Así el conjunto de los números naturales es equipotente con el conjunto de los números pares o con el conjunto de los impares o con el conjunto de los números primos.

4.2. Las operaciones formales y la potencia del continuo.

Algo análogo a lo que hemos afirmado respecto de la aparición y posterior desarrollo de las operaciones formales y, la serie de los enteros podía afirmarse en relación con tales operaciones y el tema de la potencia del continuo.

En primer lugar reproduzcamos el texto de Piaget en el que a alude la cuestión:

"Les operations "formelles"marquent par contre une troisiéme étape oú la connaissance dépasse le réel lui-meme pour l'inserer dans le possible et pour relier directement le possible au necessaire sans la mediation indispensable du concret: or, le posible cognitif,tel que par exemple la suite infinie des entiers, la puissance du continu...est essentiellement extemporané, par opposition au virtuel physique dont les réalisations se deploient dans le temps".

Introduzcamos ahora en el tema de la potencia del continuo uno de los temas más difíciles y apasionantes de las Matemáticas.

Se llama potencia de un conjunto al número de elementos que dicho conjunto; esta potencia se expresa con un número llamado "cardinal del conjunto". Así el conjunto de los días de la semana

D={lunes, martes, miercoles, jueves ,viemes, sábado, domingo} es de potencia 7, y se dice que su cardinal es el 7;y el conjunto de los meses del año

M={enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre , noviembre, diciembre} es de potencia 12, y se dice que su cardinal es 12.

En el caso del conjunto de los números naturales,N,que tiene infinitos elementos,se dice que su potencia es infinita y su cardinal es *alef cero* (este concepto fue introducido por Cantor, el genial matemático alemán).Todos aquellos conjuntos que son numerables, es decir, que son equipotentes con N,tienen como cardinal al *alef cero* (tal sucede , como hemos visto antes, con el conjunto de los números impares, el de los números pares o el de los números primos).

Pero también tiene como cardinal *alef cero* el conjunto de los números enteros- también lo hemos visto en el apartado anterior- y el conjunto de los números racionales (conjunto que comprende a los enteros positivos y negativos y a los fraccionarios positivos y negativos).

Pero no sucede así con el conjunto de los números reales, el conjunto R, uno de los conjuntos más interesantes en Matemáticas. Este conjunto, que comprende los números racionales y los irracionales, no es equipotente con el conjunto, no es equipotente con el conjunto de los naturales, ya que no puede establecerse entre ambos conjuntos una correspondencia biunívoca -el conjunto d los números reales tiene más elementos que el conjunto de los números naturales, es decir, su cardinal es mayor y se le designa como *alef uno* (la demostración de la imposibilidad de establecer una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos la hizo por primera vez Cantor, con el llamado método de la diagonal y que ahora no podemos detenernos a ver).

Ahora bien, *el conjunto de los números reales sí puede corresponderse biunívocamente con los puntos de una recta, con el 'continuo' que representan los puntos de la recta, y por esta razón se dice que 'alef uno' es la potencia del continuo.*

Hasta ahora hemos visto que hay dos cardinales infinitos, el alef cero (cardinal del conjunto de los números naturales y de todos los conjuntos numerables) y el alef uno (cardinal del conjunto de los números reales, del continuo). ¿Habrá más cardinales infinitos? Cantor demostró que el número de estos cardinales infinitos es infinito; es el célebre teorema de Cantor que, formulado de modo no muy técnico, dice: dado cualquier cardinal infinito c, existe siembre un cardinal mayor que c (4).

Cuestión muy relacionada con la potencia del conjunto es la famosa *hipótesis del conjunto continuo, según la cual entre el 'alef cero' y el 'alef uno' no hay ningún otro cardinal, o sea, que no hay ningún cardinal que sea a la vez mayor que 'alef cero' y menor que 'alef uno'*. En símbolos y designado con b a cualquier cardinal:

$\overline{\exists \mid \beta}$ / alef cero < β < alef uno (no existe un β, tal que alef cero < β < alef uno)

A la vista de lo que hemos expuesto sobre los problemas de la potencia del continuo es claro que la aparición de las operaciones formales a partir de los 11 ó 12 años no supone la intelección en acto de tales cuestiones. Como en casos anteriores, tales operaciones formales sólo implican una capacidad más o menos remota de, con ayuda del formalismo matemático, alcanzar la adecuada comprensión de tal tema. No insistimos en esto ya que se trata de extrapolar lo que estudiamos detenidamente con anterioridad.

4.3. Las operaciones formales y la relación de causalidad.

Dice Piaget:

" Si ce premier palier est donc celui des opérations appliquées à l'object et assurant entre autres l'introduction des lois physiques élémentaires, le second palier sera celui de l'explication causale elle-meme, c'est-à-dire des opérations attribuées aux objects. A cet égard on observe au présent niveau le meme progrès massif dans le domaine de la causalité que dans celui des opérations logico-mathématiques".

No podemos, por razones de extensión, ocupamos con todo detalle de la trascendental importancia que tiene la aparición de la relación de causalidad en la evolución del psiquismo humano. Lo que sí queremos señalar, a efecto de precisar las características que la captación de la conexión 'A es causa de B' tiene en el niño, son dos aspectos, a nuestro juicio básicos, de la relación causal, tal como aparece en la etapa de las operaciones formales.

En primer lugar destacar que, de las dos concepciones que tradicionalmente se han tenido de la causalidad, la concepción ontológica y la concepción fenoménica, la que aparece en el niño de un modo más espontáneo es la segunda.

Analicemos más detenidamente cada una de estas dos formas de concebir la relación de causalidad, es decir, la relación causa-efecto. En la llamada *concepción ontológica de la causalidad* la relación entre la causa y el efecto se concibe como nacimiento del ser de uno por otro y, por consiguiente, como dependencia del ser de uno (el efecto) con relación a otro (la causa).

En la concepción fenoménica causalidad quiere única y exclusivamente una mera sucesión temporal de manifestaciones (fenómenos) o, más exactamente, una mera relación de fenómenos que se suceden regularmente; la causalidad se traduce en sucesión, en la que el fenómeno primeramente manifestado recibe el nombre de *antecedente* (la causa) y el orto de *consiguiente* (el efecto).

Pues bien, la manera como el niño concibe la causalidad es como sucesión fenoménica, como conexión temporal y regular entre dos acontecimientos. Es lógico que así sea, ya que la concepción ontológica de la causalidad implica la posesión de la noción de ser, noción demasiado abstracta para que surja en el psiquismo humano en fechas tan tempranas.

El segundo aspecto básico a señalar es el referente a la relación de prioridad entre causa y el efecto. Como nos dice Manser (1953, pág. 370-371):

"Si se considera a la causa y el efecto en su relación mutua, es decir, formalmente, en cuanto que son correlativos, ambos son temporal, lógica y realmente simultáneos, porque la causa sólo es causa en cuanto que produce un efecto, ésta sólo es efecto en cuanto que es efectuado, y nuestro conocimiento de esto supone, a su vez, la simultaneidad de ambos. Mas si, por el contrario, consideramos la causa y el efecto en cuanto a su materialidad, es decir, cuantitativamente, la causa es anterior al efecto, aunque no siempre temporalmente, por lo menos naturalmente (prioritate natura). Aquí tiene validez absoluta el principio aristotélico: la causa es anterior al efecto *(tò gàr aìtion próteron ou aítion)*. La razón es manifiesta. Aquello de lo que depende otro ser es anterior a este ser dependiente".

Pues bien, la primera concepción que parece surgir en el niño respecto de la causalidad es que la de que la causa tiene prioridad respecto del efecto. Es la concepción que, nacida espontaneamente, perdurará a lo largo de la existencia del sujeto psíquico. De ahí la universalidad del principio 'la causa es anterior al efecto'. La captación de que desde un punto de vista formalmente estricto la causa y el efecto son simultáneos, supone una capacidad de abstracción que no surge en el niño cuando nacen en él las operaciones formales, y que incluso no llega a darse en muchos adultos.

En cualquier caso aquí se plantea un tema de gran riqueza y que exigiría un estudio mucho más detenido.

4.4. Las operaciones formales y la construcción de la experiencia física por el sujeto cognoscente.

Dice Piaget:

"Le premier de ces paliers est celui de la lecture meme des données de l'experience physique (au sens large), car il n'existe pas d'expérience pure au sens de l'empirisme et les faits ne sont accessibles qu'assimilés par le subject, ce qui suppose l'intervention d'instruments logico-mathématiques d'assimilation construisant des relations qui encadrent ou structurent ces faits et les enrichissent d'autant".

El análisis detenido de este breve texto de Piaget justificaría la realización de un extenso trabajo. Se trata, nada más y nada menos, de que, en opinión del psicólogo suizo, el conocimiento que tenemos de lo real, la experiencia física, no es una imagen especular (producida en un espejo plano) sino todo un constructo. Piaget toma aquí partido en la vieja polémica entre realismo e idealismo gnoseológico (o epistemiológicos), temática muy querida para él (no olvidemos que su doctrina se conoce como una Epistemología genética). Con toda claridad rechaza la concepción humana, la postura realista, según la cual nuestro conocimiento se limita a reflejar la realidad tal cual es. Es la concepción que en el ámbito literario fue expresada perfectamente por Flaubert cuando decía que el realismo literario (la novela realista) no era sino un espejo situado a lo largo de un camino.

Piaget rechaza de plano esta concepción episteoilógica; el conocimiento no es la mera imagen de lo existente; el sujeto en el acto de conocer no tiene una actitud pasiva, el la que se limita a reflejar lo real . El acto cognoscente es radicalmente activo, constructivo, en el que se construyen relaciones que encuadran y estructuran los hechos (qui encadrent ou structurent ces faits). Piaget adopta, pues, lo que tradicionalmente se ha denominado una postura idealista. E incluso dentro de la multiplicidad de idealismo surgido en el devenir histórico del pensamiento humano podríamos afirmar que el psicólogo de Ginebra se aparta de los idealismos absolutos (tipo Fichte, Schelling o Hegel), del idealismo solipsista (tipo Schuppe o Schubert-Soldern), centrándonos en un idealismo trascendente tipo kantiano. La experiencia física sería la síntesis de lo dado por la realidad exterior al sujeto y lo puesto por este (les faits ne sont accessibles qu'assimilés par le suject). Parece que Piaget suscribiría, con lógicamente algunas reservas, la tesis kantiana de que 'intuiciones sin conceptos son vacíos'. En cuanto a los caracteres concretos y detallados de este idealismo piagetiano no pueden ser ahora analizados. Su extraordinaria importancia (en cierto modo constituyen todo el núcleo de la Epistemología genética) requerirían un trabajo muy extenso.

Igualmente es de gran interés el rechazo del empirismo en cuanto que tal sistema gnoseológico defiende la existencia de una importancia pura. La idea de la mente humana como una *tabula rasa*, como un *white paper* que va percibiendo pasivamente las impresiones transmitidas por los sentidos se presenta -y diríamos, con toda razón- como inaceptable para Piaget. También este aspecto del pensamiento piagetiano requeriría un tratamiento mucho más detenido del que nos es posible llevar a cabo en este trabajo.

4.5. *Las operaciones formales y el principio de la acción y de la reacción.*

Nos encontramos con uno de los principios de la Mecánica newtoniana, en concreto el tercer principio. Su enunciado es el siguiente: Si dos cuerpos interaccionan, la fuerza que actúa sobre el primero producida por el segundo es igual y opuesta a la fuerza que actúa sobre el segundo producida por el primero:

$$F_A \text{ producida por B} = F_b \text{ producida por A}$$

En la actualidad sabemos que esta ley newtoniana no tiene validez universal (5), ya que hay violaciones muy importantes de la misma. Por ejemplo, cuando una partícula cargada se aleja de un alambre que conduce una corriente eléctrica, el alambre ejerce una fuerza magnética sobre la partícula cargada. mientras que la fuerza total que ejerce la partícula sobre el alambre es nula.

No obstante sigue siendo una ley importante dentro de la dinámica y de muy frecuente aplicación, como por ejemplo, en el caso de la prensa hidráulica al que se refiere Piaget: 'Au groupe INCR correspond enfin la compréhension d'un ensemble de structures physiques dont celles d'action et de réaction: par exemple le sujet comprendra, en une presse hydráulique, que l'augmentation de densité du liquide choisi s'oppose à la descente du piston, au lieu de la faciliter comme il pensait jusque-là'.

Como en casos anteriores, la comprensión que se alcanza por el niño de este principio de la acción y de la reacción es muy parcial e incompleto. Prueba de ello es la dificultad en que se encuentra si se lo propone algún problema con él relacionado, como por ejemplo, el siguiente: Cuando un caballo tira de un carro, la fuerza que el caballo ejerce sobre el carro (acción) es igual a la que el carro ejerce sobre el caballo (reacción). Entonces, ¿por qué el carro avanza en lugar de quedarse inmóvil?.

4.6. Las operaciones formales y la concordancia entre los datos obtenidos por la deducción matemática y la experiencia.

En primer lugar vamos a transcribir el texto en que Piaget hace referencia a esta cuestión:

'... Certes la science nous a mis depuis longtemps en présence de ces convergences étonnances entre la deduction mathématique et l'expérince, mais il est saisissant de constater qu'à des niveaux bien inférieurs à celui de ses techniques fonnalisantes et expérimentales une inteligence encore très qualitative et à peine ouverte au calcul parvient à des correspondances analogues entre ses essais d'abstraction et ses efforts d'observation tant soit peu méthodiques'.

Claramente Piaget pone de relieve esta tesis que hemos estado defendiendo reiteradamente en anteriores apartados, que la aparición de las operaciones formales no supone una plena captación por parte del niño de las convergencias asombrosas entre Matemáticas y realidad, sino únicamente la existencia de tele concordancias a niveles muy inferiores *(niveaux bien inférieurs).*

No obstante, la temática no puede ser más interesante; de hecho y desde muy antiguo esta correspondencia entre resultados de las Matemáticas y la experiencia real han producido la admiración de los hombres . Y sería algo muy interesante hacer un estudio de los múltiples factores psicológicos presentes en la captación de esta correspondencias.

Pasemos a estudiarlas, aunque sea de un modo un tanto somero. Los primeros que pusieron su atención e la concordancia deducción matemática y realidad fueron los pitagóricos. Para ellos, el número es la esencia de las cosas, y conociendo el número de una cosa podemos dominarla a nuestro interés. De hecho, la tesis de que el número es la esencia de las cosas es la versión en el lenguaje de los pensadores antiguos de la tesis actual según la cual todo fenómeno natural puede ser expresado mediante una o varias ecuaciones matemáticas. Esta tesis, jalón esencial y básico en el pensamiento moderno, fue formulada con toda nitidez por Galileo, cuando estableció que el que quiera leer en el libro de la Naturaleza tendrá que saber Matemáticas, ya que el lenguaje en que está escrito tal libro es el lenguaje matemático.

Esta asombrosa concordancia entre lo matemático y lo real hace de las Matemáticas un instrumento general del saber humano y del progreso científico.

Así lo vió con toda claridad en el siglo pasado Augusto Comte, afirmando proféticamente que para que una ciencia pueda progresar es preciso que se matematice. En la actualidad la matematización del saber, como condición de su progreso, es un fenómeno imparable.

En Física esto es patente, ya desde los tiempos de Galileo. Pero incluso las ciencias que en un principio parecian estudiar fenómenos nada matematizables están cada vez siendo más y más invadidas por las Matemáticas.

Hoy en día las Matemáticas han emprendido una gigantesca escalada en los demás saberes. Los fenómenos biológicos están ya transcribiéndose al lenguaje matemático. Por ejemplo, si cogemos un girasol y observamos la distribución de las hojas del tallo, tenemos que tal distribución se realiza de acuerdo con la llamada 'serie de Fibonnacci', y esto con objeto de que la situación de las hojas en el tallo sea tal que reciba el máximo de insolación, lo cual es fundamental para la vida de la planta. Cuando las abejas construyen sus celdillas, 'resuelven' un dificil problema de máximos y mínimos (construir las celdillas utilizando el mínimo de cera y dotándolas del máximo de volumen). Si contemplamos un ammonites -cefalópodo de la era secundaria-, veremos que su concha representa una espiral logarítmica.

La medicina, que estudia 'curativamente' los fenómenos vitales, está hoy en día muy vinculada a la Biónica -ciencia que estudia la Cibernética del ser viviente, y la Cibernética usa lenguaje matemático-, hasta el punto de que puede decirse que la Medicina se está matematizando. En un libro sobre Biónica se representa con mucha gracia esta situación. Hay un dibujo que representa la sala de una clínica. En una cama hay un enfermo y junto a la cama un señor con bata blanca -el médico-. El médico le dice al enfermo: 'Está tranquilo. Ya ha venido a la clínica un matemático y pronto estará Vd. curado'. Esté es una hipérbola por supuesto; pero los ordenadores de diagnóstico realmente existen y prestan gran ayuda a la medicina.

Los fenómenos psíquicos están en claro proceso de matematización. El psicólogo actual tiene que conocer el análisis factorial, tiene que saber lo que es una correlación de Pearson o una correlación tetracórica. La estadística psicológica es una rama imprescindible y fecunda de la Psicología (sin que ello quiera decir que todo el psiquismo humano se reduzca a un conjunto de ecuaciones).

Lo mismo sucede en Economía, donde la Economía matemática es una de las ramas de mayor porvenir y desarrollo.

En Sociología la matematización es patente; además de la Estadística aplicada a los fenómenos sociales, destacaremos que Levi-Strauss ha estudiado detalladamente los sistemas de parentesco en las sociedades primitivas. Pues bien, André

Weil -por cierto, uno de los bourbakistas- ha demostrado cómo estos sistemas parentales satisfacen los axiomas de las estructura matemática de grupo. El sistema parental de los karieka se ajusta al 'grupo de Klein' (¡de nuevo aparece el grupo de Klein!); el de los aranda, al llamado 'grupo del cuadrado', el de los ambryn al 'grupo del triángulo equilátero' y el de los tarau al 'grupo de los relativos congruentes módulo cuatro con la operación de la adición'.

Incluso en las creaciones humanas que parecen más alejadas de una posible matematización, como sucede con el Arte, se refleja la influencia del lenguaje matemático. Si observamos los pliegues de las túnicas de muchas estatuas, vemos que estos pliegues representan la catenaria, una curva matemática. Un cuadro como 'Los pastores de la Arcadia' de Nicolás Poussin está construido de acuerdo con la sección aúrea matemática, al igual que sucede en *La bella jardinera*' de Rafael o en *La Cena* de Leonardo da Vinci. En la célebre composición musical *The las time*, en la interpretación del Hot Five Quartet, de Luis Armstrong, se observa en la segunda parte una gran serenidad y belleza de la música; esta segunda parte tiene distribuídos sus distintos períodos de acuerdo con los instrumentos que intervienen con arreglo a la sección aúrea, y quizás de ello derive esa impresión, que conmueve al oyente, de serenidad y belleza.

Incluso un tema tan espiritual por su objeto, como es la demostración de la existencia de Dios, ha sido abordado con lenguaje matemático. Sólo citaremos dos casos, aunque hay más. Uno, el argumento *a pari* o argumento de la apuesta de Pascal -que se basa en el concepto de la esperanza matemática-, y otro el intento de Leibniz de demostrar la existencia de Dios basándose en el sistema binario de numeración (sistema por él descubierto).

Por otro lado, las Matemáticas permiten a la Ciencia el realizar predicciones, uno de los aspectos más positivos y asombrosos del saber científico. Entre la innumerable cantidad de ellas, nos fijaremos en un sólo caso. Dirac, gran físico matemático inglés, al resolver ciertas ecuaciones de mecánica relativista, llegó a unos valores matemáticos iguales, excepto que uno tenía signo positivo y el otro signo negativo. El segundo tenía que interpretarse como el electrón. Consecuentemente, Dirac sostuvo que, si las Matemáticas no mienten, tenía que existir una partícula atómica igual al electrón, pero con carga eléctrica positiva. En la época en que sostuvo esa tesis -el año 1928- tal partícula se desconocía, lo que motivó la repulsa o el escepticismo de muchos físicos. Años después Anderson encontraría en el laboratorio la partícula, el hoy llamado positrón o electrón positivo, primera partícula descubierta de la enigmática antimateria.

Naturalmente que todo lo anteriormente analizado no quiere decir que la convergencia entre Matemática y experiencia real sea total, es decir, que todo lo real y en toda su plenitud sea captado por las Matemáticas. El lenguaje matemático es un poderoso instrumento para comprender los fenómenos naturales, pero con sólo las Matemáticas no pueden agotarse en toda su riqueza. Podría decirse que las Matemáticas son una condición necesaria, pero no suficiente, para conocer lo real. Es más, y en esto seguimos a N. Hartmann, a medida que ascendemos en la escala de la experiencia real, desde lo inorgánico al espíritu, la capacidad captativa de las Matemáticas disminuye. Por algo la Física, saber que se ocupa de lo inorgánico, está tan matematizada, mientras que la Psicología lo está mucho menos y el Arte sólo tiene con las Matemáticas leves contactos.

El estudio de todas estas convergencias entre lo matemático y la experiencia, así como de sus limitaciones, y de los mecanismos psíquicos subyacentes en todos estos procesos, es tema de gran interés y trascendencia, pero que ahora no podemos tratar.

Como consecuencia última de nuestro estudio, podemos afirmar que el grupo de transformaciones INRC de Piaget es una de las creaciones más fecundas e interesantes del psicólogo suizo.

Es más, creemos que no se ha analizado con suficiente detalle y extensión el gran alcance que tiene el grupo piagetiano en el marco de la Psicología evolutiva y en el de la Psicología. A remediar en parte, en parte muy por supuesto, esta deficiencia ha sido orientado nuestro trabajo.

NOTAS

(1) Aunque lo tradicional es referirse a un autor citando su lugar de nacimiento, herencia de los griegos, que decian 'Aristóteles de Estagira' -y no por ejemplo, 'Aristóteles de Calas'-, nosotros nos referiremos a Piaget no como 'el pensador o el psicólogo de Nêuchatel' -el lugar donde nació- sino como 'el pensador o psicólogo de Ginebra', dado que en esta ciudad desarrolló la mayor parte de su actividad docente e investigadora.

(2) La proposición conjuntiva, simbolizada por nosotros en notación alemana $p \wedge q$, en notación de la escuela inglesa -la utilizada por Piaget- es p.q (en notación polaca sería Kpq).

(3) Por aplicación de la ley de De Morgan para la disyunción inclusiva y de la ley de la doble negación.

(4) La fórmula rigurosa y técnica del teorema de Cantor sería la siguente (designando con S cualquier conjunto y con c cualquier cardinal):

$\forall S$, card (S) < card (2^S); luego $\forall c$, $c < 2^c$

(5) Por ello ha sido sustituida por la ley de la conservación del momento.

BIBLIOGRAFIA

Lo primero a destacar es la no existencia de una bibliografía específica respecto del grupo INRC. Sólo hay referencias al mismo, con análisis que son muy generales y breves, en trabajos de caracter mucho más amplio.

AJURIAGUERRA, J. de y otros (1968) *Psychologie et Epistémologie génétiques. Thèmes piagetiens* (París, Dunod).

BROWN, G. y DESFORGUES, h. (1979) *La teoría de Piaget: Estudio crítico* (Madrid, Anaya).

FLAVELL, J. H. (1963) *La Psicología evolutiva de J. Piaget* (Buenos Aires, Paidon).

GARCIA GARCIA, E. (1985) *Adolescencia, madurez, senectud, en J. Mayor y otros, Psicología evolutiva* (Madrid, Anaya).

LENTIN, A. y RIVAUD, J. (1982) *Algebra moderna* (Madrid, Aguilar).

MANSER, G,M. (1953) *La esencia del tomismo* (Madrid, C.S.I.C.).

PIAGET, J. (1927) *La causalité physique chez l'enfant* (París, Alcan).

PIAGET, J. (1937) *La construction du réel chez l'enfant* (París, Delachaux et Niestlé).

PIAGET, J. (1949) *Traité de logique. Esquisse d'une logistique opératoire* (París, Colin).

PIAGET, J. (1950) *Introduction à l'epistemologie génétique* (París, P.U.F.).

PIAGET, J. (1952) *Essai sur les transformations des opérations logiques* (París, P.U.F.).

PIAGET, J. , BETH, J. y MAYS, W. (1957) *Epistemioogie génétique et recherche psychologique* (París,P.U.F.).

PIAGET, J. (1964) *Six études de Psychologie de l'enfant* (París,P.U.F.).

PIAGET, J. (1970) *L'epistémologie génétique* (París, P.U.F.).

VUYK, R. (1981) *Panorámica y crítica de la Epistemología genética de Piaget* (Madrid, Alianza).

VYGOTSKI, L.S. (1985) *El desarrollo de los procesosopsicológicos superiores* (Barcelona, Crítica).

SUMMARY: THE INCR GROUP OF PIAGET
The authorexplorse in this article, the general relevance of the famous INRC group of Piaget to the educational psychology. In the first place, the author analyses the signification of the 'group structure'. On the other hand, is rechearche the importance of this group inside of the evolutive psychology.

KEY WORDS: INRC group, mathematical psychology, Piaget