

EL ESQUEMA DE PROPORCION Y EL APRENDIZAJE ESCOLAR

por MARIA VIRGINIA RAPETTI

*Centro de Investigaciones en Antropología Filosófica y Cultural
Buenos Aires*

El interés por este tema radica en el hecho de las numerosas dificultades que tienen los alumnos del nivel primario y aun del secundario, por ejemplo, para resolver problemas de regla de tres u otras situaciones que impliquen la noción de proporcionalidad [1]. Esto mismo concuerda con algunas investigaciones que señalan la carencia de este esquema (que desde el punto de vista psicológico es uno de los elementos que caracterizan el pensamiento formal) en gran porcentaje de adolescentes y aún de adultos [2].

Un mayor conocimiento de las actitudes de los niños frente a este tema permitirá, en consecuencia, implementar líneas metodológicas tendientes a facilitar la adquisición y afianzamiento de esta noción, tan importante en distintos campos del conocimiento. El presente trabajo tiene por finalidad ver cómo se desarrolla y estructura, a partir de distintas situaciones, la génesis del esquema de proporción con el objeto de establecer un orden creciente de dificultades, lo que supone, por lo tanto, un orden constante de adquisición.

1. El esquema de proporción y el pensamiento formal

El concepto de proporción fue estudiado en el plano psicológico principalmente por J. Piaget y B. Inhelder en sus investigaciones sobre la noción de probabilidad y sobre la inducción de leyes físicas.

Piaget distingue distintas etapas en la formación del pensamiento. La última, correspondiente al pensamiento formal, se caracteriza por la

elaboración de esquemas tales como las operaciones combinatorias, las compensaciones multiplicativas, la noción de equilibrio mecánico, la noción de probabilidad y la noción de proporción, objeto de este trabajo. En ese mismo nivel las operaciones no se realizan directamente sobre los objetos sino que se trata de «operaciones de operaciones»; en el caso de las proporciones, éstas no son relaciones entre objetos dados sino «relaciones de relaciones» y por ello «operaciones a la segunda potencia».

Para que su adquisición sea posible en el nivel formal se requiere principalmente:

1. Una elaboración cualitativa que precede a la construcción de la proporción métrica y que permite la comprensión de la equivalencia de dos relaciones para luego llegar a su cuantificación [3]. Así «(...) la adquisición del esquema operatorio de las proporciones numéricas o métricas supone anticipaciones cualitativas bajo forma de compensaciones mediante equivalencia y proporciones lógicas (...)» [4].

2. El descubrimiento de compensaciones. La igualdad de los productos cruzados entre los elementos de una proporción es expresión del esquema de compensación. Dicho esquema precede al de la proporcionalidad y es accesible de modo más directo que éste, es «el sentimiento de compensación que conduce al niño a descubrir la proporción, y no es la relación métrica, por simple que sea, la que conduce a la compensación» [5].

La compensación puede ser tanto aditiva como multiplicativa, no así las proporciones numéricas. Es frecuente, por esta razón, encontrar en los niños la tendencia a buscar la proporcionalidad en la igualdad de las diferencias aditivas [6].

3. La intervención de la abstracción reflexionante. Piaget señala que las proporciones «se obtienen por abstracción reflexionante [7] a partir de la multiplicación en tanto que igualdad de relaciones multiplicativas (divisiones)» [8]. De allí la importancia de la comprensión de esta operación para captar el concepto de proporción [9].

4. Procesos cognoscitivos que implican una comparación y diferenciación de los elementos que constituyen la proporción [10].

2. El trabajo experimental

La investigación se lleva a cabo mediante entrevistas individuales a 120 alumnos de ambos sexos, se toman chicos de 4.º grado (9 años) a 2.º año (14 años). La entrevista es sin límite de tiempo.

El trabajo consiste en la resolución de 5 ítem correspondientes a distintas nociones, pero que poseen como denominador común subyacente: la noción de proporción. Después de una lectura general de los ejercicios el alumno debía comenzar el trabajo por el que considerase más fácil.

A continuación se presenta el texto abreviado de cada ítem [11].

Item A: Si un micro recorre 400 km en 5 horas y otro 700 km en 11 horas, ¿cuál de los dos viaja a más velocidad?

Item B: Un frasco de dulce de 200 g cuesta 160.000 [12] y otro, del mismo tipo pero de 350 g está en oferta a 200.000. ¿Es conveniente la oferta?

Item C: En 7.º grado, de 20 niños 15 pasaron el examen bucodental. En 6.º, de 32 niños lo pasaron 25. ¿A cuál de los dos grados debe felicitar el dentista que los revisó? [13].

Item D: En la jarra A colocamos dos vasos con jugo de naranja y tres con agua y en la B, 3 con naranja y 4 con agua. ¿Qué jarra contiene jugo con más gusto a naranja? ¿Por qué? [14].

Item E: En un terreno de 7 ha. hay 91 ovejas y en otro similar pero de 4 ha. hay 52. ¿En los dos campos las ovejas tienen la misma cantidad de pasto para comer? [15].

Cada ítem se evalúa según dos modalidades 0 (no resuelve) y 1 (resuelve bien). Se considera bien resuelto si en la justificación del mismo se observa la puesta en relación de los cuatro elementos (tomados de a dos) que conforman la proporción.

3. Resultados obtenidos

a) Análisis cuantitativo:

Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos según el criterio de evaluación anteriormente mencionado.

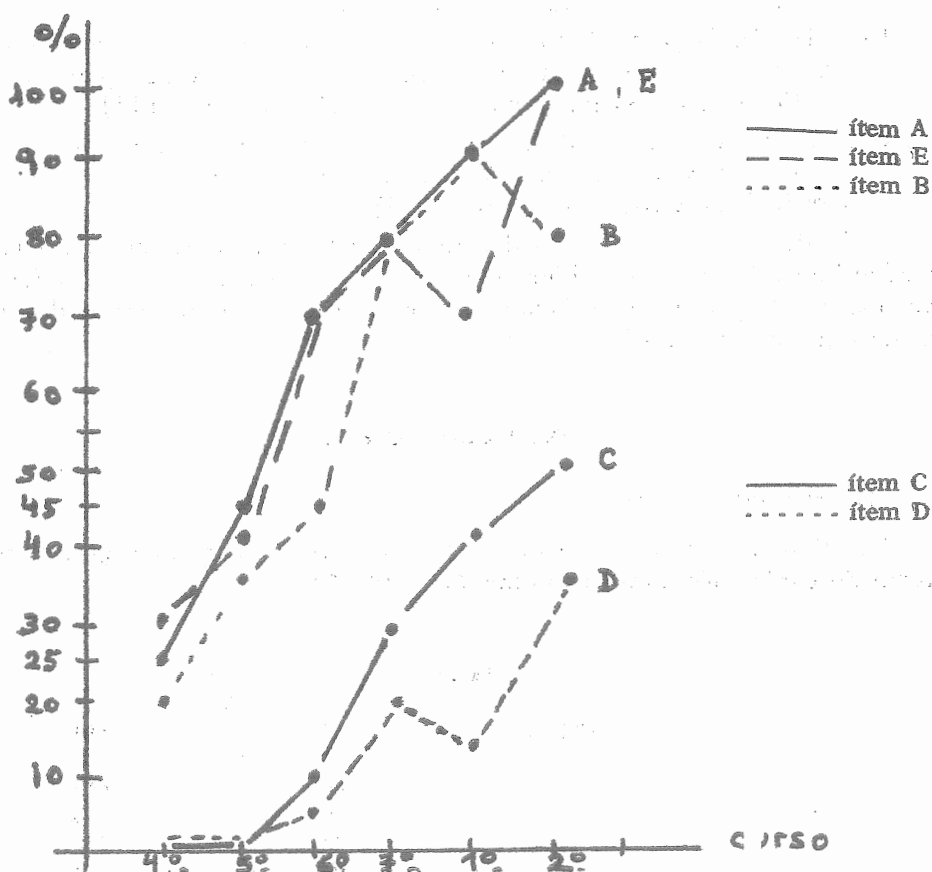
TABLA 1

	varones	mujeres	total
A	36'7	31'7	68'4
B	30	28'3	58'3
C	14'2	7'5	21'7
D	6'7	5'8	12'5
E	35	30	65

TABLA 2: Porcentaje de respuestas correctas en cada ítem según cada grado

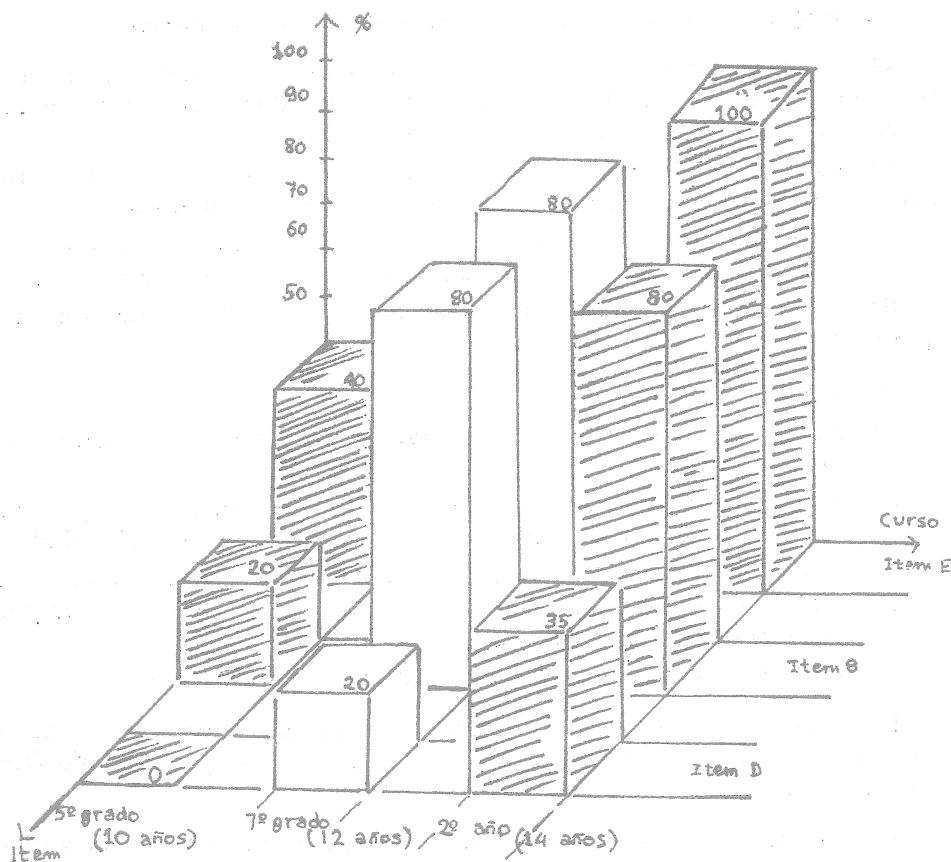
ítem curso	A	B	C	D	E
4.º (9 años)	25	20	0	0	30
5.º (10 años)	45	20	0	0	40
6.º (11 años)	70	45	10	5	70
7.º (12 años)	80	80	30	20	80
1.º (13 años)	90	90	40	15	70
2.º (14 años)	100	80	50	35	100

GRÁFICO 1: Representación de los valores de la tabla 2



Este gráfico representa los porcentajes de respuestas correctas obtenidas en 5.º, 7.º (grado) y 2.º año en los ítem B, D y E. Se eligen esos cursos, pues se trata de un curso inferior, uno medio y uno superior respectivamente. El mismo criterio se usa en la elección de los ítem, pues representan distintos grados de dificultad.

GRÁFICO 2:



De los datos se puede concluir:

1. En términos generales, un mejor desempeño de los varones respecto de las mujeres.
2. El gráfico 1 muestra una notable diferencia entre los ítem C y D y los restantes que parecen resultar más fáciles.
3. Entre los 11 y 12 años los resultados comienzan a mejorar notablemente, lo que concuerda con la aparición del pensamiento formal.

b) *Análisis cualitativo:*

Las respuestas pueden agruparse según tres modalidades:

- las que no establecen una relación matemática y en las que se referencia a interpretaciones preoperatorias,
- las que intentan una solución matemática aunque insuficiente y
- las correctas.

Las respuestas incorrectas se producen cuando los sujetos

- a) se guían exclusivamente por la representación del enunciado o por referencias personales, considerando como decisivos, factores que no son las relaciones matemáticas en juego;
- b) establecen un esquema compensatorio no cuantitativo que se traduce en expresiones del tipo «a más, más y a menos, menos»;
- c) sólo tienen en cuenta uno de los dos factores, por ejemplo, en el caso de la velocidad consideran el espacio y no el tiempo o viceversa;
- d) no calculan la razón correspondiente entre los elementos sino que establecen una diferencia.

Así, por ejemplo,

- a) *Item B:* Julio (9'10): «Sí, le conviene, si está en oferta que aproveche».
- b) *Item A:* Estella (11'8): «Al ser más km son más horas y al ser menos km son menos horas». Supone constante la velocidad.
- c) *Item B:* Luz (10'9): «Le conviene la oferta porque si va a comprar 2 frascos chicos le salen más caros». Se fija sólo en el precio y no en la relación con el peso.
- d) *Item E:* Sofía (9'6): «... tengo que hacer $91 - 7$ y $52 - 4$...».

Respecto de las respuestas correctas, éstas se obtienen a través de distintos procedimientos: reducción a la unidad, comparación de fracciones, cálculos estimativos, etc.

Item A Nicolás (11): «Va más rápido el que tarda 5 horas porque el que recorre 700 km que no es ni el doble de 400 tarda 11 que es más del doble de 5».

En los casos en que la noción ya se ha adquirido se observa la presencia del pensamiento hipotético que se manifiesta a través de expresiones tales como «si tuviera» o «si hubiera»,

Item C Ricardo (10'10): «...si tuvieran la misma proporción de chicos con malos dientes, 6.º tendría que tener 9 reprobados y solamente tiene 7».

También es común observar que en la resolución se busca primero la igualdad y luego se analizan las diferencias, así

Item A Norberto (14'4): «Para ser iguales tiene que ser 1 hora menos y 100 km más». Se refiere a los datos del segundo micro, el cual para estar en la misma situación que el otro tendría que recorrer 800 km en 10 horas [16].

De lo experimentado hasta aquí puede concluirse que existirían distintas etapas hasta alcanzar la noción de proporción: una primera que no supera el nivel concreto, una segunda con soluciones parciales o en la cual se da una «seudoproporiconalidad» y por último una tercera en la cual se manifiesta la existencia del esquema de proporción a través del descubrimiento y cálculo de la misma.

4. Interpretación de los resultados

Los resultados obtenidos pueden interpretarse desde dos puntos de vista: el del contenido y el de las estrategias empleadas.

a) *Influencia del contenido:*

Las etapas mencionadas anteriormente se hallan presentes cualquiera sea el contenido del problema [17] coincidiendo así con la posición de Piaget: «La cuestión psicológica consiste entonces en saber si en la evolución de las operaciones lo que predomina es el contenido intuitivo diferente o si, por el contrario la determinante será la estructura operatoria subyacente. (...) Entre las dos evoluciones (se refiere al análisis del equilibrio en la balanza y de la tracción de un peso sobre un plano inclinado) hay en efecto un conjunto de diferencias intuitivas que se explican por la configuración del dispositivo y las preguntas que se formulan. Pero justamente por ello resulta aún más sorprendente volver a encontrar el mismo mecanismo operatorio bajo divergencias aparentes (...)» [18].

Sin embargo, a pesar que el mecanismo subyacente es el mismo y los procedimientos empleados para la resolución se semejan según las edades, el gráfico 1 muestra una diferencia entre los problemas A, B y E y los problemas C y D.

Si se observan las magnitudes intervinientes en el primer grupo se podrá ver que son diferentes: espacio-tiempo, peso-precio, etc., mientras que en el segundo no ocurre eso. En el primer caso las razones se llaman externas y en el segundo, internas, pues sus elementos son de la misma magnitud [19].

Esta distinción resulta apropiada para interpretar las diferencias en los logros alcanzados: el hecho de que las magnitudes sean distintas facilita la comparación y la puesta en relación de los términos y explicaría la situación observada, coincidente con la afirmación de que las razones externas parecen preceder a las internas, desde el punto de vista psicológico, en el proceso de adquisición del concepto de razón [20].

b) Estrategias utilizadas:

El análisis de los procedimientos empleados para la resolución de los ítem puede traducirse en términos de la propuesta de Siegles (1976, 1981). Su idea básica: «Enfoque de diagnóstico de reglas» permite el diagnóstico de las estrategias a través de un patrón de respuestas a un conjunto de problemas seleccionados [21]. En su trabajo propone cuatro «reglas» o procedimientos.

Dadas las características del presente trabajo no es posible la consideración de dichas «reglas» tal cual las presenta el autor, pero es posible establecer la siguiente clasificación en virtud de los resultados del análisis cualitativo anterior:

Procedimiento 1: Consideración de un sólo factor.

Procedimiento 2: Compensación.

Procedimiento 3: Relación aditiva entre los factores.

Procedimiento 4: Cálculo métrico de la proporcionalidad.

La siguiente tabla muestra los distintos procedimientos empleados en relación con la edad de los sujetos. En la clasificación no se ha tenido en cuenta el resultado del ítem sino el razonamiento empleado.

TABLA 3: *Porcentajes de utilización de los distintos procedimientos en cada curso*

	0	1	2	3	4
4.º grado	9	25	25	30	11
5.º grado	10	21	28	23	18
6.º grado	2	18	24	26	30
7.º grado	1	6	14	33	46
1.º año	1	7	17	26	49
2.º año	1	3	18	18	60

El procedimiento 0 indica la ausencia de una explicación matemática al problema ya sea de orden cualitativo o cuantitativo [22].

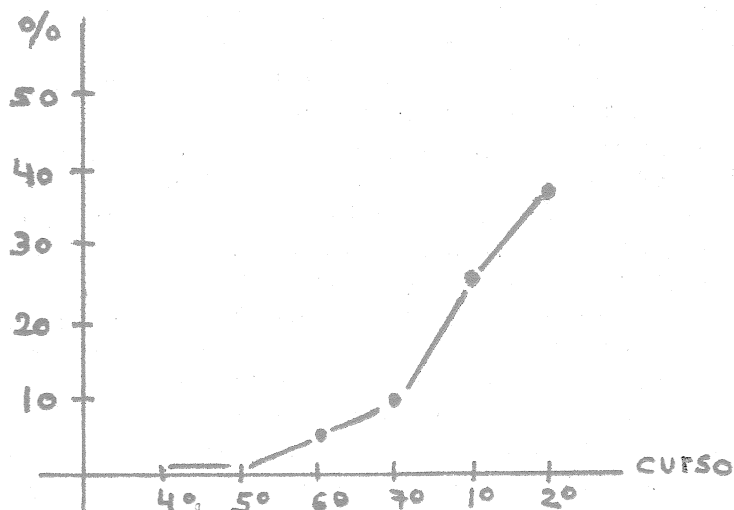
Los resultados de cada casilla corresponden al porcentaje de procedimientos empleados para resolver los ítem, así, por ejemplo, en 4.º grado, en el 11 % de las respuestas se empleó el procedimiento 4 [23].

Las cantidades muestran que el mismo es el más usado por los sujetos más grandes y por el contrario los procedimientos 0 y 1 disminuyen con la edad. Los procedimientos 2 y 3 sufren variaciones similares, pero las diferencias no son tan notables, lo que podría explicarse por el hecho de que el razonamiento compensatorio es anterior al cálculo de la proporción.

TABLA 4: Porcentaje de sujetos que en los 5 ítem (o en 4 de ellos) emplearon el procedimiento 4 [24]

4.º grado	—	0 %
5.º grado	—	0 %
6.º grado	—	5 %
7.º grado	—	10 %
1.º año	—	25 %
2.º año	—	35 %

GRÁFICO 3: Representación de la tabla anterior



El gráfico muestra el crecimiento del uso de la última técnica (procedimiento 4) a través de los distintos cursos.

5. Consideraciones metodológicas

En este trabajo se propuso ver cómo se desarrolla y estructura, a partir de distintas situaciones, la génesis del esquema de proporción.

Los resultados obtenidos muestran por un lado cierta influencia del contenido en relación con las estrategias empleadas, ya que si bien las líneas del desarrollo son generales, en cuanto hay una evolución en los métodos usados y una constante de los mismos en los sujetos, algunos ítem son resueltos antes que otros [25].

Esto ocurre en aquellos donde la comparación facilita la reducción a la unidad y en los que las cantidades que intervienen permiten un mecanismo compensatorio no conflictivo, es decir, de cálculo inmediato.

Por otra parte, el conocimiento de las estrategias generales empleadas por los alumnos permiten advertir qué conocimientos previos aportan los sujetos. A partir de esto es posible, a través de situaciones que provoquen contradicciones, estimular y favorecer el desarrollo de estrategias tendientes a superarlas y en consecuencia a consolidar la formación del esquema en cuestión, en este caso el de proporción.

A tal efecto es posible señalar ciertas sugerencias metodológicas:

1. Plantear en un comienzo problemas en términos de magnitudes distintas (lo que hemos mencionado como razones externas) con el objeto de facilitar la evidencia de los elementos en juego.

2. Plantear la necesidad de la unidad para superar el esquema compensatorio «a más, más y a menos, menos».

3. La confrontación de los resultados con su anticipación o predicción. El descubrimiento de las contradicciones llevará a cuestionar los procedimientos empleados, por ejemplo, los de tipo aditivo [26].

El estudio de las estrategias es el aporte de la escuela ginebrina en la década del 80. En su perspectiva actual, con posterioridad a la muerte de Piaget, las investigaciones de B. Inhelder se orientan a completar el nivel operatorio del niño por el conocimiento más funcionalista, de las estrategias de resolución de problemas definidas como «sistemas y secuencias de procedimientos orientados, repetibles y transferibles que constituyen los medios para alcanzar el fin propuesto por el sujeto» [27].

Ligado a este estudio se encuentra el de los procesos metacognitivos [28], es decir, de la toma de conciencia de los propios procesos cognoscitivos, el mismo ocupa la la atención de numerosos autores en distintas áreas del aprendizaje [29], ya que la toma de conciencia favorece el aprendizaje en la medida que permite el acceso a los estadios siguientes.

En el marco de estas observaciones, los resultados obtenidos en este trabajo permiten conocer ciertas estrategias comunes a los niños de edad escolar; este conocimiento puede ser útil en la confección de guías de trabajo que combinen las estrategias básicas de modo tal que sea posible ejercitar la toma de conciencia de los procedimientos en juego y favorecer la formación del esquema, que por otra parte se exige para la asimi-

lación de otros contenidos curriculares, no necesariamente matemáticos [30].

Dirección del autor: María Virginia Rapetti, Centro de Investigaciones en Antropología Filosófica y Cultural-Conicet, Lacroze 2100, Capital Federal, Rep. Argentina.

Fecha de recepción de la versión definitiva de este artículo: 17.VII.1990.

NOTAS

- [1] Este trabajo forma parte de un estudio más amplio: «El esquema de proporción, su variabilidad en relación con algunos temas del curriculum escolar» realizado gracias a una beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (1982-1984).
- [2] CAPÓN, N. y KUHN, D. (1979) Logical reasoning in the supermarket: Adult females' use of proportional reasoning strategy in an everyday context, *Development Psychology*, 15:4, pp. 450-452.
- [3] En las páginas siguientes ejemplifico estas situaciones a través de respuestas obtenidas en el trabajo experimental.
- [4] PIAGET, J. y INHELDER, B. (1972) *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, p. 236 (Buenos Aires, Paidós).
- [5] PIAGET, J. (1946) *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, p. 204 (Paris, Presses Universitaires de France).
- [6] Esta última característica explica, por ejemplo, por qué el niño cuando debe dibujar un rectángulo semejante a otro, pero de mayor tamaño, descubre la razón entre la altura (h) y la base (b) primero en forma de diferencia ($b - h$) y luego, en forma de razón invariante (b/h). Cfr. PIAGET, J. y INHELDER, B. (1948) *La representación de l'espace chez l'enfant*, cap. 12 (Paris, PUF).
- [7] Piaget la define como la abstracción «que parte de acciones u operaciones del sujeto y transfiere a un plano superior lo que se ha extraído de un nivel inferior de actividad». PIAGET, J. (1979) *Investigaciones sobre la abstracción reflexionante I*, p. 5 (Buenos Aires, Huemul).
- [8] PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1971) *Les explications causales*, p. 69 (Paris, PUF).
- [9] Algunas sugerencias para este tema se encuentran en LUNZER, E. y PUMPREY, P. (1966) Understanding Proportionality, *Mathematics Teaching*, 34, pp. 7-12.
- [10] En este sentido se podría hablar de cierta vinculación con la noción de analogía, la cual se define como relación de semejanza entre cosas distintas.
- [11] La representación de cada problema se realiza gráficamente y se la acompaña de un texto breve que completa lo que el dibujo no puede expresar por sí, de esta manera se piensa evitar las dificultades de comprensión que se observan cuando los enunciados son verbales y permitir que el material de trabajo sea lo más claro y expresivo posible para que resulte accesible a todos los chicos entrevistados cualquiera sea su edad. En el trabajo original el número de ítem es 10.
- [12] Los precios corresponden al valor vigente en el momento en que fue administrada la prueba.
- [13] En la presentación de los enunciados se cuidó de no presentar juntos los datos que debían ser relacionados para que el alumno debiera organizar por él mismo la información.
- [14] Este ejercicio fue tomado de los trabajos de C. Noelting. Cfr. NOELTING, G. (1980) The development of proportional reasoning and the ratio concept, Part I, *Educational Studies in Mathematics*, 11:2, pp. 217-253.

- [15] En este caso los terrenos se presentaron divididos en 7 y 4 cuadrados respectivamente.
- [16] Cfr. nota 10.
- [17] Como ya se adelantó el trabajo original comprende, además de los 5 ítem presentados, otros de carácter geométrico; en estos últimos también se encontraron los mismos tipos de respuestas.
- [18] PIAGET, J. y INHELDER, B. (1972) *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, pp. 166-168 (Buenos Aires, Paidós).
- [19] Esta distinción pertenece a H. Freudenthal. En la fenomenología didáctica del concepto de razón clasifica las razones en externas e internas. Cfr. FREUDENTHAL, H. (1978) *Weeding and sowing-Preface to a Science of Mathematical Education* (Holland, Reidel).
- [20] VAN DEN BRIK, I. y STREEFLAND, L. (1979) Young Children (6-8) Ration and Proportion, *Educational Studies in Mathematics*, 10, pp. 403-420.
- [21] R. Siegler usó este «enfoque» para estudiar el desarrollo de estrategias en la resolución de problemas sobre el equilibrio de la balanza. Otras aplicaciones del mismo pueden encontrarse en SUBER, C. y HAINES, B. (1987) The growth of proportional reasoning: methodological issues. *Annals of Child Development*, 4, pp. 35-87 y en CHLETOS, P. y otros (1989) Cognitive assessment of proportional reasoning strategies, *Journal of Research and Development in Education*, 23:1, pp. 18-27.
- [22] Cfr. la respuesta de Julio en la sección 3. b).
- [23] El total de respuestas por curso es 100, pues cada uno de los 20 sujetos respondió 5 ítem.
- [24] Aunque no es posible una comparación estricta con los trabajos de Siegel, este autor observó también diferencias en las frecuencias de empleo de las distintas estrategias según la edad.
- [25] Cfr. gráfico 1.
- [26] En este sentido B. Inhelder dice que el aporte de la interacción de lo real al progreso del conocimiento tiene dos momentos «uno positivo: el despertar de la curiosidad por el imprevisto de situaciones nuevas y uno negativo: la producción de contradicciones entre las predicciones o juicios del sujeto y la constatación de los observables» INHELDER, B.; SINCLAIR, H. y BOVET, M. (1974) *Apprentissage et structures de la connaissance*, p. 323 (Paris, PUF).
- [27] INHELDER, B. (1978) *De l'approche structurale à l'approche procédurale: introduction à l'étude des stratégies*. Actes du XXIème Congrès International de Psychologie, 1976, p. 102 (Paris, PUF).
- [28] Para una aproximación a este tema puede consultarse BRANDT, R. y otros (1989) *Dimensions of thinking: A framework for curriculum and instruction*, cap. 2 (USA, ASCD).
- [29] VAN GRUNDERBEECK, N. y otros (1986) Evaluation des stratégies d'identification de mots du lecteur débutant ou en difficulté, *Revue Française de Pédagogie*, 74, pp. 23-28. BECKER, M. y CARDOSO, C. (1989) A coninencia fonologica de crianças das classes populares o papel da scola, *Rev. Br. de Est. Pedagógicos*, 70:164, pp. 86-97 (Brasilia, Mec).
- [30] Como referencia para una metodología puede consultarse LONGEOT, F. y otros (1988) L'entraînement aux operations formelles chez des adolescents situés au niveau opératoire concret et le problème des stades, *Archives de Psychologie*, 56:217, 117-135.

SUMMARY: PROPORTIONALITY SCHEME AND LEARNING.

The present work is an attempt to determine stages in the development of the notion of proportion when this is referred to different situations (velocity, judge-concentration, etc.).

Five problems, which make part of the test administrated to 120 childrens, between 9 and 14 years, are described and analyzed.

The results obtained confirm that the peak of the scheme of proportion is only achieved at the formal level. Different strategies are distinguished and finally methodological considerations are discussed.

KEY WORDS: Mathematical learning. Proportionality. Cognitive strategies. Formal operation.