



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

**Enseñar geometría en
segundo curso de Educación
Secundaria: el uso del
material manipulativo**

Presentado por: Anna Llena Cortés
Tipo de trabajo: Propuesta de intervención
Directora: Blanca Arteaga Martínez

Ciudad: Banyoles
Fecha: Junio 2017

Resumen

El presente trabajo está motivado por el bajo nivel de comprensión de los conceptos geométricos que cada año demuestran los estudiantes en las pruebas de evaluación de competencias, lo que parece indicar la necesidad de un cambio en el enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría. El objetivo principal de este trabajo es el diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza de los contenidos de Geometría de 2º de ESO centrada en el uso de material manipulativo. En el marco teórico se expone el rendimiento actual en el área de matemáticas y concretamente en el bloque de Geometría, a través de algunos de los resultados de las pruebas de evaluación externa, además de la legislación educativa vigente en nuestro país. En este apartado, también se analizan las dificultades más frecuentes a las que se enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de la Geometría, así como el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría a través del modelo de razonamiento geométrico Van Hiele y las habilidades geométricas que desarrolla el estudiante. Para finalizar se ha estudiado el alcance del material manipulativo como recurso didáctico y se han clasificado los diferentes materiales. Teniendo en cuenta el marco teórico se ha elaborado la propuesta didáctica para la enseñanza de la Geometría en segundo curso de ESO basada en el uso del material manipulativo, con el fin de mejorar la comprensión de los conceptos y las propiedades geométricas, así como el interés y la motivación de los estudiantes en la materia.

Palabras clave: Matemáticas, geometría, dificultades de aprendizaje, habilidades geométricas, material manipulativo.

Abstract

The present work is motivated by the low level of understanding of the geometric concepts that students demonstrate each year in the competency assessment tests, which seems to indicate the need for change in the approach of the teaching-learning process of Geometry. The main objective of this work is the design of a didactic proposal for teaching the contents of Geometry of 2nd ESO focused on the use of manipulative material. The theoretical framework analyzes the current performance in mathematics and specifically in the Geometry block, through some of the results of external evaluation tests, in addition to the educational legislation in force in our country. In this section, we also analyze the most frequent difficulties students face in learning Geometry, as well as the teaching-learning process of Geometry through the geometric reasoning model Van Hiele and the geometric skills developed by the student. Finally, the scope of manipulative material has been studied as a didactic resource and the different materials have been classified. Taking into account the theoretical framework, a didactic proposal has been developed for teaching Geometry in second ESO based on the use of manipulative material, in order to improve the understanding of geometric concepts and properties, as well as interest and motivation of students in this area.

Keywords: Mathematics, geometry, learning difficulties, geometric abilities, manipulative.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA.....	1
DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO	2
OBJETIVOS	3
CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO.....	4
ESTADO ACTUAL DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA.....	4
<i>Estudio PISA 2015</i>	4
<i>Estudio TIMSS 2015</i>	5
<i>Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria</i>	7
MARCO LEGISLATIVO.....	8
<i>Ley Orgánica para la mejora de la calidad de la educación</i>	9
<i>Currículo base para la Educación Secundaria Obligatoria</i>	10
<i>Geometría de 2º de la ESO</i>	11
ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA.....	12
<i>La importancia de la Geometría</i>	12
<i>Proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría</i>	13
<i>Dificultades en el aprendizaje de la Geometría</i>	14
<i>Modelo de razonamiento geométrico Van Hiele</i>	19
<i>Habilidades propias de la Geometría</i>	22
<i>Material manipulativo y Geometría</i>	23
<i>Identificación y clasificación de los materiales didácticos que trabajan la Geometría</i> 25	
CAPÍTULO 2. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN	28
CONTEXTO Y DESTINATARIOS.....	28
OBJETIVOS DIDÁCTICOS.....	29
CONTENIDOS	29
COMPETENCIAS	30
RECURSOS PARA EL DESARROLLO DE LA PROPUESTA	31
CRONOGRAMA Y ACTIVIDADES	32
<i>Actividad 1: “Descubre los triángulos con un mecano”</i>	33
<i>Actividad 2: “Construimos figuras semejantes”</i>	35
<i>Actividad 3: “Clasificamos polígonos”</i>	37
<i>Actividad 4: “¿Qué necesito?”</i>	39
<i>Actividad 5: “Diseña tu propia estructura tridimensional”</i>	41
EVALUACIÓN	42
<i>Procedimientos e instrumentos de evaluación</i>	42
<i>Evaluación de la propuesta</i>	44
CONCLUSIONES.....	46
LIMITACIONES.....	48

PROSPECTIVA	49
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	49
ANEXOS.....	53
ANEXO 1: CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA PARA EL DOCENTE	53
ANEXO 2: CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA PARA EL ESTUDIANTE.....	54

Índice de tablas

Tabla 1. Resultados TIMSS 2015	6
Tabla 2. Resultados de la competencia matemática y bloques de contenidos en la Evaluación de la ESO 2016	7
Tabla 3. Contenidos geométricos 2º de la ESO	12
Tabla 4. Bloques de contenidos y contenidos clave.....	30
Tabla 5. Competencias básicas específicas del ámbito matemático.....	30
Tabla 6. Planificación de actividades.....	32
Tabla 7. Instrumentos de evaluación.....	43
Tabla 8. Matriz DAFO de evaluación de la propuesta didáctica.....	45

Índice de figuras

Figura 1. Resultados del Estudio PISA 2015.....	5
Figura 2. Esquema del Ámbito Matemático	11
Figura 3. Errores de simbología visual del concepto.....	15
Figura 4. Distractores de orientación	15
Figura 5. Distractores de orientación	15
Figura 6. Distractores de estructuración	16
Figura 7. Clasificación por partición.....	18
Figura 8. Clasificación por inclusión	18
Figura 9. Diagrama del Modelo Van Hiele	22
Figura 10. Pirámide de la educación matemática.....	25
Figura 11. Piezas de mecano	34
Figura 12. Rompecabezas Van Hiele.....	36
Figura 13. Tangram (Chi Chiao Pan)	37
Figura 14. Material: Polydron.....	39
Figura 15. Material: Volumes à construire	39

INTRODUCCIÓN

Este Trabajo Final de Máster corresponde al Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, Especialidad Matemáticas. En el presente apartado se describen los motivos que han llevado a desarrollar este TFM, así como el procedimiento que se ha seguido para conseguir los objetivos fijados en él, los cuales también quedan detallados en este primer apartado.

Justificación de la propuesta

El análisis de los resultados de algunas de las últimas pruebas realizadas para la evaluación de competencias, tanto a nivel internacional a través de los estudios PISA (2015, 2012 y 2003) y TIMSS (2015 y 2011), como a nivel autonómico a través de la Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria (2016, 2015 y 2014), pone de manifiesto que existe una dificultad notable y persistente en la enseñanza de la Geometría (nombrada en estos informes espacio y forma y formas y medidas geométricas, en el caso de la pruebas internacionales y espacio, forma y medida, en las pruebas autonómicas). La gran distancia, en cuanto a puntuación se refiere, respecto al promedio de los países de la OCDE y de la UE dejan a la vista un amplio margen de mejora en esta área. La mejora de los resultados en Geometría no solo situaría a esta parte de las matemáticas en el lugar donde debería estar sino que podría contribuir a la mejora en las demás áreas, teniendo en cuenta las habilidades básicas que la Geometría permite desarrollar y que el estudiante puede utilizar en otros contextos y áreas de las matemáticas (Villarroel y Sgreccia, 2011). Es necesario un análisis exhaustivo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría que permita reflexionar acerca de los motivos por los cuales se obtienen estos niveles tan bajos de aprendizaje, así y como de las pautas a seguir para contribuir a la mejora de la situación actual.

La enseñanza de la Geometría ha estado y sigue estando, aunque en menor grado, caracterizada por la tendencia a la memorización de los conceptos geométricos y sus propiedades y por la resolución sistemática de los problemas, todo ello sumado a la tendencia de exclusión de la intuición como acceso al conocimiento geométrico, favoreciendo el uso de la deducción como método educativo (Barrantes, 2003). Según este autor, afortunadamente o quizás como consecuencia de los bajos

resultados obtenidos en las evaluaciones de competencias, la Geometría ha conseguido ganar presencia en el currículo oficial e incluso formar parte de los demás bloques de contenidos de matemáticas, como fuente de modelos y situaciones problemáticas, además de conseguir mayor presencia en los contextos. El camino hacia la enseñanza constructivista donde el proceso se centra en el aprendizaje activo del alumno, acompañándolo hacia la exploración, experimentación, razonamiento visual, orientación, movimiento, construcción... está abierto, y son múltiples las direcciones a la hora de escoger metodologías, recursos y estrategias pedagógicas para conseguir que la Geometría se perciba como una materia atractiva y motivadora para el estudiante (Barrantes, 2013).

Arrieta (1998, p. 110) en su trabajo destaca la importancia del uso de material manipulativo de la siguiente manera:

La propia experiencia indica que el material facilita y favorece la comprensión e incluso la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, facilita la visualización - proceso de formación de imágenes mentales o materiales - que es clave en la comprensión de conceptos y favorece la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática, convirtiéndose su uso en el punto de partida de la construcción del conocimiento.

Teniendo en cuenta lo descrito hasta el momento, en el presente trabajo se quiere analizar la enseñanza de la Geometría, su aprendizaje y cómo el material manipulativo puede ser utilizado como recurso didáctico en este proceso. Como resultado de este análisis se pretende desarrollar una propuesta didáctica para el bloque de Geometría de 2º de Educación Secundaria basada en el uso de material manipulativo.

Descripción del trabajo

Los resultados de las pruebas de competencias, citadas anteriormente de acuerdo con los informes del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2016a y 2016b) y los correspondientes al *Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu* (2016, 2015 y 2014), revelan las dificultades reales con las que se encuentran los docentes y estudiantes en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Parece obvio preguntarse ¿qué sucede?, ¿por qué sucede? y ¿qué se puede hacer para mejorarlo?

La mejora de estos resultados globales no es tarea fácil y seguramente precisa de la participación de toda la comunidad educativa. De todas formas, a nivel de aula, el docente puede introducir diferentes metodologías, recursos didácticos y actividades que contribuyan a la mejora. Los materiales manipulativos son un recurso didáctico

que permiten al estudiante experimentar, interpretar, visualizar... los conceptos y propiedades geométricas para posteriormente abstraerlos y contextualizarlos, además de resultar un recurso atrayente y motivador para los estudiantes (Barrantes, 2003).

Para responder a estas preguntas, en este trabajo se realizará un análisis de la enseñanza de la Geometría, focalizándose en las dificultades concretas que los estudiantes se encuentran en el aprendizaje de la Geometría y cómo puede el docente enfocar la enseñanza para mejorar el aprendizaje de esta materia. Para acabar se estudiarán los materiales manipulativos como recurso didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría y se desarrollará una propuesta didáctica para 2º curso de ESO en la que el material manipulativo será el principal recurso didáctico.

La presente propuesta de intervención se contextualiza en el *Institut Josep Brugulat* de la ciudad de Banyoles, provincia de Girona, en la Comunidad Autónoma de Cataluña, por lo que cabe destacar que para el desarrollo de la misma se tomará como referencia la legislación educativa vigente en dicha comunidad.

Objetivos

Para el desarrollo del presente Trabajo Final de Máster se han definido una serie de objetivos los cuales se describen a continuación. En primer lugar se describe el objetivo general y seguidamente se plantean los objetivos específicos, que deberán contribuir a la consecución del primero.

Objetivo general:

- Diseñar y construir una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos de Geometría de 2º de Educación Secundaria basada en el uso de material manipulativo.

Objetivos específicos:

- Analizar las dificultades de manera teórica que se presentan en los alumnos en el aprendizaje de la Geometría.
- Analizar de manera teórica el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría.
- Estudiar el material manipulativo que existe como recurso en el proceso enseñanza-aprendizaje de la Geometría.
- Identificar y clasificar los materiales manipulativos relacionados con el aprendizaje de la Geometría.

CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

En este apartado se va a analizar el estado actual de la competencia matemática, es decir, el nivel de aprendizaje de los estudiantes de secundaria en cuanto a esta competencia en general y a la Geometría en particular, tanto a nivel estatal como a nivel autonómico. Se presentará la legislación educativa actual a tener en cuenta en el diseño de la propuesta didáctica de Geometría para 2º de la ESO. Y se analizará el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, las dificultades de aprendizaje que presenta, los métodos de enseñanza y el uso de material manipulativo como estrategia didáctica.

Estado actual de la competencia matemática en Educación Secundaria

La competencia matemática en Educación Secundaria se evalúa en diferentes pruebas a nivel internacional, entre las que cabe destacar el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) y la correspondiente al *Trends in Mathematics and Science Study* (TIMSS), entre otras. A nivel autonómico, y concretamente en la Comunidad Autónoma de Cataluña donde se contextualiza el presente trabajo, se realiza una prueba anual de Evaluación de la ESO de acuerdo con lo establecido por el *Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu* (2016). Para analizar el estado actual de la competencia matemática, y concretamente del apartado de Geometría, este trabajo centrará su atención en los estudios PISA 2015 y TIMSS 2015, además se analizarán los resultados obtenidos en las pruebas de competencias hechas por el Departamento de Educación de la Comunidad Autónoma de Cataluña para la Evaluación de la ESO en los años 2014, 2015 y 2016.

Estudio PISA 2015

El estudio PISA (*Programme for International Student Assessment*) es una evaluación a nivel internacional que puso en marcha la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y que se realiza cada tres años a estudiantes de 15 años originarios de países de todo el globo terráqueo, con el fin de conseguir una mejora en la educación, orientando en políticas y prácticas educativas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD], 2016a). El programa evalúa las competencias de ciencias, matemáticas y lectura, así como la resolución de problemas y la competencia financiera. La evaluación de la competencia matemática

se divide en cuatro categorías de contenidos: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre y datos.

Según el informe del MECD (2016a), España, en la evaluación de 2015, obtiene una puntuación de 486 puntos, situándose con cuatro puntos menos que la media de los países pertenecientes a la OCDE (490) y siete puntos menos que la media de los países de la UE (493), quedando muy alejada de la primera posición ocupada por Singapur con un total de 564 puntos. Por Comunidades Autónomas, cabe destacar que la Comunidad de Castilla y León, Comunidad Foral de Navarra, Comunidad de Madrid o la Rioja obtienen resultados superiores a la media de los países pertenecientes a la OCDE, Cataluña se queda con 500 puntos.

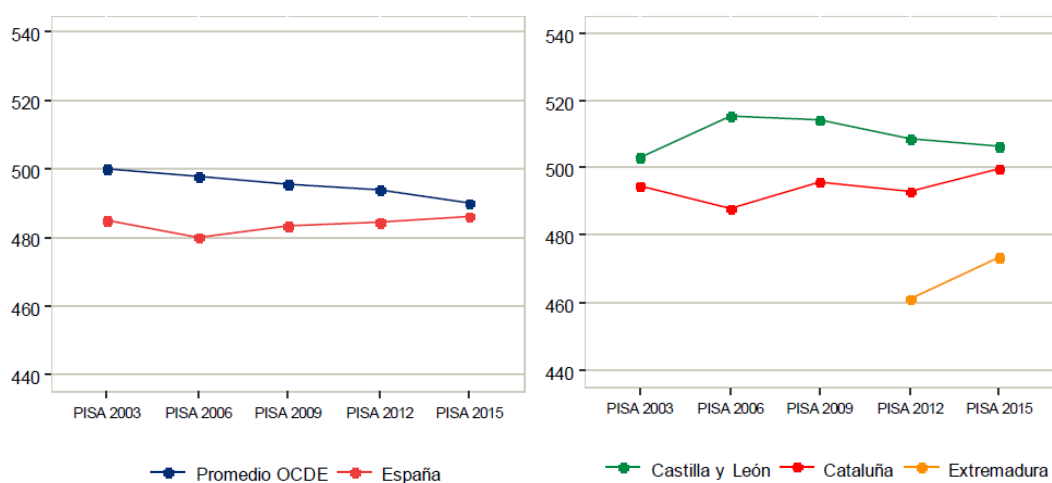


Figura 1. Resultados del Estudio PISA 2015. Fuente: MECD (2016a, p. 94)

En el análisis de los resultados obtenidos en los últimos 12 años, Figura 1, se observa que España mantiene la tendencia estable en cuanto a la puntuación obtenida, sin mostrar mejoras que puedan considerarse significativas.

Por niveles de rendimiento, España se encuentra con un 22.2% de los estudiantes con un nivel 1 ó inferior, similar al porcentaje medio de la UE (22.1%) y la OCDE (23.4%). Y la proporción de estudiantes con niveles de consecución de la competencia matemática 5 y 6 se encuentra en 7.2%, por debajo del 10.7% que obtiene el promedio de los países OCDE y de la UE (MECD, 2016a).

Estudio TIMSS 2015

El estudio TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias) es una evaluación a nivel internacional que realiza cada cuatro años la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo para determinar el rendimiento en matemáticas y ciencias de los estudiantes de 4º de Educación

Primaria y 2º de Educación Secundaria (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD], 2016b).

Para evaluar el área de matemáticas, tal y como se explica en el informe del Ministerio, se definen tres dominios de contenidos: números, formas y medidas geométricas y representación de los datos. Y tres destrezas que los estudiantes deben ser capaces de realizar: conocer, aplicar y razonar.

En la edición de 2015, España participa únicamente en la evaluación de 4º de Educación Primaria. Y consigue un resultado global en el área de matemáticas de 505 puntos, 20 y 14 puntos por debajo del promedio de los países de la OCDE y de la UE, respectivamente MECD (2016b). La puntuación máxima la alcanza Singapur con 618 puntos. En cuanto a niveles de rendimiento, España cuenta con un 7% de estudiantes con un nivel bajo de consecución, igual porcentaje que el obtenido por la OCDE y 1 punto más que la UE (6%), y con un 3% de estudiantes con nivel avanzado, por debajo del 10% de la OCDE y del 7% de la UE, y muy alejado del 50% de Singapur.

En cuanto a dominios de contenido, el informe del MECD (2016b) señala que los peores resultados se obtienen en el dominio de formas y medidas geométricas, puesto que si se comparan los resultados con los obtenidos por los países de la OCDE y la UE se observa que este dominio presenta una mayor diferencia entre las puntuaciones (24 y 19 puntos respectivamente) que el resto de dominios (Tabla 1).

Tabla 1

Resultados TIMSS 2015

	Puntuación Global	Números	Formas y medidas geométricas	Representación de datos
España	505	504	503	509
OCDE	525	523	527	528
UE	519	517	522	519

Fuente: Elaboración propia a partir de MECD (2016b)

Los resultados obtenidos por España en esta última edición (2015), realizada únicamente por estudiantes de 4º de Educación Primaria, denotan que la problemática acerca del bajo rendimiento en matemáticas y especialmente en el dominio de formas y medidas geométricas no es exclusiva de la etapa de secundaria sino que ya se produce en la base.

Evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria

Cada año, las comunidades autónomas realizan las pruebas de evaluación de competencias. En el caso de Cataluña, el *Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu* junto con Inspección educativa diseñan y realizan la prueba de competencias básicas para los estudiantes de cuarto curso de ESO, con el fin de obtener indicadores pedagógicos que permitan a los centros docentes una mejora en los procesos de enseñanza-aprendizaje (*Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu*, 2016).

Como se detalla en el informe del *Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu* (2016) en estas pruebas la competencia matemática se divide en cuatro bloques: numeración y cálculo, espacio, forma y medida, cambio y relaciones y estadística. Cada uno de estos bloques se divide en cuatro niveles de rendimiento: bajo, medio-bajo, medio-alto y alto, siendo el nivel bajo el porcentaje de estudiante que no alcanzan la competencia.

En la última evaluación realizada en 2016, el *Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu* (2016) informa que la puntuación media obtenida en matemáticas es de 68.1 puntos (sobre 100), inferior a la obtenida en los dos años anteriores, 68.7 en 2015 y 69.1 en 2014. En cuanto a los resultados globales cabe destacar, por un lado, la disminución del porcentaje de estudiantes en el nivel bajo, siendo del 15% en 2016, ligeramente inferior que en 2015 (15.7%) y casi 2 puntos inferior que en 2014 (16.7%). Y por el otro, la disminución del porcentaje en el nivel alto, el cual se queda en 27.8% en la prueba celebrada en 2016, habiendo sido del 28.8% en 2015 y del 29.1% en 2014. Obteniendo como consecuencia un aumento de los porcentajes en los niveles medio-bajo y medio-alto *Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu* (2016,2015, 2014). En la Tabla 2 se detallan los resultados obtenidos en la última prueba, en 2016.

Tabla 2

Resultados de la competencia matemática y bloques de contenidos en la Evaluación de la ESO 2016

Bloque evaluado	Porcentaje de consecución de la competencia				Puntuación
	nivel bajo	nivel medio-bajo	nivel medio-alto	nivel alto	
Global	15.0%	25.2%	32.0%	27.8%	68.1
Numeración y cálculo	17.7%	17.0%	35.6%	29.6%	65.9

Espacio, forma y medida	39.8%	24.9%	19.4%	15.9%	50.2
Cambio y relaciones	9.6%	27.7%	31.6%	31.1%	82.4
Estadística	22.4%	40.0%	23.4%	14.2%	67.7

Fuente: Elaboración propia a partir de *Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu* (2016)

Por bloques, el rendimiento en numeración y cálculo y cambio y relaciones es superior al obtenido en espacio, forma y medida y estadística. Aunque en el caso de estadística la puntuación (67.7) se acerca al promedio en matemáticas, en niveles de consecución de la competencia ambos bloques se encuentran en porcentajes superiores a la media para el nivel bajo e inferiores a la media para el nivel alto.

Los resultados ponen en evidencia el bajo rendimiento obtenido en el bloque de contenidos espacio, forma y medida, siendo su puntuación (50.2) 18.1 puntos por debajo de la media y su porcentaje de adquisición de la competencia en el nivel bajo de 39.8%, 24.8 puntos por encima del promedio y el porcentaje en el nivel alto de 15.9%, 11.9 puntos por debajo de la media.

Si comparamos estos resultados con los de 2015 y 2014 se observa un patrón similar. El bloque de espacio, forma y medida obtiene puntuaciones por debajo de la media y altos porcentajes en el nivel bajo de consecución, lo que refleja la existencia de un problema en la consecución de resultados satisfactorios en Geometría que obligan a la reflexión sobre las causas y las posibles líneas de mejora.

Marco Legislativo

Dentro del marco legislativo se incluyen las leyes y decretos vigentes que deben tomarse en cuenta para el desarrollo de la enseñanza en nuestro país. Por un lado, se encuentra la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad de la educación, y por el otro, el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por lo que se establece el currículo base para la educación secundaria obligatoria y el bachillerato y el *Decret 187/2015*, de 25 de agosto, *d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria*, que regula el currículo en la Comunidad Autónoma de Cataluña.

Ley Orgánica para la mejora de la calidad de la educación

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad de la educación (LOMCE) es la ley actual de educación en España. Como se describe en el apartado V del Preámbulo de dicha ley “la reforma pretende hacer frente a los principales problemas detectados en el sistema educativo español sobre los fundamentos proporcionados por los resultados objetivos reflejados en las evaluaciones periódicas de los organismos europeos e internacionales” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD], 2013, p. 97826).

La LOMCE (2013) no sustituye sino que modifica el texto de algunos de los artículos correspondientes a la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

A continuación, se detallan algunos de los principales cambios que ha comportado esta última reforma educativa y en concreto para la etapa de la ESO, de acuerdo con lo establecido en el artículo único de la LOMCE. Cabe destacar que esta ley, actualmente, se encuentra en estado de revisión y no tiene su aprobación definitiva.

- Introduce los estándares de aprendizaje en el currículum como un nuevo elemento determinante del proceso de enseñanza-aprendizaje, los cuales no son más que especificaciones de los criterios de evaluación.
- Pasa a denominar competencias clave a las competencias básicas.
- Reduce las 8 competencias básicas a 7 competencias clave, fusionando la competencia matemática y la competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico en una sola denominada competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- No se fijan objetivos para las asignaturas, sino que se fijan para cada etapa.
- Se modifica la configuración de los ciclos de la ESO. El primer ciclo queda formado por los cursos de 1º, 2º y 3º curso, mientras que el segundo ciclo comprende únicamente el 4º curso.
- En 3º y 4º curso de ESO los estudiantes deben elegir entre matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas.
- Se establece que las competencias de comprensión lectora, expresión oral y escrita, la comunicación audiovisual, las TIC, el emprendimiento y la educación cívica social deben trabajarse de forma transversal en todas las materias y etapas educativas.

- Se crean los Programas de Mejora del Aprendizaje y del Rendimiento (PMAR), pensados para los estudiantes de 2º y 3º curso, y que substituyen a los Programas de Diversificación Curricular que estaban destinados para 3º y 4º curso, adelantando un año la intervención y preparando a los estudiantes para llegar a 4º.
- Se introduce la evaluación final de ESO, necesaria para conseguir el título de Graduado en ESO, con el fin que todos los estudiantes consigan un nivel adecuado de aprendizaje, unificando los estándares del título de Graduado de la ESO para toda España.

Currículo base para la Educación Secundaria Obligatoria

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por lo que se establece el currículo base para la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en España (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD], 2015) se definen los bloques de contenidos para cada una de las enseñanzas y etapas educativas, además de establecer los contenidos, los criterios y estándares de aprendizaje para cada uno de los bloques especificados. Por lo que a la asignatura de Matemáticas se refiere, se encuentra como asignatura troncal en los cursos de 1º y 2º, mientras que en 3º y 4º curso aun siendo asignatura troncal se define como troncal de opción, y se divide en matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas y matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, que el estudiante debe elegir en función si desea continuar estudiando Formación Profesional o Bachillerato.

Todas las asignaturas de matemáticas comprendidas en Educación Secundaria Obligatoria distribuyen sus contenidos de la siguiente forma:

- Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas (este es un bloque transversal que se trabaja en todos los demás).
- Números y álgebra.
- Geometría.
- Funciones.
- Estadística y probabilidad.

El *Decret 187/2015*, de 25 de agosto, *d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria* es el documento que regula el currículo base en la Comunidad Autónoma de Cataluña.

En este caso, el *Decret 187/2015* se define con una estructura diferenciada de la descrita en el Real Decreto 1105/2014. El ámbito matemático se divide en cuatro dimensiones: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones y comunicación y representación. Cada una de estas dimensiones tiene asociadas unas competencias específicas, y cada una estas competencias unos contenidos clave, que en el caso del ámbito matemático llegan a ser 16, los cuales están asociados a los contenidos de cada curso, en este caso divididos en cinco bloques: número y cálculo, cambio y relaciones, espacio y forma, medida y estadística y azar. Además de las competencias específicas cada dimensión tiene asociados unos criterios de evaluación, como se resume en la Figura 2.

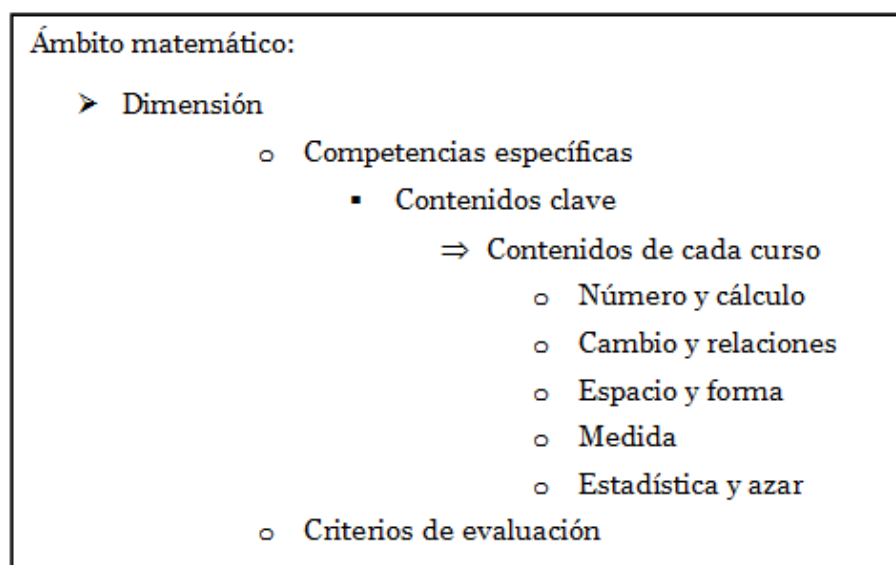


Figura 2. Esquema del Ámbito Matemático. Fuente: Elaboración propia a partir de Decret 187/2015

Geometría de 2º de la ESO

De acuerdo con lo que establece el *Decret 187/2015*, de 25 de agosto, *d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria*, los contenidos de la asignatura de matemáticas para el 2º curso de educación secundaria se dividen en cinco bloques: número y cálculo, cambio y relaciones, espacio y forma, medida y estadística y azar. Siendo los bloques de espacio y forma y medida donde se encuentran los contenidos geométricos, objeto de este trabajo, que seguidamente se detallan en la Tabla 3.

Tabla 3

Contenidos geométricos 2º de la ESO

Espacio y forma	Medida
Figuras y cuerpos geométricos	Teoremas de Tales y de Pitágoras
Proporcionalidad y semejanza en figuras de dos dimensiones	Longitudes, perímetros y áreas de figuras planas
Teoremas de Tales y de Pitágoras	Superficies y volúmenes de cuerpos en el espacio

Fuente: Elaboración propia a partir de Decret 187/2015

Enseñanza-aprendizaje de la Geometría

Son numerosos los estudios realizados en los últimos años en cuanto al desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría. En este apartado se describe el proceso desde el enfoque constructivista basado en la experimentación, se definen las dificultades más comunes con las que se encuentran los estudiantes en el aprendizaje de la Geometría, se presenta el Modelo de Van Hiele como un modelo de aprendizaje a tener en cuenta por los docentes y se describen las habilidades que la Geometría permite desarrollar en los estudiantes, habilidades de aplicación tanto en el campo de la Geometría como en cualquier otro campo matemático e incluso en la vida cotidiana.

La importancia de la Geometría

La Geometría ha sido, desde sus orígenes, de gran importancia para la humanidad y su desarrollo (Vargas y Gamboa, 2013). Según estos autores “la Geometría es para el ser humano el idioma universal que le permite descubrir y construir su mundo, así como transmitir la percepción que tiene de este al resto de la humanidad” (p.75).

En este sentido, Hernández y Villalba señalan que “la Geometría es considerada una herramienta para el entendimiento, seguramente la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad” (Hernández y Villalba, 2001, ¶.1). Estos autores ven la Geometría como:

La ciencia del espacio, que describe y mide figuras, y es la base para la construcción y el estudio de modelos del mundo físico y fenómenos del mundo real.

Un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos en matemáticas y en otras ciencias.

Un punto de encuentro entre la matemática teórica y la matemática como fuente de modelos.

Una manera de pensar y entender.

Un ejemplo paradigmático para la enseñanza del razonamiento deductivo.

Una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovadoras. (Hernández y Villalba, 2001, ¶13).

Los resultados del estudio realizado por Gamboa y Ballesteros (2010) revelan que la enseñanza y aprendizaje de la Geometría en secundaria pone sus cimientos en la memorización y la resolución de problemas de forma sistemática, dejando de lado esta parte intuitiva y atada al mundo real que mencionan en su trabajo Hernández y Villalba (2001).

Proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría

Barrantes (2003) en su trabajo destaca las principales características del enfoque tradicional y el enfoque constructivista por lo que se refiere a la enseñanza de la Geometría. Este autor coincide con Gamboa y Ballesteros cuando habla de la enseñanza tradicional y dice que está basada en la memorización de conceptos y propiedades, dejando al margen la intuición como medio de acceso al conocimiento geométrico. Para Barrantes (2003) el estudiante recibe de forma pasiva los conocimientos, que le son transmitidos de manera que estos no quedan integrados en sus estructuras lógicas, lo que le impide generalizarlos, pudiéndolos aplicar únicamente en contextos similares a los del aprendizaje. La enseñanza constructivista, en cambio, se basa en el aprendizaje activo del estudiante el cual construye los conocimientos por sí mismo con el docente como facilitador. En este sentido el autor destaca la importancia de trabajar la Geometría utilizando la resolución de problemas o la experimentación donde el estudiante observe, pruebe, analice, interprete, reflexione y construya conocimientos significativos que resulten duraderos y que le permitan generalizar y transferir a otros contextos llegando, a su debido momento, a la concepción abstracta del concepto geométrico.

En su trabajo, Barrantes (2003) define dos grandes objetivos a alcanzar en la enseñanza de la Geometría. En primer lugar, poner al alcance del estudiante todos los recursos necesarios que le permitan explorar, manipular, visualizar o cuestionarse el espacio tridimensional y, en segundo término, una vez haya construido un conocimiento geométrico base, acompañar al estudiante en el aprendizaje de niveles superiores, trabajando el razonamiento lógico. En definitiva,

hacer de la Geometría una materia atrayente y motivadora, provocando un cambio de actitud en el estudiante que aumente el interés hacia ella.

El presente trabajo trata de analizar algunos de los materiales manipulativos como recurso didáctico aplicado a la enseñanza de la Geometría en 2º de la ESO, con el objeto de facilitar al estudiante la construcción de un aprendizaje más significativo que le permita la generalización, la transferencia y la abstracción del conocimiento geométrico.

Dificultades en el aprendizaje de la Geometría

La Geometría se caracteriza por ser abstracta. Este hecho dificulta su aprendizaje y es frecuente la aparición de errores y obstáculos que dificultan al alumno en la construcción del conocimiento geométrico. En el análisis de las dificultades con las que se enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de la Geometría cabe destacar el estudio realizado por Barrantes y Zapata (2008), donde se describen los errores y los obstáculos más significativos que se presentan en el aprendizaje de la Geometría. Conocer estos errores es sumamente importante para comprender las concepciones de los estudiantes, cómo aprenden y con qué dificultades se encuentran, y a su vez ayuda al docente en la mejora de sus prácticas pedagógicas.

De acuerdo con el citado estudio, a continuación, se detallan los errores más frecuentes que se pueden encontrar en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría:

- Errores del esquema conceptual: Vinner (1991, citado en Barrantes y Zapata, 2008, p. 57) según los autores del estudio define el esquema conceptual como “aquello que se presenta en la mente del estudiante cuando se nombra un concepto, son las imágenes mentales que fruto de la experiencia, en la que se interiorizan propiedades y se desarrollan procedimientos, ha asociado con dicho concepto”. Estos errores se generan en muchas ocasiones por el uso del libro de texto como único recurso didáctico, lo que impide al estudiante ampliar su esquema conceptual con todo tipo de experiencias.
- Errores de la simbología visual del concepto: Las imágenes son muy importantes en la enseñanza de la Geometría, y a menudo los libros de texto presentan tareas con representaciones que pueden ser interpretadas de distintas maneras y conducen al estudiante al error, sobre todo si se trata de una representación plana de un cuerpo geométrico. De esta manera, la Figura 3 puede interpretarse como una pirámide cuadrada, un octaedro o un cuadrado con sus diagonales.

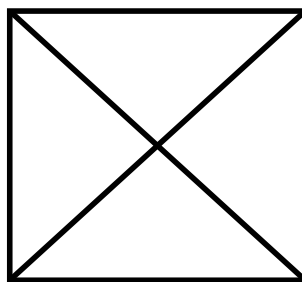


Figura 3. Errores de simbología visual del concepto. Fuente: Barrantes y Zapata (2008, p. 57)

- Distractores de orientación: son propiedades irrelevantes con fuerte atracción visual que nada tienen que ver con la definición del concepto geométrico.

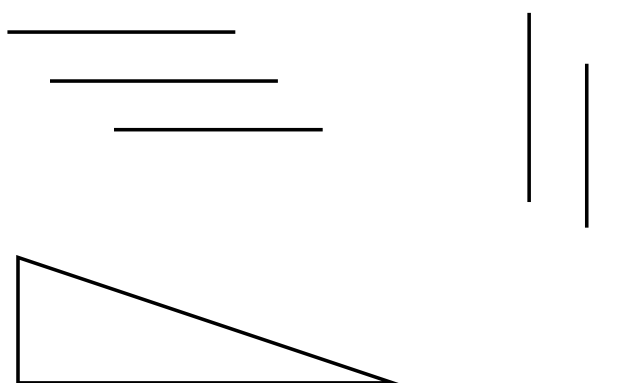
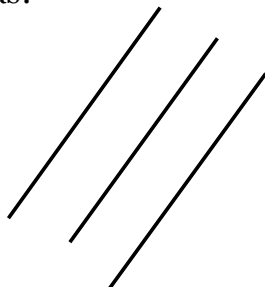


Figura 4. Distractores de orientación. Fuente: Barrantes y Zapata (2008, p. 59)

Entre ellos se encuentra el paralelismo de las figuras con los lados del libro o folio, o la construcción del triángulo rectángulo siempre apoyado sobre el vértice del ángulo recto (Figura 4). Al estudiante le cuesta identificar como paralelas dos rectas no que sigan la alineación de los bordes del libro o triángulos rectángulos los que se apoyen sobre la hipotenusa (Figura 5).

¿Paralelas?



¿Triángulo rectángulo?

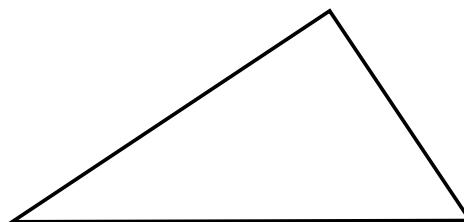


Figura 5. Distractores de orientación. Fuente: Elaboración propia a partir de Barrantes y Zapata (2008)

En la representación de sólidos tenemos otro ejemplo, siempre apoyados sobre la base, hace que el estudiante no los reconozca cuando estos se encuentran apoyados sobre la cara lateral o sobre un vértice o una arista. En

consecuencia, el estudiante considera la base como la cara en la que se apoyan los objetos.

- Distractores de estructuración: ocurren cuando en una presentación de un concepto se excluyen elementos y propiedades, lo que origina esquemas mentales incompletos. Ejemplos de ello son la presentación de los triángulos isósceles siempre apoyados por el lado desigual que a la vez siempre es menor que los dos lados iguales, o la presentación de las alturas de los triángulos siempre paralelas al borde del libro. En este caso, para hallar las alturas el estudiante traza la paralela al borde del libro en vez de la perpendicular a la base (Figura 6).

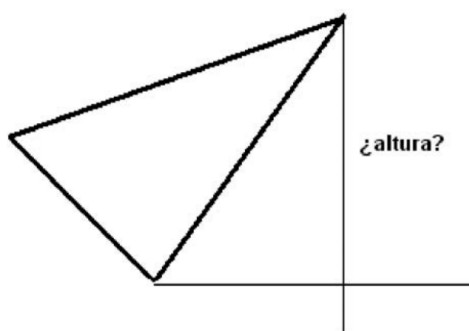


Figura 6. Distractores de estructuración. Fuente: Barrantes y Zapata (2008, p. 62)

Esta presentación lleva al estudiante a creer que un triángulo tiene una única altura, o bien, le comporta dificultades para trazar una altura que no sea paralela al borde del libro.

Berthélot y Salin (1993/1994, citados por Scaglia y Moriena, 2005) afirman que “la enseñanza del espacio y de la geometría en la escuela primaria se apoya fundamentalmente sobre una presentación ostensiva” (pp. 118-119). La presentación ostensiva de los objetos matemáticos puede conducir a este tipo de dificultades, como explican las autoras de este artículo. El docente presenta el objeto matemático apoyándose en una determinada representación gráfica y supone que los estudiantes serán capaces de distinguirlo en otras situaciones. Ante ello, el estudiante crea su propio esquema mental basándose en la representación única, de manera que cuando se le presenta de forma diferente tiene dificultades para relacionarlo con su esquema mental. Las Figuras 5, y 6 son ejemplos de errores producidos como consecuencia de la presentación ostensiva de los objetos geométricos (Figura 4).

- Errores de nomenclatura: Es el error que se comete cuando únicamente se considera figura geométrica aquella a la que se le ha dado un nombre

“oficial”. A raíz de ello los estudiantes tienen menores dificultades para identificar polígonos o cuerpos geométricos con nombres conocidos que para aquellos con un nombre no tan común.

- Errores de las imágenes reales del concepto: En Geometría no se debe confundir los conceptos con sus representaciones externas, aunque según los autores del estudio, Barrantes y Zapata (2008), los conceptos geométricos se basan en objetos generales y abstractos que únicamente pueden ser expresados mediante objetos concretos y particulares.

Es de gran importancia la correcta selección de objetos reales para la primera presentación de una figura o cuerpo geométrico, ya que una mala selección conduce a la aparición de dificultades para la abstracción del concepto geométrico. Un ejemplo lo encontramos en la presentación de un cilindro utilizando una lata de bebida con extremos curvados.

- Errores de las definiciones: Las definiciones de los conceptos geométricos se trabajan en el aula de forma memorística prescindiendo o dándole poca importancia a los ejemplos. Esto hace que los estudiantes conozcan los conceptos geométricos de forma teórica, pero sean incapaces de aplicarlos en la resolución de problemas.

El uso de diferente terminología para la definición de un concepto geométrico es también objeto de errores. Por ejemplo, el uso de segmento o recta en la definición de altura de un triángulo, ambos son considerados como válidos, pero no significan lo mismo, y esto puede confundir al estudiante.

- Errores de las clasificaciones: Son errores que se basan en la confusión que se genera al estudiante debido a la clasificación de las figuras planas (triángulos y cuadriláteros), en educación primaria se suele presentar la clasificación por partición (Figura 7) mientras que en educación secundaria se presenta por inclusión (Figura 8). Estos errores se ven reflejados en las dificultades que posteriormente tienen los estudiantes para la clasificación de los cuerpos geométricos.

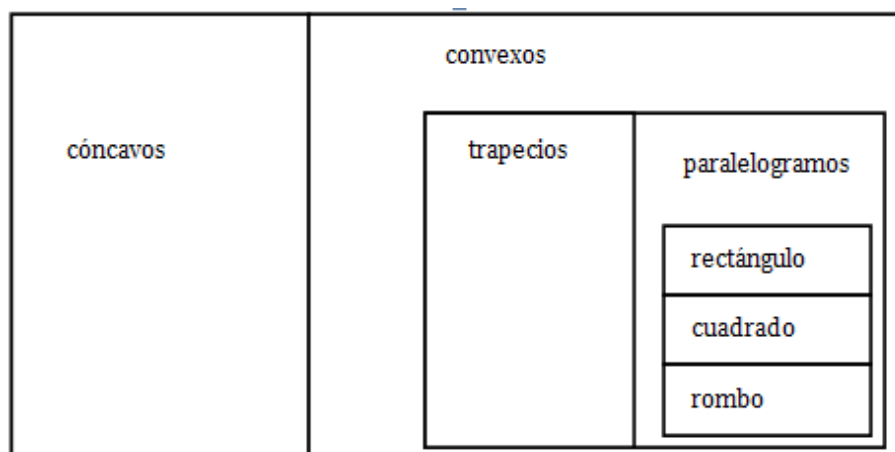


Figura 7. Clasificación por partición. Fuente: Barrantes y Zapata (2008, p. 67)

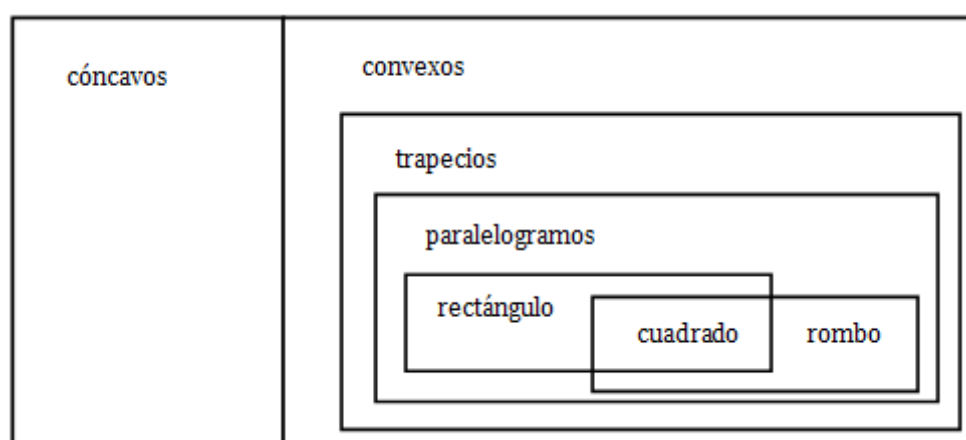


Figura 8. Clasificación por inclusión. Fuente: Barrantes y Zapata (2008, p. 68)

Por ello, es importante que el docente ponga énfasis a este cambio de clasificación y que lo trabaje en el aula, ya que cambio de clasificación computa un cambio de imagen conceptual que el estudiante debe asimilar e incorporar a su esquema mental.

Todos estos errores surgidos en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, de acuerdo con lo que dicen Barrantes y Zapata en su estudio, deben ser trabajados mediante aprendizaje activo del estudiante, en el que este manipule los conceptos y las propiedades de las figuras geométricas de manera que pueda llegar a las definiciones sin que estas deban ser memorizadas. Este tipo de metodología, denominada por estos autores como “Geometría dinámica”, permite al estudiante interiorizar los conocimientos para posteriormente abstraerlos y transferirlos a diferentes contextos.

El uso de material manipulativo como recurso para la enseñanza de la Geometría puede ser de gran ayuda para minimizar este tipo de errores y facilitar la asimilación de conceptos y propiedades.

Modelo de razonamiento geométrico Van Hiele

La enseñanza de la Geometría no es una tarea fácil y los motivos son múltiples y complejos. El profesor puede utilizar metodologías, estrategias y recursos didácticos que ayuden al estudiante a superar los obstáculos que le puedan surgir durante el proceso de aprendizaje. En su trabajo, Vargas y Gamboa (2013) destacan la importancia que tiene para el docente el conocimiento del Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele para la enseñanza de la Geometría.

El modelo, desarrollado por el matrimonio Van Hiele, explica cómo se producen el aprendizaje y el desarrollo del conocimiento del estudiante. En su trabajo Corberán (1994) resume las características que lo definen como el modelo que: a) permite identificar diferentes niveles de razonamiento geométrico en el estudiante, b) tiene en cuenta que el estudiante sólo puede comprender aquello que el docente le presenta de forma adecuada para cada nivel y c) si un concepto geométrico no se puede presentar al estudiante de forma comprensible según su nivel de razonamiento es mejor esperar a que este alcance el nivel superior. De acuerdo con el modelo, Corberán (1994) destaca la importancia que tiene la experiencia del estudiante en el aprendizaje del razonamiento lógico, según este autor, no es posible enseñar a un estudiante a razonar de una determinada manera. Lo que el docente puede hacer es facilitar al alumno la adquisición de dicha experiencia. Para ello el modelo establece unas pautas de organización de la enseñanza que el docente puede utilizar para favorecer el aprendizaje del razonamiento lógico del estudiante y como consecuencia la mejora de su nivel.

El aprendizaje de la Geometría de acuerdo con el Modelo de Van Hiele puede dividirse en cinco formas o niveles de entender los conceptos geométricos. Los niveles no son independientes, sino que siguen una organización jerárquica, del nivel 1 al 5 pasando previamente por el 2, el 3 y 4. Además los niveles de razonamiento precisan del conocimiento y del uso de un determinado lenguaje matemático y/o geométrico, que el alumno debe dominar para conseguir el siguiente nivel (Vargas y Gamboa, 2013).

A continuación se describen los cinco niveles de razonamiento geométrico correspondientes al Modelo Van Hiele, a partir de los trabajos realizados por Vargas y Gamboa (2013) y Corberán (1994).

- Nivel 1. Reconocimiento: El estudiante reconoce las figuras geométricas e incluso puede hacer una copia de ellas, pero es incapaz de ver sus propiedades o diferenciar sus partes. El estudiante tampoco conoce el lenguaje geométrico para nombrar las figuras.

- Nivel 2. Análisis: El estudiante es capaz de descomponer las figuras en diferentes partes y observar sus propiedades a través de la experimentación, aunque no haga ningún tipo de clasificación. En cuanto al lenguaje no es capaz de hacer definiciones geométricas.
- Nivel 3. Ordenamiento: El estudiante identifica las figuras geométricas clasificándolas según sus propiedades. Establece relación entre las propiedades, observando que unas se deducen de las otras. Y comprende el significado de las definiciones geométricas, aunque centra su razonamiento lógico en la experimentación.
- Nivel 4. Deducción: El estudiante utiliza la lógica formal para hacer sus propias deducciones y demostraciones. Se da cuenta que para llegar a un mismo resultado puede utilizar diferentes caminos, lo que le permite demostrar un teorema de distintas formas. En este nivel el estudiante no siente la necesidad de darle rigor al razonamiento.
- Nivel 5. Rigor: El estudiante analiza el grado de rigor de varios sistemas deductivos y los compara entre sí. Capta la geometría en forma abstracta. Este nivel es de difícil alcance, solo accesible para estudiantes de los últimos cursos universitarios de Matemáticas, por esta razón, muchos investigadores solo consideran los 4 primeros niveles.

Para cada nivel de razonamiento el estudiante debe pasar por cinco fases de aprendizaje que le permiten acceder al siguiente nivel, las cuales marcan las pautas que facilitan el avance del estudiante, y a su vez guían al docente en su tarea de planificación y organización de la unidad didáctica.

A continuación, se definen las cinco fases de aprendizaje de este modelo de acuerdo con los trabajos de Vargas y Gamboa (2013) y Corberán (1994):

- Fase 1: Información. En esta fase el docente presenta toda la información que permita al estudiante conocer el tema de estudio que se va a iniciar, la tipología de problemas a resolver, los materiales a utilizar, los métodos de trabajo,... El docente, en esta fase, debe evaluar los conocimientos previos del estudiante.
- Fase 2: Orientación dirigida. El docente proporciona al estudiante una serie de actividades y problemas que este debe resolver, con la finalidad que el estudiante descubra y aprenda los conceptos y propiedades geométricas del tema estudiado y, a su vez, le introduzcan a conocer los métodos de razonamiento del nivel superior. La solución de estos problemas debe pasar

directamente por los conceptos y propiedades trabajados, teniendo en cuenta la consecución de pequeñas metas para incentivar el interés del estudiante hacia lo que se está haciendo. El papel del docente en esta fase debe ser el de guiar al estudiante hacia el camino de la solución cuando este lo necesite, aunque siempre sin proporcionársela.

- Fase 3: Explicitación. En esta fase el estudiante trabaja el vocabulario específico del tema estudiado, aprendiendo a utilizarlo de forma adecuada en cada situación. Para ello, el docente pide al alumno que se exprese, indicando sus experiencias, sus estrategias utilizadas para la resolución de problemas, y, en definitiva, incentivando el diálogo en el aula de manera que el estudiante sea capaz de afianzar el lenguaje geométrico correspondiente al nivel de razonamiento en el que se encuentra.

Según Corberán (1994, p. 27),

esta tercera fase no hay que entenderla como un período de diálogo después de haber completado el trabajo de la segunda fase y antes de iniciar el de la cuarta. Habría que considerarla, más bien, como una actitud continua de diálogo tras cada problema o grupo de problemas durante las otras 4 fases.

- Fase 4: Orientación libre. En esta fase el docente propone al estudiante la resolución de actividades y problemas de mayor complejidad, donde el estudiante debe hacer uso de lo aprendido en la Fase 2 (Orientación dirigida). Los problemas planteados en esta fase siguen la tipología del problema no-estructurado, es decir, que pueden resolverse de diferentes formas y tienen múltiples soluciones. En la resolución de estas tareas, el docente debe mantenerse al margen e intervenir lo más mínimo, ya que es el estudiante quien a través de los conocimientos adquiridos en la segunda fase debe llegar hasta la solución.
- Fase 5: Integración. En esta fase el estudiante debe conseguir una visión global del tema estudiado. El estudiante no construye nuevos conocimientos, sino que organiza los adquiridos juntamente con los previos, de manera que le permite alcanzar una visión total de los contenidos trabajados en el tema de estudio. Los resúmenes que propone el docente son de gran ayuda y facilitan la integración de los conocimientos adquiridos.

Una vez finalizadas las cinco fases de aprendizaje el estudiante debe alcanzar el nivel de razonamiento siguiente, de manera que en este nivel se debe volver a pasar por todas las fases y así sucesivamente. El Modelo Van Hiele se fundamenta en una enseñanza cíclica en la que los conocimientos previos se retoman en los niveles

superiores para mejorar su comprensión (Corberán, 1994). La Figura 9 pretende representar esta enseñanza cíclica característica del Modelo Van Hiele.

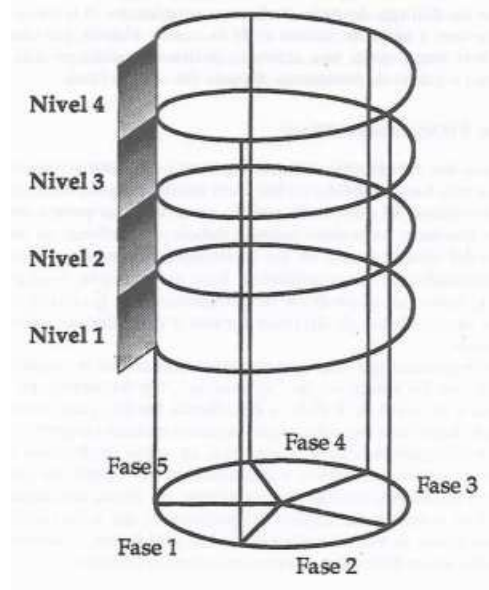


Figura 9. Diagrama del Modelo Van Hiele. Fuente: Corberán (1994, p. 28)

Habilidades propias de la Geometría

La enseñanza de la Geometría puede enfocarse desde dos puntos de vista, por un lado, está el razonamiento deductivo basado en las leyes y teoremas matemáticos, y por el otro la intuición y la experimentación, pareciendo esta, la opción más adecuada para introducir la Geometría al alumnado de Educación Secundaria (Villarroel y Sgreccia, 2011). Por esta vía el estudiante desarrolla unas habilidades que le facilitan la comprensión de esta y de otras áreas de las matemáticas e incluso del mundo en general, y de ahí la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría

En este sentido y siguiendo los trabajos de Hoffer, Villarroel y Sgreccia (2011) y Galindo (1996) definen las habilidades básicas que la Geometría puede ayudar a desarrollar en el estudiante.

- **Habilidades visuales:** Hacen referencia tanto a la capacidad de reproducir un objeto visual a nivel mental como a la de representar lo mental mediante formas visuales externas. Para el trabajo de las habilidades visuales es necesario facilitar al estudiante una amplia variedad de estímulos visuales.
- **Habilidades de comunicación:** Hacen referencia a la capacidad del estudiante para entender y comunicarse de forma adecuada utilizando el lenguaje de la Geometría. Es importante que el docente interprete el vocabulario del

estudiante para ayudarlo a mejorarlo y darle mayor rigor a la expresión de sus ideas.

- **Habilidades de dibujo y construcción:** Hacen referencia a la capacidad para interpretar conceptos o imágenes internas y representarlos a través de dibujos o esquemas. Se debe trabajar el dibujo de figuras y cuerpos geométricos y la construcción a partir de modelos o sobre la base de datos dados. En cualquier caso, evitando las representaciones únicas o imprecisas de conceptos, las cuales normalmente conducen a errores.
- **Habilidades lógicas y de razonamiento:** Hacen referencia a la capacidad para desarrollar argumentos y aprender a razonar. Y entre ellas encontramos: la abstracción, justificación, argumentación, demostración, identificación y realización de argumentos y deducciones lógicas. Las habilidades lógicas están estrechamente relacionadas con las de creación y la experimentación, de las que no se pueden separar.
- **Habilidades de aplicación o transferencia:** Hacen referencia a la capacidad de aplicar lo aprendido a otros contextos. El docente puede trabajar la transferencia y aplicación de diversas formas, mediante el uso de diferentes estrategias para la resolución de un mismo problema, mediante la aplicación de un mismo contenido en diferentes contextos o a través de la relación entre en mundo real y lo trabajado en el aula.

Hoffer (1990, citado por Galindo, 1996) en su trabajo relaciona las habilidades básicas desarrolladas en Geometría con los cinco niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, describiendo las habilidades básicas que están relacionadas con cada uno de los niveles de razonamiento. Esta relación puede ser de gran ayuda para el docente puesto que puede hacerse una idea de las habilidades de que dispone el estudiante en cada uno de los niveles de razonamiento.

La adquisición de estas habilidades (visuales, de comunicación, de dibujo y construcción, lógicas y de razonamiento y de aplicación o transferencia) está íntimamente sujeta a la experimentación, experimentación que puede ser facilitada por una gran diversidad de recursos entre los que se encuentra el material manipulativo (Barrantes 2003).

Material manipulativo y Geometría

La enseñanza constructivista pone al estudiante en el centro del proceso y lo dota de un papel activo y determinante en la construcción de un conocimiento significativo. Este papel activo del estudiante despierta su interés, favoreciendo su motivación y

contribuyendo de forma positiva en su aprendizaje. El enfoque inductivo en la enseñanza de la Geometría basado en la experimentación acerca los conceptos abstractos al mundo real y los recursos materiales adquieren un papel facilitador en todo este proceso, permitiendo al estudiante aprender haciendo (Barrantes, 2003).

En el aprendizaje constructivo, el libro de texto pierde su exclusividad debido a sus limitaciones para dar respuestas al estudiante, y de aquí, la importancia o la necesidad de la introducción de otros recursos en el aula que contribuyan a la comprensión y aprendizaje de la Geometría (Mora, 1995).

Alsina (2008), en su trabajo, manifiesta la importancia que tiene el material didáctico en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, señalando que:

El material didáctico, juega un papel fundamental en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Su correcta utilización constituye una importante baza en la adquisición de conceptos, relaciones y métodos geométricos ya que posibilita una enseñanza activa de acuerdo con la evolución intelectual del alumno (p. 176).

Los materiales didácticos potencian las habilidades geométricas favoreciendo el desarrollo del pensamiento geométrico, como destaca Mora (1995) en su artículo, en el cual citando a Castelnuovo, resalta la activación del conocimiento como característica relevante del material didáctico, ya que permite que el estudiante cree, manipule, experimente, construya y descubra.

Otro factor a destacar, según este autor, en el uso de material didáctico es que contribuye a superar los obstáculos o dificultades que surgen en la concepción de los conceptos geométricos, favoreciendo la creación de esquemas mentales adecuados. De acuerdo con lo que dice Mora (1995) en su artículo, el uso de materiales diversos permite trabajar los objetos matemáticos desde diferentes situaciones favoreciendo la comprensión de propiedades y conceptos geométricos. Este autor subraya la importancia que tiene que el docente haga uso, en el aula, de la gran variedad de materiales disponibles hoy en día.

Siguiendo en esta línea, Alsina (2010) hace un símil entre la pirámide alimentaria y la correspondiente a la educación matemática (Figura 10) e indica qué recursos o materiales didácticos deben utilizarse de forma diaria, cuáles de forma habitual y cuáles de forma más esporádica para alcanzar la competencia matemática (Alsina, 2010).



Figura 10. Pirámide de la educación matemática. Fuente: Alsina (2010, p. 14)

En la base de la pirámide se observan, por un lado, las situaciones cotidianas, factor fundamental en la construcción del aprendizaje significativo, y por el otro, los recursos manipulativos que permiten al propio estudiante la creación de esquemas mentales adecuados (Alsina, 2010).

Identificación y clasificación de los materiales didácticos que trabajan la Geometría

En cuanto a la definición de recurso didáctico, Godino y Ruiz (2002, p. 8) , en su libro, apuntan lo siguiente, “se entiende por recurso cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que el profesor decide incorporar en sus enseñanzas”. Mientras que por lo que se refiere a materiales didácticos, añaden “se distinguen de los recursos porque, inicialmente, se diseñan con fines educativos”. Es difícil distinguir entre material y recurso didáctico, porque tal y como apuntan estos autores, un buen material didáctico es aquel que puede ser apto para diferentes aplicaciones y no para el único fin educativo por el cual ha sido diseñado.

Para Villarroya (1994) “el material debe ser rico en la creación de situaciones de clase, situaciones que además se deberán enlazar unas con otras” (p. 98).

En cualquier caso, el material didáctico debe ser considerado un medio para el aprendizaje, en ningún caso debe ser considerado como un fin, como señala Mora (1995) en su artículo. El fin debe ser el de favorecer o facilitar al estudiante la construcción de conocimiento geométrico a partir de su propia manipulación y experimentación.

El material didáctico por sí solo no conduce al aprendizaje, para que esto suceda el docente debe diseñar actividades adecuadas que permitan al estudiante trabajar de forma activa en la resolución de las situaciones planteadas sin evitar en ningún caso errores o caminos equivocados ya que estos forman parte del proceso (Godino y Ruiz, 2002).

Para el diseño de actividades, el docente debe tener los conocimientos y las capacidades para elegir los materiales y adaptarlos a las situaciones de aprendizaje de la forma que considere más adecuada para que contribuyan en el aprendizaje (Barrantes, 2003).

En cuanto a la elección de los materiales didácticos más adecuados para el aprendizaje de un determinado contenido, de acuerdo con lo que Mora (1995) explica en su artículo, el docente debe elegir un material y estudiar cuales son las propiedades y conceptos que este material le permite trabajar y analizar, del mismo modo, si quedan algunas que no pueden ser tratadas, para intentar completar el trabajo con otro tipo de material o recurso.

Existen múltiples formas de clasificar los materiales didácticos, Barrantes y Balletbó (2012) en su artículo los clasifican en tres categorías:

- Modelos constructivos, “aquellos materiales que sirven directamente para observar y concretar conceptos, y profundizar en propiedades” (Barrantes y Balletbó, 2012, p. 34). Entre ellos se encuentran los sólidos de madera o plástico.
- Materiales constructores, “sirven para hacer modelos diversos o bien para generar situaciones de aprendizaje” (Barrantes y Balletbó, 2012, p. 33). El más relevante es el papel, el cual permite todo tipo de construcciones y con él es posible trabajar diferentes conceptos y propiedades. Los espejos también se encuentran en este grupo, el libro de espejos permite trabajar la geometría plana.
- Mecanismos. Un ejemplo de ello es el visor de cónicas (mediante un artefacto construido con dos embudos negros con una bombilla en su interior se proyecta el haz de luz en forma de cono, que al ser cortado con la ayuda de una madera genera las diferentes cónicas).

Como señalan las autoras Villarroel y Sgreccia (2011), en su trabajo de investigación para la identificación y caracterización de los materiales concretos en la enseñanza de la Geometría de 1º de Educación Secundaria, es necesario tener en cuenta dimensiones tales como la descripción del material (dimensiones, formas,

presentaciones, tipos de material...), su aporte didáctico-matemático (contenidos geométricos que puede trabajar, habilidades geométricas que desarrolla y relación con los niveles y fases del modelo geométrico de Van Hiele) y su versatilidad (variedad de contenidos geométricos que trabaja y vinculación con otras áreas de las matemáticas). Fruto de esta investigación, estas autoras, clasifican los materiales en siete grupos: Modelos fijos 2D y 3D, rompecabezas geométricos, Tangram, Geoplano, transformaciones dinámicas, Origami o papiroflexia y objetos del entorno real. Y cada uno de ellos puede ser utilizado para favorecer una determinada habilidad geométrica en función de la situación diseñada por el docente.

CAPÍTULO 2. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

La presente propuesta de intervención se desarrolla a partir de los objetivos que se describen al inicio de este trabajo. En ella se diseñan una serie de actividades, para las que se ha tenido en cuenta los contenidos de Geometría de 2º de ESO. Las actividades se fundamentan en el uso de material manipulativo como recurso, con el fin de favorecer la motivación y el interés del estudiante, así como la construcción de un aprendizaje significativo a través de una experimentación vivencial propia. La propuesta trata de romper con el enfoque tradicional de la enseñanza de la Geometría, desde siempre memorística y sistemática, y para ello, se ha contado con lo descrito en el marco teórico expuesto en este trabajo.

Esta propuesta didáctica define los objetivos, los contenidos y competencias que se van a trabajar en ella, por lo que ha sido necesario el desarrollo de los contenidos y competencias definidos en la legislación educativa vigente.

Las actividades se han diseñado con el fin de construir un aprendizaje significativo basado en la manipulación y creado a través de la propia experiencia del estudiante, que tiene el papel de protagonista activo, y que cuenta con el apoyo del docente, considerado como guía en cada una de ellas. Las actividades se han diseñado contando con variedad de materiales: rompecabezas, piezas de mecano y diversos de materiales constructores.

En la propuesta también se encuentran descritos los criterios de evaluación y de calificación de la misma, así como los instrumentos de evaluación a utilizar para determinar si se han alcanzado los objetivos de aprendizaje establecidos. La evaluación de la propuesta se ha realizado previa implementación de la misma a través de una matriz DAFO, a la vez que se proponen unos cuestionarios que podrán responder tanto docentes como los estudiantes, una vez implementada la propuesta, y que facilitarán el análisis y la reflexión, así como la contribución en su mejora.

Contexto y destinatarios

Esta propuesta didáctica está diseñada para estudiantes de 2º curso de ESO del Instituto Josep Brugulat de Banyoles, un centro de titularidad pública perteneciente a la red de centros escolares del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, aunque ha sido diseñada para poder ser llevada a cabo en cualquier tipo de centro, ya sea público, concertado o privado. Su redacción se ha realizado de acuerdo con la legislación educativa vigente correspondiente a la Comunidad Autónoma de Cataluña, y de acuerdo con la legislación del Estado Español, donde se

establece el currículo base para la ESO, tal como se señala en el apartado correspondiente al Marco Legislativo.

Objetivos didácticos

El objetivo principal de esta propuesta didáctica es el de construir un aprendizaje significativo y contribuir a la superación de las dificultades y obstáculos más comunes con los que se enfrentan los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, teniendo en cuenta el uso del material manipulativo como recurso didáctico.

En cuanto a los objetivos específicos, estos se han desarrollado a partir de lo establecido en el currículo base, definido en el decreto autonómico, y son los siguientes:

- Conocer los elementos de un triángulo y sus propiedades, conocer y aplicar el teorema de Pitágoras para el cálculo de medidas.
- Conocer los conceptos de semejanza y razón de semejanza de las figuras.
- Identificar los diferentes tipos de polígonos y calcular sus áreas.
- Identificar los diferentes tipos de cuerpos geométricos y sus elementos.
- Realizar los desarrollos planos de cuerpos geométricos y calcular sus superficies.

Contenidos

Los contenidos didácticos de esta propuesta se han desarrollado a partir de lo establecido en los bloques de contenidos espacio y forma correspondientes al *Decret 187/2015*, de 25 de agosto, *d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria*, los cuales están relacionados con los contenidos clave, que a su vez contribuyen a la consecución de las competencias específicas del ámbito matemático. Esta relación queda reflejada en la Tabla 4.

Tabla 4

Bloques de contenidos y contenidos clave

Bloque de contenidos	Contenidos clave
Espacio y forma	Proporcionalidad y semejanza de figuras de dos dimensiones
	CC9. Figuras geométricas, características, propiedades y procesos de construcción.
	CC10. Relaciones y transformaciones geométricas.
Teorema de Pitágoras	CC9. Figuras geométricas, características, propiedades y procesos de construcción.
	CC10. Relaciones y transformaciones geométricas.
Figuras y cuerpos geométricos	CC8. Sentido espacial y representación de figuras tridimensionales.
	CC9. Figuras geométricas, características, propiedades y procesos de construcción.

Fuente: Elaboración propia a partir de Decret 187/2015

Competencias

Los contenidos relacionados con cada bloque son los que permiten o facilitan la consecución de las competencias básicas específicas del ámbito matemático. Las competencias que se van a trabajar en esta propuesta didáctica y que están relacionadas con los contenidos clave son las siguientes (Tabla 5):

Tabla 5

Competencias básicas específicas de ámbito matemático

Contenido clave	Competencia específica del ámbito matemático
CC8, CC11	C1. Traducir un problema a lenguaje matemático o a una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas y modelos adecuados
CC11, CC12	C2. Utilizar conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolver problemas
CC8, CC10	C3. Mantener una actitud de investigación ante un problema

ensayando estrategias diversas

CC8, CC10, CC11	C4. Generar preguntas de carácter matemático y plantear problemas
CC8, CC9, CC10	C5. Construir, expresar y contrastar argumentaciones para justificar y validar las afirmaciones que se hacen en matemáticas
CC8, CC11	C8. Identificar las matemáticas implicadas en situaciones cercanas y académicas y buscar situaciones que se puedan relacionar con ideas matemáticas concretas
CC8, CC9,	C9. Representar un concepto o relación matemática de diversas maneras y usar el cambio de representación como estrategia de trabajo matemático
CC9, CC10	C10. Expresar ideas matemáticas con claridad y precisión y comprender las de los otros
CC11	C11. Utilizar la comunicación y el trabajo colaborativo para compartir y construir conocimiento a partir de ideas matemáticas
CC8, CC9	C12. Seleccionar y usar tecnologías diversas para gestionar y mostrar información, y visualizar y estructurar ideas o procesos matemáticos

Fuente: Elaboración propia a partir de Decret 187/2015

Las competencias transversales asociadas a las actividades diseñadas en esta propuesta didáctica se relacionan a continuación:

- Competencia lingüística y audiovisual (C1)
- Competencia artística y cultural (C2)
- Matemática (M4)
- Aprender a aprender (M5)
- Autonomía e iniciativa personal (P6)
- Social y ciudadana (H8)

Recursos para el desarrollo de la propuesta

Los recursos para llevar a cabo esta propuesta didáctica se pueden dividir en tres categorías: humanos, materiales y económicos.

- Recursos humanos. En cuanto a los recursos humanos, estos están conformados por los integrantes del Departamento de matemáticas que ajustará la propuesta a su programación, el docente o docentes que la desarrollarán en el aula y el grupo-clase de estudiantes de 2º curso de ESO.
- Recursos materiales. Esta propuesta está diseñada para que sea desarrollada íntegramente en el aula. Para ello, el aula dispondrá como mínimo de pizarra blanca, proyector con sistema de audio y ordenador portátil. Cada estudiante dispondrá de una mesa y una silla, así como del material propio para el trabajo en el aula (cuaderno, bolígrafos de varios colores, lápices, compás, regla, calculadora, tijeras y cola). El material didáctico necesario para cada actividad se detalla en la descripción de cada una de ellas.
- Recursos económicos. Las actividades han sido diseñadas para poder ser llevadas a cabo con materiales económicos y asequibles en cualquier contexto económico, pudiendo ser utilizados, por ejemplo, desde el Tangram de cartulina de elaboración propia al comercializado de gomaeva, plástico o madera. La actividad 4 “¿Qué necesito?” se presenta con material comercializado “volumes à construire”, pero puede llevarse a cabo con material más económico como son los palillos y gominolas o las pajitas y plastilina.

Cronograma y actividades

Teniendo en cuenta, los objetivos, los contenidos de cada bloque, los contenidos clave y las competencias específicas del ámbito matemático, se han diseñado las actividades que se enumeran en la siguiente tabla (Tabla 6), especificando la duración de las sesiones y los contenidos didácticos que se trabajan en cada una de ellas.

Tabla 6

Planificación de actividades

Actividad	Sesiones	Contenidos didácticos
Descubre los triángulos con un mecano	55 minutos	Propiedades y clasificación de los triángulos. Aplicación del teorema de Pitágoras
Construimos figuras semejantes	55 minutos	Semejanza de figuras planas y triángulos.

Clasificamos los polígonos	55 minutos + (30 minutos)	Propiedades y clasificación de polígonos. Área y perímetro de una figura plana
¿Qué necesito?	55 minutos + (55 minutos previos)	Elementos de un poliedro y procesos de construcción
Diseña tu propia estructura tridimensional	125 minutos + (40 minutos previos)	Cuerpos geométricos tridimensionales, procesos de construcción y cálculo de medidas

Fuente: Elaboración propia

Actividad 1: “Descubre los triángulos con un mecano”

En su artículo “Los recursos didácticos en el aprendizaje de la Geometría”, Mora (1995) pone como ejemplo las varillas o mecanos como material didáctico para facilitar la construcción de conocimiento. Esta actividad quiere trabajar los triángulos, basándose en los conocimientos previos del estudiante, y contribuir a la identificación de los triángulos rectángulos en el espacio, favoreciendo a la aplicación del teorema de Pitágoras como nuevos conocimientos.

Además, la actividad contribuye a la superación de los distractores de orientación y estructuración ya que el estudiante manipula el triángulo sin tener en cuenta ningún tipo de orientación y el trabajo con las diferentes alturas le permite construir un concepto global.

En esta actividad se pretende realizar un trabajo colectivo de nivel grupo-clase, el cual se basará en las reflexiones individuales de cada uno de los estudiantes. Durante la actividad el docente realizará preguntas a los estudiantes para dar pie a sus propios razonamientos. El docente, con sus preguntas, deberá garantizar la participación de todos los integrantes del grupo clase.



Figura 11. Piezas de mecano. Fuente: www.Bernal.net

Tipo de actividad: Actividad de trabajo de conocimientos previos.

Materiales didácticos: Mecano (Figura 11), depresores, cuaderno del alumno, rotuladores de colores, cartabón y regla, tijeras y cola.

Objetivo de la actividad: Identificar las propiedades de los triángulos a partir de los conocimientos previos de los estudiantes y favorecer la identificación de los triángulos rectángulos para la aplicación del teorema de Pitágoras.

Desarrollo: El docente presenta la actividad y entrega a cada uno de los estudiantes, un conjunto de piezas de mecano de diferentes tamaños con sus correspondientes piezas de anclaje. La actividad se inicia con la pregunta: ¿Cuántos tipos de triángulos podemos construir con 3 piezas de mecano? Se les invita a probarlo.

Una vez han llegado a la conclusión que solo hay un triángulo posible, se les pide que construyan los siguientes triángulos con las piezas de 8, 12, 15 cm / 8, 12, 20 cm / 20, 20, 8 cm / 9, 12, 15 cm / 12, 12, 12 cm.

¿Cómo clasificamos estos triángulos?

Clasificados los triángulos, se presenta la siguiente pregunta: ¿tres piezas de mecano cualesquiera forman siempre un triángulo? ¿Trata de construir un triángulo con las piezas 8, 9, 20 cm? ¿Qué pasa? ¿La explicación tiene alguna relación con la suma de sus lados?

Con la ayuda de los triángulos construidos vamos a comprobar la rigidez de esta figura. Se le pide al estudiante que trate de apoyar uno de los triángulos construidos sobre la mesa y presione el vértice que queda levantado. ¿Se deforma el triángulo?

A continuación, se quiere trabajar el concepto de altura del triángulo. Para ello se le entrega al estudiante unos depresores para que determine las alturas de los triángulos construidos, de manera que no se utiliza la regla como objeto de

medición, solo para la comparación, de este modo los números no interfieren en la comprensión del concepto geométrico.

La medición de las alturas debe hacerse utilizando un depresor para cada triángulo, marcado sobre él las tres alturas, cada una de distinto color. Cada altura se marcará del mismo color que la base correspondiente. Una vez finalizada la medición de las alturas, se les pide que representen en su cuaderno cada uno de los triángulos y sus correspondientes alturas. Y se cuestiona lo siguiente: ¿Qué se observa? ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? ¿Todas las alturas se encuentran en el interior del triángulo? ¿Qué tipo de triángulos resultan cuando trazamos la altura de un triángulo cualquiera?

Para acabar la actividad, con la ayuda de un cartabón se les pide que comprueben si alguno de los triángulos construidos con las piezas de Mecano es un triángulo rectángulo, y teniendo en cuenta que el teorema de Pitágoras se cumple para todo triángulo rectángulo, se les pide que comprueben si son correctas las medidas de las alturas halladas del triángulo (8, 12, 15 cm). Para ello deben utilizar papel, tijeras y cola, con lo que tendrán que comprobar que la superficie del cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las superficies de los cuadrados de lado cada uno de los catetos.

Todos los estudiantes presentarán un informe que incluirá sus reflexiones y las respuestas a todas las preguntas planteadas y que servirá para evaluar esta actividad, además, el docente va a tener en cuenta el trabajo de aula realizado durante la actividad haciendo sus anotaciones en el diario de observación.

Competencias transversales: Competencia lingüística y audiovisual (C1), Matemática (M4), Aprender a aprender (M5), Autonomía e iniciativa personal (P6) y Social y ciudadana (H8).

Actividad 2: “Construimos figuras semejantes”

En esta actividad se quiere trabajar la semejanza de figuras planas, partiendo de la manipulación del puzle o rompecabezas de Van Hiele (Figura 12). El trabajo con rompecabezas favorece la visualización del espacio y está directamente relacionado con la capacidad de comprender algunas de las propiedades geométricas (Canals, 2009). Además, el estudiante maneja las piezas en diferentes orientaciones lo que contribuye a la superación de los distractores de orientación tan comunes en los libros de texto.

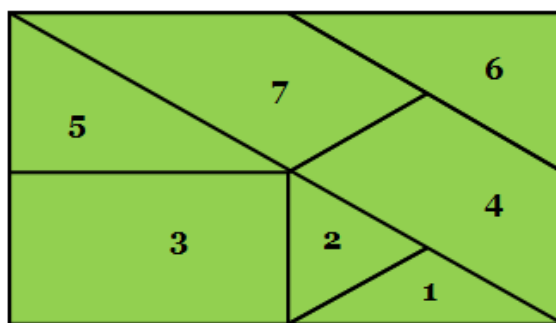


Figura 12. Rompecabezas Van Hiele. Fuente: Elaboración propia

Tipo de actividad: Actividad de nuevos conocimientos.

Materiales didácticos: Para la presentación: Flexo y figuras de playmobil de diferentes tamaños. Para realizar la actividad: Rompecabezas Van Hiele, papel isométrico y cuaderno del alumno, bolígrafos, regla y tijeras.

Objetivo de la actividad: Comprobar las propiedades de semejanza de figuras de dos dimensiones.

Desarrollo: El docente hace una breve introducción acerca del concepto de semejanza. Con la ayuda de un flexo y varias figuras de playmobil de distintos tamaños se muestra la relación entre las alturas de las diferentes figuras y sus sombras. A continuación, se explica la actividad, y se reparten los rompecabezas y los papeles isométricos a cada estudiante.

La actividad se va a realizar en parejas. Cada grupo dispondrá de un rompecabezas, unas hojas de papel isométrico, donde los estudiantes deberán representar las figuras planas requeridas en la actividad y una ficha con las tareas o cuestiones a resolver, en la que anotarán sus explicaciones y reflexiones sobre lo experimentado.

En primer lugar, en la ficha, se les pide a los estudiantes que construyan todas las ampliaciones posibles de cada una de las piezas (1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7) y las representen sobre el papel isométrico. ¿Es posible ampliar la pieza 2 utilizando las siete piezas del rompecabezas? ¿Hay alguna pieza de las siete que no pueda ser ampliada?

Una vez finalizada la primera parte de la actividad, los estudiantes deben observar cada una de las piezas y sus ampliaciones, y reflexionar sobre las siguientes cuestiones, anotando sus observaciones en la ficha: ¿se observa algún tipo de relación entre los lados de cada ampliación y la pieza original? ¿Y entre los ángulos? ¿Estas relaciones se cumplen para todas las piezas o solo para algunas de ellas? ¿Cómo reconocerías si una pieza es una ampliación de la original?

Una vez los estudiantes hayan finalizado sus informes, el docente pide a cada grupo que exponga sus reflexiones sobre la práctica y entre todos se realiza un esquema

con las propiedades de la semejanza de las figuras planas, a partir de las cuales el docente introducirá el Teorema de Tales.

El docente evaluará el trabajo en grupo mediante el informe entregado y el trabajo individual se valorará a partir de la observación durante el desarrollo de la actividad.

Competencias transversales: Competencia lingüística y audiovisual (C1), Matemática (M4), Aprender a aprender (M5), Autonomía e iniciativa personal (P6) y Social y ciudadana (H8).

Actividad 3: “Clasificamos polígonos”

Tal y como expresa claramente el título de esta actividad, con ella se pretende clasificar los polígonos, concretamente los convexos que resultan de la combinación de las 7 piezas del Tangram (Figura 13), utilizando nuevamente el rompecabezas como herramienta de investigación y razonamiento geométrico. Los estudiantes haciendo uso de las habilidades de visualización y construcción descubrirán las diferencias y similitudes entre los diferentes poliedros para clasificarlos.

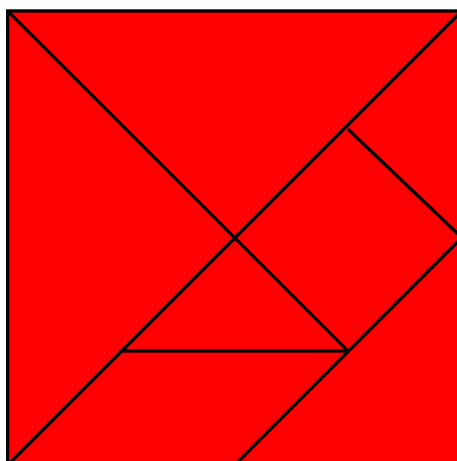


Figura 13. Tangram (Chi Chiao Pan). Fuente: Elaboración propia

Tipo de actividad: Actividad de investigación nuevos conocimientos.

Materiales didácticos: Tangram de cartulina, tijeras y cuaderno del alumno.

Objetivo de la actividad: Identificar las semejanzas y diferencias entre los diferentes polígonos convexos para clasificarlos y trabajar los conceptos de área y perímetro.

Desarrollo: El docente hace una breve explicación sobre el concepto de polígono (lados, vértices y diagonales) y realiza la primera clasificación entre polígonos cóncavos y convexos. A continuación, reparte a cada uno de los estudiantes una cartulina con el Tangram dibujado que tendrán que recortar. La actividad se va a realizar en grupos de 4 estudiantes.

Los estudiantes construirán todos los polígonos convexos que puedan en 15 minutos, los cuales van a tener que representar en su cuaderno. Para la construcción de cada polígono deberán utilizar todas las piezas del Tangram. Una vez finalizados el tiempo los estudiantes pondrán en común sus hallazgos y moderados por el docente deberán exponer las similitudes y diferencias entre los diferentes polígonos con la finalidad de realizar su clasificación. En caso que alguno de los posibles polígonos no haya sido encontrado por los estudiantes, el docente se los facilitará.

Con todos los posibles polígonos hallados, el docente puede hacer preguntas para que los estudiantes inicien su clasificación, preguntas del tipo:

- ¿Tienen todos el mismo número de lados?
- ¿Tienen todos lados paralelos? ¿Y perpendiculares?
- ¿Qué les pasa a sus diagonales?

Durante el debate se realiza un esquema en la pizarra con la clasificación que ellos van deduciendo y una vez finalizada se les plantearán las siguientes preguntas:

¿Todo cuadrado es un paralelogramo? ¿Y todo paralelogramo es un cuadrado? Justifica la respuesta.

¿Todo rectángulo es un trapecio? ¿Y todo trapecio es un rectángulo? Justifica la respuesta.

Utiliza todas las piezas del Tangram para realizar un trapecio con el mayor perímetro posible y con el menor perímetro. ¿Qué superficie tiene cada uno? Justifica tu respuesta.

¿Qué pieza tiene mayor área? ¿Qué pieza tiene menor área? Justifica la respuesta sin utilizar regla ni hacer cálculos.

¿Qué relación de medida existe entre las piezas del Tangram? ¿Qué pieza has elegido como unidad y por qué? ¿Qué piezas tienen la misma superficie? ¿Qué pasa con su perímetro? Justifica la respuesta.

Cada grupo deberá entregar un informe con la representación y la clasificación de los polígonos y la respuesta a las cuestiones planteadas, que el docente tendrá en cuenta para la evaluación continua. Además, durante la actividad el docente valorará individualmente el trabajo de cada uno de los miembros de cada grupo.

En la siguiente sesión se dedicará un tiempo (30 minutos) para comentar la actividad y para que los estudiantes planteen sus dudas.

Competencias transversales: Competencia lingüística y audiovisual (C1), Matemática (M4), Aprender a aprender (M5), Autonomía e iniciativa personal (P6) y Social y ciudadana (H8).

Actividad 4: “¿Qué necesito?”

Barba y Calvo (2012) en su artículo destacan la importancia que tiene la descripción en el trabajo de la Geometría, ya que permite al estudiante identificar los diferentes cuerpos geométricos de su entorno y describir la realidad. Por ello, es necesario poner a disposición del estudiante las herramientas que le faciliten la palabra para describir lo que le rodea.

En esta actividad se pretende trabajar los poliedros a través de sus componentes (caras, aristas y vértices) y, además, facilitar el aprendizaje del vocabulario geométrico, creando situaciones de razonamiento, discusión y entendimiento necesarias para la construcción de los diferentes cuerpos geométricos.



Figura 14. Material: Polydron. Fuente: Barba y Calvo (2012, p. 103)

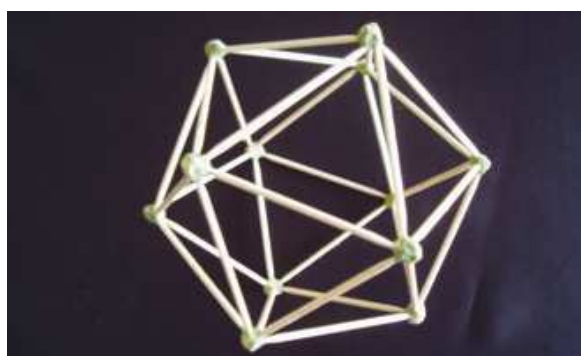


Figura 15. Material: Volumes à construire. Fuente: Barba y Calvo (2012, p. 103)

Tipo de actividad: Actividad de consolidación de conocimientos.

Materiales didácticos: Polydron (Figura 14) y volúmenes à construire (Figura 15), cámara fotográfica, ficha de pedido y cuaderno alumno.

Objetivo de la actividad: Trabajar los conceptos de caras, aristas y vértices, y realizar desarrollos planos de poliedros utilizando la descripción como otra herramienta de aprendizaje.

Desarrollo: Después de haber dedicado una sesión de 55 minutos a la clasificación de los poliedros a través de la visualización y la manipulación de los diferentes cuerpos geométricos (construidos con material Polydron y Volumes à construire), se presenta esta actividad para consolidar los conocimientos trabajados en dicha sesión.

La actividad comienza distribuyendo a los estudiantes en grupos de 4 miembros y entregándoles una ficha donde deben anotar el pedido de material que van necesitar para construir los diferentes cuerpos geométricos. Los poliedros que se pide construir son los siguientes:

- Un tetraedro, un prisma de base pentagonal regular y una pirámide de base hexagonal regular, utilizando piezas del material Polydron.
- Una pirámide de base pentagonal regular, un prisma de base rectangular y una bipirámide de base triangular, utilizando piezas del material “Volumes à construire”.

El pedido debe de especificar el número exacto y la forma de las piezas solicitadas. En el caso del material “Volumes à construire”, también es preciso especificar el tipo de encajes que se necesitarán para unir las cañas, según aten 3, 4 ó 5 de estas cañas.

Cuando el docente entregue el material solicitado, los estudiantes deberán construir los poliedros y entregarlos para que sean fotografiados.

Por último, se pide a los estudiantes que hagan una descripción de cada uno de los cuerpos geométricos construidos, en términos de número y forma de sus caras, número de aristas y vértices, y cantidad de aristas que coinciden en cada vértice.

Cada grupo debe hacer entrega, al final de la actividad, de un informe que contenga la ficha con el pedido, las descripciones de los cuerpos construidos y sus fotografías.

Durante la actividad, el docente evaluará el trabajo individual de cada uno de los miembros del grupo, poniendo especial atención al uso del vocabulario adecuado, mientras que el trabajo del grupo se valorará a partir del informe entregado.

Competencias transversales: Competencia lingüística y audiovisual (C1), Matemática (M4), Aprender a aprender (M5), Autonomía e iniciativa personal (P6) y Social y ciudadana (H8).

Actividad 5: “Diseña tu propia estructura tridimensional”

Esta actividad cierra la propuesta y en ella se pretende que los estudiantes den un paso más allá y pongan a prueba todos los conocimientos y las habilidades geométricas adquiridas. Y a través de su iniciativa y creatividad diseñen una estructura tridimensional haciendo uso de material que tengan a su disposición, pudiendo ser en su totalidad proveniente del reciclaje.

Con esta actividad se quieren trabajar las habilidades geométricas, contribuyendo a la visualización del espacio, al uso del lenguaje geométrico, el dibujo y construcción de las figuras, el razonamiento lógico y la transferencia de los conocimientos.

Tipo de actividad: Actividad de aplicación de conocimientos.

Materiales didácticos: Todo tipo de materiales constructores (papel, cartulinas, cartón, palillos, plastilina...) y herramientas para su construcción (material de dibujo, tijeras, pega, cintas adhesivas, cúteres...).

Objetivo de la actividad: Favorecer el conocimiento y la comprensión de los cuerpos geométricos en el espacio, motivar a través del aprendizaje activo y promover la iniciativa y creatividad del estudiante.

Desarrollo: Se realiza una sesión previa a la actividad donde se trabajan los cuerpos de revolución (cilindro, cono y esfera). Se construyen utilizando cartulinas y se determinan los elementos de cada uno de ellos. En los últimos 15 minutos de esta sesión se aprovecha para configurar los grupos de trabajo que llevarán a cabo la actividad 5. Se prevé que los grupos estén compuestos por 4 estudiantes, y se les hace entrega de una ficha con las indicaciones de la actividad. En este tiempo se realiza la explicación de la actividad y de los criterios de evaluación que se tendrán en cuenta para su valoración. De esta manera los estudiantes podrán pensar en la estructura que quieren construir y en los materiales que van a necesitar para ello, los cuales deberán traer para la próxima sesión.

En la primera sesión de la actividad, los estudiantes deberán elaborar de una estructura geométrica tridimensional por grupo en la que, al menos, aparezcan cuatro de los siguientes cuerpos geométricos: paralelepípedo, prisma de cualquier base, pirámide de cualquier base, cilindro, cono o esfera. La escultura tendrá temática libre.

Se podrá utilizar cualquier tipo de material desarrollando la creatividad del alumno y dándole libertad de elección (palillos, plastilina, gomaeva, cartulinas, hojas de papel, cartones, gomas... todo material que tengan a su disposición y que la

imaginación les permita utilizar), material que ellos mismos podrán traer para realizar la actividad. El docente preverá llevar a la sesión material que dejará a la disposición de los grupos, en el caso que lo necesiten.

En la segunda sesión, cada grupo deberá presentar la estructura construida y un informe en el que estén representados los desarrollos planos de cada uno de los elementos que conforman la estructura, así como el cálculo del área y el volumen total de la estructura construida. Para el cálculo de las áreas los estudiantes podrán hacer uso de las TIC debiendo indicar el enlace correspondiente, o bien, utilizar directamente el libro de texto.

Cada grupo realizará una exposición delante de la clase explicando, por ejemplo, el tipo de estructura geométrica construida, describiendo sus elementos, superficies, volúmenes, materiales utilizados e incluso comentando el proceso de diseño y elaboración. En la exposición deberán intervenir todos los integrantes del grupo y la valoración de la exposición será grupal.

Durante la actividad, el docente evaluará de forma individual el trabajo de cada uno de los miembros del grupo durante la construcción de la estructura y la elaboración del informe. El informe presentado y la exposición del trabajo se evaluarán de forma colectiva.

Competencias transversales: Competencia lingüística y audiovisual (C1), Competencia artística y cultural (C2), Matemática (M4), Aprender a aprender (M5), Autonomía e iniciativa personal (P6) y Social y ciudadana (H8).

Evaluación

Este apartado comprende los procedimientos e instrumentos que el docente podrá utilizar para evaluar el aprendizaje de los estudiantes y la evaluación de la propuesta en sí misma.

Procedimientos e instrumentos de evaluación

Con el fin de valorar el grado de consecución de los objetivos didácticos fijados en esta propuesta, es necesario el diseño de los instrumentos que evalúen cada una de las actividades planificadas para ello. En la evaluación, el docente tendrá en cuenta los criterios de evaluación, los cuales se han desarrollado de acuerdo con lo establecido en el *Decret 187/2015*, de 25 de agosto, *d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria*, y que son los que se describen a continuación:

- Utiliza el lenguaje matemático para expresarse verbalmente y de forma escrita.
- Valora el resultado de un problema con la situación planteada.
- Analiza y evalúa estrategias y pensamiento matemático con los demás.
- Participa en los trabajos en grupo.
- Expresa por escrito razonamientos, conjeturas, relaciones cuantitativas con elementos matemáticos simbólicos.
- Identifica los triángulos rectángulos y los elementos que los conforman.
- Aplica el teorema de Pitágoras para el cálculo de medidas.
- Conoce y aplica las propiedades de semejanza de las figuras planas.
- Identifica los diferentes tipos de polígonos y sus elementos.
- Conoce los conceptos de área y perímetro y los calcula.
- Identifica los diferentes tipos de poliedros y sus elementos.
- Realiza desarrollos planos de cuerpos geométricos y calcula su área y volumen.

Para cada una de las actividades se han establecido unos instrumentos de evaluación, los cuales se describen en la Tabla 7. Los instrumentos determinarán el grado de consecución de los objetivos y tendrán en cuenta los conocimientos, las competencias y las actitudes alcanzadas por los estudiantes. A cada uno de los instrumentos se le atribuye un porcentaje de calificación parcial y un porcentaje de calificación final en cuanto al total de la evaluación formativa o sumativa, según corresponda.

Tabla 7

Instrumentos de evaluación

Actividad	Instrumentos de evaluación	de	Porcentajes de calificación	Tipo de evaluación
A1: Descubre los triángulos con un mecano	Diario (individual): 30% Informe individual: 70%	observación	20%	Formativa
A2: Construimos figuras semejantes	Diario (individual): 50% Informe (grupo): 50%	observación	15%	Formativa
A3: Clasificamos los polígonos	Diario (individual): 50%	observación	15%	Formativa

			Informe (grupo): 50%	
A4: ¿Qué necesito?	Diario	observación	20%	Formativa
			(individual): 50%	
			Informe (grupo): 50%	
A5: Diseña tu propia estructura tridimensional	Diario	observación	30%	Formativa
			(individual): 50%	
			Informe (grupo): 30%	
			Exposición (grupo): 20%	

Fuente: Elaboración propia

La evaluación formativa permite valorar el trabajo diario del estudiante, atender sus dificultades y conocer sus avances, lo que es beneficioso tanto para el docente como para el propio estudiante. La evaluación formativa permite sacarle peso a la prueba escrita final donde hay muchos factores que pueden influir en el rendimiento del estudiante. Aunque el peso que se le atribuya a este tipo de evaluación, con relación a la evaluación final o sumativa, dependerá de cada docente, que lo variará en función de su criterio, y también del criterio de evaluación del departamento de matemáticas e incluso de la propia cultura del centro. Tal y como indica Martínez (2009) en su trabajo es necesario “un sistema de evaluación que combine de manera más equilibrada evaluaciones a gran escala parsimoniosas y consistentes, con un rico trabajo de evaluación formativa en aula a cargo de los maestros” (p. 15).

Evaluación de la propuesta

Para la evaluación de la propuesta didáctica se tendrá en cuenta el nivel de consecución del objetivo principal que en ella se presenta, perseguir la construcción de un aprendizaje significativo y contribuir a la superación de las dificultades y obstáculos más comunes con los que se enfrentan los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, teniendo en cuenta el uso del material manipulativo como recurso didáctico, así como observar si los resultados obtenidos han sido o no los esperados.

Es evidente que los resultados de los estudiantes en la consecución de los objetivos didácticos serán por si solos un indicador para la evaluación de la propuesta. Pero, además, resulta necesaria la valoración del proceso que realice el propio docente. En ella, el docente deberá reflexionar sobre la implementación de la propuesta en el aula (información acerca de la actividad, temporización, agrupamientos, materiales,

relación contenido-material, instrumentos de evaluación,...), analizar si ha supuesto una mejora y proponer los cambios que crea pertinentes para mejorar la propuesta.

Además, otro indicador de dicha evaluación es la valoración que el propio estudiante haga de ella. Una vez implementada se puede pedir al estudiante que haga su valoración a cerca de la metodología manipulativa, las actividades propuestas, la información facilitada en cada una de ellas, su dificultad de realización, el grado de comprensión de los contenidos trabajados o la motivación frente las actividades y la materia.

Los resultados de cada una de estas valoraciones serán objeto de reflexión por parte del docente con el fin de mejorar la propuesta didáctica diseñada en este trabajo y por consiguiente mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría. En el apartado de Anexos se adjuntan dos posibles cuestionarios para docentes y estudiantes que se pueden realizar para la evaluación de la propuesta (Anexo 1 y Anexo 2).

A continuación, como evaluación a priori de esta propuesta didáctica se presenta una matriz DAFO (Tabla 8) realizada con el fin de analizar los beneficios y problemáticas sujetos a la propuesta didáctica desarrollada en este TFM.

En el análisis DAFO se estudia la propuesta tanto a nivel interno con sus propias debilidades y fortalezas como a nivel externo con las amenazas y oportunidades que le llegan desde el entorno. Este análisis permite adelantarse el planteamiento de una serie de cuestiones, en cuanto a cómo mitigar o eliminar las debilidades y amenazas y cómo explotar o sacar provecho de las fortalezas y oportunidades, además de tener conciencia de todos ellos.

Tabla 8

Matriz DAFO de evaluación de la propuesta didáctica

	Debilidades	Fortalezas
Análisis interno (de la propia propuesta)	<ul style="list-style-type: none"> • Necesidad de más tiempo del utilizado con la metodología convencional para el trabajo de todos los contenidos de la unidad • Dificultad de 	<ul style="list-style-type: none"> • Aprendizaje activo del estudiante • Diversidad de materiales para trabajar todos los contenidos • Incremento de la motivación y el interés

	evaluación del trabajo en el aula con grupos-clase numerosos	del estudiante <ul style="list-style-type: none"> • Aprendizaje significativo a través de la propia experiencia del estudiante
	Amenazas	Oportunidades
Análisis externo (del entorno)	<ul style="list-style-type: none"> • El alumnado no está acostumbrado al trabajo con material manipulativo • El alumnado no se presta al trabajo cooperativo • Resistencia al cambio de estrategias didácticas por parte del profesorado 	<ul style="list-style-type: none"> • Material básico al alcance de todo tipo de centro • Implementación en cualquier tipo de aula • Enfoque constructivista está de moda

Fuente: Elaboración propia

CONCLUSIONES

En la elaboración del presente trabajo se ha perseguido la consecución de cada uno de los objetivos definidos en el apartado de introducción. A continuación, se exponen las explicaciones y los argumentos sobre el cumplimiento o no de dichos objetivos, y de qué modo se ha trabajado para tratar de alcanzar cada uno de ellos.

El primer objetivo específico es el de analizar las dificultades de manera teórica que se presentan en los alumnos en el aprendizaje de la Geometría. En el marco teórico se han analizado las dificultades (errores y obstáculos) más significativas a las que se enfrenta el estudiante en el aprendizaje de la Geometría, su conocimiento es de gran importancia para el docente ya que le son de gran utilidad para mejorar la práctica pedagógica (Barrantes y Zapata, 2008) y favorecer el aprendizaje del estudiante. Se ha observado que con frecuencia los libros de texto o los mismos docentes presentan los conceptos geométricos con representaciones que conducen a errores y a la construcción de esquemas mentales inadecuados. Por todo ello, se puede afirmar que el primer objetivo específico se ha cumplido.

El segundo objetivo específico pretende analizar de manera teórica el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría. A través del marco teórico, y con el estudio del modelo de razonamiento Van Hiele se ha analizado el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría. El modelo explica cómo se produce el aprendizaje de la Geometría el cual está atado al desarrollo del conocimiento del estudiante. El conocimiento de este modelo por parte del docente, así como su implementación en las aulas son de gran importancia para la mejora del proceso, tal y como exponen Vargas y Gamboa (2013). En este caso, también podemos afirmar que el segundo objetivo específico de este trabajo se ha alcanzado.

El tercer objetivo específico quiere estudiar el material manipulativo que existe como recurso en el proceso enseñanza-aprendizaje de la Geometría. En el marco teórico se ha trabajado para la consecución de este objetivo y se ha observado que son numerosos los estudios que manifiestan la importancia del material manipulativo como recurso didáctico utilizado para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. El material manipulativo permite la observación directa de propiedades, la experimentación, además de favorecer la motivación y el interés del estudiante. Por ello, se considera de manera satisfactoria la consecución del tercer objetivo específico.

Y el cuarto objetivo específico pretende identificar y clasificar los materiales manipulativos relacionados con el aprendizaje de la Geometría. Este objetivo se ha cumplido determinando los diferentes tipos de materiales manipulativos que el docente tiene a su alcance para la planificación y el diseño de las actividades, de acuerdo con el trabajo de Barrantes y Balletbó (2012), al mismo tiempo que se han expuesto las dimensiones que, para ello, debe tener en consideración (Villarroel y Sgreccia, 2011).

La consecución de estos cuatro objetivos específicos ha permitido alcanzar de manera satisfactoria el objetivo principal, que es el de diseñar y construir una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos de Geometría de 2º de Educación Secundaria basada en el uso de material manipulativo. Se han desarrollado 5 actividades basadas en la metodología manipulativa para el aprendizaje de los conceptos correspondientes al bloque de espacio y forma de 2º curso de ESO. Para ello, se han tenido en consideración lo observado en el marco teórico sobre las dificultades de aprendizaje de la Geometría, el proceso de enseñanza-aprendizaje, el uso del material manipulativo como recurso didáctico y la tipología y variedad de materiales aplicables en el área de la Geometría. La propuesta se ha centrado en la experimentación, que permite al

estudiante la observación, el análisis, la comprobación y la reflexión sobre los conceptos y propiedades trabajados, dejando en segundo plano la dimensión del número. Además, las actividades se han diseñado teniendo en cuenta el trabajo cooperativo, trabajando el aprendizaje entre iguales y las relaciones sociales de los estudiantes. Todo ello con la finalidad de contribuir al incremento del interés y la motivación del estudiante y de la mejora del proceso.

LIMITACIONES

En este apartado se exponen las limitaciones encontradas en la elaboración de este trabajo, y que han supuesto algún cambio con relación al planteamiento inicial.

La principal de las limitaciones de este TFM es que la propuesta didáctica no ha podido ser implementada de forma real en las aulas. Los motivos son diversos, en primer lugar cabe destacar el desfase temporal entre los periodos de realización de las prácticas y la redacción de la propuesta, pero aun y teniendo la propuesta lista durante el periodo de prácticas, el impedimento habría venido del propio departamento de matemáticas del centro de prácticas, el cual centra el proceso en el uso del libro de texto como único recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y mantiene una posición de incredulidad frente al uso efectivo de metodologías pedagógicas diversas.

Como consecuencia directa de la no implementación de la propuesta, la siguiente limitación viene dada por la no evaluación de la propuesta que ha hecho imposible valorar la adecuación de los materiales manipulativos a los contenidos y competencias establecidos, así como su temporización, su viabilidad en la puesta en práctica de las actividades en el aula o el aprendizaje del estudiante.

El uso de material manipulativo, está fuertemente relacionado con la educación primaria, de manera que queda relegado a favor el libro de texto en la mayoría de los centros de educación secundaria. Este hecho comporta cierta dificultad a la hora de encontrar ejemplos sobre experiencias con material manipulativo en esta etapa, teniendo que adaptar lo correspondiente a la etapa de primaria, donde si existe gran cantidad de información y su uso está más generalizado.

PROSPECTIVA

Los resultados de las pruebas de competencias ponen de manifiesto el bajo nivel de comprensión de los conceptos de los estudiantes en cuanto al área de Geometría. Parece evidente que la memorización de conceptos y la resolución sistemática de problemas no contribuyen a la mejora del aprendizaje de los estudiantes. Por tanto, es importante llevar al aula diversidad de recursos que permitan al estudiante llegar al concepto por otro camino que no sea la memorización. Esta propuesta didáctica propone el material manipulativo como catalizador del aprendizaje de la Geometría, aunque es evidente que puede extenderse al resto de áreas de las matemáticas: números y álgebra, funciones y estadística y probabilidad.

Del mismo modo, la propuesta didáctica se centra en el área de Geometría y en 2º curso de ESO, siendo extensible a todos los demás cursos incluyendo a los dos cursos de bachillerato, adecuando los materiales a los contenidos y a cada nivel, e incluso interaccionando con el entorno como si de un material manipulativo se tratase.

La implementación de la propuesta didáctica en el aula permitirá comprobar el grado de consecución de los objetivos didácticos por parte de los estudiantes, conocer su opinión respecto la nueva práctica pedagógica y hacer las correspondientes valoraciones como docente, para acabar realizando las modificaciones necesarias para la mejora de esta propuesta.

La puesta en práctica de nuevas metodologías y recursos, en este caso manipulativos, requiere de la formación continua y permanente del docente, así como del trabajo cooperativo y la reflexión entre profesionales, lo que permite el intercambio de experiencias necesario para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, A. (2010). La “pirámide de la educación matemática”: una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de innovación educativa*, 189, 12-16. Disponible en <http://dugi-doc.udg.edu/bitstream/handle/10256/9481/PiramideEducacion.pdf?sequence=1>

- Alsina, C. (2008). Geometría y realidad. *Sigma: revista de matemáticas*, 33, 165-179. Disponible en http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_33/10_geometria_realidad_33.pdf
- Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Psicodidáctica*, 5, 107-114. Disponible en <http://www.ehu.es/ojs/index.php/psicodidactica/article/viewFile/275/272>
- Barba, D. y Calvo, C. (2012). Describir poliedros contando caras, aristas y vértices. *Suma*, 71, 97-104. Disponible en <http://revistasuma.es/IMG/pdf/71/097-104.pdf>
- Barrantes, M. (2003). Caracterización de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en Primaria y Secundaria. *Campo abierto*, 24, 1-25. Disponible en https://www.researchgate.net/profile/Manuel_Lopez2/publication/39207658_Caracterizacion_de_la_ensenanza_aprendizaje_de_la_geometria_en_primaria_y_secundaria/links/54ec81ef0cf2465f532f855d.pdf
- Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, 8, 25-43. Disponible en <http://revistacientifica.uaa.edu.py/index.php/riics/article/view/12/12>
- Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto. Revista de Educación*, 27, 55-71. Disponible en <http://relatec.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985>
- Canals, M.A. (2009). *Superfícies, volums y línies. Els dossiers de Maria Antònia Canals*. Barcelona: Associació de Mestres Rosa Sensat.
- Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu (2016). *Avaluació de competències bàsiques (4t d'ESO)*. Barcelona: Departament d'Ensenyament. Disponible en http://csda.gencat.cat/web/.content/home/consell_superior_d_avalua/pdf_i_altres/static_file/ESO-2016/roda-de-premsa-juny-2016-4t.pdf
- Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu (2015). *Avaluació de competències bàsiques (4t d'ESO)*. Barcelona: Departament d'Ensenyament. Disponible en http://premsa.gencat.cat/pres_fsyp/docs/2015/04/10/14/47/bdc85fb3-4430-4bbd-912b-e91980295e78.pdf

- Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu (2014). *Avaluació de competències bàsiques (4t d'ESO)*. Barcelona: Departament d'Ensenyament. Disponible en http://csda.gencat.cat/web/.content/home/consell_superior_d_avalua/pdf_i_altres/prova_avaluacio_eso_2014/roda-de-premsa-ESO-2014.pdf
- Corberán, R. et al. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Disponible en https://sede.educacion.gob.es/publiventa/download.action?f_codigo_agc=1379_19
- Decret 187/2015, de 25 de agosto, *d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria*. Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya 6945, de 28 de agosto de 2015. Comunidad Autónoma de Cataluña. Disponible en <http://portaldogc.gencat.cat/utillsEADOP/PDF/6945/1441278.pdf>
- Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometría. *Revista EMA*, 2, 49-58. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1035/1/22_Galindo1996Desarrollo_RevEMA.pdf
- Gamboa, R. y Ballester, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista electrónica educare*, 14, 125-142. Disponible en <https://dialnet.unirioja.es/download/articulo/5414933.pdf>
- Godino, J. y Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Disponible en http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/21964/1/libro_MATREC_2011.pdf
- Hernández, V. y Villalba, M. (2001). *Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado el 23 de febrero de 2017 en <http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm>
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, *para la mejora de la calidad educativa (LOMCE)*. Boletín Oficial del Estado 295, de 10 de diciembre de 2013, 97858-97921. España. Disponible en <http://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf>
- Martínez Rizo, F. (2009). Evaluación formativa en aula y evaluación a gran escala: hacia un sistema más equilibrado. *Revista electrónica de investigación*

- educativa*, 11 (2), 1-18. Disponible en <http://redie.uabc.mx/redie/article/view/231>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2016a). *PISA 2015. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos*. Madrid: MECD Disponible en <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa-2015/pisa2015preliminarok.pdf?documentId=0901e72b8228b93c>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2016b). *TIMSS 2015. Estudio internacional de tendencias en Matemáticas y Ciencias*. IEA. Madrid: MECD. Disponible en <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/timss2015final.pdf?documentId=0901e72b822be7f5>
- Mora, J. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 3, 101-115. Disponible en http://www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r_46/nr_501/a_6831/6831.pdf
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, *por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado 3, de 3 de enero de 2015, 169-546. España. Disponible en <http://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>
- Scaglia, S. y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación matemática*, 17 (3), 105-120.
- Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27, 74-94. Disponible en <http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/4944>
- Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 73-94. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/3597/1/Villarroel2011MaterialesNumeros78.pdf>
- Villarroya, F. (1994). El empleo de materiales en la enseñanza de la Geometría. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 21, 95-104. Disponible en <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117840>

ANEXOS

Anexo 1: Cuestionario de evaluación de la propuesta para el docente

Una vez finalizada la propuesta, es necesario el docente realice esta evaluación para cada una de las actividades desarrolladas, para hacer una valoración global de todas ellas, a posteriori.

Se valorará del 1 al 5, siendo 1 la puntuación más baja y 5 la más alta.

	1	2	3	4	5
Grado de explicitación de la actividad					
Facilidad logística de implementación de la actividad en el aula					
Facilidad de desarrollo de la actividad en el aula					
Idoneidad del material manipulativo elegido					
Ajuste de la temporización					
Realización de todos los apartados propuestos en la actividad					
Grado de participación del estudiante					
Interés del estudiante en la realización de la actividad					
Ajuste de la actividad al contenido a trabajar					
Aceptación a la metodología manipulativa por parte del estudiante					
Grado de comprensión de los contenidos					
Observaciones:					

Anexo 2: Cuestionario de evaluación de la propuesta para el estudiante

Cada estudiante realizará una evaluación global de la propuesta respondiendo al siguiente cuestionario.

Se valorará del 1 al 5, siendo 1 la puntuación más baja y 5 la más alta.

	1	2	3	4	5
La información facilitada en cada una de las actividades ha sido entendedora					
El tiempo empleado para realizar las actividades ha sido adecuado					
El grado de dificultad para la realización de las actividades ha sido elevado					
El material manipulativo empleado ha sido de fácil uso					
El trabajo en grupo ha sido satisfactorio					
La discusión conjunta sobre los contenidos trabajados en el aula ha sido satisfactoria					
Las actividades propuestas han aumentado la motivación por el aprendizaje de la materia					
El trabajo con material manipulativo ha facilitado la comprensión de los conceptos geométricos					
Las actividades manipulativas han aumentado el interés por el aprendizaje de la geometría					
Valoración de la utilización de la metodología manipulativa en geometría					
Valoración de la extensión de esta metodología a otras áreas de las matemáticas					
Observaciones:					