



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo Fin de Máster

Uso de la calculadora gráfica en línea *Desmos* para la enseñanza de funciones y gráficas en 3º ESO

Presentado por: Enrique José Marcos del Olmo

Línea de investigación: Propuesta de intervención

Director: Juan Antonio Moya Pérez

Ciudad: Madrid

Fecha: 24 de junio de 2016

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es proponer una metodología didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas a alumnos de Matemáticas de 3º ESO haciendo uso de la calculadora gráfica online *Desmos*. El trabajo consta de tres fases. En una primera fase se aborda una revisión bibliográfica que nos permite conocer el estado del arte y delimitar el marco legal en el que se va a desarrollar la propuesta. En una segunda fase se estudian las características y posibilidades que ofrece la calculadora gráfica online *Desmos*. Estas dos primeras fases constituyen el marco teórico en el que se va a desarrollar todo el trabajo. En una tercera fase, se elabora una propuesta práctica que tiene en cuenta los resultados de las dos fases anteriores. La conclusión a la que nos lleva el análisis de los problemas de aprendizaje de los alumnos de 3º ESO en la representación e interpretación de funciones es que la utilización de calculadoras gráficas como *Desmos* facilita la adquisición de algunas de las competencias básicas establecidas por ley (competencia matemática, competencia digital) debido al grado de significatividad que aportan al aprendizaje por su carácter visual e interactivo. Por último, el presente trabajo abre la posibilidad de ser ampliado para su uso en otros niveles educativos.

Palabras clave: calculadora gráfica *Desmos*, funciones y gráficas, TIC, propuesta de intervención.

ABSTRACT

The goal of this project is to show a proposal to teach functions and graphics to Mathematics pupils studying 3º ESO making use of *Desmos* online graphic calculator. The project consists of three phases. During the first phase a bibliographical review is carried out to know the *state of the art* and to limit the legal environment affecting the proposal. Along the second phase, the characteristics and facilities of *Desmos* tool are investigated to know its utilization scope. These two phases form the theoretical framework to develop the rest of the project. The third phase is dedicated to deliver a practical proposal taking into account the results of the previous two phases. The conclusion extracted from the analysis of learning difficulties in pupils studying 3º ESO related with function representation and interpretation is that the use of online graphic calculators like *Desmos* helps pupils to achieve some basic knowledge established by law (mathematical knowledge, digital knowledge) due to the meaningful degree provided to learning thanks to their visual and interactive use. Finally, this project could be considered as a starting point to be used in higher educational levels.

Key words: *Desmos* online graphic calculator, functions and graphics, IT

TABLA DE CONTENIDOS

1.	INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	9
1.1.	Definición del problema	9
1.2.	Objetivos	9
1.3.	Metodología	10
1.4.	Justificación de la bibliografía	10
2.	MARCO TEORICO	11
2.1.	Marco legal.....	11
2.1.1.	LOE	11
2.1.2.	LOMCE.....	12
2.1.2.1.	Proyectos, Decretos y Órdenes que desarrollan la LOMCE	12
2.2.	El aprendizaje de funciones y gráficas	15
2.2.1.	El concepto de función	15
2.2.2.	Dificultades en el aprendizaje de funciones y gráficas	18
2.2.2.1	Dificultades partiendo de la expresión algebraica	18
2.2.2.2	Dificultades partiendo de la representación gráfica.....	19
2.3.	Uso de herramientas TIC en educación.....	20
2.3.1.	Uso de herramientas TIC en matemáticas	20
2.3.1.1.	La calculadora gráfica online Desmos	21
2.3.1.1.1.	Características	21
2.3.1.1.2.	Funcionalidad	21
3.	PROPUESTA DIDÁCTICA	33
3.1.	Contenidos	33
3.2.	Objetivos	33
3.3.	Competencias	34
3.4.	Metodología	35
3.5.	Desarrollo de la propuesta.....	35
3.5.1.	Sesión 1: Funciones y gráficas	39
3.5.1.1.	Actividad 1: Conceptos previos: variables, ejes de coordenadas, escala	39
3.5.1.1.1.	Ejercicio 1: Ejes cartesianos	39
3.5.1.2.	Actividad 2: ¿Qué es una función?	40
3.5.1.3.	Actividad 3: Relación entre expresión algebraica, tabla de valores y representación gráfica	41
3.5.1.4.	Actividad 4: Algunas propiedades de las funciones: monotonía, curvatura.....	42
3.5.2.	Sesión 2: Un caso particular de funciones: las funciones lineales (I)	45

3.5.2.1.	Actividad 1: Expresión algebraica y representación gráfica de una función lineal	45
3.5.2.2.	Actividad 2: Funciones de proporcionalidad: pendiente.....	45
3.5.2.2.1.	Ejercicio 2: Funciones de proporcionalidad (I)	46
3.5.2.2.2.	Ejercicio 3: Funciones de proporcionalidad (II)	47
3.5.3.	Sesión 3: Un caso particular de funciones: las funciones lineales (II)	47
3.5.3.1.	Actividad 1: Funciones afines: pendiente y ordenada en el origen	47
3.5.3.1.1.	Ejercicio 4: funciones lineales.....	48
3.5.3.1.2.	Ejercicio 5: ecuación de la recta en forma punto-pendiente	49
3.5.3.1.3.	Ejercicio 6: ecuación de la recta que pasa por dos puntos .	49
3.5.3.2.	Actividad 2: Funciones constantes.....	50
3.5.4.	Sesión 4: Otro caso particular de funciones: las funciones cuadráticas.....	51
3.5.4.1.	Actividad 1: La parábola como representación gráfica de una función cuadrática	51
3.5.4.2.	Actividad 2: Propiedades de la parábola: vértice, curvatura....	52
3.5.4.2.1.	Ejercicio 7: parábolas (I)	53
3.5.4.2.2.	Ejercicio 8: parábolas (II).....	54
3.5.5.	Sesión 5: Aplicación de la representación de funciones a la resolución de sistemas de ecuaciones (I)	55
3.5.5.1.	Actividad 1: Dos ecuaciones lineales.....	55
3.5.5.2.	Actividad 2: Puntos de corte de una función lineal	56
3.5.5.3.	Actividad 3: Dos ecuaciones cuadráticas	57
3.5.6.	Sesión 6: Aplicación de la representación de funciones a la resolución de sistemas de ecuaciones (II)	59
3.5.6.1.	Actividad 1: Una ecuación lineal y una ecuación cuadrática....	59
3.5.6.2.	Actividad 2: Resolución de una ecuación de segundo grado: interpretaciones	60
3.5.7.	Sesión 7: Realización del examen	62
3.5.8.	Sesión 8: Corrección del examen y entrega de calificaciones.....	62
3.6.	Criterios de evaluación.....	63
4.	DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	66
5.	LIMITACIONES.....	68
6.	PROSPECTIVA.....	69
7.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	73
	ANEXOS.....	75

Anexo I: Modelo de examen	75
Anexo II: Cuestionario de evaluación de la idoneidad de la propuesta	77

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Diferencia entre las dos opciones de matemáticas de 3º ESO.....	12
Tabla 2. Bloques de contenidos en las dos opciones de matemáticas de 3º ESO	13
Tabla 3. Contenidos del bloque de funciones en las dos opciones de matemáticas de 3º ESO.....	13
Tabla 4. Evolución histórica del concepto de función	16
Tabla 5. Dificultades en el aprendizaje de funciones y gráficas	18
Tabla 6. Diseño de la sesión 1.....	35
Tabla 7. Diseño de la sesión 2	35
Tabla 8. Diseño de la sesión 3	36
Tabla 9. Diseño de la sesión 4	36
Tabla 10. Diseño de la sesión 5	37
Tabla 11. Diseño de la sesión 6	37
Tabla 12. Diseño de la sesión 7.....	38
Tabla 13. Diseño de la sesión 8	38
Tabla 14. Rúbrica de evaluación	63
Tabla 15. Porcentajes de calificación.....	65
Tabla 16. Ejemplo de cuestionario de evaluación	77

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Coordenadas de Nicolás de Oresme. Fuente: Sierra, González y López, (1998).....	17
Figura 2. Pantalla inicial de <i>Desmos</i>	22
Figura 3. Pantalla inicial de la calculadora gráfica.	23
Figura 4. Ejemplos predefinidos.	23
Figura 5. Ejemplo de representación de una recta en forma punto-pendiente. Fuente: https://www.desmos.com/calculator	31
Figura 6. Ejemplo de representación de una parábola. Fuente: https://www.desmos.com/calculator	32
Figura 7. Ejemplo de una actividad interactiva (creada por Megan Schmidt). Fuente: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/563b99912594c25doacaa803#preview/2d4b9260-0323-4b8a-9bf3-8e7bfea9ec4f	32
Figura 8. Ejes y origen de coordenadas	39
Figura 9. Ejemplos de distintas escalas	39
Figura 10. Ejercicio: ejes cartesianos	40
Figura 11. ¿Qué es función?	41
Figura 12. Representación gráfica de una función	42
Figura 13. Monotonía: ejemplos de funciones lineales crecientes, decrecientes y constantes	42
Figura 14. Ejemplos de intervalos de crecimiento y decrecimiento en funciones cuadráticas	43
Figura 15. Monotonía: máximo	44
Figura 16. Monotonía: mínimo	44
Figura 17. Curvatura: concavidad y convexidad	44
Figura 18. Expresión algebraica y representación gráfica de una función lineal ..	45
Figura 19. Pendiente. Fuente: http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/	46
Figura 20. Funciones de proporcionalidad	46
Figura 21. Ejercicio: funciones de proporcionalidad (I)	47
Figura 22. Ejercicio: funciones de proporcionalidad (II)	47
Figura 23. Funciones lineales: ordenada en el origen	48
Figura 24. Ejercicio: funciones lineales	49
Figura 25. Ejercicio: ecuación de la recta en forma punto-pendiente	49
Figura 26. Ejercicio: ecuación de la recta que pasa por dos puntos	50
Figura 27. Funciones constantes	51
Figura 28. Rectas verticales.....	51
Figura 29. Expresión algebraica de una función cuadrática	52
Figura 30. Propiedades de la función parabólica	53
Figura 31. Ejercicio: parábolas (I)	54
Figura 32. Ejercicio: parábolas (II)	55
Figura 33. Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales	56
Figura 34. Punto de corte de una recta con el eje x	56
Figura 35. Punto de corte de una recta con el eje y	57
Figura 36. Dos parábolas que no se cortan	58
Figura 37. Dos parábolas que se cortan en un único punto.....	58
Figura 38. Dos parábolas que se cortan en dos puntos	59
Figura 39. Puntos de corte de una recta y una parábola	60

Figura 40. Ecuación de segundo grado sin solución.....	61
Figura 41. Ecuación de segundo grado con una única solución	61
Figura 42. Ecuación de segundo grado con dos soluciones	62
Figura 43. Asíntotas.....	69
Figura 44. Sistemas de inecuaciones	70
Figura 45. Trigonometría.....	70
Figura 46. Cónicas	71
Figura 47. Estadística	71
Figura 48. Derivadas	72
Figura 49. Integrales	72
Figura 50. Ejemplo de enunciado de examen.....	75
Figura 51. Ejemplo de resolución de examen por parte de un alumno.....	76

1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Definición del problema

Durante la realización de las prácticas correspondientes al Máster Universitario en Formación de Profesorado para Educación Secundaria se ha observado la dificultad que encuentran los alumnos a la hora de asimilar los contenidos del bloque de funciones. A lo largo de los dos primeros cursos de esta etapa, los alumnos se van familiarizando con dichos contenidos mediante la construcción de gráficas a partir de tablas de valores. Además de representar e identificar rectas (funciones lineales) y parábolas (funciones cuadráticas), se les enseña a interpretar gráficas haciendo uso de ejemplos cotidianos (por ejemplo, gráfica que representa la distancia recorrida entre la casa de un alumno y el colegio en función del tiempo). A partir de tercero, se empieza a tratar el tema desde un punto de vista más formal, definiendo conceptos como pendiente, ordenada en el origen, vértice de una parábola, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos. Esta mayor rigurosidad en la definición de los conceptos debe venir acompañada de una mayor precisión a la hora de representar las distintas funciones que se manejan. Es aquí donde herramientas como la calculadora gráfica online *Desmos* pueden ayudar a conseguir esa precisión de la que hablábamos anteriormente permitiendo al docente, además, “jugar” con los distintos conceptos y “ganar tiempo” en la fase expositiva de los temas, pudiendo dedicar más tiempo a la resolución de dudas y problemas. Por otro lado, este tipo de metodología tan visual facilita la asimilación de conceptos por parte de los alumnos, pudiendo ellos mismos utilizar la herramienta para adecuar sus propios ritmos de aprendizaje. Finalmente, el hecho de tratarse de una herramienta online, accesible desde un simple navegador, proporciona una gran disponibilidad y facilidad de uso, permitiendo a los alumnos familiarizarse con las nuevas tecnologías orientadas al mundo de la educación.

1.2. Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo es presentar una propuesta didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas a alumnos de Matemáticas de 3º ESO haciendo uso de la calculadora gráfica online *Desmos*.

Los objetivos específicos que se pretenden conseguir son:

- Analizar los problemas de aprendizaje de los alumnos de 3º ESO en la representación e interpretación de funciones.
- Contextualizar la unidad didáctica dentro del currículo oficial y analizar las competencias a desarrollar.
- Conocer las posibilidades que ofrece la calculadora gráfica online *Desmos* y proponer futuras aplicaciones de la herramienta en otros niveles educativos.

1.3. Metodología

La metodología seguida en la elaboración del trabajo parte de una investigación bibliográfica que nos ayude a contextualizar el problema detectado y nos muestre qué tipo de investigaciones se han llevado ya a cabo en este campo.

Una vez delimitado el marco conceptual y conocidas las posibilidades que nos ofrece la herramienta, se hará uso de ésta para elaborar una propuesta de intervención que permita a los alumnos experimentar de una forma gráfica, intuitiva y online los conceptos teóricos expuestos en la unidad didáctica.

Se trata de una metodología participativa donde cada alumno pueda experimentar por sí mismo y seguir su propio ritmo de aprendizaje, además de compartir con el resto de sus compañeros los descubrimientos que vaya realizando durante el manejo de la herramienta.

Resumiendo, el trabajo se puede dividir en tres fases:

- En una primera fase será necesario abordar una revisión bibliográfica para conocer el estado del arte, así como delimitar el marco legal en el que vamos a desarrollar la propuesta. Para ello se consultará bibliografía de autores de reconocido prestigio así como publicaciones actuales y relevantes.
- En una segunda fase se estudiarán las características y posibilidades que ofrece la calculadora gráfica online *Desmos*.
- En una tercera fase, se elaborará una propuesta práctica que tenga en cuenta los resultados de las dos fases anteriores.

1.4. Justificación de la bibliografía

Para la elección de la bibliografía se han seguido los criterios propios de una investigación de este tipo: relevancia o pertinencia de la información, prestigio de las publicaciones, autoridad de los autores (valga la redundancia) y actualidad de las fuentes.

Para la primera de las fases, hemos encontrado referencias en el conocido libro de Boyer, *Historia de las Matemáticas*, tomado como fuente primaria, al igual que las leyes vigentes, sacadas de los correspondientes boletines oficiales. Como fuentes secundarias, hemos seleccionado algunos artículos de prestigiosas revistas del campo de la educación, como el artículo de Sierra en la revista *Aula*, junto con alguna tesis doctoral, Ruiz-Higueras, avalada por matemáticos ilustres como D. Miguel de Guzmán. Para la segunda fase, hemos seleccionado información de una fuente primaria que es la propia página web de la empresa creadora de la calculadora gráfica online *Desmos*.

2. MARCO TEORICO

Este marco teórico sigue la línea indicada anteriormente para las distintas fases del trabajo. En un primer momento se aborda el marco legal que sustenta el presente documento, en un siguiente apartado se aborda una breve evolución histórica del término función, así como las dificultades que presenta para el alumnado y, por último, se hace un esbozo del papel que juegan las TIC en educación, en general, y en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en particular, focalizándonos en la calculadora gráfica online *Desmos*.

2.1. Marco legal

El conocimiento del marco legal que regula los procesos de enseñanza y aprendizaje es imprescindible para conocer los mínimos que nos exige la ley en nuestra labor como docentes. En el momento de redactar el presente trabajo, nos encontramos en un momento de transición entre dos leyes estatales, la Ley Orgánica de Educación (en adelante LOE) y la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (en adelante LOMCE), con una importante repercusión a nivel social y político. Puesto que en la LOMCE, en su único artículo, se indica que no se trata de una ley derogatoria sino que es una modificación de la LOE, vamos a ver cada una de ellas, así como las leyes autonómicas que las complementan.

2.1.1. LOE

La LOE, en su artículo 22, trata sobre los principios generales en Educación Secundaria Obligatoria, como etapa de preparación para estudios posteriores (Boletín Oficial del Estado, en adelante BOE, núm. 106, 2006. p. 17169).

El artículo 23 establece los objetivos de esta etapa educativa, entre los que destaca la capacitación tecnológica (información y comunicación) que permita aprender a aprender, tomar decisiones propias y asumir las responsabilidades de dichas decisiones (BOE, núm. 106, 2006. pp. 17169 y 17170).

El artículo 24 describe la organización de los tres primeros cursos de secundaria, detallando las materias de que se compone cada uno de ellos (BOE, núm. 106, 2006. p. 17170).

El artículo 26 se refiere a los principios pedagógicos de secundaria, poniendo el énfasis en la educación personalizada y en la atención a la diversidad (BOE, núm. 106, 2006. p. 17170).

2.1.2. LOMCE

Como se ha indicado anteriormente, la LOMCE, en su único artículo, señala que no se trata de una ley derogatoria sino que es una modificación de la LOE. Las modificaciones más importantes para este trabajo son las siguientes:

Se modifica el artículo 24 de la LOE de forma que, en el bloque de asignaturas troncales de tercero, se debe elegir una de estas dos asignaturas de matemáticas: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, o bien, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas (BOE, núm. 295, 2013. p. 97873).

2.1.2.1. *Proyectos, Decretos y Órdenes que desarrollan la LOMCE*

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato a nivel estatal y el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno establece, para la Comunidad de Madrid, el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

La disposición derogatoria única del Real Decreto 1105/2014, indica que, a partir de la total implantación de las modificaciones recogidas en la disposición final primera, quedará derogado el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, a excepción de la disposición adicional primera que se mantendrá en vigor en todo aquello que resulte aplicable de acuerdo con la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, en su redacción dada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre (BOE, núm. 3, 2015. p. 200).

El apartado 27 del Anexo I del Real Decreto 1105/2014 trata de las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (BOE, núm. 3, 2015. pp. 389 - 398).

El apartado 28 del Anexo I del Real Decreto 1105/2014 trata de las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas (BOE, núm. 3, 2015. pp. 398 - 407).

En el caso del Decreto 48/2015, el Anexo I recoge la misma información que el Real Decreto 1105/2014 bajo los epígrafes MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS. 3º ESO (Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, en adelante BOCM, núm. 118, 2015. pp. 106 - 113) y MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS APLICADAS. 3º ESO (BOCM, núm. 118, 2015. pp. 119 - 126).

Tabla 1. Diferencia entre las dos opciones de matemáticas de 3º ESO

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas
Fortalece tanto los aspectos teóricos como las aplicaciones prácticas en contextos reales de los bloques de contenidos	Pone el foco en la aplicación práctica de los bloques de contenidos en contextos reales frente a la profundización en los aspectos teóricos

Fuente: Real Decreto 1105/2014 (BOE, núm. 3, 2015. pp. 390 y 399)

Tabla 2. Bloques de contenidos en las dos opciones de matemáticas de 3º ESO

Asignatura	Contemplados en el Real Decreto 1105/2014	Contemplados en el Decreto 48/2015
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas 2. Números y Álgebra 3. Geometría 4. Funciones 5. Estadística y Probabilidad	1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas 2. Números y Álgebra 3. Geometría 4. Funciones 5. Estadística y Probabilidad
Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas	1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas 2. Números y Álgebra 3. Geometría 4. Funciones 5. Estadística y Probabilidad	1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas 2. Números y Álgebra 3. Geometría 4. Funciones 5. Estadística y Probabilidad

Fuentes: Real Decreto 1105/2014 (BOE, núm. 3, 2015. pp. 390 y 399) y Decreto 48/2015 (BOCM, núm. 118, 2015. pp. 106 y 119)

Tabla 3. Contenidos del bloque de funciones en las dos opciones de matemáticas de 3º ESO

Asignatura	Contemplados en el Real Decreto 1105/2014	Contemplados en el Decreto 48/2015
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas	Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de	Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de

	situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.	situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas	Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta.	Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta.

	Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.	Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.
--	---	---

Fuentes: Real Decreto 1105/2014 (BOE, núm. 3, 2015. pp. 394 y 402) y Decreto 48/2015 (BOCM, núm. 118, 2015. pp. 107, 108 y 121)

Además de las mencionadas leyes y decretos, hay que tener en cuenta la Orden del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (ECD, en adelante)/65/2015, de 21 de enero, que desarrolla la LOMCE, relacionando las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación en educación primaria, educación secundaria obligatoria y bachillerato.

El apartado dos del Anexo I de la citada Orden ministerial trata sobre la Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

El apartado tres del Anexo I de la citada Orden ministerial trata sobre la Competencia digital señalando, entre otras cosas, que hay que conocer las potencialidades y limitaciones de la tecnología de cara a la resolución de problemas.

2.2. El aprendizaje de funciones y gráficas

Una vez visto el marco legal que afecta al aprendizaje de funciones y gráficas, pasamos a describir brevemente el marco conceptual involucrado en este bloque de contenidos. Como indica Deulofeu (2001), se trata de un bloque bastante auto-contenido y que, en esta última etapa de secundaria, debe considerarse con un doble objetivo:

- dar una visión básica a aquellos alumnos que no van a orientar sus estudios hacia el bachillerato pero han de ser capaces, sobre todo, de interpretar gráficas presentes en la vida diaria (prensa, televisión, sociedad).
- servir de base a los alumnos que vayan a continuar sus estudios de matemáticas en bachillerato y, seguramente, en la universidad.

Primeramente, nos vamos a detener en el concepto de función para, posteriormente, analizar las dificultades observadas en el aprendizaje de funciones y gráficas.

2.2.1. El concepto de función

Como señalan Lávaque, Méndez y Villarroel (2006), el término concepto distingue entre el objeto matemático (único) y las diversas significaciones que cada alumno asocia a dicho objeto.

Esta misma distinción entre definición e imagen, ya fue apuntada por De Prada (1996), al expresar que, para muchos alumnos, una función es algo que se puede representar por una recta o una curva, dando lugar a un gráfico “bonito” y “regular” susceptible de ser expresado mediante una fórmula matemática; no entrando en esta clasificación ni las funciones constantes, ni las funciones discontinuas, ni las funciones a trozos.

La enseñanza de las Matemáticas no debe contemplarse al margen de su historia, es más, la historia de la Matemática es una excelente herramienta metodológica para facilitar un aprendizaje significativo por parte de los alumnos. En el caso que nos ocupa, vamos a ver cómo ha evolucionado el concepto de función a lo largo de la historia. Tomando la clasificación de Sierra (1998), podemos considerar cinco grandes periodos:

Tabla 4. Evolución histórica del concepto de función

Edad Antigua	Primeras representaciones gráficas y búsqueda de regularidades
Edad Media	Aportaciones de Nicolás de Oresme
Siglos XV – XVII	Desarrollo del concepto de función por parte de Descartes, Newton y Leibniz
Siglo XVIII	Consideración del concepto de función como un concepto clave de las matemáticas por parte de Bernoulli y Euler
Siglos XIX – XX	Generalización del concepto de función

Fuente: Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. y López Esteban, C. (1998).

Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, 10, 93.

Edad Antigua

Según Pedersen (1974), los matemáticos babilonios utilizaban tablas de dos columnas donde anotaban datos empíricos astronómicos que interpolaban para encontrar regularidades.

Edad Media

Nicolás de Oresme introduce un primer sistema de coordenadas para representar la velocidad de un móvil en función del tiempo, representando los instantes de tiempo en un eje horizontal y la velocidad en dichos instantes como segmentos verticales.

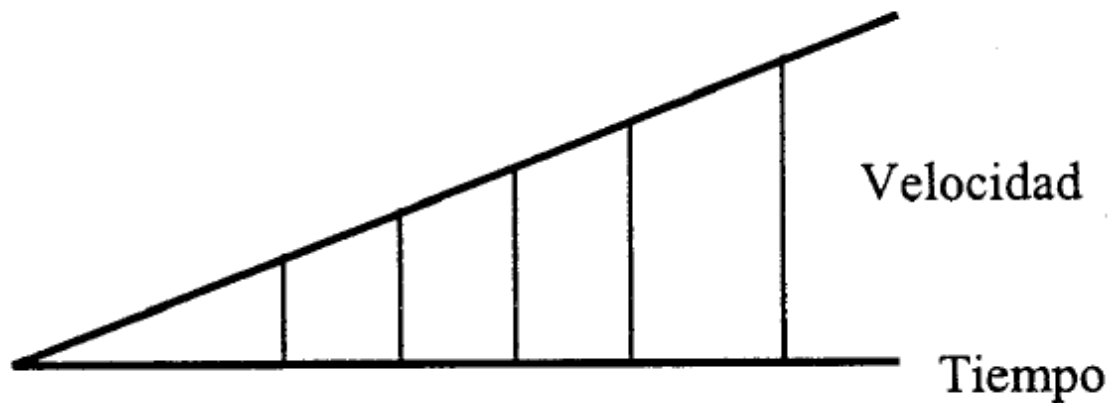


Figura 1. Coordenadas de Nicolás de Oresme. Fuente: Sierra, González y López, (1998)

Coincidimos con Azcárate y Deulofeu (1990) en que este tipo de representaciones nos recuerdan la gráfica de una función sobre unos ejes cartesianos. Esto nos hace pensar en la influencia que pudo tener Oresme en Galileo y Descartes.

Siglos XV – XVII

Descartes expresa la dependencia entre dos cantidades variables x e y , de forma que puede obtenerse una de ellas en función de la otra.

Newton y Leibniz consiguen representar funciones como series infinitas de potencias.

Siglo XVIII

Jean Bernoulli, en un artículo publicado en 1718, pone de manifiesto que cualquier función se puede representar mediante su expresión algebraica; pero es con Euler cuando el concepto de función se convierte en objeto de estudio, pasando a ser estudiadas en sí mismas junto con sus formas de representación. Como indica Ruiz-Higueras (1994), a Euler debemos la notación $f(x)$ para referirnos al concepto de función.

Siglos XIX y XX

Cauchy ya utiliza, para referirse a las funciones, los términos de variable independiente (x) y variable dependiente (y) aunque será Dirichlet quien defina el concepto de función tal como lo conocemos en nuestros días, según aparece en Boyer (1986):

Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x (p. 687).

2.2.2. Dificultades en el aprendizaje de funciones y gráficas

Según Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013), por lo que se refiere a las funciones lineales, los errores se observan tanto en la noción de pendiente, asociada a la inclinación de la recta como, sorprendentemente, en la de ordenada en el origen. En el caso de las funciones cuadráticas se observan errores tanto en la relación entre el término lineal y el eje de la parábola como en la obtención del coeficiente del término cuadrático a partir de la visualización de la parábola.

En ambos casos, los problemas se acentúan cuando se trata de pasar de la representación gráfica a la expresión algebraica.

En línea con lo apuntado por González y Martín (2004), podríamos decir que hay tres formas de representar funciones:

- Mediante su expresión algebraica
- Mediante su tabla de valores
- Mediante su representación gráfica

Tabla 5. Dificultades en el aprendizaje de funciones y gráficas

Partiendo de la expresión algebraica	Partiendo de la representación gráfica
Expresión algebraica vs ecuación	Función vs no función
Elección de valores de x	Extracción de parámetros (pendiente) y propiedades (curvatura)
Obtención de valores de y	Rectas horizontales y verticales
Escala de los ejes cartesianos	Interpretación de los puntos de corte con los ejes cartesianos
Ubicación de los puntos coordenados	
Dibujo de la gráfica	

2.2.2.1 Dificultades partiendo de la expresión algebraica

Un primer problema que observamos es que, si partimos de la expresión algebraica de una función, los alumnos tienen dificultades para visualizar dicha expresión como una función susceptible de ser representada gráficamente; en general, perciben la expresión algebraica como una ecuación.

El paso de la expresión algebraica a la tabla de valores, también puede resultar, a veces, problemático, empezando por la elección de los posibles valores de la variable independiente (x) y siguiendo con la obtención de los correspondientes valores de la variable dependiente (y). Estos problemas se traducen en dudas acerca de la cantidad de valores a indicar en la tabla, así como a la magnitud de los valores obtenidos, que suele derivar en errores a la hora de seleccionar la escala de los ejes de coordenadas, como se menciona en Arce y Ortega (2013).

El reconocimiento de los puntos coordenados que constituyen la tabla de valores y su ubicación en unos ejes cartesianos es un nuevo tema de dificultad para algunos alumnos. Aquí, los errores se suelen manifestar en no asociar correctamente los ejes:

- Eje x $\leftrightarrow$ eje horizontal $\leftarrow \rightarrow$ eje de abscisas
- Eje y $\leftrightarrow$ eje vertical $\leftarrow \rightarrow$ eje de ordenadas

Además de errores a la hora de asociar los signos de las coordenadas de los puntos con su posición relativa en los ejes:

- Coordenada x positiva $\leftarrow \rightarrow$ parte derecha del eje x
- Coordenada x negativa $\leftarrow \rightarrow$ parte izquierda del eje x
- Coordenada y positiva $\leftarrow \rightarrow$ parte superior del eje y
- Coordenada y negativa $\leftarrow \rightarrow$ parte inferior del eje y

Finalmente, logrados superar todos los escollos mencionados, sólo quedaría unir los puntos obtenidos para visualizar la gráfica de la función; aquí, los problemas observados suelen focalizarse en las funciones cuadráticas más que en las funciones lineales. Algunos alumnos tienen tendencia a unir los puntos representados utilizando siempre líneas rectas, produciendo un efecto visual muy acusado, sobre todo alrededor de los vértices de las parábolas, que adquieren aspectos de “puntas de flecha” en vez de formas “redondeadas”.

2.2.2.2 Dificultades partiendo de la representación gráfica

Considerando el problema en sentido inverso, es decir, partiendo de una representación gráfica, el primer problema que identificamos en nuestros alumnos es su dificultad a la hora de discernir si dicha gráfica corresponde a una función o no. En matemáticas, utilizamos los ejes coordenados no sólo para representar funciones sino para referenciar otros muchos objetos matemáticos, sobre todo geométricos (figuras planas), de los que extraemos informaciones como perímetro, superficie.

Es importante que los alumnos tengan claro el concepto de función (visto en el apartado anterior) para que, desde un principio, entiendan si están tratando con una función, o bien se trata de otro tipo de representación gráfica.

Una vez hecho este inciso, observamos que los alumnos presentan bastantes dificultades a la hora de obtener e interpretar información de la gráfica de una función. Términos como pendiente de una recta u otros tan “visuales” como crecimiento o decrecimiento, también se convierten en aspectos problemáticos.

Siguiendo con las funciones lineales, otro problema detectado en algunos alumnos son las funciones constantes ($y=k$); pese a su simplicidad, o quizás debido a ella, a los alumnos les resulta complicado, a veces, reconocerlas y transformarlas en ecuaciones algebraicas, o incluso, en una tabla de valores. Esto mismo ocurre con las rectas verticales ($x=k$) donde, además, se añade el hecho de que no se ajustan a la ecuación algebraica general de una función lineal ($y=mx+n$).

Pasando a las funciones cuadráticas y empezando por su expresión algebraica, nos encontramos diversas dificultades: asociar el signo del coeficiente de x^2 con la curvatura de la parábola y, sobre todo, obtener los puntos de corte con el eje de abscisas, siendo especialmente problemático el caso en que la parábola se halle por encima del eje x y, por tanto, no corte a éste en ningún punto. En este último caso, la expresión gráfica de la parábola se convierte en una ecuación de segundo grado que están habituados a resolver, pero que no saben/pueden resolver al aparecerles una raíz negativa que, cuando menos, les desconcierta y a la que no encuentran explicación.

Algunas de las dificultades expuestas hasta aquí, sin dotar a las representaciones gráficas de significación, coinciden con las indicadas por Cuevas y Dolores (2007), referidas a gráficas utilizadas en medios de información y dirigidas a diversos sectores sociales.

2.3. Uso de herramientas TIC en educación

La LOMCE, en el título XI de su preámbulo, hace referencia a las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como una herramienta favorecedora de una educación personalizada que se adapte a los ritmos de aprendizaje de cada persona. Las TIC suponen una ruptura con el concepto tradicional de aula y de espacio educativo, formando parte de la cotidianidad de las nuevas generaciones. Las TIC no sólo hay que considerarlas como las herramientas de los nuevos alumnos, sino como una pieza clave en la formación del profesorado y de los ciudadanos en general, ya que hay que ser conscientes que todos somos alumnos, puesto que el aprendizaje es una tarea que debemos realizar a lo largo de toda nuestra vida.

2.3.1. Uso de herramientas TIC en matemáticas

Las matemáticas son un área de conocimiento con grandes posibilidades en la aplicación de herramientas TIC. A lo largo de la historia, la aparición de inventos como, por ejemplo, el ábaco, la calculadora y los más modernos y potentes ordenadores han permitido a la humanidad en general y a la ciencia en particular, avanzar con mayor rapidez, convirtiendo operaciones tediosas y susceptibles al error humano en

operaciones rutinarias, prácticamente inmediatas y exentas de errores, consiguiendo poder dedicar más tiempo a labores de investigación.

La enseñanza de las matemáticas también se está beneficiando de todos estos avances y, prueba de ello, es la calculadora gráfica online *Desmos*, objeto de este trabajo y que pasamos a describir.

2.3.1.1. La calculadora gráfica online Desmos

Desmos es una calculadora gráfica online, en la línea de otras aplicaciones similares como, por ejemplo, *GeoGebra*, creada por una empresa radicada en San Francisco. Vamos a ver cuáles son sus características más importantes así como qué funcionalidad presenta, es decir, qué podemos hacer con la herramienta.

2.3.1.1.1. Características

Entre las características más importantes de *Desmos* destacaríamos:

- Se trata de una herramienta online, es decir, accesible con un simple navegador de internet
- Se puede acceder a ella desde cualquier dispositivo móvil: ordenador, tablet, smartphone
- No requiere ser instalada en el dispositivo desde el que nos conectamos
- No requiere usuario para ser utilizada, si bien da la opción de utilizar un usuario de Google y, en este caso, poder guardar e imprimir el trabajo realizado
- Es multiidioma
- Funciona como una plataforma de trabajo colaborativo, es decir, permite la aportación de nuevas actividades que puedan ser utilizadas por cualquier usuario.

2.3.1.1.2. Funcionalidad

Acceso a la herramienta: Para acceder a *Desmos* basta con ir a la siguiente dirección <https://www.desmos.com> donde veremos una página como ésta

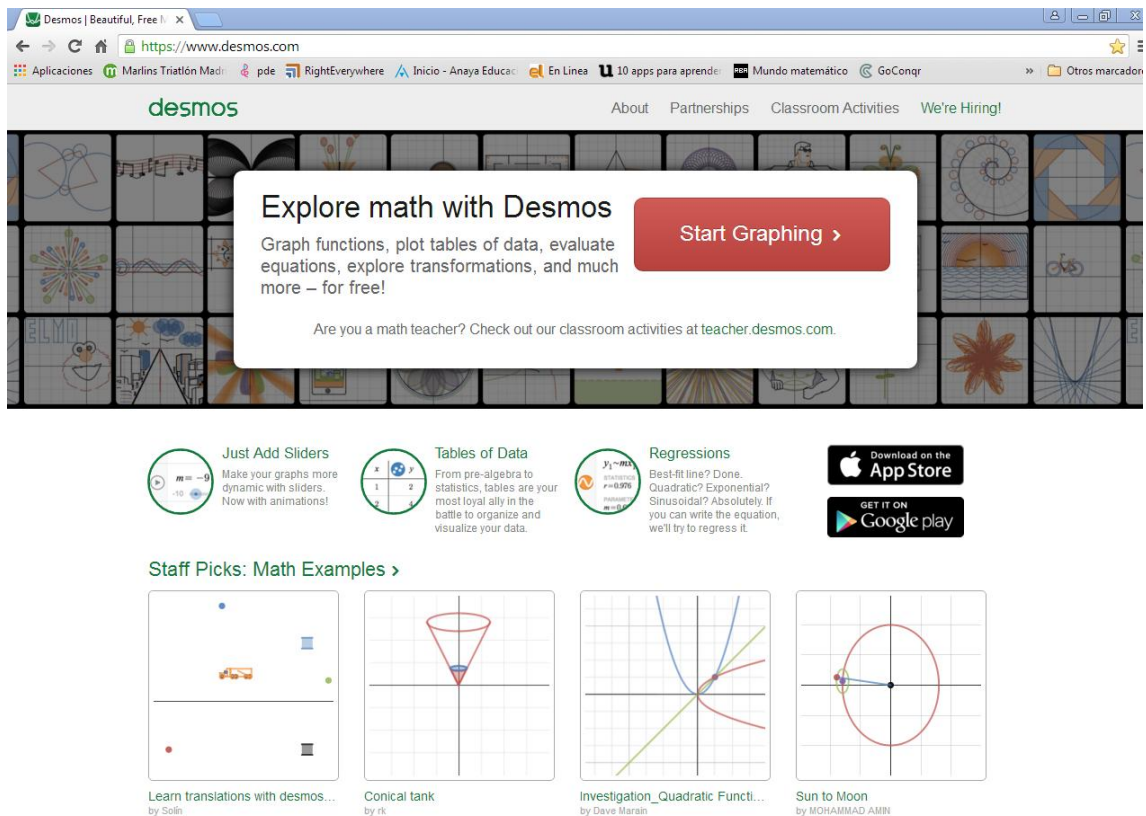
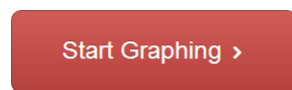


Figura 2. Pantalla inicial de Desmos.

Pulsando sobre



accederemos a la calculadora gráfica

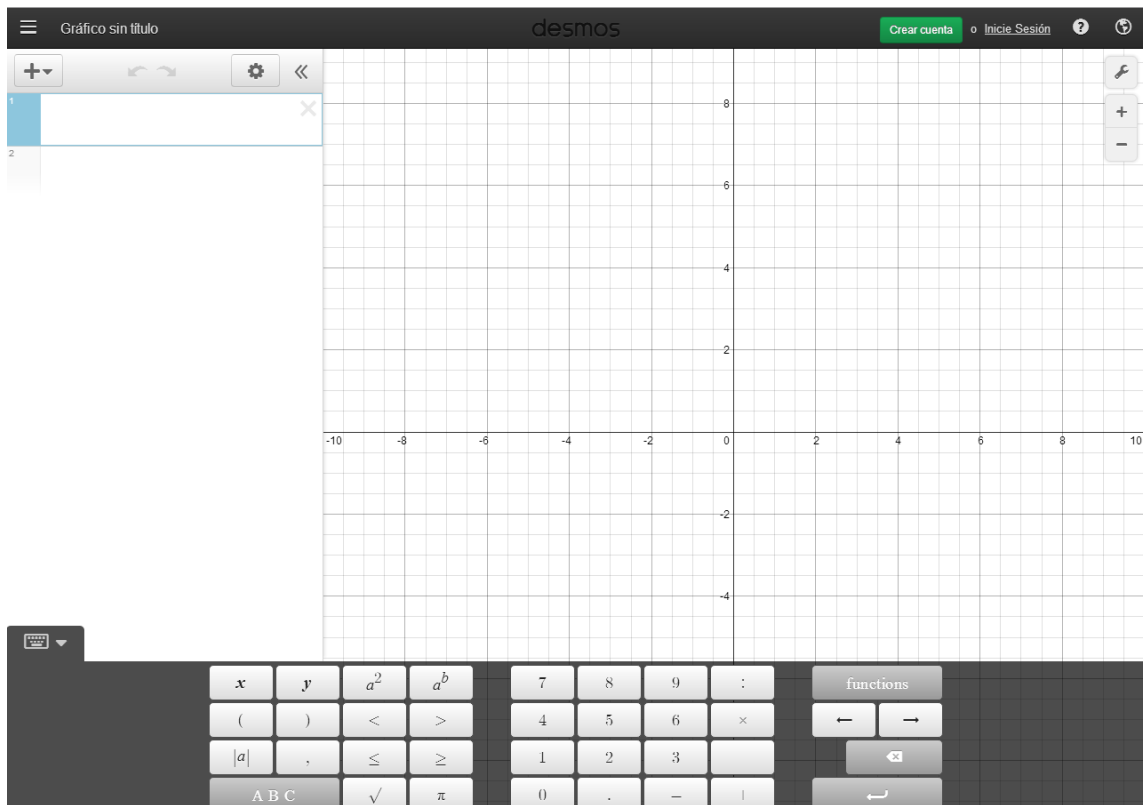


Figura 3. Pantalla inicial de la calculadora gráfica.

Vamos a describir cada una de las partes:

Si pulsamos sobre  **Gráfico sin título** aparecerá una columna como ésta

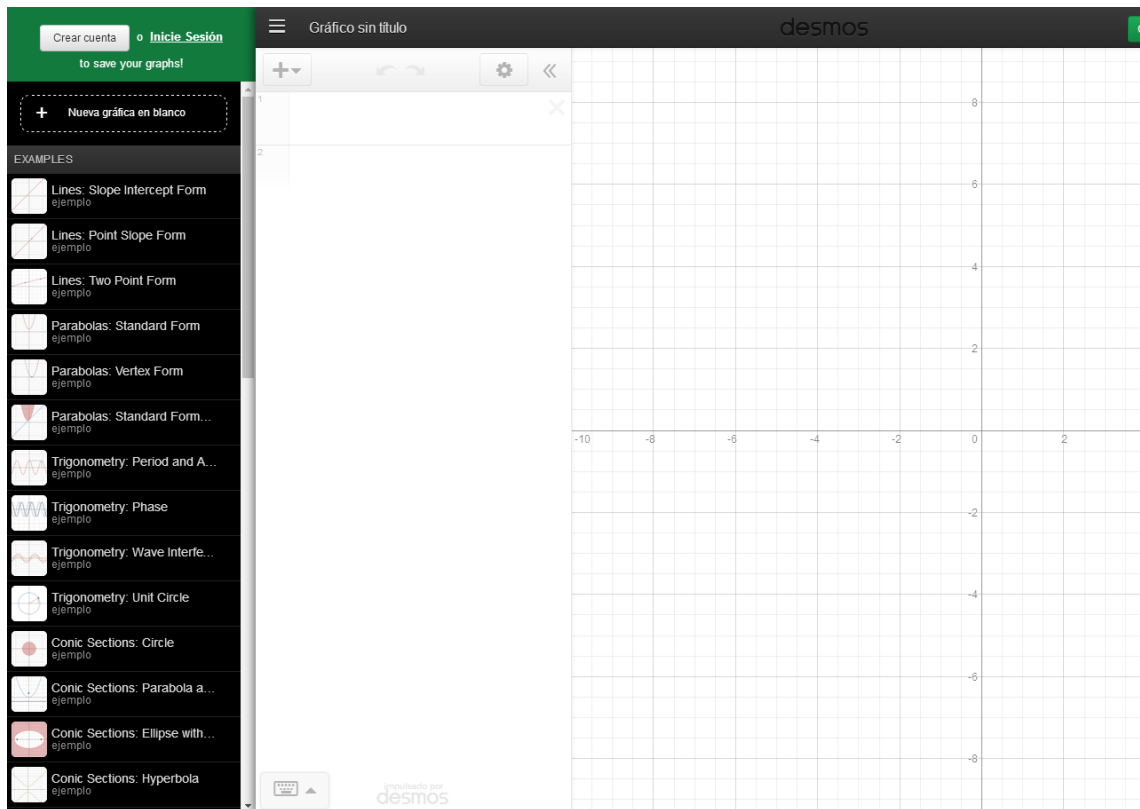
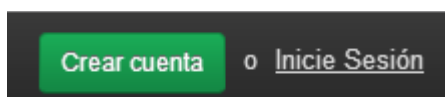


Figura 4. Ejemplos predefinidos.

Donde podremos seleccionar ejemplos ya creados para trabajar con distintos conceptos.

Si volvemos a pulsar sobre las tres líneas horizontales que aparecen a la izquierda de *Gráfico sin título*, la columna desaparece.

Siguiendo por arriba, más a la derecha vemos estas dos opciones



que nos permiten crear un usuario para acceder a la herramienta,

o bien, utilizar un usuario que ya tengamos creado en Google (usuario de gmail)

Aunque no es necesario disponer de usuario para poder utilizar la herramienta, el hecho de tenerlo sí que nos posibilita poder grabar nuestro trabajo (para recuperarlo posteriormente), compartirlo con otros usuarios e imprimir el trabajo realizado.

De los dos iconos que aparecen en la esquina superior derecha, después de *Inicie Sesión*

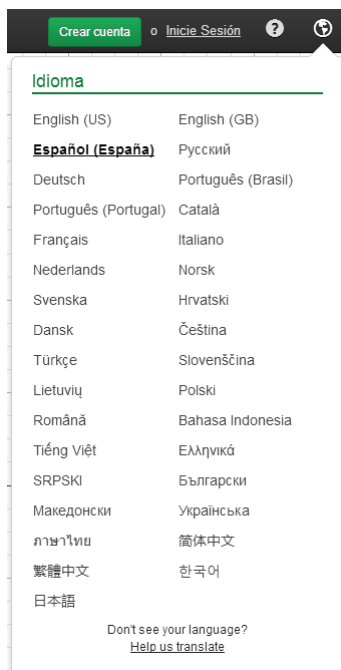


el que tiene un signo de interrogación nos despliega la siguiente pantalla



donde, entre otras cosas, podremos acceder a la *Guía de usuario*.

El símbolo que parece un mapamundi, nos permite seleccionar el idioma



Si pulsamos sobre el símbolo que aparece en la esquina superior izquierda



debajo de *Gráfico sin título*, nos aparecerá un desplegable como éste



que nos muestra las distintas posibilidades que podemos utilizar en las filas numeradas



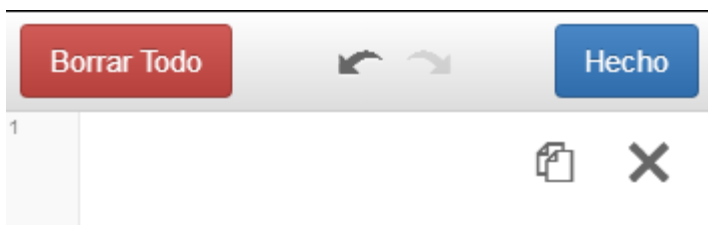
que aparecen justo debajo del símbolo



Las flechas que aparecen a su derecha permiten hacer o deshacer cambios



El icono de más a la derecha muestra las opciones posibles sobre las entradas que hayamos introducido



que, básicamente, son: duplicar

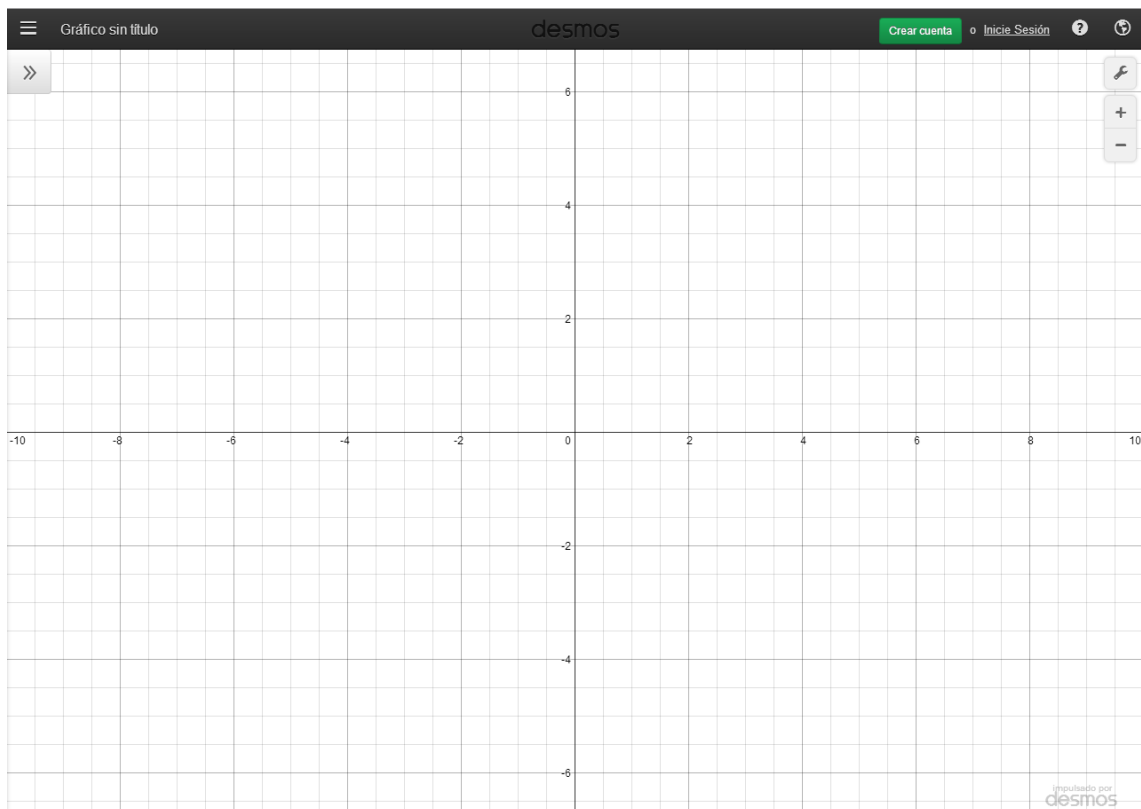


o borrar

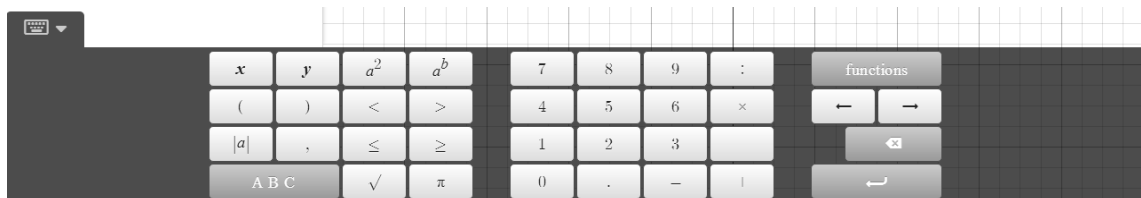


Por último, el icono << hace desaparecer la columna de datos para dejar sólo la parte de la gráfica





En la esquina inferior izquierda tenemos el icono  que hace aparecer o desaparecer un teclado con el que introducir datos en la columna de datos.



Aquí cabría destacar los botones



, que pasa del teclado numérico al teclado léxico,



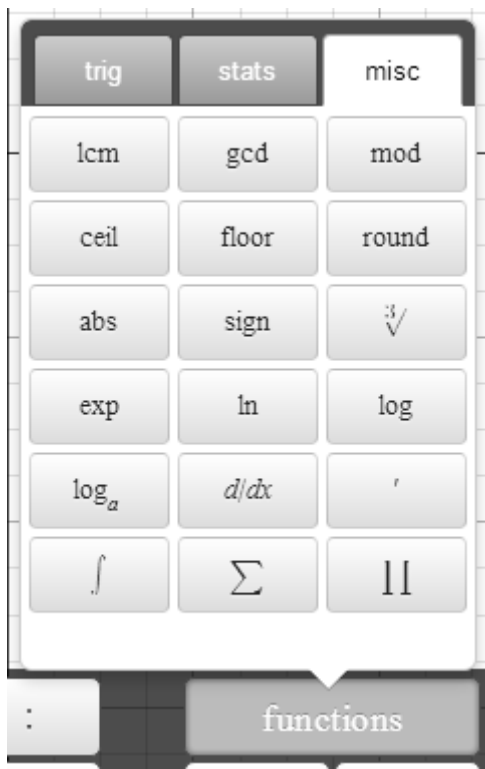
y el botón *functions* que permite el uso de funciones trigonométricas,



estadísticas,



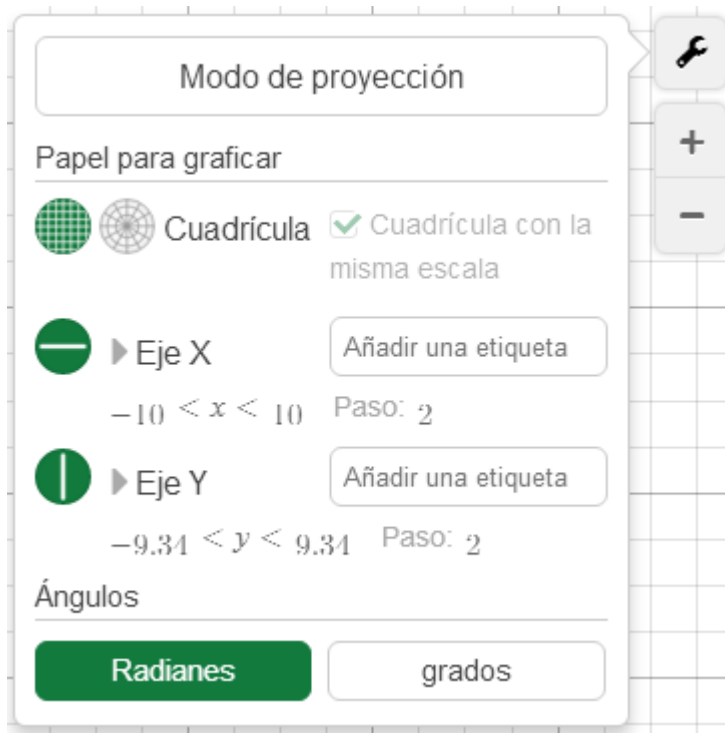
u otras funciones matemáticas de uso común.



Finalmente, en la esquina superior derecha, debajo del icono de los idiomas que hemos visto anteriormente, aparecen estos tres iconos



Si pulsamos sobre el que parece una llave inglesa veremos la siguiente ventana



que nos permite:

- Pasar a modo proyección, donde las líneas son más gruesas de forma que se vean mejor al ser proyectadas
- Seleccionar un diagrama polar, si vamos a trabajar con este tipo de representaciones
- Añadir etiquetas a los ejes coordenados así como cambiar las escalas de los mismos
- En el caso de trabajar con ángulos, utilizar radianes o grados



Los iconos simplemente sirven para acercar o alejar la imagen de la gráfica (cambiando en consonancia la escala de los ejes coordenados).

Veamos algunos ejemplos predeterminados:

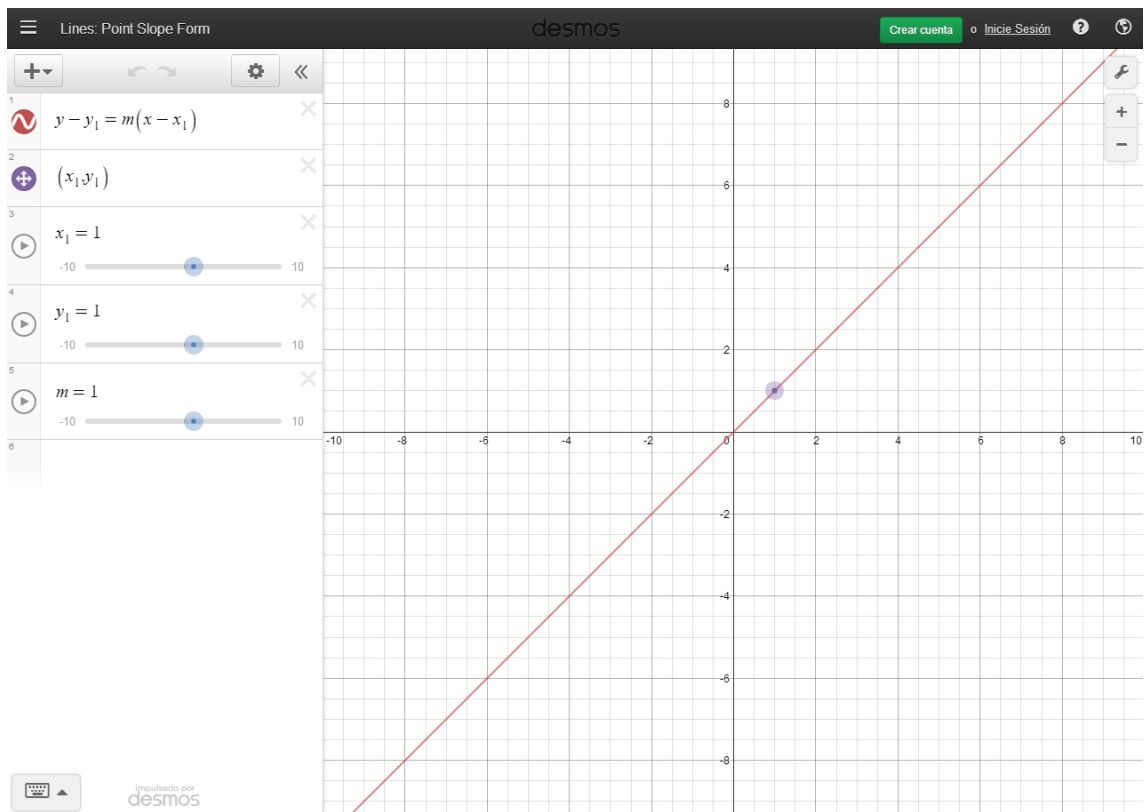


Figura 5. Ejemplo de representación de una recta en forma punto-pendiente. Fuente: <https://www.desmos.com/calculator>

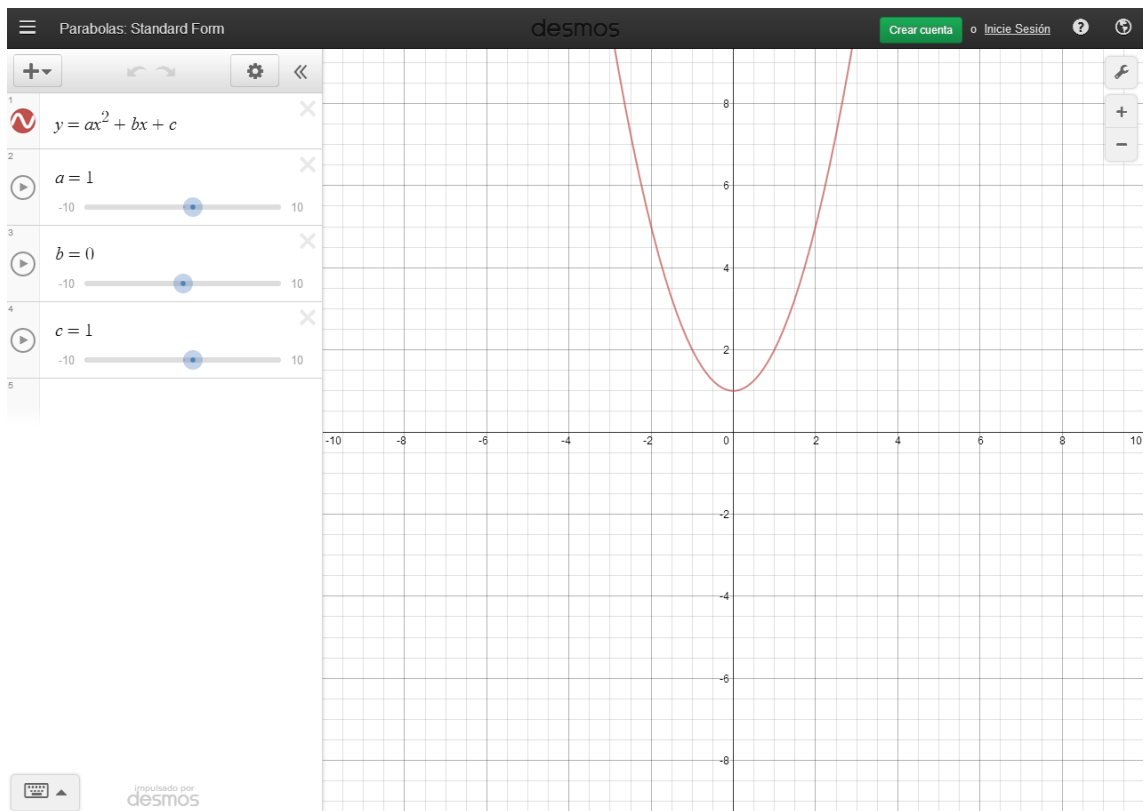


Figura 6. Ejemplo de representación de una parábola. Fuente:
<https://www.desmos.com/calculator>

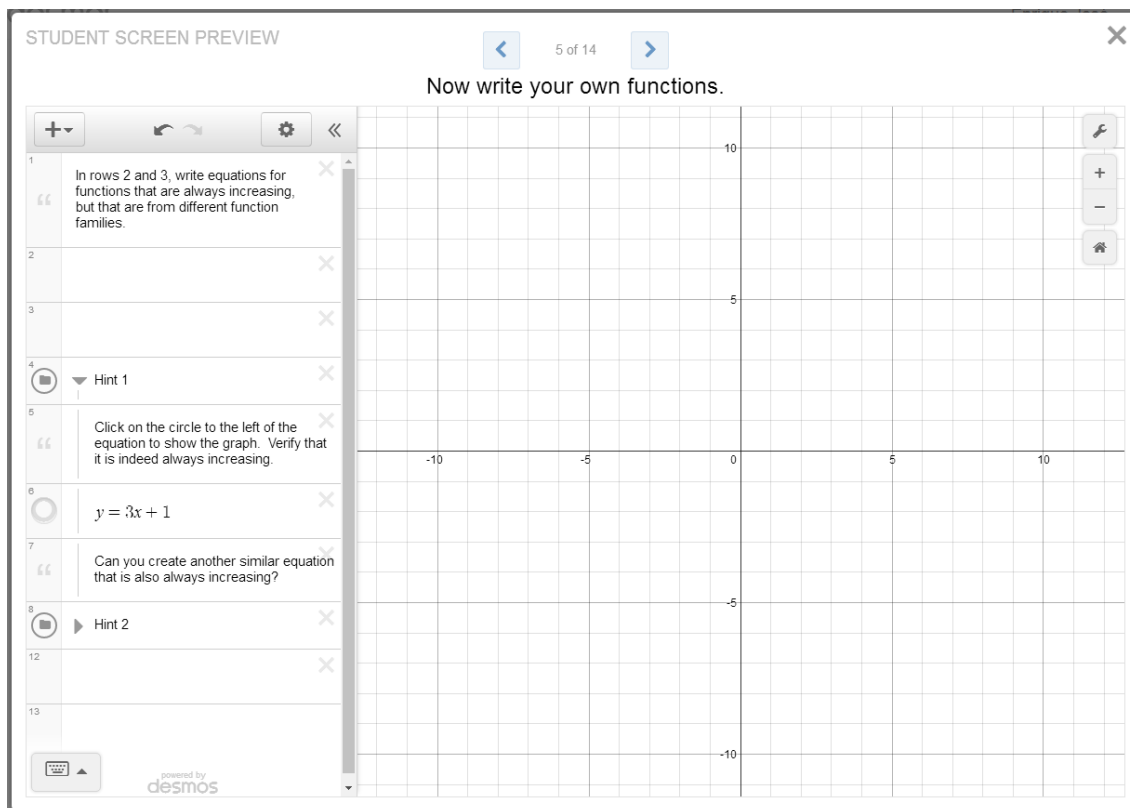


Figura 7. Ejemplo de una actividad interactiva (creada por Megan Schmidt). Fuente:
<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/563b99912594c25doacaa803#preview/2d4b9260-0323-4b8a-9bf3-8e7bfca9ec4f>

3. PROPUESTA DIDÁCTICA

La propuesta didáctica que vamos a desarrollar a continuación está pensada para la asignatura *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas*, de 3º ESO, que bajo el título de *Funciones*, se corresponde con el bloque 4 de contenidos del currículo básico de Educación Secundaria, incluido en el Real Decreto 11005/2014, de 26 de diciembre, publicado en el Boletín Oficial del Estado el 3 de enero de 2015.

3.1. Contenidos

Los contenidos a tratar en esta propuesta de intervención son los siguientes:

Funciones y gráficas

- Conceptos previos: variables, ejes de coordenadas, escala.
- ¿Qué es una función?
 - Aprender a reconocer si una gráfica representa una función o no.
- Relación entre expresión algebraica, tabla de valores y representación gráfica.
- Algunas propiedades de las funciones: monotonía, curvatura.

Un caso particular de funciones: las funciones lineales

- Funciones de proporcionalidad: pendiente
- Funciones afines: pendiente y ordenada en el origen
- Funciones constantes

Otro caso particular de funciones: las funciones cuadráticas

- La parábola como representación gráfica de una función cuadrática.
- Propiedades de la parábola: vértice, curvatura

Aplicación de la representación de funciones en la resolución de sistemas de ecuaciones.

- Dos ecuaciones lineales
 - Puntos de corte con los ejes de coordenadas
- Dos ecuaciones cuadráticas
- Una ecuación lineal y una ecuación cuadrática
 - Resolución de una ecuación de segundo grado (interpretaciones)

3.2. Objetivos

Objetivo general

Reconocer una función por su representación gráfica y extraer de ésta las características más importantes de aquélla.

Objetivos específicos

- Dada una gráfica, ser capaz de discernir si se trata de una función o no.
- Comprender la relación entre expresión algebraica de una función, tabla de valores y representación gráfica de dicha función, sabiendo pasar de una a otra.
- Ser capaz de obtener los parámetros más importantes de una función lineal: pendiente y ordenada en el origen.
- Ser capaz de obtener los parámetros más importantes de una función cuadrática: vértice de la parábola y puntos de corte con los ejes.
- Aplicar los conceptos adquiridos para resolver problemas y ser capaz de interpretar las soluciones obtenidas.

3.3. Competencias

Pasamos a describir las competencias que se pretenden alcanzar durante el desarrollo de la presente propuesta de intervención:

- Comunicación lingüística: ser capaz de expresar nuevos conceptos con una terminología y nomenclatura adecuadas.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología: comprender el concepto de función y ser capaz de encontrar su aplicación en otras ramas del saber.
- Competencia digital: manejar con soltura la calculadora gráfica online *Desmos*.
- Aprender a aprender: ser capaz de proponer puntos de mejora y reconocer los aciertos y fallos tras un análisis de los resultados obtenidos.
- Competencias sociales y cívicas: ser capaz de encontrar ejemplos de la vida cotidiana donde tengan aplicación los conceptos y habilidades aprendidas.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor: ser capaz de proponer futuras aplicaciones de la herramienta *Desmos* en otras facetas del conocimiento.
- Conciencia y expresiones culturales: reconocer la contribución de grandes matemáticos a este campo de las matemáticas.

3.4. Metodología

La metodología a seguir será la utilización de la calculadora gráfica online *Desmos* para plasmar de una manera visual e interactiva los contenidos de la unidad.

El profesor realizará una exposición oral de los conceptos más importantes de cada tema, apoyando sus argumentaciones con ejemplos sacados de la vida cotidiana, por ejemplo, haciendo uso de la señal de tráfico que representa la pendiente de una carretera para explicar el concepto de pendiente de una recta, y apoyándose en la calculadora gráfica online *Desmos* para mostrar ejemplos visuales a sus alumnos.

Si los alumnos disponen de ordenadores personales o tablets dentro del aula, podrán seguir la explicación del profesor desde sus propios dispositivos, investigando por ellos mismos; si no fuera el caso, el profesor utilizará la pizarra digital interactiva o el proyector para mostrar los ejemplos a los alumnos.

El profesor propondrá actividades a los alumnos para ser realizadas con la propia calculadora gráfica.

3.5. Desarrollo de la propuesta

La propuesta de intervención está pensada para llevarse a cabo en ocho sesiones de 55 minutos de duración cada una de ellas. En cada sesión se realizarán una serie de actividades y ejercicios que pasamos a detallar.

Tabla 6. Diseño de la sesión 1

Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades	Recursos
Introducir el concepto de función. Conocer las distintas formas de representación de una función.	Concepto de función. Formas de representación. Algunas propiedades de las funciones.	Comprender el concepto de función. Identificar una función por su representación gráfica. Reconocer la contribución de grandes matemáticos a este campo.	Exposición del profesor para explicar una serie de conceptos, apoyándose en la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> . Realización de ejercicios para comprobar el grado de entendimiento de los alumnos.	Dispositivo digital con conexión a internet, proyector y pantalla o pizarra digital interactiva.

Tabla 7. Diseño de la sesión 2

Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades	Recursos
-----------	------------	--------------	-------------	----------

Conocer los distintos tipos de funciones lineales.	Las funciones lineales como un caso particular de funciones.	Comprender el concepto de función lineal.	Exposición del profesor, apoyándose en la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> .	Dispositivo digital con conexión a internet, proyector y pantalla o pizarra digital interactiva.
Obtener la pendiente de una función de proporcionalidad.	Formas de representación. Las funciones de proporcionalidad como un caso particular de funciones lineales. Concepto de pendiente.	Identificar una función lineal por cualquiera de sus formas de representación. Ser capaz de encontrar ejemplos de la vida cotidiana. Manejar la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> para la realización de ejemplos y ejercicios.	Utilización de ejemplos significativos sacados de la vida cotidiana. Realización de ejercicios para comprobar el grado de entendimiento de los alumnos.	

Tabla 8. Diseño de la sesión 3

Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades	Recursos
Conocer los distintos tipos de funciones lineales.	Las funciones lineales como un caso particular de funciones.	Comprender el concepto de función lineal.	Exposición del profesor, apoyándose en la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> .	Dispositivo digital con conexión a internet, proyector y pantalla o pizarra digital interactiva.
Obtener la pendiente y la ordenada en el origen de una función afín.	Formas de representación. Las funciones afines y las funciones constantes como casos particulares de funciones lineales. Concepto de pendiente y ordenada en el origen.	Identificar una función lineal por cualquiera de sus formas de representación. Manejar la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> para la realización de ejemplos y ejercicios.	Obtención de la ecuación de una recta en forma punto-pendiente. Obtención de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.	

Tabla 9. Diseño de la sesión 4

Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades	Recursos
Conocer los distintos tipos de funciones	Las funciones cuadráticas como un caso	Comprender el concepto de función	Exposición del profesor, apoyándose	Dispositivo digital con conexión a

cuadráticas. Obtener el vértice de una parábola.	particular de funciones. Formas de representación. La parábola como representación gráfica de una función cuadrática. Conceptos de vértice y curvatura.	cuadrática. Identificar una función cuadrática por cualquiera de sus formas de representación. Manejar la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> para la realización de ejemplos y ejercicios.	en la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> . Obtención del vértice de una parábola a partir de su expresión algebraica. Representar una parábola a partir de su tabla de valores.	internet, proyector y pantalla o pizarra digital interactiva.
---	--	--	---	---

Tabla 10. Diseño de la sesión 5

Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades	Recursos
Resolver sistemas de ecuaciones ayudándose de su representación gráfica. Interpretar las soluciones obtenidas.	Aplicación de la representación de funciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales o cuadráticas. Obtención de los puntos de corte de una función lineal con los ejes de coordenadas.	Resolver problemas mediante la representación gráfica de ecuaciones. Interpretar los resultados obtenidos. Manejar la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> para la resolución de problemas gráficos.	Exposición del profesor, apoyándose en la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> . Resolución de sistemas de ecuaciones lineales o cuadráticas e interpretación de las soluciones obtenidas.	Dispositivo digital con conexión a internet, proyector y pantalla o pizarra digital interactiva.

Tabla 11. Diseño de la sesión 6

Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades	Recursos
Resolver sistemas de ecuaciones ayudándose de su representación gráfica. Interpretar las soluciones obtenidas.	Aplicación de la representación de funciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas. Resolución gráfica de una	Resolver problemas mediante la representación gráfica de ecuaciones. Interpretar los resultados obtenidos. Manejar la	Exposición del profesor, apoyándose en la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> . Resolución de sistemas de ecuaciones lineales y	Dispositivo digital con conexión a internet, proyector y pantalla o pizarra digital interactiva.

	ecuación de segundo grado.	calculadora gráfica online <i>Desmos</i> para la resolución de problemas gráficos.	cuadráticas e interpretación de las soluciones obtenidas.	
--	----------------------------	---	---	--

Tabla 12. Diseño de la sesión 7

Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades	Recursos
Realizar el examen de la propuesta de intervención		Expresar los contenidos aprendidos a lo largo de la propuesta.	Realización del examen. El profesor facilitará a los alumnos un código con la que accederán a student.desmos.com , donde se halla el examen a realizar. El profesor podrá hacer un seguimiento online de la evolución del examen.	Dispositivo digital con conexión a internet por parte de cada alumno.

Tabla 13. Diseño de la sesión 8

Objetivos	Contenidos	Competencias	Actividades	Recursos
Entregar calificaciones y atender reclamaciones		Analizar los resultados obtenidos (tanto alumnos como profesor) y obtener conclusiones.	Corrección del examen e información de aspectos a mejorar (tanto por los alumnos como por el profesor).	Dispositivo digital con conexión a internet, proyector y pantalla o pizarra digital interactiva. Los resultados de los exámenes quedarán grabados en la propia calculadora gráfica online <i>Desmos</i> .

3.5.1. Sesión 1: Funciones y gráficas

3.5.1.1. Actividad 1: Conceptos previos: variables, ejes de coordenadas, escala

Tras una breve introducción histórica en la que el profesor hará referencia a Descartes (de cuyo apellido en latín – Cartesius – proviene el nombre de ejes cartesianos o ejes de coordenadas), el profesor explicará los conceptos de variable, ejes de coordenadas y escala, haciendo uso de ejemplos significativos para los alumnos y con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*.

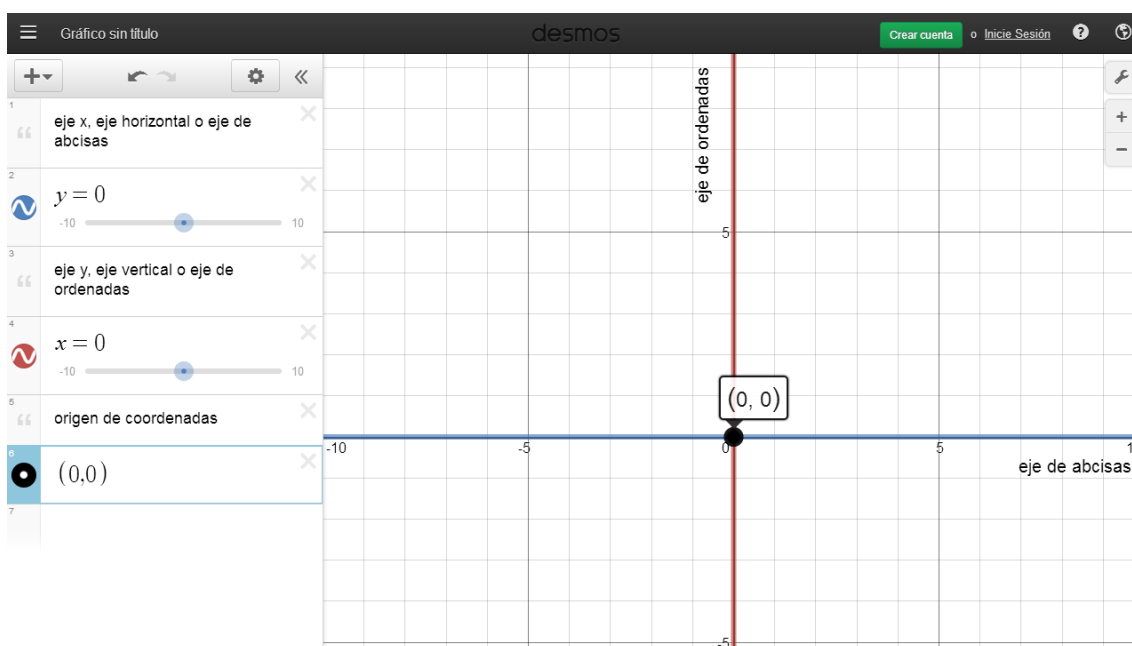


Figura 8. Ejes y origen de coordenadas

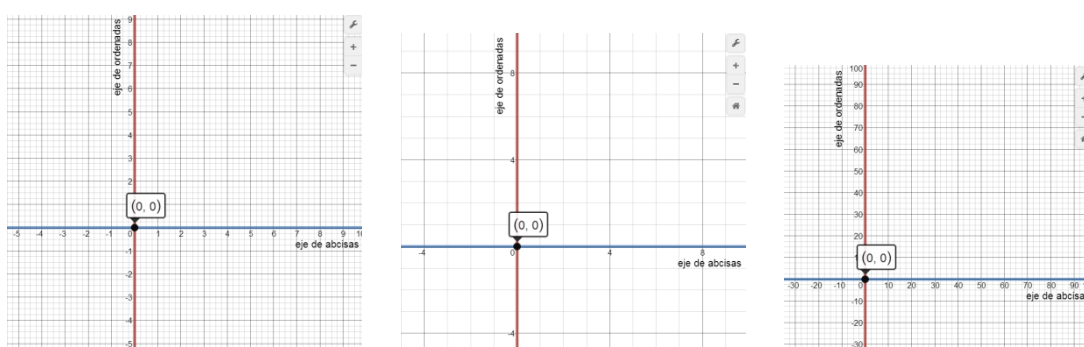


Figura 9. Ejemplos de distintas escalas

3.5.1.1.1. Ejercicio 1: Ejes cartesianos

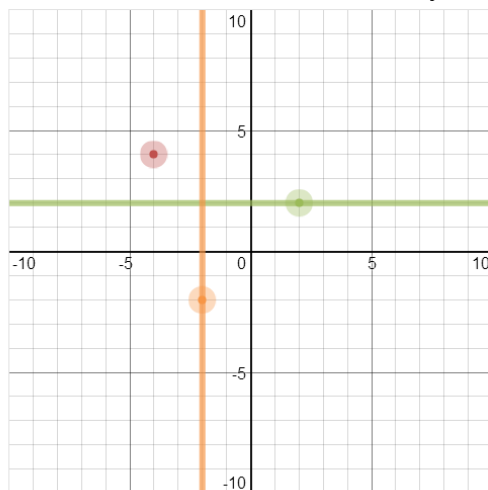
El profesor propondrá a los alumnos la realización del siguiente ejercicio haciendo uso de la calculadora gráfica online *Desmos*. Todos los ejercicios que se presentan se han creado desde el apartado denominado Classroom Activities, accesible a través de la

URL teacher.desmos.com. Para poder acceder tanto a éste como al resto de ejercicios aquí propuestos, el profesor proporcionará a los alumnos un código que deberán introducir en la URL student.desmos.com.

STUDENT SCREEN PREVIEW

< 1 of 8 >

Ejes cartesianos



¿Qué otros dos nombres recibe el eje horizontal?

Desplaza la recta verde hasta él

¿Qué otros dos nombres recibe el eje vertical?

Desplaza la recta naranja hasta él

Arrastra el punto rojo hasta el origen de coordenadas

Submit to Teacher

Figura 10. Ejercicio: ejes cartesianos

3.5.1.2. Actividad 2: ¿Qué es una función?

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*, el profesor presentará dos gráficas muy similares y debatirá con los alumnos cuál de ellas representa una función y por qué. Esta actividad inicial es muy importante para consolidar el concepto de función y ser capaz de distinguir, visualmente, la representación gráfica de una función, de otro tipo de representaciones gráficas, en apariencia, muy similares.

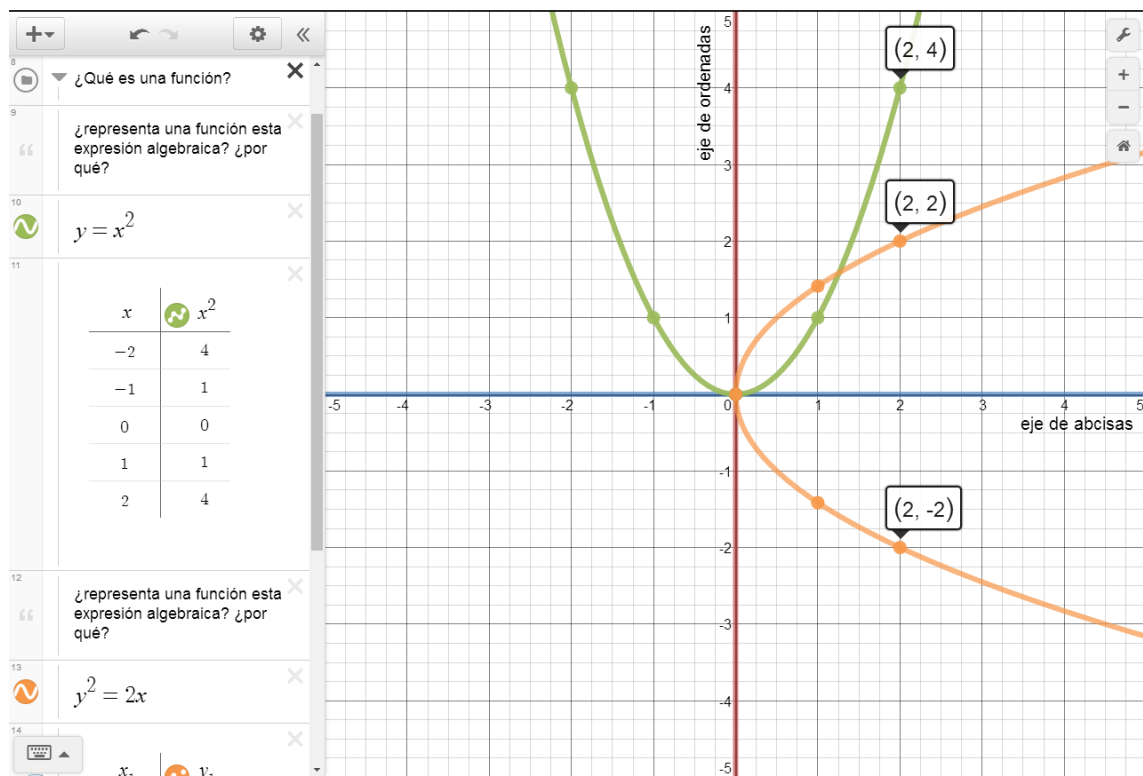


Figura 11. ¿Qué es función?

3.5.1.3. Actividad 3: Relación entre expresión algebraica, tabla de valores y representación gráfica

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*, el profesor mostrará las tres formas de representación de una función:

- Expresión algebraica
- Tabla de valores
- Representación gráfica

Y explicará las relaciones existentes entre ellas.

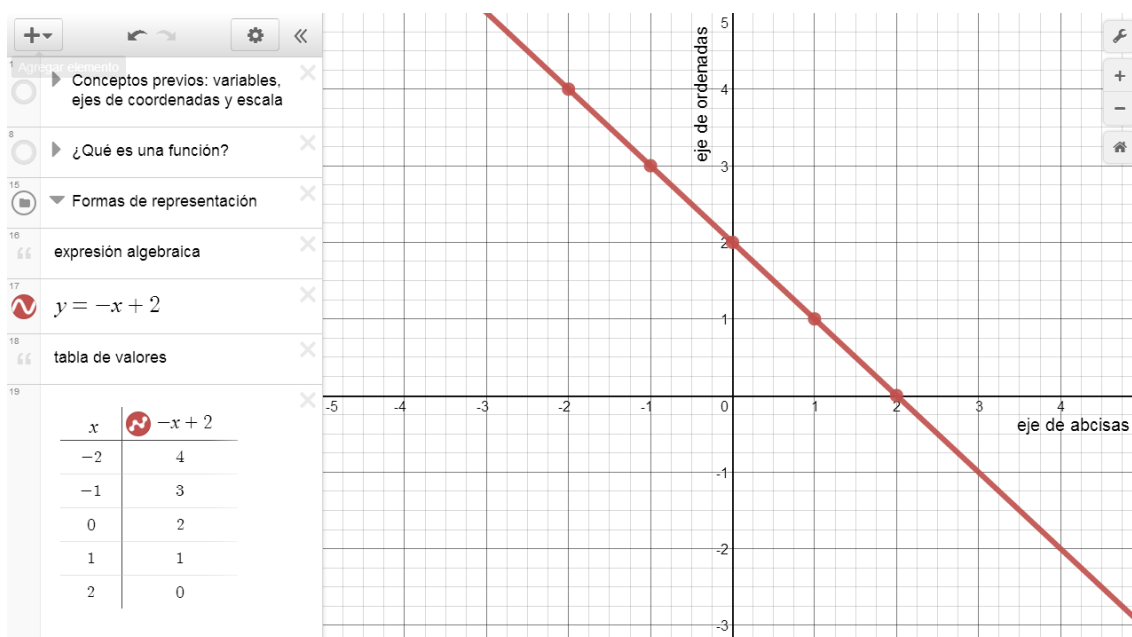


Figura 12. Representación gráfica de una función

3.5.1.4. Actividad 4: Algunas propiedades de las funciones: monotonía, curvatura

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*, el profesor mostrará a los alumnos ejemplos de funciones donde se aprecien algunas de las características principales de las mismas.

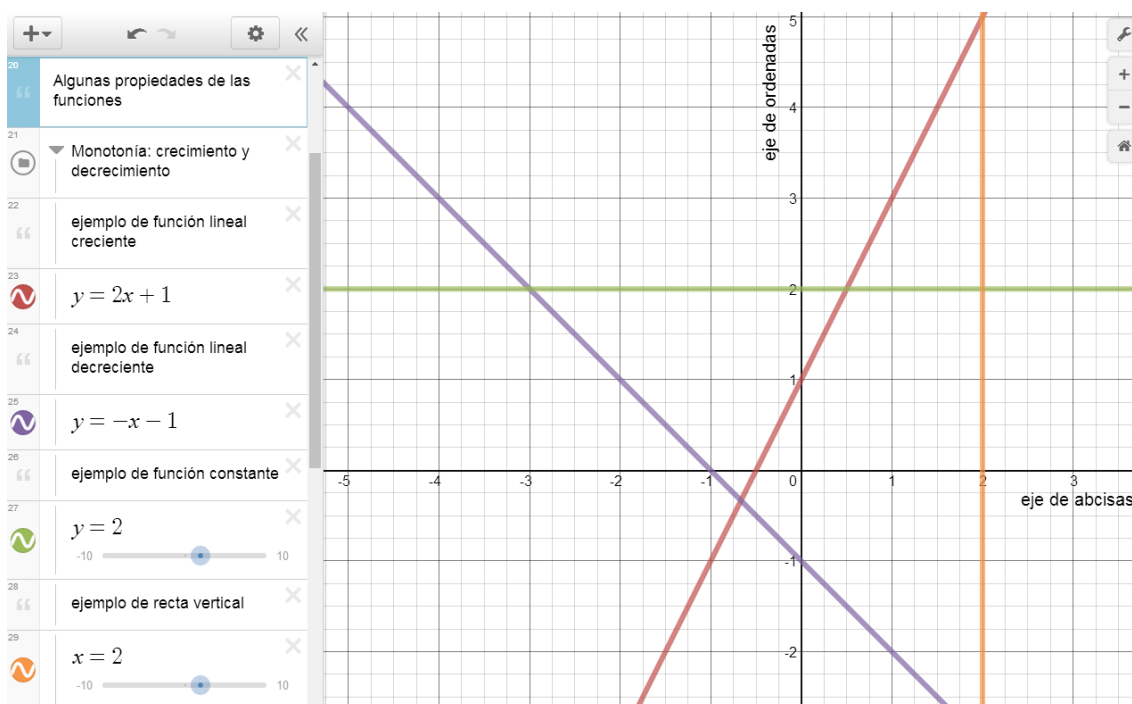


Figura 13. Monotonía: ejemplos de funciones lineales crecientes, decrecientes y constantes

Antes de pasar al siguiente ejemplo, nos detendremos en los casos de función constante y recta vertical que, pese a su aparente simplicidad, suelen provocar dificultades de aprendizaje a los alumnos.

Seguidamente, mostraremos a los alumnos un ejemplo de función con distintos intervalos de crecimiento y decrecimiento, enseñándoles a identificar y escribir tales intervalos.

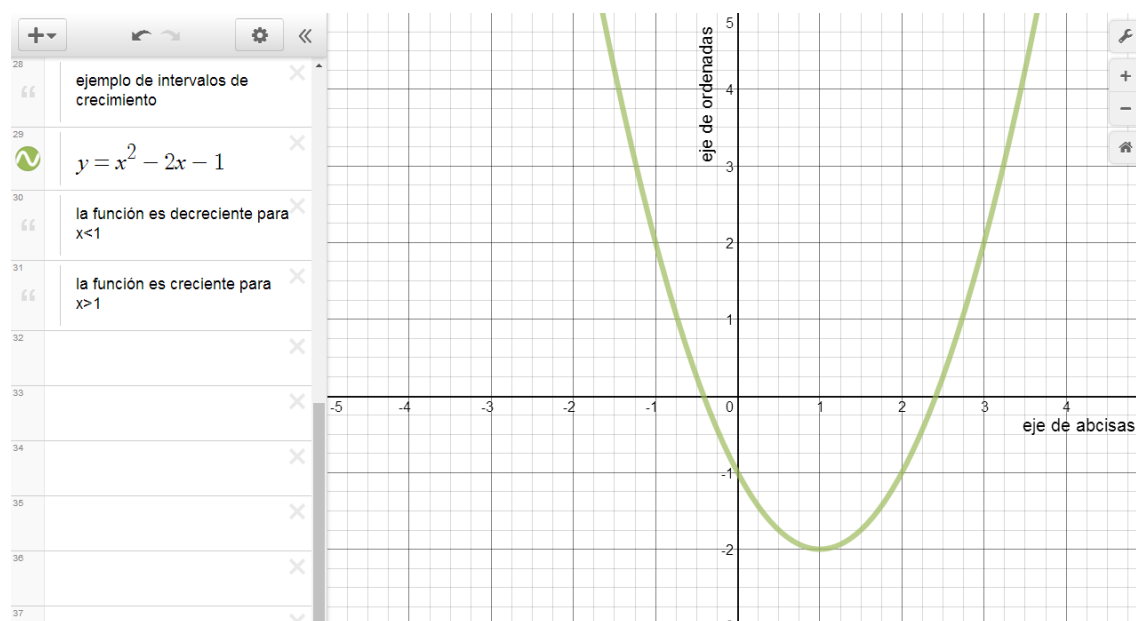


Figura 14. Ejemplos de intervalos de crecimiento y decrecimiento en funciones cuadráticas

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos* y apoyándose en la propiedad de crecimiento y decrecimiento que acabamos de ver, el profesor introducirá los conceptos de máximo y mínimo como puntos de una función donde ésta pasa de ser creciente a ser decreciente (máximo) o de ser decreciente a ser creciente (mínimo).

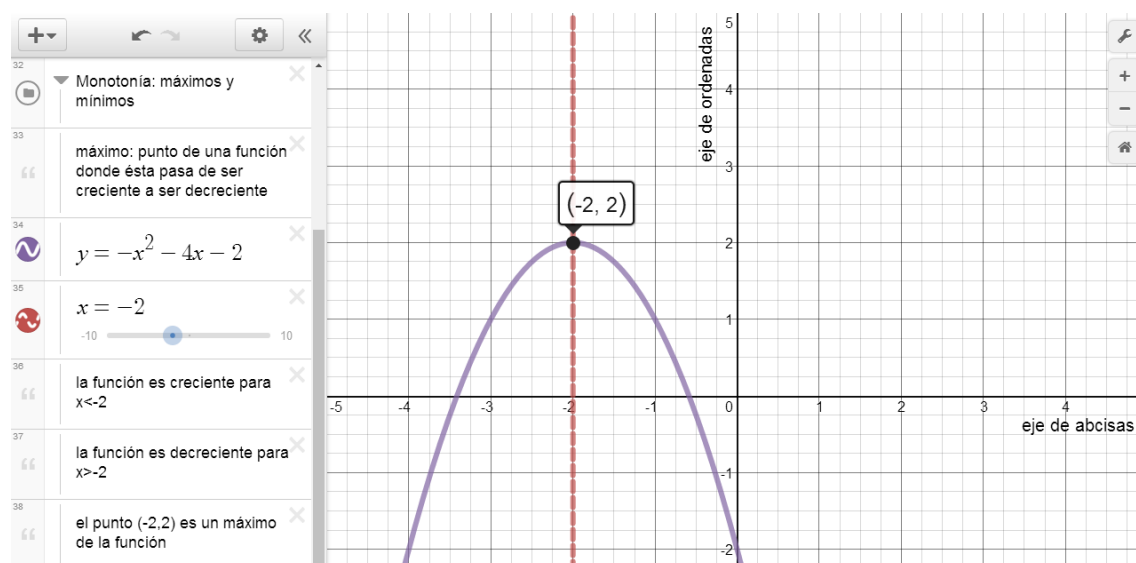


Figura 15. Monotonía: máximo

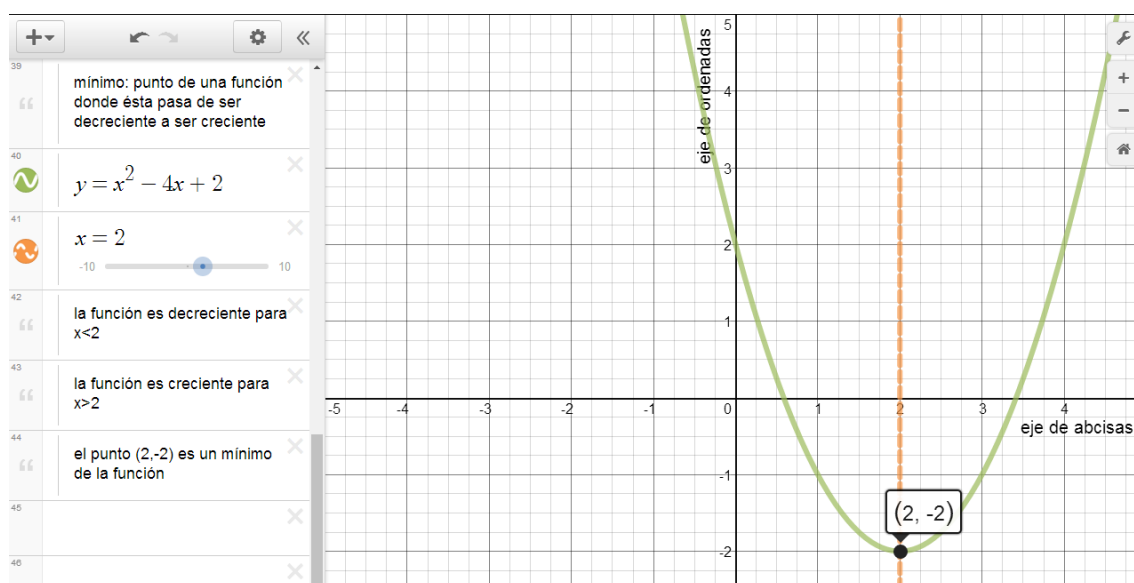


Figura 16. Monotonía: mínimo

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*, el profesor introducirá los conceptos de concavidad y convexidad, mediante ejemplos.

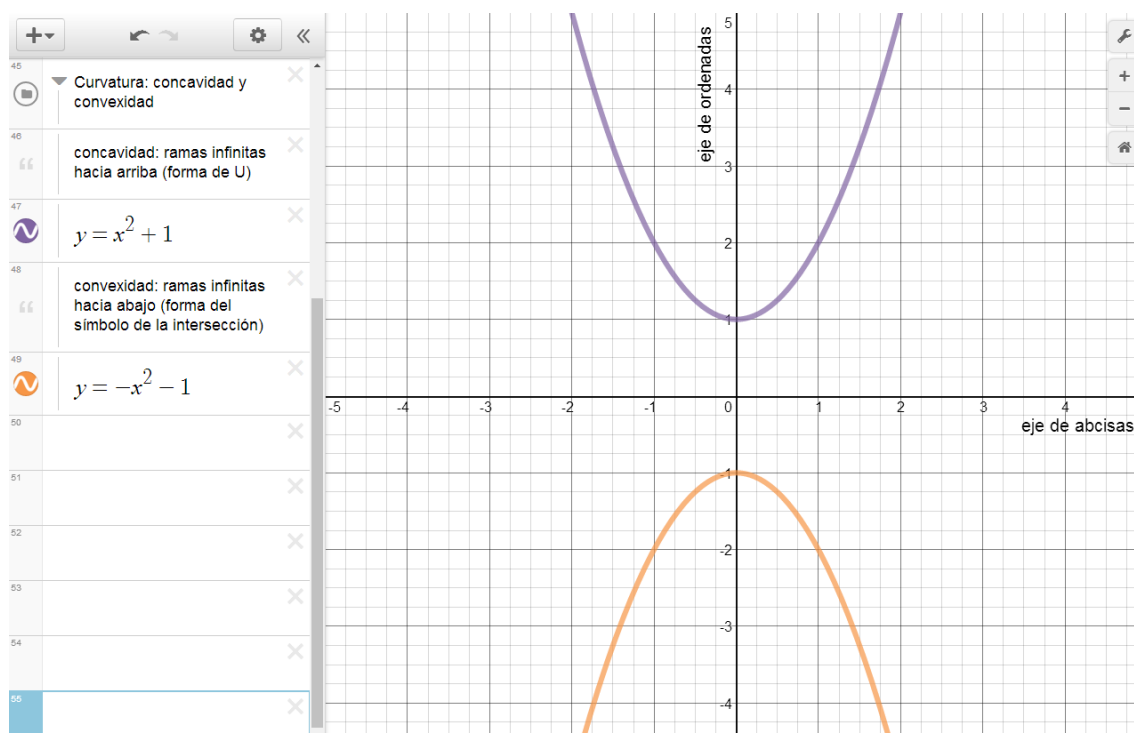


Figura 17. Curvatura: concavidad y convexidad

3.5.2. Sesión 2: Un caso particular de funciones: las funciones lineales (I)

3.5.2.1. Actividad 1: Expresión algebraica y representación gráfica de una función lineal

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*, el profesor presentará a los alumnos las funciones lineales como un caso particular de funciones cuya representación gráfica es una línea recta.

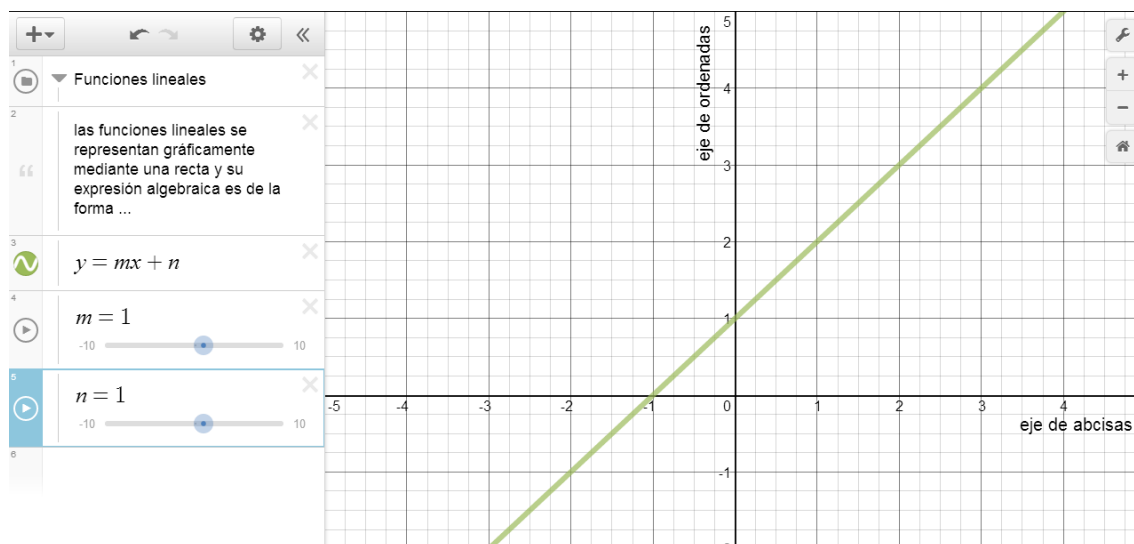


Figura 18. Expresión algebraica y representación gráfica de una función lineal

En el ejemplo aparece representada la recta $y=x+1$ puesto que los valores de m y n que aparecen a la izquierda son, en ambos casos, 1.

La calculadora *Desmos* denomina a estos valores *deslizadores*, pudiendo cambiar su valor, de forma manual, entre los extremos que fijemos (en el ejemplo, entre -10 y 10),

moviendo el punto  o automática, pulsando sobre el botón 

El profesor animará a los alumnos a que jueguen con estos *deslizadores* y comprueben cómo cambia la gráfica a medida que cambian los valores de m y n .

3.5.2.2. Actividad 2: Funciones de proporcionalidad: pendiente

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*, el profesor presentará a los alumnos las funciones de proporcionalidad como un caso particular de funciones lineales donde el valor de n , visto anteriormente, es 0, es decir, que la expresión algebraica es de la forma $y=mx$.

Se introducirá el concepto de pendiente de una recta. Para ello, se hará uso de la señal de tráfico que representa la pendiente o desnivel de una carretera, por ser éste un ejemplo bastante familiar para la mayoría de los alumnos.



Figura 19. Pendiente. Fuente:
<http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/>

También se explicará la relación entre el signo de la pendiente y el crecimiento o decrecimiento de la recta.

Por último, se hará notar una característica importante de este tipo de rectas, que es que todas ellas pasan por el origen de coordenadas (0,0).

Finalmente, se pedirá a los alumnos que experimenten a variar el valor de m y observar cómo cambian las gráficas obtenidas.

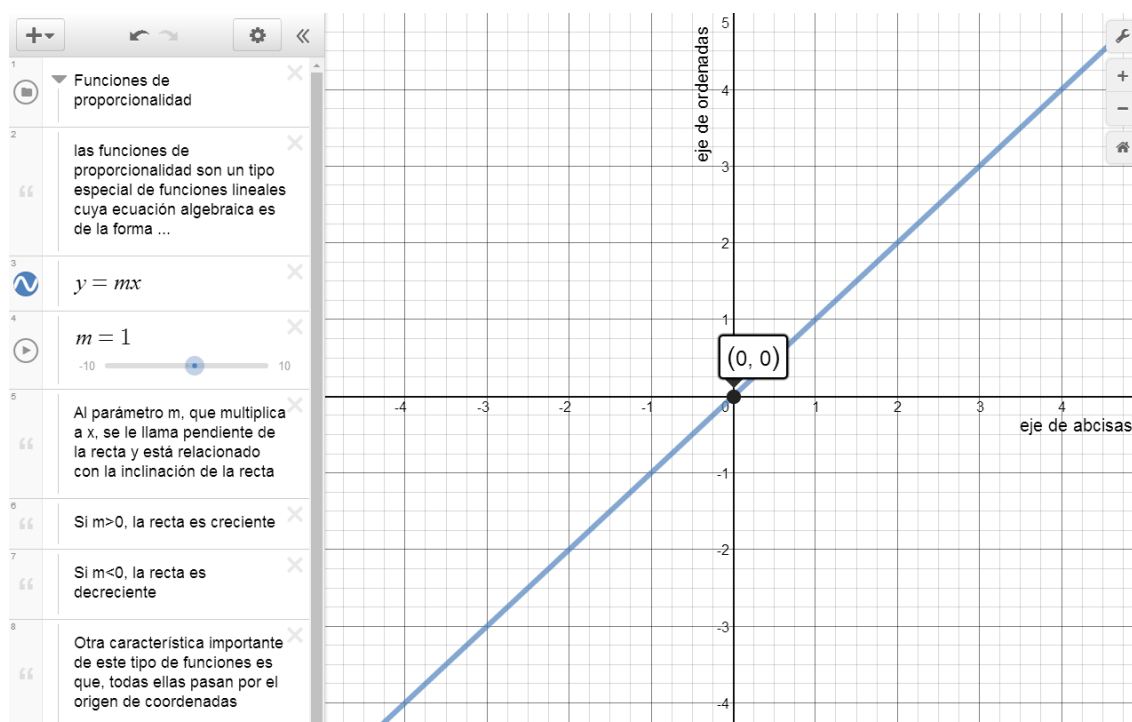


Figura 20. Funciones de proporcionalidad

3.5.2.2.1. Ejercicio 2: Funciones de proporcionalidad (I)

El profesor propondrá a los alumnos la realización del siguiente ejercicio haciendo uso de la calculadora gráfica online *Desmos*.

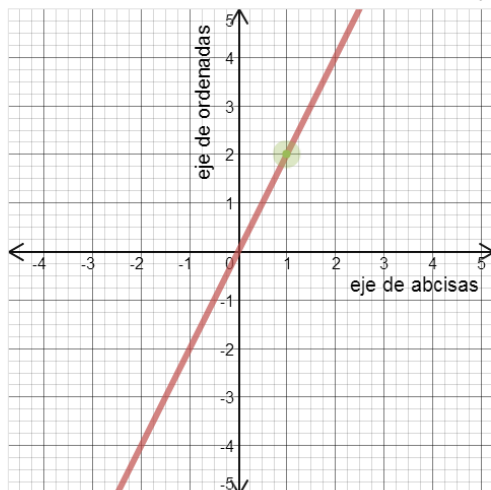
STUDENT SCREEN PREVIEW



2 of 8



Funciones de proporcionalidad (I)



¿Por qué punto pasan todas las funciones de proporcionalidad?

¿A qué llamamos pendiente de una recta?

¿Qué representa?

Desplaza el punto verde sobre el plano y observa cómo varían las rectas.

Submit to Teacher

Figura 21. Ejercicio: funciones de proporcionalidad (I)

3.5.2.2.2. Ejercicio 3: Funciones de proporcionalidad (II)

El profesor propondrá a los alumnos la realización del siguiente ejercicio haciendo uso de la calculadora gráfica online *Desmos*.

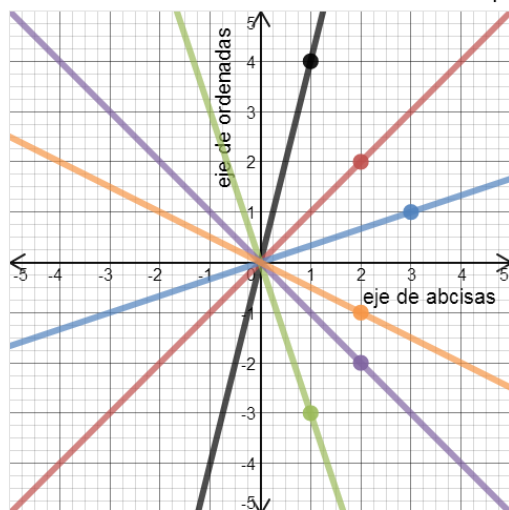
STUDENT SCREEN PREVIEW



3 of 8



Funciones de proporcionalidad (II)



Escribe las expresiones algebraicas de las funciones que aparecen en la gráfica de la izquierda, calculando previamente la pendiente de cada una de ellas con ayuda de los puntos indicados.

Submit to Teacher

Figura 22. Ejercicio: funciones de proporcionalidad (II)

3.5.3. Sesión 3: Un caso particular de funciones: las funciones lineales (II)

3.5.3.1. Actividad 1: Funciones afines: pendiente y ordenada en el origen

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*, el profesor presentará a los alumnos las funciones afines como un caso particular de funciones lineales cuya expresión algebraica es de la forma $y=mx+n$, donde m es la pendiente de la recta (como ya hemos visto) y n es la ordenada en el origen, es decir, el punto del eje de ordenadas (eje y) donde la recta corta a dicho eje.

Se pedirá a los alumnos que experimenten a variar los valores de m y n para visualizar cómo cambian las gráficas obtenidas.

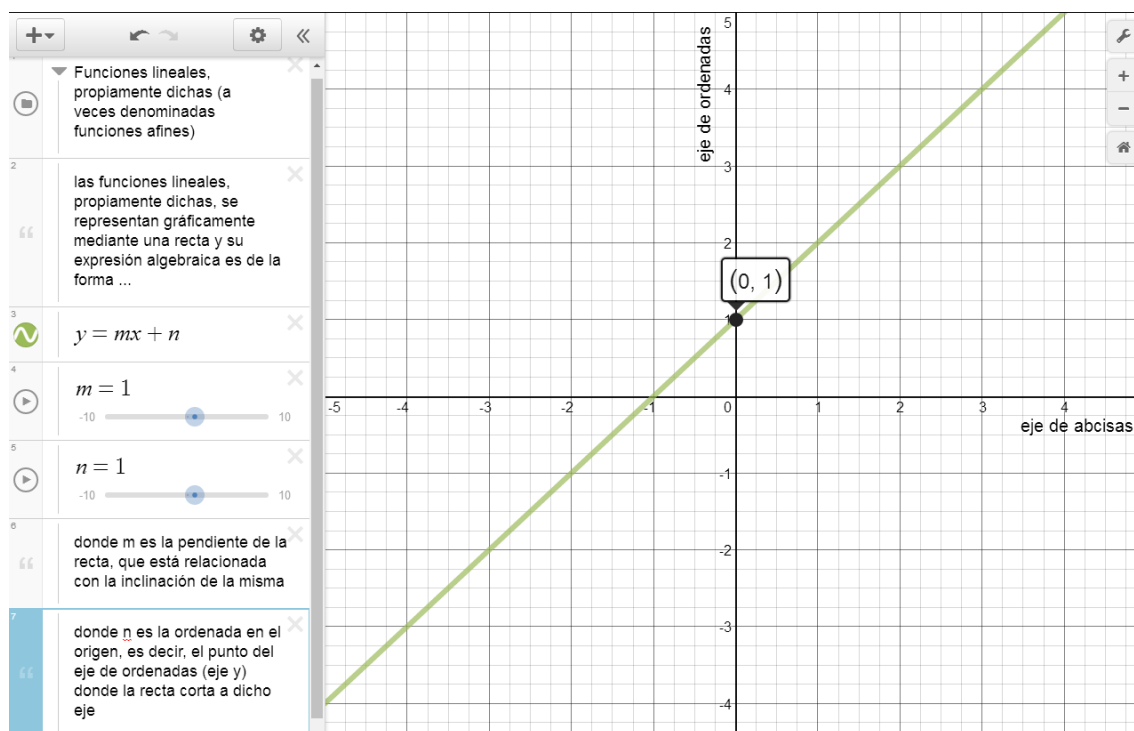
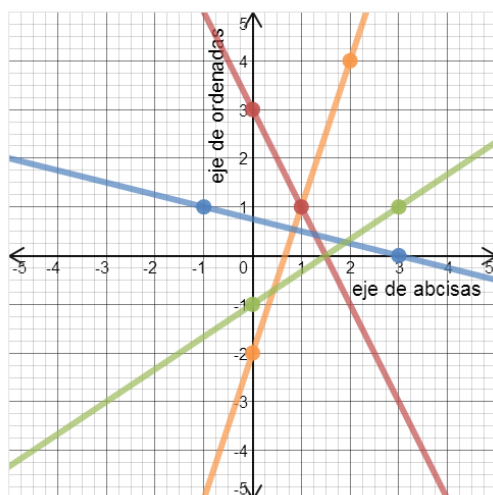


Figura 23. Funciones lineales: ordenada en el origen

3.5.3.1.1. Ejercicio 4: funciones lineales

El profesor propondrá a los alumnos la realización del siguiente ejercicio haciendo uso de la calculadora gráfica online *Desmos*.

Funciones lineales (I)



Halla la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones lineales.

Para el cálculo de la pendiente utiliza los puntos indicados en cada recta.

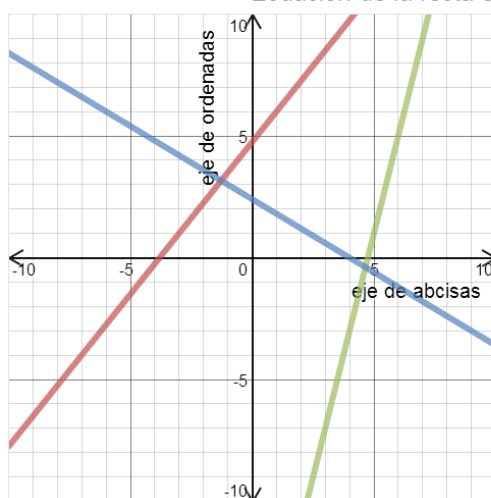
Submit to Teacher

Figura 24. Ejercicio: funciones lineales

3.5.3.1.2. Ejercicio 5: ecuación de la recta en forma punto-pendiente

El profesor propondrá a los alumnos la realización del siguiente ejercicio haciendo uso de la calculadora gráfica online *Desmos*.

Ecuación de la recta en forma punto-pendiente



Cuando conocemos la pendiente de una recta y un punto por el que pasa dicha recta, la mejor manera de obtener su expresión algebraica es la llamada ecuación punto-pendiente:

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

donde m es la pendiente y (x_0, y_0) son las coordenadas de un punto por el que pasa dicha recta.

Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m :

$P(4, -3)$, $m=4$
 $P(-3, 1)$, $m=5/4$
 $P(-1, 3)$, $m=-3/5$

¿A qué recta de la izquierda corresponde cada una de ellas?

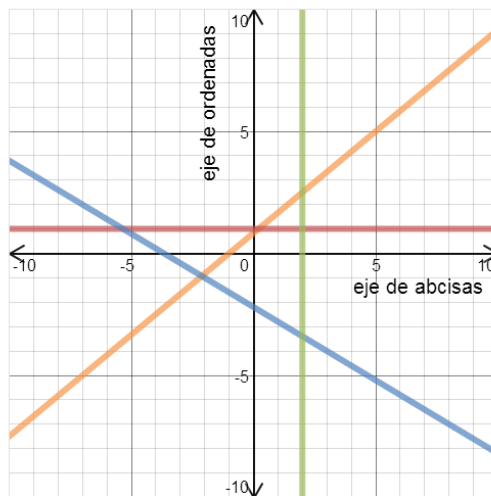
Submit to Teacher

Figura 25. Ejercicio: ecuación de la recta en forma punto-pendiente

3.5.3.1.3. Ejercicio 6: ecuación de la recta que pasa por dos puntos

El profesor propondrá a los alumnos la realización del siguiente ejercicio haciendo uso de la calculadora gráfica online *Desmos*.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos



Este caso puede reducirse al anterior, considerando lo siguiente:

Dados los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos se obtiene como

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Con lo que ya estaríamos en el caso anterior

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:

$P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$

$P(3, 1)$, $Q(-2, 1)$

$P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$

$P(2, -2)$, $Q(2, 5)$

Asocia cada una de ellas con las rectas que aparecen a la izquierda.

Submit to Teacher

Figura 26. Ejercicio: ecuación de la recta que pasa por dos puntos

3.5.3.2. Actividad 2: Funciones constantes

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*, el profesor presentará a los alumnos las funciones constantes como un caso particular de funciones lineales cuya expresión algebraica es de la forma $y=k$, donde k es un valor constante.

Todas ellas son rectas paralelas al eje de abscisas y su pendiente (m) vale 0 (no tienen inclinación).

Se invitará a los alumnos que prueben a dar distintos valores a n para ver cómo varían las gráficas obtenidas.

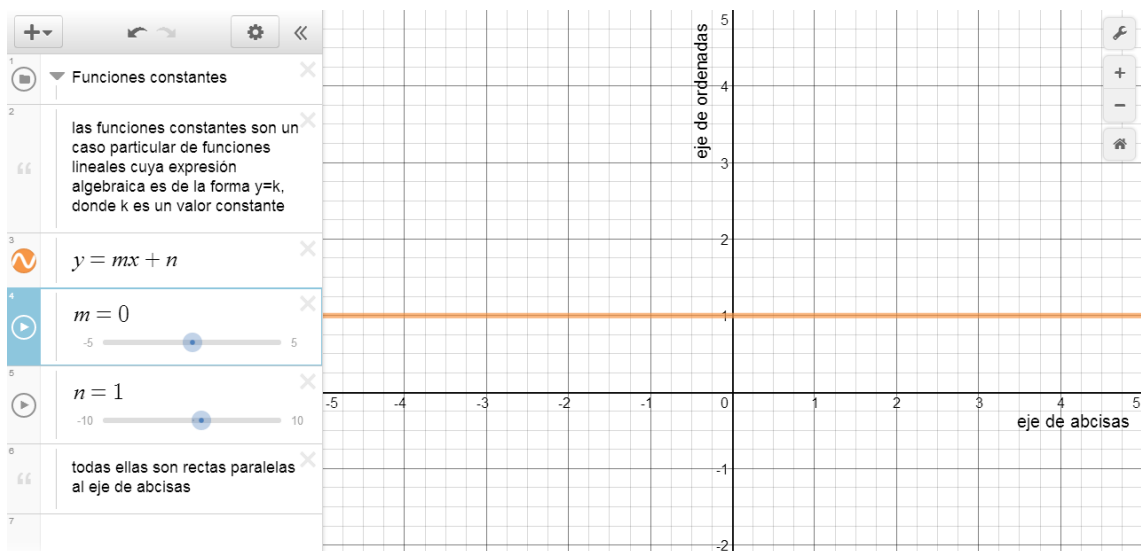


Figura 27. Funciones constantes

Para finalizar esta actividad, se mostrará otro ejemplo de funciones lineales un tanto especiales, las rectas verticales, cuya expresión algebraica es de la forma $x=k$ donde k es una valor constante. Este tipo de rectas son paralelas al eje de ordenadas.

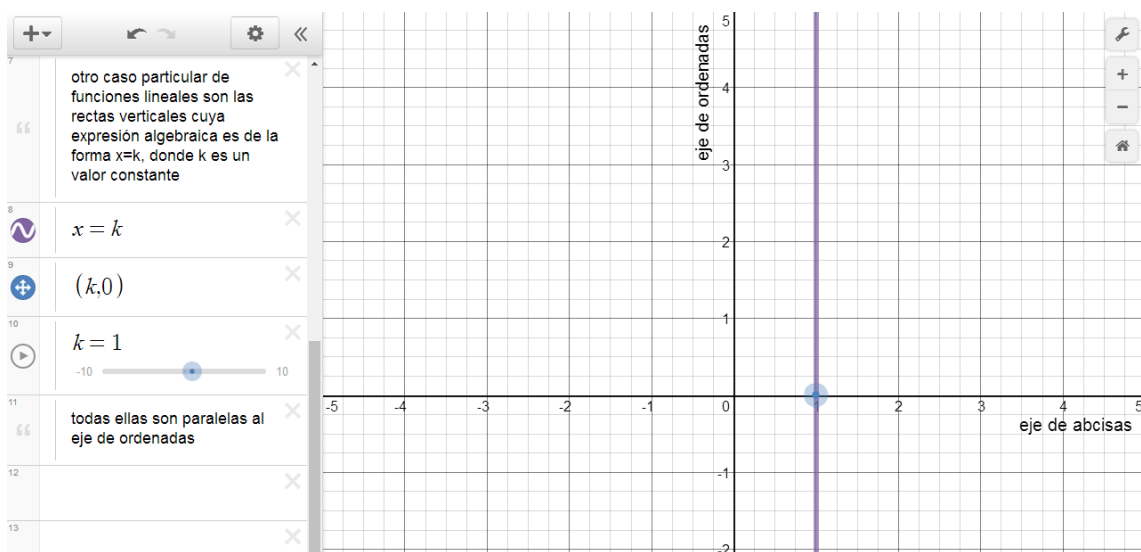


Figura 28. Rectas verticales

3.5.4. Sesión 4: Otro caso particular de funciones: las funciones cuadráticas

3.5.4.1. Actividad 1: La parábola como representación gráfica de una función cuadrática

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*, el profesor presentará a los alumnos las funciones cuadráticas como un caso particular de funciones cuya representación gráfica es una parábola y cuya expresión algebraica es de la forma $y=ax^2+bx+c$.

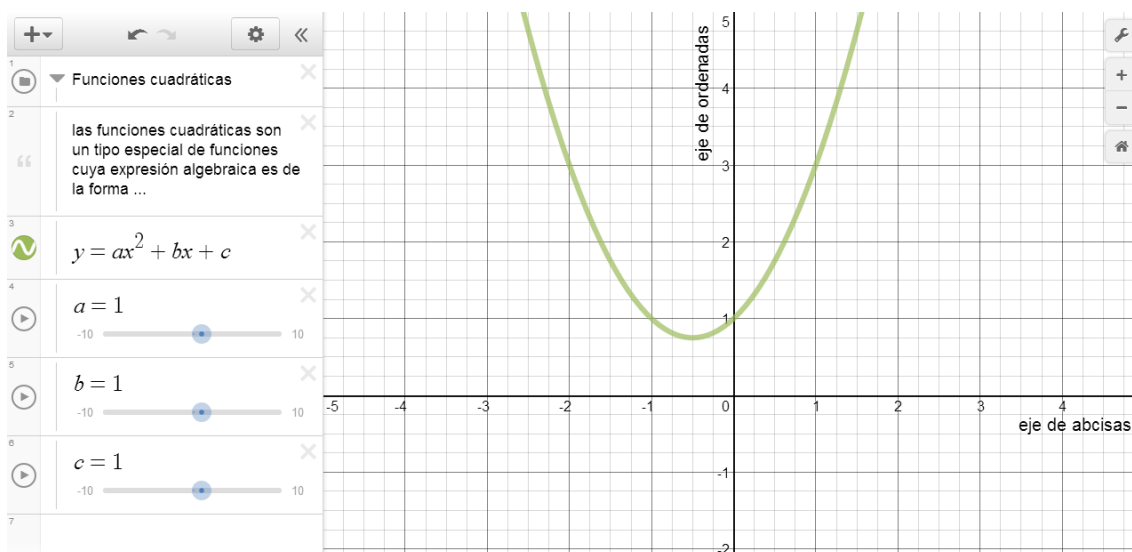


Figura 29. Expresión algebraica de una función cuadrática

3.5.4.2. Actividad 2: Propiedades de la parábola: vértice, curvatura

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos* y partiendo de la expresión algebraica de la función parabólica $y=ax^2+bx+c$, el profesor indicará a los alumnos qué es el vértice de la parábola y cómo se obtiene.

También se explicará el tipo de curvatura de la parábola en función del signo del parámetro a :

- si $a > 0$, la parábola es cóncava
- si $a < 0$, la parábola es convexa

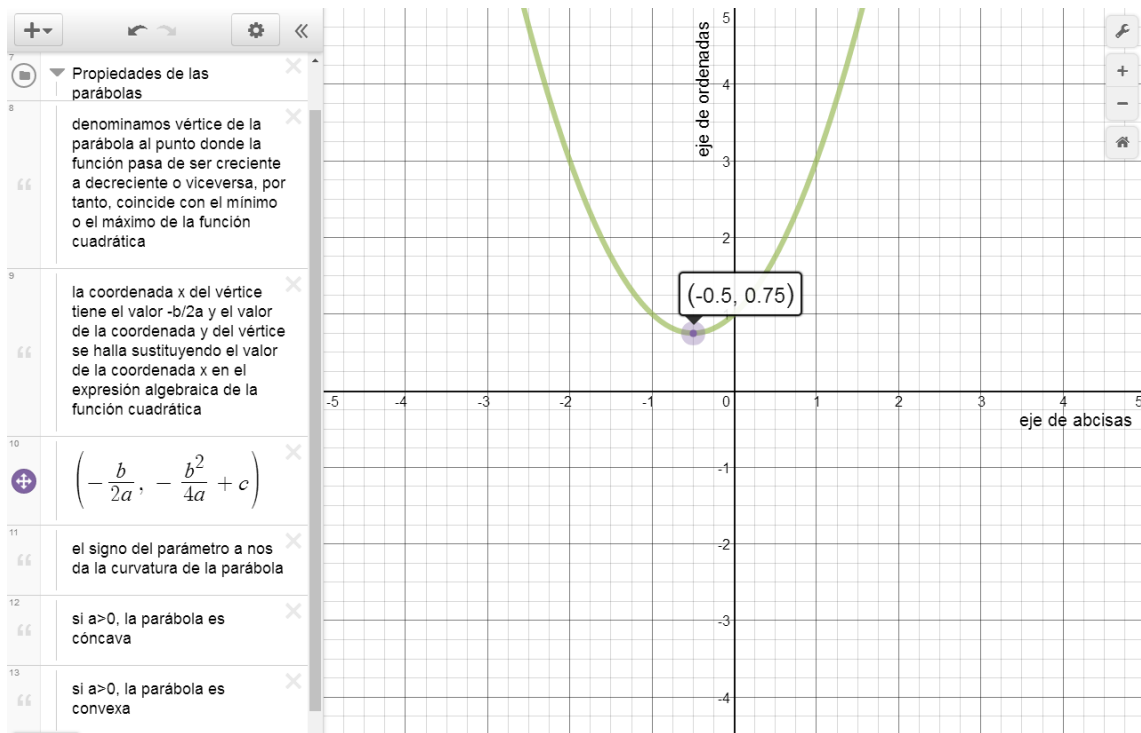
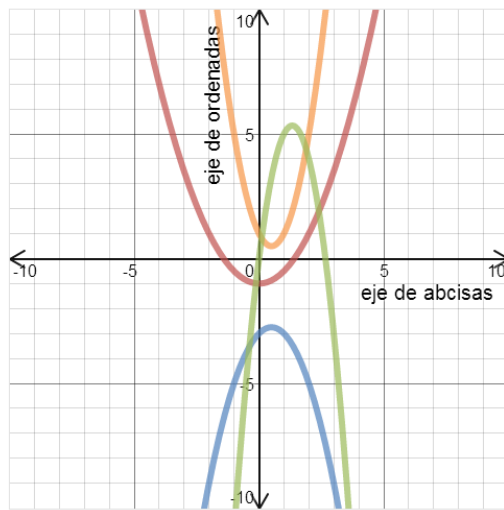


Figura 30. Propiedades de la función parabólica

3.5.4.2.1. Ejercicio 7: parábolas (I)

El profesor propondrá a los alumnos la realización del siguiente ejercicio haciendo uso de la calculadora gráfica online *Desmos*.

Funciones cuadráticas: parábolas (I)



La ecuación algebraica de una parábola es de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

El signo de a nos indica la curvatura de la parábola:

si $a > 0$, la parábola es cóncava (forma de U)

si $a < 0$, la parábola es convexa (forma del símbolo de la intersección)

Un punto importante de la parábola es el vértice que coincide con el máximo o el mínimo de la parábola según sea esta convexa o cóncava.

La coordenada x del vértice se puede obtener como

$$x = -\frac{b}{2a}$$

y sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola, obtendríamos la coordenada y del vértice.

Asocia las siguientes ecuaciones algebraicas con las gráficas de la izquierda y calcula el vértice de cada parábola:

$$y = 2x^2 - 2x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$$

$$y = -x^2 + x - 3$$

$$y = -3x^2 + 8x$$

Figura 31. Ejercicio: parábolas (I)

3.5.4.2.2. Ejercicio 8: parábolas (II)

El profesor propondrá a los alumnos la realización del siguiente ejercicio haciendo uso de la calculadora gráfica online *Desmos*.

Funciones cuadráticas: parábolas (II)

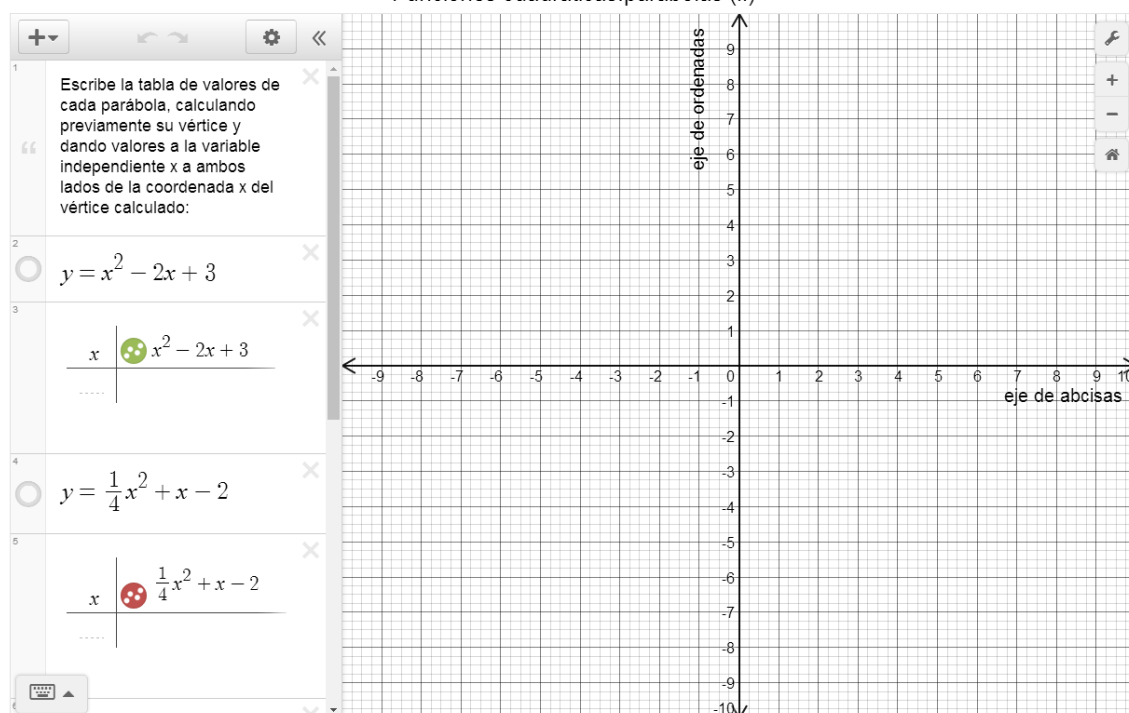


Figura 32. Ejercicio: parábolas (II)

3.5.5. Sesión 5: Aplicación de la representación de funciones a la resolución de sistemas de ecuaciones (I)

Con ayuda de la calculadora gráfica online *Desmos*, vamos a resolver gráficamente sistemas de ecuaciones.

3.5.5.1. Actividad 1: Dos ecuaciones lineales

En esta primera actividad trataremos el caso de un sistema de dos ecuaciones lineales. Cada una de las ecuaciones, por ser lineal, podrá representarse mediante una recta. La resolución del sistema será el punto de corte de ambas rectas. La coordenada x del punto de corte nos dará la solución de la incógnita x y la coordenada y del punto de corte nos dará la solución de la incógnita y .

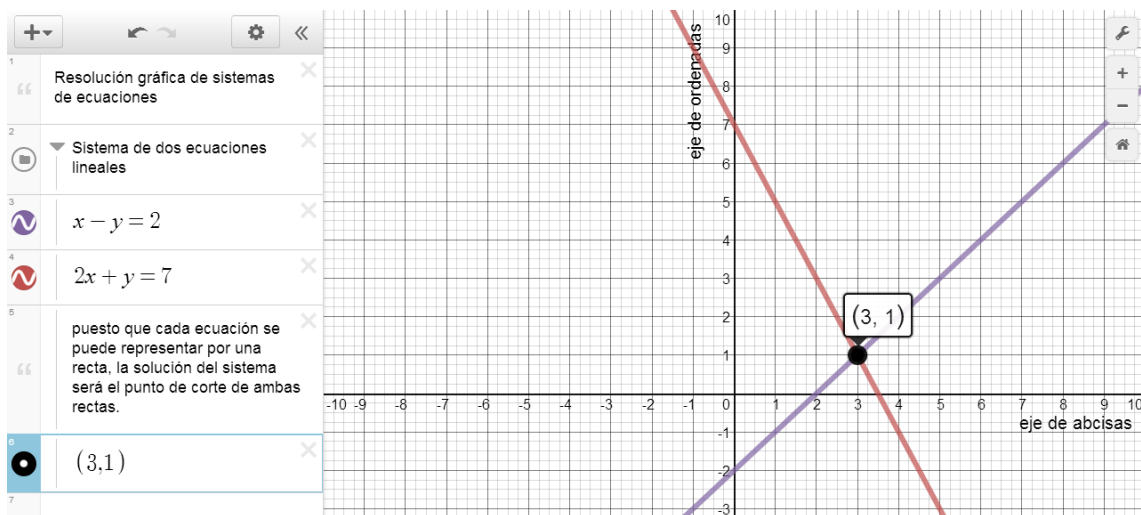


Figura 33. Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales

3.5.5.2. Actividad 2: Puntos de corte de una función lineal

Un caso particular de éste que acabamos de ver es la obtención de los puntos de corte de una recta con los ejes coordenados.

Para hallar el punto de corte con el eje x , el sistema que tenemos que resolver estará formado por la ecuación de la recta que nos den y por el eje x , cuya ecuación algebraica ya hemos visto que es $y=0$.

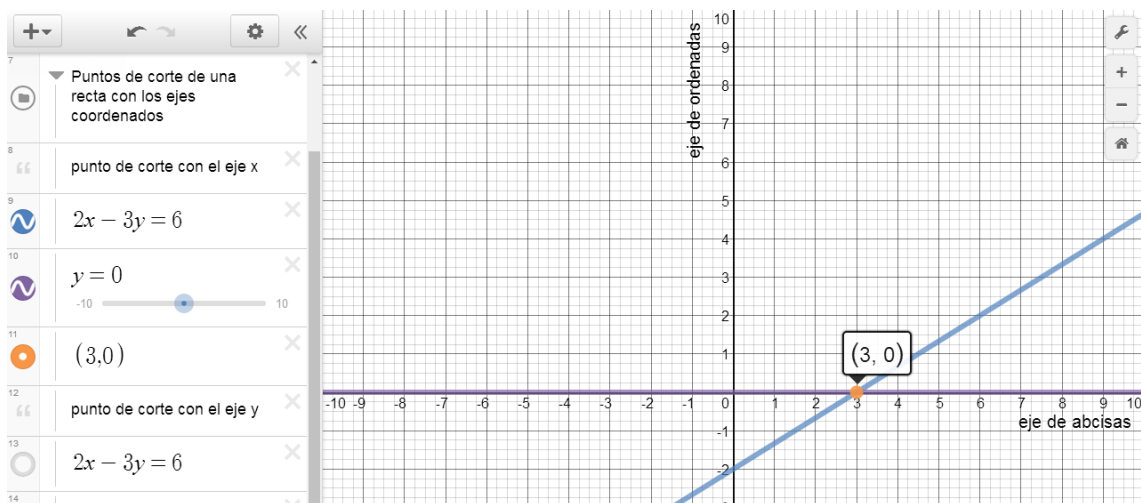


Figura 34. Punto de corte de una recta con el eje x

De la misma manera, para hallar el punto de corte con el eje y , el sistema que tenemos que resolver estará formado por la ecuación de la recta que nos den y por el eje y , cuya ecuación algebraica ya hemos visto que es $x=0$.

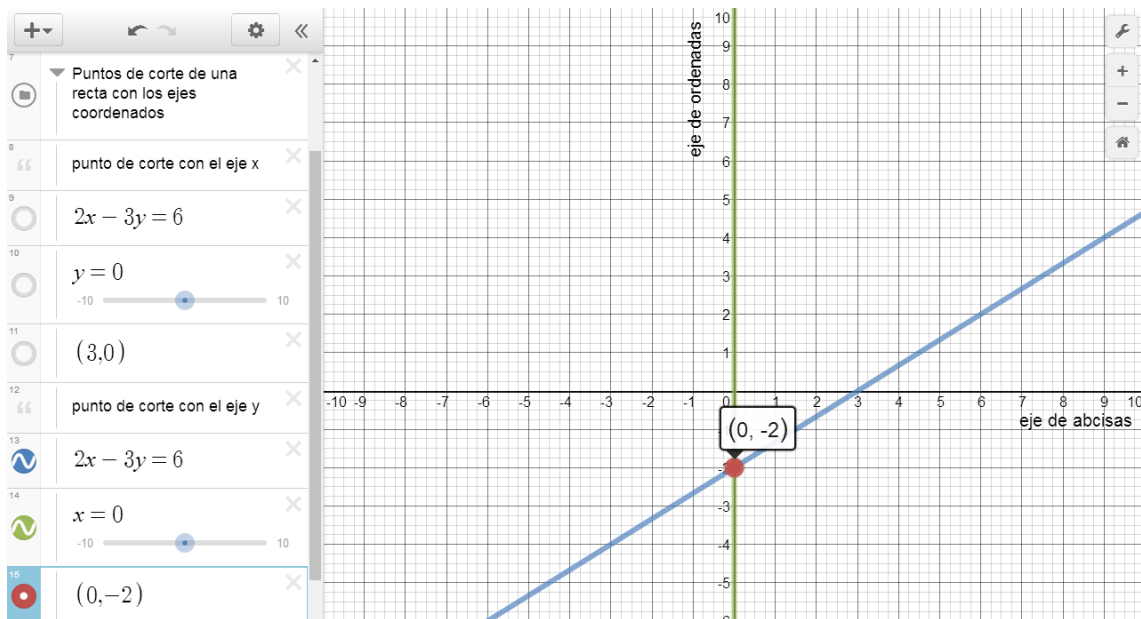


Figura 35. Punto de corte de una recta con el eje y

3.5.5.3. Actividad 3: Dos ecuaciones cuadráticas

En esta segunda actividad trataremos el caso de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas. Cada una de las ecuaciones, por ser cuadrática, podrá representarse mediante una parábola. La resolución del sistema será el (los) punto (s) de corte de ambas parábolas.

Aquí podremos encontrarnos con tres casos:

- Las parábolas no se cortan en ningún punto
- Las parábolas se cortan en un único punto
- Las parábolas se cortan en dos puntos

En el primer caso, cada ecuación del sistema se puede representar gráficamente mediante una parábola; el hecho de que las parábolas no se corten significa que el sistema formado por sus expresiones algebraicas no tiene solución.

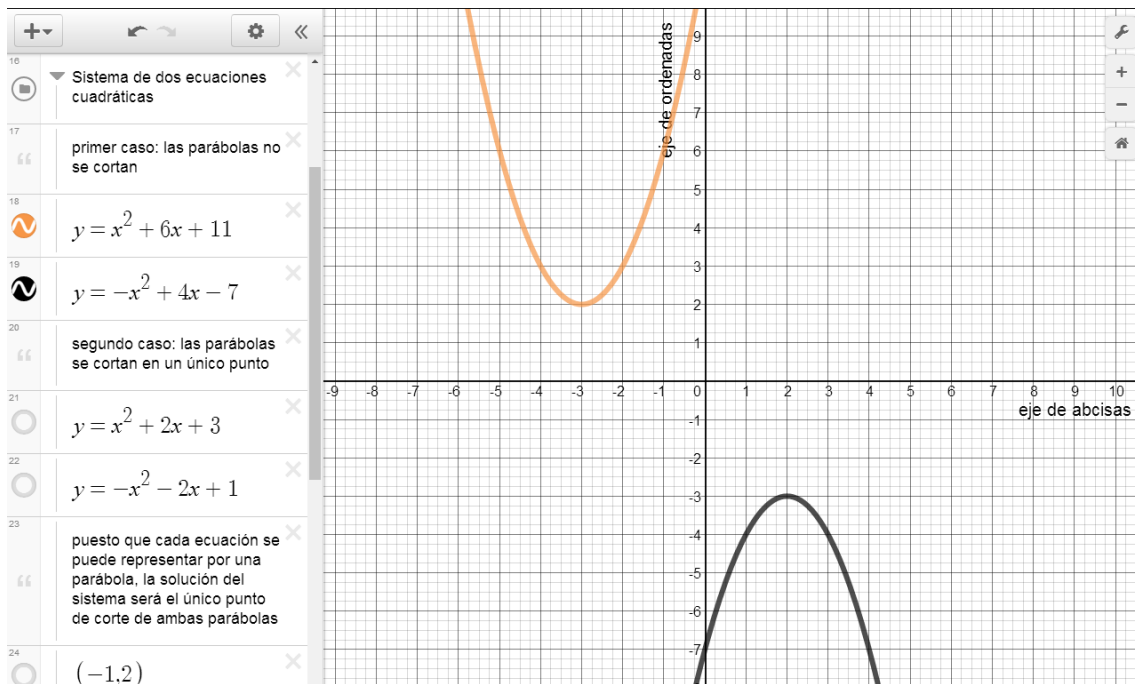


Figura 36. Dos parábolas que no se cortan

En el segundo caso, cada ecuación del sistema se puede representar gráficamente mediante una parábola; el único punto de corte de las parábolas es la solución del sistema. La coordenada x del punto de corte nos dará la solución de la incógnita x y la coordenada y del punto de corte nos dará la solución de la incógnita y .

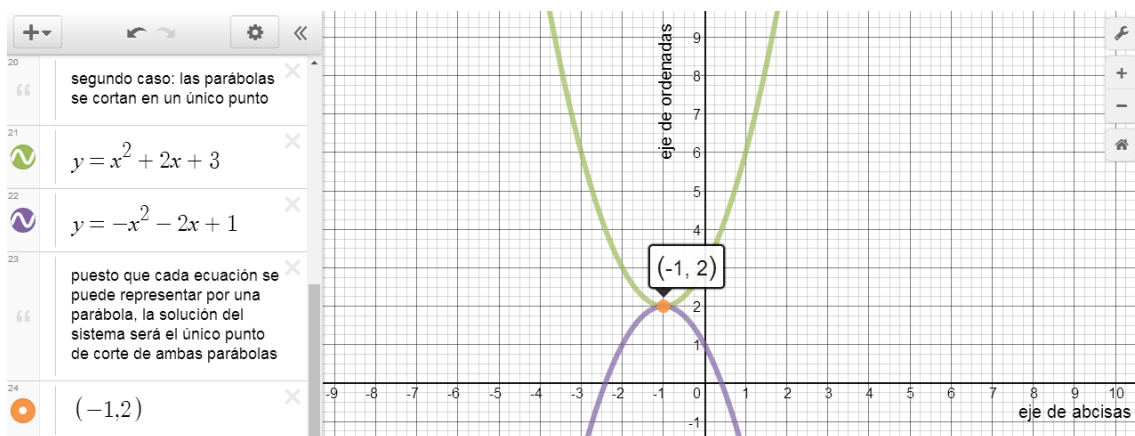


Figura 37. Dos parábolas que se cortan en un único punto

En el tercer caso, cada ecuación del sistema se puede representar gráficamente mediante una parábola; los puntos de corte de ambas parábolas son las soluciones del sistema. La coordenada x de cada punto de corte nos dará las soluciones de la incógnita x y las coordenadas y de cada punto de corte nos darán las soluciones de la incógnita y , respectivamente.

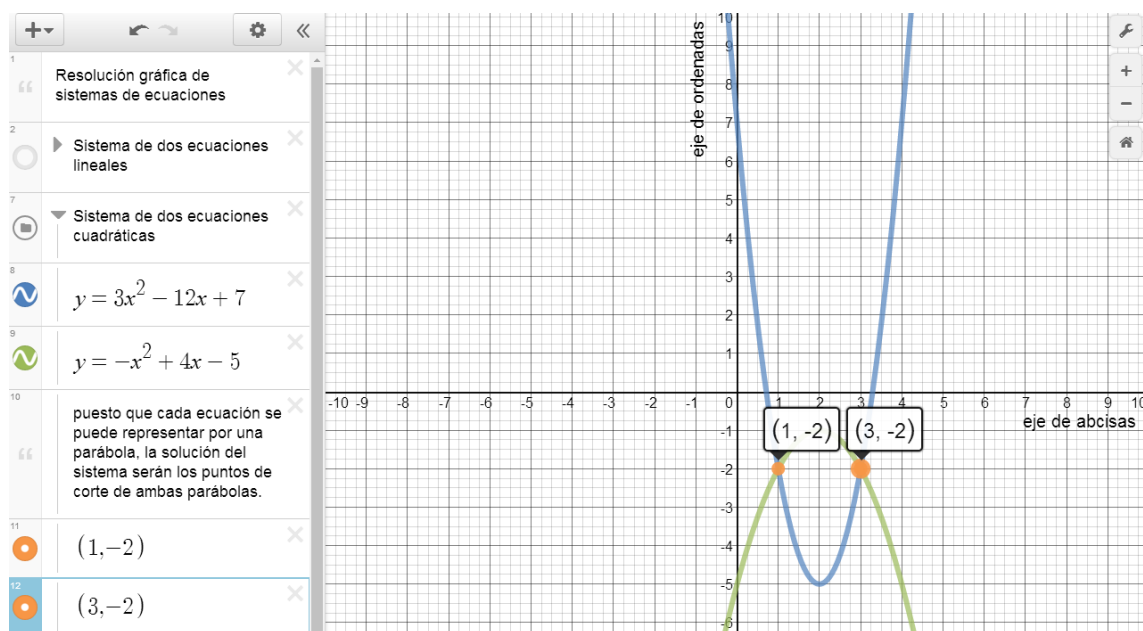


Figura 38. Dos parábolas que se cortan en dos puntos

3.5.6. Sesión 6: Aplicación de la representación de funciones a la resolución de sistemas de ecuaciones (II)

3.5.6.1. Actividad 1: Una ecuación lineal y una ecuación cuadrática

Como último ejemplo de aplicación de la representación de funciones a la resolución de sistemas de ecuaciones, nos quedaría por ver el caso de un sistema formado por una ecuación lineal y una función cuadrática.

Puesto que la función lineal se puede representar gráficamente por una recta y la función cuadrática por una parábola, las soluciones del sistema serán los puntos de corte de la recta y la parábola.

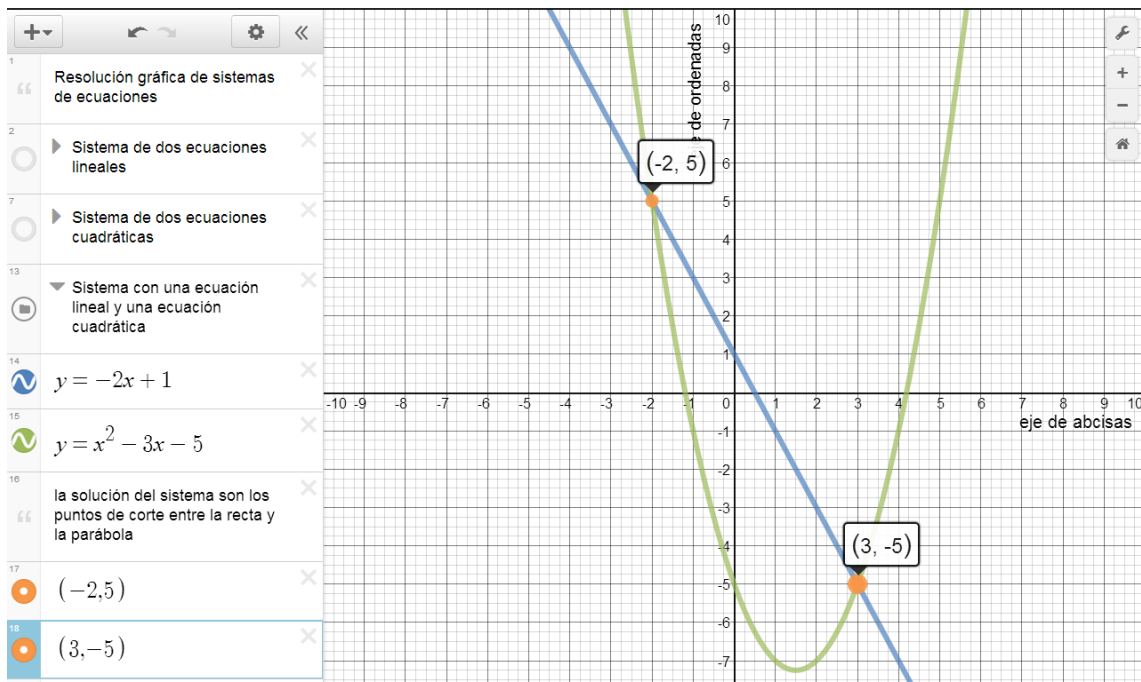


Figura 39. Puntos de corte de una recta y una parábola

3.5.6.2. Actividad 2: Resolución de una ecuación de segundo grado: interpretaciones

La resolución de ecuaciones de segundo grado puede verse como un caso particular del anterior donde la recta que forma el sistema es siempre el eje x , cuya expresión algebraica es $y=0$.

Como sabemos, se nos pueden presentar tres casos, a los que vamos a dar su correspondiente interpretación gráfica.

El primero de los casos correspondería a una ecuación de segundo grado que no tiene solución, lo cual ocurre cuando, en la conocida fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, el radicando es negativo.

En la interpretación gráfica de este caso podemos ver que no hay puntos de corte entre el eje x y la parábola.

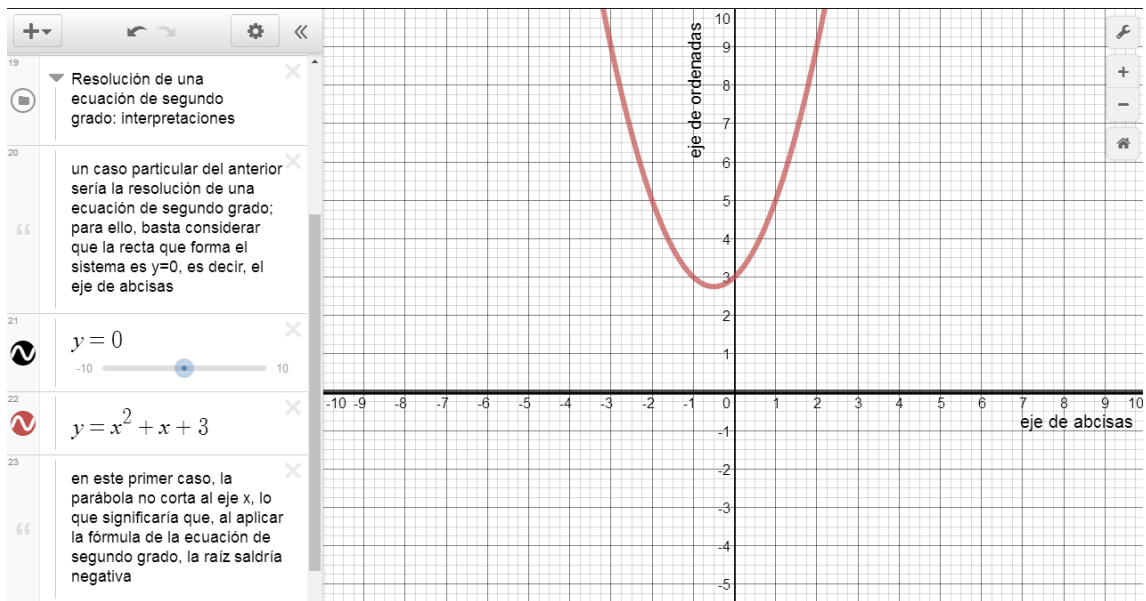


Figura 40. Ecuación de segundo grado sin solución

El segundo de los casos correspondería a una ecuación de segundo grado que tiene una única solución, lo cual ocurre cuando, en la conocida fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, el radicando es cero.

En la interpretación gráfica de este caso se puede ver que el eje x es tangente a la parábola, justo en su vértice, cuya coordenada x es la única solución de la ecuación de segundo grado.

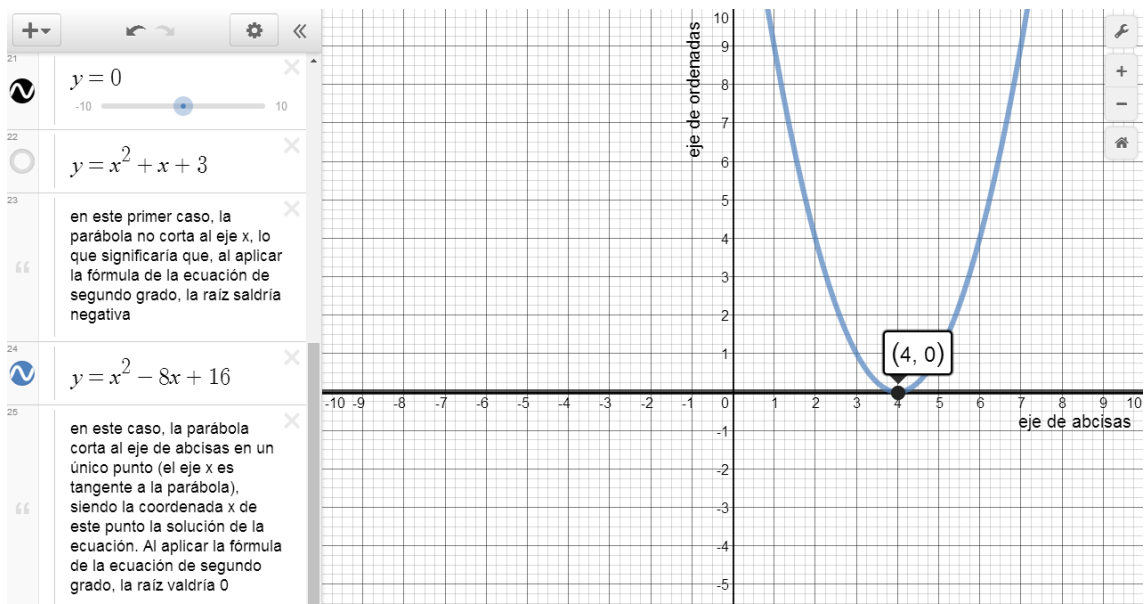


Figura 41. Ecuación de segundo grado con una única solución

El tercer caso correspondería a una ecuación de segundo grado con dos soluciones, una para cada signo que precede al radicando, lo cual ocurre cuando, en la conocida fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, el radicando es positivo.

En la interpretación gráfica de este caso se puede ver que el eje x corta a la parábola en dos puntos, cuyas coordenadas x son las soluciones de la ecuación de segundo grado.

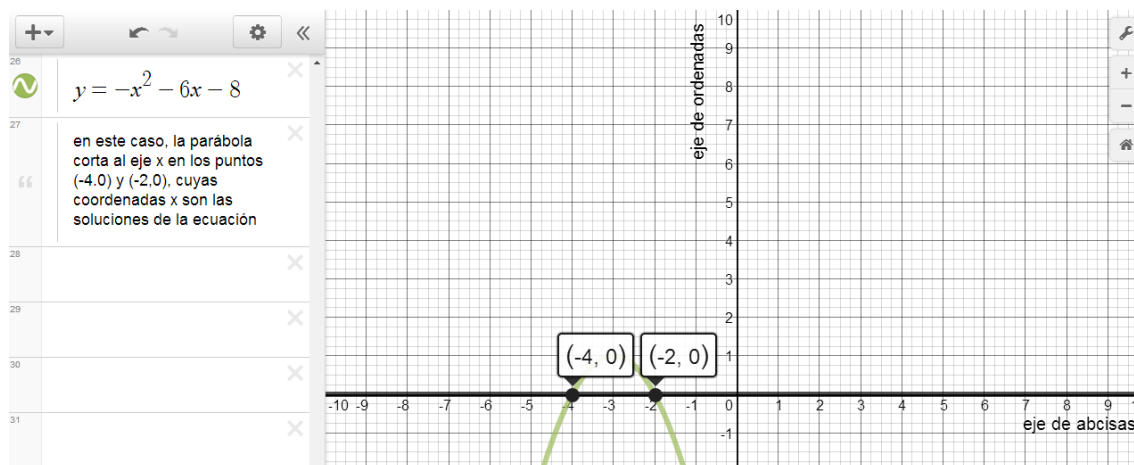


Figura 42. Ecuación de segundo grado con dos soluciones

3.5.7. Sesión 7: Realización del examen

Los alumnos dispondrán de 55 minutos para la realización del examen utilizando, para ello, la propia calculadora gráfica online *Desmos*.

Esto requerirá que, cada alumno, disponga de un dispositivo con conexión a internet para poder conectarse a student.desmos.com.

Una vez conectado, deberá introducir un código que le facilitará el profesor e identificarse con su nombre.

El profesor podrá hacer un seguimiento online de la evolución del examen.

3.5.8. Sesión 8: Corrección del examen y entrega de calificaciones

En esta última sesión, el profesor entregará los exámenes corregidos y resolverá los ejercicios en clase para que los alumnos puedan conocer sus fallos y sus aciertos; así mismo, atenderá todas las dudas que le formulen los alumnos en relación con la corrección de los ejercicios y con la calificación obtenida por cada uno de ellos.

Los resultados de los exámenes quedarán grabados en la propia herramienta.

Finalmente, el profesor analizará, conjuntamente con los alumnos, los resultados obtenidos para sacar conclusiones que permitan mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje llevado a cabo.

3.6. Criterios de evaluación

Llegados a este punto, debemos considerar dos aspectos a evaluar: por un lado, la idoneidad de la propuesta didáctica presentada, en el sentido de comprobar si es capaz de satisfacer los objetivos marcados; por otro lado, las competencias adquiridas por los alumnos receptores de la propuesta de intervención.

Para el primer caso, podrían seguirse dos criterios de evaluación de la propuesta:

- Pasar un cuestionario a los alumnos en el que se les pida que valoren los objetivos que se pretenden alcanzar con la propuesta de intervención, en relación con el uso de la calculadora gráfica online *Desmos*. Ver Anexo II.
- Comparar los resultados académicos obtenidos por un grupo de alumnos que han seguido una metodología tradicional, con aquéllos que han seguido la metodología aquí propuesta.

Para el segundo caso, la rúbrica de evaluación que aplicaríamos a cada alumno sería la siguiente:

Tabla 14. Rúbrica de evaluación

	4	3	2	1
Maneja los ejes de coordenadas, siendo capaz de ubicar en ellos cualquier punto.	Domina los ejes coordenados y posiciona en ellos cualquier punto.	Conoce los ejes de coordenadas pero, a veces, se equivoca al posicionar puntos, sobre todo cuando alguna coordenada es negativa.	Confunde, a veces, el eje horizontal con el eje vertical, no ubicando correctamente los puntos que se le indican.	No entiende los ejes coordenados y no sabe ubicar puntos en ellos.
Comprende el concepto de función y distingue las funciones por su representación gráfica.	Domina el concepto de función y es capaz de discernir entre la representación gráfica de una función y otros tipos de representaciones.	Comprende el concepto de función dada su representación gráfica pero duda en algunas expresiones algebraicas.	Comprende el concepto de función sólo en casos sencillos (rectas).	No entiende el concepto de función ni lo asocia con su representación gráfica.
Conoce las tres	Domina las tres	Reconoce las	Sólo maneja con	No es capaz de

formas de representación: algebraica, gráfica y tabla de valores.	formas de representación pasando sin dificultad de una a otra.	tres formas de representación pero le cuesta pasar de una a otra y ver sus relaciones.	soltura la tabla de valores.	reconocer la relación entre las tres formas de representación.
Reconoce algunas propiedades de las funciones: monotonía, curvatura.	Identifica con seguridad cuando una función es creciente, decreciente, cóncava o convexa y sabe relacionarlo con los coeficientes de la expresión algebraica.	Identifica las propiedades sobre la representación gráfica pero no sobre la expresión algebraica.	Identifica cuando una función es creciente o decreciente pero confunde la curvatura.	Confunde el crecimiento con la curvatura.
Reconoce una función lineal por su expresión algebraica y por su representación gráfica sabiendo obtener e interpretar la pendiente y la ordenada en el origen.	Domina las funciones lineales sabiendo obtener e interpretar sus parámetros característicos.	Reconoce las funciones lineales pero, a veces, no es capaz de hallar sus parámetros característicos.	No es capaz de relacionar la expresión algebraica de una función lineal con su representación gráfica.	No es capaz de reconocer una función lineal.
Reconoce una función cuadrática por su expresión algebraica y por su representación gráfica sabiendo obtener e interpretar el vértice de la parábola y obtener su tabla de valores.	Domina las funciones cuadráticas sabiendo obtener e interpretar sus parámetros característicos y siendo capaz de pasar de un medio de representación a otro.	Reconoce las funciones cuadráticas pero, a veces, no es capaz de hallar sus parámetros característicos.	No es capaz de relacionar la expresión algebraica de una función cuadrática con su representación gráfica.	No es capaz de reconocer una función cuadrática.
Aplica la representación de funciones a la resolución de sistemas de ecuaciones.	Resuelve problemas de sistemas de ecuaciones mediante la representación gráfica de los	Resuelve problemas de sistemas de ecuaciones gráficamente aunque, a veces, no es	No entiende la relación entre la solución obtenida algebraicamente y la solución obtenida	No sabe resolver sistemas de ecuaciones ni algebraica ni gráficamente.

	mismos, interpretando correctamente la solución obtenida.	capaz de interpretar el resultado obtenido.	gráficamente.	
--	---	---	---------------	--

Por lo que respecta a la calificación de los alumnos, se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

- Actitud e interés mostrados en el aula, valorando positivamente el hecho de mostrar una actitud crítica y reflexiva así como interés por profundizar en las posibilidades que ofrece la herramienta.
- Resolución de ejercicios propuestos, valorando positivamente un manejo fluido de la herramienta.
- Examen final de la unidad, a realizar con la propia herramienta. En el Anexo I del presente documento aparece un ejemplo de examen a realizar.

Los porcentajes de calificación de estos aspectos quedan recogidos en la siguiente tabla:

Tabla 15. Porcentajes de calificación

Aspectos a evaluar		Porcentaje
Evaluación continua	Actitud e interés	10 %
	Resolución de ejercicios propuestos	30 %
Examen final de la unidad		60 %

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las nuevas tecnologías forman parte de nuestra vida cotidiana y la escuela no es ajena a ello. Nuestros alumnos forman parte de una generación digital que está acostumbrada a convivir con todo tipo de dispositivos informáticos y de comunicación.

Desde la escuela, tenemos que aprovechar esta disposición favorable de nuestros alumnos para, ayudados de las TIC, favorecer su proceso de enseñanza-aprendizaje haciendo que éste sea lo más significativo posible, se adapte al ritmo de cada alumno y les resulte motivador.

En esta línea, herramientas como la calculadora gráfica online *Desmos* vienen a facilitar al docente dicha tarea, permitiendo presentar a los alumnos, de una forma amena e intuitiva, conceptos un tanto abstractos y, aparentemente, alejados de lo cotidiano.

Bien es verdad que, para conseguir estos objetivos, los docentes debemos cambiar un poco la metodología seguida hasta ahora y formarnos en el manejo de nuevas herramientas como *Desmos* que, a la larga, nos harán ganar tiempo, rigor y claridad en el aula permitiéndonos, adicionalmente, dar más protagonismo a nuestros alumnos, los cuales podrán experimentar por ellos mismos los conocimientos expuestos por el profesor fomentando, de este modo, su creatividad y su talento.

Para ello, las escuelas deben estar dotadas de ciertos recursos, tanto materiales (acceso a internet, ordenadores personales, proyectores o pizarras digitales interactivas) como humanos (docentes formados en estas nuevas herramientas, motivados para aprovechar todo su potencial), que permitan llevar a cabo estos cambios metodológicos. Somos conscientes que esta adaptación metodológica generará cierta resistencia por parte de algunos docentes, a los que habrá que ayudar a través de una adecuada formación, así como mostrándoles los resultados positivos obtenidos.

La propuesta objeto del presente documento podría considerarse como un punto de partida desde el cual explorar nuevas posibilidades que ofrece la herramienta, con objeto de hacer extensible su uso en niveles educativos superiores.

Como se ha indicado al hablar de los criterios de evaluación, el éxito o el fracaso en la consecución de los objetivos marcados sólo será posible comparando los resultados obtenidos por grupos de alumnos que hayan seguido la metodología tradicional con otros grupos que hayan seguido la metodología presentada en el presente trabajo.

Independientemente de estos resultados, los objetivos que se consiguen con el uso de este tipo de herramientas son:

- Rigor en las exposiciones teóricas
- Claridad expositiva

- Interactividad

Retomando los objetivos que nos planteamos al inicio del presente trabajo:

- Consideramos que el primero de ellos, el análisis de los problemas de aprendizaje de los alumnos de 3º ESO en la representación e interpretación de funciones, ha quedado satisfecho gracias a la información obtenida de la bibliografía consultada.
- En cuanto al segundo de los objetivos, la contextualización de la unidad didáctica dentro del currículo oficial y el análisis de las competencias a desarrollar, también creemos haberlo cumplido, con la presentación del marco legal que hemos realizado y el diseño pormenorizado de las distintas sesiones de la propuesta, donde hemos ido indicando las competencias alcanzadas.
- El tercero de los objetivos que nos planteamos, conocer las posibilidades que ofrece la calculadora gráfica online *Desmos* y proponer futuras aplicaciones de la herramienta en otros niveles educativos, también estimamos que se ha alcanzado, gracias al trabajo realizado con la propia herramienta, que nos ha permitido atisbar la potencialidad que ofrece en otras áreas de conocimiento.

Desde aquí animamos a la comunidad educativa a apostar por este tipo de herramientas, viéndolas como un medio, no como un fin en sí mismas, para conseguir el objetivo del proceso educativo que no es otro que el desarrollo personal de nuestros alumnos.

5. LIMITACIONES

A la hora de abordar el presente trabajo, nos hemos encontrado algunas limitaciones que, en parte, han condicionado la elaboración del mismo.

Limitaciones en cuanto a recursos materiales: para poder llevar a cabo esta propuesta didáctica debe disponerse, al menos, de un dispositivo con acceso a internet, un proyector y una pantalla para que, al menos el profesor, pueda acceder a la herramienta e interactuar con ella.

Limitaciones temporales: el hecho de contar solamente con unas pocas semanas para preparar el trabajo ha hecho que el ámbito de aplicación del mismo sea muy acotado y, como se ha dicho en apartados anteriores, deba considerarse como punto de partida para futuras investigaciones o propuestas.

Limitaciones de la propia herramienta: la herramienta elegida para plantear esta propuesta de intervención, *Desmos*, no es, todavía, muy conocida y utilizada (en parte debido a la existencia de herramientas similares más maduras, como *GeoGebra*) por lo que el portfolio de ejemplos y trabajos realizados con *Desmos* no es demasiado extenso.

Limitaciones formativas: en línea con el punto anterior, no hay una comunidad de usuarios de *Desmos* demasiado extensa (en España yo diría que es una perfecta desconocida), por lo que las posibilidades de formación pasan, principalmente, por la auto-formación.

Por otro lado, estas aparentes limitaciones pueden suponer un acicate para algunos emprendedores que vean en la herramienta un campo por explorar y explotar.

6. PROSPECTIVA

La primera línea de actuación sería la implementación de la propuesta didáctica en el aula para, posteriormente, extraer las conclusiones correspondientes en base a los criterios de evaluación mencionados en apartados anteriores.

Otra posible línea de actuación sería realizar una comparativa entre el uso de *Desmos* y el uso de otras herramientas más conocidas y utilizadas, como *GeoGebra*.

Como ya se ha comentado, esta propuesta podría considerarse como punto de partida para futuras actuaciones en otros niveles educativos.

También consideramos que la calculadora gráfica online *Desmos* puede resultar muy útil como apoyo en la presentación de otros contenidos relacionados con el aprendizaje de funciones y gráficas:

- Estudio de funciones: asíntotas

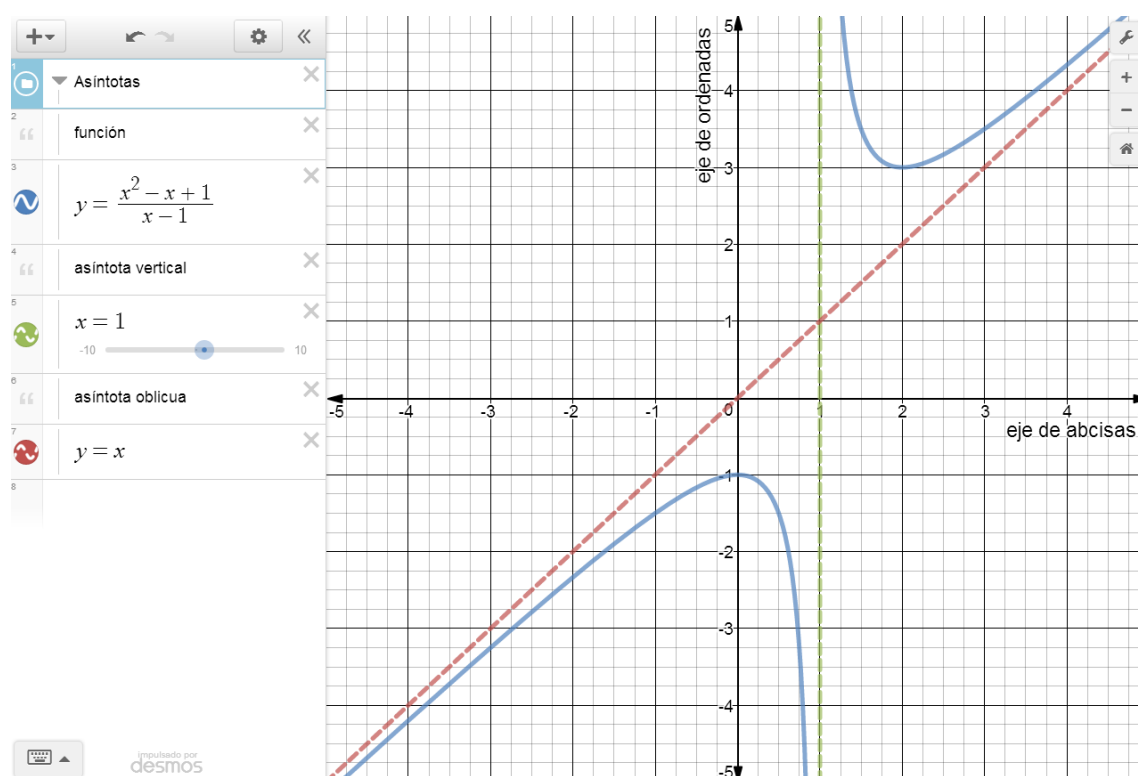


Figura 43. Asíntotas

- Resolución de sistemas de inecuaciones

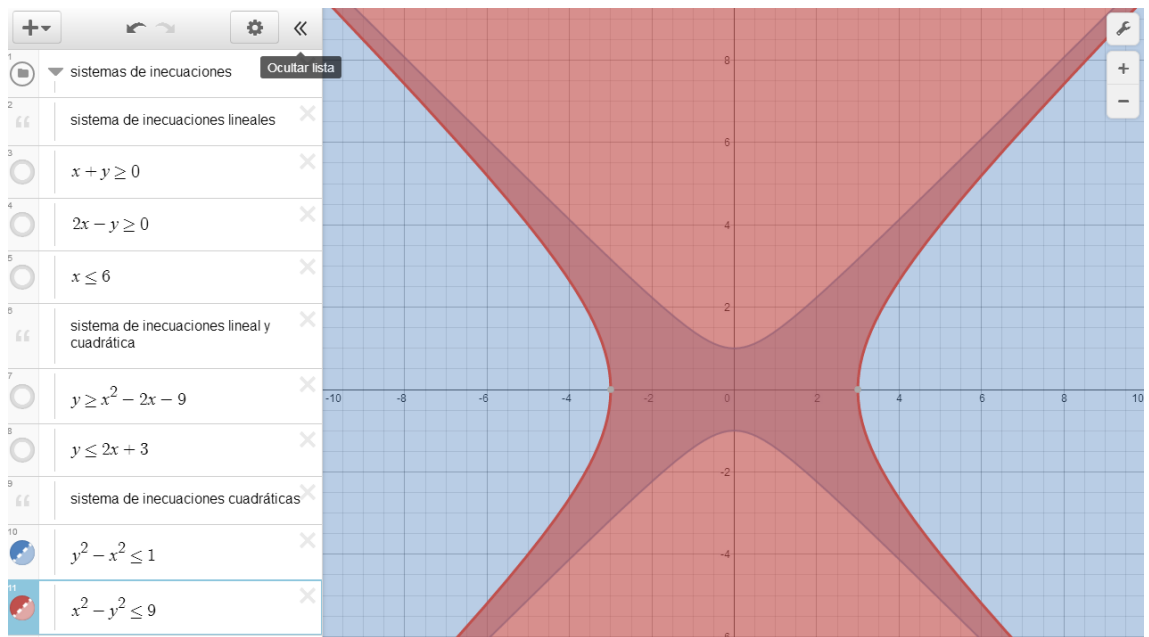


Figura 44. Sistemas de inecuaciones

- Trigonometría

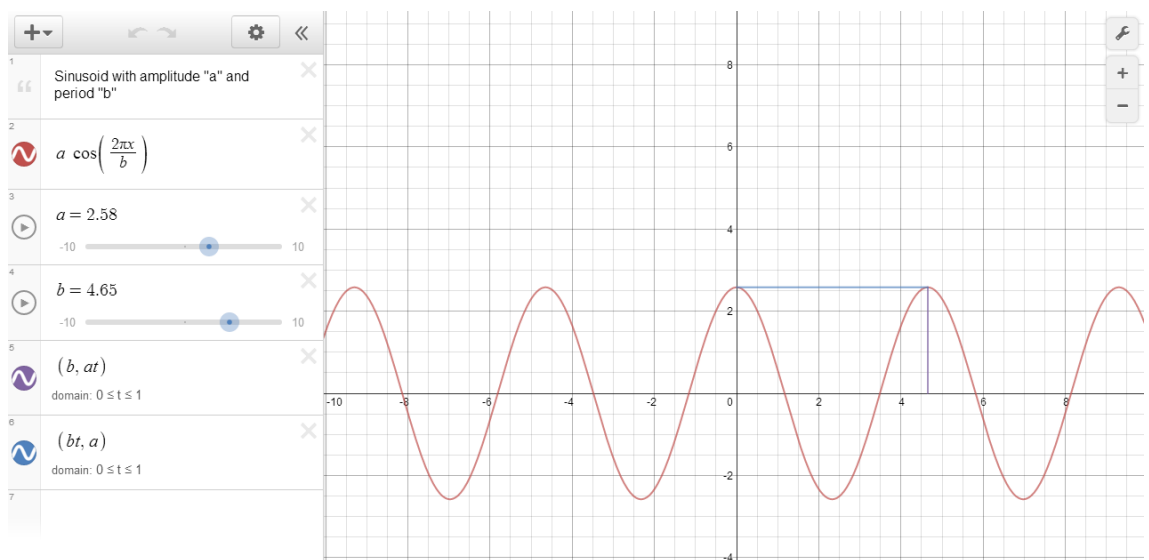


Figura 45. Trigonometría

- Cónicas

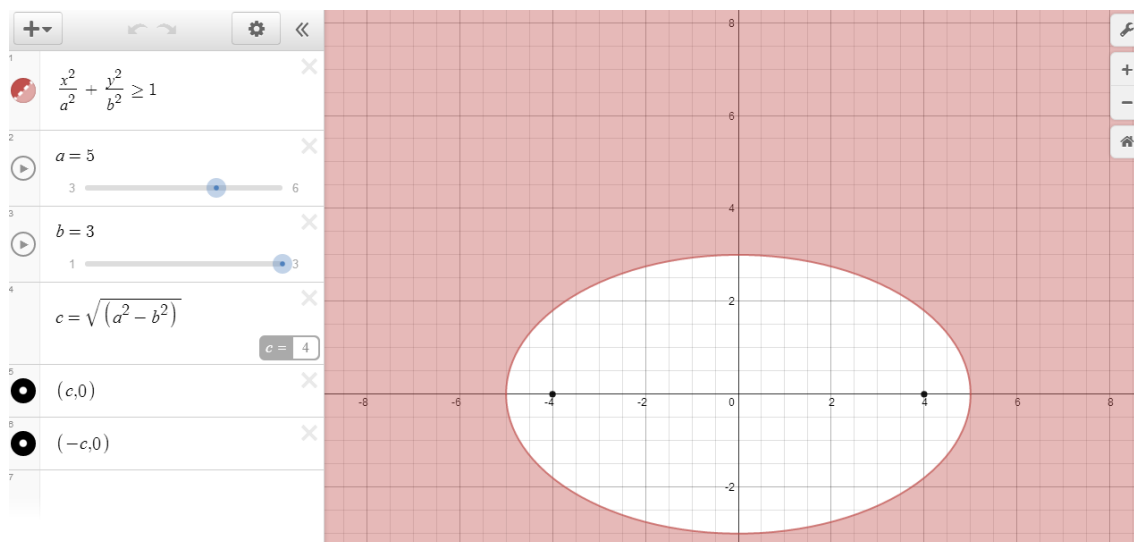


Figura 46. Cónicas

- Estadística

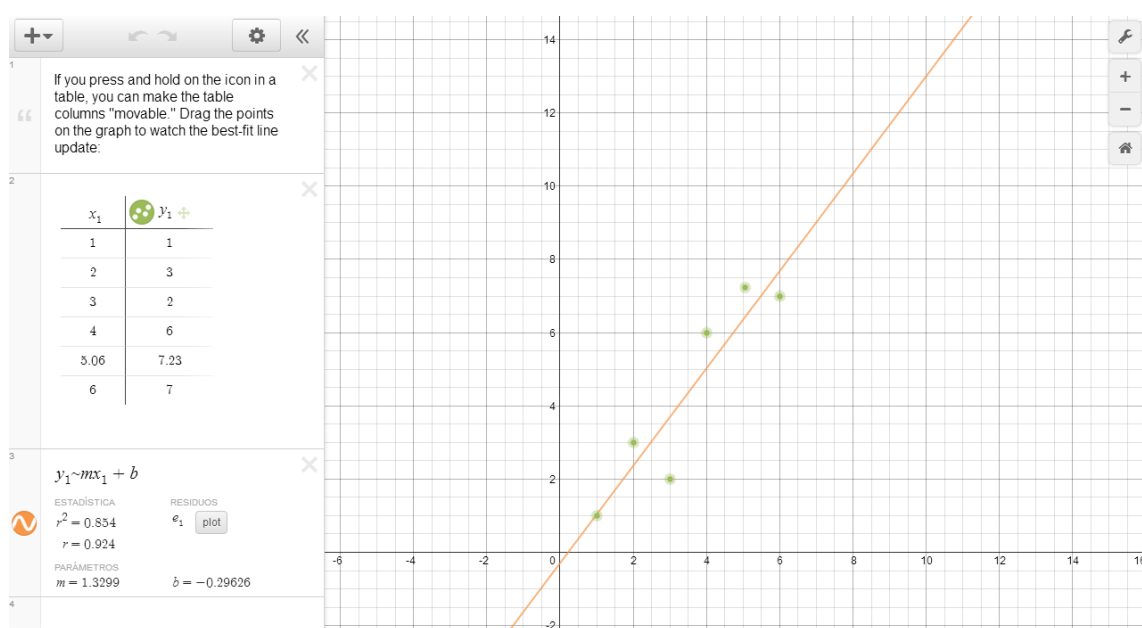


Figura 47. Estadística

- Derivadas

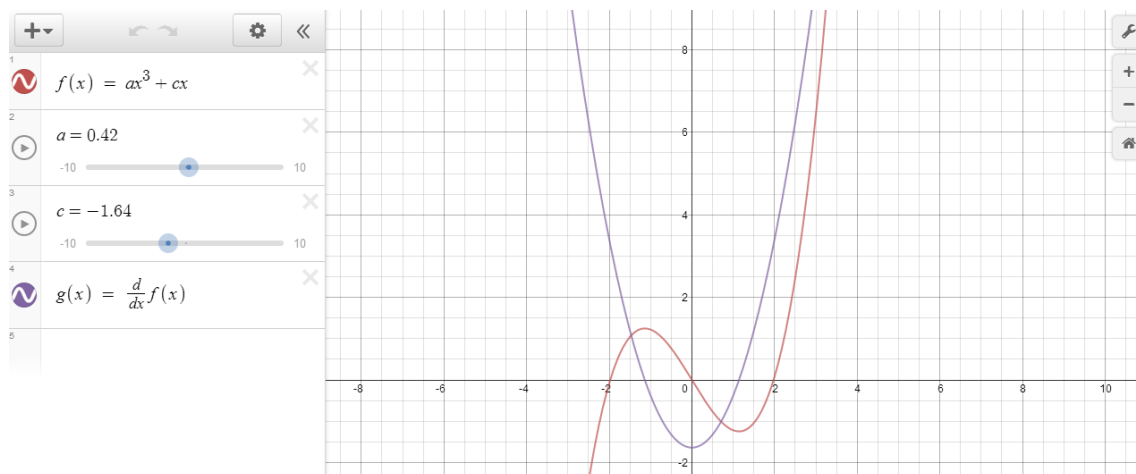


Figura 48. Derivadas

- Integrales

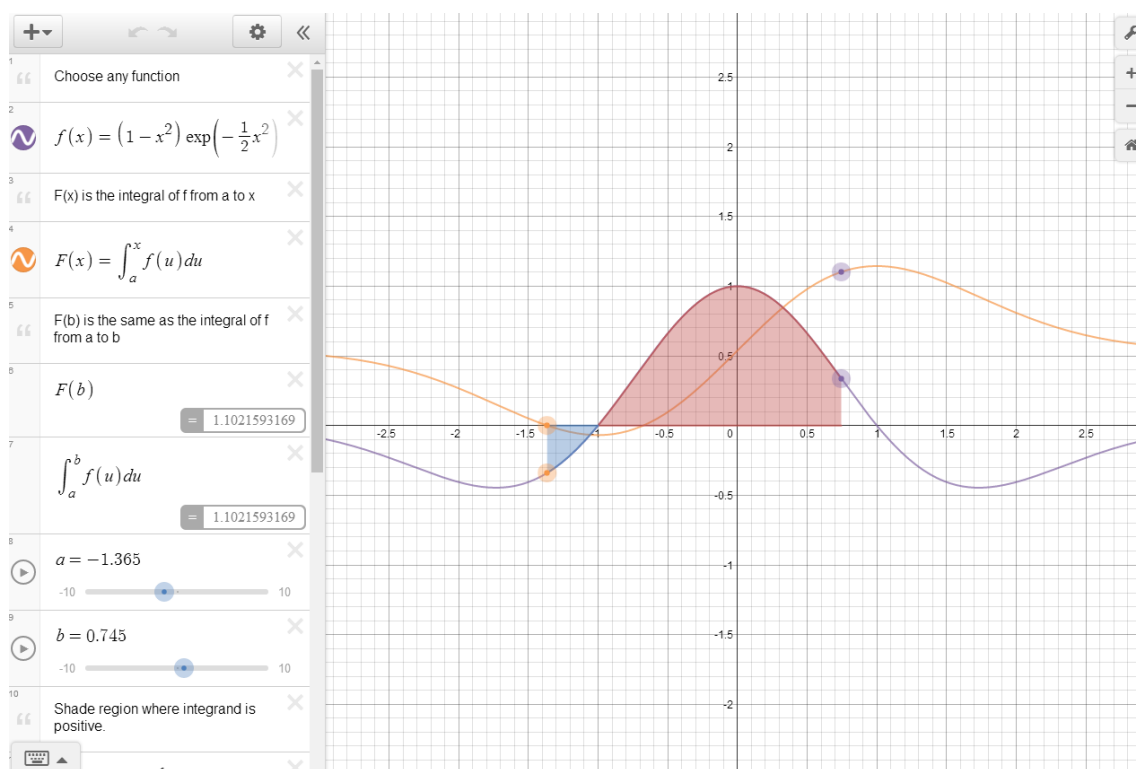


Figura 49. Integrales

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 147-155). Bilbao, España: SEIEM.
- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Síntesis.
- Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial.
- Cuevas, I. y Dolores, C. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 69-96. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500104>
- Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Publicado en el BOCM 20/05/2015.
- De Prada, D. (1996). El concepto de función: dificultades en su aprendizaje. Análisis de una experiencia con estudiantes de enseñanza media. Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas (I.E.P.S.). Monografías, 20. Recuperado de <http://ieps.es/wp-content/uploads/2012/09/MON-20.pdf>
- Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación. X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM). Ponencia P41, pp. 367-377. Recuperado de http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.DescargaArticuloIU.descarga&tipo=PDF&articulo_id=6226.
- Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Recuperado de <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf>
- González, M. y Martín, E. (2004). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. Comunicaciones del XVI Simposio Iberoamericano de enseñanza Matemática. Recuperado de http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/77_teresa_gonzalez_2.doc
- Lávaque, J., Méndez, N. y Villarroel, Y. (2006). Concepciones de los alumnos de la noción de Función. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. *Revista de Educación Matemática*, 22. Córdoba, Argentina. Recuperado de http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_21/pro_2.pdf
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE). Publicada en el BOE, 4 de mayo de 2006.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). Publicada en el BOE 10/12/2013.

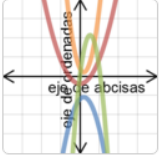
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Publicada en el BOE 29/01/2015.
- Pedersen, O. (1974). Logistics and the theory of functions: An essay in the history of Greek mathematics. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 24(94), 29-50.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Publicado en el BOE 03/01/2015.
- Ruiz-Higueras, L. Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. y López Esteban, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, 10. Recuperado de <http://revistas.usal.es/index.php/0214-3402/article/view/3540>

ANEXOS

Anexo I: Modelo de examen

Este es un ejemplo de examen que puede ser realizado con la calculadora gráfica online *Desmos*. Para acceder a él, el profesor deberá proporcionar a los alumnos un código que introducirán en la web student.desmos.com.

Por tratarse de un ejemplo, se puede acceder a él a través de la URL <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/57602254754ec416061bb823>



Mi primer examen con De... ☆

BY ENRIQUE JOSÉ MARCOS DEL OLMO [view original](#) | [Edit Your Activity](#) | [Duplicate This Activity](#)

This activity is private - only you can see it.
To share your activity with other teachers, [mark it as public](#).

[Start a New Session](#)
Or [build your own activity!](#)

SCREENS [preview](#)

1. Ejes cartesianos

¿Qué otros dos nombres recibe el eje horizontal?

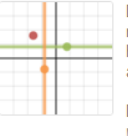
¿Qué otros dos nombres recibe el eje vertical?



2. Ejes cartesianos

Desplaza la recta verde hasta el eje de abscisas

Desplaza la recta naranja



3. Funciones de proporcionalidad...

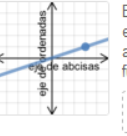
¿Por qué punto pasan todas las funciones de proporcionalidad?

¿A qué llamamos pendiente de...



4. Funciones de proporcionalidad...

Escribe la expresión algebraica de la función de color



$f(x)$

5. Funciones de proporcionalidad...

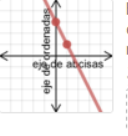
Escribe la expresión algebraica de la función de color



$f(x)$

6. Funciones lineales

Escribe la ecuación de la recta en forma $y = mx + n$.



$f(x)$

7. Funciones lineales

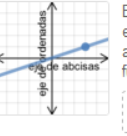
Escribe la ecuación de la recta en forma $y = mx + n$.



$f(x)$

8. Ecuación de la recta en fo...

Escribe la ecuación de la recta que pasa por $P(4, -3)$ y tiene pendiente $m=4$



$f(x)$

9. Ecuación de la recta en fo...

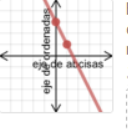
Escribe la ecuación de la recta que pasa por $P(-1, 3)$ y tiene pendiente $m = -3/5$



$f(x)$

10. Ecuación de la recta en ...

¿A qué recta de la izquierda corresponde la ecuación de la...



$f(x)$

11. Ecuación de la recta que...

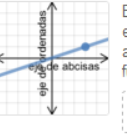
Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1, 0)$ y $Q(5, 5)$



$f(x)$

12. Ecuación de la recta que...

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(3, 4)$ y $Q(-2, -1)$



$f(x)$

13. Ecuación de la recta que...

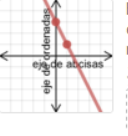
¿A qué gráfica corresponde la última función que has...



$f(x)$

14. Funciones cuadráticas:p...

Calcula el vértice y los puntos de corte con los ejes cartesianos de la parábola



$f(x)$

15. Funciones cuadráticas:p...

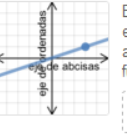
Calcula el vértice y los puntos de corte con los ejes cartesianos de la parábola



$f(x)$

16. Funciones cuadráticas:p...

Identifica la última parábola con alguna de la imagen



$f(x)$

Figura 50. Ejemplo de enunciado de examen

El profesor podría consultar el resultado del examen pulsando sobre el código del mismo (en el ejemplo, YPKM)

Anexo II: Cuestionario de evaluación de la idoneidad de la propuesta

Este es un ejemplo de cuestionario de evaluación para conocer la valoración de los alumnos respecto a la idoneidad del uso de *Desmos* en la consecución de los objetivos marcados en la propuesta de intervención:

Tabla 16. Ejemplo de cuestionario de evaluación

Respecto a la utilización de la calculadora gráfica online <i>Desmos</i> para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque de contenidos de funciones y gráficas, valora los siguientes aspectos				
Aspectos a valorar	Nada	Poco	Bastante	Mucho
Facilidad de uso de la calculadora gráfica online <i>Desmos</i>				
El uso de <i>Desmos</i> me ha ayudado a distinguir la gráfica de una función de otro tipo de gráficas				
La calculadora gráfica online <i>Desmos</i> me ha ayudado a comprender la relación entre la expresión gráfica de una función, su tabla de valores y su representación gráfica				
El uso de <i>Desmos</i> me ha ayudado a obtener los parámetros más importantes de una función lineal (pendiente y ordenada en el origen), a partir de su representación gráfica				
El uso de <i>Desmos</i> me ha ayudado a obtener los parámetros más importantes de una función cuadrática (vértice de la parábola y puntos de corte con los ejes), a partir de su representación gráfica				
La calculadora gráfica online <i>Desmos</i> me ha ayudado a interpretar las soluciones obtenidas en la resolución de sistemas de ecuaciones y de ecuaciones de segundo grado				