



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

**Enseñanza y aprendizaje de
funciones y gráficas en 3º de
ESO mediante la metodología
basada en el aprendizaje
cooperativo**

Presentado por: Raúl Meseguer García
Línea de investigación: Métodos pedagógicos (Matemáticas)
/Recursos didácticos (TIC)
Director: Pedro Viñuela Villa
Ciudad: Madrid
Fecha: 24 de mayo de 2016

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta de intervención basada en el aprendizaje cooperativo como metodología para la enseñanza y el aprendizaje del bloque de funciones en 3^o de ESO en la asignatura de matemáticas. El presente trabajo se divide en tres partes principales. En la sección Marco teórico, se expone la legislación educativa vigente, tanto a nivel estatal como autonómico. A continuación se presenta el bloque de funciones y las dificultades que pueden presentar los alumnos a la hora de enfrentarse a dicho bloque, y para terminar esta sección se presenta el aprendizaje cooperativo y cómo éste puede ayudar en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Posteriormente, en la sección Estudio de campo, se exponen los resultados de unas encuestas realizadas a diversos profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato, evaluando sus opiniones sobre la enseñanza de las funciones en matemáticas usando una metodología basada en el aprendizaje cooperativo, así como sus ventajas e inconvenientes. Para terminar se presenta la Propuesta didáctica, dividida en varias sesiones, en las que se expone el bloque de funciones y se realizan diversas actividades basadas en este tipo de metodología para llevar a cabo en el aula. La conclusión principal a la que se ha llegado en el presente trabajo es que, tanto profesores como alumnos, tienen una gran acogida por este tipo de metodología y por consiguiente los docentes creen que ayuda a los alumnos en el proceso de aprendizaje de las funciones. La línea futura de investigación más destacada consiste en ampliar la propuesta a otros bloques de la asignatura y a otros cursos, para poder realizar un estudio más significativo del uso de esta metodología.

Palabras clave: Secundaria, aprendizaje cooperativo, metodología, funciones y gráficas.

Abstract

In this paper a proposal of intervention is presented based on cooperative learning as a methodology for the education and learning process of the block of functions in the third grade of CSE for the subject of mathematics. The present paper is divided into main three parts. In the theoretical Framework, the education legislation in force is shown, both on a state and on an autonomous community level. After that the block of functions and the difficulties the students may face when studying them is presented and to finish this section cooperative learning is stated and how this can help in the education-learning process. Afterwards in this a Field survey part, the results of the surveys are shown in which several mathematics teachers at secondary school and high school participated, assessing their opinions on the teaching of functions in mathematics using the methodology based on cooperative learning including its advantages and inconveniences. To end an educational proposal is presented, divided into several sessions, in which the block of functions is shown and several activities are carried out, based on this type of methodology to be taken into the classroom. The main conclusion drawn in this paper is that both teachers and students have well accepted this type of methodology and teachers therefore believe that it helps students in their learning process of the functions. The most significant future line of investigation is based on extending the proposal to other blocks of the subject and to other courses, to be able to make a more significant study on the usage of this methodology.

Key words: Secondary, cooperative learning, methodology, functions and graphs.

Índice de contenidos

1. Introducción.....	5
2. Planteamiento del problema	8
2.1. Definición del problema	8
2.2. Objetivos.....	9
2.3. Metodología.....	10
2.4. Descripción de los apartados	12
3. Marco teórico.....	14
3.1. Marco legislativo.....	14
3.2. Funciones y gráficas	15
3.2.1. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables	16
3.2.2. Dificultades en el proceso de aprendizaje de las funciones	18
3.3. Aprendizaje cooperativo	20
3.3.1. ¿Qué se entiende por aprendizaje cooperativo?	20
3.3.2. Características	22
3.3.3. Tipos de actividades	24
3.3.4. Ventajas y desventajas.....	25
4. Estudio de campo.....	26
4.1. Introducción	26
4.2. Objetivos.....	26
4.3. Metodología.....	26
4.4. Cuestionario	27
4.5. Resultados obtenidos	30
4.6. Análisis de los datos obtenidos	33
5. Propuesta práctica	35
5.1. Introducción	35
5.2. Objetivos específicos	35
5.3. Destinatarios	35
5.4. Metodología.....	36
5.5. Ejemplo de sesiones	39
5.6. Resultados previstos.....	40
5.7. Formas para evaluar la eficacia de la propuesta.....	41
6. Discusión.....	43
7. Conclusiones	45
8. Limitaciones del trabajo	48
9. Prospectiva: Líneas de investigación futuras.....	49
10. Referencias bibliográficas.....	50
11. Anexos	53

Índice de tablas

Tabla 1. <i>Definiciones del concepto función, según algunos matemáticos, a lo largo de los años.</i>	16
Tabla 2. <i>Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del bloque de funciones de la asignatura de matemáticas de 3º de ESO.</i>	17
Tabla 3. <i>Errores más frecuentes de los alumnos en el bloque de funciones de la asignatura de matemáticas de 3º de ESO.</i>	19
Tabla 4. <i>Algunas definiciones del aprendizaje cooperativo de autores de prestigio.</i>	21
Tabla 5. <i>Elementos esenciales para que la cooperación funcione bien.</i>	22
Tabla 6. <i>Formaciones de grupos de equipo.</i>	23
Tabla 7. <i>Diferentes tipos de actividades para llevar a cabo un aprendizaje cooperativo.</i>	24
Tabla 8. <i>Ventajas y desventajas del aprendizaje cooperativo.</i>	25
Tabla 9. <i>Resumen y justificación de la encuesta realizada.</i>	28
Tabla 10. <i>Sesiones de la propuesta didáctica.</i>	38

Índice de figuras

<i>Ilustración 1. Cursos en los que los docentes han impartido clases.</i>	30
<i>Ilustración 2. Importancia del bloque de funciones según los docentes.</i>	30
<i>Ilustración 3. Dificultades que presentan los alumnos en el bloque de funciones.</i>	31
<i>Ilustración 4. Soluciones aportadas por los docentes para ayudar al alumno.</i>	31
<i>Ilustración 5. Ventajas del aprendizaje cooperativo.</i>	32
<i>Ilustración 6. Desventajas del aprendizaje cooperativo.</i>	32

1. Introducción

La sociedad en estos últimos años ha ido cambiando y evolucionando, y como nos enseña Pablo Villalaín (s.f.), estos cambios han ido afectando a la educación y a la actividad de los docentes que han tenido que actualizar sus métodos. Los modelos educativos del último tercio del siglo pasado se han quedado obsoletos con respecto a los avances de la sociedad y eso ha repercutido en los alumnos, en su motivación a la hora de aprender o en el interés que muestran en las clases. La didáctica moderna señala que los modelos tradicionales de enseñanza, ligados a la sociedad industrial donde el conocimiento prevalecía, deben dar paso a otros modelos propios de la sociedad postindustrial en la que prevalecen las habilidades y las competencias. Hoy en día es más importante que los jóvenes sepan hacer muchas cosas con lo que saben y comprendan a que simplemente sepan muchas cosas. Por ello es tan importante adaptar los nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje a la formación que deben recibir los jóvenes en las aulas. Con todo ello no se quiere decir que haya que cambiar radicalmente la forma de dar las clases en los centros escolares, de hecho en lo que Pablo Villalaín (s.f.) insiste es en los cambios que han habido en los últimos años en la legislación en la educación, como hemos pasado de contenidos y objetivos a competencias, currículo, estándares de aprendizaje, etc. Estos cambios han afectado tanto a los alumnos como a los profesores, y por tanto tenemos que buscar nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje, llevando las nuevas tecnologías a nuestras aulas y usando nuevas metodologías, como la que se presenta en este trabajo, para ayudar al alumno a superar la asignatura de matemáticas.

Aparte de los cambios anteriormente mencionamos sabemos que según diversos estudios de prestigio internacional, como PISA 2012, demuestran que los alumnos tienen dificultades en el aprendizaje de la competencia matemática en la educación secundaria y si a esto le sumamos alumnos desmotivados o con falta de interés se hace más difícil el proceso de enseñanza-aprendizaje. Otro informe, como el estudio TIMSS 2011, también nos confirma que España está por debajo de la media de la OCDE, en la que participan más de 30 países, en cuanto al rendimiento global en matemáticas. Y en cuanto a lo que nos interesa en este trabajo, el bloque de funciones o representación de datos, España presenta peores resultados que por ejemplo en el bloque de los números. Con respecto al bloque de funciones se ha analizado el informe de la Evaluación General de Diagnóstico de 2010 y en él se puede concluir que las funciones no son el bloque más difícil de la ESO, pero sí que se presenta cierta dificultad para los alumnos.

Una vez expuestos los motivos por los que los docentes necesitamos adaptarnos a los nuevos cambios y vistas las dificultades que presentan los alumnos en la

asignatura de matemáticas, nos vamos a centrar en el bloque de funciones. A lo largo del trabajo, se expone la legislación vigente y seguidamente hablamos de la importancia de las funciones en el currículo de matemáticas y de la infinidad de aplicaciones que tienen en la vida real. Autores como Castro y Castro o Yuri Hernández, nos presentan las funciones y otros como Tomás Ortega y Cristina Pecharrmán, José Del Rio o González y Martín nos cuentan los problemas y las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en el bloque de funciones. Posteriormente presentamos el aprendizaje cooperativo como la base de la metodología que se ha usado para llevar a cabo la propuesta didáctica en el presente trabajo, para ello autores de referencia como Kagan, Johnson & Johnson o Pujolàs nos exponen este método de enseñanza-aprendizaje.

Se plantea este tipo de metodología basada en el aprendizaje cooperativo para enseñar el bloque de las funciones en 3º de ESO, buscando que las matemáticas resulten más entretenidas y motivadoras para los alumnos, a la vez que ayudamos a fomentar las buenas relaciones en el aula entre los alumnos. Uno de los procedimientos más útiles para el aprendizaje de ciertos valores como la solidaridad, cooperación o colaboración gira en torno al aprendizaje cooperativo, donde se forman los grupos de aprendizaje, pero no hay que dejar de lado ni el aprendizaje individual ni el competitivo, puesto que son también necesarios en la sociedad en la que nos vamos a desenvolver en un futuro. Hoy en día, en muchos centros se sigue fomentando únicamente la competitividad entre los alumnos, puesto que es lo que se ve en la sociedad, pero cada vez se valora más la cooperación entre ellos ya que, entre otras cosas, se consiguen mejorar las relaciones sociales y el buen ambiente en el aula. Si conseguimos combinar la competitividad individual con la colaboración entre los alumnos estaremos en un equilibrio perfecto que nos llevará a una metodología de enseñanza-aprendizaje muy satisfactoria.

También queremos saber si realmente esta metodología basada en el aprendizaje cooperativo favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones, es decir, si hace que dicho proceso sea llevado a cabo más fácilmente por los docentes y que le llegue al alumno de forma que este esté más implicado y a la vez más motivado. Para ello se realiza el estudio de campo, con una encuesta dirigida a los docentes para recoger información sobre el bloque de funciones y sobre la metodología del aprendizaje cooperativo.

Es por ello que en el presente trabajo se presenta una propuesta para enseñar funciones en 3º de ESO, basada en el aprendizaje cooperativo como metodología didáctica, en la que nos proponemos mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de dicho bloque usando una metodología basada en el aprendizaje cooperativo, en el

que se busca, más si cabe, la participación del alumno en clase, el compromiso de trabajar juntos, aprender ciertas actitudes y aptitudes al trabajar ayudándose entre ellos. Se busca también motivar a los alumnos a la hora de enfrentarse a las actividades de matemáticas y de esta forma que trabajen con más interés y aprendan más rápido y mejor. Para ello se crea dicha propuesta didáctica basada en esta metodología.

2. Planteamiento del problema

2.1. Definición del problema

Como mencionamos anteriormente algunos informes de prestigio internacional, como PISA 2012, confirman que el nivel de matemáticas de los alumnos españoles es significativamente inferior al promedio de la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos). En España hay una proporción más baja de alumnos excelentes y se indica que uno de cada cuatro alumnos no alcanza un dominio básico de la competencia matemática. Aunque en este aspecto España está en un nivel muy similar al resto de los países pertenecientes a la OCDE.

Otro tipo de informe, el estudio TIMSS 2011, también nos confirma que España está por debajo de la media de la OCDE en cuanto al rendimiento global en matemáticas y que dentro de la comunidad Europea sólo superamos a países como Polonia, Turquía o Chile. Pero el aspecto que más nos interesa de este informe, es que distingue entre dominios de contenido y dominios cognitivos, y se analizan los rendimientos de los alumnos españoles en los tres dominios de contenido que son: números, formas y mediciones geométricas y representación de los datos (este último es el que más nos interesa). Viendo los datos del informe podemos concluir que en representación de datos estamos incluso peor que en números, esto podría deberse a que en España la enseñanza de matemáticas tiene una atención diferente en cada dimensión. Puede por tanto que necesitemos mejorar en este aspecto.

Por último, hemos analizado los resultados obtenidos en los diferentes procesos estudiados en la competencia matemática en el informe de la Evaluación general de diagnóstico 2010, para el 2º curso de la ESO, y como conclusión podemos destacar que las funciones no son de los bloques más difíciles, pero sí que muestran cierta dificultad, y que los bloques de contenido que presentan mayor dificultad para los alumnos, según este estudio, son el álgebra y la geometría.

Con todos estos datos podemos decir que hoy en día se siguen considerando a las matemáticas como una asignatura dura, complicada y difícil de superar, de ahí que hayan tantas academias de matemáticas o profesores de apoyo, pero por eso mismo los docentes tenemos que buscar nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje que hagan que los alumnos entiendan mejor los conceptos matemáticos y en el caso de este trabajo las funciones. También los docentes debemos buscar de donde parten los problemas de los alumnos con respecto a las funciones. Según Castro y Castro (1997), cuando hablamos de las representaciones, estamos hablando de notaciones simbólicas o gráficas mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y sus propiedades, y que es necesario

educar a los adolescentes para que desarrollen su capacidad de visualización, puesto que con el aumento de la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas se ayuda al estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos que se usan, posteriormente llega a la conclusión que los estudiantes no pueden inventar o interpretar por si mismos las representaciones convencionales al principio, si no que necesitan ser instruidos y educados en su uso y comprensión. Todo esto nos lleva a entender que para que los alumnos puedan representar bien una función deben conocer antes todos los parámetros, conceptos y simbología que en ella están implicados. Esto también lo corrobora Yuri Hernández (2007), quien señala la importancia de introducir el concepto de función a los estudiantes mediante actividades de interpretación de gráficas para que entiendan posteriormente mejor los conceptos básicos.

Más adelante se expondrán las dificultades y los errores que son más frecuentes en los alumnos a la hora de enfrentarse a las funciones, veremos autores como Tomás Ortega y Cristina Pecharromán, José Del Rio o González y Martín, pero podemos adelantar que muchos coinciden en destacar que el mayor problema viene al aprenderse los conceptos de memoria sin entenderlos y no llegar a comprender la simbología usada.

Por ello, en el presente trabajo, se pretende ayudar a los alumnos a superar las dificultades y los errores que presentan más frecuentemente a la hora de enfrentarse a las funciones, y esto se pretende conseguir con una propuesta didáctica con actividades contextualizadas y la implicación de todos los alumnos en grupos, trabajando conjuntamente y ayudándose, y para ello utilizaremos la metodología basada en el aprendizaje cooperativo, con el fin de que los alumnos trabajen de forma cooperativa las funciones, sus conceptos básicos, las características y la simbología, y que vean en ellas un medio por el que expresar no solo una ecuación llevada a una gráfica sino problemas que se pueden encontrar en la vida real, que vean casos prácticos y sepan interpretar los resultados.

2.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es presentar y fundamentar una propuesta para enseñar funciones en 3º de ESO, basada en el aprendizaje cooperativo como metodología didáctica.

Los objetivos específicos que se pretenden conseguir en el trabajo son los siguientes:

1. Analizar la legislación vigente sobre la asignatura de matemáticas, y más en concreto sobre el bloque de funciones, e investigar el nivel de los alumnos de matemáticas en España en dicho bloque.

2. Averiguar y exponer las principales dificultades que presentan los alumnos de 3º de ESO en el aprendizaje de las funciones y sus características.
3. Investigar sobre el aprendizaje cooperativo como método para la enseñanza, exponiendo sus características y presentando las ventajas e inconvenientes a la hora de su puesta en práctica.
4. Averiguar la opinión y la disposición de diferentes docentes de matemáticas frente al uso de esta metodología, basada en el aprendizaje cooperativo, a la hora de enseñar el bloque de funciones.

2.3. Metodología

La metodología planteada para llevar a cabo el desarrollo de este trabajo final de máster constará de tres partes. Hemos empezado realizando el marco teórico, y para ello se ha hecho una revisión bibliográfica. Posteriormente se realiza un estudio de campo recogiendo las opiniones de algunos profesores sobre las funciones y el aprendizaje cooperativo. Para terminar, con todos estos datos recogidos estamos en disposición de poder diseñar una propuesta didáctica basada en el aprendizaje cooperativo para ayudar al alumno a entender mejor el bloque de funciones.

En la primera parte se realiza el marco teórico, en el que empezamos presentando la legislación vigente en cuanto a las matemáticas y al bloque de funciones, para ello recurrimos al BOE y al BOCM, puesto que tenemos que conocer el currículo básico de la educación Secundaria Obligatoria a nivel nacional y posteriormente en nuestra comunidad, en este caso Madrid. Una vez que sabemos la base teórica, se ha profundizado en el bloque de las funciones como tal. ¿Qué es la función? y ¿qué dificultades presentan los alumnos más comúnmente a la hora de enfrentarse a ellas?, son algunas de las preguntas a las que damos respuesta en este trabajo. Y para ello hemos recurrido a autores de prestigio en este campo, como son Castro y Castro, Tomás Ortega y Cristina Pecharromán, José Del Rio o González y Martín, entre otros. Lo mismo hemos hecho con respecto al aprendizaje cooperativo, para presentarlo y comentar cómo implementarlo en el aula, y hablar de sus ventajas e inconvenientes, hemos recurrido a Kagan, Johnson & Johnson o Pujolàs entre otros autores de prestigio. Para buscar toda esta información acerca de tantos autores se ha recurrido a diferentes sitios, bibliotecas públicas y universitarias, dialnet, a la biblioteca virtual de la unir, también hemos recurrido a trabajos fin de máster de otros compañeros de otros años para comprobar cuáles eran los autores más buscados, y más representativos en los diferentes campos. También hemos indagado en revistas o artículos realizando

una búsqueda a través de internet basándonos en las palabras clave "secundaria", "aprendizaje cooperativo", "matemáticas" y "funciones y gráficas". De los documentos encontrados se han ido seleccionando, según la autoridad del autor y el prestigio de la publicación, la información más relevante e interesante para completar nuestro marco teórico.

En la segunda parte del trabajo nos centraremos en el estudio de campo, en el que se realizaron unas encuestas a docentes de matemáticas en ESO y Bachillerato. Son profesores con amplia experiencia en la docencia, con edades comprendidas entre 40 y 60 años y pertenecen a dos centros diferentes, *Colegio Marista La Merced-Fuensanta* en Murcia y *Colegio Joyfe* en Madrid. Se eligieron estos centros puesto que en el primero conocemos a uno de los profesores del departamento de matemáticas y nos pudo ayudar a distribuir las encuestas a los demás compañeros, y el segundo, el centro del Madrid, se escogió debido a que se realizaron allí las prácticas del máster. En total se obtuvieron 10 entrevistas a diferentes docentes, por tanto, la muestra no puede ser del todo representativa, para que lo fuese necesitaríamos más docentes entrevistados, de diferentes centros y de diferentes cursos, pero para este trabajo ha sido más que suficiente para obtener unas conclusiones y realizar nuestra propuesta. Se ha elegido el formato de encuesta para este estudio de campo porque es el método más práctico, cómodo y rápido para hacer dicho estudio de campo, tanto para los docentes, buscando así más participación, como para la elaboración de este trabajo. Para la realización de las encuestas hemos utilizado la plataforma *Survey Monkey* y para elaborar las cuestiones nos hemos basado en la experiencia vivida durante las prácticas de este máster y en los conocimientos adquiridos sobre el aprendizaje cooperativo y las funciones durante la elaboración del presente trabajo. Con estas encuestas se busca averiguar, siempre según los docentes encuestados, la opinión que tienen los docentes sobre el bloque de funciones, las dificultades que suelen presentar los alumnos a la hora de enfrentarse a las funciones, si el aprendizaje cooperativo ayuda realmente a los alumnos a comprender y trabajar las matemáticas y si para los docentes es una herramienta útil en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Para terminar el trabajo se presenta la propuesta didáctica, dirigida a los alumnos de 3º de ESO, sobre el bloque de las funciones y basándonos en el uso de la metodología del aprendizaje cooperativo para desarrollarla. Para lo cual usaremos la experiencia adquirida durante las prácticas realizadas en el Colegio Joyfe y toda la información recabada a lo largo del trabajo, tanto del marco teórico como del estudio de campo.

2.4. Descripción de los apartados

En el apartado *Introducción* se ha justificado la realización de la propuesta didáctica de este trabajo. Para lo cual se han consultado algunas fuentes que nos hablan de los cambios surgidos en la sociedad y por consiguiente en la enseñanza en las últimas décadas. Estos cambios, unidos a las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de la competencia matemática en la educación en España, han provocado que los docentes tengan que formarse en nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje, sin ello dejar de lado los métodos tradicionales de enseñanza.

En el apartado *Planteamiento del problema*, nos centramos en analizar el rendimiento de los alumnos en matemáticas y más en concreto con respecto a las funciones, viendo que es medio-bajo comparado con otros países. Se presentan las principales dificultades que tienen los alumnos al afrontar el bloque de funciones según varios autores de renombre y cómo se pretende ayudar a los alumnos a superar dichas dificultades gracias al diseño de la propuesta didáctica.

El apartado *Marco teórico* se ha fragmentado en tres apartados que han sido elementales para afrontar con garantías la elaboración de la propuesta didáctica. Se ha recopilado la información sobre la normativa vigente, del BOE y del BOCM, en referencia a los contenidos curriculares, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de la asignatura de matemáticas de 3º de ESO y más concretamente en el bloque de funciones. Posteriormente hemos presentado las funciones y las dificultades que entrañan para los alumnos en su aprendizaje, basándonos en varios autores de referencia. Y para terminar este apartado se ha explicado en qué consiste el aprendizaje cooperativo, qué actividades son las más comunes y cuáles son sus ventajas e inconvenientes.

En el apartado *Estudio de campo* se ha realizado una encuesta a diferentes docentes de matemáticas en ESO y bachillerato, pertenecientes al *Colegio Marista La Merced-Fuensanta*, en Murcia, y al *Colegio Joyfe*, en Madrid. Se trata de una encuesta que se centra en averiguar las opiniones respecto al bloque de las funciones y respecto el aprendizaje cooperativo como método de enseñanza-aprendizaje, en función de la experiencia de los docentes. El objetivo principal es corroborar los datos obtenidos en el marco teórico en lo referente a las funciones y al aprendizaje cooperativo. Para seguidamente realizar un análisis de los resultados obtenidos y poder así afrontar la propuesta didáctica.

En el apartado *Propuesta práctica* se ha desarrollado la propuesta didáctica para enseñar funciones en 3º de ESO usando una metodología basada en el aprendizaje cooperativo. El objetivo principal es el de ayudar a los alumnos, mediante el uso de

dicha metodología, a superar las dificultades que presentan más frecuentemente a la hora de enfrentarse a las funciones. Para lo cual se describe la metodología usada y se desarrollan un par de sesiones de la propuesta. Analizando posteriormente los resultados previstos.

En el apartado *Discusión* se confrontan los resultados obtenidos en el estudio de campo con los aportados por otros autores en el marco teórico. Por tanto, apoyándonos en las similitudes entre los resultados de las encuestas y las opiniones de los diferentes autores de relevancia, podemos decir que el uso del aprendizaje cooperativo puede ayudar a los alumnos a trabajar mejor el bloque de funciones.

En el apartado *Conclusiones*, se da cuenta de la consecución de cada uno de los objetivos marcados al principio de este trabajo fin de máster, y lo que hemos hecho para poder conseguir dichos objetivos.

En el apartado *Limitaciones* a las que nos hemos enfrentado durante la elaboración del presente trabajo haremos referencia sobre todo al tiempo, que siempre es un factor limitante en todos los ámbitos de la vida, y al no haber podido llevar a la práctica nuestra propuesta didáctica, entre otros factores.

En el apartado *Líneas de investigación futuras*, básicamente se exponen los caminos a seguir para continuar con este trabajo, como serían la de poder implementar nuestra propuesta didáctica en un entorno real y poder llevarla a diferentes bloques y cursos de la ESO.

3. Marco teórico

Antes de presentar la propuesta didáctica para el bloque de funciones de la asignatura de matemáticas en 3º de ESO hay que situarse en el contexto adecuado. A continuación se presenta el marco legislativo en el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria de la asignatura de matemáticas. Posteriormente se expone el bloque de funciones que corresponde al bloque 4 en 3º de ESO, en el que se explican los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables. Para terminar se presenta la metodología en la que se va a basar nuestra propuesta didáctica, el aprendizaje cooperativo.

3.1. Marco legislativo

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, se establece el currículo básico de la educación Secundaria Obligatoria. En el cual la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, define el currículo de la siguiente manera:

[...] como la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas. El currículo estará integrado por los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa; las competencias, o capacidades para activar y aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, para lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos; los contenidos, o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias; la metodología didáctica, que comprende tanto la descripción de las prácticas docentes como la organización del trabajo de los docentes; los estándares y resultados de aprendizaje evaluables; y los criterios de evaluación del grado de adquisición de las competencias y del logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias, ámbitos, áreas y módulos en función de las enseñanzas, las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado. (BOE núm. 3, 2015, p. 169).

En dicho párrafo se nos explica lo que es el currículo y por qué elementos está formado. Más adelante, en este mismo Real Decreto, se establecen los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de cada uno de los bloques que constituyen la asignatura que nos atañe en este trabajo, las matemáticas de 3º de ESO. El Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, hace lo propio pero en lo referente únicamente a la Comunidad de Madrid.

Para entender mejor estos conceptos podemos acudir a la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, donde se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y criterios de evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria. En el

cual se establecen las competencias básicas que han de alcanzar los alumnos al finalizar su etapa en la Educación Secundaria Obligatoria, y que son las siguientes:

- a) Comunicación lingüística.
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- c) Competencia digital.
- d) Aprender a aprender.
- e) Competencias sociales y cívicas.
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- g) Conciencia y expresiones culturales.

Tras situar el marco legislativo de la Educación Secundaria Obligatoria en el siguiente punto nos introduciremos de lleno en el bloque de las funciones.

3.2. Funciones y gráficas

Las funciones están comprendidas en el bloque 4 de 3º de ESO según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. Según Spivak (2013, citado en Ugalde, 2014, p. 2):

El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudar, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de gran generalidad.

Por lo tanto entendemos que el concepto de función es un elemento fundamental del currículo de matemáticas en la escuela secundaria y además está presente tanto en matemáticas como en otras muchas asignaturas, y sobre todo en las situaciones cotidianas de la vida que nos relacionan dos magnitudes, como estudios de crecimiento de poblaciones, de fenómenos naturales, estudios económicos...

Históricamente, según Bangi (2004) su importancia es notable ya que tanto Newton como Leibniz, en sus elaboraciones originales del cálculo infinitesimal, no hacían referencia explícita a funciones pero si se empezó a hablar de curvas y variables. Tras esto se observó un crecimiento progresivo en la importancia del concepto función relacionado con el análisis de relaciones entre las operaciones sobre la variable x y el comportamiento de una variable y dependiente de x .

Para definir el concepto de función G.E. Shílov (2003, p. 141) hace un resumen de las definiciones de algunos matemáticos con el paso de los años:

Tabla 1. *Definiciones del concepto función, según algunos matemáticos, a lo largo de los años.*

Autor	Año	Definición
J. Bernoulli	1718	Una función de una magnitud variable es una expresión analítica, compuesta por esta magnitud y por constantes.
L. Euler	1748	Una función es una curva, dibujada por un movimiento libre de la mano.
L. Euler	1755	Cuando unas cantidades dependen de otras de tal forma que al variar las últimas también varían las primeras, entonces las primeras se llaman funciones de las segundas.
S. La Croix	1797	Cualquier cantidad, cuyo valor depende de una o de otras varias cantidades, se llama función de estas últimas, independientemente de si se conocen o no las operaciones que hay que realizar para pasar de éstas a la primera.
P. Dirichlet	1837	y es función de x , si a cada valor de x le corresponde un valor completamente determinado de la y ; además no es importante el método con el que ha sido establecida la correspondencia señalada.
L.I. Lobachevski	1934	Una función de x es un número que se da a cada x y que varía constantemente con la x . El valor de la función puede estar dado o por una expresión analítica o por una condición que da el procedimiento para probar todos los números. La dependencia puede existir y quedarse desconocida.

Nota: Se exponen diferentes definiciones del concepto función.

Fuente: Elaboración propia a partir de G.E. Shílov (2003, p. 141).

Actualmente, según González y Martín (2003), hablamos del concepto de función cuando expresamos una relación entre dos variables, ya sea tanto en situaciones de la vida cotidiana a través de tablas de valores y textos, como en contextos más académicos por medio de expresiones algebraicas y gráficos de sistemas de coordenadas.

3.2.1. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables

En el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, del cual hemos extraído los contenidos y los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.

Tabla 2. *Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del bloque de funciones de la asignatura de matemáticas de 3º de ESO.*

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 4. Funciones.		
<p>Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.</p> <p>Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.</p> <p>Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.</p> <p>Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.</p> <p>Expresiones de la ecuación de la recta.</p> <p>Funciones cuadráticas.</p> <p>Representación gráfica.</p> <p>Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.</p>	<p>1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.</p> <p>2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.</p> <p>3. Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.</p>	<p>1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.</p> <p>1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.</p> <p>1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.</p> <p>1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.</p> <p>2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.</p> <p>2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.</p> <p>2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.</p> <p>3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.</p> <p>3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.</p>

Nota: Se exponen las características del bloque de funciones de 3º de ESO.

Fuente: Elaboración propia a partir de Decreto 48/2015 (BOCM, núm. 118, 2015, pp. 106-112).

3.2.2. Dificultades en el proceso de aprendizaje de las funciones

En este apartado vamos a exponer, según varios autores, donde pueden radicar los problemas para el proceso de aprendizaje de las funciones, cuales son los puntos críticos y donde se cometen más errores por parte de los alumnos, para que a lo largo del trabajo podamos dar una posible solución.

Empezaremos hablando de cómo introducir el concepto función en los alumnos, según Yuri Hernández (2007, p. 3):

Es importante introducir a los estudiantes hacia el concepto de funciones, a través de actividades de interpretación gráfica y de manejo de tablas y no desde la ecuación, pues esta se puede dejar para estudios posteriores en un nivel de análisis más complejo, ya que de esta forma se obtiene un aprendizaje significativo de los conceptos básicos que se requieren en funciones.

Esto lo refuerza Castro y Castro (1997) cuando habla de que es necesario educar a los adolescentes para que desarrollen su capacidad visualizadora, puesto que con el aumento de la capacidad de visualización, que se produce en el trabajo con representaciones gráficas, se ayuda al estudiante a comprender mejor los conceptos matemáticos que se usan. De esta forma lo que se busca es que los estudiantes aprendan funciones desde la visualización de gráficas, es decir, que empiecen comprendiendo la representación y a partir de ahí entenderá mejor todas las características, parámetros, concepto y simbología que las acompañan.

Ahondando un poco más en errores concretos que suelen cometer los alumnos en el proceso enseñanza-aprendizaje de las funciones a través de las gráficas, según Ortega y Pecharromán (2014, pp. 7-12), algunos de estos errores que se dan más frecuentemente son:

Tabla 3. Errores más frecuentes de los alumnos en el bloque de funciones de la asignatura de matemáticas de 3º de ESO.

Tipos de Errores	Explicación de los errores
Errores en el conocimiento previo.	Errores relacionados con la interpretación de los símbolos y convenios del sistema de referencia cartesiano, y la representación de puntos en el plano.
	Errores en el uso de la notación de intervalos numéricos, la notación gráfica punto vacío-punto relleno y la correspondencia que hay entre ambas.
	Desconocimiento del significado de la flecha sobre la gráfica que marca el comportamiento asintótico o las ramas de la función.
	Tendencia a leer o recorrer la gráfica siguiendo la flecha que aparece sobre ella y no utilizando los convenios del diagrama cartesiano.
	No se reconoce si la gráfica representada corresponde a una función finita o a una función infinita, algo necesario para referir correctamente las propiedades de la gráfica a los ejes cartesianos y para el cálculo de imágenes.
	Dificultades para expresarse utilizando términos y símbolos del lenguaje matemático. A veces, no se reconoce el lenguaje matemático, como en el caso de la notación funcional $y=f(x)$.
	Dificultades para distinguir entre la variable independiente y la dependiente y para saber en qué eje se representa cada una.
Errores que se observan en el aprendizaje del nuevo conocimiento.	Se interpreta la monotonía moviéndose por los puntos de la gráfica en los que hay un cambio de monotonía, en vez de considerar los tramos o intervalos de la gráfica en los que se manifiesta la propiedad.
	Se señalan los extremos absolutos y no se señalan los relativos. O se señala un máximo absoluto en una gráfica con una rama infinita ascendente.
	No se reconocen los puntos finales de una gráfica finita como extremo.
	En las propiedades de la simetría y la curvatura, se observa que un importante número de alumnos cambia las denominaciones, par-impar, cóncavo-convexo, fundamentalmente debido a que se ha llevado a cabo un aprendizaje memorístico, carente de comprensión.
	Dificultades para intuir el comportamiento de la gráfica de la función fuera del intervalo en que está representada, es decir, para indicar la tendencia de la función.
	No se sabe expresar de forma numérica la tendencia de la función a lo largo del eje de abscisas, se observa que se mezcla la tendencia de las abscisas con la de las ordenadas.
	Aprendizajes mecánicos y memorísticos de los procedimientos asociados a la representación algebraica de una función.

Nota: Tipos de Errores y su explicación.

Fuente: Elaboración propia a partir de Ortega y Pecharromán (2014, pp. 7-12).

Muchos de estos errores que nos enumeran estos autores tienen una cosa en común y es que los alumnos tienen dificultades a la hora de entender los conceptos de las funciones y la simbología. Vemos que el aprenderse las cosas de memoria no sirve en este bloque, puesto que se necesita entender los conceptos para poder entender las gráficas y exponer sus características.

Otros autores como José del Río Sánchez (1990) ya nos hablaba por entonces de los problemas de los alumnos a la hora de enfrentarse a las funciones, de que el aprendizaje memorístico de las reglas o conceptos producen fallos más frecuentemente. También habla de otros errores como el que no identifican una gráfica con el dibujo de una situación o que no entienden que una representación gráfica es una relación entre dos variables.

Para acabar, destacar un estudio sobre las dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas, que hicieron González y Martín (2003), en el que destacan como los alumnos presenta dificultades al asociar la expresión algebraica de una función a partir de su gráfica, no sólo no identificando correctamente sus coeficientes sino incluso confundiendo el tipo de función que están analizando. También exponen, lo cual es más sorprendente, que los alumnos tienen más dificultades con las funciones lineales que con las cuadráticas, para posteriormente concluir que los alumnos necesitan tener una idea más completa de lo que es una función.

3.3. Aprendizaje cooperativo

3.3.1. ¿Qué se entiende por aprendizaje cooperativo?

Al principio del presente trabajo comenzamos hablando de que los cambios en la sociedad han afectado a la educación y obligado a los docentes a adaptarse. Esta teoría se ve apoyada por otros autores, como es el caso de Trujillo y Ariza (2006), los cuales hablan de la importancia de la formación permanente del profesorado, y que ésta no sólo depende de la calidad de la enseñanza sino también de la capacidad para responder, con eficacia y profesionalidad, a los retos que la escuela va encontrando. Para terminar destacando que el docente necesita y demanda estar preparado para estos cambios. Las demandas de formación más demandadas por parte de los docentes se centran en dos, estrategias didácticas innovadoras y resolución de conflictos. Siendo el aprendizaje cooperativo una respuesta a ambas demandas, puesto que satisface las necesidades de los estudiantes del siglo XXI y educa en valores previniendo situaciones conflictivas.

El aprendizaje cooperativo aparece en los años 70 en EEUU y ha tenido una gran difusión desde entonces. Por aquel entonces la concepción educativa predominante era el aprendizaje individualista, y sólo los mejores recibían premios. Con el aprendizaje cooperativo, según Johnson, Johnson y Holubec (1999), el docente consigue elevar el rendimiento de todos sus alumnos (tanto de los dotados como de los que presentan más dificultades), lo ayuda a establecer

buenas relaciones entre los alumnos y les proporciona una serie de experiencias para lograr un saludable desarrollo social, psicológico y cognitivo. Por consiguiente reemplaza la estructura basada en la gran producción y en la competitividad, que predomina en la mayoría de las escuelas.

Para definir el aprendizaje cooperativo, empezaremos por explicar en qué se diferencia con el aprendizaje colaborativo, con el competitivo y con el individualista. Según Zañartu (2000, citado en Servicio de Innovación Educativa, 2008, p. 4) "el AC necesita de mucha estructuración para la realización de la actividad por parte del docente, mientras que el aprendizaje colaborativo necesita de mucha más autonomía del grupo y muy poca estructuración de la tarea por parte del profesor". Y en lo relativo al aprendizaje competitivo e individualista, Johnson, Johnson y Holubec (1999, p. 5) nos explica:

El aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás. Este método contrasta con el aprendizaje competitivo, en el que cada alumno trabaja en contra de los demás para alcanzar objetivos escolares tales como una calificación de "10" que sólo uno o algunos pueden obtener, y con el aprendizaje individualista, en el que los estudiantes trabajan por su cuenta para lograr metas de aprendizaje desvinculadas de las de los demás alumnos. En el aprendizaje cooperativo y en el individualista, los maestros evalúan el trabajo de los alumnos de acuerdo con determinados criterios, pero en el aprendizaje competitivo, los alumnos son calificados según una cierta norma.

En la tabla siguiente se exponen algunas definiciones del concepto aprendizaje cooperativo de algunos autores de renombre en este campo.

Tabla 4. *Algunas definiciones del aprendizaje cooperativo de autores de prestigio.*

Autor	Año	Definición
Kagan	1994	Una serie de estrategias instruccionales que incluyen a la interacción cooperativa de estudiante a estudiante, sobre algún tema, como una parte integral del proceso de aprendizaje.
Johnson & Johnson	1991	El AC es el uso instructivo de grupos pequeños para que los estudiantes trabajen juntos y aprovechen al máximo el aprendizaje propio y el que se produce en la interrelación.
Johnson, Johnson y Holubec	1999	La cooperación consiste en trabajar juntos para alcanzar objetivos comunes. El aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás.

Nota: Definiciones de autores más reconocidos en este campo.

Fuente: Elaboración propia a partir de Servicio de Innovación Educativa (2008, p. 4).

Para terminar con este apartado, queremos destacar que no con todo lo expuesto anteriormente queremos decir que el aprendizaje cooperativo es el único

que se debe usar en la educación, si no que más bien se debe combinar con otros tipos de aprendizaje, ya que incluso Johnson, Johnson y Holubec (1999), hablan de que usándolo un 60 por ciento de la clase ya se obtendrían buenos resultados.

3.3.2. Características

En este apartado se van a describir algunas de las características más importantes del aprendizaje cooperativo para entenderlo mejor y poder realizar la propuesta didáctica. Empezaremos enumerando cuales son los cinco requisitos básicos que se tienen que cumplir para que la cooperación funcione bien, los cuales exponemos en la siguiente tabla:

Tabla 5. *Elementos esenciales para que la cooperación funcione bien.*

Elementos esenciales	Explicación
Interdependencia positiva	El docente debe proponer una tarea clara y un objetivo grupal para que los alumnos sepan que habrán de hundirse o salir a flote juntos. Esta interdependencia positiva crea un compromiso con el éxito de otras personas, además del propio, lo cual es la base del aprendizaje cooperativo.
Responsabilidad individual y grupal	El grupo debe asumir la responsabilidad de alcanzar sus objetivos, y cada miembro será responsable de cumplir con la parte del trabajo que le corresponda. Nadie puede aprovecharse del trabajo de otros.
Interacción estimuladora	Los alumnos deben realizar juntos una labor en la que cada uno promueva el éxito de los demás, compartiendo los recursos existentes y ayudándose, respaldándose, alentándose y felicitándose unos a otros por su empeño en aprender
Técnicas interpersonales y de equipo	Consiste en enseñarles a los alumnos algunas prácticas interpersonales y grupales imprescindibles. Requiere que los alumnos aprendan tanto las materias escolares como las prácticas interpersonales y grupales necesarias para funcionar como parte de un grupo.
Evaluación grupal	Esta evaluación tiene lugar cuando los miembros del grupo analizan en qué medida están alcanzando sus metas y, manteniendo relaciones de trabajo eficaces. Los grupos deben determinar qué acciones de sus miembros son positivas o negativas.

Nota: Se exponen los elementos esenciales y se explican.

Fuente: Elaboración propia a partir de Johnson, Johnson y Holubec (1999).

Según Pujolàs (2002) el trabajo en equipo es una parte fundamental en una estructura de aprendizaje cooperativo, por lo tanto es muy importante el cómo se forman los grupos. Normalmente se forman grupos de forma heterogénea y lo ideal es que el equipo de trabajo dure bastante. Pero también destaca Pujolàs (2002, p. 15) que "es conveniente que todos los miembros de un grupo clase se relacionen entre si y tengan la oportunidad de trabajar juntos alguna vez. No es conveniente que siempre trabajen en un mismo equipo los mismos alumnos." Por

lo tanto tendremos que realizar diferentes tipos de equipos de trabajo e ir combinándolos a lo largo del ciclo formativo. Para hablar de los diferentes grupos y cómo formarlos recurrimos a Pujolàs (2002) y Johnson, Johnson y Holubec (1999). Expondremos sus teorías en una tabla resumen expuesta a continuación:

Tabla 6. *Formaciones de grupos de equipo.*

Autor	Tipos de equipo	Características del grupo	Cómo construirlos
Pujolàs	Los equipos de base	Son permanentes y siempre de composición heterogénea.	Los equipos serán de 3-4-5 miembros, lo ideal es 4.. Dentro del grupo tendremos a alumnos con diferentes niveles, uno que tenga un rendimiento más alto y que esté motivado, dos alumnos con un rendimiento medio y un cuarto miembro que esté más necesitado de ayuda y con un rendimiento más bajo.
	Equipos esporádicos	Se forman durante una clase y duran lo que dura la sesión.	La cantidad de miembros de un equipo esporádico puede variar mucho (desde 2 o 3 alumnos, hasta un máximo de 6 u 8) y su composición puede ser tanto homogénea como heterogénea.
	Equipos de expertos	Parten de los equipos base.	Un miembro de cada equipo se “especializaría” en un conocimiento o habilidad, hasta hacerse “experto” en ello, para que más tarde transmitiera sus conocimientos dentro del equipo de base, como los demás le transmitirían a él los conocimientos adquiridos en sus respectivos equipos de expertos.
Johnson, Johnson y Holubec	Grupos formales	Van desde una hora hasta varias semanas.	Los estudiantes trabajan juntos para lograr objetivos comunes, asegurándose de que ellos mismos y sus compañeros de grupo completen la tarea de aprendizaje asignada.
	Grupos informales	Duran desde unos pocos minutos hasta una hora.	El docente puede utilizarlos durante una actividad de enseñanza para centrar la atención de los alumnos en el material en cuestión o para promover un clima propicio al aprendizaje.
	Grupos de base	Funcionamiento a largo plazo.	Grupos heterogéneos y con miembros permanentes, cuyo objetivo es posibilitar que sus integrantes se brinden unos a otros el apoyo, la ayuda, el aliento y el respaldo que cada uno de ellos necesita para tener un buen rendimiento escolar.

Nota: Se exponen tres tipos de equipos con sus características principales, de dos autores.

Fuente: Elaboración propia a partir de Pujolàs (2002, pp. 16-17) y Johnson, Johnson y Holubec (1999, pp. 5-6).

A la hora de distribuir a los alumnos en las aulas, según Johnson, Johnson y Holubec (1999), la disposición el arreglo del espacio y los muebles de la clase pueden afectar a las conductas del docente y de los alumnos. Tiene que haber un orden que permita centrar la atención visual y favorecer la acústica.

En el aprendizaje cooperativo tenemos que diferenciar los roles de los alumnos y el del profesor. Según Johnson, Johnson y Holubec (1999, p. 4) el rol del docente es multifacético, deberá " explicarles a los alumnos la tarea de aprendizaje y los procedimientos de cooperación, supervisar el trabajo de los equipos, evaluar el nivel de aprendizaje de los alumnos y alentarlos a determinar con qué eficacia están funcionando sus grupos de aprendizaje". Y para explicar los roles de los alumnos podemos clasificarlos según su función en el grupo en el supervisor del tono de voz (controla el tono de voz de los compañeros), supervisor de ruido (controla el nivel de ruido del grupo) y supervisor de los turnos (controla las intervenciones de los compañeros). Dentro del grupo hay muchos más roles diferentes.

3.3.3. Tipos de actividades

En este apartado se van a describir diferentes tipos de actividades que se pueden implementar en el aula para llevar a cabo un aprendizaje cooperativo. En la siguiente tabla se resumen algunas de las más usadas, dependiendo lo que se busque en cada momento.

Tabla 7. *Diferentes tipos de actividades para llevar a cabo un aprendizaje cooperativo.*

Actividad	Procedimiento
Lectura compartida	Un miembro del equipo lee un párrafo, el compañero de al lado lo intenta explicar y los otros dos del grupo lo pueden ayudar a completarlo. Posteriormente el proceso se repite con otro compañero.
1-2-4	El docente plantea una pregunta a todo el grupo. La dinámica es que empiecen por pensar la respuesta correcta individualmente. Posteriormente se ponen dos a dos e intercambian opiniones y la última parte es entre los 4 llegar a la respuesta correcta.
Folio giratorio	El docente asigna una tarea al grupo, y en un folio uno de los miembros del grupo empieza a escribir una respuesta, y los demás del grupo le ayudan, cuando termine, ese folio pasa al siguiente que contesta a otra pregunta, y así sucesivamente.
Parada de tres minutos	Cuando el docente realiza una explicación en clase y hace una pequeña parada de tres minutos. Durante ese tiempo, cada grupo pensará y reflexionará sobre lo que se les ha explicado hasta entonces, y todos deben preparar dos o tres preguntas, que deberán plantear después.
Lápices al centro	El docente entrega una hoja con tantos ejercicios como miembros tiene el grupo, y cada miembro se hace cargo de uno de ellos. Consta de dos partes, una primera en la que los alumnos hablan entre sí, sobre cómo responder a la pregunta sin escribir nada. Y una segunda parte en la que sólo pueden escribir y no pueden hablar.
El juego de las palabras	El docente escribe en la pizarra unas cuantas palabras clave sobre el tema que están trabajando o ya han terminado de trabajar. En cada grupo los alumnos deben expresar la idea que hay detrás de esa palabra, entre todos la completan o matizan.

Nota: Se exponen diferentes actividades y cómo llevarlas a cabo.

Fuente: Elaboración propia a partir de Pujolàs y Lago (s.f., pp. 86-102).

3.3.4. Ventajas y desventajas

A la hora de hablar de las ventajas y desventajas de este método hay diversas opiniones al respecto, todas muy parecidas y en concordancia. En la siguiente tabla se ponen un resumen de todas ellas.

Tabla 8. *Ventajas y desventajas del aprendizaje cooperativo.*

Ventajas	Desventajas
Favorece el proceso de sociabilización, la adquisición de competencias sociales y el control de impulsos agresivos.	Espacios inadecuados para el trabajo en grupo, con excesivos espacios entre los miembros del grupo.
Favorece la aceptación y el respeto de las diferencias.	Incremento del tiempo de corrección y evaluación.
Aumenta la motivación y se ven otros puntos de vista de otros compañeros.	Falta de participación de un miembro del grupo. Esto se conoce comúnmente como el alumno gorra.
Favorece el aprendizaje de todos los alumnos, tanto lo que tienen un buen nivel, como los que están en uno más bajo.	Actitud dominante de un miembro del grupo, imponiendo sus criterios sin compartir opiniones.
Ayuda a organizarse mejor y a perder el miedo a hablar en público.	Escasos recursos materiales y temporales.
Mejora el rendimiento académico en comparación con otras estrategias competitivas e individualistas.	Falta de experiencia del profesorado.

Nota: Se exponen algunas ventajas e inconvenientes del aprendizaje cooperativo.

Fuente: Elaboración propia a partir de González y García Ruiz (2007), y Johnson, Johnson y Holubec (1999).

4. Estudio de campo

4.1. Introducción

Tras la realización del marco teórico y de las prácticas, que se realizaron durante el máster, podemos considerar que tenemos las herramientas necesarias para realizar un estudio de campo sobre las funciones y el aprendizaje cooperativo. En este estudio se realizarán una serie de encuestas a diversos docentes de matemáticas con el fin de averiguar sus opiniones respecto al bloque de las funciones y sobre el aprendizaje cooperativo como método de enseñanza-aprendizaje. Este estudio se llevará a cabo con el fin de conseguir más datos acerca de las dificultades que presentan los alumnos en dicho bloque y sobre las ventajas o desventajas del aprendizaje cooperativo y su uso, según los docentes. Gracias a los resultados obtenidos se ha podido preparar mejor la propuesta práctica del presente trabajo.

4.2. Objetivos

El objetivo principal de este estudio de campo es corroborar los datos obtenidos en el marco teórico, tanto de las dificultades que presentan los alumnos como del método de aprendizaje cooperativo. Por tanto, en este estudio nos proponemos alcanzar los siguientes objetivos específicos:

- Averiguar y exponer las dificultades que presentan los alumnos a la hora de enfrentarse al bloque de funciones.
- Saber y describir cómo podemos ayudar a los alumnos a superar estas dificultades.
- Determinar si la metodología basada en el aprendizaje cooperativo es muy usada entre los docentes y si les resulta útil.
- Averiguar, en base a la experiencia de los docentes, qué ventajas e inconvenientes le ven a esta metodología.

4.3. Metodología

Para la realización del presente estudio de campo se ha realizado una encuesta, anónima, de 10 preguntas, para que no sea muy pesada y ardua de contestar por parte de los docentes de matemáticas en ESO y Bachillerato, los cuales son profesores con amplia experiencia en la docencia y con edades comprendidas entre 40 y 60 años. Al final se obtuvieron 10 encuestas realizadas por parte de los docentes del departamento de matemáticas, no es quizá una muestra muy

representativa, pero para este trabajo ha sido más que suficiente para obtener unas conclusiones y realizar nuestra propuesta.

La encuesta ha sido desarrollada con la herramienta gratuita en internet *Survey Monkey*, con algunas preguntas cerradas, con respuestas múltiples para que podamos hacer un estudio más centrado de los datos, y otras preguntas abiertas, dejando la posibilidad a los docentes de que puedan expresar sus opiniones libremente y así tomar notas de ellas. Para elaborar las cuestiones nos hemos basado en la experiencia vivida durante las prácticas de este máster y en los conocimientos adquiridos sobre el aprendizaje cooperativo y las funciones durante la elaboración del presente trabajo. La encuesta consta de dos partes, una referida exclusivamente al bloque de las funciones, lo que opinan los docentes o las dificultades que ven en sus alumnos, y otra parte sobre el aprendizaje cooperativo, si lo usan o lo han usado alguna vez y qué han podido observar durante su uso.

Entre los motivos principales por los cuales se escogió este tipo de metodología para realizar el estudio de campo, podemos destacar que con las encuestas se obtienen resultados claros y concisos de lo que se busca para implementar nuestra propuesta didáctica, y otro de los motivos fue que estos tipos de encuestas resultan muy cómodas para realizar por parte de los docentes, y a la vez resulta más fácil contactar con distintos profesores de matemáticas de varios centros pudiendo reunir más encuestas en el menor tiempo posible, para posteriormente poder llevar a cabo el estudio de los resultados.

Para hacer llegar a los diferentes docentes las encuestas usamos el correo electrónico personal. Se mandaron encuestas a dos centros diferentes, a los departamentos de matemáticas. Estos centros fueron: "Colegio Marista La Merced-Fuensanta" en Murcia y "colegio Joyfe" en Madrid. Como se comentó en otro apartado anterior se escogieron estos centros por una serie de motivos, respecto al primero por la cercanía con algunos docentes y al segundo porque se realizaron allí las prácticas del máster.

4.4. Cuestionario

Con respecto a la recogida de información, como ya se ha comentado, hemos utilizado la plataforma *Survey Monkey* para la elaboración de la encuesta, la cual consta de 10 preguntas y podríamos dividir en dos bloques de preguntas, uno sobre las funciones y otro sobre el aprendizaje cooperativo. La utilización de este programa ha hecho mucho más fácil recoger la información y tratar los datos, puesto que este programa lo hace automáticamente. La encuesta se expone en la siguiente tabla, justificando el porqué de cada una de las preguntas:

Tabla 9. Resumen y justificación de la encuesta realizada.

Preguntas	Opciones de respuesta	Comentarios	Justificación de lo que se busca conseguir
1. ¿En qué niveles ha dado clases?	<ul style="list-style-type: none"> a) 1º ciclo de ESO b) 2º ciclo de ESO c) Bachillerato d) Otro (Especifique) 	Pregunta mixta con múltiples opciones, pudiendo seleccionar varias, e incluir otra opción.	Para caracterizar mínimamente la muestra.
2. ¿Considera el bloque de funciones importante dentro de la asignatura de matemáticas, dada su aplicación en la vida real?	<ul style="list-style-type: none"> a) Lo considero el más importante b) Lo considero importante pero no el que más c) Lo considero dentro de los menos importantes d) Lo considero el menos importante 	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer la importancia que el profesor le da al bloque de funciones.
3. Con respecto a la pregunta anterior, ¿por qué piensa eso sobre el bloque de funciones?	Respuesta abierta	Pregunta abierta con posibilidad de añadir comentarios	Conocer el porqué de la importancia del bloque de funciones según los docentes.
4. ¿Dónde cree que los alumnos presentan más dificultades en el bloque de funciones?	<ul style="list-style-type: none"> a) Se aprenden los conceptos de memoria sin entenderlos bien, dominio, recorrido, máximos... b) Dificultad con la simbología usada, intervalos, puntos rellenos o vacíos, E, U... c) No diferencian variable dependiente de independiente d) Se lían con las características, simetría, monotonía, extremos... e) No entienden bien cuando termina una gráfica, no entienden las flechas finales 	Pregunta cerrada con múltiples opciones, pudiendo seleccionar varias.	Averiguar las dificultades que presentan, más frecuentemente, los alumnos a la hora de afrontar el bloque de funciones.
5. ¿Cómo piensa que se puede ayudar a los alumnos a superar las dificultades anteriormente señaladas?	<ul style="list-style-type: none"> a) Con actividades contextualizadas en la vida real, para que vean la importancia de las funciones b) Con más énfasis en los conceptos teóricos, con trabajos extra, clases de refuerzo... c) Con una metodología en la que se busque más la participación del alumno en clase d) Otro (especifique) 	Pregunta mixta con múltiples opciones, pudiendo seleccionar varias, e incluir otra opción.	Averiguar algunas estrategias que se puedan llevar a cabo para ayudar a los alumnos a enfrentarse a las dificultades del bloque de funciones.

6. ¿Cree que la metodología basada en el aprendizaje cooperativo puede ayudar a los alumnos a trabajar y entender mejor las funciones? ¿Por qué?	Respuesta abierta	Pregunta abierta con posibilidad de añadir comentarios	Determinar según la propia experiencia de los docentes si el aprendizaje cooperativo puede ayudar al alumno a enfrentarse al bloque de funciones.
7. ¿Ha usado alguna vez el aprendizaje cooperativo en sus clases? ¿Le ha resultado útil?	Respuesta abierta	Pregunta abierta con posibilidad de añadir comentarios	Determinar la experiencia de los docentes en el uso del método de aprendizaje cooperativo y saber su opinión al respecto de dicho método.
8. Dentro del grupo, ¿los alumnos trabajan individualmente o los ha visto participativos, cooperando y ayudándose para sacar adelante los ejercicios?	Respuesta abierta	Pregunta abierta con posibilidad de añadir comentarios	En función de la experiencia de los docentes, averiguar cómo ven a los alumnos cuando trabajan de forma cooperativa.
9. ¿Podría destacar alguna ventaja del aprendizaje cooperativo?	<ul style="list-style-type: none"> a) Se desarrollan relaciones sociales, mejorando el ambiente entre compañeros b) Ayuda a organizarse y a perder el miedo a hablar en público c) Se progresar en el aprendizaje mediante la cooperación d) Otro (especifique) 	Pregunta mixta con múltiples opciones, pudiendo seleccionar varias, e incluir otra opción.	Averiguar qué es lo más destacado, por parte de los docentes, sobre el aprendizaje cooperativo.
10. ¿Podría destacar alguna desventaja del aprendizaje cooperativo?	<ul style="list-style-type: none"> a) Se pierde mucho tiempo en preparar la clase para trabajar en grupos b) Se arma mucho follón al trabajar así c) Siempre hay alumnos que terminan por no hacer nada y sólo copian d) Otro (especifique) 	Pregunta mixta con múltiples opciones, pudiendo seleccionar varias, e incluir otra opción.	Averiguar cuál es la mayor desventaja que presenta el aprendizaje cooperativo, según la experiencia de los docentes.

Nota: Se proporcionan las preguntas, las opciones de respuesta, algunos comentarios y la correspondiente justificación.

4.5. Resultados obtenidos

Se han conseguido recabar 10 encuestas y casi todos los docentes han respondido a todas las preguntas. En este apartado se hará una presentación de los datos obtenidos y en el siguiente apartado se analizarán dichos resultados.

Los datos obtenidos en la primera pregunta se presentan en la siguiente gráfica:

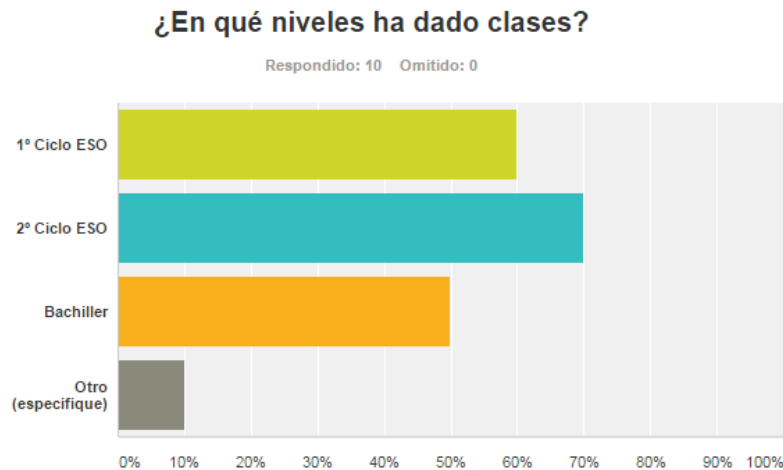


Ilustración 1. Cursos en los que los docentes han impartido clases.

Respecto a la segunda cuestión se presenta la siguiente gráfica:

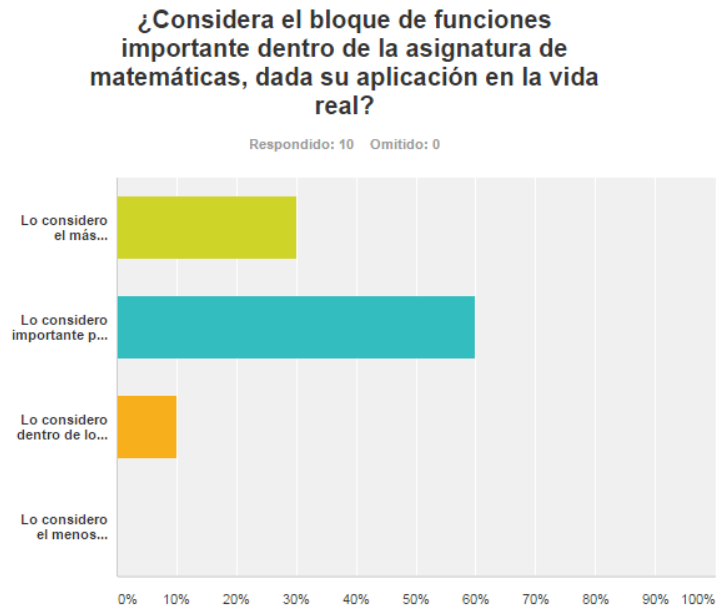


Ilustración 2. Importancia del bloque de funciones según los docentes.

En la tercera pregunta, no hay gráfica, tenemos los comentarios de los docentes, de los cuales la mayoría han coincidido en las respuestas, todos hablan de la importancia de las funciones en la vida real, otro en cambio habla de otros bloques más importantes, como la aritmética o la geometría.

Para la cuarta pregunta se presenta la siguiente gráfica con los datos recogidos:

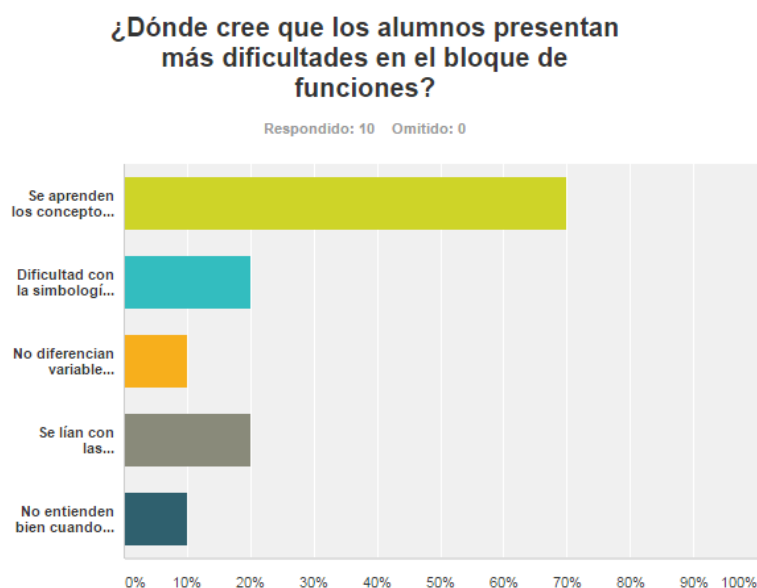


Ilustración 3. Dificultades que presentan los alumnos en el bloque de funciones.

Con respecto a la quinta pregunta se han obtenido los siguientes resultados:

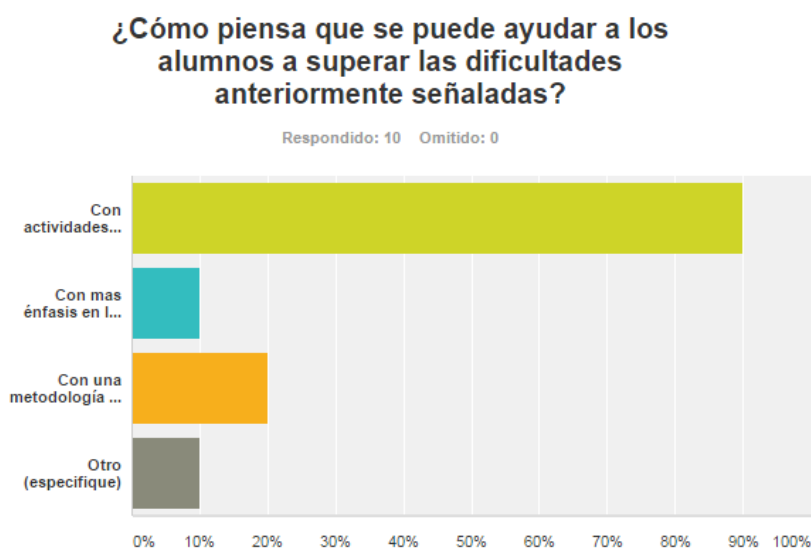


Ilustración 4. Soluciones aportadas por los docentes para ayudar al alumno.

En la sexta pregunta se pregunta si el aprendizaje cooperativo puede ayudar al alumno a entender mejor las funciones, todos respondieron que sí. Unos dicen que es un tema muy bueno para trabajarlo con este método, otros que el aprendizaje cooperativo ayuda a los alumnos a organizar los conceptos y otros que entre los propios alumnos se resuelven algunas dudas.

Con respecto a la séptima pregunta, el 100% de los docentes encuestados han usado alguna vez el aprendizaje cooperativo en sus clases y de hecho algunos lo

usan de forma continuada a lo largo del curso lectivo. A todos también les ha resultado útil en ciertos momentos del curso.

En la octava pregunta, queremos saber cómo se toman los alumnos el uso de este método, y aquí los docentes dan respuestas parecidas. Comentan que la mayoría de alumnos suelen cooperar entre ellos y ayudarse, pero que en todas las aulas siempre hay algún alumno que no hace nada o que le cuesta trabajar en equipo.

Los resultados de la novena pregunta se presentan en la siguiente gráfica:

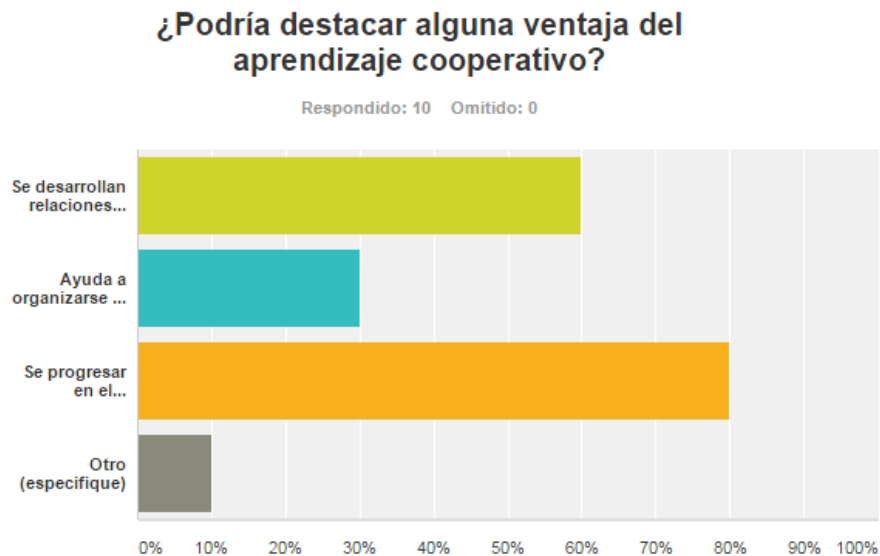


Ilustración 5. Ventajas del aprendizaje cooperativo.

Los resultados de la décima y última pregunta son los siguientes:

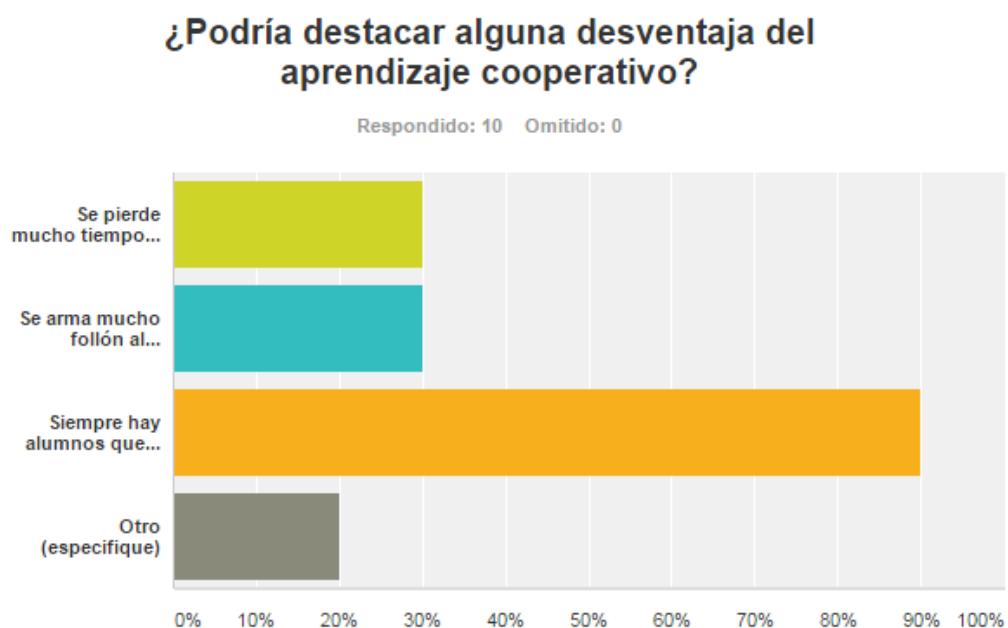


Ilustración 6. Desventajas del aprendizaje cooperativo.

4.6. Análisis de los datos obtenidos

En este apartado vamos a realizar un análisis de los resultados obtenidos en cada una de las preguntas, viendo de esta forma si se han correspondido los resultados obtenidos en la encuesta con lo que los autores de prestigio nos cuentan.

Con respecto a la *primera* pregunta se realizó para situar a los docentes que realizaban la encuesta, por si alguno teníamos que descartarlo por no estar dando clases en secundaria o bachillerato, y según los resultados, de todos los encuestados, no se descartó a nadie.

Con respecto a la *segunda* cuestión, vemos como la mayoría de docentes sitúan al bloque de funciones entre los más importantes, pero no piensan que sea el más importante de las matemáticas, al contrario que Spivak (2013) que decía que el concepto de función era el más importante dentro de las matemáticas.

La *tercera* cuestión completa a la segunda, puesto que aquí los docentes nos exponen el porqué de haber elegido al bloque de funciones entre los más importantes dentro de las matemáticas, y aquí las respuestas van todas en el mismo sentido, el mismo que nos marcan los autores vistos en el marco contextual, que las funciones son una parte importantísima de las matemáticas por su gran aplicación en la vida real.

En la *cuarta* pregunta ya nos metemos en las dificultades que presentan los alumnos en el bloque de funciones, y aquí han habido respuestas más variadas al poder seleccionarse más de una respuesta. Pero si nos paramos a ver la respuesta más votada tenemos que dar la razón a autores como José del Río Sánchez o Tomás Ortega y Cristina Pecharromán, quienes ya destacaban la dificultad que presentan los alumnos al estudiarse los conceptos de memoria sin entender realmente lo que significan. La segunda más votada ha sido la que presentan dificultades a la hora de hacer las características de las funciones, un error también reconocido por varios autores de este campo.

Con la *quinta* pregunta se buscaba, que bajo la experiencia de los docentes, averiguásemos cómo poder ayudar a los alumnos a superar estas dificultades, y la mayoría coincidió en resaltar la importancia de que se realicen actividades contextualizadas para que los alumnos entiendan la importancia de las funciones en la vida real. La segunda respuesta más votada fue que se usase una metodología que busque más la participación del alumno en las clases, y estos han sido los dos pilares de nuestra propuesta didáctica.

Con respecto a la *sexta* pregunta, todos los docentes encuestados están de acuerdo en que este es un tema muy bueno para trabajarlo usando una metodología

basada en el aprendizaje cooperativo. Algunos docentes destacan que esta metodología ayuda a los alumnos a trabajar unidos y que se fomenta que se ayuden unos a otros como por ejemplo cuando se explican dudas con sus palabras llegando a entenderlo mejor que cuando lo explica el propio docente. Otros docentes dicen que la metodología es buena pero que hay que combinarla con otras propuestas, y que hay que pensar bien qué tipo de actividades se realizan para que sean útiles para los alumnos. Esto mismo podíamos leer de Johnson, Johnson y Holubec (1994) cuando nos decían que esta metodología no hacía falta usarla constantemente.

Con respecto a la *séptima* pregunta, a todos los docentes les ha resultado útil el uso de esta metodología, y algunos destacan que la usan todo el año, otros dicen que sólo la usan una vez en cada tema para realizar alguna actividad, otros que la usan sólo dependiendo del bloque que se vaya a dar, y otros destacan que resulta muy útil sobre todo por tener más datos para poder evaluar a los alumnos.

En la *octava* pregunta, los docentes nos cuentan cómo ven a los alumnos y la mayoría coinciden en decir que suelen cooperar, ayudarse unos a otros, resolverse dudas, etc. Muchos coinciden también en destacar que si saben hacer los ejercicios algunas veces trabajan individualmente y otros comentan el famoso alumno gorrón o polizón, aquel que se aprovecha del trabajo de los demás. De este tipo de alumno también nos habló Johnson, Johnson y Holubec (1994).

En la *novena* pregunta se habla de las ventajas de este método, y coinciden de pleno con las enumeradas en el marco teórico, destacando por encima de todas la de progresar en el aprendizaje mediante la cooperación o lo que es lo mismo, que favorece el aprendizaje de todos los alumnos, tanto lo que tienen un buen nivel, como los que están en uno más bajo, tras esta se sitúa la de las habilidades sociales, la cual tiene mucha importancia, y posteriormente la de organizarse y perder el miedo a hablar en público. Por tanto coincidimos en las ventajas del método con los autores Johnson, Johnson y Holubec (1994) y González y García Ruiz (2007).

La *décima* pregunta es muy parecida a la anterior en cuanto a que las desventajas coinciden con lo expuesto por los autores antes mencionados. Pero en este caso una respuesta destaca por encima de las demás, y es que parece que en la realidad el alumno gorrón es un problema serio en este método.

Para terminar este bloque quería destacar que después de la realización del marco teórico y tras analizar los resultados obtenidos en las encuestas, podemos observar que hay una gran relación entre ambas cosas, es decir, que lo que nos cuentan autores de los diversos campos, se reafirma con lo que nos cuentan los docentes en las encuestas. Vemos como las dificultades que tienen los alumnos coinciden y las ventajas o los inconvenientes del aprendizaje cooperativo se repiten en las aulas.

5. Propuesta práctica

5.1. Introducción

En este apartado se va a presentar y fundamentar una propuesta didáctica para enseñar funciones en 3º de ESO, basada en el aprendizaje cooperativo como metodología didáctica, es decir, se va a lograr el objetivo principal de dicho trabajo. Para ello en este apartado se va a desarrollar dicha propuesta didáctica, organizada y explicada en varios apartados. Los objetivos, quienes son los destinatarios de dicha propuesta, qué tipo de metodología se ha usado, se explican algunas sesiones, y para terminar se exponen los resultados esperados y la forma de evaluación.

A la hora de elaborar dicha propuesta se ha tenido en cuenta todo lo desarrollado en el presente trabajo, puesto que es necesario tener la base para poder trabajar el bloque de funciones. Es decir, necesitamos saber el currículo de matemáticas del bloque de funciones en 3º de la ESO, expuesto en el marco teórico, al igual que necesitamos saber cuáles son las dificultades que presentan los alumnos a la hora de enfrentarse al bloque de funciones y conocer bien la metodología de aprendizaje cooperativo para saber cómo nos puede ayudar, esto también está en el marco teórico. Otros aspectos que nos han ayudado a desarrollar esta propuesta han sido la colaboración de algunos docentes con sus experiencias y sus consejos, y la experiencia propia adquirida durante las prácticas realizadas en el Colegio Joyfe.

5.2. Objetivos específicos

El objetivo principal que nos hemos marcado en esta propuesta didáctica es ayudar a los alumnos a superar las dificultades y los errores que presentan más frecuentemente a la hora de enfrentarse a las funciones mediante una metodología basada en el aprendizaje cooperativo.

Los objetivos específicos que se piden en el bloque de funciones son los mismos que se nos van a exigir en el desarrollo de esta propuesta didáctica, y son los que se especifican en el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, en el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Estos objetivos están expuestos en el apartado *3.2.1. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables*.

5.3. Destinatarios

Los destinatarios de esta propuesta didáctica serán en concreto los alumnos de 3º de ESO de la asignatura de matemáticas.

5.4. Metodología

La metodología principal que se ha usado para realizar la propuesta didáctica, para la enseñanza de las funciones, está basada en el aprendizaje cooperativo, lo cual no quita que se trabaje también en clase de forma individual, como por ejemplo cuando demos una clase expositiva. En este tipo de clase, de hecho, desarrollaremos una metodología más operativa-participativa, en la que se buscará siempre la participación activa por parte del alumno. Por tanto durante el desarrollo de la propuesta didáctica usaremos ambas metodologías dando más importancia a la basada en el aprendizaje cooperativo, sobre todo a la hora de la realización de actividades.

Para el desarrollo de una clase normal dividiremos la hora en dos partes, por así decirlo, una primera parte en la que nos dedicaremos a exponer, presentar y explicar una serie de conceptos, esta parte no debe durar más de 15 o 20 minutos, y una segunda parte en la que nos dedicaremos a la realización de ejercicios individuales o en grupos para asentar los conceptos que se acaban de explicar. Se ponen ejemplos de lo que se acaba de ver y resuelven las posibles dudas que le surjan a los alumnos, y que no puedan solucionar entre ellos en el caso de trabajar en grupos.

Gracias al periodo de prácticas, que se han realizado en el máster de formación del profesorado, se ha podido observar a los alumnos en el día a día en las aulas usando la metodología basada en el aprendizaje cooperativo. Hemos visto cómo se ayudaban unos a otros durante la realización de las actividades, pero también cómo se producían más interrupciones durante una clase expositiva. Por ello en esta propuesta se busca una mayor participación de los alumnos en esta parte sobre todo, para que se sientan partícipes de la clase.

En base a lo anterior, la metodología usada en la parte de exposición de los contenidos que toque ese día, será operativa-participativa, buscando siempre que los alumnos estén conectados a la clase, que no se les permita despistarse, ya que durante la parte de la explicación de la teoría se busca que el alumno esté centrado y escuchando. Buscaremos mantener el feedback con los alumnos para mantener su atención, haciendo preguntas a distintos grupos o a alumnos en concreto para saber si lo han entendido o para recuperar la atención de algún alumno despistado. Para lo cual recurriremos a diferentes técnicas, unos días se expondrán los contenidos y se preguntará directamente a los alumnos de forma individual, y otros días se trabajará en grupos y se llevarán a cabo las actividades de *lectura*

compartida o parada de tres minutos, ambas explicadas en el apartado 3.3.3. del presente trabajo.

Para la segunda parte de la clase se trabajará en grupos, buscando la colaboración y la participación de todos y cada uno de los alumnos de la clase. Se realizarán las actividades que se manden tras la parte expositiva, para trabajar los contenidos que se acaben de dar o repasar algunos del día anterior. Para lo cual recurriremos a las actividades cooperativas *lápices al centro*, *1-2-4* y *folio giratorio*, todas ellas explicadas en la tabla 7.

No todos los días las clases serán iguales, un día utilizaremos una hora entera de clase para realizar una serie de actividades contextualizadas y otro día unos cuantos ejercicios que nos sirvan de repaso de cara al examen, todas estas actividades también se llevarán a cabo mediante la metodología basada en el aprendizaje cooperativo. Con este tipo de actividades se busca motivar a los alumnos y llamar su atención sobre la presencia, la utilidad y la importancia de las funciones en la vida real. A la hora de llevar a cabo las actividades de forma cooperativa en el aula, se hará con cierto orden y rigor, marcando unas normas iniciales, y trazando la estrategia a seguir. El rol del profesor será el de pasar de un grupo a otro para escuchar las explicaciones y responder las preguntas de los alumnos, este punto será muy importante, como se explicó en el marco teórico, al igual que el rol de los alumnos durante la realización de las actividades. Estos roles y la composición de los grupos deben quedar claros al comienzo del curso, o de la aplicación de dicha propuesta. Con respecto a los grupos, se trabajará con grupos base, explicados en la tabla 6, grupos permanentes, que se cambiarán al finalizar una evaluación, y heterogéneos.

El resumen de todo lo anteriormente expuesto queda reflejado en la tabla 10, donde se exponen y explican cómo se distribuye en sesiones la propuesta didáctica. Dicha propuesta consta de 9 sesiones de 55min cada una, en las que se va a desarrollar el tema de las funciones, y se explicará cómo se trabajará y que se trabajará cada día.

A la hora de evaluar se tendrá en cuenta tanto el trabajo individual como el trabajo en grupo, es decir, no sólo se tendrá en cuenta la nota del examen final, el cual contará un 60% de la nota final de la evaluación. Dentro del 40% restante que falta se tendrá en cuenta la participación de cada uno de los alumnos en las clases y en el grupo, y dentro del grupo se valorará el respeto por el compañero, la colaboración, la forma de trabajar, etc. También se valorarán las actividades que se entregan por parte de los grupos en este apartado.

Tabla 10. *Sesiones de la propuesta didáctica.*

Sesiones	Metodología	Procedimiento	Duración
1- Repaso de concepto previos	Clase expositiva y realización de ejercicios en grupo.	Se realizarán actividades del tipo lectura compartida o parada de tres minutos para repasar los conceptos.	55 min.
2- Dominio, recorrido y puntos de corte	Clase expositiva y realización de ejercicios en grupo.	Este día se trabajará toda la clase de forma individual, para comprobar si se entendió todo lo trabajado en la clase de repaso de conceptos del día anterior.	55 min.
3- Crecimiento, decrecimiento y extremos	Clase expositiva y realización de ejercicios en grupo.	Trabajaremos en grupos y se realizarán actividades en clase de repaso de lo explicado.	55 min.
4- Actividad de refuerzo	Trabajo en grupo con los portátiles	Trabajaremos en grupos y con un portátil por cada dos alumnos. Se usará el portal de Vitutor y al finalizar la clase se entregará la actividad realizada por cada grupo. Dicha actividad tendrá una parte teórica y una parte práctica.	55 min.
5- Continuidad y discontinuidad	Clase expositiva y realización de ejercicios en grupo.	Trabajaremos en grupos y se realizarán actividades en clase de repaso de lo explicado. Podemos utilizar la actividad de lápices al centro.	55 min.
6- Simetría	Clase expositiva y realización de ejercicios en grupo.	Trabajaremos en grupos y se realizarán actividades en clase de repaso de lo explicado. La actividad se basará en la del folio giratorio, así veremos si todos los alumnos han entendido las distintas simetrías que se pueden dar en las funciones.	55 min.
7- Parábola	Clase expositiva y realización de ejercicios en grupo.	En esta clase se expondrán todos los pasos para resolver una parábola y realizar su estudio. Este día trabajaremos individualmente y preguntando mucho durante la clase.	55 min.
8- Actividad de contextualización	Se realiza por grupos 3 actividades contextualizadas	Trabajaremos en grupos desde el principio, y la actividad durará toda la hora. Usaremos el método 1-2-4.	55 min.
9- Evaluación final	Realización del examen del tema	Se reparte el examen y lo realizarán los alumnos en el tiempo correspondiente.	55 min.

Nota: Se explican las sesiones que se han desarrollado durante la propuesta didáctica.

5.5. Ejemplo de sesiones

Como se ha visto en el apartado anterior la propuesta práctica incluye 9 sesiones, durante las cuales se explica el tema de funciones y se reservan un par de sesiones para repasar conceptos y realizar actividades. De las conclusiones extraídas en el estudio de campo, no todos los docentes aconsejan el uso del A.C. en el aula todo el tiempo, a muchos les gustaría limitarlo a solo cuando se hacen actividades que es ahí donde realmente se le saca partido a este método según los resultados obtenidos. Por consiguiente nuestra propuesta práctica se ha hecho en consecuencia a los datos obtenidos y los estudios realizados, y no siempre lo se ha usado esta metodología en todas las sesiones.

En este apartado se van a desarrollar un par de sesiones de la tabla anterior, entrando más en profundidad a explicarlas y desarrollarlas. Las sesiones desarrolladas son la 1 y la 8.

La *sesión 1*, la de repasar los conceptos previos, es una clase muy importante, puesto que como pudimos observar en el apartado 3.2.2. *Dificultades en el proceso de aprendizaje de las funciones*, muchos de los errores que suelen cometer los alumnos son errores en el conocimiento previo, los cuales si no los entienden bien al principio los van arrastrando y les cuesta mucho más ponerse al día. Por lo cual esta primera clase se ha dedicado entera a repasar lo poco que se dio el año anterior sobre las funciones, asentando los conceptos y resolviendo todas las dudas. Al comenzar esta sesión empezaremos recordando lo que es una función, su importancia dentro de las matemáticas y viendo ejemplos de funciones en la vida real. Repasaremos los conceptos vistos en el año anterior, la función afín, la lineal y la constante y repasaremos también las pocas características que se vieron en 2º de ESO de las funciones. Esta parte se llevará a cabo mediante la metodología explicada en el apartado anterior y en grupos, con la participación de los alumnos y con preguntas directas, para ver de qué se acuerdan y dónde tienen más dudas, para trabajarlo más. Para ello se realizarán las actividades de *lectura compartida o parada de tres minutos*, las cuales son muy útiles para hacer repasos de temas al finalizar o al empezarlos, como bien quedó explicado en el marco teórico. Esta parte durará media clase más o menos. Tras esto se procederá a mandar unos cuantos ejercicios, actividades de arranque orientadas a repasar conceptos ya conocidos, los alumnos trabajaran en grupos y ayudándose unos a otros en la resolución de las actividades. Para este apartado usaremos la actividad 1-2-4, sobre todo para que antes de empezar a discutir entre ellos las posibles resoluciones de los ejercicios se paren a pensar individualmente y reflexionen sobre las posibles respuestas. Mientras el docente pasará por los diferentes grupos observando cómo

trabajan los alumnos, escuchando sus explicaciones y sus dudas. Algunas actividades de esta sesión consistirán en: Decir si ciertas graficas son funciones o no y explicar el porqué. Dar una tabla de valores y saber qué representa y si es una función. Poner unos ejemplos de funciones lineales y afines y exponer sus características.

Durante la *sesión 8*, los alumnos trabajan en grupos desde el principio y se dedica la hora entera la realización de una actividad de contextualización para que vean los alumnos las diferentes aplicaciones en la vida real de las funciones y su importancia. Además, como se ha visto en el marco teórico y apoyado por el estudio de campo, la realización de actividades de contextualización ayuda al alumno a entender mejor las funciones, las variables y sus características. En esta sesión lo que buscamos es que los alumnos entiendan que las funciones son importantes fuera de la clase, fuera de las matemáticas, puesto que las pueden ver en la sociedad cada día, en el futbol, en estudios de mercado, en la bolsa, etc. Son una parte importante de las matemáticas y tienen que entender su relevancia en la vida real. En esta hora, se empieza explicando la importancia de las funciones en la vida real, donde las pueden ver, y poner unos pequeños ejemplos como el relacionar la temperatura y la estación del año, o goles y partidos, etc. Luego se repartirá una hoja con tres ejercicios, hoja que está en el anexo 1, y usando la técnica 1-2-4 se empezará a trabajar. La hoja de ejercicios se les repartirá a cada miembro del grupo para que trabajen individualmente durante un par de minutos, posteriormente empiezan a trabajar por parejas, discuten sus puntos de vista y conversan entre ellos las dudas iniciales, para terminar por hacer una breve puesta en común. Mientras el docente se pasa por los diferentes grupos resolviendo las posibles dudas que los alumnos tengan a la hora de relacionar qué se pregunta y qué hay que responder. Para terminar cada alumno deberá entregar los tres ejercicios hechos en el folio correspondiente. Con este tipo de actividad a parte de asimilar algunas competencias como la competencia lingüística, aprender a aprender, sentido de iniciativa y espíritu emprendedor, estamos aprovechando para que los alumnos hagan actividades de refuerzo que les valgan para el examen. También se consigue que los alumnos observen cómo las funciones fuera de la clase de matemáticas se usan con mucha asiduidad.

5.6. Resultados previstos

Una vez concluida la propuesta didáctica y tras todo lo argumentado tanto en el marco teórico como en el estudio de campo, lo que esperamos de esta metodología propuesta es mejorar en cómo los alumnos son capaces de asimilar los conceptos

de memoria pero entendiendo lo que significan y cómo expresarlos en una gráfica. Hasta ahora muchos de los errores que cometían los alumnos eran en los conceptos teóricos, con la puesta en marcha de esta propuesta se trabajan más estos conceptos y ven en actividades contextualizadas lo que les da a los alumnos una base más sólida.

Se espera que los alumnos sean capaces de relacionar una función con su correspondiente gráfica, sepan interpretarla y sean capaces de explicar sus características. Al trabajar de forma individual y cooperativa, los alumnos saben que tienen que saber hacer las cosas por sí mismos. Uno de los problemas que se presentaba más a menudo en el trabajo cooperativo es el alumno gorrón, pero si todos tienen que trabajar también individualmente, obligamos a todos a estudiar y se ve quienes han entendido la explicación y quiénes no.

Por último y no menos importante se espera que tras esta propuesta los alumnos entiendan la importancia de las funciones en la vida real, que aprendan a usarlas en contextos adecuados y que cuando lean un problema con una función sepan lo que se les está pidiendo y lo que tienen que hacer para calcularlo. Esto se consigue con la realización de las actividades contextualizadas, que como hemos podido observar en el estudio de campo la mayoría de docentes le dan mucha importancia y en la presente propuesta también se la hemos querido dar.

Con la puesta en marcha de esta propuesta se pretende que los alumnos vayan no sólo mejor preparados al examen si no que trabajen más y mejor durante las clases, que estén más atentos, y que cuando no entiendan algo lo pregunten al docente o al compañero de su lado con total confianza.

5.7. Formas para evaluar la eficacia de la propuesta

A la hora de evaluar la propuesta didáctica, se ha observado que se requiere más tiempo para preparar las clases pues la metodología cambia y la forma de evaluación también. Los días que se trabaja con grupos desde el principio se pierden unos minutos en colocar las mesas para que podamos empezar la clase. Otros días que se trabaja en grupos tras la clase expositiva, se corta el ritmo de la clase y se pierde más tiempo que cuando se hacen los grupos al principio. Quizá sería mejor trabajar o en grupos o individual cada día pero no intentar mezclar. Con respecto a la forma de evaluar, es más pesado para el docente, ya que cambia el método, hay que tener mucho más en cuenta el trabajo cooperativo y evaluar a cada alumno por lo que hace en el grupo, y por consiguiente se obtendrán más notas de cada alumno. Lo cual es mejor para el alumno, porque se valora más el trabajo diario.

Los alumnos, por su parte, aceptan mejor esta metodología porque al fin y al cabo están sentados juntos y pueden hablar sin que sea motivo para llamarles la atención. Trabajando juntos se resuelven dudas y se fomentan las buenas relaciones entre ellos. Por parte del docente, es posible que tenga que aguantar una clase con mucho más ruido que si estuviesen sentados solos y trabajando individualmente sin ayuda de nadie más que la del docente.

A la hora de llevar a cabo dicha propuesta didáctica se usan muchos días, puesto que se realizan varias sesiones de repaso o de actividades contextualizadas. Para resolver esto se podría intentar meter más actividades contextualizadas en el día a día sin tener que dedicarle una clase entera para realizar esto.

Esta propuesta influye en el rendimiento de los alumnos, se puede observar cómo los resultados son los esperados, mejoran en la asimilación de los conceptos teóricos y son capaces de llevarlos a la práctica con menos dificultades de las esperadas. Se consigue que cometan menos errores de los vistos en el marco teórico. Por consiguiente podemos decir que se gasta más tiempo en impartir el tema de las funciones mediante esta metodología, se pierde un poco el tiempo en preparar la clase y cansa más al docente a la hora de llevar la clase y corregir todas las actividades, pero también podemos decir que se obtienen mejores resultados académicos.

6. Discusión

Tras la consecución del trabajo fin de máster en el que hemos desarrollado nuestra propuesta didáctica, basándonos en una investigación bibliográfica sobre las funciones y la metodología del aprendizaje cooperativo y en el estudio de campo con las opiniones recibidas en las encuestas que han realizado los diferentes docentes, hemos podido constatar que el aprendizaje cooperativo como método de enseñanza-aprendizaje lleva unos cuantos años en uso y está cogiendo cada vez más importancia en determinadas áreas, como bien señalan los autores estudiados en el marco teórico. En concreto este método se está usando mucho en la asignatura de matemáticas, lo cual se ha podido comprobar con las encuestas realizadas, incluso los profesores con más años de experiencia en los centros lo están poniendo en uso, aunque es cierto que sólo en determinados centros como en el Colegio Joyfe, en el que se realizaron las prácticas de este máster, se está usando esta metodología de forma continuada en toda la ESO y con mejores resultados de lo esperado, ya que los alumnos se han acostumbrado a trabajar de forma conjunta cada día y eso se nota en su adaptación, en su forma de trabajar y en el comportamiento.

A lo largo del trabajo hemos podido entender mejor cuales son las dificultades que presentan los alumnos a la hora de enfrentarse al bloque de funciones, gracias a, entre otros, autores a Ortega y Pecharromán (2014). Hemos visto dónde suelen fallar más y por lo tanto en qué podemos mejorar para ayudarlos, esto se ha visto apoyado con el estudio de campo donde los docentes encuestados, han coincidido con los autores en los errores que más suelen cometer los alumnos y en cómo ayudarlos a superarlos. Por lo tanto en este trabajo lo que se ha buscado es desarrollar una propuesta capaz de ayudar en el proceso enseñanza-aprendizaje a los alumnos a afrontar estas dificultades. El trabajo cooperativo, el cual, como bien señala Pujolàs (2009) o Johnson, Johnson, y Holubec (1994), consigue motivar más a los alumnos a la hora de enfrentarse a las actividades, las actividades contextualizadas, las cuales también estos autores resaltan su importancia a la hora de explicar las funciones y que las entiendan mejor los alumnos, y una metodología operativa participativa, donde el alumno se sienta más participativo, son algunas de las soluciones ante los errores más comunes. Pero tampoco podemos olvidar que la educación lleva años, siglos, y por muchos avances que haya en TIC o cambios en la sociedad, no podemos olvidar lo que es educar y cómo se hacía antes y se sigue haciendo, la clase explicativa y posterior realización de ejercicios es la clase básica de matemáticas que nos vamos a encontrar en muchas ocasiones y si se sigue haciendo es por los buenos resultados que da. No creo que

haya que cambiar de repente la forma de dar las clases pero sí creo que hay que adaptarse un poco a las nuevas tecnologías ayudando a los alumnos a conocerlas y darles un uso educativo. Así que, al contrario de lo que dicen autores como Johnson, Johnson, y Holubec (1994), no creo que haya que ser tan exagerado al decir que el método basado en el aprendizaje cooperativo es el mejor método para llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje.

Para concluir este apartado, debemos comentar que con los resultados de las encuestas a los diferentes docentes hemos podido corroborar la veracidad de los datos que hemos encontrado de los diferentes autores en el marco teórico. aunque con alguna salvedad, como por ejemplo cuando Spivak (2013) se refiere a la función como el concepto más importante de todas las matemáticas, y en cambio los docentes encuestados ven el bloque de funciones como uno de los más importantes, pero no el que más. En cuanto a los errores y las dificultades que presentan los alumnos a la hora de enfrentarse al bloque de funciones vemos como pasan los años y siguen siendo los mismos, los señalados por Ortega y Pecharromán (2014). Aunque los docentes hacen mucho más hincapié en los errores debidos a aprenderse de memoria los conceptos sin entenderlos bien. Pero los alumnos al final consiguen aprobar, esto es debido a que los docentes se han ido actualizando a los nuevos tiempos y han sabido compaginar las clases de toda la vida con las nuevas metodologías y TIC de la época. Esto se ha visto en la encuesta realizada, ya que según los docentes encuestados todos han usado el aprendizaje cooperativo y algunas TIC, como el uso del portátil a la hora de impartir una clase. Lo cual nos lleva a pensar que no hay que intentar cambiar todas las clases de matemáticas usando Wikis, blogs, pizarras digitales, etc., simplemente tenemos que adaptar un poco nuestras clases y en ciertas ocasiones usar estas tecnologías para que los alumnos descubran su utilidad en el ámbito de la educación y conseguir motivarlos más cada día.

7. Conclusiones

En este apartado se dará cuenta de la consecución de los objetivos planteados al principio de este trabajo, es decir, se explicará y argumentará cómo se han conseguido cada uno de los objetivos sobre la base de lo hecho en todo el trabajo para lograrlos.

Respecto al primer objetivo *Analizar la legislación vigente sobre la asignatura de matemáticas, y más en concreto sobre el bloque de funciones, e investigar el nivel de los alumnos de matemáticas en España en dicho bloque*, se ha realizado una búsqueda de información sobre las diferentes normativas aplicables, buscando en el BOE y en el BOCM, basándonos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, en la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, y con respecto a la comunidad de Madrid en el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, para poder afrontar esta propuesta con las garantías y el conocimiento suficiente de la materia a tratar. Y con respecto al nivel que presentan los alumnos de la ESO en la asignatura de matemáticas hemos tenido que revisar algunos estudios de prestigio internacional, como son PISA 2012, TIMS 2011 o la Evaluación General de Diagnóstico 2010. Tras esto pudimos concluir que España está un escalón por debajo en cuanto al rendimiento global en matemáticas con respecto a la mayoría de países, y en lo que respecta a las funciones, los datos obtenidos en estos estudios reflejan que el bloque de funciones no es de los que presentan más dificultades entre los alumnos pero tampoco de los que menos dificultades presentan. Podemos considerar cumplido este objetivo.

En cuanto al objetivo *Investigar sobre el aprendizaje cooperativo como método para la enseñanza, exponiendo sus características y presentando las ventajas e inconvenientes a la hora de su puesta en práctica*, en la revisión bibliográfica se ha hecho un estudio en base a los autores más relevantes en el campo del aprendizaje cooperativo, autores como Kagan, Johnson & Johnson, Pujolàs, etc. Hemos podido definir el concepto de aprendizaje cooperativo, diferenciándolo del colaborativo, competitivo, y el individualista, y hablando de los roles que desempeñan tanto los alumnos como los docentes en clase, para concluir hemos descubierto diferentes actividades para llevar a cabo esta metodología de forma eficaz, y se han expuesto algunas ventajas e inconvenientes. De hecho en la encuesta realizada a los docentes han destacado la importancia del uso del aprendizaje cooperativo en clase, cómo ayuda a los alumnos a mejorar sus relaciones sociales o a progresar en el aprendizaje, pero también están la mayoría de acuerdo en que siempre hay algún alumno que se aprovecha del trabajo de los demás miembros del grupo. Gracias a la investigación y al estudio de campo podemos afirmar que este objetivo se ha conseguido.

Con respecto al objetivo *Averiguar y exponer las principales dificultades que presentan los alumnos de 3º de ESO en el aprendizaje de las funciones y sus características*, hemos realizado un investigación entre los autores más reconocidos de este campo, y comparando entre sus estudios se ha podido llegar a la conclusión que entre las dificultades que más se repiten entre los diferentes alumnos destaca una por encima de las demás, la de que se aprenden los conceptos de memoria sin entender realmente lo que significan y esto, en el bloque de funciones en concreto, es más significativo aún, puesto que hay que entender bien los conceptos para poder interpretar una gráfica y dar sus características. Esto se ha visto reforzado con los resultados de las encuestas, en los que en la pregunta 4 se dan una serie de dificultades que pueden ser más comunes entre los alumnos en el bloque de funciones y la respuesta más repetida ha sido la que habla precisamente de la falta de entendimiento en los conceptos teóricos. A la vista de estos datos entendemos que dicho objetivo se ha cumplido.

Con respecto al objetivo *Averiguar la opinión y la disposición de diferentes docentes de matemáticas frente al uso de esta metodología, basada en el aprendizaje cooperativo, a la hora de enseñar el bloque de funciones*, se ha hecho un estudio de campo mediante la realización de una encuesta sobre las funciones y el aprendizaje cooperativo, a diversos profesores de matemáticas en la ESO y Bachillerato. Para la realización de dicha encuesta se ha tenido en cuenta el estudio bibliográfico realizado anteriormente sobre las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje del bloque de las funciones y sobre el aprendizaje cooperativo y sus ventajas e inconvenientes en el aula con los alumnos. Con la realización de dicha encuesta hemos comprobado cómo el 100% de los docentes coinciden en destacar que el principal problema de los alumnos a la hora de enfrentarse a las funciones es el de aprenderse de memoria los conceptos sin entender realmente lo que quieren decir. También hemos corroborado que casi todos los encuestados destacan la metodología de aprendizaje cooperativo como una metodología eficaz a la hora de enseñar las funciones, coincidiendo también en sus ventajas y destacando el inconveniente de que siempre hay algún alumno que se aprovecha del trabajo de los demás de su grupo. Con estos resultados podemos concluir que el objetivo se ha conseguido.

Con respecto al objetivo principal del presente trabajo, *Presentar y fundamentar una propuesta para enseñar funciones en 3º de ESO, basada en el aprendizaje cooperativo como metodología didáctica*, se ha presentado una propuesta práctica para enseñar el bloque de funciones dividida en 9 sesiones. Para la realización de dicha propuesta se tuvo en cuenta todo lo visto en el marco teórico sobre la

legislación, las dificultades de los alumnos a la hora de enfrentarse a las funciones y las ventajas y los inconvenientes que presenta el aprendizaje cooperativo. También tuvimos en cuenta las diversas opiniones de los docentes encuestados para acometer posibles mejoras en la propuesta. La propuesta por consiguiente se ha basado en una metodología operativa-participativa, consiguiendo aumentar la participación y la atención de los alumnos en clase, reforzando de esta forma el aprendizaje y la comprensión de los conceptos teóricos, que era una de las dificultades que más se daban. También se realizaron varias actividades contextualizadas con el fin de que los alumnos entendiesen la importancia de las funciones en la vida real y su uso constante. Estas actividades, y muchas otras, se realizaron utilizando una metodología basada en el aprendizaje cooperativo, consiguiendo una mayor motivación por parte de los alumnos a la hora de enfrentarse a dichas actividades que se tradujo en una mejora en el rendimiento académico por su parte. A la par de esto se consiguió una mayor participación de los alumnos y que mejorasen las relaciones sociales en el aula.

Con la realización de lo anteriormente expuesto y la consecución de todos y cada uno de los objetivos específicos, marcados al principio de este trabajo fin de máster, podemos afirmar que se ha logrado el objetivo principal de este trabajo.

8. Limitaciones del trabajo

Una vez concluido el presente trabajo hemos podido constatar una serie de limitaciones que nos han marcado su evolución. Unas limitaciones que en muchas ocasiones nos han marcado el camino a seguir puesto que nos hemos tenido que adaptar, destacamos algunas a continuación:

- En este trabajo no hemos podido profundizar tanto como hubiésemos querido en la parte del marco teórico. Tanto el bloque de las funciones como el aprendizaje cooperativo son dos campos con muchos estudios realizados y la bibliografía es muy amplia y no se ha podido ampliar más la información también debido al espacio para la realización del trabajo. También hubiésemos querido ampliar el estudio de campo, incluyendo más encuestas e incluyendo también a los propios alumnos en ellas, pero el tiempo era limitado.
- La segunda es que esta propuesta no se ha podido implementar en un contexto real, y aunque se ajusta a las necesidades tanto de alumnos como de diferentes docentes, no hemos podido constatar su eficacia hasta que no se ponga en práctica.
- La tercera en este caso sería las limitaciones en el estudio de campo, que se ha realizado sobre una muestra muy pequeña y poco representativa de la comunidad docente, aunque para el trabajo ha sido de mucha utilidad, no sería lo suficientemente importante para llevar a cabo un estudio completo. Y como se comentó en el primer punto, ampliar el estudio de campo a encuestas de lo que piensan los alumnos también nos habría dado más datos con los que trabajar y mejorar nuestra propuesta.
- Una última limitación ha sido la de no poder extender esta propuesta a los diferentes bloques de la ESO o incluso en diferentes cursos, porque como se ha podido observar en las prácticas realizadas en el máster, los alumnos se adaptan a la metodología de aprendizaje cooperativo con su puesta en práctica, y mejor la desarrollan cuando más acostumbrados están a ella. Si trabajásemos así en toda la ESO los resultados obtenidos serían mucho más representativos.

9. Prospectiva: Líneas de investigación futuras

En este trabajo se pretende mostrar cómo el uso de la metodología basada en el aprendizaje cooperativo es una metodología eficaz a la hora de explicar el bloque de las funciones en 3º de ESO en la asignatura de matemáticas. Para lo cual se ha diseñado una propuesta didáctica basada en esta metodología, pero no se ha podido poner en práctica, y por ello la primera línea de actuación en el futuro sería la de aplicar esta propuesta en un entorno real y poder hacer un seguimiento de los alumnos durante todo el bloque de funciones. De esta manera podríamos estudiar los resultados, y en base a ellos modificar algunos conceptos o realizar los cambios y mejoras necesarias ajustándonos siempre a las necesidades de los alumnos.

Por otro lado, otra línea de investigación sería el poder ampliar esta propuesta a otros cursos de la ESO. Empezaríamos por adaptar nuestra propuesta a los contenidos del bloque de funciones del curso correspondiente y así diseñar nuevas actividades contextualizadas para que vean la importancia de las funciones. Con esto obtendríamos muchos más datos sobre la propuesta en toda la secundaria, pudiendo así perfeccionarla haciendo un estudio de los resultados obtenidos en los distintos cursos. De esta forma se perfeccionaría nuestra propuesta y la adaptaríamos a todos los niveles de secundaria.

Una vez que nuestra propuesta estuviese perfeccionada y ampliada a otros bloques de la ESO, podríamos continuar investigando en otra línea, la de probar esta propuesta en otros bloques de contenidos, como el álgebra, la geometría o la estadística, para lo cual necesitaríamos revisar el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato para poder adaptar nuestra propuesta a los contenidos de cada bloque, buscando siempre ayudar a los alumnos a entender los contenidos y facilitar su aprendizaje.

10. Referencias bibliográficas

- Bangi, G.T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Relime*, 7(1), 5-23.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). *Representaciones y modelización. La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*. Horsori: Barcelona.
- Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid (20 de mayo de 2015), núm. 118, pp. 10-309. Disponible en: http://www.bocm.es/boletin/CM_Orden_BOCM/2015/05/20/BOCM-20150520-1.PDF
- Del Río Sánchez, J. (1990). Concepciones erróneas en matemáticas. Revisión y evaluación de las investigaciones. *Educación*, 17, 205-219. Recuperado el 24 de abril de 2016 de: <http://ddd.uab.cat/pub/educar/0211819Xn17/0211819Xn17p205.pdf>
- Deulofeu, J. (2003). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación. *Conferencias y ponencias de las XJAEM. Ponencia 4*, pp. 367-377. Recuperado de http://www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r_40/nr_458/a_6226/6226.pdf
- Escaño, J. y Gil de la Serna, M. (2001). Motivar a los alumnos y enseñarles a motivarse. *Revista Aula. De innovación educativa*, 101. Recuperado de <http://www.grao.com/revistas/aula/101-motivacion-escolar/motivar-a-los-alumnos-y-ensenarles-a-motivarse>
- Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *Didáctica de las Matemáticas*, 56, 86-94. Recuperado de http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/UNO%202011%20Funciones.pdf
- González Fernández, N. y García Ruiz, M. (2007). El Aprendizaje Cooperativo como estrategia de Enseñanza-Aprendizaje en Psicopedagogía (UC): repercusiones y valoraciones de los estudiantes. *Revista Iberoamericana de Educación*, 42(6), 1-13.
- González, M. T. y Martín, E. (2003). *Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas*. Universidad de Salamanca. Disponible en: www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/77_teresa_gonzalez_2.doc

- Hernández Escamilla, Y.C. (2007) *Propuesta hacia la noción de función desde su interpretación y representación gráfica*. Material no publicado. Recuperado el 18 de abril de 2016 de: <http://funes.uniandes.edu.co/827/1/31comun.pdf>
- Johnson, D., Johnson, R. y Holubec, E. (1994). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Barcelona: Paidós.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2011). *Evaluación General de Diagnóstico 2010, Educación Secundaria Obligatoria, segundo curso. Informe de resultados*. [Documento online]. Disponible en: <http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-2010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). *Resultados de España en PISA 2012*. Recuperado el 18 de abril de 2016 de <http://www.mecd.gob.es/prensa-mecd/actualidad/2013/12/20131203-pisa.html>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Resultados PIRLS – TIMSS 2011 en España. *Boletín de educación educaine*, 41. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/boletines/educaineemarz2015n41rc1.pdf?documentId=0901e72b81ca95eb>
- OCDE (2013). Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA) PISA 2012-Resultados. *El Mundo*. Recuperado de <http://estaticos.elmundo.es/documentos/2013/12/03/pisa-espana.pdf>
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado (29 de enero de 2015), núm. 25, sec. I, pp. 6986-7003. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf>
- Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación*, 12 (2), 209-221. Disponible en: <http://reined.webs.uvigo.es/ojs/index.php/reined/article/viewFile/880/335>
- Pujolàs, P. (2002). *El aprendizaje cooperativo. Algunas propuestas para organizar de forma cooperativa el aprendizaje en el aula*. Recuperado de <http://www.ugr.es/~fjrrios/pce/media/7a-AprendizajeCooperativoAula.pdf>
- Pujolàs, P. (2009). *Aprendizaje cooperativo*. Barcelona: Edelvives.
- Pujolàs, P. y Lago, J.R. (s.f.). *El programa CA/AC para enseñar a aprender en equipo. Implementación del aprendizaje cooperativo en el aula*. Recuperado de <http://www.elizalde.eus/wp-content/uploads/izapideak/CA-ACprograma.pdf>

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado (3 de enero de 2015), núm. 3, sec. I, pp. 169-546. Disponible en: <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>
- Servicio de Innovación Educativa. (2008). *Aprendizaje cooperativo*. Madrid: Creative Commons.
- Shílov, G.E. (2004). ¿Qué es una función? *Revista Matematika v shkole*, 25, 137-147. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_25/14_una_funcion.pdf
- Trujillo, F. y Ariza, M.A. (2006). *Experiencias Educativas en Aprendizaje Cooperativo*. Granada: Grupo Editorial Universitario.
- Ugalde, W.J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, Educación e internet*, 14(1). Recuperado de http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V14_N1_2013/RevistaDigital_Ugalde_V14_n1_2013/RevistaDigital_Ugalde_V14_n1_2013.pdf
- Villalaín, P. (s.f.). *Aprendizaje por competencias y evaluación por estándares*. Madrid: Edelvives.

11. Anexos

Anexo 1: Actividad contextualizada en la sesión 8.

PROYECTO 3º E.S.O. : LA NUTRICIÓN

NOMBRE Y APELLIDOS :

1.- Un grupo de suricatos huye de una fuerte sequía que asola su hábitat y comienza su peregrinaje en busca de agua en el instante $t = 0$

El número de individuos de la población sigue una ley :

$$P(t) = 140 - 4t - t^2, \text{ donde } t \text{ se mide en meses.}$$

- ¿ Cuántos suricatos había al principio de la huida?
- Finalmente no encontraron agua. ¿ Cuándo desapareció la población completamente?

2.- Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kg de fresas depende del precio de venta, de acuerdo con la siguiente función :

$$B(x) = 2x - x^2 - 0'84$$

- ¿ Entre qué precios por kg se producen beneficios para el almacenista?
- ¿ Qué precio por kg hace que sea máximo el beneficio?
- Si tiene en el almacén 10000 kg de fresas, ¿ cuál será el beneficio total que puede obtener?

3.- Plantear un problema relacionado con la nutrición en el que se utilicen funciones , cuadráticas o lineales.