Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

Mejora didáctica en la transición de la aritmética al álgebra en el primer ciclo de la ESO basada en la ludificación

Presentado por: Jon Iriondo Otxotorena

Línea de investigación: Propuesta de intervención
Director/a: María del Carmen Romero García

Ciudad: Donostia-San Sebastián
Fecha: 13 de Enero 2016

Resumen

En la enseñanza matemática escolar, la introducción del álgebra es una de las etapas que mayor discusión académica ha generado. Esta introducción al álgebra se lleva a cabo realizando una transición desde la aritmética. Se realizó una propuesta curricular, revisando los conceptos trabajados en esta etapa y las conclusiones académicas, basado en el aprendizaje por descubrimiento y el punto de vista constructivista del proceso de enseñanza-aprendizaje. Ante los retos que suponen los cambios conceptuales en esta etapa, se realizó el diseño de actividades basadas en experiencias interactivas, para que los alumnos pudieran experimentar el significado de ese cambio de los números a las letras. En este contexto, se estudió la idoneidad de aplicar los postulados de la ludificación, como método de trabajo, su idoneidad y marco de adaptación. Se concluyó que dotar de experiencias interactivas a los alumnos podría ayudar a generar puntos de referencia significativos en los alumnos.

Palabras claves: Pre-Álgebra, Aprendizaje por descubrimiento, Ludificación, Constructivismo, TIC.

Resumen

In school instruction in mathematics, the introduction of algebra is one of the phases with more academic discussion around. This introduction is carried out like a transition from arithmetic. A curricular proposal was made based on the revision of the most relevant academic conclusions and main concepts in this field. This proposal was built on discovery learning and a constructivist point of view in the teaching-learning process. To tackle the problems derived from the new conceptual challenges, some activities were designed based on interactive activities. In this way, students can experiment with the transition from figures to letters. In this context, the suitability of gamification was evaluated, especially in terms of its aptitude as working method and its adaptation framework. It was concluded that interactive experiences could be helpful for students in the process of creating reference points.

Keywords: Pre-Algebra, Discovery Learning, Gamification, Constructivism, ICT.

Índice

1. Justificación y planteamiento del problema

En el marco de las prácticas del máster, en un centro con todas las etapas preuniversitarias, se observó que la mayor parte de los problemas de los alumnos en la asignatura de matemáticas en bachillerato provenían de un mal entendimiento de los elementos algebraicos, en muchos casos, desde los conceptos más básicos. El autor solicitó al centro poder observar el trabajo que se hacía en el álgebra con los alumnos de 1º y 2º de la ESO y ver de primera mano las experiencias, las asunciones y las deducciones que hacían los alumnos a la hora de enfrentarse por primera vez a ecuaciones algebraicas y planteamiento de problemas.

El álgebra es el primer área matemática escolar que exige un cierto nivel de abstracción, algo que provoca una ruptura con las experiencias matemáticas de los alumnos. Con la introducción al álgebra, además de presentar nuevas formas de planteamiento y resolución de problemas, hace falta redefinir algunos conceptos porque hay una diferencia entre lo que el concepto en sí significa o simboliza y lo que entiende el alumno que significa.

Por un lado, la necesidad de prepararse correctamente para ser algún día docente, empujó al autor a investigar la bibliografía sobre la temática elegida. Por otro lado, puede parecer anacrónico que con todos los recursos didácticos de las que pueden disponer los docentes para generar experiencias interactivas en el alumno, no se utilicen para ayudar al alumno a crear puntos de referencia a los que aludir cuando su capacidad de abstracción no alcanza a entender un planteamiento. Para ello, el alumno debe ser parte activa del proceso de enseñanza-aprendizaje y debe vivir experiencias en primera persona para que se pueda dar una apertura a que ese proceso de enseñanza aprendizaje se pueda dar. Por eso, sería interesante poder utilizar los postulados del aprendizaje por descubrimiento como base metodológica a la hora de preparar las actividades interactivas.

Eso hace plantearse al autor las condiciones en que se puedan proponer actividades jugables al alumno, donde pueda tener esas experiencias interactivas, cómo prepararlas y enlazarlas en un hilo conductor común para trabajar las competencias matemáticas definidas en el currículo escolar.

2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es plantear una propuesta para la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra, otorgando al alumno un papel más activo y manipulativo mediante el juego para el primer ciclo de la ESO.

Para abordar este objetivo principal, se han fijado los siguientes objetivos específicos:

-Primero, se deben identificar y entender bien qué problemas pueden acarrear los alumnos de las etapas anteriores, así como las novedades que presenta para ellos la propia introducción al álgebra, revisando la bibliografía e investigaciones realizadas sobre el tema.

-Por otro lado, comprender las bases del aprendizaje por descubrimiento, bajo qué concepción de la psicología humana se estructura y cómo se puede extrapolar esa concepción a la educación.

-Para poder proponer actividades jugables, hay que revisar las publicaciones sobre la ludificación para evaluar su aplicabilidad en ciertas actividades y los aspectos a tener en cuenta.

-A la hora de proponer las actividades, realizar una correcta contextualización y contemporización de las mismas, así como planificar su desarrollo, alternativas de organización de clase y actividades complementarias.

-Por último, planificar una evaluación tanto de las competencias adquiridas por los alumnos, como de la propuesta y los puntos fuertes y débiles de ella.

3. Marco Teórico

3.1. Currículum escolar

En España la ley vigente que regula la educación es la Ley Orgánica 8/2013, conocida como la LOMCE (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa). La competencia de educación en España recae en gran parte sobre las comunidades autónomas, siendo éstas las que deben concretar el currículo escolar y completar ciertos aspectos.

En el caso de la Comunidad Autónoma del País Vasco, se está desarrollando el documento Heziberri 2020 que fija el marco de modelo educativo pedagógico a aplicar en la comunidad autónoma. Pero este documento solamente desarrolla la organización administrativa, los ámbitos competenciales y el marco teórico de la educación por competencias. A día de publicación de este trabajo no se han desarrollado por decreto los objetivos, las competencias matemáticas, los bloques de contenidos o los criterios de evaluación.

El decreto que está vigente a la fecha de publicación de este trabajo, es el Decreto 175/2007 modificado por el Decreto 97/2010, que regula el currículum de la Educación Básica en la Comunidad Autónoma del País Vasco. En el anexo V de este decreto se fijan los bloques del primer curso de la asignatura de Matemáticas. En el segundo bloque, entre los contenidos a tratar se encuentran:

– Lenguaje algebraico: Significado y uso de las letras para representar magnitudes desconocidas.

– Pautas para traducir expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa.

– Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.

Entre las competencias específicas enumeradas en el decreto, que se pueden consultar en la Tabla 3 incluida en el anexo, que se trabajan de manera directa en esta etapa escolar están:

1. Plantear y resolver, de manera individual o en grupo, problemas extraídos de la vida cotidiana, de otras ciencias o de las propias matemáticas, eligiendo y utilizando diferentes estrategias, razonando el proceso de resolución, interpretando los resultados y aplicándolos a nuevas situaciones para poder actuar de manera más eficiente en el medio social.

3. Utilizar, de manera autónoma y creativa, las herramientas propias del lenguaje y la expresión matemática (números, tablas, gráficos, figuras, nomenclaturas usuales, etc.) para explicitar el propio pensamiento de manera clara y coherente, utilizando los recursos tecnológicos más apropiados.

7. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos y de la comunicación (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para los cálculos como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones de índole diversa y, así mismo, para ayudar en el aprendizaje de las matemáticas.

10. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito para adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

Pero además, se trabajan de manera directa competencias básicas (Tabla 2 del anexo) como la competencia en el tratamiento de la información, la competencia digital y la competencia para la autonomía e iniciativa personal, a la hora de situar al alumno en el centro del acto de aprendizaje. Respecto a las competencias educativas generales, por un lado, se estimulará que el alumno tome decisiones e intente resolver problemas de forma autónoma. Es decir, se trabajará especialmente la segunda competencia educativa general enumerada en la Tabla 1 disponible en el anexo.

3.2. Ecuación: Cuando todo lo conocido se vuelve desconocido

Dentro del proceso de aprendizaje matemático del alumno, uno de los puntos clave del mismo, es el momento que pasa de la procedimental aritmética a la abstracción del álgebra. Que la aritmética sea la puerta de entrada al álgebra, genera una serie de conflictos en el alumno, porque símbolos, conceptos y algoritmos cambian de significado y hace falta redefinirlos en un nuevo campo. Así, cuando a un alumno se le presenta por primera vez una ecuación que solamente se puede resolver de forma algebraica 3+X=5-X, en esa misma ecuación, todos los símbolos presentes en la misma cambian de lo que el alumno tiene entendido que significan a la nueva conceptuación que tienen en el álgebra. A lo largo de la revisión bibliográfica se desgrana cómo van cambiando cada uno de los símbolos que aparecen.

3.2.1. La aritmética.

La aritmética en primaria suele centrarse en procesos, en algoritmos o en estrategias de resolución de fórmulas matemáticas más o menos sencillas, concatenándolas en pasos que ayudan a tener claro el procedimiento a seguir a la hora de resolver una situación planteada. Las características de un ejercicio aritmético en primaria son:

1) El objetivo del ejercicio es el resultado final
2) Este resultado final es cerrado y numérico y por norma general entero
3) El razonamiento es de izquierda a derecha
4) Los pasos del proceso se unen por medio de símbolos de igualdad

Al final de la etapa de primaria, se les propone a los alumnos pequeños retos matemáticos, que cambian de lugar el resultado que han de hallar, un resultado que para ellos siempre ha estado en la derecha. Unos ejemplos de estos retos podrían ser los siguientes:

i) Empezar a introducir símbolos ocultos en las ecuaciones 3+5=□
ii) Deducir el resultado cambiando de lugar el símbolo a 3+□=5 (tanteo)
iii) Empezar con series numéricas para sacar la razón: 2,4,6,8…

Estos ejercicios sorprenden al alumno porque por primera vez el ejercicio está "desordenado", pero a través de tanteo consigue hallar la solución (o no). Por ello, lo más probable es que el alumno vaya a escribir un 2 encima del cuadrado en blanco, porque a tres le faltan dos para ser 5. No es un elemento más dentro de la ecuación, sino un número que se ha "tapado". Es decir, aunque se haya incluido una ecuación con una incógnita, para el alumno sigue siendo un ejercicio aritmético, algo raro para ellos, pero lo mismo de siempre.

Los ejercicios se van complicando hasta llegar a una situación en la que el tanteo no sirva como estrategia para alcanzar el resultado: 3+□=5-□.

Para resolver esta expresión, los alumnos deben superar una dificultad matemática considerable, ya que no le sirven los métodos que le han valido hasta el momento. Hay una clara ruptura, tanto en la simbología, como en los procedimientos y el significado de los mismos. En los siguientes apartados se desgranan los problemas que los académicos han ido encontrando y relacionando en esta etapa del aprendizaje de la matemática.

Uno de los problemas que habitualmente se encuentra a la hora de introducir el álgebra está en el propio comportamiento del alumno. Al alumno se le ha inculcado que en una expresión matemática, el objetivo es encontrar un resultado. Según Booth (1988), mientras que en la aritmética el objetivo era buscar una respuesta particular, en el álgebra no es así, ya que el objetivo de ésta es la derivación, expresión y manipulación de la sentencia principal. Esta forma de entender las matemáticas, se va a hacer visible en diferentes percepciones que tienen los alumnos sobre expresiones, símbolos y procesos.

En el siguiente apartado se ha profundizado en los problemas de base que traen los alumnos, como los que genera la propia transición de la aritmética al álgebra.

Problemas asociados a la aritmética (o las matemática en general)

a) Uno de los problemas que más evidente se hace a la hora de introducir el álgebra en el aula es la dificultad a la hora de plantear un problema. Esto es, los alumnos leen la información, pero no saben traducirlo al lenguaje matemático para poder resolverlo a través de diferentes estrategias. Aunque es un problema que se ve agravado a la hora de tratar con variables, es decir, símbolos que escapan de su "zona de confort", muchos alumnos no saben qué operación-proceso implica la expresión "el doble" o "la mitad". Según concluyeron en un estudio, Vilenius-Tuohimaa, Aunola y Nurmi (2007), las técnicas de lectura y la comprensión lectora, contribuye en la resolución de problemas matemáticos.

b) Según Socas y Palarea (1994), otra de las dificultades de la transición de la aritmética al álgebra es la extensión de problemas de base en la aritmética al álgebra. Estos problemas los agrupan de la siguiente forma:

i) Errores de la propiedad distributiva: $2(x+y) = 2x+y$
ii) Errores de uso de recíprocos: $(1/x + 1/y = 1/(x+y)$ etc
iii) Errores de cancelación: $(x+y)/(x+z)=y/z$

En general, el error viene dado por la falta de criterio claro a la hora de encarar un paréntesis $-(1+2)$, es bastante habitual que los alumnos quiten el paréntesis cambiando el símbolo del primer elemento, pero no del segundo $-(1+2)=-1+2=1$. También a la hora de la jerarquía del producto o división respecto a la suma y resta. Esto unido a la falta de soltura a la hora de trabajar con las fracciones, dificulta el acceso a los procesos de resolución de ecuaciones o simplificación de estructuras algebraicas.

El gran problema a la hora de trabajar con fracciones suele ser la falta de asunción de las operaciones elementales. Esto hace que estructuras como $½+ ¼ = (1+1)/(2+4)$ las resuelvan de la misma manera que hacen con el producto. En cambio, reglas nemotécnicas como las que se usa para la división de dos fracciones, las tienen más asumidas.

c) El tercer problema es la falta de coherencia a la hora de introducir una nueva notación. Y es que la concatenación de símbolos significa diferentes cosas según el contexto, como defienden Keiran y Filloy (1989) o Booth (1984), concatenar cifras como 43 significa 4*10+3, concatenar 2 ½, significa 2+½, pero en el álgebra ab no significa a+b, sino a*b.

Por ello, mientras en primaria los alumnos utilizan la x como símbolo de multiplicación, éste se convierte en un punto a la hora de trabajar la aritmética y el álgebra en secundaria. Pero hay alumnos que no entienden ese cambio y siguen interpretando la x como símbolo de multiplicación. Esto genera confusión en los alumnos, porque les obliga a reinterpretar y redefinir el significado de esos símbolos.

d) El problema de la falta de cierre o el dilema proceso-producto, es una consecuencia de la búsqueda de un resultado numérico en los ejercicios aritméticos. Es decir, los alumnos ante una situación donde el resultado es 1/3 tienden a añadir un =0.33. Esto es por la necesidad que sienten, porque en las etapas anteriores se les ha ido inculcando, de llegar a un resultado cerrado, un número. A esto, Collis (1987), le llamó, falta de clausura (lack of closure) o Davis (1975) dilema proceso-producto. Esto trae dos consecuencias directas, la primera, la inseguridad a la hora de dar por finalizado un ejercicio o problema, por no saber interpretar si ese resultado al que han llegado es el que estaban buscando, si pueden avanzar más, o se han equivocado a la hora de resolverlo. La segunda, la numerización, la necesidad de quitar símbolos como el de la fracción o raíz cuadrada, hacen que el alumno se disponga a resolver √2= 1.41, con tal de no tener esa raíz en el resultado. Esto nos hace que se pierda por un lado, precisión en los resultados, pero por otro, un bloqueo por falta de estrategias alternativas a la hora de quitar esa raíz de una ecuación. Además en ejercicios de simplificación de expresiones algebraicas, no tener claro qué expresión se considera más simplificada o la que nos aporta mayor información más comprimida, trae consigo que el alumno intente dar más pasos de los debidos y cometer errores a la hora de escribir el resultado final.

3.2.2. El negativo

La introducción de números negativos resulta uno de los problemas aritméticos más enrevesados para los alumnos de primaria y primeros años de secundaria. Las asunciones sobre los números negativos, la falta de seguridad a la hora de trabajar con ellos y los problemas operativos que surgen a partir del uso de las mismas, generan una falta de base aritmética que se hace visible a la hora de trabajar con estructuras algebraicas y más aún a la hora de trabajar con ecuaciones.

Gallardo y Rojano (1993) estudiaron la resistencia de los alumnos a la hora de aceptar un resultado negativo, incluso de valorar como posible que ese resultado pueda darse. En una experiencia con los alumnos, concluyeron que los alumnos, ante la autolimitación de los resultados posibles solamente a los números naturales, buscaban argumentos matemáticos para hacer encajar el resultado positivo que intuían.

3.2.3. La Igualdad

Además de problemas de base que pueden acarrear los alumnos, existen otros problemas asociados a la propia transición de la aritmética al álgebra. Como se citaba en la introducción, todos y cada uno de los símbolos utilizados en la ecuación $\sqrt{2}+x=1-x$ cambian de significado para el alumno que está en esa etapa.

El primer gran problema que se encuentran los alumnos, a la hora de enfrentarse por vez primera a una ecuación, es el símbolo de la igualdad. Según Behr, Erlwanger y Nichols(1976), los niños interpretan el símbolo de igualdad como un operador, no como un símbolo relacional. Dicho de otra manera, los alumnos han utilizado hasta este momento el símbolo de igualdad para separar, contemporizar y concatenar pasos que seguían en la resolución de un ejercicio aritmético, por ejemplo, no son capaces de interpretar 3=3. No caen en la cuenta, por ejemplo, que la lectura que hacen de izquierda a derecha, se podría hacer de derecha a izquierda, ya que las expresiones, si no han tenido ningún fallo de operatividad, son equivalentes (y por eso se pone el símbolo de igualdad), Frazer en 1976 definió el símbolo "=" como un símbolo unidireccional para el alumno. Esto defendía Renwick (1932), que la igualdad es un símbolo de distinción, cuya función es separar el problema de su resultado, no como puente entre expresiones numéricamente o cuantitativamente equivalentes.

De esta manera, Levi y Carpenter en 2000, estudiaron qué respuesta le daban los alumnos a expresiones de tipo 1+3=□+2, y vieron que la mayoría respondían que 4. Por lo tanto, los niños, interpretaban que después del = tiene que venir la respuesta, no que fueran dos expresiones equivalentes. Kieran (1981), propuso un ejercicio del tipo □= 3+4 y los alumnos le respondieron que estaba al revés, es decir, que su interpretación de los símbolos les impedían entender el planteamiento. Ginsburg(1977) interpretó esto como que el alumno entiende los símbolos + y = como acciones a realizar, como un operador al que tiene que dar respuesta.

Esta concepción de la igualdad puede ser la explicación a la incapacidad de interpretación de expresiones equivalentes como 3=3, como se ha hecho referencia anteriormente, o 4+5=3+6, como defiende Kieran (1981), para ellos, esto son dos expresiones 4+5=9 y 3+6=9, que dan el mismo resultado, no dos *"nombres"* que se dan al nueve. De todas maneras, Kieran no está de acuerdo con la idea de relacionar estas expresiones como diferentes nombres que se dan al nueve, basándose en experiencias de Denmark (1976) y Collis (1974).

Denmark, por su lado, quiso demostrar el comportamiento de los alumnos que todavía no conocen los símbolos de igualdad y suma, a la hora de interpretar el símbolo de igualdad. Basándose en investigaciones anteriores como el de Anderson (1976), supuso que la interpretación inadecuada del símbolo de igualdad como algo operativo y no relacional, podría provenir del mal planteamiento pedagógico del sistema escolar. Entre las conclusiones de su investigación, se entiende que la mayoría de los alumnos no llegaron a entender el símbolo de la igualdad como algo relacional, sino como operativo. De ahí se deduce que querer presentar el símbolo de igualdad como "*nombres de*" puede no ser una buena idea, porque el alumno no es capaz de entenderlo, porque no es capaz de interpretar la igualdad como relación entre expresiones. De todas formas, Denmark, achaca a la costumbre del alumno de ver la operación de izquierda a derecha, la interpretación que da a ese símbolo. Collis apoyó esa idea de que los alumnos no podían conceptualizar "dos nombres para el mismo número", hasta cierta edad del alumno.

El significado de los operadores de suma, resta, multiplicación y división, evidentemente va ligada a la comprensión que tiene el alumno sobre la igualdad. Es decir, siempre que el alumno entienda el símbolo de igualdad como un símbolo operativo, también entiende estos símbolos como operativos. La comprensión de estos símbolos viene relacionado, a su vez, del manejo que tenga el alumno sobre los paréntesis, el orden de importancia de las operaciones etc.

Knuth y otros (2005) remarcaban que la comprensión relacional del símbolo de igualdad es clave a la hora de resolver ecuaciones, porque es lo que asegura que las transformaciones que se apliquen a la ecuación preservarán la equivalencia de la relación.

3.2.4. La Variable

Conforme los alumnos van adentrándose en los conceptos matemáticos, empieza a ser necesario generalizar términos. Por ejemplo, en geometría, al trabajar el área de los polígonos ya se introducen letras en expresiones matemáticas. Pero esas letras son procedimentales, esto es, aprenden que si necesitan saber el área de un rombo deben multiplicar la diagonal mayor por la menor y dividir entre dos ($A=D.d/2$), es un procedimiento para saber cuánto mide el área. El alumno no es capaz de identificar esas letras con variables, ni tiene herramientas para llegar a saber cuánto mide la diagonal mayor dado un área y la diagonal menor. También en problemas matemáticos se introducen expresiones con letras. Por ejemplo, si se pide calcular el perímetro de un polígono, se enseña al alumno a poner expresiones del tipo P=45.

En 1988 Usiskin clasificó el diferente uso que pueden tener las letras en una expresión algebraica en cinco grandes grupos:

1) Fórmulas A=(D.d/2)
2) Ecuaciones para resolver 40=5x
3) Identidades 2(x+5)=2x+10
4) Propiedades 1=n*(1/n)
5) Funciones f(x)=kx-2

En cada una de estas expresiones, las letras tienen diferentes usos según Usiskin:

1) A, D y d son simbolización de las cantidades de área y diagonales, no llegan a ser "números desconocidos", sino que de manera procedimental se sustituye el valor que simboliza cada uno de esos conceptos en la fórmula.

2) La x es un valor desconocido a descubrir.

3) Es un argumento de la expresión, pero lo importante no es la variable en sí, sino la equivalencia de las expresiones. Es decir, se simboliza alguna propiedad algebraica o aritmética mediante la igualdad. De todas formas, como se ha citado en el apartado de la igualdad, el alumno ve la propiedad de izquierda a derecha, no como una equivalencia. Por ello, al principio lo interpretará más como una herramienta procedimental que como una equivalencia que puede ir de un lado a otro según nos interese en cada situación.

4) Es la generalización de un patrón, de algo que sucede sea cual sea el valor de n natural.

5) x vuelve a funcionar como un valor desconocido, pero no es un valor a hallar, sino que es el valor que cambia para ver el comportamiento de la función en sí. Y k es un parámetro, un valor que se mantiene constante mientras x se "mueve", es decir, k es una constante que puede ser cualquier número, pero no varía, en cambio la x sí puede variar y hacer variar a la f(x).

De todas maneras, el alumno no va a interpretar como expresiones algebraicas cada uno de los cinco ejemplos, porque está más o menos familiarizado con las fórmulas o identidades. Además, estas expresiones no le exigen manejar la x, porque son, como se ha comentado anteriormente, procedimentales, simbolizan conceptos que el alumno tiene más o menos interiorizados y sabe cómo implementar esos procedimientos para hallar el resultado que busca.

En los problemas de geometría que se presentan a los alumnos, es poco común que se dé una vuelta de tuerca al alumno y se le pida, por ejemplo, dado un área y una de las diagonales, hallar cuánto debe ser la otra diagonal, convirtiendo la fórmula procedimental en una expresión algebraica, donde el alumno debe hacer algo diferente para poder hallar el resultado. De hecho, muchos alumnos realizarían la misma operación, multiplicando el área y la diagonal y dando como resultado la división de la misma entre dos. Los alumnos con un bagaje matemático un poco mayor, podrían empezar a tantear valores posibles de la diagonal desconocida, hasta hallar un resultado que implementando en la fórmula, cuadre con el área dada.

La vía clásica de la introducción al álgebra, es comenzar a poner igualdades y un cuadrito donde el alumno escribe el resultado, es decir, lo que para el alumno sería una expresión aritmética, y que sigue percibiendo como tal, convertirlo en una igualdad, en una ecuación. Así, mientras el alumno ve un 5+2, a la hora de plantear un ejercicio se empieza a poner 5+2=□. Pero el gran cambio para el alumno es cuando comienza a cambiar el cuadrito de lugar, 5+□=7. Esto acompañado de una explicación del tipo “qué número tendré que sumar al 5 para llegar a 7”. Y un poco más adelante, ya se sustituye el cuadrito por la letra x, 5+x=7. Aunque el alumno haya manejado expresiones matemáticas como fórmulas o identidades, no los relaciona con el álgebra de manera directa, sino lo relaciona con la letra x. De hecho, muchos alumnos de segundo ciclo de secundaria hallando una ecuación de este tipo y^2+2y+1=0, piden cambiar la variable por x, porque se sienten más cómodos a la hora de trabajar. Esto se debe, según Booth(1986) a que el alumno tiende a ver el álgebra como un conjunto de técnicas manipulativas para hallar un resultado, no como representación de relaciones y procedimientos generales. Dicho de otra manera, una visión un tanto utilitarista del álgebra y las técnicas para resolver problemas planteados.

Küchemann (1978) concluyó que la mayoría de los estudiantes trataba las letras de la ecuación como objetos concretos o los ignoraban. Una pequeña parte lo interpretaba como un número generalizado y una más pequeña aún como una variable. Esto es, la gran mayoría de los alumnos no entienden el significado de la variable, algo que unido a un mal entendimiento del símbolo de igualdad pone en una situación difícil al alumno ante la fractura que supone la transición de la aritmética al álgebra.

Esta falta de entendimiento se visualiza, por ejemplo, ante la ausencia del símbolo de igualdad en una expresión algebraica a simplificar, el alumno, tras concatenar diferentes expresiones equivalentes, y ante la falta de clausura en el resultado del ejercicio, pone un símbolo de igualdad, lo iguala a cero y trata de resolver la “ecuación”, porque siente la necesidad de alcanzar un valor de x.

Según Linchevski (1995), el álgebra se divide en 5 grandes ámbitos,

1) Simplificación de expresiones algebraicas
2) Generalización de patrones
3) Estructuras algebraicas
4) Problemas
5) Ecuaciones

Una visión demasiado finalista del álgebra, puede hacer que por cuestión de inversión de tiempo o de falta de herramientas matemáticas del alumno, el profesor tenga que limitarse a conseguir que el alumno adquiera las capacidades necesarias para por un lado simplificar expresiones algebraicas y por otro ser capaz de resolver las ecuaciones. Esto es, se trabaja la parte inductiva, que son procesos prácticos que son relativamente sencillos de valorar si el alumno los adquiere y pone en práctica y se posterga el trabajo en los campos que son más deductivas, donde el alumno pone más en práctica su bagaje matemático y capacidad de abstracción. Eso nos hace encontrarnos alumnos en segundo ciclo de la ESO con capacidad para resolver una ecuación de primer grado, pero que no sean capaces de plantear de forma algebraica un problema dado o generalizar describiendo algebraicamente un comportamiento de relación entre dos variables.

3.3. Aprendizaje por descubrimiento

A lo largo del siglo XX los investigadores han ido teorizando sobre los procesos internos que supone el proceso enseñanza-aprendizaje para el alumno. Así, Watson (1925) en el libro Conductismo propuso un paradigma psicológico que impulsó una corriente científica. Según Watson lo único que se puede observar del alumno es su conducta, porque es el único fenómeno observable o cuantificable. Por lo tanto, a través de condicionar su conducta, favoreciendo lo que se considere adecuado y obstaculizando lo inadecuado a través de estímulos, el alumno aprende qué ha de hacer en cada momento. Esto hace que el papel del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje sea pasivo, porque el que tiene que estimular al alumno es el profesor.

De alguna manera, Watson no tenía en cuenta los procesos internos del alumno, por no ser cuantificables, trayendo como resultado ver al alumno como una especie de caja negra. Piaget, Vygotsky o Bruner, son considerados representantes de otro paradigma psicológico, otra corriente que tiene en cuenta esos procesos internos del alumno. Piaget (1971) plantea que el conocimiento es el resultado de la interacción entre la persona y su entorno, en él, cuando hay un desequilibrio o un cambio en el medio, el ser humano se readapta a la nueva realidad mediante dos procesos, mediante la asimilación y la acomodación. Esto, según Piaget, se puede hacer si la persona tiene una estructura interna que le permita relacionar e integrar el cambio.

Bruner (1966) por su parte, también hace hincapié en la comprensión de la estructura, además de la motivación y el refuerzo. La apertura del alumno al aprendizaje, la curiosidad y la autoconfianza en que es capaz de hacerlo es el primer paso para poder realizar con éxito el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, en la corriente constructivista, es el alumno el centro de la acción de ese proceso de enseñanza-aprendizaje, con un papel activo en el mismo, por lo tanto, se necesita la apertura del alumno a que ese proceso se dé. La importancia de que el alumno comprenda la estructura de lo que va a aprender, hace que el papel del profesor sea esencial, porque es necesario que en todo momento el alumno tenga referencias entre lo que se está haciendo y la realidad del alumno. Es decir, es crucial mantener en todo momento referencias con lo que el alumno ya conoce y comprende. Bruner plantea que el proceso de aprendizaje pasa por tres estadios:

i) Enactivo, donde el alumno tiene una experiencia que supone un cambio para él.
ii) Icónico, donde el alumno se vale de las imágenes de las experiencias ya vividas para representarlo.
iii) Simbólico, donde el alumno ya se vale de símbolos abstractos para representar esa realidad.

Kieran (1981) propone una manera de presentar el concepto de la ecuación, una igualdad (2+3=5). Sobre ese esquema ya conocido, propone realizar una acción, que sería tapar con el dedo uno de los números de la ecuación, de manera que el alumno viera 2+■=5, y conjeturara sobre qué número hace que se cumpla la ecuación. Después, se volvería a escribir la ecuación con una caja, y por último se escribiría la ecuación mediante una letra (2+x=5). Esto es análogo, basado en la teoría de Bruner, a que el proceso de enseñanza-aprendizaje pase por el estadio de la enacción, iconización y simbolización.

Barrón (1993) reinterpretó la propuesta de Bruner para la educación, donde enumeró, según su criterio los 10 principios en los que se debía basar el aprendizaje por descubrimiento. Entre esos principios se escogen los de mayor significado para la propuesta:

4) El aprendizaje por descubrimiento se desarrolla a través de un proceso de resolución significativa de problemas

5) El acto de descubrimiento encuentra su centro lógico en la comprobación de conjeturas

7) El aprendizaje por descubrimiento va asociado a la producción de errores

10) El aprendizaje por descubrimiento puede ser pedagógicamente promovido. (pag. 4-5)

Teniendo en cuenta también los usos inadecuados y las concepciones erróneas del aprendizaje por descubrimiento, se creará un marco adecuado para que cada uno de los alumnos sea capaz de avanzar en su aprendizaje de forma autónoma con la ayuda pertinente por parte del docente.

Habrá que cerciorarse de que se cumplen las condiciones necesarias para poder aplicarlo de manera correcta y realmente avanzar en la propuesta para mejorar una etapa escolar que en las últimas décadas ha generado interés académico.

3.4. Ludificación

En la era de Internet, con el objetivo de generar tráfico y resultar cada vez más atractivos para los clientes y usuarios, las empresas cayeron en la cuenta que ofreciendo servicios "jugables" o con "premios" cuanto más utilizara los servicios de la app, conseguían una mayor satisfacción por parte de los mismos. Además de mejorar su imagen, conseguían una mayor identificación con la marca, mayor apertura a conocer y contratar los productos o servicios que ofrecían, además de recabar información del mismo. A ese proceso de mejora de los servicios con ofertas para experiencias jugables (Huotari y Hamari, 2012) lo llamaron Ludificación. La aplicación de estos servicios en apps de bancos o empresas de ropa está siendo paulatina, pero no es nuevo en la educación. A través del juego se consigue una mayor motivación del alumno, despierta su interés y en algunas personas el espíritu competitivo.

Kapp en 2012 hizo hincapié en concepciones erróneas de la ludificación, por un lado, subraya que no consiste en premios ni en puntos, tampoco hay que caer en la trivialización del aprendizaje y no hay que perder la perspectiva, no es algo nuevo en la enseñanza. Introducir juegos para mejorar un proceso de enseñanza-aprendizaje no es algo nuevo didácticamente. Lo que sí es nuevo es el medio, la forma que tiene el usuario de interactuar con el juego, las ventajas de la virtualización, pero quizá la desventaja de que el profesor pueda perder el hilo conductor del juego, ya que se convierte en un canal bidireccional entre el usuario y el aparato electrónico en el que el profesor es alguien, de alguna manera, ajeno. Otra ventaja reseñable de la ludificación es la autocorrección instantánea. No hace falta que el docente tenga un papel de control continuo de la actividad, más que cerciorarse de que se está realizando de forma adecuada, no es necesario que verifique que el alumno está operando correctamente, ya que el juego mismo ayuda al docente en esa labor. Teniendo en cuenta la definición que dieron Huotari y Hamari a la ludificación, hay que tener mucho cuidado y escoger de manera correcta el contexto en el que se puede hacer jugable una actividad, ya que no es algo que se pueda aplicar en cualquier acto de aprendizaje (Kapp, 2012)

Huang y Soman en 2013, proponían los pasos a seguir a la hora de decidir introducir una actividad basada en el juego.

i) Analizar a quién va dirigida la actividad y el contexto
ii) Definir los objetivos
iii) Estructurar la experiencia
iv) Identificar recursos
v) Aplicar los elementos de la ludificación

En la mejora educativa se van a proponer applets con los que el alumno podrá jugar, generar sus propias estrategias para ganar, y se intentarán encauzar esas estrategias para traducirlas al lenguaje algebraico y que el alumno las adquiera de forma indirecta.

4. PROPUESTA DE MEJORA EDUCATIVA

4.1. Análisis de la situación educativa y mejora propuesta

La etapa de transición entre la aritmética y el álgebra ha sido uno de los las etapas educativas que más atención han suscitado en la enseñanza matemática. La construcción del pensamiento matemático del alumno ha generado falsas asunciones, visiones sesgadas de elementos matemáticos o falta de base procedimental para la resolución de estructuras matemáticas que provocan que una etapa ya de por sí complicada, se torne en una experiencia más dura, si cabe.

La metodología clásica se centra sobre todo en conseguir que los alumnos consigan interiorizar los procedimientos de resolución de ecuaciones o simplificación de expresiones algebraicas. Se presenta la variable como un número oculto que deben descubrir, sin trabajar el significado matemático de la misma. Durante muchos años la actividad de iniciación del álgebra ha sido la balanza, pero de manera simbólica, sin ninguna manipulación ni experimentación por parte del alumno más que la que pueden desarrollar mentalmente con una balanza dibujada en la pizarra.

Por ello, la base de la propuesta de mejora educativa será, por un lado, dotar al alumno de experiencias y situaciones interactivas para que él descubra cómo resolver por sí mismo, otorgando un papel protagonista en su propio aprendizaje. Estas situaciones interactivas serán actividades planteadas como juegos, basados en la ludificación de procesos. Por otro lado, una fase reflexiva posterior que ayude a generalizar las situaciones vividas. Esto, según la visión psicológica propuesta por la corriente constructivista, puede ayudar a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

4.2. Objetivos de la propuesta

El objetivo principal es proponer actividades que puedan mejorar la comprensión de los cambios que acarrea la transición del álgebra a la aritmética, teniendo en cuenta los problemas descritos por las autoridades en el tema.

Las actividades que se propondrán para la mejora educativa serán dirigidas hacia los siguientes objetivos específicos:

1) Ayudar al alumno a que deduzca los primeros pasos para la resolución de ecuaciones sencillas de primer grado.
2) Acompañar al alumno a comprender el paralelismo de “ganar” el juego con la resolución de la ecuación

3) Ayudar al alumno a adquirir técnicas y algoritmos de resolución de ecuaciones de primer grado.
4) El refuerzo y la profundización del concepto de la igualdad, su significado y la operatividad que subyace en una ecuación. Hacer hincapié en el carácter bidireccional de la ecuación.
5) Trabajar el uso de los números negativos, comprensión del símbolo negativo en la ecuación.
6) Interpretación de los símbolos matemáticos en una situación real y la simbolización de la situación real en lenguaje algebraico.
7) Poner el alumno en situación de resolver problemas con el objetivo de que puedan ser utilizados como referencia en problemas posteriores dando oportunidad de utilizar la técnica heurística de la analogía.

4.3. Metodología

Respecto a la metodología a seguir en clase, según los postulados del aprendizaje por descubrimiento, necesitamos situar a cada uno de los alumnos en el centro de su propio aprendizaje. Para eso, se necesita generar el entorno adecuado en clase para que el docente pueda controlar el avance de cada uno de los alumnos, pero manteniendo un ambiente de estudio, sinergias entre los propios compañeros.

Se clasifican las actividades en cinco grupos, de iniciación, de desarrollo, que estarán basadas en la ludificación, consolidación, evaluación y ampliación

Las actividades de iniciación, en general, se realizan en grupos grandes. Se presenta una situación que sea familiar para los alumnos y se les plantean preguntas sobre lo que queremos trabajar, de forma de interrogatorio, donde se les conduce a las conclusiones que se pretenden alcanzar.

Las actividades de desarrollo, están planteadas para el trabajo personal del alumno, por esa razón, en principio están pensadas para el trabajo individual. La explicación del profesor será breve en cada caso, porque el objetivo es que ellos mismos descubran los mecanismos y las posibilidades del juego. De todas maneras, se permitirá que el alumno interactúe con sus compañeros, siempre y cuando sea para cooperar y no desviarse de los objetivos de la actividad.

Las actividades de consolidación, por un lado, se harían en grupos de 4-5 personas, donde el docente plantea una reflexión sobre el juego, alguna situación que les ayude a los alumnos a generalizar, a buscar patrones y procedimientos de resolución. Después, se hará una puesta en común en el grupo grande. Estas actividades de consolidación tienen un segundo apartado, que es el trabajo personal a la hora de realizar ejercicios, que se pueden trabajar en parte en clase y en parte individualmente en casa. Por último, es necesario un seguimiento para ver el avance de cada alumno en los objetivos marcados para la unidad.

Se va a presentar una actividad de ampliación para alumnos que tengan los conceptos muy asentados o se les pueda dar por finalizada la actividad personal antes de tiempo. En el cronograma se presenta esa actividad solapada con otras, porque a partir de que haya finalizado la segunda actividad, si el docente considera adecuado, puede invitar al alumno a realizar esa tercera. En la descripción de la actividad se definirá el contexto y los destinatarios de dicha actividad.

Por último, debemos realizar una actividad de evaluación, donde se valorará si los alumnos han desarrollado los contenidos que teníamos por objetivo, y por otro lado, se evaluará la idoneidad de esta propuesta.

4.3.1. Destinatarios

La propuesta irá dirigida a alumnos de primero de la ESO, cuya destreza tecnológica es bastante avanzada. Casi todos los colegios se han acogido al plan Escuela 2.0, tienen un ordenador por alumno, trabajan con documentos compartidos, saben manejar software office a nivel usuario. Los alumnos tienen asumido el ordenador como una herramienta de trabajo más, pero sigue siendo más atractivo que la pizarra clásica y el cuaderno y el bolígrafo. Además, en su vida diaria, el uso de apps por medio de smartphones o tablets es algo que les resulta familiar, cuyo dominio sobrepasa en muchos casos al que puedan tener generaciones anteriores. En conclusión, los recursos didácticos TIC son algo con lo que están familiarizados, y su uso no supone una dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En la Comunidad Autónoma del País Vasco, los centros escolares tienen un marco de educación trilingüe, que da mayor peso al inglés dentro del horario escolar impartiendo en ese idioma algunas asignaturas además de las horas propias.

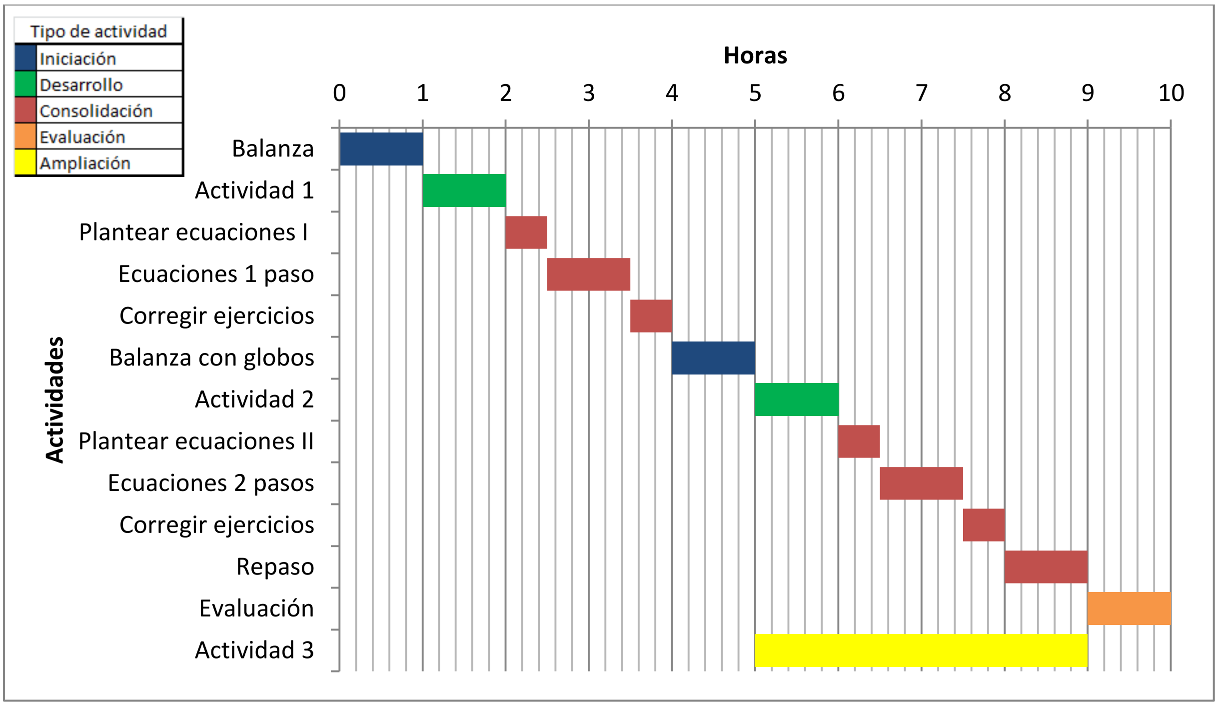
A mayores, como consecuencia de la globalización, la información que llega a los alumnos, ya sea por medio de los medios de comunicación, redes sociales o grupos de música, videojuegos etc., tienen en gran parte, como lengua vehicular el inglés. Por tanto, se puede asumir que no será un impedimento en el proceso de enseñanza-aprendizaje y que son capaces de entender unas normas básicas de un juego y manejarse con una interfaz programada en dicho idioma.

La asimetría de los alumnos a la hora de, por un lado, deducir el funcionamiento del juego y los objetivos a cumplir y, por otro lado, de traducción a los conceptos matemáticos trabajados a través de los juegos, es algo que se debe tener en cuenta. Es posible que haya un grupo de alumnos que no sean capaces por sí solos de llegar a resolver los juegos, o que tengan un bagaje matemático tan bajo que les impida ver el objetivo del mismo aun siendo tutorizados por el docente. En esos casos, se procurará fijar unos mínimos que se apuntarán en cada una de las actividades docentes, para que las mismas le acaben siendo de utilidad a la hora de adquirir destrezas en la resolución de ecuaciones.

4.3.2. Propuesta de intervención

4.3.2.1. Introducción

En esta propuesta se van a presentar una serie de actividades basadas en la ludificación. Atendiendo a lo estudiado en los apartados teóricos, la ludificación es sustituir, bajo algunas condiciones, un proceso por una experiencia jugable. Pero, por un lado, debe ser un juego que tenga un objetivo didáctico bien planteado y por otro lado, hay que enmarcarlo de manera correcta, para que el proceso de aprendizaje por descubrimiento se pueda consolidar en el alumno. En el siguiente cronograma, hemos contemporizado las actividades que se van a describir en los siguientes apartados.



4.3.2.2. Actividades de introducción

4.3.2.2.1. Balanza

Para poder comenzar a llevar a cabo estas actividades, es necesario que los alumnos tengan una base y unas herramientas matemáticas. Para cada uno de los alumnos esta etapa es de fractura, de ruptura con conceptos que tiene consolidados (siendo estos correctos o incorrectos), debe asumir e interiorizar los cambios en los símbolos, significados y procesos. Para ello, debe haber trabajado los contenidos enumerados en el currículum escolar como:

a) Números naturales
b) Fracciones y decimales
c) Números negativos
d) Proporcionalidad. Regla de tres.

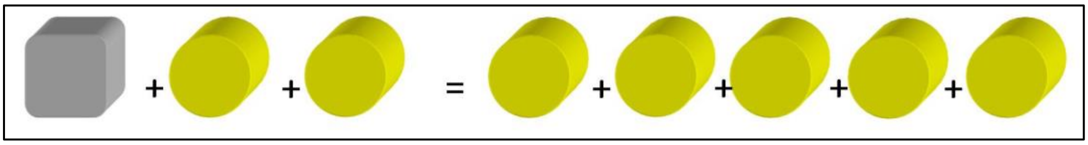
Antes de poder proponer las actividades jugables, se debe trabajar con los alumnos en la introducción del álgebra.

La manera clásica de hacerlo es mediante la actividad de la balanza.

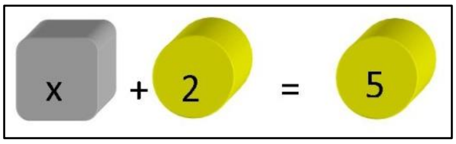
Actividades previas	
Actividad	Balanza
Participantes	Grupo grande
Material necesario	Pizarra o pizarra electrónica
Duración	1 hora
Desarrollo	Se propone al alumno una situación con una balanza
	Se sitúa en un lado de la balanza una caja de un peso desconocido
	En el otro lado de la balanza se ponen tres pesas de un kg.
	Se invita a los alumnos a deducir de cuánto es el peso de la caja
	Después se empieza a combinar, las cajas y los pesos, en uno y en otro lado
	Se invita a los alumnos a generar una especie de metaescritura algebraica por medio de cajas
Objetivos	Introducción de la ecuación
	Introducción del carácter bidireccional del símbolo de la igualdad
	Introducción de las técnicas básicas de resolución de ecuaciones sencillas
	Introducción de la escritura algebraica

El desarrollo de esta actividad concluye con una especie de metaescritura algebraica. Esta metaescritura se puede plantear de la siguiente manera. Se le propone al alumno una situación de equilibrio en la balanza, donde en un lado de la misma hay una caja cuyo peso es desconocido, junto a unos pesos de un kg. En el otro lado, en situación de equilibrio, tenemos cierta cantidad de pesos de un kg, como vemos en la siguiente figura:

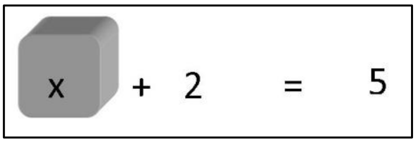
Una vez presentado, se le propone al alumno, escribir la situación de este modo:



Para después abreviarlo así:

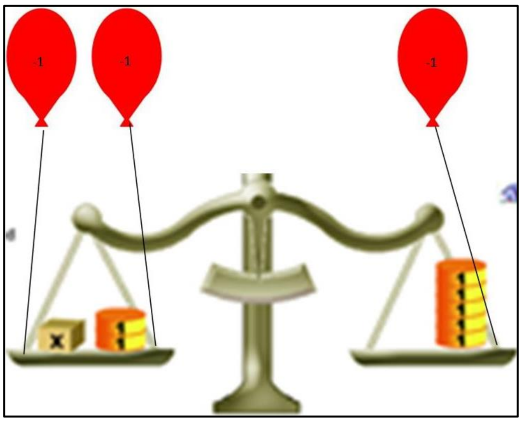


Y al final



4.3.2.2.2. Balanza con globos

El objetivo de la actividad de la balanza es incluir "globos de helio" que contrarrestan a un kg de peso. Aunque esta figura es un poco imaginativa y poco realista físicamente, en la realidad de los alumnos es una cosa que han visto en dibujos animados o en películas para su edad, entenderán el concepto y nos ayudará a introducir los números negativos en la ecuación.

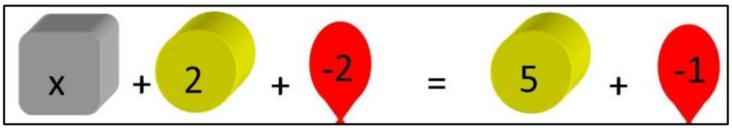


Se les va a plantear una situación parecida a la siguiente figura:

Actividades previas	
Actividad	Balanza y globos
Participantes	Grupo grande
Material necesario	Pizarra o pizarra electrónica
Duración	30 mins
Desarrollo	Se propone la misma situación pero con globos que contrarrestan un kg de peso
	Se pregunta qué pasaría con la balanza si se pusieran en un mismo lado un kg de peso y un globo de helio
	Se pregunta qué pasaría si en una situación balanceada se quita un kg de peso de un lado y se añade un globo de helio en el otro lado
	Se pregunta qué pasaría si pongo un globo a cada lado o un peso a cada lado
	Se intenta escribir la situación de manera metalgebraica
	Se intenta traducir el significado del globo en esa escritura con respecto al peso
Objetivos	Introducción de la ecuación
	Introducción del carácter bidireccional del símbolo de la igualdad

	Introducción de las técnicas básicas de resolución de ecuaciones sencillas
	Introducción de la escritura algebraica
	Introducción de los números negativos
	Introducción de la equivalencia de una cardinal con la misma cardinal negativa en el otro lado de la igualdad

De la misma forma que en la actividad de la balanza, se propondrá una metaescritura algebraica que tendrán que deducir, algo parecido a la siguiente figura:



Al final de esta actividad, se introducirá el concepto de globo gigante de helio. Es desconocida la cantidad de peso que podría levantar ese globo de helio, pero situando ese globo gigante en el mismo lado que la caja de peso desconocido, la balanza se nivela. Esto nos podría ayudar a deducir que si un globo pequeño es igual a -1 kg de peso, el globo gigante de helio sería equivalente a - caja en kg de peso. Así, se podrían plantear problemas de tipo 3x+1=2x-2 o x+1=-x+3.

4.3.2.3. *Actividades basadas en la ludificación*

4.3.2.3.1. Actividad 1

El objetivo de la primera actividad será que el alumno sea capaz de deducir la forma de resolver mentalmente ecuaciones del tipo x+a=b.

Para ello en el juego Algebra Meltdown (podemos encontrarlo en la dirección https://www.mangahigh.com/en/games/algebrameltdown) se propone la siguiente situación. En la siguiente figura se ve que hay una barra superior en la que están ubicadas las partículas atómicas, con las cargas numeradas del -9 hasta el 9.

En el centro de la imagen se encuentra una máquina que añade o quita electrones a la partícula. En la mitad de la máquina, se puede ver una pantalla donde nos indica qué cantidad de electrones añade o quita al átomo. Por último, en la parte de abajo están, por un lado, el científico que solicita al jugador un átomo con una carga concreta y por otro lado, un operario que indica cual es la ecuación que está resolviendo el jugador en ese momento.

En la figura adyacente se observa una variante donde se añaden dos salidas a la máquina y en cada una de las salidas la máquina realiza una operación diferente. En el centro de la máquina existe un interruptor que decide abrir una salida u otra según por dónde aparece el científico y la operación que realizará la máquina. Esto nos ayuda a mejorar el cálculo mental, ya que se van a trabajar de forma paralela dos ecuaciones y de forma simultánea permite consolidar la manera de resolver que ha podido deducir el alumno en la primera parte de la actividad.

En las siguientes figuras, se puede observar que cada vez, las actividades se van complicando, incluyendo alguna fracción como en el primer ejemplo, problemas de cálculo con la priorización de operaciones como en el segundo ejemplo, donde primero se hace la resta y después se divide.

Contextualización de la actividad

La balanza, el funcionamiento de la misma, aunque no de forma empírica, es algo familiar y conocido para los alumnos. Es decir, el alumno es capaz de entender qué supone el equilibrio, qué causa desequilibrio y qué puede hacer que vuelva a reequilibrarse. Es un esquema conocido. A través de él, se plantean problemas que suponen una situación nueva para el alumno, donde debe deducir cómo resolver esas nuevas situaciones. Normalmente, el alumno comenzará a resolver los primeros problemas por medio del tanteo, pero se provoca que comience a pensar de manera diferente para hallar el resultado. Se plantea un cambio en la forma de preguntar y en la forma de que el alumno llega al resultado. En vez de proponer 2+3=x o 2+3= _ (de manera aritmética el alumno lo entiende así), se preguntan los problemas inquiriendo "cuánto pesará la caja si estando en un lado de la balanza con dos kilos y habiendo en el otro lado cinco kilos, la balanza se equilibra".

Desde el punto de vista metodológico, la ludificación de la actividad consigue que la motivación del alumno sea mayor, por tanto, la apertura a entender ese proceso nuevo también. El juego que se propone es un paso complementario dentro de este proceso. Es decir, se plantea una situación diferente al de la balanza, que requiere una nueva acción por parte del alumno. Esa acción pondrá a prueba la capacidad deductiva y adaptativa del alumno. Además, si entiende bien el juego y es capaz de "ganar", se dotará a los alumnos de referencias para que sean capaces de entender la estructura del juego y el proceso posterior de iconización y simbolización.

La idoneidad de introducir una actividad de este tipo, según lo propuesto por Huang y Soman (2013)

i) La actividad va dirigida a la introducción de los alumnos en el álgebra y comprensión de la relación de igualdad
ii) Los objetivos de la actividad son, por un lado provocar una fractura en la forma de pensar y ver el símbolo de igualdad, dotando de un mayor sentido relacional y no tanto de operativo. Aunque este símbolo no se muestre de forma explícita, se va a provocar un cambio en la forma de pensar cómo resolver un problema, pero en un contexto que les resulte conocido.

    Por otro lado, se tendrá como objetivo que el alumno sea capaz de tener referencias de acciones que pueda imaginar a la hora de plantear de forma simbólica una experiencia, dicho de otra manera, de imágenes a las que a la hora de intentar resolver una ecuación escrita de forma simbólica pueda recurrir y recordar la manera que lo resolvió.
iii) Es necesario que el alumno tenga experiencias que supongan un cambio para sí mismo. Por eso, después de trabajar con la balanza, se propondrá a los alumnos jugar a ese juego. El profesor no debe dar más explicación de cómo acceder y comenzar a jugar. Es decir, lo ideal es que el alumno, por sí solo sea capaz de comprender qué es lo que debe hacer y cómo resolver el problema para ganar. Es posible que haya alumnos que no sean capaces de entenderlo por sí solos, para ello el docente debe tener planificado una actividad en grupos pequeños de 2 o 3 personas y administrando la información, aprovechando los errores que puedan

haber cometido, apelar a su capacidad deductiva para comenzar a "ganar". Aunque su avance en el juego sea más limitado, lo importante es que sean capaces de conseguir pasar algún nivel, porque esas experiencias son las que vamos a utilizar de referencia en las siguientes actividades para poder resolverlas.

iv) Este juego es válido como recurso educativo, porque nos ayuda a profundizar en un objetivo que perseguimos. Se deben plantear los pros y contras, aunque es una actividad que está pensada *ad hoc* para trabajar el apartado.

v) Una actividad que de forma clásica se hace con papel y lápiz o con el profesor dibujando balanzas, cajas de regalo, frutas etc. Se convierte en una actividad donde el alumno tiene el papel principal, con la motivación que suponen las TIC y las ventajas de la ludificación.

Otros aspectos a tener en cuenta

Hay que tener cuidado en no perder la perspectiva de los objetivos aunque, para el alumno el objetivo es "ganar" el juego, conseguir pasar pantallas. Pero lo que no debe perderse de vista es que el objetivo de la actividad es provocar un cambio en la manera de pensar del alumno, por lo que, salvo en los casos en los que algunos por sí solos no pueden avanzar, es clave que el resto de sus compañeros se centre en la actividad y no acabe siendo una competición de a ver qué alumno consigue más puntos. Esto es, cada alumno compite contra sí mismo, es un reto que se plantea a sí mismo y no debe perderse ese espíritu, ya que si no, se corre el riesgo de que el alumno utilice subterfugios para conseguir una mayor puntuación diluyéndose el acto de aprendizaje.

Otro aspecto a tener en cuenta es que aunque uno de los objetivos es inculcar el sentido relacional del símbolo de igualdad, en este juego siempre tendrá un sentido unidireccional. Es decir, en cualquier pantalla del juego la "operación" aparece en el lado izquierdo y el "resultado" en el derecho, algo que no produce una ruptura desde el punto de vista del alumno, más que el que podría producir el tapar uno de los dos sumandos en una ecuación. Por lo tanto, esa variante habría que introducirla en las actividades complementarias.

Actividades complementarias

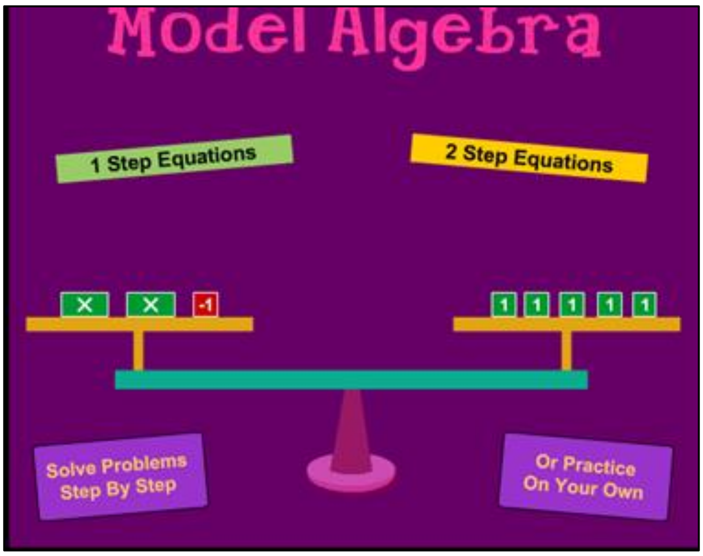
Para que el proceso de readaptación-acomodación planteado por Bruner (1966) pueda ser completo, necesitamos que el proceso de enseñanza-aprendizaje pase a un estadio de iconización y simbolización.

En la actividad anterior de la Balanza, el profesor plantea algunas ecuaciones de forma iconizada, con balanzas equilibradas, paquetes con un peso desconocido que deben hallar los alumnos, etc. Con la actividad propuesta, tenemos otro caso al que podemos hacer referencia y podemos iconizar. Con ello, la siguiente actividad tendría que ser una en la que a través de ambas actividades previas, acabe con una simbolización clásica de la ecuación. Para poder resolver estas primeras ecuaciones, se le recordarán al alumno situaciones de las actividades anteriores que puedan serle de ayuda para resolver esta nueva simbolización.

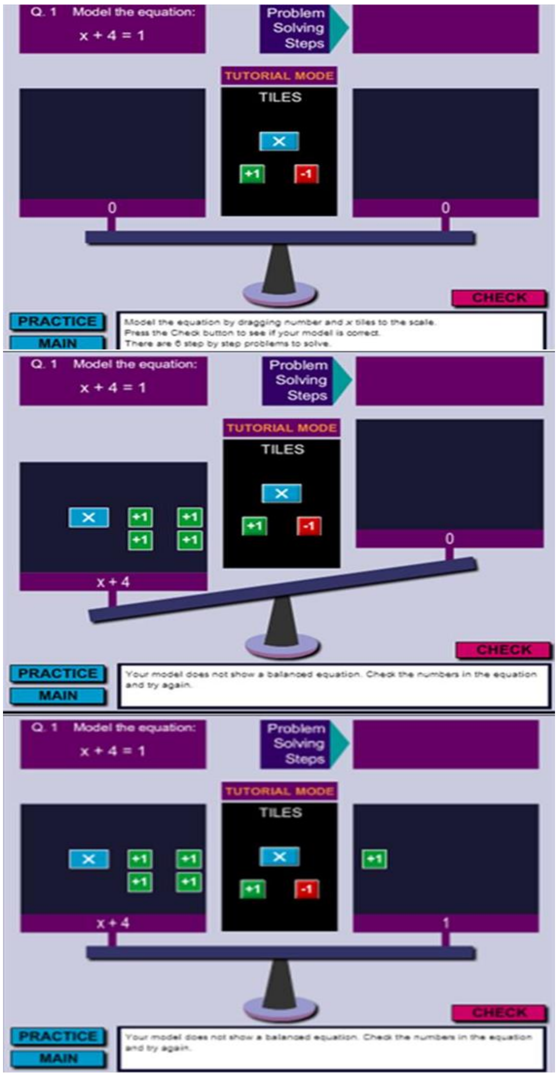
Después, trabajaríamos las actividades de consolidación como plantear ecuaciones de primer grado, ya con una escritura algebraica. Una vez empiecen a estar familiarizados con la nueva escritura, comenzamos a intentar resolver de forma explícita ecuaciones de un paso (los que tienen el 1 como coeficiente de x), siempre aludiendo al caso de la balanza o el juego, donde se han generado recuerdos a los que se puede recurrir para desbloquear al alumno.

4.3.2.3.2. Actividad 2

La segunda actividad propuesta es de profundización. Tras las actividades de la Balanza, la actividad 1 y la actividad complementaria indicada en la primera propuesta, se plantea la actividad del Globo de Helio. La actividad de la balanza, de forma clásica tiene la limitación de que el peso siempre se ve de forma positiva, es decir, de forma icónica es imposible que el alumno tenga referencias de lo que puede significar un peso "negativo". Por ello, puede resultar interesante la idea de un globo de helio que sea capaz de levantar un kilo de peso. La relación de los alumnos con los globos de helio, tanto en dibujos animados, películas (por ejemplo Up) o en ferias a las que hayan acudido, puede resultar interesante por la curiosidad que sienten por algo que flota. Aunque la idea desde el punto de vista de la física no tiene mucho fundamento, es posible que el alumno acepte la idea porque es un fenómeno que juzga como posible. Esto nos ayudará a generar nuevos tipos de ecuaciones con números negativos e incluso resultados negativos que de la manera clásica serían complicados de visualizar para el alumno.



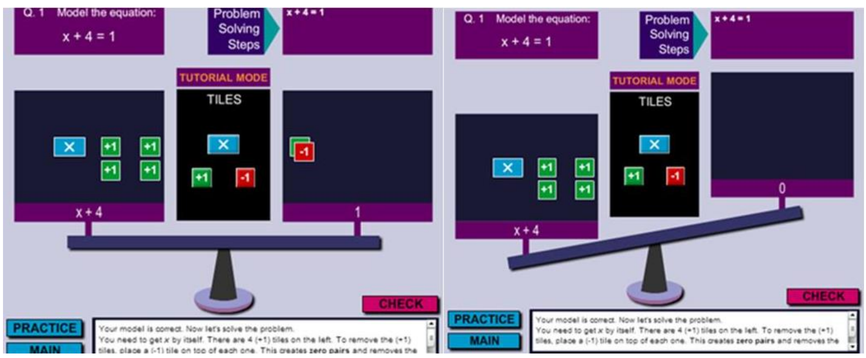
El juego que se plantea es de MathPlayGround y se llama Model Algebra (http://www.mathplayground.com/AlgebraEquations.html). Existen dos niveles de dificultad, según los pasos que deben seguir los alumnos para resolverlos, como se ven se ven en la figura, nombra ecuaciones de un paso y dos pasos. Tal y como se ha comentado en el apartado anterior, las ecuaciones de un paso son los que tienen el coeficiente



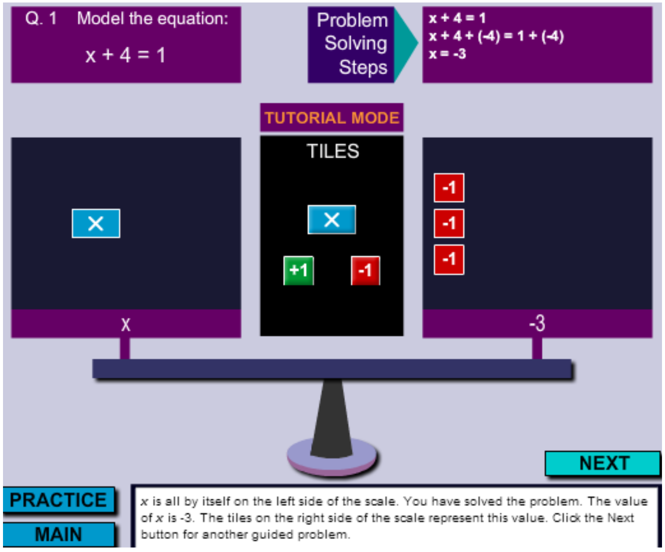
de la variable 1, por lo tanto, solamente aislándola a un lado de la ecuación, se resuelve. En la de dos pasos, primero han de aislar la variable, pero después dividir por el coeficiente.

En esta actividad, el alumno descubrirá que para "ganar" debe deducir los pasos a seguir para resolver una ecuación de un paso. El juego va guiando paso por paso al alumno durante su manipulación. Primero ha de plantear la ecuación que se indica en el recuadro superior morado que se ve en la figura, de manera que irá poniendo bloques en la balanza que se desequilibra en cuanto alguno de los lados pesa más. Es deseable que el alumno manipule el juego, que ponga y quite bloques, juegue con él y vea cuándo se equilibra la balanza, cuándo se desequilibra etc. Una vez haya manipulado y haya sido capaz de deducir cómo equilibrar la balanza con los bloques de la ecuación, la balanza de la imagen se equilibrará, tal y como se puede ver en la tercera imagen, y al pulsar el botón Next, habremos alcanzado el primer paso.

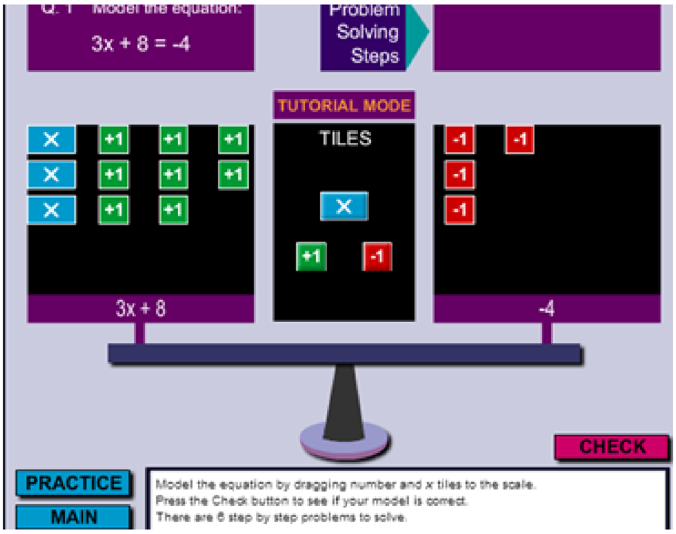
En el segundo paso se ha de resolver la ecuación, de manera que debemos aislar el bloque X del resto de bloques. La manera de hacerlo es con los bloques numéricos de color contrario, es decir, si hay un verde en el lado derecho, se debe "eliminar" con uno rojo



(como se ve en la figura de al lado), pero al eliminarlo, la balanza se desequilibra, por tanto, debemos añadir un rojo en el otro lado, para volver a equilibrarlo. Así, aislando la x en el lado izquierdo, llegamos al resultado final que pulsando Next, corregirá.

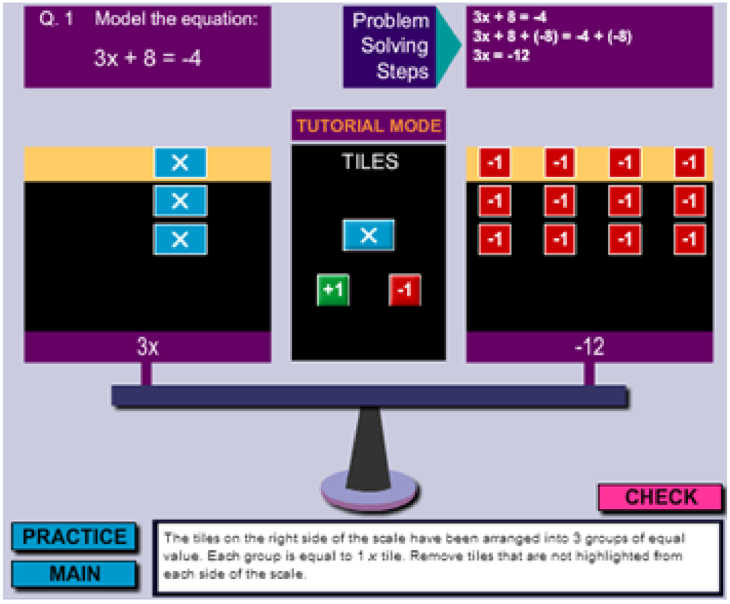


En el caso de dos pasos, tenemos ecuaciones del tipo 3x+8=-4. Tras consolidar la primera parte, con un ejercicio de simbolización, donde se pueden explicitar las diferentes maneras de resolver la ecuación sencilla (pasando el número al otro lado, o restando el número que acompaña a la x en ambos lados, etc), podremos jugar al juego de dos pasos.



Una vez planteada la ecuación y haber seguido los pasos del algoritmo consolidado, lo único diferente a la resolución de un paso es que al final debemos dividir entre el coeficiente de la x.

Para ello, el juego propone un paso intermedio como se ve en la siguiente figura, donde se pide ordenar por bloques y acto seguido, al pulsar Divide, colorea una parte (un tercio, si es el coeficiente 3, la mitad de los bloques, si el coeficiente es 2, etc), así nos ayuda a resolver la ecuación.



Contextualización de la actividad

La balanza o la idea de la balanza, es algo con lo que han trabajado, pero la mayoría de los alumnos no ha tenido una experiencia empírica del uso de la balanza tradicional tal y como se presenta, como hemos planteado en la primera actividad. Así, añadiendo la idea del globo, aunque sea una idea que puedan asumir sin problemas, aún es algo más abstracto a la hora de tener una acción con ella. Por tanto, para que el proceso enseñanza-aprendizaje se pueda dar de una manera óptima desde el punto de vista de Bruner (1966), necesitamos un estadio de enacción, donde el alumno experimente, aunque sea de forma visual y no mental, qué pasa en la balanza si se le añade un peso (representado con el bloque verde) o un globo (representado con el bloque rojo). Es decir, va a tener una experiencia, va a ser parte de una acción que produzca unos cambios en su esquema mental del funcionamiento de la balanza, pero unido a otras experiencias previas, comprende lo que pasa.

La interactividad del juego provoca que el alumno pueda ver y analizar equivalencias a la hora de añadir pesos a la ecuación propuesta, esto es, que el estado de equilibrio no se da solamente en el momento que se cumpla la ecuación, sino que añadiendo o quitando pesos de forma equivalente en ambos lados, se consiguen situaciones de equilibrio. A estas situaciones de equilibrio se puede aludir en actividades complementarias.

Además, tiene una parte de iconización, porque no existe un globo o un peso como tal, sino bloques que tienen un valor positivo y uno negativo, dicho de otra manera, metaescritura algebraica que simbolizan números positivos y negativos.

Desde los postulados de la ludificación, podemos concluir de la actividad:

i) La actividad va dirigida a la profundización de los alumnos en el álgebra y el entendimiento y adquisición de técnicas de resolución de ecuaciones sencillas.

ii) Los objetivos de la actividad son, por un lado, que el alumno tenga experiencias interactivas con una situación planteada, de forma que pueda probar, fallar y acertar a la hora de realizar el ejercicio propuesto.

    Por otro lado, otro de los objetivos importantes de la actividad es que los alumnos consigan resolver alguna ecuación de la forma que ellos deduzcan. Es decir, la forma de resolverlo dependerá de alguna manera de la adaptación al medio, dicho de otra manera, del entendimiento que tengan del juego, pero también de su capacidad deductiva, relacional y de aceptación. Después utilizaremos esta experiencia como referencia a la hora de plantear, proponer o modificar los algoritmos de resolución de ecuaciones sencillas de primer grado

iii) Para esta actividad, la relevancia del profesor es un poco mayor a la de la actividad anterior. Esto se debe a que las posibilidades de que el alumno o un grupo de alumnos se quede bloqueado es un poco mayor. Por tanto, quizá es necesario un intervalo de tiempo de adaptación, donde se explique qué es cada bloque, para qué sirve y cómo se comporta la balanza en cada momento. También sería necesario hacer referencia a la analogía entre el globo-bloque rojo y peso-bloque verde.

    Después de ese intervalo de tiempo, el profesor debe explicar en qué consiste el juego y cómo pueden hacer para ganar. Pero las explicaciones deberían ser genéricas, porque el objetivo de la actividad es conseguir que cada uno de los alumnos deduzca la forma de conseguir resolver la ecuación. Por tanto, las pautas deben ser del estilo "hay que conseguir saber cuánto pesa el bloque x" o algo más concisas "dejamos sola a la x". Así dejamos la puerta abierta a la creatividad, aunque en este caso sea relativamente limitada, no todos los alumnos entienden por igual el algoritmo de aislar la x, por tanto, hay que conseguir que cada uno tenga las experiencias que necesita.

iv) Al plantear la idoneidad de esta actividad, habría que hacer referencia a la dificultad de los alumnos a la hora de asumir como posibles los resultados negativos. Es decir, a la hora de plantear un juego de pesos, al ser una magnitud siempre positiva, el alumno, de forma intuitiva, rechaza de entrada el resultado pueda ser negativo. Tanto en la actividad anterior, donde la carga podía ser positiva o negativa, como en la actividad de los globos de helio, se introducen situaciones en las que el alumno puede asumir que el peso que levante un globo puede hacer desnivelar una balanza. Pero en esa actividad, la falta de manipulación por parte del alumno, desde un punto de vista constructivista, que la acción de enseñanza-aprendizaje no recaiga sobre el alumno, puede traer como consecuencia una falta de entendimiento, una negativa a asumir que eso se pueda dar, porque no se ha dado ese proceso de imaginación. Esta actividad dota de esa experiencia activa al alumno, posibilitando una mayor apertura a que esa situación pueda darse y otorga puntos de referencia a los que en otras actividades pueda aludir el docente.

v) Una actividad que de forma clásica se queda en una actividad de iconización-simbolización, se profundiza para convertirla a través del juego en enacción-iconización-simbolización.

Otros aspectos a tener en cuenta

Esta es una actividad procedimental, esto hace necesario que el docente ayude a cada uno de los alumnos a reflexionar sobre la experiencia, lo que ha hecho, cómo lo ha hecho, para conseguir deducir una generalización partiendo de cada uno de los casos. De acuerdo con Linchevski (1995), la generalización de una regla es uno de los objetivos del álgebra. Es decir, trasciende al juego, ya que aunque un alumno consiga a través de tanteo equilibrar la balanza hay que hacerle ver para qué lo estamos haciendo, persiguiendo qué objetivo y cómo lo ha conseguido hacer. O desde el punto de vista del juego, qué ha necesitado hacer para ganar.

Uno de los puntos débiles de esta actividad es que es necesario que el docente ayude de forma casi personalizada a los alumnos con menor bagaje matemático, para guiarlos a cumplir los objetivos. De todas maneras, el objetivo primordial es que estos alumnos tengan referencias donde ellos han interactuado en una situación, para cuando tengan que resolver el problema, podamos plantear la ecuación como una situación parecida a la vivida con este juego.

Actividades complementarias

La actividad primordial es la generalización de la resolución de este tipo de ecuaciones y la secundaria, la de aplicar esas generalizaciones de manera simbolizada con la escritura algebraica clásica, aunque hagamos referencias continuas a situaciones que han experimentado en el juego.

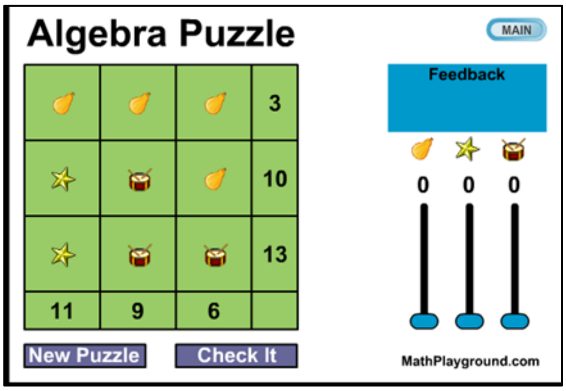
Después de la formalización de la escritura, debemos empezar a manejar expresiones algebraicas, simplificación de las mismas, familiarización de todas las operaciones y procesos aritméticos que se realizaban con los números racionales, incluyendo la variable x. Así, se puede aprovechar para reforzar la priorización de operaciones, el trabajo con los paréntesis, sobre todo la propiedad distributiva tanto de coeficientes como el símbolo negativo (o el coeficiente -1, como se quiera ver) y simplificación de fracciones algebraicas.

Tal y como se ha comentado en el cronograma, se llevarían a cabo unas actividades de consolidación paralelas a las de la actividad 1, plantear ecuaciones de dos pasos, aludiendo en todo momento a la actividad anterior. Tras poner en práctica lo visto con ejercicios que después se corregirán de forma activa en clase, para que el docente pueda controlar si el proceso enseñanza-aprendizaje se está dando de forma adecuada en cada uno de los alumnos.

4.3.2.3.3. Actividad 3

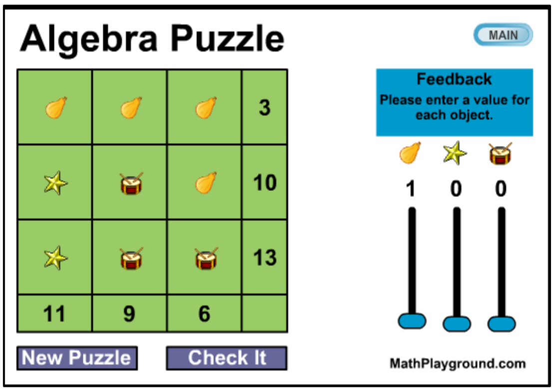
En las dos actividades propuestas anteriores, se ha hecho referencia a cómo actuar con los alumnos que tienen un menor bagaje matemático, capacidad deductiva o abstracción. Puede pasar que algunos alumnos finalicen esta segunda actividad o que llegado el momento les resulte algo repetitivo. Por ello, vamos a plantear una tercera actividad, como un extra para los alumnos que sí han sido capaces de completar los objetivos de la segunda aplicación.

El applet Algebra Puzzle (http://www.mathplayground.com/algebra_puzzle.html) propuesto es más intuitivo que los anteriores, porque es difícil que los alumnos sean capaces de modelizar la resolución de la misma, aunque sí puedan conseguir una estrategia para poder resolver el juego.

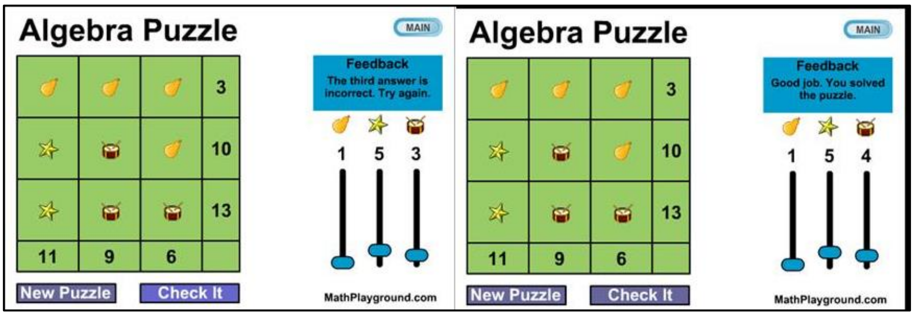


En el mismo se combinan tres objetos en un cuadro 3x3 como se ve en la figura de al lado. Es decir, de forma que tenemos 3 incógnitas y 6 ecuaciones. En todos los casos propuestos tenemos una ecuación con 3 objetos iguales, y otros dos con un objeto ya conocido y dos desconocidos o viceversa. Es decir, $3x=k$, $x+2y=l$ ó $2x+y=l$ y $x+2z=m$ ó $2x+z=m$.

Por lo tanto, para que el alumno pueda resolver el juego, debe buscar la ecuación con los tres objetos iguales, dividir el valor entre tres (en este caso las peras: 3 peras = 3, eso hace que cada pera valga 1) y desde ahí resolver las otras dos ecuaciones. Para marcar el valor de cada uno de los objetos, hay tres columnas numeradas, donde el alumno sube o baja el valor que determina para cada uno, como se ve en la imagen.



Encima de las columnas hay un recuadro que indica si la resolución es incorrecta, señalando la primera variable mal resuelta o si es correcta, como se puede observar en las siguientes imágenes.



Contextualización de la actividad

Esta actividad se enmarcaría dentro de las actividades añadidas en la unidad didáctica que estamos tratando. Es decir, no es una actividad que sea crucial a la hora de asimilar conceptos nuevos necesarios a corto plazo, ni de procedimientos para resolver ecuaciones. Pero sí es una actividad interesante para poder trabajar las técnicas heurísticas, ya que si intentan resolver el problema por tanteo o intentando modelizarlo, seguramente, con las técnicas aprendidas no podrán resolverlo. Al principio, lo más probable es que el alumno comience a intentar resolverlo por tanteo, y lo más probable es que aunque se pueda acercar por medio de las estimaciones, yerre. Pero si se paran a reflexionar sobre el problema que tienen y si encuentran una situación que ellos saben cómo afrontar, y a partir de ahí deducir las otras dos, se dará ante una situación de aprendizaje por descubrimiento, aplicando la técnica heurística de dividir el problema en otros más sencillos que ya sabe resolver, y a partir de ahí creando situaciones nuevas que sí se pueden resolver.

Desde los postulados de la ludificación

i) La actividad va dirigida en la extensión de lo aprendido a situaciones nuevas a las que tendrán que dar respuesta.
ii) Lo importante no es saber simbolizar cómo han resuelto, porque a corto plazo no se plantearán sistemas de ecuaciones, sino aplicar técnicas heurísticas a la hora de encontrarse con una situación que es nueva y dividir ese problema en partes más pequeñas, identificarlas con situaciones ya vividas y a partir de ahí aplicar la resolución aprendida.
iii) Para esta actividad, el papel del profesor se limita a dar el acceso al juego. La situación planteada es muy sencilla y visual, por lo tanto, salvo que algún alumno pregunte por algún detalle del juego, no debe dar más explicaciones introductorias.

Después de ese intervalo de tiempo, el profesor puede dar alguna pista si hay algún alumno que no consigue saber cómo dar el primer paso, es decir, buscar una fila o una columna con los mismos objetos, para poder plantear una ecuación con una sola incógnita (aunque no lo simbolice, limitándose a identificarlo) y desde ahí seguir.

iv) Al plantear la idoneidad de esta actividad, hay que tener en cuenta qué objetivos se persiguen y qué relevancia tiene dentro de la unidad didáctica. Al ser una actividad añadida, podría enviarse a los alumnos como trabajo para realizar en casa, o seleccionar algunos alumnos que hayan terminado otras actividades y se encuentran en clase sin nada que hacer. En este caso, se deja en manos del alumno la batuta en la actividad, aunque siempre habrá un control por parte del docente, para asegurarse que se cumplen los objetivos planteados.

v) Esta actividad es clásica en los libros de texto, no es algo nuevo. La ventaja de la ludificación es que al plantearlo como un juego nos da una mayor profundidad por tener un número mucho mayor de puzzles y por otro lado, la autocorrección por parte del juego, comentado en un apartado anterior.

Otros aspectos a tener en cuenta

Para poder resolver este juego de forma correcta, es necesario que el alumno tenga cierto manejo de resolución de ecuaciones sencillas. Es decir, si un alumno no ha trabajado suficiente con el juego de la balanza o no ha realizado las actividades posteriores al juego propuesto, es deseable que siga trabajando esos aspectos antes de invitarle a que realice esta tercera actividad. Esto se debe a que esta actividad es complementaria, pero no va a ser un campo que se vaya a trabajar de forma inmediata. Los sistemas de ecuaciones se empiezan a trabajar de forma esporádica en segundo curso y de forma regular en tercero. Por eso, la labor de control del docente, y en menor medida, de autorregulación del alumno es importante a la hora de decidir a quién proponer y a quién no la actividad.

Este juego permite dar un sentido diferente a la variable. En las actividades anteriores se presenta la variable como un número que deben hallar realizando las operaciones pertinentes. En esta actividad se puede ver la variable como un número que varía, no como un objeto concreto que deben hallar, como definió Küchemann (1978).

Actividades complementarias

Si algún alumno de forma personal mostrara interés en seguir trabajando estos conceptos, se podrían proponer problemas sencillos de sistemas de ecuaciones. De todas formas, al ser una actividad final y extraordinaria, no habría ninguna actividad complementaria a realizar tras ésta, ya que no vamos a llegar a plantear las ecuaciones de forma explícita. Lo importante en esta actividad es que descubran la mecánica a seguir a la hora de resolver estas ecuaciones. Más adelante, cuando se empiecen a trabajar los sistemas de ecuaciones, se podría volver a esta actividad, para plantear las ecuaciones y resolverlo de manera simbólica, planteando el sistema de ecuaciones que subyace en el juego.

4.3.2.3.4. Actividades de consolidación

Las actividades de consolidación son las actividades clásicas de ejercicios en clase, planteamiento de problemas sencillos, etc. La diferencia didáctica con el caso habitual es que los alumnos tienen experiencias interactivas a los que podemos hacer referencia, intentar construir analogías entre un problema planteado y el caso en el que el alumno se siente seguro porque tiene referencias y esquemas mentales construidos.

4.3.3. Evaluación

A la hora de evaluar las actividades, por un lado se deben evaluar los contenidos tratados en las actividades y por otro lado, la propuesta en sí.

4.3.3.1. Evaluación de los contenidos

Para la evaluación de los contenidos, se realizará un examen donde los ejercicios propuestos guardarán estructuralmente cierto parecido a las actividades. Es decir, es interesante que los alumnos puedan tender puentes relacionales entre las cuestiones del examen con las experiencias manipulativas que han tenido durante la unidad.

A la hora de fijar los criterios de evaluación, esta parte de la asignatura sobre todo se puede valorar con los criterios 3 y 8 de la tabla de los criterios de evaluación que habla de la modelización en lenguaje algebraico y el uso de técnicas heurísticas. Además, nos vamos a fijar en el criterio 2, que engloba la parte operacional de la aritmética que vamos a trabajar pero con estructuras algebraicas.

El examen tendrá tres partes diferenciadas. En la primera parte se va a pedir cierto nivel de abstracción, de entendimiento de la variable, con expresiones algebraicas relativas a la misma.

La segunda parte es la operativa. Se proponen por un lado, estructuras algebraicas que deben resolver. Además así, se refuerza la operatividad aritmética con una variable. Por otro lado se proponen ecuaciones de uno y dos pasos que han de resolver. En estas ecuaciones se busca la variedad, para poder reforzar el carácter relacional de la variable, proponiendo la incógnita en uno u otro lado. Se incluirán ejercicios con resultados negativos, de priorización de operaciones, etc.

Por último, se proponen tres problemas. En cada uno de los problemas se plantearán situaciones parecidas a las vistas en cada una de las actividades basadas en la ludificación respectivamente. Con el objetivo de acercar el planteamiento de los problemas para que valiéndose de estrategias heurísticas como la analogía, sean capaces de escribir algebraicamente los problemas y después resolverlos.

En el anexo se incluye una propuesta de lo que podría ser el examen en cuestión.

4.3.3.2. Evaluación de la propuesta

Una de las maneras más recurrentes a la hora de evaluar una propuesta de este tipo, es realizar una encuesta a los alumnos. En este caso, observando los destinatarios, su falta de criterio por un lado por la falta de madurez y por otro lado, por no tener una visión muy amplia sobre el tema, quizá no sea la forma más adecuada de evaluarla.

Puede ser que una de las maneras de evaluarla sea realizando una experiencia piloto y de manera comparativa, ver los puntos fuertes y los puntos que se han podido descuidar. Además, se podría pasar un breve cuestionario a los alumnos, antes de comenzar con la primera actividad de ludificación, después de la actividad de la balanza, donde de forma indirecta se pregunte por algunas cuestiones que hemos visto en el marco teórico que son problemáticos a la hora de introducir el álgebra, como la igualdad o la concepción de la variable. En el examen de evaluación, se podría introducir, disfrazado de preguntas teóricas, las mismas preguntas que se preguntaron en el cuestionario anterior, para ver la evolución de sus concepciones de esos conceptos problemáticos. Dos modelos de ambos cuestionarios se encuentran en el anexo del trabajo.

Se prevé que los alumnos tengan más interiorizados los procedimientos de resolución de los problemas porque han visto y han jugado con hacerlos. Por otro lado, se espera que sean capaces de tener una mayor capacidad de plantear los problemas porque han vivido situaciones parecidas. Además, se ha trabajado la idea de la igualdad como algo relacional, sobre todo los alumnos que han jugado con el juego propuesto en la tercera actividad. Por último, ver la x como algo manipulable, algo con lo que se puede jugar, mover, dividir etc., otorga una familiaridad mayor a la variable, seguramente un punto de vista más amplio para el alumno, porque no se limita a un valor de una caja, sino que tiene recuerdos de contextos diferentes de la misma.

4.4. Discusión

Los retos a los que se enfrenta el alumno a la hora de encarar esta fase de su aprendizaje matemático, vienen en gran parte ligadas a las capacidades que ha desarrollado en las etapas anteriores. Es decir, si un alumno tiene lagunas en cálculo mental, en algoritmia de suma/resta, multiplicación/división, es improbable que tenga un cierto control de las fracciones o de propiedades distributivas o priorización de operaciones.

A mayores, la capacidad de abstracción es una cualidad que va desarrollándose con la edad y ese desarrollo no se da de forma lineal en los alumnos. En esta transición de la aritmética al álgebra, es necesario que el alumno desarrolle esa capacidad para que pueda generalizar, buscar patrones o plantear problemas, pero puede ser que en una misma clase haya alumnos con una abstracción muy desarrollada y otros que no son capaces de plantear esas situaciones. La pluralidad de la clase a la hora de trabajar las matemáticas es un aspecto que debemos tener en cuenta a la hora de preparar una actividad de ludificación, ya que al trabajar de forma autónoma, se ponen más en evidencia esas diferencias.

Por eso, basándonos en la teoría de Bruner (1966), el objetivo principal con estas actividades es generar experiencias interactivas y manipulativas comunes a las que los alumnos o el profesor puedan recurrir. Según el constructivismo, el alumno tiene un esquema mental previo que utiliza para dar explicación y cabida a la nueva situación creada. Por eso, necesitamos que los alumnos entiendan la situación, entiendan qué es lo que están haciendo, qué tienen entre manos y cómo funciona.

Pero estas actividades ayudan a trabajar algunos de los problemas que los investigadores se han encontrado en los alumnos de estas edades. Por un lado, en la primera actividad se trabaja con la manipulación de los números negativos, de forma que se obliga a tener en cuenta y utilizar los números negativos como resultado. Lo mismo pasa con la segunda actividad. Introduciendo el concepto de globo y añadiendo la manipulación de la balanza, se puede trabajar con la naturaleza de los números enteros y sus propiedades en las ecuaciones.

Aunque no lo haga de forma muy profunda, la balanza puede ayudar a ver la igualdad como signo relacional. Es decir, aunque no lo trabaja de forma directa, porque el objetivo es que los alumnos deduzcan la forma de resolver ecuaciones sencillas, la manipulación de la balanza, poniendo un globo a cada lado, poniendo un peso a cada lado etc., puede ser un ejercicio interesante a la hora de trabajar con la idea.

De forma más directa se trata con la variable. En cada uno de los ejercicios, la variable simboliza algo diferente, esto es, la magnitud que se busca en un caso es la carga atómica, en otro es el peso y en el tercero el valor monetario. Por ello, en vez de presentarlo de una sola manera, se aportan experiencias diversas, en situaciones diferentes, donde el alumno manipula y juega con ella, intentando dar una visión más abierta de lo que la variable significa. Además, de esas experiencias, además de crear estructuras que nos interesa generar, también genera algunas falsas percepciones, definiciones sesgadas, etc. Por tanto, dar un significado más amplio a la variable, nos puede ayudar a prevenir generar tantas falsas percepciones sobre la variable y su manipulación.

De los cinco grandes ámbitos que Linchevski (1995) enumera, en esta introducción al álgebra se trabajan sobre todo las ecuaciones y la simplificación de las expresiones algebraicas. Aunque es cierto que de forma indirecta, con la clasificación de los números, priorización de las operaciones o propiedades distributivas y conmutativas, se trabajan las estructuras algebraicas, los alumnos no tienen la capacidad para entender ni para trabajar ese apartado de forma explícita. Por tanto, el trabajo en esta fase de introducción es presentar la ecuación y la igualdad de una manera diferente, después trabajar las destrezas para la simplificación de esas expresiones y la algoritmia para las ecuaciones. Por último, intentar conseguir cierto nivel de abstracción para que el alumno consiga llegar a plantear problemas sencillos de forma algebraica.

Por último, el uso de las TIC en general, y la de la ludificación en particular, puede correr el riesgo de que el alumno pierda el rumbo de para qué está haciendo la actividad que está haciendo, en qué contexto se enmarca dicha actividad o que no consiga relacionarla con el resto de la materia que se está tratando. Es decir, es labor del profesor preparar las actividades de forma que el hilo conductor no se pierda y enlazar las mismas de manera que se mantenga la coherencia y la seriedad que requiere la materia. Para eso, hay que romper la dicotomía de juego-diversión, para convertirla en juego-aprendizaje-diversión.

4.5. Conclusiones

La transición de la aritmética al álgebra es un camino largo en el aprendizaje matemático del alumno. Las actividades propuestas en este trabajo se limitan a una fase muy inicial de ese aprendizaje, donde las experiencias interactivas del alumno toman mayor importancia porque es sobre ellas donde va a construir los esquemas mentales que le ayuden a resolver situaciones parecidas. Para esas situaciones pueden resultar muy útiles los postulados de la ludificación, ya que aplicados de manera correcta, aumentan la motivación de los alumnos.

Plantear una actividad de forma interactiva, trae como consecuencia que el alumno tome las riendas del juego, situándolo de forma evidente en el centro del proceso enseñanza-aprendizaje. Esto obliga a que la labor del profesor de preparación, desarrollo y conclusiones de la actividad sea crucial ya que tiene que asegurarse que el proceso de aprendizaje por descubrimiento se dé en cada uno de los alumnos. Para eso debe entender qué va a trabajar, cómo lo va a trabajar y al final de la actividad sacar conclusiones adecuadas, generalizar lo trabajado en las actividades y simbolizarlo de forma matemática.

Por ello, se puede concluir que el objetivo principal propuesto que era mejorar la comprensión de los cambios que acarrea la transición de la aritmética al álgebra, se ha cumplido. Se puede realizar esta afirmación porque al ser el alumno el protagonista de esas situaciones planteadas, es él mismo el que entiende qué ha cambiado y debe adaptarse a ese cambio. Es decir, siente la necesidad de esos nuevos instrumentos para hacer frente a los cambios.

Analizando más a detalle los objetivos específicos, la propuesta ayuda al alumno a deducir cómo resolver ecuaciones de primer grado, y lo hace porque consigue ganar el juego, hallar una solución para el problema que se le plantea y una estrategia para "ganar" siempre. Con las actividades de consolidación se consigue que ese ganar el juego se convierta en la adquisición de técnicas de resolución de las propias ecuaciones.

También ha realizado un trabajo de paso del simbolismo de la balanza a una metaescritura propia y de ahí a una simbolización estándar del lenguaje algebraico. A su vez, esto le vale al alumno para poder describir situaciones que se pueda encontrar en una situación real en lenguaje algebraico.

Para finalizar, sobre todo se ha hecho un trabajo de construir puntos de referencia, recuerdos para el alumno, que le pueden valer para que aplicando técnicas heurísticas como la división del problema en problemas más pequeños a los que sabe enfrentarse, o construir analogías, se puedan resolver situaciones nuevas para él.

4.6. Limitaciones y prospectiva

Esta propuesta no ha podido ser llevada a práctica. Si algún día se llevara a práctica y diera los resultados esperados, la base teórica sobre la ludificación y el aprendizaje por descubrimiento, serían aplicables a otras áreas de la asignatura, porque basan su novedad en otorgar al alumno experiencias interactivas, lo que ayuda a generar referencias para la generalización y por ende para trabajar la abstracción.

A la hora de llevar un recurso TIC a clase, hay varios aspectos a tener en cuenta, para que la actividad no acabe siendo un fracaso. Por un lado, las limitaciones de la propia clase: Acceso a la red, cortafuegos del centro, problemas con extensiones o versiones de un programa, que el aparato que se pretende utilizar soporte el medio, licencias, etc.

En la era de la intercomunicación, donde hay una oferta infinita de apps que nos hacen la vida un poco más fácil, existen innumerables aplicaciones creadas con intención de ayudar a los alumnos en su proceso de enseñanza-aprendizaje. Muchos de ellos son juegos que tienen o pretenden tener un trasfondo matemático, pero que en realidad no tienen una base didáctica muy robusta. Por ejemplo, poner una carrera de coches donde cada vuelta se pregunte por el mínimo común múltiplo de tres números, no es un recurso didáctico ni cumple los requisitos para ser considerado como una actividad basada en ludificación.

Hay apps que podrían ser didácticamente muy interesantes (Dragon Box por ejemplo), pero al ser accesibles únicamente desde dispositivos android, limita el uso en clase porque no se disponen de tablets para todos los alumnos y el uso del Smartphone choca con el reglamento de casi todos los colegios. Además, todavía hay alumnos de 12-13 años que no disponen de un smartphone propio y si disponen de él, quizá tienen un SO diferente o una versión que no soporta el juego.

Otras apps tienen una gran base didáctica, están muy bien planteados, pero no tienen en cuenta los tres estadios del aprendizaje por descubrimiento. Es decir, plantean situaciones nuevas para el usuario, generan una cierta iconización, pero no dejan espacio para el tercer estadio simbólico, lo que no garantiza que el proceso de enseñanza aprendizaje se dé de forma óptima, ya que se saltan la fase reflexiva, en la que se generaliza y se ajustan los esquemas mentales del alumno para adaptarse a los cambios experimentados. Esto puede provocar que el alumno aprenda a ganar el juego, pero no sepa resolver de manera algebraica, la misma ecuación descrita de forma icónica por parte de la app.

Esto hace obligatorio que las actividades con TIC y los juegos en particular han de ser escogidos de forma cuidadosa, manteniendo siempre el espíritu crítico, ligándolo con las metodologías a utilizar, viendo las ventajas que pueden ofrecer pero sobre todo teniendo en cuenta los inconvenientes que nos podemos encontrar. Es labor del docente encajar cada una de las actividades de manera correcta, manteniendo una coherencia a la hora de contemporizarlos y plantearlos.

Por último, dentro de las características de un profesor activo están la búsqueda de nuevas actividades que sustituyan a otras, siempre respetando el marco teórico de aplicación de las mismas. Pero a mayores, incluso el propio profesor puede generar ese tipo de juegos, con base didáctica, con interfaces más atractivas y renovadas, con mayor flexibilidad.

5. Bibliografía

Anderson, W.C (1976). The development and evaluation of a unit of instruction designed to teach second grade children the concept of mathematical equality. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University

Barrón Ruiz, A. (1993). Aprendizaje por descubrimiento: principios y aplicaciones inadecuadas. In Enseñanza de las Ciencias (Vol. 11, pp. 003-11).

Behr, M., Erlwanger, S., &Nichols, E. (1976). How children view equality sentences No. PMDC-TR-3. Tallahassee, FL: Florida State University.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction* (Vol. 59). Harvard University Press.

Booth, L. R. & Johnson, D.C (1984). Algebra: Children' Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project. Windsor, England: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1986). Difficulties in algebra. Australian Mathematics Teacher, 42(3), 2-4.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. The ideas of algebra, K-12, 20-32.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. No. 00-2). Wisconsin, Madison: National Center for improving student learning and achievement in mathematics and science.

Collis, K. F. (1974). Cognitive development and mathematics learning, Psychology of Mathematics Education Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College, London.

Collis, K. F. (1975). A Study of Concrete and Formal Operations in School Mathematics: A Piagetian Viewpoint. Australian Council for Educational Research, 1975

Davis, R. B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. Journal of Children's Mathematical Behavior, 1(3), 7–35.

Decreto 175/2007 por el que se establece el curriculum de la Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco. Boletín Oficial del País Vasco 13/11/2007. Gobierno Vasco

Denmark, T. (1976). Final Report: A Teaching Experimention Equality. PMDC TechnicalReport No. 6.

Frazer, C.: 1976, Ability of College Students to Involve Symmetry of Equality with Applications of Mathematical Generalizations, unpublished doctoral dissertation, Florida State University.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1993). Negative solutions in the context of algebraic word problems. In Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Pacific Grove, CA (Vol. 1, pp. 121-127).

Ginsburg, H. (1977). Children's arithmetic: The learning process. D. van Nostrand.

Plan Heziberri 2020 Marco del Modelo Educativo Pedagógico (2015). Gobierno Vasco. Disponible en:

http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/heziberri_2020/es_heziberr/adjuntos/Heziberri_2020_c.pdf (Consultado a 11 de Enero 2016)

Huotari, K., &Hamari, J. (2012). Defining Gamification - A Service Marketing Perspective. In Proceedings of The 16th International Academic Mindtrek Conference, Tampere, Finland, October 3–5, 2012.

Huang, W. H. Y., &Soman, D. (2013). Gamification of Education. Research Report Series: Behavioural Economics in Action.

Kapp, K. M. (2012). The gamification of learning and instruction: game-based methods and strategies for training and education. John Wiley & Sons.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. Educational studies in Mathematics, 12(3), 317-326.

Kieran, C., &Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. In Enseñanza de las Ciencias (Vol. 7, pp. 229-240).

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence& variable. In Early Algebraization (pp. 259-276). Springer Berlin Heidelberg.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables.*Mathematics in school*, 23-26.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of prealgebra. Journal of Mathematical Behavior, 14, 113-120

Piaget, J. (1971). Biology and knowledge: An essay on the relations between organic regulations and cognitive processes.

Renwick, E. M. (1932), Children’s misconceptions concerning the symbols of mathematical equality. British Journal of Educational Psychology, 2: 173–183.

Ruano, R. M., Socas, M. M., &Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra.

Socas, M. M. &Palarea, M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (16), 91-98.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. The ideas of algebra, K-12, 8, 19.

Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K., &Nurmi, J. E. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. Educational Psychology, 28(4), 409-426.

Watson, J. B. (1925). *Behaviorism*. Transaction Publishers.

6. Anexo

6.1. Tabla 1

Tabla de competencias educativas generales
1.– Aprender a vivir responsablemente de forma autónoma, aprendiendo a conocerse uno mismo, a cuidar de la salud mental y física propia, y a desarrollar hábitos saludables. Aprender a disfrutar de forma responsable de la naturaleza y de los recursos naturales, patrimonio de toda la humanidad y de las generaciones actuales y futuras.
2.– Aprender a aprender y a pensar, aprendiendo a interpretar, generar y evaluar la información, a tomar decisiones y resolver problemas, aprendiendo hábitos de estudio, de trabajo y estrategias de aprendizaje, aprendiendo a aplicar los métodos del conocimiento científico y matemático para identificar y resolver los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
3.– Aprender a comunicarse en las lenguas oficiales y en al menos una lengua extranjera, aprendiendo a utilizar e interpretar de forma crítica los medios de comunicación y las tecnologías de la información y de la comunicación así como los lenguajes artísticos musicales, corporales, plásticos y visuales.
4.– Aprender a vivir juntos, aprendiendo a mantener interacciones positivas y a utilizar el diálogo y la negociación en situaciones conflictivas, a participar de manera activa y democrática, a cooperar y trabajar en grupo y a respetar la diversidad.
5.– Aprender a desarrollarse como persona, siendo uno mismo, controlando las emociones negativas y valorándose de forma positiva y realista a sí mismo, siendo autónomo y responsable de sus propias decisiones y actuando de acuerdo con los principios éticos.
6.– Aprender a hacer y a emprender, teniendo iniciativa para tomar decisiones y asumir responsabilidades, valorando el esfuerzo y la superación de las dificultades y practicando iniciativas emprendedoras en los diferentes ámbitos de la vida.

6.2. Tabla 2

Tabla de Competencias básicas
a) Competencia en cultura científica, tecnológica y de la salud
b) Competencia para aprender a aprender
c) Competencia matemática
d) Competencia en comunicación lingüística
e) Competencia en el tratamiento de la información y competencia digital
f) Competencia social y ciudadana
g) Competencia en cultura humanística y artística
h) Competencia para la autonomía e iniciativa personal

6.3. Tabla 3

Tabla competencias específicas de la asignatura de matemáticas
1. Plantear y resolver, de manera individual o en grupo, problemas extraídos de la vida cotidiana, de otras ciencias o de las propias matemáticas, eligiendo y utilizando diferentes estrategias, razonando el proceso de resolución, interpretando los resultados y aplicándolos a nuevas situaciones para poder actuar de manera más eficiente en el medio social.

2. Identificar, relacionar, describir y representar los elementos matemáticos (números, datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, figuras, azar, etc.) presentes tanto en el mundo social (noticias, opiniones, publicidad...) como en el científico, analizando críticamente las funciones que desempeñan para una mejor comprensión y uso de los mensajes e información recibida.
3. Utilizar, de manera autónoma y creativa, las herramientas propias del lenguaje y la expresión matemática (números, tablas, gráficos, figuras, nomenclaturas usuales, etc.) para explicitar el propio pensamiento de manera clara y coherente, utilizando los recursos tecnológicos más apropiados.
4. Representar y describir los distintos objetos, situaciones matemáticas, composiciones y configuraciones espaciales a partir de una información dada o del mismo entorno, aplicando los conocimientos geométricos necesarios para comprender y analizar el mundo físico que nos rodea y resolver problemas a él referidos.
5. Realizar, con seguridad y confianza, estimaciones y cálculos (numéricos, métricos, algebraicos, etc.) utilizando los procedimientos más adecuados a cada situación (cálculo mental, escrito, calculadora, ordenador,...) para interpretar y valorar diferentes situaciones de la vida cotidiana decidiendo, en cada caso, las ventajas de su uso y sometiendo los resultados a revisión sistemática.
6. Razonar y argumentar, elaborando argumentos y justificaciones sólidas que les permitan justificar y presentar resultados y conclusiones, criticar rebatir otros argumentos o aplicarlos a nuevas situaciones.
7. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos y de la comunicación (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para los cálculos como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones de índole diversa y, así mismo, para ayudar en el aprendizaje de las matemáticas.
8. Integrar los conocimientos y modos propios de la actividad matemática –exploración sistemática de alternativas, precisión en el lenguaje, flexibilidad y perseverancia, en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse para resolver problemas de forma creativa, analítica y crítica.
9. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.
10. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito para adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas

6.4. Tabla 4

Criterios de evaluación		
1	Realizar cálculos en los que intervengan números naturales, enteros, fraccionarios y decimales sencillos, utilizando las propiedades más importantes y decidiendo si es necesaria una respuesta exacta o aproximada, aplicando con seguridad el modo de cálculo más adecuado (mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora)	
	1	Reconoce los distintos tipos números: naturales, enteros y fraccionarios
	2	Realiza los cálculos, con dichos números, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel o calculadora
	3	Relaciona las fracciones con los números decimales y viceversa

	4	Realiza estimaciones correctamente y juzga si los resultados obtenidos son razonables
	5	Aplica correctamente las propiedades, la jerarquía de las operaciones y las reglas de uso de los paréntesis en cálculos sencillos
	6	Identifica y utiliza los distintos tipos de números para representar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa
2	Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando el recurso más adecuado para realizar los cálculos y valorando la adecuación del resultado al contexto	
	1	Realiza una lectura comprensiva del enunciado en los problemas propuestos
	2	Identifica los datos y las incógnitas en el enunciado del problema
	3	Realiza los cálculos asociados a la resolución del problema con eficacia y seguridad, utilizando el recurso más apropiado
	4	Interpreta los resultados obtenidos y comprueba la solución obtenida
	5	Explica con claridad el proceso seguido para resolver el problema
	6	Reflexiona respecto al proceso seguido y utiliza ese conocimiento en otros problemas
3	Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizando letras para simbolizar las distintas cantidades para obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas	
	1	Obtiene el valor numérico de una fórmula
	2	Utiliza argumentos lógicos correctos para obtener conclusiones
	3	Organiza y ordena los resultados obtenidos
	4	Encuentra las regularidades que puedan existir en un conjunto de números
	5	Expresa mediante una fórmula verbal o algebraica la regularidad observada
4	Reconocer y describir figuras planas y espaciales, utilizando sus propiedades para clasificarlas y aplicando el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada	
	1	Identifica, describe y define las figuras planas y espaciales básicas utilizando la terminología adecuada
	2	Reconoce y utiliza las propiedades básicas de las figuras planas y espaciales, y las clasifica de acuerdo a diversos criterios
	3	Aplica el conocimiento geométrico para describir y resolver problemas del entorno inmediato
5	Estimar y calcular longitudes, áreas y ángulos de figuras planas con una precisión acorde con la situación planteada, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada, comprendiendo los procesos de medida y aplicándolos a la resolución de problemas de nuestro entorno	
	1	Realiza estimaciones ajustadas de las medidas a realizar utilizando para ello referencias cercanas
	2	Utiliza los instrumentos apropiados para medir ángulos y longitudes de figuras geométricas
	3	Aplica las fórmulas pertinentes para calcular perímetros y áreas de las figuras más relevantes (triángulo, rectángulo, circunferencia, círculo)
	4	Calcula áreas de figuras planas mediante la descomposición de las mismas en otras figuras más elementales
	5	Resuelve problemas relacionados con la medida utilizando tanto procedimientos informales como los académicos
6	Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, identificando relaciones de dependencia, en particular de proporcionalidad directa, en situaciones cotidianas	
	1	Identifica las variables que intervienen en cada situación
	2	Estudia la dependencia entre las variables y busca posibles relaciones
	3	Identifica y resuelve problemas relacionados con la proporcionalidad directa

	4	Realiza una lectura cuantitativa y cualitativa de tablas y gráficas incluyendo las de tipo estadístico
	5	Dibuja gráficas sobre unos ejes de coordenadas a partir de tablas o relaciones
7	Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra partiendo de información previamente obtenida de forma empírica	
	1	Identifica y distingue los fenómenos aleatorios de los deterministas
	2	Utiliza la terminología adecuada para describir la posibilidad de que ocurran determinados sucesos aleatorios
	3	Utiliza el concepto de frecuencia relativa y obtiene dicha frecuencia en sucesos ligados a experimentos sencillos
	4	Realiza predicciones razonables respecto a la posibilidad de que ocurra un suceso aleatorio en experimentos sencillos
	5	Asigna la probabilidad de un suceso a partir de su frecuencia relativa
8	Resolver problemas utilizando un modelo heurístico: analizando el enunciado, eligiendo las estrategias adecuadas (ensayo-error, resolución de un problema más sencillo, división del problema en pequeños problemas, dibujar un esquema, etc) realizar los cálculos pertinentes, comprobando la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución	
	1	Realiza una lectura comprensiva del enunciado del problema e identifica los datos y las incógnitas de los problemas propuestos
	2	Conoce y aplica distintas estrategias heurísticas para resolver el problema
	3	Conoce y aplica los métodos de resolución de problemas-tipo(mezclas, móviles, de proporcionalidad directa, etc)
	4	Examina y evalúa diferentes alternativas de cara a resolver el problema, pudiendo modificarlas a lo largo del proceso
	5	Comprueba la solución y reflexiona respecto al proceso seguido, sacando conclusiones que le puedan servir en la solución de otros problemas
	6	Comunica los resultados obtenidos y explica, mediante un lenguaje claro, las ideas y los procesos personales desarrollados
9	Valorar y utilizar sistemáticamente conductas asociadas a la actividad matemática, tales como curiosidad, perseverancia y confianza en las propias capacidades, orden o revisión sistemática. Asimismo integrarse en el trabajo en grupo, respetando y valorando las opiniones ajenas como fuente de aprendizaje y colaborando en el logro de un objetivo común	
	1	Reconoce la importancia del dominio de las operaciones y procedimientos matemáticos como herramienta que facilita la solución de problemas cotidianos y escolares
	2	Muestra interés y perseverancia en el trabajo
	3	Presenta con orden, claridad y limpieza los resultados
	4	Justifica y expone, con el rigor acorde a su nivel, procesos y resultados
	5	Colabora en el reparto de tareas para el trabajo en equipo
	6	Plantea alternativas y valora el proceso de discusión e intercambio de opiniones en el grupo como oportunidad de mejora

6.5. Examen de evaluación

Nombre:________________________________ Fecha:________________________________

Apellidos:______________________________

Ejercicio 1:

Une mediante flechas las siguientes expresiones con su expresión algebraica:

El siguiente de un número		$x/2$
El doble de un número		$x+1$
La suma de dos números desconocidos		$x+y$
La mitad de un número		$2x$

Ejercicio 2:

Simplifica las siguientes expresiones

a) $(x +2) -(x+3)=$
b) $3*(x-2)+5=$
c) $x-(x+1)=$
d) $3*(x-2)-2(x-3)=$
e) $(x-(2-x))/2=$
f) $(((x-1)-(x+1))-2)*3=$

Ejercicio 3:

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado

a) $x-5=3$
b) $3=x+3$
c) $-5=-3+x$
d) $x+1=-x-1$
e) $(x-3)/3=6$
f) $3x-3=-2x+7$

Problema 1:

Elena, Ana y Rocío van a la cabalgata de Reyes. Elena y Ana consiguen recoger 80 caramelos. Al llegar Rocío, juntó los 20 caramelos que consiguió a los de sus hermanas. A la hora de repartirlos, deciden hacerlo por sabores. A Elena le tocan los 45 de fresa y a Rocío 25 de limón. ¿Cuántos caramelos le tocarán a Ana?

Problema 2:

Como es domingo, los padres de Jaime le dan la paga. Se gasta 2 euros en chucherías y 1.60€ en un jueguete. Si al final del día le quedan 1.40€, ¿cuánto dinero le dan de paga a Jaime?

Problema 3:

Si multiplicamos un número por 4 y le restamos 3, el resultado es 17. ¿Qué número es?

6.6. Cuestionario previo

1. ¿Qué significa que una balanza está en equilibrio?
2. Resuelve esta expresión 2+5=_+3
3. ¿Cómo explicarías para qué se usa la variable (la x)?
4. ¿Qué significa el símbolo igual =? ¿En qué situaciones lo utilizas?

6.7. Cuestionario posterior

1. ¿Qué actividad te gustaría repetir, si tuvieras que escoger una?
2. ¿Serías capaz de explicar a tus compañeros cómo jugar a los juegos propuestos?¿Y para qué sirven?
3. ¿Qué significa que una balanza esté en equilibrio?
4. Resuelve esta expresión 3+4=_+2
5. ¿Cómo explicarías para qué sirve la variable (la x)?
6. ¿Qué significa el símbolo igual =? ¿En qué situaciones lo utilizas?