



**Universidad Internacional de La Rioja,
Facultad de Educación**

Trabajo Fin de Máster

**Máster universitario en formación del
profesorado en Educación Secundaria y
Bachillerato**

Uso de *GeoGebra* como recurso didáctico para la enseñanza de funciones gráficas en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología

Presentado por: Juan Portilla Ciriquián
Línea de investigación: Métodos Pedagógicos (Matemáticas) y
Recursos Didácticos (TIC)
Director/a: D. Pedro Aurelio Viñuela Villa

Ciudad: Sevilla

Fecha: 17 de enero de 2014

ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN	8
ABSTRACT	8
1. INTRODUCCIÓN.....	9
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	12
2.1. OBJETIVOS	16
2.1.1. <i>Objetivo principal</i>	16
2.1.2. <i>Objetivos específicos</i>	16
2.2. METODOLOGÍA	17
2.2.1. <i>Introducción de la metodología del presente trabajo</i>	17
2.2.2. <i>Fases de la metodología del presente trabajo</i>	18
2.3. BREVE JUSTIFICACIÓN DE LA BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA.....	20
2.3.1. <i>Marco legal</i>	20
2.3.2. <i>Dificultades en la enseñanza-aprendizaje de Matemáticas</i>	20
2.3.3. <i>El uso de las TIC en las aulas. Ventajas e inconvenientes</i>	22
2.3.4. <i>Programa GeoGebra como recurso didáctico</i>	22
3. MARCO TEÓRICO.....	24
3.1. MARCO LEGAL DE LAS MATEMÁTICAS EN BACHILLERATO	24
3.1.1. <i>Recomendación del Parlamento europeo y del Consejo</i>	24
3.1.2. <i>Real Decreto 1467/2007</i>	25
3.1.3. <i>Decreto 416/2008</i>	27
3.1.4. <i>LOMCE</i>	28
3.1.5. <i>Conclusiones del Marco Legal</i>	30
3.2. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS	31
3.2.1. <i>Informe TIMSS</i>	31
3.2.2. <i>Informe PISA</i>	31
3.3. ENFOQUES EDUCATIVOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS	34
3.4. DIFICULTADES EN LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES GRÁFICAS	36
3.5. UTILIZACIÓN DE GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES	37
4. ESTUDIO DE CAMPO	40
4.1. INTRODUCCIÓN	40
4.2. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO DE CAMPO	40
4.3. METODOLOGÍA	40
4.4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	46
4.4.1. <i>Pregunta N° 1: ¿Imparte o ha impartido clases de Matemáticas en 4º de ESO o en Bachillerato?</i>	46
4.4.2. <i>Pregunta N° 2: ¿En qué parte de la asignatura de Matemáticas observa que los alumnos presentan mayor dificultad?</i>	47
4.4.3. <i>Pregunta N° 3: ¿Qué dificultades presentan los alumnos ante la asignatura de Matemáticas?</i>	47
4.4.4. <i>Pregunta N° 4: ¿Piensa que las promociones actuales tienen cada vez más dificultades para la comprensión de las Matemáticas que las de años atrás?</i>	48

4.4.5. Pregunta N° 5: El tema de representación de funciones gráficas (funciones si enseña en 4º de ESO) ¿es una unidad que los alumnos comprenden y asimilan con facilidad?	49
4.4.6. Pregunta N° 6: ¿Qué parte de la unidad de funciones gráficas les parece más complicada a los alumnos?	49
4.4.7. Pregunta N° 7: ¿Cuántos alumnos son capaces de representar de manera completa y bien la gráfica de una función?	50
4.4.8. Pregunta N° 8: ¿Qué recursos usa habitualmente para la explicación de la representación gráfica de funciones?.....	51
4.4.9. Pregunta N° 9: ¿Ha hecho uso de las TIC en las aulas para la explicación de esta unidad?	51
4.4.10. Pregunta N° 10: ¿Qué nivel de formación en TIC cree que tiene?.....	52
4.4.11. Pregunta N° 11: ¿Cree que el uso de las TIC en las aulas podrían ser de ayuda en la explicación de representación gráfica de funciones?	52
4.4.12. Pregunta N° 12: ¿Conoce el programa GeoGebra de geometría dinámica?.....	53
4.4.13. Pregunta N° 13: ¿Ha utilizado dicho software para la unidad de representaciones gráficas o en cualquier otra?	53
4.5. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE CAMPO	55
4.5.1. Sobre las dificultades de los alumnos en la asigantura de Matemáticas	55
4.5.2. Dificultades en el tema de representación gráfica de funciones	55
4.5.3. Uso de las TIC en las aulas	55
4.5.4. Conocimiento y uso del programa GeoGebra.....	56
4.5.5. CONCLUSIÓN FINAL DE EL ESTUDIO DE CAMPO	56
5. PROPUESTA PRÁCTICA: EMPLEO DEL SOFTWARE GEOGEBRA	57
5.1. INTRODUCCIÓN.....	57
5.2. JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA	57
5.3. PROPUESTA DIDÁCTICA	59
5.3.1. Recursos.....	59
5.3.2. Objetivos de la propuesta didáctica	59
5.3.3. Actividades	60
5.4. DESARROLLO DE LA PROPUESTA.....	61
5.4.1. Primera Sesión: Conceptos básicos y Características de las funciones...	61
5.4.2. Segunda Sesión: Ejercicios de funciones racionales realizados con el programa GeoGebra.....	66
5.4.3. Tercera Sesión: Ejercicios de funciones Exponenciales y Logarítmicas realizados con el programa GeoGebra	67
5.4.4. Cuarta Sesión: Ejercicios de raíz cuadrada realizados con el programa GeoGebra.....	68
5.4.5. Quinta Sesión: Ejercicio ejemplo de la vida real realizado con GeoGebra	69
6. APORTACIONES.....	70
7. DISCUSIÓN	71
8. CONCLUSIONES	72
9. LIMITACIONES DEL TRABAJO.....	74

10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS.....	75
11. BIBLIOGRAFÍA	77
11.1. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
11.2. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA.....	79
12. ANEXOS.....	81
ANEXO N° 1. ENCUESTA TIPO REALIZADA A LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS.....	81

ÍNDICE DE CUADROS

<i>Cuadro N° 1.</i> Tipos de deficiencias en representación de funciones	12
<i>Cuadro N° 2.</i> Contenidos del Análisis matemático de Matemáticas I	26
<i>Cuadro N° 3.</i> Núcleos temáticos de Matemáticas I y II	27
<i>Cuadro N° 4.</i> Aplicaciones más comunes de <i>GeoGebra</i>	37
<i>Cuadro N° 5.</i> Justificación, preguntas y respuestas del cuestionario	42

ÍNDICE DE GRÁFICAS

<i>Gráfica N° 1.</i> Resultados en Matemáticas PISA 2012 países de la OCDE.	13
<i>Gráfica N° 2.</i> Ranking de contenidos bibliográficos del mundo..	21
<i>Gráfica N° 3.</i> Estructura de 1º de Bachillerato con la LOMCE (I).....	29
<i>Gráfica N° 4.</i> Estructura de 1º de Bachillerato con la LOMCE (II)..	30
<i>Gráfica N° 5.</i> Alumnos evaluados en el TIMSS, por niveles en Matemáticas..	31
<i>Gráfica N° 6.</i> Resultados de Matemáticas..	32
<i>Gráfica N° 7.</i> Resultados de Matemáticas PISA 2012 por comunidades autónomas.	32
<i>Gráfica N° 8.</i> Clases en las que los docentes imparten Matemáticas.	46
<i>Gráfica N° 9.</i> Alumnos con mayor dificultad en matemáticas.	47
<i>Gráfica N° 10.</i> Dificultades que presentan los alumnos en Matemáticas.....	47
<i>Gráfica N° 11.</i> Promociones actuales frente a promociones anteriores.....	48
<i>Gráfica N° 12.</i> Comprensión de la unidad de funciones.	49
<i>Gráfica N° 13.</i> Área de las funciones que presenta más dificultad.	49
<i>Gráfica N° 14.</i> Capacidad de representar completamente y bien una función.	50
<i>Gráfica N° 15.</i> Recursos habituales para las explicaciones.....	51
<i>Gráfica N° 16.</i> Uso de las TIC para la representación gráfica de funciones.	51
<i>Gráfica N° 17.</i> Nivel de formación en TIC de los docentes.	52
<i>Gráfica N° 18.</i> Las TIC como ayuda en las aulas.	52
<i>Gráfica N° 19.</i> Conocimiento del software <i>GeoGebra</i>	53

<i>Gráfica N° 20. Uso del software GeoGebra en las aulas.</i>	<i>53</i>
<i>Gráfica N° 21. Primera Sesión, diapositiva N° 1.....</i>	<i>62</i>
<i>Gráfica N° 22. Primera Sesión, diapositiva N° 2.....</i>	<i>62</i>
<i>Gráfica N° 23. Primera Sesión, diapositiva N° 3.....</i>	<i>63</i>
<i>Gráfica N° 24. Primera Sesión, diapositiva N° 4.....</i>	<i>63</i>
<i>Gráfica N° 25. Primera Sesión, diapositiva N° 5.....</i>	<i>64</i>
<i>Gráfica N° 26. Primera Sesión, diapositiva N° 6.....</i>	<i>64</i>
<i>Gráfica N° 27. Primera Sesión, diapositiva N° 7.</i>	<i>65</i>
<i>Gráfica N° 28. Primera Sesión, diapositiva N° 8.</i>	<i>65</i>
<i>Gráfica N° 29. Sesión Segunda, ejercicio racional N° 1.....</i>	<i>66</i>
<i>Gráfica N° 30. Sesión Segunda, ejercicio racional N° 2..</i>	<i>66</i>
<i>Gráfica N° 31. Sesión Tercera, ejercicio exponencial.</i>	<i>67</i>
<i>Gráfica N° 32. Sesión Tercera, ejercicio logarítmico.....</i>	<i>67</i>
<i>Gráfica N° 33. Sesión Cuarta, ejercicio de raíz cuadrada N° 1.....</i>	<i>68</i>
<i>Gráfica N° 34. Sesión Cuarta, ejercicio de raíz cuadrada N° 2.....</i>	<i>68</i>
<i>Gráfica N° 35. Sesión Quinta, ejercicio ejemplo de la vida real I.....</i>	<i>69</i>
<i>Gráfica N° 36. Sesión Cuarta, ejercicio ejemplo de la vida real II.....</i>	<i>69</i>

No existe ningún libro sin profesor, sin bibliotecario, sin documentalista. Se ha podido creer que se iba a modificar esa estructura gracias a la televisión ayer y a Internet hoy. Siempre estamos ante el mismo error: creer que la tecnología puede sustituir al hombre. Las nuevas tecnologías no tocan la muerte de los profesores, sino más bien lo contrario, el principio de su revalorización.

Dominique Wolton

RESUMEN

El presente trabajo viene determinado por la observación de los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología y su dificultad para asimilar el concepto del cálculo de funciones y su representación gráfica. Dicha percepción tuvo lugar durante la realización de las prácticas del Máster de Profesorado. Esto ha llevado a que, ante dicho problema, se realice una investigación bibliográfica y un estudio de campo para abordar el tema. La investigación bibliográfica se realiza desde distintos puntos de vista: enseñanza de funciones gráficas en la actualidad, dificultad y enfoque didáctico del profesorado, uso actual de recursos didácticos en la enseñanza de dicha materia y objetivo curricular en el aprendizaje de funciones. En cuanto al estudio de campo, éste se efectúa en el marco de un curso de 1º de Bachillerato en la especialidad antes mencionada, en el “Colegio de Fomento Tabladilla” (Sevilla), en el “Colegio Puertoblanco” (Algeciras) y en el “Colegio Entrepinos” (Huelva) con el análisis de unas entrevistas realizadas a los docentes que imparten la materia de Matemáticas. Tras la investigación bibliográfica y el posterior estudio de campo, se expone una propuesta práctica, que ha sido el cuerpo del presente proyecto, usando como Recurso Didáctico el software *GeoGebra*. La conclusión obtenida en el presente trabajo es que la utilización del programa *Geogebra* ayuda en gran medida a la asimilación del concepto de funciones gráficas a los alumnos y su representación, y con ello a una mejora en el objetivo de aprendizaje de funciones gráficas y un incremento de la motivación del alumnado en el tema en cuestión.

Palabras clave: funciones, representación, recurso, Matemáticas, *GeoGebra*.

ABSTRACT

The present work comes determined by the observation of the students of First Course of Bachillerato of Sciences and Technology and their difficulty to assimilate the concept of the calculation of functions and the representation of the graphics. We came to this idea from the practice we did in Master for Teachers. This study took us to do a bibliographic. This perception was made during the practices of the Master in Teaching. This took us to that, in front of this problem, to do a bibliographic research and a study in this field to address the problem. The bibliographic research has been taken from different points of view: functions in teaching graphics, difficulty and didactic approach of the teachers, current use of didactic resources in the education of the matter, and objective curricular in the learning of functions. After our research, we going to put in practice the specific methods gathered to students of First Course in Bachillerato, in Fomento's School Tabladilla (Seville), in School Puertoblanco (Algeciras) and in School Entrepinos (Huelva) with the analyses of some interviews realised to the teachers that teach Mathematics. After the bibliographic research and the study of the field, exposes a practical proposal, that has been the body of the present project, using as a Didactic Resource the software *GeoGebra*. The conclusion obtained in the present work is that the use of the program *Geogebra* helps to a large extent to the assimilation of the concept of graphic functions to the students and its representation, and also with the aim of learning of graphic functions and an increase of the motivation of the students in that question.

Keywords: functions, representation, resource, Mathematical, *GeoGebra*.

1. INTRODUCCIÓN

Durante el desarrollo del Máster de profesorado en Educación Secundaria y Bachillerato, y en la realización de las prácticas como futuro docente, se ha observado la problemática de los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología en asimilar el concepto de funciones y la dificultad que tienen en la representación gráfica de las mismas. Determinados informes como el recién publicado PISA, del año 2012, y el TIMSS, del año 2011, muestran como la enseñanza de Matemáticas en nuestro país ha retrocedido con respecto a los años anteriores y se sitúa por debajo de la media tanto de la Unión Europea como de los países miembros de la OCDE. Centrándonos en la problemática sobre la comprensión de funciones gráficas, y tras el análisis bibliográfico y el estudio de campo realizados, se expone una propuesta práctica, mediante un programa matemático denominado *GeoGebra* que ayude a entender de manera más intuitiva la unidad y que a la vez pueda servir de aliciente motivador en el aprendizaje de los alumnos.

Refiriéndonos a la importancia de las funciones gráficas en cuanto al cálculo, representación y análisis de las mismas, tanto en la materia de Matemáticas, que es la que aquí exponemos, como en otras ciencias, han sido estudiadas y analizadas en múltiples investigaciones y publicaciones. Éstas exponen las ventajas existentes de las funciones para la comprensión intuitiva de conceptos al visionar gráficamente la relación de variables y para interpretar situaciones de la vida real. Al respecto, mencionan que permiten interpretar mejor los datos analizados y proporcionan una idea generalizada de los resultados que se están estudiando. Por esto es fundamental la función gráfica en el aprendizaje de los alumnos de Matemáticas. Por otro lado, dentro del currículo matemático que los jóvenes de Bachillerato deben adquirir, la representación gráfica de funciones, se considera como la aplicación práctica de lo que aprenden en el análisis matemático.

Desde dos fuentes extraemos lo que arriba afirmamos. La primera fuente que nos aporta la relevancia de las funciones gráficas es la normativa vigente para los alumnos de Bachillerato tanto en el marco estatal como el autonómico. En la normativa estatal de la vigente LOE, el *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura de Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*, nos expone sobre las funciones que:

Se pretende que los alumnos sean capaces de distinguir las características de las familias de funciones a partir de su representación gráfica, así como las variaciones que sufre la gráfica de una función al componerla con otra o al modificar de forma continua algún

coeficiente en su expresión algebraica. Asimismo, se pretende que los estudiantes apliquen estos conocimientos a la interpretación del fenómeno modelado en situaciones de la vida real. (BOE, 2007, núm. 266, p. 45448).

En la normativa autonómica en la que nos encontramos, Andalucía, el *Decreto 416/2008, de 22 de julio de 2008, por el que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*, nos expone con respecto a las funciones gráficas, denominada “modelización matemática” que:

En los procesos de enseñanza y aprendizaje [la modelización] se puede resumir en dos puntos: por un lado, la modelización refuerza el conocimiento multidisciplinar, a través de una actividad que involucra conceptos y métodos de diferentes ciencias; y por otro lado, la modelización propicia una actividad creativa que implica el concurso de habilidades fundamentales para la formación del científico y del ingeniero: desarrollo del espíritu crítico, formulación de ideas en términos científicos trabajo en equipo, búsqueda de información, etc. (BOJA, 2008, núm. 169, p. 172).

Por otro lado, nuestra segunda fuente de información sobre funciones ha sido el estudio bibliográfico realizado, del que extraemos, desde distintos textos, que las funciones gráficas se fundamentan en que son “instrumentos que apoyan la realización de las actividades matemáticas, facilitando el registro de las mismas” (Llenares y Valls, 2011, p.147). Como indica Font (2011) “la noción de función es uno de los conceptos matemáticos más importantes, debido a su naturaleza modelizadora de la realidad” (p.14).

De acuerdo con Brihuega (1997) el concepto de función es "uno de los conceptos más básicos, y al mismo tiempo, uno de los más difíciles de adquirir por los estudiantes, pues se mezclan en él aspectos complejos como su simbolismo, su representación y su aplicación a otros campos del saber” (p. 114). En la publicación realizada por Donaire, Fernández y Lomas (2008) nos manifiestan que:

El concepto de función en general, y más concretamente su representación gráfica, es un tema de suma relevancia en el curso de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología por una razón fundamental: dota a las Matemáticas y a sus problemas de todo su significado, y permite su aplicación a las cuestiones reales de la vida cotidiana (p. 156).

En la asignatura de Matemáticas, la representación gráfica de las funciones muestra visualmente las dependencias entre las variables a determinar, lo cual ayuda a comprender mejor sus propiedades. Como indican Vizmanos y Anzola (2000):

Conviene insistir en la importancia de la gráfica de una función, ya que da una información más rápida y amplia que la *fría* expresión numérica. Y no sólo eso, sino que la gráfica de una función es su *imagen dinámica* que permite seguir la evolución de un fenómeno dependiente de otro valor o valores (p. 216).

En este sentido, Taniguchi (1987) afirma que “un buen manejo de las funciones, y más concretamente de sus representaciones gráficas, ayudan a la

adquisición de muchos conceptos adquiridos anteriormente de monotonía, puntos característicos de una función, sus posibles tendencias, límites, dominio de las gráficas, asíntotas, etc.” (p.175).

Después de lo expuesto, sugerimos que es interesante para los alumnos tratar de asociar cada función con su gráfica, ya que esta dualidad función-gráfica es una de las ideas más utilizadas tanto en Matemáticas como en otras ciencias que tratan de simplificar o modelizar hechos de la vida real.

Con todo ello, para dar solución a la problemática planteada anteriormente sobre la comprensión de funciones gráficas en los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, exponemos una propuesta didáctica mediante el software *GeoGebra* de geometría dinámica, argumentando que favorecería el aprendizaje de los alumnos sobre la materia en cuestión. Así cumplimos uno de los objetivos en la metodología de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas recogidos en el *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura de Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*:

Las herramientas tecnológicas, en particular el uso de calculadoras y aplicaciones informáticas como sistemas de álgebra computacional o de geometría dinámica, pueden servir de ayuda tanto para la mejor comprensión de conceptos y la resolución de problemas complejos como para el procesamiento de cálculos pesados [...] Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas (BOE, 2007, núm. 266, pp. 45447-45448).

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema objeto del presente trabajo radica en las dificultades que tienen los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología en la comprensión del concepto de función y en la representación gráfica de funciones, así como los conceptos derivados de los cálculos de las mismas y sus características. En el análisis de la bibliografía consultada, se deriva que este problema está extendido en muchos alumnos actualmente.

La dificultad de los alumnos a la hora de representar funciones es patente, como indica Yury Hernández (2008), “ya que nunca antes se les había planteado la dificultad de plasmar en una gráfica una ecuación más complicada que la de una simple recta en \mathbb{R}^2 ” (p. 1). Arce y Ortega (2013, pp. 61-73), en uno de sus estudios, publican las deficiencias que tienen los alumnos de Bachillerato en el trazado de gráficas de funciones. Los alumnos confunden términos y mezclan conceptos en el momento de la representación de funciones, estas deficiencias son:

Cuadro Nº 1. Tipos de deficiencias en representación de funciones.

DEFICIENCIAS EN REPRESENTACIONES GRÁFICAS
• Relacionadas con el concepto de función.
• Relacionadas con el concepto de asíntotas.
• Relacionadas con la asignación y uso de escalas de los ejes cartesianos.
• Relacionadas con las características de las funciones.

Nota: Tipos de deficiencias en representación de funciones. Fuente: Elaboración propia a partir de Arce y Ortega (2013, pp. 65-68).

Como refiere González (2004, p. 2) los alumnos no precisan bien la representación de las funciones gráficas por la poca atención al trazar las mismas, no llegando a buen término en cada problema que realizan. Los educandos no tienen en cuenta que para el esbozo de las funciones gráficas se deben determinar unas características previas muy concretas de cada enunciado, que mediante un procedimiento matemático van adquiriendo, denominadas por Taniguchi (1987) “*puntos singulares* de la función [...] que más tarde y todos ellos puestos en común dan como resultado la gráfica deseada” (p.177).

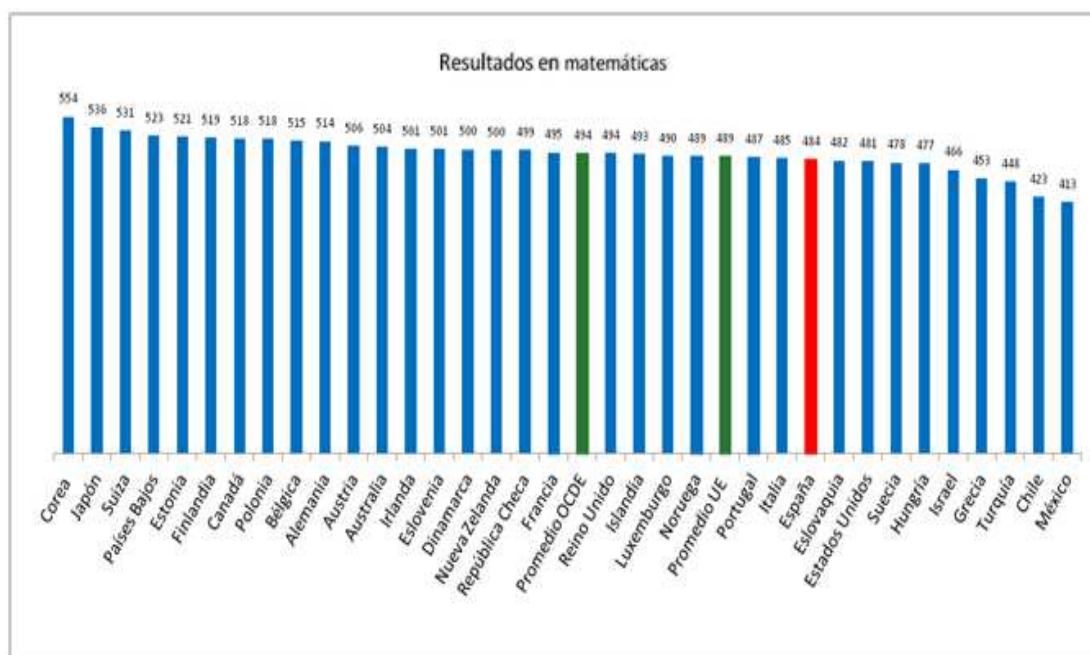
Aunque hay conceptos que los alumnos han adquirido en cursos anteriores como el dominio, la imagen, o incluso en el propio curso el concepto de límite de una función o sus derivadas, después, a la hora de plasmarlo en una gráfica, no son capaces de relacionarlos y exponerlos correctamente. “Si a esto le añadimos que el

problema viniese formulado como expresión algebraica para trasladarlo a la expresión gráfica, se aumentaría mucho más la dificultad, para un alumno que no concibe las matemáticas mediante un lenguaje algebraico” (Villalobos y Farfán, 2001, p. 126). De Gática, Tauber y Ruiz (2006):

Es característico, de los alumnos en general, que al darles cualquier ecuación para representar toman valores al azar y los unen sin considerar características como el dominio, la continuidad de la función, la posible existencia de asíntotas, etc. Esto conlleva a que su imagen no siempre esté bien representada (p. 126).

Como menciona González (2004) los alumnos “suelen recurrir más a menudo a los cálculos fundamentalmente de la tabla de valores en una función, con lo que son más propensos a cometer errores que con una concepción más ajustada de la función no cometerían” (p. 4). Verificamos así, después de lo expuesto, que esta cuestión es difícil de asimilar para los alumnos de hoy en día.

Por otro lado, aparte de la dificultad en la comprensión de funciones, está el aspecto que nos indica el nivel del alumnado en Matemáticas en España, como antes pudimos mencionar. Este dato nos lo proporciona el conocido informe PISA, del que extrayendo algunos resultados del 2012, obtenemos que “el rendimiento educativo en España está por debajo de la media de la OCDE en Matemáticas, con una puntuación media de 484 puntos y se sitúa entre los puestos 31 y 36 de los 65 países evaluados” (OCDE, 2013c, p.1), teniendo un retroceso con respecto a años anteriores.



Gráfica N° 1. Resultados en Matemáticas PISA 2012 países de la OCDE.
Fuente: Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

Dos de las áreas medidas en el citado informe PISA tratan sobre el cálculo matemático de cambios y relaciones, y por otro lado sobre el espacio y la forma. En las dos áreas estamos por debajo de la media de la OCDE. No sólo esto, sino que hay una tendencia negativa en el rendimiento de los alumnos en Matemáticas (OCDE, 2013c, p.2), propiciado por la desmotivación de la propia materia. Para hablar de esta apatía por las Matemáticas nos podemos referir a la motivación citada por García Hoz (1995), en la que manifiesta que “son aquellas cuestiones que se vinculan con los propios intereses y la propia vida, y que son más motivadoras que las que no lo son” (p.191).

Por eso, según el informe PISA (2012), el aspecto de la motivación de lo aprendido en Matemáticas y su lectura para los alumnos españoles es baja, es menor del 20% en los dos sexos, siendo el 19% para los chicos y 14% para las chicas, frente al 31% del resto de los países de la OCDE (OCDE, 2013c, p. 7).

Del propio informe PISA se extrae que los resultados de geometría de los alumnos en España son inferiores a la media de los países que componen la OCDE. Por eso, hay que revisar la metodología que hasta ahora se viene dando en la explicación de funciones gráficas, podríamos plantearnos un incremento del uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación como metodología para la ayuda de resolución de problemas complejos y motivación del alumnado en clase. Por ello nos referimos a uno de los objetivos de la LOMCE, ley de educación en España aprobada el 9 de diciembre de 2013, donde sugiere potenciar el uso de las TIC, como herramienta de enseñanza-aprendizaje:

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación serán una pieza fundamental para producir el cambio metodológico que lleve a conseguir el objetivo de mejora de la calidad educativa. Asimismo, el uso responsable y ordenado de estas nuevas tecnologías por parte de los alumnos y alumnas debe estar presente en todo el sistema educativo. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación serán también una herramienta clave en la formación del profesorado (BOE, 2013, núm. 295, p. 97865).

Con la problemática planteada, el trabajo pretende responder a la cuestión de la metodología, actividades y recursos a utilizar para mejorar la comprensión de los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología en el buen cálculo de funciones y su representación gráfica. La propuesta práctica, que se expone tras la consulta bibliográfica y el estudio de campo realizado, esperando obtener los siguientes resultados:

1. Mejorar el análisis de una función, observando su representación gráfica.

2. Conocer el posible esbozo de una gráfica al leer cada enunciado de función.
3. Resolver de manera gráfica o su interpretación problemas de la vida cotidiana, tanto económicos como sociales o de la propia Naturaleza.
4. Uso y dominio del programa de geometría dinámica *GeoGebra*, tanto para el alumnado como para los docentes, al ser una herramienta de trabajo eficaz para ambos.
5. Motivación por las Matemáticas, al ver plasmado los gráficos de los problemas, tan abstractos a veces para los alumnos.

2.1. OBJETIVOS

2.1.1. Objetivo principal

El objetivo principal del presente trabajo es el siguiente:

Exponer una propuesta práctica para enseñar funciones y su representación gráfica a alumnos de Matemáticas I de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología mediante el uso del software GeoGebra como recurso didáctico.

2.1.2. Objetivos específicos

Del objetivo principal antes expuesto, especificamos una serie de objetivos más detallados para llevar a cabo nuestro objetivo principal, que son:

1. Indagar en la dificultad que poseen los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología en la representación gráfica de funciones, analizando la bibliografía al respecto y realizando encuestas a profesores de Matemáticas.
2. Conocer lo que establece la normativa educativa actualmente vigente en España y en la Comunidad Autónoma de Andalucía respecto a las Matemáticas de Bachillerato de Ciencias y Tecnología y al uso de las TIC, teniendo en cuenta el efecto de la nueva Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) y sus implicaciones futuras en cuanto a las TIC en las aulas.
3. Analizar las ventajas e inconvenientes de la utilización de Tecnologías de la Información y Comunicación en funciones y del uso de geometría dinámica.
4. Conocer las principales características técnicas y las aplicaciones educativas más importantes en Matemáticas de Bachillerato del software de geometría dinámica *GeoGebra*.
5. Analizar los conocimientos que tienen los docentes sobre las dificultades de los alumnos para la representación gráfica de funciones y sobre las TIC mediante un estudio de campo.

2.2. METODOLOGÍA

2.2.1. Introducción de la metodología del presente trabajo

La metodología planteada para el desarrollo del presente trabajo de investigación se fundamenta en la combinación de una investigación bibliográfica y un estudio de campo realizados y el posterior análisis de los mismos.

En cuanto a la investigación bibliográfica, primero comenzamos con el marco legal existente en nuestro país para conocer las enseñanzas mínimas que deben adquirir los alumnos de Bachillerato. Después se han consultado libros sobre la problemática existente del estudio del presente trabajo, adquiriéndolos tanto en librerías como en la biblioteca pública de Sevilla Infanta Elena y en la facultad de Matemáticas de la misma ciudad. Otra adquisición de información bibliográfica ha sido la realizada a través de Internet, en la que se consultaron publicaciones de revistas de prestigio educativo, artículos que aportasen información relevante sobre las dificultades en la enseñanza de las Matemáticas y el uso de las TIC, una tesis doctoral sobre el software *GeoGebra*, búsquedas como las realizadas en Dialnet, la biblioteca de la UNIR, y páginas de geometría dinámica como recursos para la enseñanza de funciones gráficas, ubicadas principalmente en la dirección del INTEF, perteneciente al Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Para llevar a cabo el estudio de campo, se han realizado unas encuestas a docentes de tres centros educativos de carácter privado. Uno ha sido el “Colegio de Fomento Tabladilla”, ubicado en Sevilla, los otros dos centros pertenecientes al mismo grupo, *Grupo Attendis*, son el “Colegio Puertoblanco” y el “Colegio Entrepinos”, que se encuentran situados en Algeciras y Huelva respectivamente. Dichas entrevistas tratan cuestiones sobre las dificultades que tienen los alumnos en comprender las Matemáticas, también sobre las dificultades que tienen a la hora de realizar gráficas de funciones y el sobre el uso que hacen estos docentes de las TIC en sus unidades didácticas. Las entrevistas a los docentes fueron enviadas por correo electrónico a los propios centros en los que imparten clases dando su autorización para el estudio del presente trabajo.

Podemos concluir este apartado mencionando que la investigación realizada la pudimos agrupar en tres grandes apartados: el marco teórico, el estudio de campo que realizamos y la propuesta práctica de funciones gráficas mediante el software de geometría dinámica *GeoGebra*.

2.2.2. Fases de la metodología del presente trabajo

Las fases para llevar a cabo el presente trabajo son seis que enumeramos y detallamos a continuación:

➤ *Primera fase: Marco legal de las Matemáticas en Bachillerato.* En esta fase se investiga y profundiza en el currículo que debe adquirir un alumno de Bachillerato en la asignatura de Matemáticas establecida por la actual ley de educación LOE. También veremos lo que determina la *Recomendación del Parlamento europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente*, el *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*, respecto al marco estatal, y en cuanto a la Comunidad Autónoma de Andalucía, nos referiremos a la *Decreto, de 22 de julio de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*. Para concluir esta fase haremos mención la nueva *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre de 2013, para la Mejora de la Calidad Educativa* (LOMCE) sobre las TIC y su uso en las aulas.

➤ *Segunda fase: Consulta bibliográfica sobre las dificultades del aprendizaje de funciones y el uso de las TIC en las aulas.* En esta fase se ha consultado e investigado la bibliografía sobre las dificultades de los alumnos a la hora de aprender el concepto de función, se ha consultado los informes sobre el nivel de aprendizaje de los alumnos en la asignatura de Matemáticas y la dificultad que tienen los profesores en la enseñanza de funciones. Por otro lado se ha consultado artículos sobre el uso de las TIC en las aulas y sus ventajas e inconvenientes en la enseñanza de las Matemáticas.

➤ *Tercera fase: Presentación del software GeoGebra.* En esta tercera fase se presenta como recurso didáctico el programa de geometría dinámica *GeoGebra*, pensando que podría ser el que diese una mejora en la enseñanza de funciones gráficas para los docentes que se encuentran con la problemática de comprensión en el aprendizaje de dicha unidad. La forma de presentarlo es familiarizándonos con sus características y su uso a través de la página web oficial de dicho software (www.GeoGebra.org) y del Ministerio de Educación, INTEF (http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/bach/actividades/novedades.htm), que recoge como recursos didácticos problemas de Bachillerato elaborados para docentes realizados con *GeoGebra*.

➤ *Cuarta fase: Estudio de campo.* En esta fase del presente trabajo nos centramos en unas encuestas llevadas a cabo a docentes que imparten la asignatura de Matemáticas en un centro educativo de carácter privado en la ciudad de Sevilla, “Colegio de Fomento Tabladilla”, en otro centro educativo ubicado en Algeciras, “Colegio Puertoblanco”, y el tercero perteneciente a Huelva, “Colegio Entrepinos”, estos dos últimos del mismo grupo, *Grupo Attendis*, y de carácter privado también. Estas encuestas han servido para complementar el marco legal y la bibliografía consultada, y así analizar la problemática que los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología tienen en Matemáticas, particularizando en la unidad de representación gráfica de funciones, y para preguntar a los docentes sobre el mayor o menor uso de las TIC como recurso didáctico en las aulas.

➤ *Quinta fase: Propuesta práctica.* En esta fase se ha realizado la propuesta didáctica para los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología de representación gráfica de funciones, utilizando como recurso didáctico el programa de geometría dinámica *GeoGebra*. Gracias a esta herramienta didáctica, mejoramos la comprensión por parte de los educandos del tema en cuestión, al ver las gráficas expuestas en los enunciados, y por ello su motivación. También ayuda a los docentes a la temporalización de la enseñanza de funciones gráficas, dedicando menos tiempo a dibujarlas ellos mismos en las pizarras, y dedicando más tiempo a la explicación de las características de dichas funciones.

➤ *Sexta fase: Conclusiones finales, limitaciones del estudio y posibles líneas de investigación futuras.* En esta última fase recogemos las conclusiones finales obtenidas tras la elaboración de nuestra propuesta didáctica. Con ello recogemos a continuación las limitaciones que nos han surgido durante el proceso del presente trabajo y para terminar, se exponen unas líneas de investigación futuras, para unidades didácticas similares a la referida, tanto en cursos de la ESO como en la rama de Ciencias Sociales del Bachillerato.

2.3. BREVE JUSTIFICACIÓN DE LA BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA

La bibliografía analizada para realizar el presente trabajo se basa en la consulta de distintos libros y páginas web, cumpliendo así los objetivos expuestos. Detallamos esta bibliografía según los siguientes bloques de estudio:

- *Marco legal.*
- *Dificultades en la enseñanza-aprendizaje de Matemáticas.*
- *El uso de las TIC en las aulas. Ventajas e inconvenientes.*
- *Programa GeoGebra como recurso didáctico.*

2.3.1. Marco legal

Para situarnos en este marco hacemos referencia a la *Recomendación del Parlamento europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente*, y a la Ley Orgánica de Educación (LOE), que es la actualmente vigente, con el *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas* y con el *Decreto 416/2008, de 22 de julio de 2008, por el que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*.

Para la elección del programa *GeoGebra*, como recurso didáctico de enseñanza-aprendizaje, nos hemos basado en el apartado de conocimientos de Matemáticas I y II expuestos en *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas* en el que textualmente argumenta “las herramientas tecnológicas, en particular el uso aplicaciones informáticas de geometría dinámica, pueden servir de ayuda tanto para la mejor comprensión de conceptos y resolución de problemas complejos como para el procesamiento de cálculos pesados” (BOE, 2007, núm. 266, p. 45448).

2.3.2. Dificultades en la enseñanza-aprendizaje de Matemáticas

Abordando el tema de las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas, nos basamos en varias fuentes de información. La primera ha sido el libro de Goñi (2005) *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar*, consultado en la biblioteca pública de Sevilla Infenta Elena. El capítulo sexto contiene una explicación extensa sobre funciones, los enfoques didácticos que existen para la enseñanza de las Matemáticas (formalista y realista) y las dificultades que les sobrevienen a los alumnos a la hora de aprender dicha unidad. También, este

libro versa sobre los contenidos que constituyen el currículo en la ESO, y nos ha servido como guía para ver con qué nivel llegan los alumnos de Matemáticas provenientes de 4º de ESO.

Otras fuentes de información, extraídas de Internet, para el estudio de la dificultad que poseen los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas y más concretamente de funciones gráficas, han sido Arce y Ortega (2008) en su publicación sobre las *deficiencias de los alumnos de Bachillerato en el trazado de funciones gráficas*, también la publicación de la doctora M^a.T. González (2003) sobre las *dificultades y concepciones de los alumnos sobre la representación gráfica de funciones*. De la revista *Seiem*, Contreras (2003) expone *los actos de comprensión en el análisis matemático* y de la revista *Redalyc*, consultamos una publicación de Vanegas y Escalona (2010) que trata sobre las dificultades de las *representación de funciones matemáticas de una sola variable*, extraído de la página web de dicha revista (www.redalyc.org), que es una revista de divulgación científica que engloba América Latina, el Caribe, España y Portugal. Accedimos a la página web arriba mencionada con ayuda de Dialnet, la biblioteca de la UNIR. Dialnet es un buscador que ocupa el segundo puesto mundial de buscadores bibliográficos según el ranking elaborado por el Laboratorio de Cibermetría del CSIC y el primer puesto en el ranking español y también europeo.



World Rank	Portal	Country	Tamaño	Visibilidad	Files Rich	scholar
1	Scientific Electronic Library Online Brazil SciELO Brazil		1	1	4	2
2	DIALNET		8	4	5	3
3	Berkeley Electronic Press Bepress		32	1	32	8
4	China National Knowledge Infrastructure		4	5	119	1
5	HAL Hyper Article en Ligne		27	9	1	7
6	Revues.org		18	3	75	10
7	DiVA Digitala Vetenskapliga Arkivet Academic Archive On-line		9	12	10	4
8	Scientific Electronic Library Online Chile SciELO Chile		22	8	18	12

Gráfica N° 2. Ranking de contenidos bibliográficos del mundo. Fuente: Laboratorio de Cibermetría CSIC.

Para concluir este apartado, y en cuanto al nivel académico actual en España de la asignatura de Matemáticas, hemos obtenido información del informe PISA (2012) y TIMSS (2011).

2.3.3. El uso de las TIC en las aulas. Ventajas e inconvenientes

Para el estudio de las ventajas e inconvenientes que se derivan del uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, nos hemos basado en informes, revistas e investigaciones de prestigio como la publicación de M. Area (2005) *Tecnologías de la Información y Comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las líneas de investigación*, realizada en la revista de investigación educativa *Relieve*, donde expone las ventajas de las TIC en las aulas y sus inconvenientes en cuanto a la poca formación por parte de los docentes. Para destacar las ventajas de las TIC en las aulas hemos consultado la publicación de García y González (2004) *Uso pedagógico de materiales y recursos educativos de las TIC: sus ventajas en el aula*. Otro texto referido a las TIC para la enseñanza de las Matemáticas ha sido el consultado en la revista *Suma, Los nuevos principios y estándares para la educación matemática* (Fernández, 2005). Otro portal visitado fue *Funes*, que es un repositorio digital de educación en la enseñanza de las Matemáticas (<http://funes.uniandes.edu.co/>) en el que existen diversos artículos y tesis que sirvieron para la investigación bibliográfica llevada a cabo

2.3.4. Programa GeoGebra como recurso didáctico

Para la consulta de nuestra herramienta didáctica *GeoGebra*, hemos adquirido el libro que de Carrillo de Albornoz y Llamas (2009) *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica*. Nos muestra de manera gradual el potente programa de geometría dinámica que puede ser usado como recurso didáctico en las aulas desde edades tempranas. Contiene múltiples ejemplos de funciones matemáticas sencillas y complejas explicadas paso a paso para poder representarlas, con lo que sirve de iniciación a docentes inexpertos en el uso de este software como un manual. Pero aparte de esto, también contiene ejemplos no sólo de la rama de Matemáticas, sino que aborda cuestiones como los estadísticos o monetarios relacionados con problemas de la vida cotidiana para representar y analizar, singular aspecto que aparece reflejado en el contenido de las Matemáticas I, punto 3, párrafo sexto del *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas* (BOE, 2007, núm. 266, p. 45449).

Los libros de Taniguchi (1987), *Cómo superar las Matemáticas de 3º de B.U.P. Problemas resueltos y problemas propuestos con solución*, y de Torrecilla y Molina (2005), *Compendio de problemas de Matemáticas para el Bachillerato. Aritmética, Álgebra, Trigonometría y Geometría*, éste último adquirido en la facultad de Matemáticas de Sevilla, nos han servido como guías de problemas para

los alumnos de 1º de Bachillerato en la rama de Ciencias y Tecnología. Buscando así ejemplos para nuestra propuesta práctica. Dichos ejercicios están muy enfocados hacia la Selectividad (enfoque funcional en la enseñanza de las Matemáticas). Más interesante aún, es que nos muestran cómo el nivel de los problemas exigidos en casi veinte años ha descendido de manera considerable. De la revista *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, se consultó un artículo publicado por Carrillo de Albornoz (2010) sobre *GeoGebra, como recurso imprescindible en el aula de Matemáticas*, en el que ayuda a introducir el programa de geometría dinámica de manera resumida a los docentes que no han incluido dicha herramienta en sus didácticas.

Otros portales a los que nos hemos dirigido para obtener problemas han sido Educación de Docentes de Navarra, donde se encuentran muchos recursos didácticos de la unidad de funciones y su representación gráfica, diseñados por Manuel Sada Allo, o enlazados a otras direcciones de Internet por él (<http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/>). El Instituto de Tecnologías Educativas y de Formación para el Profesorado (INTEF), nos ha falicitado un recurso didáctico denominado Geometría para Matemáticas I. Está pensada para alcanzar los objetivos de currículo del bloque de funciones de la asignatura de Matemáticas I, y superar la materia conceptual y procedimentalmente (http://recursostic.educacion.es/apls/informacion_didactica/1337). Otro lugar de la propia página INTEF es el denominado Proyecto Gauss, de donde se acceden a materiales didácticos y recursos complementarios para Bachillerato y problemas del software *GeoGebra* (www.recursostic.educacion.es/gauss/web).

Por ello y viendo la potente herramienta didáctica que es *GeoGebra*, lo hemos utilizado para nuestro objetivo principal de la enseñanza de funciones gráficas obteniendo información y aplicaciones de su propia página web oficial (www.GeoGebra.org), e incluso una página que nos enlaza a trabajos propuestos denominada Geometría Dinámica (www.geogebra.geometriadinamica.org), editada por ellos mismos.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Marco legal de las Matemáticas en Bachillerato

Para abordar el tema que nos ocupa, vamos a empezar enmarcando la enseñanza de las Matemáticas I de Ciencias y Tecnología de Bachillerato en la legislación vigente para la adquisición del currículo de Matemáticas establecido por la ley en nuestro país y más concretamente en la Comunidad Autónoma de Andalucía, que es en la que nos encontramos.

La asignatura de Matemáticas I de Ciencias y Tecnología de Bachillerato, de nuestro presente trabajo, se engloba en tres marcos legales que van desde lo más general, *Recomendación del Parlamento europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente*, a lo más específico, *Decreto 416/2008, de 22 de julio de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*, pasando por el *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*, todo ello dentro de la Ley Orgánica de Educación (LOE) en la que se contemplan los objetivos que deben adquirir los alumnos para la competencia matemática y el empleo del uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación como herramienta didáctica para el aprendizaje de las Matemáticas. También analizaremos la reciente aprobación de la LOMCE como futuro de la educación en España.

3.1.1. Recomendación del Parlamento europeo y del Consejo

En este apartado exponemos las competencias y actitudes matemáticas que debe adquirir un alumno y las competencias digitales que se enmarcan a nivel europeo, marcadas en la *Recomendación del Parlamento europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente*.

Sobre las competencias en Matemáticas extraemos de la *Recomendación*:

a) Definición:

La competencia matemática es la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña —en distintos grados— la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas) (DOUE, 2006, núm. 394, p.15).

b) Conocimientos, capacidades y actitudes relacionados con esta competencia:

Las capacidades necesarias en el ámbito de las matemáticas incluyen un buen conocimiento de los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones básicas y las representaciones matemáticas básicas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos y un conocimiento de las preguntas a las que las matemáticas pueden dar respuesta.

Las personas deberían contar con las capacidades necesarias para aplicar los principios y los procesos matemáticos básicos en situaciones cotidianas de la vida privada y profesional, así como para seguir y evaluar cadenas argumentales. Las personas deberían ser capaces de razonar matemáticamente, comprender una demostración matemática y comunicarse en el lenguaje matemático, así como de utilizar las herramientas de ayuda adecuadas.

Una actitud positiva en matemáticas se basa en el respeto de la verdad y en la voluntad de encontrar argumentos y evaluar su validez (DOUE, 2006, núm. 394, p.15).

Sobre la competencia digital extraemos de la *Recomendación*:

a) Definición:

La competencia digital entraña el uso seguro y crítico de las tecnologías de la sociedad de la información (TSI) para el trabajo, el ocio y la comunicación. Se sustenta en las competencias básicas en materia de TIC: el uso de ordenadores para obtener, evaluar, almacenar, producir, presentar e intercambiar información, y comunicarse y participar en redes de colaboración a través de Internet. (DOUE, 2006, núm. 394, p.15).

b) Conocimientos, capacidades y actitudes relacionadas con esta competencia:

La competencia digital exige una buena comprensión y amplios conocimientos sobre la naturaleza, la función y las oportunidades de las TSI en situaciones cotidianas de la vida privada, social y profesional. Esto conlleva el conocimiento de las principales aplicaciones informáticas [...] como herramienta de apoyo a la creatividad y la innovación, y estar al corriente de las cuestiones relacionadas con la validez y la fiabilidad de la información disponible y de los principios legales y éticos por los que debe regirse el uso interactivo de las TSI.

Las capacidades necesarias incluyen: la capacidad de buscar, obtener y tratar información, así como de utilizarla de manera crítica y sistemática.

La utilización de las TSI requiere una actitud crítica y reflexiva con respecto a la información disponible y un uso responsable de los medios interactivos (DOUE, 2006, núm. 394, p.16).

3.1.2. Real Decreto 1467/2007

En este punto recogemos los objetivos y contenidos de las Matemáticas I de Bachillerato a nivel estatal expuestos en el *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas* y extraemos el uso que se debe hacer de las TIC para la enseñanza de las Matemáticas.

Las Matemáticas I de Ciencias y Tecnología se sustentan en dos pilares fundamentales: la geometría y el análisis. Este último pilar es en el que nos encontramos en nuestro presente trabajo de investigación, debido a que dentro del análisis matemático, un apartado es la representación gráfica de funciones. Como bien expresa el *Real Decreto 1467/2007*:

Se pretende que los alumnos sean capaces de distinguir las características de las familias de funciones a partir de su representación gráfica, así como las variaciones que sufre la gráfica de una función al componerla con otra o al modificar de forma continua algún coeficiente en su expresión algebraica. Con la introducción de la noción intuitiva de límite y geométrica de derivada, se establecen las bases del cálculo infinitesimal en Matemáticas I, que dotará de precisión el análisis del comportamiento de la función (BOE, 2007, núm. 266, p. 45448).

Refiriéndonos a uno de los objetivos que se persiguen en la asignatura de Matemáticas I de Ciencias y Tecnología, el Real Decreto expone como punto número octavo el siguiente “expresarse verbalmente y por escrito en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, comprendiendo y manejando términos, notaciones y representaciones matemáticas” (BOE, 2007, núm. 266, p. 45449).

En Matemáticas I de Ciencias y Tecnología, recogidos en el *Real Decreto 1467/2007*, se encuentran los contenidos específicos de las áreas que se deben impartir a los alumnos en ese curso. Una de ellas es el análisis matemático, dentro del cual se engloban seis apartados, siendo el último de todos el que nos interesa para el presente trabajo de investigación, que es el de la representación gráfica de funciones y sus análisis que describan problemas de la vida real o cotidiana. En el siguiente cuadro se exponen los apartados del área de análisis matemático:

Cuadro Nº 2. Contenidos del Análisis matemático de Matemáticas I.
ANÁLISIS

ANÁLISIS
• Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
• Dominio, recorrido y extremos de una función.
• Operaciones y composición de funciones.
• Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad.
• Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo.
• Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.

Nota: Contenidos del Análisis matemático de Matemáticas I. Fuente: Elaboración propia a partir del BOE (2007, núm. 266, p.45449).

En cuanto al uso de las TIC, el Real Decreto 1467/2007, menciona cómo éstas pueden usarse en la asignatura de Matemáticas I y II como apoyo a la docencia en el aprendizaje de los alumnos:

Las herramientas tecnológicas, en particular el uso de calculadoras y aplicaciones informáticas como sistemas de álgebra computacional o de geometría dinámica, pueden servir de ayuda tanto para la mejor comprensión de conceptos y la resolución de problemas complejos como para el procesamiento de cálculos pesados (BOE, 2007, núm. 266, p. 45448).

La enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato busca desarrollar una serie de capacidades, entre ellas indicamos la referida al uso de las herramientas tecnológicas como recurso didáctico:

Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas (BOE, 2007, núm. 266, p. 45449).

3.1.3. Decreto 416/2008

En la Comunidad Autónoma de Andalucía, que es a la que nos referimos en el presente trabajo de investigación, añade a los objetivos, contenidos y criterios de evaluación expuestos en el *Real Decreto 1467/2007* unas aportaciones específicas de la Comunidad Autónoma andaluza en el *Decreto 416/2008, de 22 de julio de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*, sin menospreciar los primeros. Al respecto de las funciones gráficas, llamado en dicho texto “modelización”, se expone que:

La modelización matemática ofrece un sentido práctico a las matemáticas, favoreciendo la motivación y el interés por ellas del alumnado de carreras científicas y tecnológicas, ofreciendo un nuevo carácter formativo de las mismas y a su vez fomentando el gusto por las matemáticas y por las carreras que contienen esta asignatura. Normalmente, los procesos de modelización en las enseñanzas del Bachillerato son una sombra de la realidad (BOJA, 2008, núm. 169, p. 170).

Más adelante el *Decreto 416/2008*, divide el estudio de las Matemáticas en Bachillerato en cuatro núcleos temáticos, siendo el último, el de modelización matemática, el que no ocupa en el presente trabajo.

Cuadro Nº 3. Núcleos temáticos de Matemáticas I y II.

NÚCLEOS TEMÁTICOS DE MATEMÁTICAS I y II
<ul style="list-style-type: none">• La resolución de problemas.
<ul style="list-style-type: none">• Aprender de y con la Historia de las Matemáticas.

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">• Introducción a los métodos y fundamentos matemáticos. |
| <ul style="list-style-type: none">• Modelización matemática. |

Nota: Núcleos temáticos de Matemáticas I y II. Fuente: Elaboración propia a partir del BOJA (2008, núm. 169, p.170).

Así extraemos del *Decreto 416/2008* que:

La construcción de modelos sencillos es útil en algunos contextos para la enseñanza matemática pues refuerza la práctica de resolución de problemas como una componente creativa para la formación del alumnado: diversas estrategias, cálculos, elementos imprescindibles para un futuro usuario de las matemáticas y para su futuro profesional [...] La modelización refuerza el conocimiento multidisciplinar, a través de una actividad que involucra conceptos y métodos de diferentes ciencias; por otro lado, la modelización propicia una actividad creativa que implica el concurso de habilidades fundamentales para la formación del científico y el ingeniero: desarrollo del espíritu crítico, formulación de ideas en términos científicos, trabajo en equipo, búsqueda de información, etc. (BOJA, 2008, núm. 169, p. 172).

Ahora bien, refiriéndose al uso de las TIC en las aulas como herramienta didáctica, el *Decreto 416/2008* recoge que:

Es necesario adaptar los currículos y metodologías a esa realidad y responder así a las nuevas demandas sociales. El trabajo en las clases de matemáticas con estas tecnologías, ya sean calculadoras u ordenadores, favorece un aprendizaje activo que permite al alumnado investigar, diseñar experimentos bien contruidos, conjeturar las razones profundas que yacen bajo los experimentos y los resultados obtenidos, reforzar o refutar dichas conjeturas y demostrar o rechazar automáticamente con la ayuda de dichas tecnologías. Es un magnífico recurso para que el alumnado construya su propio conocimiento matemático, que es la mejor forma de aprenderlo (BOJA, 2008, núm. 169, p. 170).

3.1.4. LOMCE

Adelantándonos a la nueva situación que existirá en la futura educación en España extraemos, de *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa*, que Matemáticas I pasará a ser asignatura troncal, siendo actualmente materia de modalidad en la LOE.

GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN, CULTURA
Y DEPORTE

LEY ORGÁNICA PARA LA MEJORA DE LA CALIDAD EDUCATIVA

BACHILLERATO 1º

44

Bachillerato 1º	TRONCALES (4+2)		ESPECÍFICAS (mínimo 3 - máximo 4)	DE LIBRE CONFIGURACIÓN AUTONÓMICA (nº indeterminado de asignaturas)
	TRONCALES GENERALES (4)	TRONCALES DE OPCIÓN (2)		
CIENCIAS	<ul style="list-style-type: none"> Lengua Castellana y Literatura I Primera Lengua Extranjera I Filosofía Matemáticas I 	<ul style="list-style-type: none"> Física y Química Biología y Geología Dibujo Técnico I 	<p>Siempre:</p> <ul style="list-style-type: none"> Educación Física 	
HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES	<ul style="list-style-type: none"> Lengua Castellana y Literatura I Primera Lengua Extranjera I Filosofía 	<ul style="list-style-type: none"> Historia del Mundo Contemporáneo Griego I Economía Literatura Universal 	<p>Mínimo 2 máximo 3:</p> <ul style="list-style-type: none"> Segunda Lengua Extranjera I Cultura Científica Tecnología Industrial I Tecnologías de la Información y la Comunicación I Dibujo Técnico I (si no escogida en troncales de opción) Dibujo Artístico I Volumen Anatomía Aplicada Análisis Musical I Lenguaje y Práctica Musical Una materia del bloque de troncales no cursada Religión 	<p>Siempre:</p> <ul style="list-style-type: none"> Lengua Cooficial y Literatura I (si la hubiere) <p>Otras:</p> <ul style="list-style-type: none"> A determinar Una materia del bloque de específicas no cursada Ampliación de materia del bloque de troncales o específicas
	<ul style="list-style-type: none"> Itinerario Humanidades: Latin I Itinerario CCSS: Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales I 			
ARTES	<ul style="list-style-type: none"> Lengua Castellana y Literatura I Primera Lengua Extranjera I Filosofía Fundamentos del arte I 	<ul style="list-style-type: none"> Historia del Mundo Contemporáneo Literatura Universal Cultura Audiovisual I 		
Mínimo 50 % del horario				

Gráfica Nº 3. Estructura de 1º de Bachillerato con la LOMCE (I). Fuente: MECD. Informe sobre la reforma de educación LOMCE (2013, p.44).


Con respecto a las TIC, la nueva *Ley de Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa*, expone en su Artículo 111 bis. Como punto cuarto:


Se promoverá el uso, por parte de las Administraciones educativas y los equipos directivos de los centros, de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el aula, como medio didáctico apropiado y valioso para llevar a cabo las tareas de enseñanza y aprendizaje (BOE, 2013, núm. 295, p. 97899).

En dicho artículo de la *Ley Orgánica 8/2013*, el punto anterior es bastante importante, porque el Ministerio de Educación:

Ofrecerá plataformas digitales y tecnológicas de acceso a toda la comunidad educativa, que podrán incorporar recursos didácticos aportados por las Administraciones educativas y otros agentes para su uso compartido. Los recursos deberán ser seleccionados de acuerdo con parámetros de calidad metodológica, adopción de estándares abiertos y disponibilidad de fuentes que faciliten su difusión, adaptación, reutilización y redistribución y serán reconocidos como tales (BOE, 2013, núm. 295, p. 97899).

Extrayendo de la presentación que realizó el Ministerio de Educación el día 10 de diciembre de 2013, con respecto a la nueva ley de educación en España aprobada el día anterior, se intuye de manera clara en el siguiente gráfico como se quiere promover e incrementar el uso de las TIC en las aulas.

GOBIERNO DE ESPAÑA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

LEY ORGÁNICA PARA LA MEJORA DE LA CALIDAD EDUCATIVA

PROPUESTA: Intensificar el uso de las TIC

30

- Extensión del concepto de aula en el tiempo y en el espacio: **entornos virtuales de aprendizaje.**
- **Utilización compartida** de las plataformas digitales y tecnológicas del Ministerio por Administraciones educativas, centros docentes, profesores y alumnos.
- Selección de **recursos digitales de calidad**, y reconocimiento de las aportaciones de la comunidad educativa que cumplan los requisitos de calidad establecidos.
- Establecimiento de **estándares de interoperatividad.**

Gráfica N° 4. Estructura de 1º de Bachillerato con la LOMCE (II). Fuente: MECD. Informe sobre la reforma de educación LOMCE (2013, p.44).

3.1.5. Conclusiones del Marco Legal

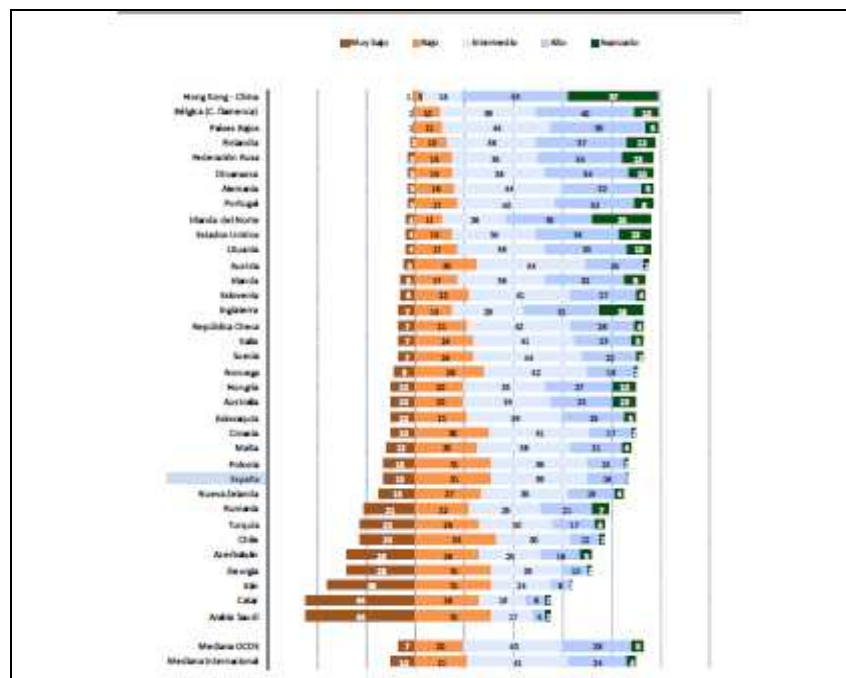
Resumiendo los marcos legales, en los que se encierran las enseñanzas de las Matemáticas para los alumnos de Bachillerato antes expuestas, se puede afirmar que tanto la representación gráfica de funciones como el uso de las TIC en las aulas es de carácter fundamental y básico para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Tanto es así que aparece de manera transversal, tanto a nivel europeo, como estatal y autonómico. Incluyendo a todos estos marcos legales, que actualmente se encuentran vigentes, la LOMCE que promueve de manera clara que las TIC en las aulas son un recurso didáctico imprescindible para la docencia.



3.2. La enseñanza de las Matemáticas

Para abordar el estado actual de las Matemáticas en España nos referimos a dos informes que recientemente se han publicado, cuyos resultados muestran el nivel en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas con respecto a los países que forman la OCDE. Dichos informes son el informe TIMSS, del año 2011, y el informe PISA, del año 2012.

3.2.1. Informe TIMSS

El informe TIMSS (2011) evalúa los logros de los alumnos en Matemáticas en 4º de primaria y en 2º de la ESO. Según los resultados obtenidos en dicho informe, España está por debajo de la media de la OCDE, con 482 puntos. Casi la mitad de los países evaluados en el TIMSS están por encima de la media. España debe mejorar en la enseñanza de las Matemáticas. En este informe se evalúa el nivel de los estudiantes, en la que España posee el 13% de sus alumnos con un nivel bajo, siendo la media de la OCDE el 7%, como muestra la Gráfica N° 5.





LEY ORGÁNICA PARA LA MEJORA DE LA CALIDAD EDUCATIVA

DEBILIDAD DEL SISTEMA: Resultados en pruebas internacionales

8

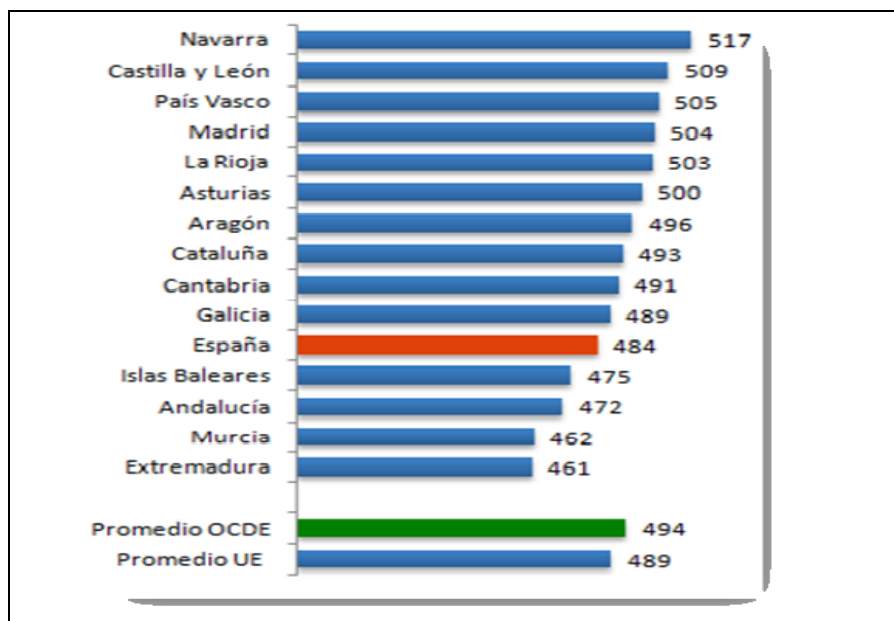
□ Resultados **PISA 2012 (15 años)**:

Los alumnos españoles de 15 años obtuvieron en el estudio PISA 2012 resultados por debajo de la media de la OCDE:

- En comprensión lectora 488 puntos, 8 por debajo de la OCDE.
- En Matemáticas 484, 10 por debajo de la media.
- En Ciencias 496 mientras que la media de la OCDE alcanzaba los 501 puntos.

Gráfica N° 6. Resultados de Matemáticas. Fuente: Informe PISA (2012).

Del propio informe PISA (2012) verificamos que la media que alcanza España en los resultados de Matemáticas está por debajo de la media de la OCDE, ocupando el puesto número 25 de los 34 países miembros. Por otra parte apenas el 8% de los alumnos alcanza los niveles altos de rendimiento en Matemáticas, estando en 13% la media de la OCDE. Sin embargo, el porcentaje de alumnos con nivel bajo de rendimiento en Matemáticas es del 24%, siendo parecido al de la OCDE, que se sitúa en el 23%. Otro dato característico son los resultados por comunidades autónomas, donde Andalucía, se sitúa por debajo de la media de España, con 472 puntos, con lo que consecuentemente tras la media de la OCDE y de la UE. Se muestra en la Gráfica N° 7.



Gráfica N° 7. Resultados de Matemáticas PISA 2012 por comunidades autónomas. Fuente: Informe PISA (2012, p. 8).

Se concluye que España se sitúa por debajo de la media de los países evaluados tanto en el informe TIMSS (2011) como en el informe PISA (2012), siendo Andalucía no menos malo, con lo quiere decir que el sistema educativo español debe hacer frente a esta realidad tan negativa, mejorando la didáctica de la enseñanza si queremos que estos resultados no descendan todavía más.

3.3. Enfoques educativos en la enseñanza de las Matemáticas

Para entender los enfoques educativos en los que se han planteado las enseñanzas de las Matemáticas nos referimos a Goñi (2011, p. 15) que expone cómo las funciones, y en general las Matemáticas, se han enseñado de dos maneras. La primera es mediante símbolos, o mejor, como un “juego de concatenación de símbolos”, que es el enfoque formalista de las enseñanzas de las Matemáticas. Quien introdujo este concepto fue David Hilbert en 1900, explicando que todo término o axioma matemático puede darse mediante la unión de símbolos. Esto propició que en los años 70 del siglo anterior las Matemáticas lo introdujesen en sus enseñanzas, fueron las denominadas “ciencias modernas”. “Esta manera de enseñar proporciona que las funciones queden descontextualizadas” (Goñi, 2011, p. 15).

Goñi (2011, p. 15) argumenta que se pueden enseñar las funciones de una manera cercana a la realidad, con problemas de la vida cotidiana, enfoque realista o constructivista de las Matemáticas, concepto que expuso Hans Freudenthal en 1991.

Con estos datos sobre los enfoques en la enseñanza de las Matemáticas, formalista y realista o constructivista, creemos los docentes deberían impartir la asignatura con el segundo enfoque. Así estaríamos de acuerdo con lo expresa el *Decreto 416/2008, de 22 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía*:

Si las entendemos desde una óptica formalista, presentaremos unas matemáticas absolutamente distintas que si nos identificamos con la concepción constructiva de las mismas. Son el espíritu y la intuición los elementos fundamentales que hay que potenciar en la enseñanza actual. De ahí el atractivo de un modelo educativo que recupera una enseñanza creativa que valora más el experimento mental en sí mismo que la expresión formal de la misma. La intuición, la representación, la manipulación real o virtual, la captación de la armonía, son elementos constitutivos de ese proceso, en el que debe iniciarse al alumnado (BOJA, 2008, núm. 169, p.170).

Del *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*, se lee en el primer apartado de objetivos de la asignatura de Matemáticas I y II las capacidades que deben desarrollarse:

Comprender y aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de otras ciencias, así como en la resolución razonada de problemas procedentes de actividades cotidianas y diferentes hábitos del saber (BOE, 2007, núm.266, p. 45448).

En cuanto a la Comunidad Autónoma de Andalucía, en el *Decreto 416/2008, de 22 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas*

correspondientes al Bachillerato en Andalucía, se lee sobre “la utilidad de las matemáticas relacionada con su capacidad para dar respuesta a la mayoría de las necesidades humanas y de las realidades de la vida cotidiana” (BOJA, 2008, núm. 169, p. 170).

Aunque se ve reflejado en las normativas que regulan las enseñanzas de Bachillerato que el criterio de enseñanza de funciones debe estar orientado a problemas de la vida cotidiana, y aparece así como objetivo en los textos, la realidad es bien distinta. Los problemas que realizan los alumnos de Bachillerato en Matemáticas I y II de Ciencias y Tecnología, son de carácter práctico para superar las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU), es decir, aprenden el método de resolver los problemas que en la Selectividad le van a exigir, y no le ven relevancia a trascender más allá en el conocimiento de las aplicaciones que puedan tener o no las funciones para los problemas diarios de la vida cotidiana. Así prevalece, por parte de los docentes en la enseñanza, el enfoque formal de la didáctica de la unidad de funciones gráficas y no el enfoque realista o constructivista.

Por esto creemos que el docente que enseñe la asignatura de Matemáticas, debe hacer ver a los alumnos la siguiente cuestión, la cual recogemos del texto de Brihuega (1997):

Las Matemáticas están cada vez más introducidas en nuestro mundo actual, en su papel de lenguaje aplicable a gran cantidad de situaciones de la vida, ya sea en el entorno cotidiano o en el profesional. En los medios de comunicación, las publicaciones, especializadas o de carácter divulgativo, de carácter social o económico, incluso en los anuncios, el lenguaje matemático –gráficas, tablas, porcentajes, etc.– está presente de forma notoria. Se puede afirmar que esto se debe principalmente a su carácter de lenguaje funcional, y por ello segundamente a su capacidad de utilización instrumental [...] Es en este sentido en el que se puede afirmar que las Matemáticas están en la base de cualquier contexto social, científico y tecnológico. Todo lo anteriormente dicho tiene que tener una gran influencia en el momento que nos planteemos su enseñanza y aprendizaje (Revista *Suma*, núm. 25, pág.116).

3.4. Dificultades en la enseñanza de funciones gráficas

Abordando la problemática sobre la dificultad que tienen los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología en la representación gráfica de funciones, nos apoyamos en el capítulo sexto, *Funciones*, del libro de Goñi (2011), *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar*. En dicho capítulo el autor nos pone de relieve las distintas maneras en las que se pueden escribir las funciones (algebraica, verbal, gráfica, etc.) y nos presenta las dificultades que tienen los alumnos para el cálculo de funciones, al pasar de una expresión a otra.

Siguiendo con el análisis de la dificultad de los alumnos de Bachillerato en la comprensión del trazado de funciones gráficas, Arce y Ortega (2008) exponen que estos tienen, a la hora de trazar gráficas, “deficiencias relacionadas con el concepto de función, con el concepto de asíntota, con la asignación y uso de escalas en los ejes cartesianos y con las propias características de las funciones” (pp. 67-68). La doctora González (2003) manifiesta que los alumnos “cometen numerosos errores al asociar la expresión algebraica de una función a partir de su gráfica no sólo no identificando correctamente sus coeficientes, sino incluso confundiendo el tipo de función que están analizando” (p.7).

Refiriéndonos al concepto de función, ya Javier Brihuega Nieto (1997) nos expone que “es uno de los conceptos más básicos, y al mismo tiempo, uno de los más difíciles de adquirir por los estudiantes, pues se mezclan en él aspectos complejos como su simbolismo, su representación y su aplicación a otros campos del saber” (p. 116). Otro aspecto sobre la dificultad que poseen los alumnos a la hora de trazar funciones gráficas es la problemática en la comprensión del análisis matemático, “problemas que vienen asociados a los fenómenos didácticos inherentes al estudio de las Matemáticas” (Contreras, 2003, p.1). Para concluir con las citas de los libros consultados nos referimos a Vanegas y Escalona (2010):

En cuanto al concepto de Función Matemática se observa en los estudiantes poco dominio [...] Esas deficiencias en las representaciones gráficas se deben a la escasa conexión existente entre situaciones, contenidos, conceptos de naturalezas distintas, estructuras, procedimientos y operaciones. Dicho de otra forma, los alumnos ante una situación presentada no logran establecer las conexiones necesarias o pertinentes entre sus estructuras cognitivas, los procedimientos adecuados, las operaciones y propiedades necesarias, y los distintos conceptos relacionados con el objeto matemático para poder enfrentar la situación (p. 102, p.107).

3.5. Utilización de GeoGebra para la enseñanza de funciones

Se ha decidido utilizar el programa *GeoGebra*, aunque existen numerosos softwares de geometría dinámica, porque es:

1. Sencillo su manejo y fácil de aprender para alumnos y docentes.
2. Es de adquisición gratuita.
3. No necesario trabajar con Internet, para su manejo, aunque el hacerlo también es viable, y se descargan problemas y se acceden a distintas plataformas muy intuitivas.
4. Una de las plataformas proporcionada por el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF) es Geometría para Matemáticas I, con recursos y problemas descargable (http://recursostic.educacion.es/apls/informacion_didactica/1337).
5. Aplicaciones que podemos ver en dicho software: funciones, geometría, cálculo, estadística. Todo ello en dos y tres dimensiones.
6. Porque como referimos en el presente trabajo, existe un libro, señalado por el propio *GeoGebra*, que sirve como manual y esta editado por Carrillo de Albornoz y Llamas (2009) titulado *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica*.

Las aplicaciones que nos ofrece el programa *GeoGebra*, en lo que se refiere al apartado de representación gráfica de funciones, son las que a continuación se detallan, todas ellas extraídas del libro *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica* (Carrillo de Albornoz y Llamas, 2009):

Cuadro Nº 4. Aplicaciones más comunes de GeoGebra.
APLICACIONES DEL SOFTWARE GEOGEBRA

<ul style="list-style-type: none">• Representar funciones de manera fácil e intuitiva
<ul style="list-style-type: none">• Estudiar las características de las funciones
<ul style="list-style-type: none">• Interpolar polinomios a partir de la gráfica
<ul style="list-style-type: none">• Hallar el polinomio de Taylor por aproximaciones polinómicas

• Derivada de una función y su prerepresentación gráfica
• Por consiguiente, integrar una función definida
• Muchas de estas aplicaciones, se pueden usar en Estadística

Nota: Aplicaciones más comunes de *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia a partir de Carrillo de Albronz y Llamas (2009).

Los textos que exponemos a continuación nos dan la razón para utilizar el software *GeoGebra* sin caer en error. Han sido extraídos de la revista *Funes*, de educación matemática de Colombia. El primero expone el uso de *GeoGebra* como herramienta didáctica dentro del aula de Matemáticas (Ruiz, Ávila y Villa-Ochoa, 2013):

El uso de recursos tecnológicos en el aula de clase permiten la creación de ambientes de aprendizaje en el que los estudiantes pueden producir conocimiento matemático de una forma alternativa, donde se resalten aspectos de los conceptos no siempre explícitos en el modelo tradicional de presentación expositiva. El asistente matemático *GeoGebra* integra el trabajo en las áreas de geometría, álgebra y análisis matemático en un ambiente dinámico potenciando entre otros, el desarrollo del pensamiento variacional (p. 12).

El segundo texto, también extraído de la revista *Funes*, nos explica la evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir *Geogebra* en el aula, de García (2011), que expone:

Los resultados en el aula han puesto de relieve las mejoras producidas por el uso de *Geogebra*, destacando ciertas actitudes y competencias, por la mejora experimentada por la mayoría de los estudiantes debido al trabajo con *Geogebra*. El efecto de *Geogebra* ha contribuido a potenciar en mayor grado determinadas actitudes y competencias (p. 7).

Un texto importante es el que nos proporciona Carrillo de Albornoz (2009):

GeoGebra no es sólo geometría dinámica, es mucho más, ya que ofrece herramientas que permiten trabajar cualquier concepto matemático, en niveles educativos de Primaria, Secundaria y Bachillerato, entra de lleno en la vida real, como la Estadística y habrá propuestas en un futuro que harán que sea imprescindible para enseñar Matemáticas (p.1).

Se usan como libros de problemas para nuestra propuesta didáctica los siguientes, *Cómo superar las Matemáticas de 3º de B.U.P. Problemas resueltos y problemas propuestos con solución* (Taniguchi, 1987) y *Compendio de problemas de Matemáticas para el Bachillerato. Aritmética, Álgebra, Trigonometría y Geometría* (Torrecilla y Molina, 2005), enfocados a los alumnos que cursan 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología.

Así mismo, en lo que se refiere a la propuesta práctica del uso del *GeoGebra* como recurso didáctico para la enseñanza-aprendizaje de funciones gráficas, debemos de tener en cuenta que el uso de las TIC en las aulas debe usarse como una

herramienta más, no como finalidad de la enseñanza o como sustitución del profesor. Debemos saber que las Tecnologías de la Información y Comunicación, van a favorecer la interactividad y la conectividad, y buscaremos como objetivo que las TIC se conviertan en TAC, Técnicas para el Aprendizaje y el Conocimiento. Para alcanzar dicho objetivo nos referiremos a los apartados expuestos:

1. Usar las TIC con objetivos claros y medibles.
2. Usar la metodología operativa y participativa para los alumnos.
3. Hacer una reflexión previa y posterior de lo acontecido.
4. Hacer un cambio de los roles, entre alumno y profesor, tradicionales.
5. Tener siempre una reflexión colaborativa.

Refiriéndonos a las buenas prácticas del profesorado que tratará de proporcionar todos los recursos materiales, para la enseñanza-aprendizaje, que son materiales extrínsecos, como pueden ser materiales impresos (libros, fichas,...) materiales tecnológicos (imágenes, sonidos, TIC,...) materiales realistas (objetos tridimensionales que nos acerquen a la realidad) o elaborados por los alumnos. Un ejemplo de ejercicio de buenas prácticas nos lo proporciona INTEF, con la revista de *Buenas Prácticas 2.0*, en la que se expone cómo los docentes pueden actuar de forma colaborativa, obtener recursos didácticos para las clases y exponer los suyos propios, para introducir las TIC en las aulas como recurso didáctico (<http://recursostic.educacion.es/heda/web/>). En cuanto a la educación personalizada, donde cada alumno es único e irrepetible, y atendiendo a la diversidad el docente debe conseguir que exista un papel participativo por parte de cada alumno gracias a la motivación que en él cause. “Motivar es predisponer al alumno para que oriente sus esfuerzos hacia el aprendizaje” (Bernardo y Basterretche, 1998, p. 257). Y de acuerdo con García Hoz, sobre la motivación, escribe que “el ser humano necesita tener seguridad, tener sentimiento de su propia dignidad y comunicarse a los demás, necesita sentirse querido”, unas líneas más adelante señala de nuevo que “las cuestiones que se vinculan con los propios intereses y la propia vida son más motivadoras que las que no lo son” (García Hoz, 1995, citado en UNIR, 2013, ¶2 y ¶5).

4. ESTUDIO DE CAMPO

4.1. INTRODUCCIÓN

En el estudio de campo realizamos y analizamos las encuestas a los profesores que imparten la asignatura de Matemáticas de dos centros educativos privados, de Sevilla y Algeciras, para ver el conocimiento que tienen sobre la problemática existente en la representación gráfica de funciones y para analizar si usan o no recursos TIC en las aulas, en particular el programa de geometría dinámica *GeoGebra*. Así completamos con este apartado el marco teórico expuesto anteriormente.

4.2. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO DE CAMPO

El presente estudio de campo lo realizamos como complemento del estudio teórico realizado. Con las entrevistas a los docentes analizaremos la dificultad que presentan los alumnos en los contenidos de Matemáticas en general, y en las funciones gráficas en particular, qué recursos didácticos TIC usan los docentes en las aulas para la enseñanza de las Matemáticas, en particular la representación de funciones gráficas, y si ven que el uso de *GeoGebra* como herramienta didáctica implementaría la comprensión de la unidad y motivación del alumnado.

El análisis de las encuestas realizadas a los profesores, de nuestro estudio de campo, nos ayudan a terminar de completar el marco teórico del presente trabajo. Las cuestiones realizadas, que son de tipo cerradas, y se adjuntan como *Anexo N°1*.

4.3. METODOLOGÍA

El cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Matemáticas, se ha llevado a cabo en tres centros educativos de la Comunidad Autónoma de Andalucía, ubicados en Sevilla, Algeciras y Huelva. Las encuestas acumuladas han sido seis en total, siendo cuatro del “Colegio Tabladilla”, una del “Colegio Puertoblanco” y otra del “Colegio Entrepinos”, en la que los encuestados son de diferentes edades. El docente más joven, con menos de treinta años de edad, es el que imparte en el “Colegio Puertoblanco” y hay tres profesores que llevan más de treinta años dando clases de Matemáticas, dos se encuentran en el “Colegio de Fomento Tabladilla” y el tercero en el “Colegio de Entrepinos”. Los dos profesores de edades medias, los ubicamos en el “Colegio de Fomento Tabladilla”, y llevan dando clase de Matemáticas quince años uno y trece años impartiendo la asignatura el último encuestado. Esto nos sirvió para analizar la relación profesor-edad-tecnología.

El primer centro mencionado se encuentra situado en Sevilla, “Colegio de Fomento Tabladilla”, es de carácter privado, sus alumnos son de nivel socioeconómico alto, ofreciendo educación desde 1º de Primaria hasta 2º de Bachillerato, ambos inclusive. Los otros dos centros educativos, también de carácter privado, pertenecen al mismo grupo, *Grupo Attendis*, y se encuentran ubicados en Algeciras, “Colegio Puertoblanco”, y Huelva, “Colegio Entrepinos”, son centros bilingües y sus alumnos son de nivel socioeconómico medio y alto. Ofrecen también educación a sus alumnos desde 1º de Primaria hasta 2º de Bachillerato, ambos inclusive.

Las entrevistas se han realizado en estos tres centros educativos, principalmente, por la vinculación entre el investigador y los docentes que imparten en dichos colegios y los propios centros.

Las preguntas realizadas a los docentes tenían como fin obtener información acerca de:

- La dificultad que tienen sus alumnos para la comprensión de la asignatura de Matemáticas en general.
- La dificultad de los alumnos para la comprensión de las funciones gráficas en particular.
- El uso de las TIC en las enseñanzas, por parte de los docentes.
- Conocimiento y uso del programa *GeoGebra* como recurso didáctico.

Para llevar a cabo esta recogida de información se les pasó un cuestionario a los docentes de los tres centros antes mencionados vía correo electrónico, dando su autorización para incluirlo en el presente trabajo de investigación. Dicho cuestionario, contenía preguntas de tipo cerradas, de una sola respuesta por pregunta, porque ofrecen información rápidamente cuantificable. El cuestionario se puede consultar en el *Anexo N° 1*.

La justificación de las entrevistas realizadas mediante el cuestionario y las preguntas que se les pasó a los docentes de los tres centros educativos se recogen en el siguiente Cuadro N°5, en la que se abordan tanto las preguntas como las respuestas. Señalar que la primera pregunta, nos sirvió únicamente para situarnos en el marco de estudio de 1º de Bachillerato y 4º de ESO, debido a que existen afinidades entre las unidades de representación gráfica de ambos cursos.

Cuadro N° 5. Justificación, preguntas y respuestas del cuestionario.

N°	Pregunta	Respuestas	Justificación
1º	¿Imparte o ha impartido clases de Matemáticas en 4º de ESO o en Bachillerato?	<ul style="list-style-type: none"> • 4º de ESO • Bachillerato 	<p>Pregunta:</p> <p>Se considera pregunta relevante debido a la similitud que tienen las unidades de representación de funciones.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Se opta por las dos opciones expuestas debido al número de docentes encuestados.</p>
2º	¿En qué parte de la asignatura de Matemáticas observa que los alumnos presentan mayor dificultad?	<ul style="list-style-type: none"> • Conceptos básicos • Álgebra • Geometría • Gráfica de funciones • Estadística 	<p>Pregunta:</p> <p>Se pretende conocer en qué áreas presentan mayor dificultades los alumnos.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Grandes bloques temáticos de las Matemáticas</p>
3º	¿Qué dificultades presentan los alumnos ante la asignatura de Matemáticas?	<ul style="list-style-type: none"> • Poca base matemática • Problemas de comprensión • Miedo a las Matemáticas • Memorización de conceptos nuevos • Falta de motivación 	<p>Pregunta:</p> <p>Se quiere conocer las dificultades que encuentran los profesores en sus alumnos.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Posibles respuestas que pueden encontrar los docentes en el aula por parte de sus alumnos.</p>
4º	¿Piensa que las promociones actuales tienen cada vez más dificultades para la comprensión de las Matemáticas que las de años atrás?	<ul style="list-style-type: none"> • Sí, porque cada vez tienen menos base matemática • Sí, porque la educación actual ha suprimido la exigencia de 	<p>Pregunta:</p> <p>Conocer si los alumnos actuales tienen menos base matemática o llegan con poca exigencia matemática de cursos</p>

		<p>problemas difíciles en los alumnos</p> <ul style="list-style-type: none"> No, creo que las promociones son siempre iguales 	<p>inferiores.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Conocer la opinión de los docentes sobre los cambios que ven en los alumnos o en la educación.</p>
5º	<p>El tema de representación de funciones gráficas (funciones si enseña en 4º de ESO) ¿es una unidad que los alumnos comprenden y asimilan con facilidad?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Sí No La mayoría no la entienden, ni realizan bien en su totalidad 	<p>Pregunta:</p> <p>Conocer con más detalle las funcines gráficas, objeto de nuestro estudio.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Ver si los docentes exponen que es un tema complicado para los alumnos.</p>
6º	<p>¿Qué parte de la unidad de funciones gráficas les parece más complicada a los alumnos?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Comprensión del concepto de función Uso del lenguaje matemático para la función Representación gráfica de la función Cálculo y comprensión de las características de las funciones 	<p>Pregunta:</p> <p>Conocer qué área de la unidad de funciones gráficas es la más costosa para los alumnos</p> <p>Respuesta:</p> <p>Posibles puntos dentro de la unidad de funciones gráficas.</p>
7º	<p>¿Cuántos alumnos son capaces de representar de manera completa y bien la gráfica de una función?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Todos La mayoría La media de la clase Sólo unos pocos Ninguno 	<p>Pregunta:</p> <p>Conocer si los docentes entienden la exigencia en el presente trabajo de investigación.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Posibles alternativas de una clase modelo.</p>
8º	<p>¿Qué recursos usa habitualmente para la explicación de la representación gráfica de funciones?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Pizarra tradicional Libro de texto y cuaderno 	<p>Pregunta:</p> <p>Conocer los recursos habituales de los profesores que imparten la materia</p>

		<ul style="list-style-type: none"> • Videos explicativos • Fotocopias • Juegos • Pizarra digital 	<p>de Matemáticas.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Posibles recursos a utilizar en el aula.</p>
9º	¿Ha hecho uso de las TIC en las aulas para la explicación de esta unidad?	<ul style="list-style-type: none"> • Sí • No 	<p>Pregunta:</p> <p>Conocer el uso de las TIC en las aulas.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Dos contestaciones posibles, afirmativa o negativa.</p>
10º	¿Qué nivel de formación en TIC cree que tiene?	<ul style="list-style-type: none"> • Alto • Medio • Bajo • Nulo 	<p>Pregunta:</p> <p>Conocer la formación docente actual en TIC en la educación.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Posibles contestaciones sobre niveles de la pregunta.</p>
11º	¿Cree que el uso de las TIC en las aulas podrían ser de ayuda en la explicación de representación gráfica de funciones?	<ul style="list-style-type: none"> • Totalmente de acuerdo • Parcialmente de acuerdo • Ni de acuerdo, ni en desacuerdo • Parcialmente en desacuerdo • Totalmente en desacuerdo 	<p>Pregunta:</p> <p>Conocer si debería existir un cambio en la metodología de la unidad de funciones gráficas y extrapolarlo a la asignatura de las Matemáticas.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Posibles opciones de acuerdo o desacuerdo de la pregunta realizada.</p>
12º	¿Conoce el programa <i>GeoGebra</i> de geometría dinámica?	<ul style="list-style-type: none"> • Sí • No 	<p>Pregunta:</p> <p>Conocimiento del programa <i>GeoGebra</i> por parte de los docentes encuestados.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Dos contestaciones posibles, afirmativa o</p>

			negativa.
13º	¿Ha utilizado dicho software para la unidad de representaciones gráficas o en cualquier otra?	<ul style="list-style-type: none"> • Sí lo he usado en representación de funciones • Sí lo he usado, pero en otras unidades, (Geometría, Estadística, etc.) • No • No tengo intención de usarlo 	<p>Pregunta:</p> <p>De los que en la cuestión anterior contestan afirmativamente, conocer dónde lo usan.</p> <p>Respuesta:</p> <p>Conocer en qué unidad lo ha usado y los que no lo han usado que opinan.</p>

Nota: Justificación, preguntas y respuestas del cuestionario. Fuente: Elaboración propia.

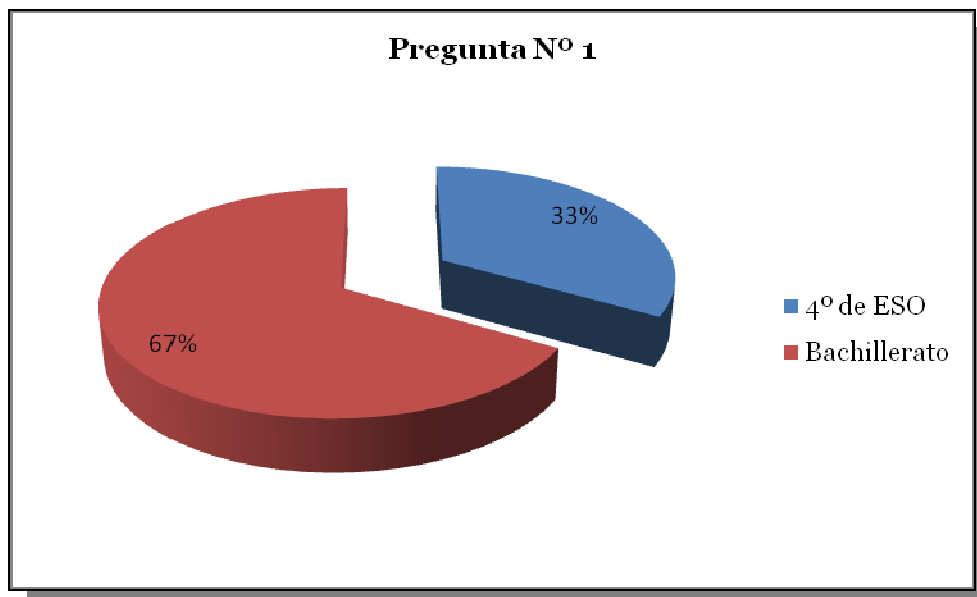
4.4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El objetivo de este punto, dentro del estudio de campo, es analizar los resultados de cada pregunta realizada a los docentes de los tres centros educativos arriba mencionados.

Aunque la muestra es pequeña, seis docentes, se pretende realizar, con las entrevistas, una aproximación de las dificultades que tienen los alumnos en la asignatura de Matemáticas y las dificultades que presentan en la comprensión de la unidad de representación gráfica de funciones de una manera más particular. Por otro lado se desea conocer el uso y manejo de las TIC en las aulas por parte de los docentes y en particular del programa GeoGebra para la explicación de funciones gráficas.

Analizando más profundamente cada pregunta:

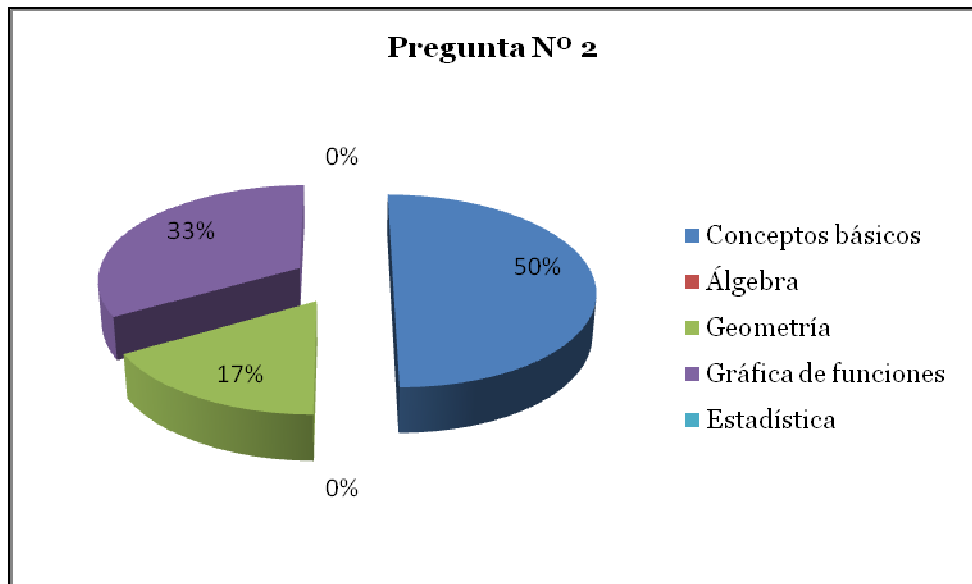
4.4.1. Pregunta N° 1: ¿Imparte o ha impartido clases de Matemáticas en 4º de ESO o en Bachillerato?



Gráfica N° 8. Clases en las que los docentes imparten Matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

En la primera pregunta la mayoría de los docentes imparten clases en Bachillerato (67%), siendo los dos que no lo hacen o no lo han hecho (33%) pertenecientes a los Colegios de "Puertoblanco" y de "Tabladilla". Estos dos profesores han impartido, y lo siguen haciendo, en 2º de ESO.

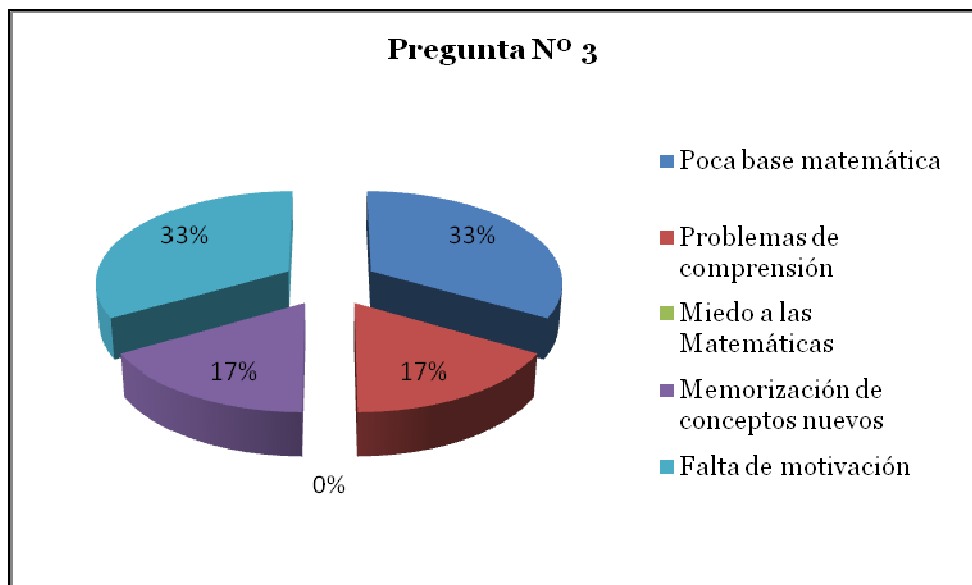
4.4.2. Pregunta N° 2: ¿En qué parte de la asignatura de Matemáticas observa que los alumnos presentan mayor dificultad?



Gráfica N° 9. Alumnos con mayor dificultad en matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

En la pregunta N° 2, los docentes expresan que donde más dificultad tienen los alumnos es en la parte de conceptos básicos (50%), seguido de la representación gráfica de funciones (33%) y en menor medida en geometría (17%). Mencionan que en la parte de álgebra y estadística, no se les da mal a sus alumnos, ya que ninguno contestó estas respuestas.

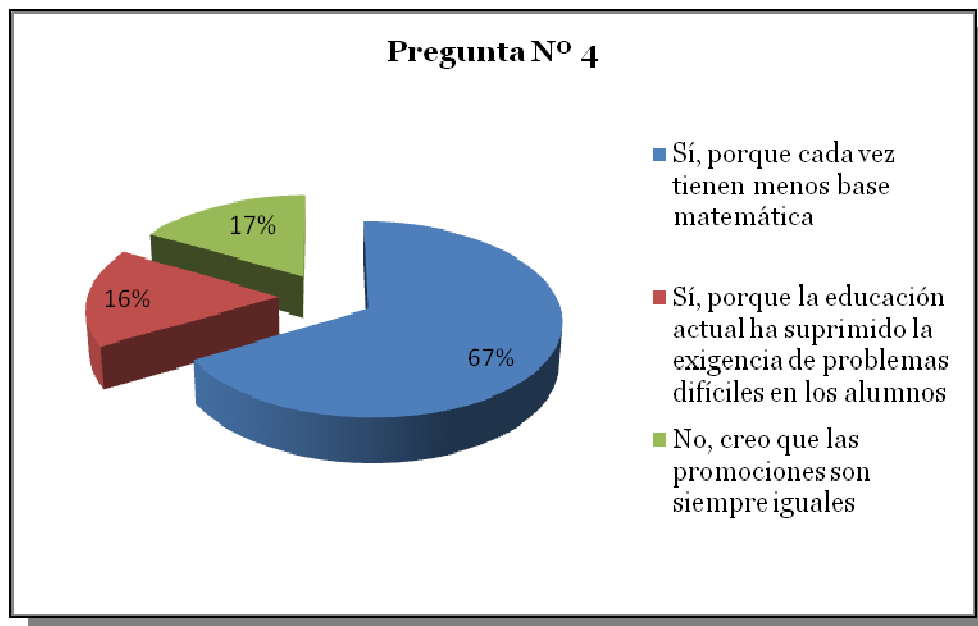
4.4.3. Pregunta N° 3: ¿Qué dificultades presentan los alumnos ante la asignatura de Matemáticas?



Gráfica N° 10. Dificultades que presentan los alumnos en Matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

Para los docentes, en esta Pregunta N° 3, lo que más repetido ven en sus alumnos como obstáculo par la comprensión de las Matemáticas es tanto la excasa base matemática que poseen (33%) como la falta de motivación por aprender (otro 33%). No ven que tengan alumnos con miedo a las Matemáticas, ya que no han señalado esta respuesta ninguno, y en menor medida contemplan alumnos con problemas de compernsión (17%) y la dificultad que tienen en memorizar conceptos nuevos (17%).

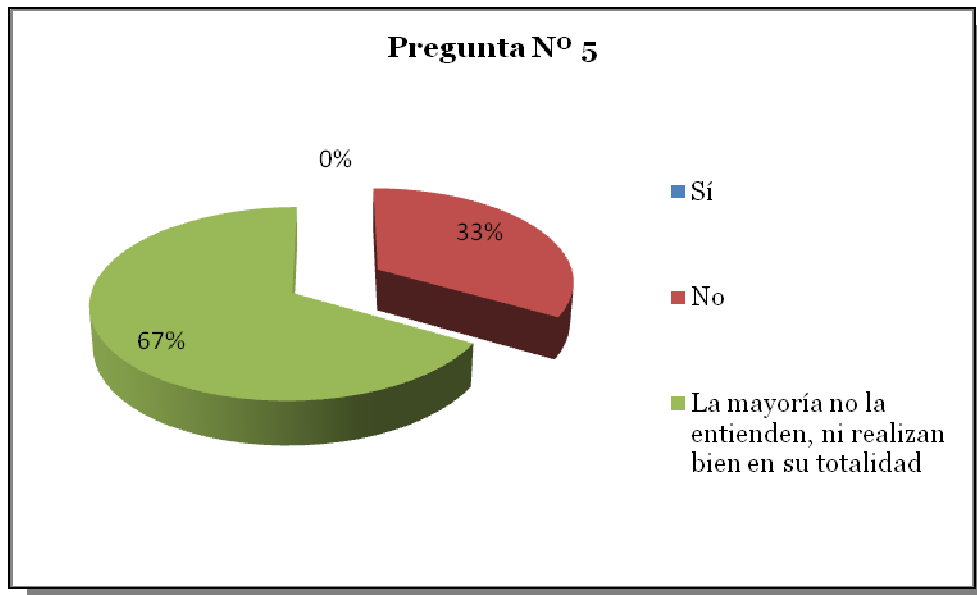
4.4.4. Pregunta N° 4: ¿Piensa que las promociones actuales tienen cada vez más dificultades para la comprensión de las Matemáticas que las de años atrás?



Gráfica N° 11. Promociones actuales frente a promociones anteriores. Fuente: Elaboración propia.

Casi los seis docentes consultados contestaron (67%) que cada vez la promociones vienen con menos base matemática, con lo que reporta más dificultad a la hora de entender las unidades. Un profesor contestó que piensa que la educación cada vez exige menos, y otro docente contestó que las promociones siempre son iguales.

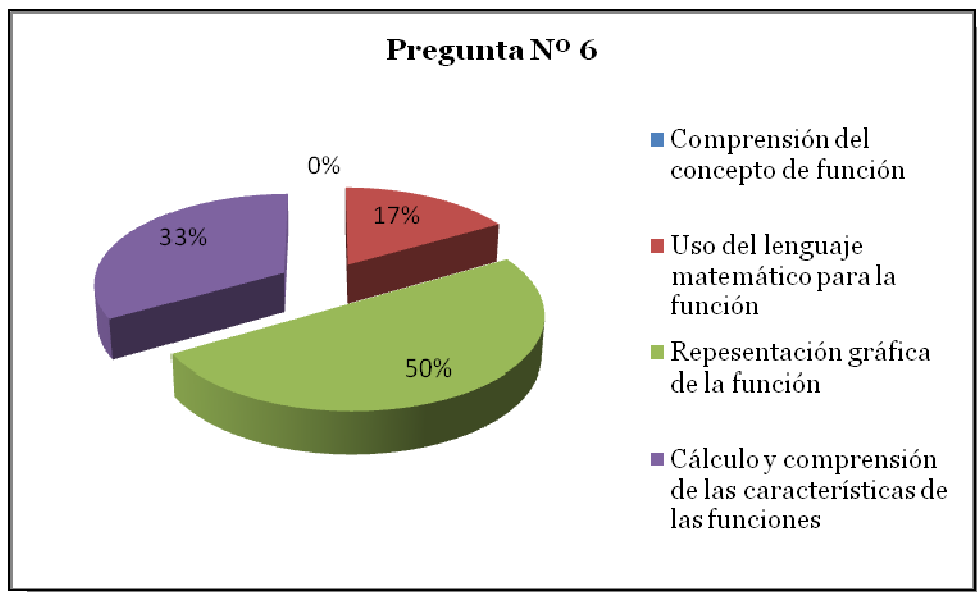
4.4.5. Pregunta N° 5: El tema de representación de funciones gráficas (funciones si enseña en 4º de ESO) ¿es una unidad que los alumnos comprenden y asimilan con facilidad?



Gráfica N° 12. Comprensión de la unidad de funciones. Fuente: Elaboración propia.

De las tres contestaciones posibles de la pregunta N° 5, cuatro profesores respondieron la tercera opción (67%) diciendo que la mayoría de alumnos no la entienden ni la asimilan con facilidad y tampoco realizan bien los ejercicios. Los docentes restantes (33%) contestaron que no asimilan nada en absoluto. Nadie contestó afirmativamente.

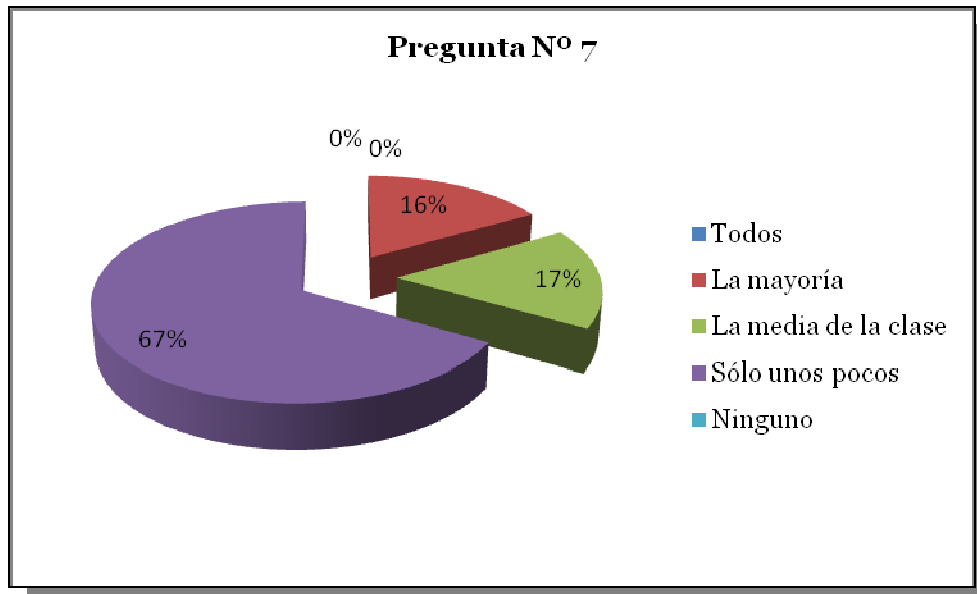
4.4.6. Pregunta N° 6: ¿Qué parte de la unidad de funciones gráficas les parece más complicada a los alumnos?



Gráfica N° 13. Área de las funciones que presenta más dificultad. Fuente: Elaboración propia.

La mitad de los docentes (50%) contestó que lo que más les cuesta es la representación gráfica, dos docentes (33%) contestaron que a los alumnos les cuesta más la parte de cálculo y comprensión de características de las funciones, un docente (17%) respondió que les cuesta a los alumnos el uso del lenguaje matemático y ninguno respondió la que los alumnos no entienden el concepto de función.

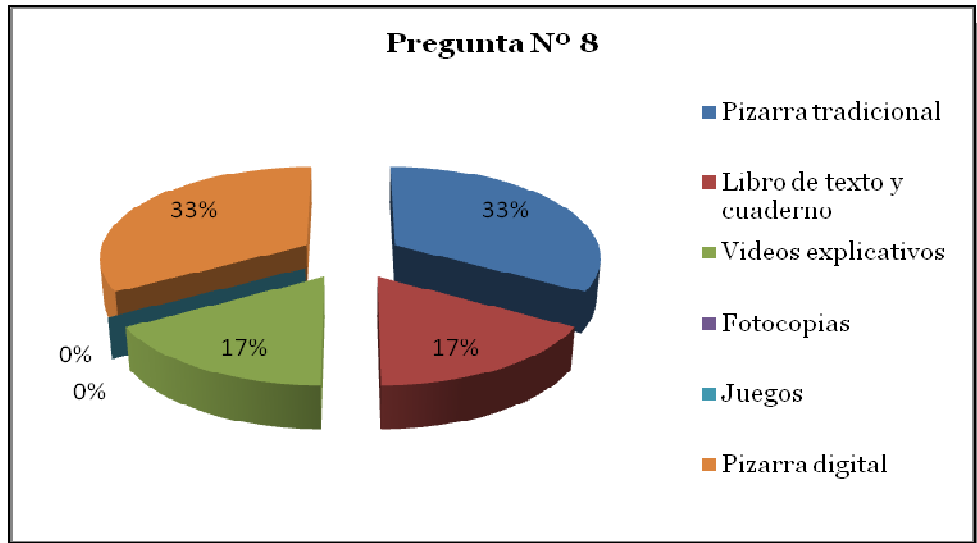
4.4.7. Pregunta N° 7: ¿Cuántos alumnos son capaces de representar de manera completa y bien la gráfica de una función?



Gráfica N° 14. Capacidad de representar completamente y bien una función. Fuente: Elaboración propia.

Ningún docente contestó que tenga una clase que resuelva bien una función, la mayoría de los profesores (67%) contestaron que sólo unos pocos realizan completamente y bien una función gráfica, por igual de docentes (16%) y (17%) respondieron que consiguen que la mayoría o la media de la clase realice bien una gráfica.

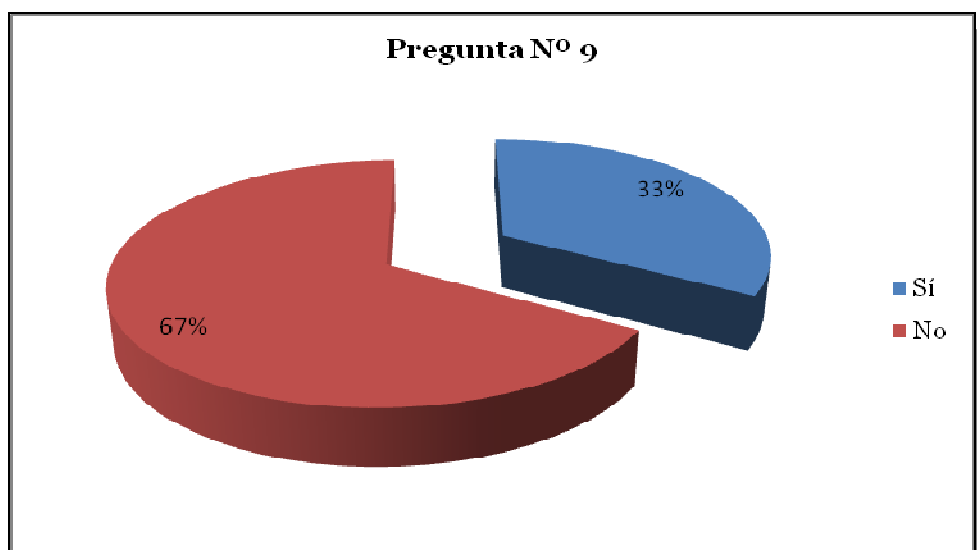
4.4.8. Pregunta N° 8: ¿Qué recursos usa habitualmente para la explicación de la representación gráfica de funciones?



Gráfica N° 15. Recursos habituales para las explicaciones. Fuente: Elaboración propia.

Dos docentes (33%), los más jóvenes, contestaron que usan pizarra digital en la explicación de funciones gráficas, otro dos profesores (33%) respondieron que usan la pizarra tradicional, que dio la casualidad que eran los docentes más veteranos. Ningún docente contestó las respuestas de juegos ni fotocopias, en cambio un docente (17%) respondió que usaba para la explicación de funciones libros de textos y cuaderno, y otro profesor (17%) respondió que usaba como apoyo videos explicativo sobre funciones.

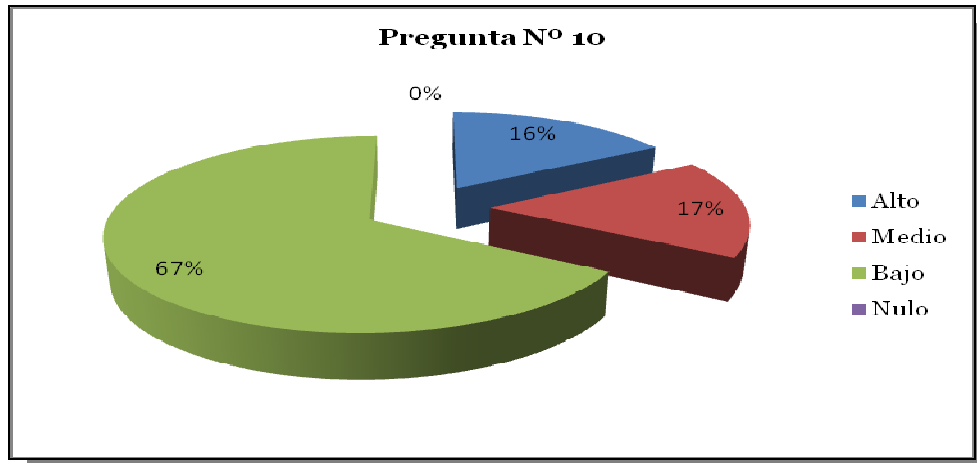
4.4.9. Pregunta N° 9: ¿Ha hecho uso de las TIC en las aulas para la explicación de esta unidad?



Gráfica N° 16. Uso de las TIC para la representación gráfica de funciones. Fuente: Elaboración propia.

Un 67% de los encuestados respondió que no usa recursos TIC para la explicación de gráfica de funciones y el 33% restante de los docentes, que coincidieron con los que respondieron que usan pizarra digital, contestaron que sí que usan TIC en las aulas.

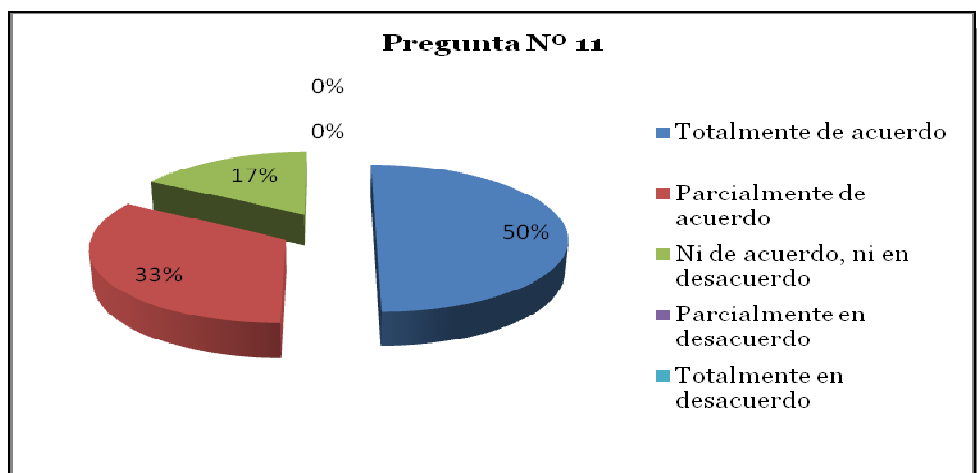
4.4.10. Pregunta N° 10: ¿Qué nivel de formación en TIC cree que tiene?



Gráfica N° 17. Nivel de formación en TIC de los docentes. Fuente: Elaboración propia.

Un profesor (16%), de los dos más jóvenes, contestó tener un nivel alto en formación de TIC, otro docente (17%) contestó tener nivel medio en TIC. Coincidiendo de nuevo con los docentes que usaban pizarra digital en las aulas. El resto de los encuestados (67%) respondió tener nivel bajo en TIC. Nadie respondió tener nivel nulo.

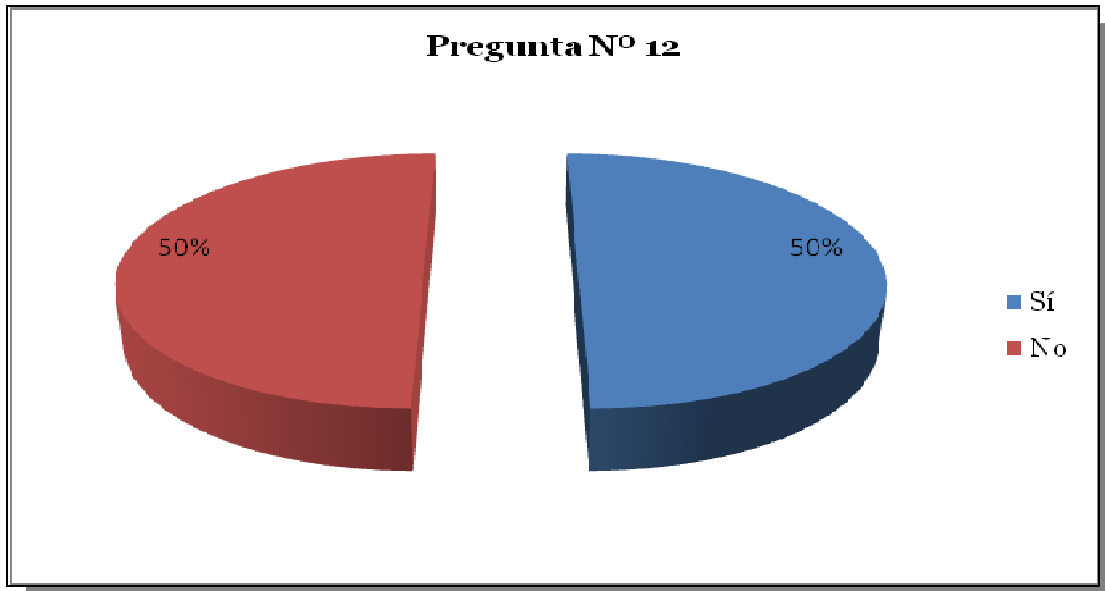
4.4.11. Pregunta N° 11: ¿Cree que el uso de las TIC en las aulas podrían ser de ayuda en la explicación de representación gráfica de funciones?



Gráfica N° 18. Las TIC como ayuda en las aulas. Fuente: Elaboración propia.

Uno de los docentes (17%) respondió que ni estaba de acuerdo ni en desacuerdo, la mitad de los encuestados (50%) contestaron que están totalmente de acuerdo en el uso de las TIC como apoyo didáctico. Dos profesores (33%) contestaron que están parcialmente de acuerdo.

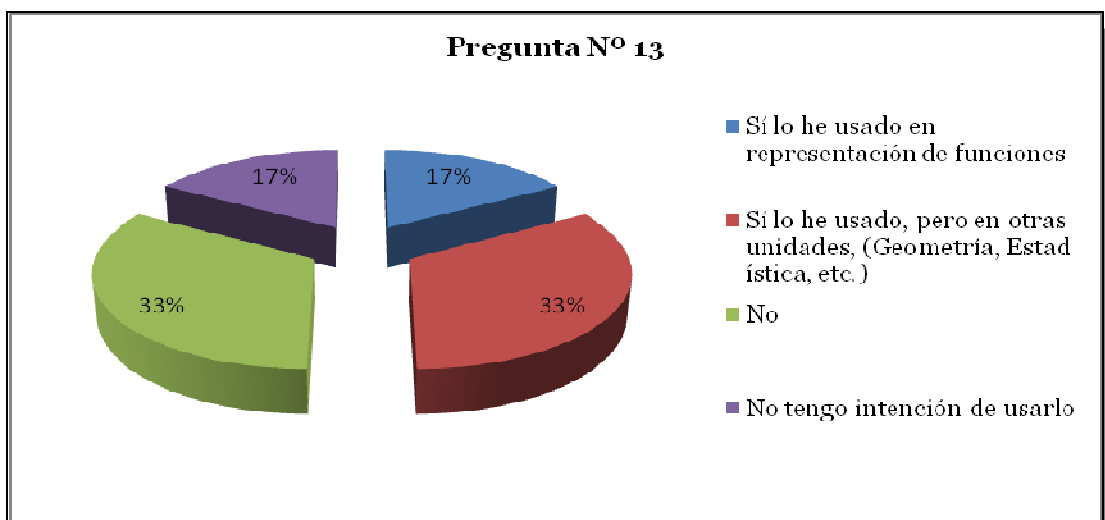
4.4.12. Pregunta N° 12: ¿Conoce el programa *GeoGebra* de geometría dinámica?



Gráfica N° 19. Conocimiento del software *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia.

De los encuestados, la mitad de los docentes respondió que conocía el software *GeoGebra* y la otra mitad de los profesores que no lo conocía.

4.4.13. Pregunta N° 13: ¿Ha utilizado dicho software para la unidad de representaciones gráficas o en cualquier otra?



Gráfica N° 20. Uso del software *GeoGebra* en las aulas. Fuente: Elaboración propia.

Dos de los docentes preguntados (33%) contestó no usar GeoGebra en las explicaciones, otro docente (17%) comentó que no tenía intención de hacerlo, el más veterano de los encuestados. Un profesor (17%) respondió que lo usa en la representación gráfica de funciones y los dos profesores que imparten en la ESO (33%) y conocen el programa contestaron que lo usan en sus explicaciones.

4.5. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE CAMPO

El estudio de campo realizado con las entrevistas a los docentes dieron como resultados las siguientes conclusiones, expuestas por apartados:

4.5.1. Sobre las dificultades de los alumnos en la asignatura de Matemáticas

Los docentes expusieron que los alumnos tienen dificultades por la falta de conocimientos básicos de cálculo matemático, *Pregunta N° 2*, que a la hora de resolver problemas la dificultad es que les cuesta la comprensión de los mismos y en gran medida, es porque tienen poca motivación de la asignatura en general, *Pregunta N° 3*, y la última dificultad sobre la asignatura de Matemáticas vuelven a elegir los encuestados la respuesta sobre la falta de base matemática, *Pregunta N° 4*. Concluimos que los alumnos actuales tienen poca base matemática, así también lo expusimos en el apartado sobre el informe PISA y TIMSS, donde España se encuentra por debajo de la media de los países de la OCDE.

4.5.2. Dificultades en el tema de representación gráfica de funciones

Los encuestados apuntan que la mayoría de sus alumnos no entienden, ni asimilan, ni realizan bien los problemas de funciones gráficas en su totalidad, *Pregunta N° 5*. A la pregunta de qué parte de la unidad de representación gráfica de funciones es más costoso para los educandos, los profesores responden que lo más difícil para aquellos es la propia representación gráfica, junto con las características de las funciones que deban calcular en los problemas expuestos, *Pregunta N° 6*. La última pregunta sobre la dificultad de funciones gráficas, *Pregunta N° 7*, se les preguntó a los docentes si realizaban bien o no la gráfica de una función y es sorprendente que ninguno contestase que todos las hacían bien. Respondieron que sólo unos pocos alumnos de sus clases conseguían resolver bien una gráfica. Se concluye que, tras lo contestado por los docentes, los alumnos tienen dificultades en la unidad de representación gráfica de funciones, donde los conceptos básicos de ellas, sus características y final resolución es una de las cosas que más les cuestan.

4.5.3. Uso de las TIC en las aulas

Como la muestra de los docentes consultados ha sido poco representativa de los profesores de Matemáticas, sólo seis encuestados, al ser un profesorado heterogéneo en edad, las respuestas de la *Pregunta N° 8*, sobre el uso de recursos para la explicación de funciones gráficas ha aportado que los jóvenes profesores usan pizarras digitales, coincidiendo es los mismos profesores después en la

contestación sobre el uso de TIC para la unidad que se está estudiando en el presente trabajo, consultada en la Pregunta N° 9. No así los profesores más veteranos, que contestaron que usaban pizarras tradicionales y el uso de libros únicamente para la explicación de representación gráfica de funciones. En la Pregunta N° 10, donde se le encuesta sobre su formación en TIC, es sorprendente la contestación, con un 67% de los preguntados, de que el nivel que poseen es bajo. En cambio los docentes sí están de acuerdo en su mayoría que las TIC es un recurso que ayudaría a la explicación de funciones gráficas, Pregunta N° 11. Se concluye que los docentes deberían formarse en las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación, ya que la nueva *Ley Orgánica 8/2013, de la Mejora de la Calidad Educativa*, ha puesto un énfasis en las TIC como recurso didáctico para la enseñanza-aprendizaje de los futuros alumnos.

4.5.4. Conocimiento y uso del programa GeoGebra

Sobre la utilización y uso del programa GeoGebra, dos últimas preguntas, los encuestados respondieron que la mitad de ellos si lo conocían, Pregunta N° 12, y sólo el joven profesor de Bachillerato contestó que lo usa en sus explicaciones, y los dos profesores de la ESO, Pregunta N° 13. Con esto se concluye que en Bachillerato, los profesores deciden no perder tiempo en prepararse las enseñanzas de las explicaciones con el recurso didáctico GeoGebra, o porque no lo conocen o porque no les interesa. Se debe incentivar a los docentes a renovar sus didácticas y metodologías para acoplarse a los cambios de la sociedad y los propios alumnos.

4.5.5. CONCLUSIÓN FINAL DE EL ESTUDIO DE CAMPO

Con los resultados obtenidos y el análisis de ellos arriba mencionados exponemos a continuación la propuesta didáctica llevada a cabo, con el recurso GeoGebra como herramienta de apoyo a las explicaciones.

5. PROPUESTA PRÁCTICA: EMPLEO DEL SOFTWARE *GEOGEBRA*

5.1. INTRODUCCIÓN

A continuación se expone una metodología didáctica para el estudio de la unidad de representaciones gráficas en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología empleando el software de geometría dinámica *GeoGebra*. La propuesta práctica que vamos a exponer y desarrollar pretende cumplir los objetivos expuestos en el punto 2.1 del presente trabajo. La propuesta didáctica tiene como destinatarios a los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología para la explicación de funciones gráficas. Estos alumnos deberán poseer conocimientos básicos de funciones y conceptos matemáticos puesto que en 4º de ESO han estudiado la base de las funciones de las que más adelante, en Bachillerato, se profundizan.

El presente apartado se ha diseñado con el empleo actividades de funciones estudiadas en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, recogidos de los textos tanto de Taniguchi (1997) como de Molina y Torrecilla (2005), en el que se estudian distintos modelos existentes de funciones. Este software pretende apoyar a las explicaciones del profesorado y no sustituirlo, de hecho las explicaciones de las gráficas vendrán dadas por los docentes mediante el libro o apuntes que ellos consideren oportunos, y con el programa *GeoGebra* como refuerzo para representar las funciones que se determinen. Hemos supuesto que los alumnos poseen conocimientos previos adquiridos en 4º de ESO, como tipos de funciones y conceptos matemáticos como exponencial, logaritmo, ecuaciones cuadradas o bicuadradas y funciones racionales de todo tipo.

5.2. JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Tras el estudio de campo realizado, hemos observado que dentro de currículo de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología el cálculo de representación gráfica de funciones es una unidad que a los alumnos les cuesta asimilar y comprender. La propuesta se centra en visualizar problemas de funciones gráficas en el aula, de modo que el alumno forme el concepto de función de manera correcta, y así evitar las dificultades que poseen los alumnos señaladas en el punto 3.2. *Situación actual y dificultad en el aprendizaje de las Matemáticas*. Este recurso se utilizará en el aula junto con el libro de texto de Matemáticas I de Ciencias y Tecnología, el cuaderno del alumno, calculadora científica e instrumentos de dibujo para realizar las gráficas. La pizarra tradicional será sustituida, casi en su totalidad (dejándola para algunas explicaciones puntuales de características de funciones), por el ordenador y un

proyector en el cual el profesor expondrá las gráficas de las funciones que él mismo haya elaborado, y para cada una de las actividades expuestas.

La presente propuesta se plantea realizar en el aula, donde las actividades sobre funciones se realizarán en el cuaderno, mediante ejercicios individuales o grupales. También cabe la opción de realizar la propuesta en el aula de informática, donde los alumnos pueden interactuar con el propio programa e investigar sobre sus características y aplicaciones familiarizándose con las mismas, sin que tengan que adquirir licencia mediante pago para implantar dicho software, debido a que es de adquisición gratuita. Esto implica una ventaja respecto a otros programas de geometría dinámica, que son de pago bajo licencia, así que no supone de inversión para el centro escolar. El centro debe contar con las infraestructuras necesarias para presentar el programa, como ordenadores, ya sea en el propio aula de los alumnos como en el aula de informática, y de proyectores o pizarras digitales, esto último para un uso mucho más avanzado del profesorado en TIC. Se puede trabajar sin estar conectado a internet para su manejo, ya que *GeoGebra* es un software descargable de manera gratuita como antes hemos mencionado.

Así, se expone una propuesta didáctica para enseñar representación de funciones gráficas, cuyos destinatarios son los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología. Esta metodología se basa en dar unos conceptos básicos sobre características de funciones, en la primera sesión, como son:

- a) Características que se deducen de su expresión analítica:
 - Dominio y discontinuidad de funciones.
 - Signos, simetrías (función *Par* o *Impar*).
 - Asíntotas de funciones (*Horizontal*, *Vertical* y *Oblicua*).
- b) Información de la primera derivada de una función.
- c) Información de la segunda derivada de una función.

Para después explicar en profundidad distintos tipos de funciones con sus características, en las que con el recurso didáctico *GeoGebra*, representamos. Estos tipos de funciones que explicamos son:

- Reacionales.
- Exponenciales y logarítmicas.

- De raíz cuadrada.
- Ejercicio ejemplo de la vida real.

5.3. PROPUESTA DIDÁCTICA

5.3.1. Recursos

La metodología llevada a cabo necesita de los siguientes recursos:

- a) *Recursos Materiales:*
 - ✓ *Ordenador en el aula o aula de informática:* si se quiere que los alumnos interaccionen con el programa durante las explicaciones.
 - ✓ *Proyector:* ya sea tradicional o pizarra digital si el docente tiene formación en dicho recurso TIC.
 - ✓ *Programa Geogebra:* con o sin conexión a Internet (programa de descarga e implantación gratuita).
 - ✓ *Cuaderno y libro de texto o apuntes:* se requieren para las explicaciones de la unidad y para realizar ejercicios. Calculadora científica. Lápiz, bolígrafo, goma de borrar.
- b) *Recursos humanos:* Profesor titular de la asignatura de Matemáticas I
- c) *Recursos espaciales:* aula habitual de clase o aula de informática.

5.3.2. Objetivos de la propuesta didáctica

La propuesta metodológica tiene como objetivo fomentar la visualización de funciones gráficas, y mejorar el rendimiento de las explicaciones por parte de los docentes de dicha unidad. Para ello se realizará una primera sesión explicativa de las características de funciones e información básica de las mismas, para recordar conceptos que suponemos deben tener los alumnos provenientes de 4º de ESO. Después se realizarán cuatro sesiones de actividades propias de funciones gráficas.

Éstas sesiones las exponemos para el caso de las explicaciones impartidas en el aula, mediante actividades que se resolverán de manera individual o por grupos, y su posterior proyección para que el alumno visualice los conceptos calculados de funciones y mejore su comprensión de la unidad al ser proyectada la función en cuestión. Todo esto se puede trasladar al aula de informática donde el alumnado

puede interaccionar con el programa GeoGebra y familiarizarse con sus aplicaciones. Las actividades permiten al alumnado asimilar el concepto de función por observación, reflexión, deducción y posterior creatividad.

5.3.3. Actividades

El programa de geometría dinámica GeoGebra permite una metodología activa y participativa, donde los alumnos pueden discutir sobre las soluciones de las funciones. También será una metodología dinámica, si se encuentran en el aula de informática, porque los alumnos pueden construir funciones y modificarlas con el deslizador de manera muy sencilla, explorando las aplicaciones del programa.

El papel del docente consistirá en la realización de las actividades que explique en el aula. Proponemos que para que el profesor explique las funciones gráficas, puede éste dar como apoyo una clase previa de conceptos básicos de funciones en la primera sesión, usando mínimamente el programa *GeoGebra* en algún ejemplo teórico. En la segunda, tercera y cuarta sesión realizaremos ejercicios específicos para la asimilación de funciones gráficas con el orden arriba expuesto (rationales, exponenciales y logarítmicas y de raíz cuadrada). En la última sesión, la quinta, realizaremos un ejercicio ejemplo de la vida real, para cumplir con la normativa.

Las competencias básicas que se persiguen conseguir son:

- Comunicación lingüística.
- Competencia matemática.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

5.4. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Para el desarrollo de la propuesta didáctica de representación gráfica de funciones con el programa de geometría dinámica *GeoGebra* se estructura su programación en cinco sesiones de una hora cada sesión. Que temporalizamos de la siguiente manera:

- Primera Sesión: Conceptos básicos y características de las funciones.
- Segunda Sesión: Ejercicios de funciones racionales realizados con el programa *GeoGebra*.
- Tercera Sesión: Ejercicios de funciones Exponenciales y Logarítmicas realizados con el programa *GeoGebra*.
- Cuarta Sesión: Ejercicios de raíz cuadrada realizados con el programa *GeoGebra*.
- Quinta Sesión: Ejercicio ejemplo de la vida real realizado con *GeoGebra*.

Estas sesiones conseguirán abarcar todas las funciones que se contemplan en la asignatura de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, los problemas ayudarán a que los alumnos visualicen las gráficas de las funciones para mejor entendimiento.

5.4.1. Primera Sesión: Conceptos básicos y Características de las funciones

A continuación exponemos lo que el docente debe explicar como características y conceptos básicos de las funciones en las siguientes gráficas durante la primera sesión. Para entender mejor las gráficas siguientes, detallamos cada una de ellas.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Las propiedades relevantes de una función a efectos de su representación pueden separarse en tres grupos:

- 1.- Características que se deducen de su expresión analítica.
- 2.- Concepto que se deduce del estudio de la 1ª derivada.
- 3.- Concepto que se deduce del estudio de la 2ª derivada.

1.- Características que se deducen de su expresión analítica.

DOMINIO

Conjunto de puntos de \mathbb{R} para los cuales está definida la función

$$\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / \exists y = f(x)\}$$

DISCONTINUIDADES DE LA FUNCIÓN

y en el caso de las discontinuidades esenciales, asíntotas

verticales: $x = a$ es asíntota vertical si $\lim_{x \rightarrow a^{\pm}} = \pm\infty$

Gráfica N° 21. Primera Sesión, diapositiva N° 1. Fuente: Elaboración propia.

La Gráfica N° 21 es el comienzo de la Primera Sesión, que tomaremos como índice para explicar las características y conceptos básicos de las funciones gráficas. Empzando las explicaciones en la Primera Sesión, se recuerda el dominio de funciones y la manera de calcularlo, consecuentemente explicando las discontinuidades

SIGNO DE LA FUNCIÓN

Determinamos los ceros de la función y los intervalos de signo constante.

SIMETRÍA

Comprobamos si la función es PAR, IMPAR o NINGUNO DE LOS CASOS

$$\text{PAR } f(x) = f(-x) \quad \text{IMPAR } f(x) = -f(-x)$$

ASÍNTOTAS

Comportamiento de la función en el infinito. A. Horizontales y oblicuas

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ entonces $y = a$ es un A. Horizontal

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y sea $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx$
 $y = mx + n$ es una asíntota oblicua

Gráfica N° 22. Primera Sesión, diapositiva N° 2. Fuente: Elaboración propia.

La Gráfica N° 22 continúa con las explicaciones de las características de las funciones, en este caso los signos, las posibles simetrías que existan del enunciado y cómo calcularlas y la metodología para el cálculo de asíntotas, concepto específico de 1º de Bachillerato, no explicado en 4º de ESO.

2.- CONCEPTO QUE SE DEDUCE DEL ESTUDIO DE LA 1ª DERIVADA

- Localizamos los puntos críticos, o puntos en los que la primera derivada se anula o no existe. Los extremos relativos son necesariamente puntos críticos.

- analizando los signos de la 1ª derivada obtenemos la monotonía

$si f'(x) > 0$ CRECIENTE y $si f'(x) < 0$ DECRECIENTE

- Estudiamos el comportamiento de la función a la derecha e izquierda de cada punto crítico. Si es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha habremos localizado un **MÍNIMO**. Si es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha, se tratará de un **MÁXIMO**. (También se pueden localizar con la 2ª derivada)

Gráfica N° 23. Primera Sesión, diapositiva N° 3. Fuente: Elaboración propia.

Con la Gráfica N° 23 explicamos el punto número segundo del índice del tema, expuesto en la Gráfica N° 21, en el cuál se recuerdan qué información y características se obtienen con la primera derivada de las funciones (crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, etc.).

3.- CONCEPTO QUE SE DEDUCE DEL ESTUDIO DE LA 2ª DERIVADA

De existir 2ª derivada en el punto crítico, también podemos localizar los extremos relativos a partir de ella

$si f''(a) > 0$ MÍNIMO y $si f''(a) < 0$ MÁXIMO

Deducimos la curvatura de la función:

$si f''(x) > 0$ CONVEXA y $si f''(x) < 0$ CÓNCAVA

En general, independientemente de la primera derivada, donde se anule la segunda derivada sin anularse la tercera tendremos un **punto de inflexión**

Gráfica N° 24. Primera Sesión, diapositiva N° 4. Fuente: Elaboración propia.

El último punto del índice del tema se encuentra explicado en esta Gráfica N° 24, que nos vuelve a recordar, como el gráfico anterior, características de las funciones en su derivada segunda. La concavidad o convexidad de las funciones, la existencia o no de puntos de inflexión.

SIMETRÍAS

- **FUNCIONES PARES.**

Una función f es **simétrica respecto del eje de ordenadas** si verifica:

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \text{Dom } f$$

A las funciones simétricas respecto al eje de ordenadas se les llama **FUNCIONES PARES**.

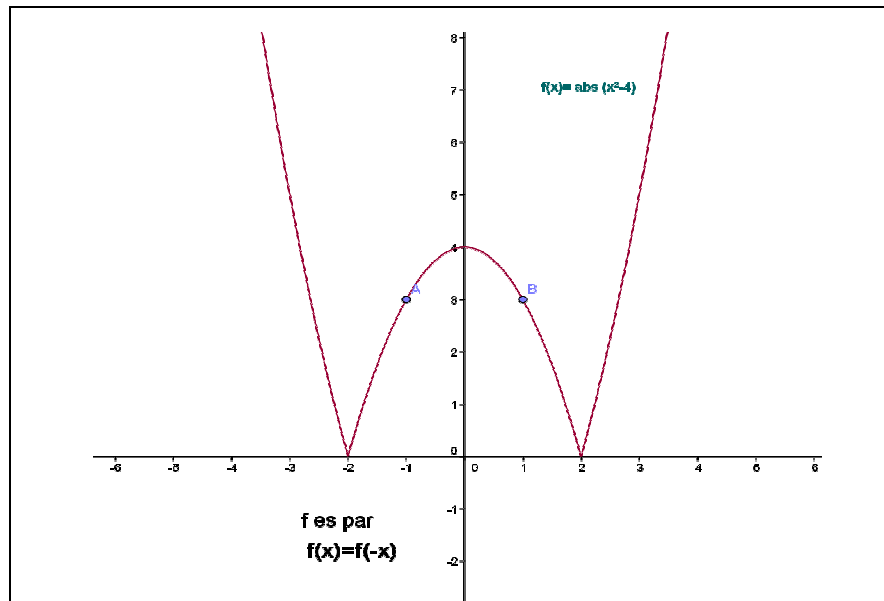
Ejemplo: $f(x) = |x^2 - 4|$

Tabla de valores

x	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5
y											

Gráfica N° 25. Primera Sesión, diapositiva N° 5. Fuente: Elaboración propia.

Estas dos ilustraciones que se dan a continuación son ejemplos para el estudio de las funciones simétricas pares vistas en la Gráfica N° 22. La Gráfica N° 25, expone un ejemplo, y el modo de resolverlo.



Gráfica N° 26. Primera Sesión, diapositiva N° 6. Fuente: Elaboración propia.

Así, la Gráfica N° 26, resuelve el ejemplo expuesto, y es en esta Gráfica N° 26 en la que nos apoyamos de manera puntual del recurso didáctico *GeoGebra* para elaborarla. Al exponer esta gráfica a los alumnos, se entiende mejor el enunciado y se ahorra tiempo para el docente.

SIMETRÍAS

• FUNCIONES IMPARES.

Una función f es **simétrica respecto del origen de coordenadas** si verifica:

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in \text{Dom } f$$

A las funciones simétricas respecto del origen de coordenadas se les llama **FUNCIONES IMPARES**.

Ejemplo :

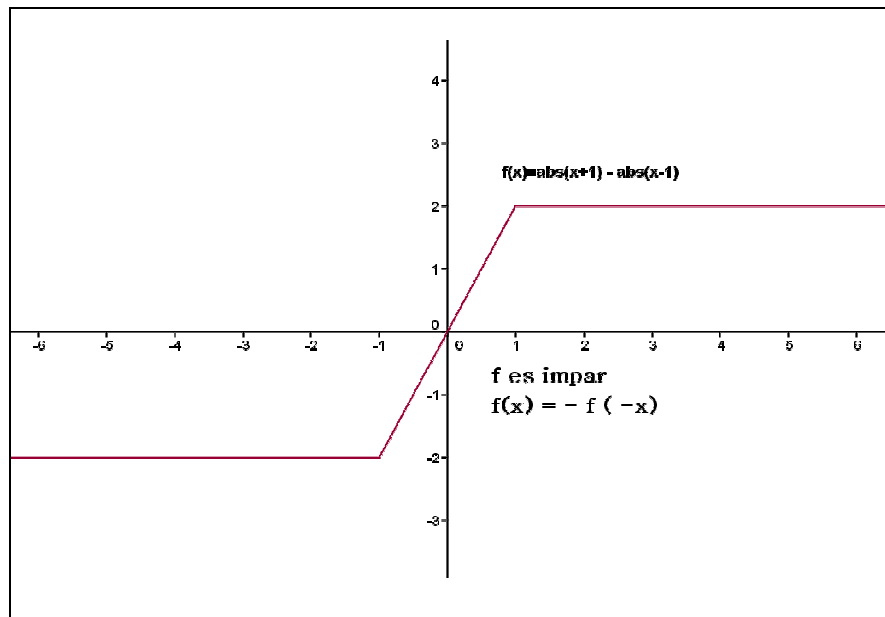
$$f(x) = |x + 1| - |x - 1|$$

Tabla de valores

x	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5
y											

Gráfica N° 27. Primera Sesión, diapositiva N° 7. Fuente: Elaboración propia.

Estas dos ilustraciones que se dan a continuación son ejemplos para el estudio de las funciones simétricas impares vistas en la Gráfica N° 22. La Gráfica N° 27, expone un ejemplo, y el modo de resolverlo.

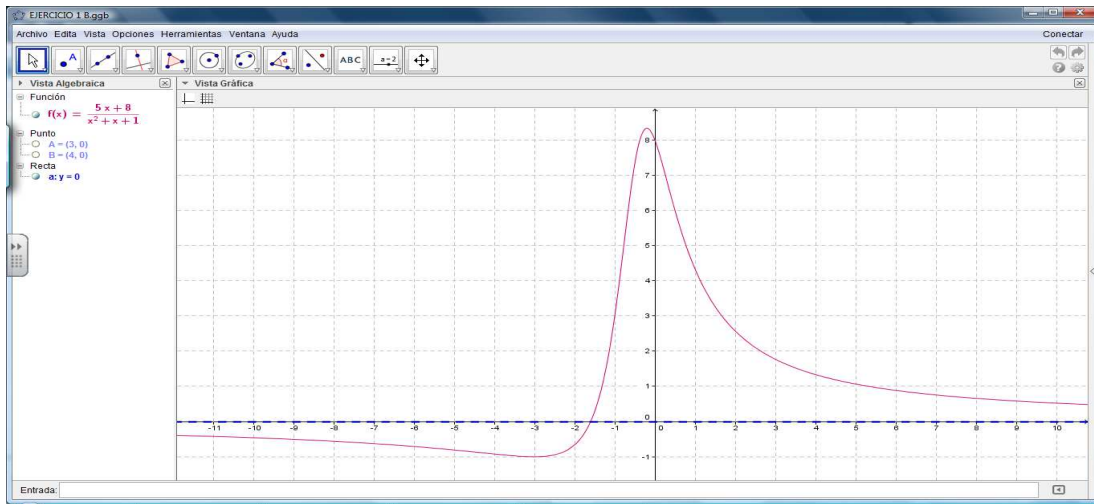


Gráfica N° 28. Primera Sesión, diapositiva N° 8. Fuente: Elaboración propia.

Así, la Gráfica N° 28, resuelve el ejemplo expuesto, y es en esta Gráfica N° 28 en la que nos apoyamos por segunda vez de manera puntual del recurso didáctico *GeoGebra* para elaborarla. Al exponer esta gráfica a los alumnos, se entiende mejor el enunciado y se ahorra tiempo para el docente.

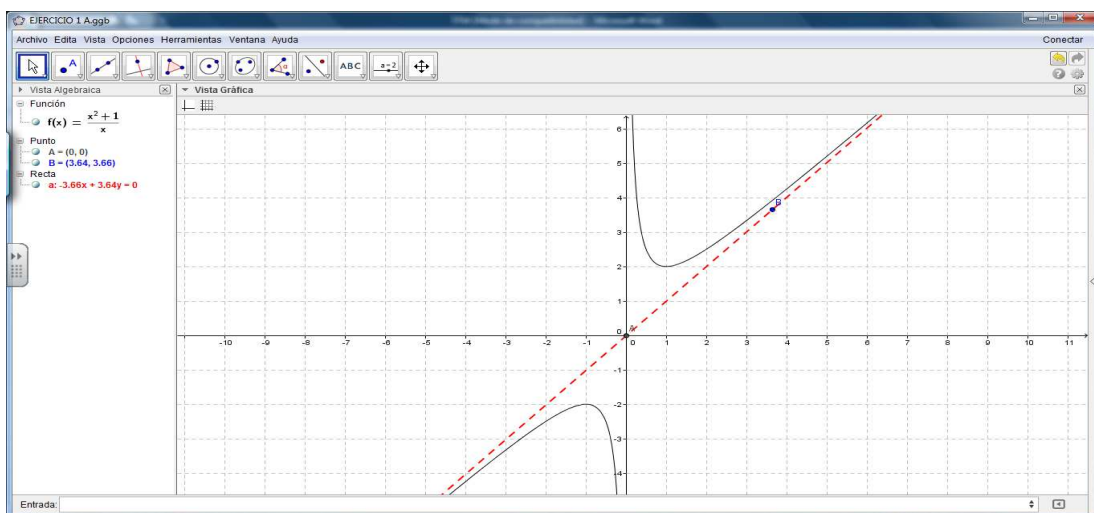
5.4.2. Segunda Sesión: Ejercicios de funciones racionales realizados con el programa GeoGebra

En la segunda sesión con el aula se expondrán dos ejercicios de funciones racionales para los alumnos en los que se les dejará un margen de tiempo para el cálculo de las características expuestas en el apartado 5.4.1. del presente trabajo, y se les visionará el resultado de dicha gráfica para que comparen y analicen sus cálculos y representaciones realizados por cada alumno.



Gráfica N° 29. Sesión Segunda, ejercicio racional N° 1. Fuente: Elaboración propia a partir del programa GeoGebra.

La Gráfica N° 29 muestra una función de tipo racional sencilla, realizada con el recurso *GeoGebra*, donde se lee la función y se ve su representación.

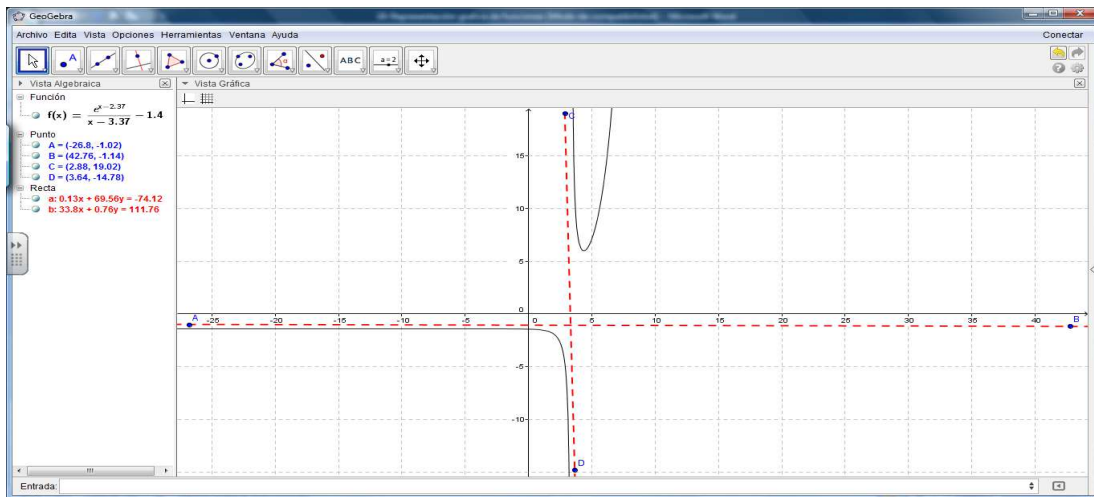


Gráfica N° 30. Sesión Segunda, ejercicio racional N° 2. Fuente: Elaboración propia a partir del programa GeoGebra.

La Gráfica N° 30 muestra una función de tipo racional más compleja, realizada con el recurso *GeoGebra*, donde se lee la función y se ve su representación.

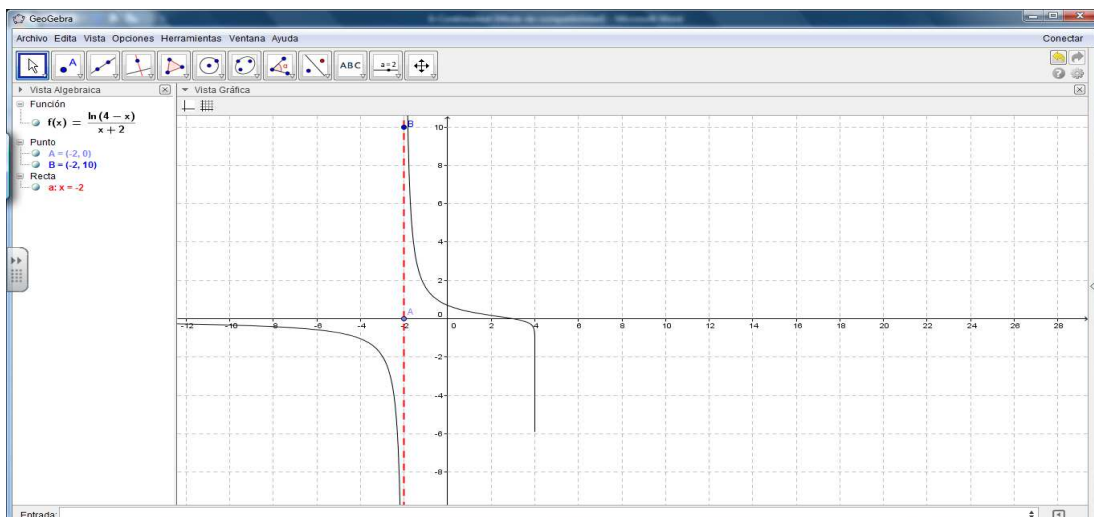
5.4.3. Tercera Sesión: Ejercicios de funciones Exponenciales y Logarítmicas realizados con el programa GeoGebra

En esta tercera sesión, al igual que en la anterior se les pondrá dos ejercicios a resolver, permitiéndoles un margen de tiempo para calcular las características de dichas funciones, como se exponen en el apartado 5.4.1. de nuestro trabajo de investigación. Después del tiempo prudencial marcado se les muestra las gráficas para que comparen resultados y analicen sus cálculos y lo expuesto.



Gráfica N° 31. Sesión Tercera, ejercicio exponencial. Fuente: Elaboración propia a partir del programa *GeoGebra*.

La Gráfica N° 31 muestra una función de tipo exponencial, realizada con el recurso *GeoGebra*, donde se lee la función y se ve su representación.

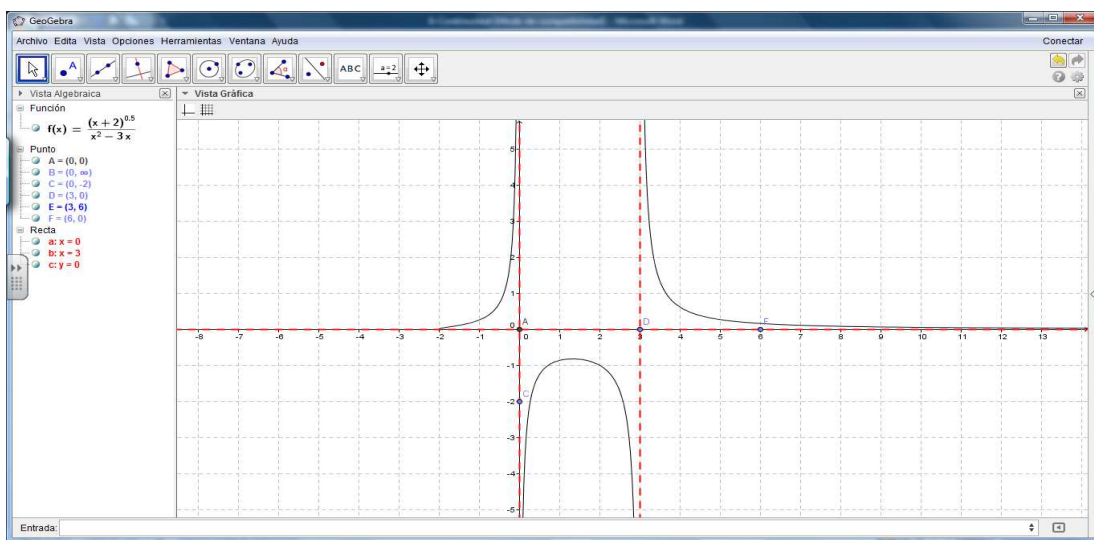


Gráfica N° 32. Sesión Tercera, ejercicio logarítmico. Fuente: Elaboración propia a partir del programa *GeoGebra*.

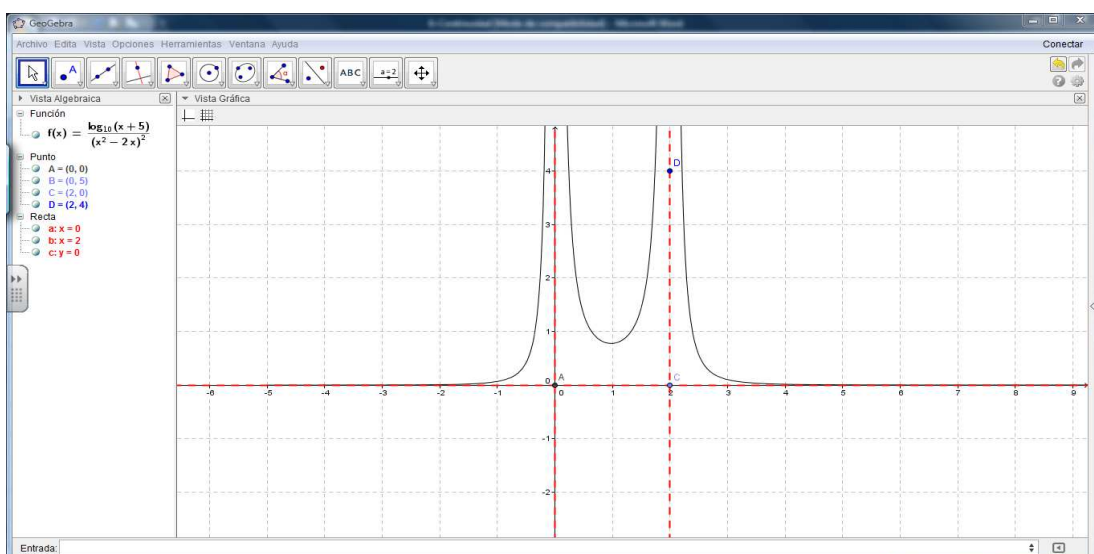
La Gráfica N° 31 muestra una función de tipo exponencial, realizada con el recurso *GeoGebra*, donde se lee la función y se ve su representación.

5.4.4. Cuarta Sesión: Ejercicios de raíz cuadrada realizados con el programa GeoGebra

La última sesión con los alumnos se exponen ejercicios de tipo raíz cuadrada, para que entiendan el gráfico de una parábola de grado menor a la unidad. El primer ejercicio engloba una raíz cuadrada y uno expuesto en la segunda sesión como ejercicio racional, complicando así el propio enunciado. El segundo ejercicio pedido a los alumnos, posee la raíz cuadrada junto con logaritmo y racional. Esto hace que sea un problema más completo a la hora de calcular sus características. Volveremos a dejar un tiempo de resolución por parte del alumnado y a continuación se expondrán los resultados gráficos para su análisis y comprensión.



Gráfica N° 33. Sesión Cuarta, ejercicio de raíz cuadrada N° 1. Fuente: Elaboración propia a partir del programa GeoGebra.

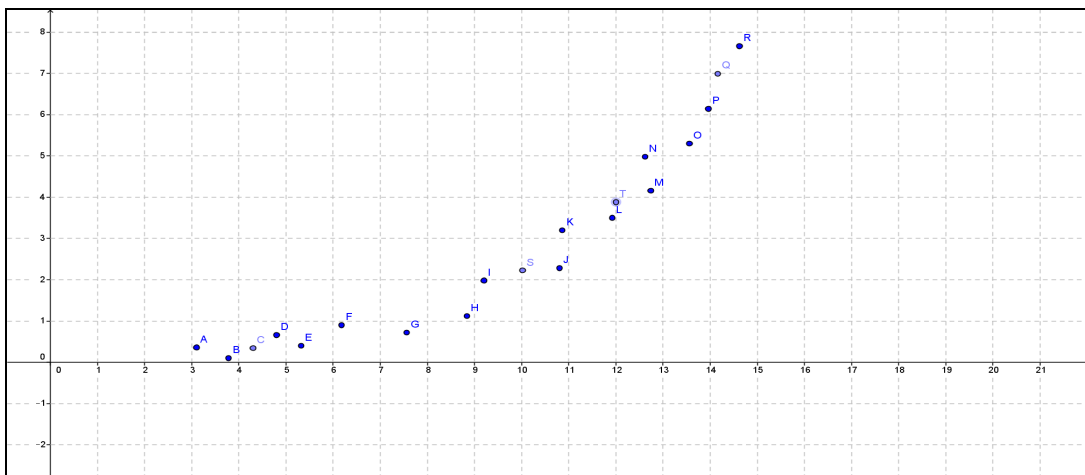


Gráfica N° 34. Sesión Cuarta, ejercicio de raíz cuadrada N° 2. Fuente: Elaboración propia a partir del programa GeoGebra.

5.4.5. Quinta Sesión: Ejercicio ejemplo de la vida real realizado con GeoGebra

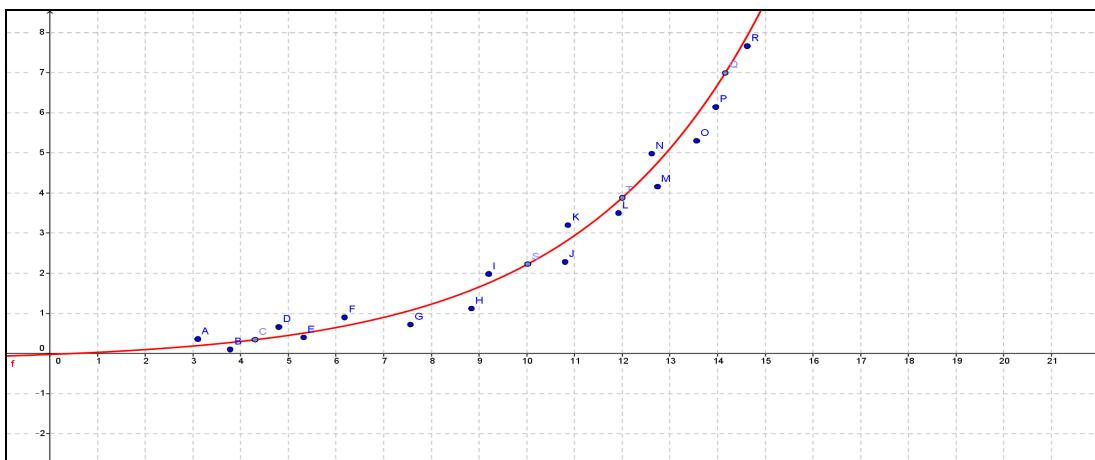
Para cumplir con la normativa de exponer problemas a los alumnos que les acerquen a la vida real o cotidiana, buscamos un ejercicio estadístico. Así un ejemplo de actividad de funciones, se puede afirmar que es la evolución que tienen las poblaciones a lo largo de los años. El ejercicio se realiza con el ejemplo de una población de un país en el que a medida que pasan los años va aumentando el número de habitantes.

1. Se les muestra el aumento de habitantes a lo largo de los años y se dibuja en la Gráfica N° 35 adjunta:



Gráfica N° 35. Sesión Quinta, ejercicio ejemplo de la vida real I. Fuente: Elaboración propia a partir del programa *GeoGebra*.

2. Después se les muestra cómo se puede obtener mediante regresión la función que contiene a dichos puntos explicado en la Gráfica N° 36:



Gráfica N° 36. Sesión Cuarta, ejercicio ejemplo de la vida real II. Fuente: Elaboración propia a partir del programa *GeoGebra*.

6. APORTACIONES

La principal aportación del presente trabajo es conocer las ventajas del uso de GeoGebra como herramienta didáctica para la enseñanza de funciones gráficas en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, a través del marco teórico expuesto, del estudio de campo realizado y de la propuesta práctica arriba definida, para fomentar la comprensión de las funciones gráficas en su totalidad, con sus características y posibles tipos de ejercicios gracias a la visualización y construcción de funciones con el software *GeoGebra*.

Gracias a la bibliografía consultada se ha conseguido ver las dificultades que presentan los alumnos a la hora de representar funciones gráficas, esto ha sido complementado con el estudio de campo que se realizaron a los docentes de los centros descritos anteriormente. Por esto, estudiando en marco legal, en el que en la futura LOMCE se hace hincapié para introducir cada vez más los recursos TIC, se ha hecho una propuesta didáctica basada en la metodología con el recurso GeoGebra como programa de geometría dinámica, que permite la motivación del alumnado, la participación, la discusión por grupos, fomenta la visualización de gráficas, permite la manipulación del programa de manera sencilla e intuitiva y mejora el rendimiento en la enseñanza de los docentes al no tener que representar ellos mismos las gráficas, con lo que pueden dedicar más tiempo a las explicaciones teóricas, gracias a esto se fomenta la atención a la diversidad, llegando a acunar a todos los alumnos en sus necesidades especiales. Así el presente trabajo nos muestra una propuesta didáctica que se puede adecuar a la docencia, con el uso del programa GeoGebra y su implantación en las clases de representación d funciones, debido a la realidad educativa existente en nuestro país que se conocen tras los resultados del informe PISA (2012) y TIMSS (2011), donde permanecemos por debajo de la media de los países de la OCDE.

7. DISCUSIÓN

El esfuerzo por pretender fomentar un incremento en el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en las aulas, que muchos estudios muestran como mejora en la calidad educativa apoyando a ésta, se ha visto respaldado por la nueva *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa*. El propio Ministerio de Educación, después de publicar los malos resultados del reciente informe PISA (2012), argumenta con respecto a las TIC que “necesitamos propiciar las condiciones que permitan el oportuno cambio metodológico en la educación, de forma que el alumnado sea un elemento activo en el proceso de aprendizaje” (BOE, 2013, núm. 295, p. 97860). También nos debemos dar cuenta que el efecto de la globalización, y con ello la inmersión de las nuevas tecnologías, hacen que alumnado actual posea una manera distinta de aprender, de comunicarse, de concentrar su atención o de abordar una tarea. Dándose cuenta de esta realidad el Ministerio de Educación afirma que “ofrecerá plataformas digitales y tecnológicas de acceso a toda la comunidad educativa, y que podrán incorporar recursos didácticos aportados por las Administraciones educativas y otros agentes para su uso compartido” (BOE, 2013, núm. 295, p. 97867).

Ahora bien, la realidad es que el uso de programas de geometría dinámica que ayuden en la enseñanza de funciones gráficas está teniendo dificultades de inclusión en las aulas. Por un lado se repara en que los centros docentes aún no disponen de recursos materiales suficientes, y por otro lado, tras el estudio de campo realizado, sale a la luz que muchos docentes no tienen formación en las nuevas tecnologías. Esto puede venir propiciado por una actitud negativa de los docentes al cambio o a la formación continua de su profesión, o puede venir del propio hecho que para los centros educativos el formar a docentes de manera continua es una inversión costosa. Del presente trabajo se puede inferir que las TIC han sido empleadas por los profesores de Bachillerato de manera puntual, no así los profesores encuestados de la ESO, que usan estos recursos de manera más habitual. Sin embargo, de los docentes encuestados, la mayoría estaban de acuerdo con el uso de las TIC como apoyo a la unidad de funciones gráficas. Son conscientes de que las TIC es una metodología idónea para las explicaciones. Como hemos expuesto durante el presente trabajo, las TIC no deben ser un sustituto del profesor, pieza clave en la enseñanza, sino que deben tratarse como lo que son, una herramienta didáctica de apoyo para que cada docente cree sus propios contenidos.

8. CONCLUSIONES

A lo largo del presente trabajo de estudio se han podido cumplir todos los objetivos expuestos:

- En cuanto al objetivo específico de *Indagar en la dificultad que poseen los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología en la representación gráfica de funciones, analizando la bibliografía al respecto y realizando encuestas a profesores de Matemáticas*, se han consultado diversos informes como el PISA y el TIMSS, observando que los resultados de los alumnos están por debajo de la media de los países que componen la OCDE, para la dificultad de las funciones gráficas nos hemos basado en varios artículos y textos de relevancia que nos afirmaban nuestro objetivo a investigar y concluyendo la indagación sobre las dificultades que poseían los alumnos nos hemos basado en unas encuestas realizadas a diversos profesores de Matemáticas, que nos han confirmado lo que suponíamos sobre las dificultades que los alumnos. Por tanto, se considera que el objetivo específico ha sido cumplido en el presente trabajo.

- En cuanto al objetivo específico de *Conocer lo que establece la normativa educativa actualmente vigente en España y en la Comunidad Autónoma de Andalucía respecto a las Matemáticas de Bachillerato de Ciencias y Tecnología y al uso de las TIC. Añadiendo a este estudio el efecto de la nueva Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) y sus implicaciones futuras en cuanto a las TIC en las aulas*, se han consultado las normativas europeas sobre la *Recomendación del Parlamento Europeo*, la LOE, con el *Real Decreto 1467/2007* y el *Decreto 416/2008* de la Comunidad Autónoma de Andalucía, que establece las enseñanzas mínimas de los alumnos de Bachillerato, las competencias que deben adquirir y el uso que se debe dar a las TIC como herramienta de apoyo a las enseñanzas en las Matemáticas, y más concretamente en el ámbito que nos ocupa, que es la representación de funciones gráficas. Por tanto, se considera que el objetivo específico ha sido cumplido en el presente trabajo.

- En cuanto al objetivo específico de *Analizar las ventajas e inconvenientes de la utilización de Tecnologías de la Información y Comunicación en funciones y el uso de geometría dinámica*, se han consultado revistas y artículos de prestigio, en el que hemos podido concluir que las TIC deben llevar a los alumnos a las TAC (Tecnologías para el Aprendizaje y el Conocimiento) y que no se debe confundir recurso didáctico TIC con sustitución del docente, que sigue teniendo un papel

principal como agente educador. Por tanto, se considera que el objetivo específico ha sido cumplido en el presente trabajo

- En cuanto al objetivo específico de *Conocer las principales características técnicas y las aplicaciones educativas más importantes en Matemáticas de Bachillerato del software de geometría dinámica GeoGebra*, hemos expuesto sus aplicaciones para la unidad aquí estudiada, y cómo de manera gratuita se puede adquirir, siendo su manejo fácil e intuitivo, ayudando a la interactividad del alumnado. Se ha consultado el programa *GeoGebra* y se ha consultado páginas con recursos como son la página del Ministerio de Educación, INTEF, con su *Proyecto Gauss* para Bachillerato y geometría dinámica de distintos autores, también con múltiples recursos descargables. Por tanto, se considera que el objetivo específico ha sido cumplido en el presente trabajo

- En cuanto al objetivo específico de *Analizar los conocimientos que tienen los docentes sobre las dificultades de los alumnos para la representación gráfica de funciones y sobre las TIC mediante un estudio de campo*, ha aportado la consulta que los docentes en nuestro país tienen poca formación en TIC, e incluso los que conocen maneras de usarla, su nivel es bajo. Por ello es necesario que los docentes se formen en recursos tecnológicos para estar a la par con las generaciones venideras de alumnos que se encuentran ya inmersos en el mundo de la imagen. Por tanto, se considera que el objetivo específico ha sido cumplido en el presente trabajo.

- Por último, con respecto al objetivo principal *Exponer una propuesta práctica para enseñar funciones y su representación gráfica a alumnos de Matemáticas I de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología mediante el uso del software GeoGebra como recurso didáctico*, se ha realizado una propuesta práctica empleando dicho programa. En el estudio de campo se observó que los docentes respondieron en qué áreas de conocimiento de las funciones gráficas tenían los alumnos mayor dificultades, siendo la representación gráfica una de ellas y la comprensión y asimilación de las características de las funciones la segunda en dificultad. Por ello se han planteado las sesiones sobre características de las funciones y sobre la representación gráfica de los tipos de funciones que se dan en 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología. Las actividades que se han expuesto fomentan la visualización de las gráficas y la comprensión de las características de las funciones, conllevando a un aumento del rendimiento de las explicaciones por parte de los docentes. Por tanto, se considera que el objetivo principal del presente trabajo de investigación ha sido alcanzado.

9. LIMITACIONES DEL TRABAJO

Estas limitaciones pueden venir dadas porque el trabajo se realiza de una sola unidad didáctica, no acompañando al alumnado en el curso completo. Cabría la duda, de si el aumento de motivación es por el cambio en cuestión de sus rutinas, y no propiciada por un recurso didáctico en cuestión. La limitación temporal es un factor clave a reseñar, ya que se ha tenido poco tiempo para realizarlo, no sabiendo si se abarcaban todos los aspectos necesarios. Para que sea un trabajo de verdadero análisis, éste debe formularse varias veces, para notar la tendencia, o desarrollos positivos o negativos.

No se ha tenido más acceso, por el escaso tiempo, a toda la bibliografía pertinente sobre las dificultades de los alumnos de matemáticas, didáctica actual y futura de esta asignatura. Tampoco sobre el uso de las TIC, con sus posibles ventajas y desventajas, aquí se detallan unas gotas de agua de lo que podría ser un océano de investigación.

Una de las limitaciones es que en el marco que nos hemos movido en el presente estudio de investigación ha sido 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, y la realidad educativa es bastante amplia, ya que como indica el libro de Carrillo de Albornoz y Llamas (2009, p. 9) el uso del propio programa *GeoGebra* contempla desde edades en Primaria hasta Bachillerato.

Para finalizar, debido al corto plazo de tiempo, otra limitación fue la de realizar la comparativa del software *GeoGebra* con otros programas de geometría dinámica. Dicho análisis comparativo mostraría las características de los otros productos existentes en el mercado como sus aplicaciones, características, licencias de implantación, recursos compartidos, páginas con ejercicios elaborados, etc.

10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

La metodología didáctica explicada anteriormente con el uso del recurso didáctico *GeoGebra*, para la explicación de la unidad de representación gráfica de funciones, puede ampliarse a otras áreas y campos, como podrían ser los siguientes:

1. Se puede extrapolar la propuesta práctica planteada para la enseñanza-aprendizaje de otras unidades didácticas como pueden ser el temario de 1º de Bachillerato de Matemáticas I, en general.

2. También se puede usar el recurso didáctico *GeoGebra* en muchas de las unidades de Matemáticas de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales, ya que este recurso da la posibilidad de derivar funciones, crear gráficas estadísticas y hacer regresión de datos de encuestas para obtener una función.

3. Se puede usar dicha herramienta tecnológica en cursos de la ESO, debido a que tiene una aplicación de geometría y de cálculo de volúmenes, conceptos muy estudiados en los primeros cursos de la Educación Secundaria.

4. El estudio de campo se realizó sólo en tres centros educativos que se encuentran dentro de la Comunidad de Andalucía. Por lo que el estudio de campo se podría ampliar a docentes que imparten Matemáticas en cualquier centro del país, dando mucha más información más exacta y precisa.

5. El estudio de campo se realizó a seis docentes de edades muy distintas. El estudio de campo realizado se podría pensar en hacer a múltiples docentes comparándolos, tanto en cuanto a su impresión sobre los recursos TIC, como por edades.

6. Otra línea de desarrollo podría ser el análisis más amplio sobre el uso y limitaciones de las TIC en las clases. Realizando un estudio de campo de todo el país, comparando las similitudes y diferencias entre las provincias o comunidades autónomas.

7. Otras líneas de investigación pueden ser los recursos tecnológicos que actualmente comienzan a tener tanto los docentes que se van incorporando a esta profesión de la enseñanza como los alumnos en cuestión. Es decir, existen múltiples aparatos electrónicos y tecnológicos que cada vez tienen más potencia y admiten Internet en tiempo real y soportan gran capacidad de información. No se está comunicando desde este humilde trabajo que desaparezca el lápiz y el papel, pero sí es de notar la invasión de tecnología sobre los adolescentes, y en el mundo en el que

se están educando. Por eso, la tecnología puede servir de ayuda al profesorado para las explicaciones, no como sustitutivo de él, sino como herramienta de trabajo, como por ejemplo las “tablets” como soporte tecnológico.

8. Tras el estudio de campo, es de deber comentar que hay que hacer que las Matemáticas sean dinámicas, que a los alumnos no les parezca algo arcaico, sino que los docentes debemos tener como reto hacer que esta materia sea atractiva para las generaciones que vayan a estudiarla.

11. BIBLIOGRAFÍA

11.1. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carrillo de Albornoz, A. y Llamas, I. (2009). *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica*. Madrid: RA-MA Editorial.

Decreto 416/2008, de 22 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (26 de agosto de 2008), núm. 169, pp. 98-222. Disponible en: <http://www.juntadeandalucia.es/boja/2008/149/boletin.149.pdf>

Font, V. (2011). Funciones. En Goñi, Jesús María (et al.) (Coord.). *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar* (pp.145-186). Barcelona: Editorial Graó.

International GeoGebra Institute (2013). *GeoGebra*. [Portal de Internet]. Consultado el 26 de diciembre de 2013. Disponible en: <http://www.geogebra.org/cms/en/>

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. Boletín Oficial del Estado (10 de diciembre de 2013), núm. 295, pp. 97858-97921. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf>

Llenares, S. y Valls, J. (2011). Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. En Goñi, J. M^a. (et al.) (Coord.). *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 137-165). Barcelona: Editorial Graó.

MECD (2012). *Informe Español Matemáticas Pisa 2012*. Obtenido de Ministerio de Educación: <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012lineavolumeni.pdf?documentId=0901e72b81786310>

MECD (2011). PIRLS-TIMSS 2011. Obtenido de Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. Vol. I Informe Español. Consultado el 4 de enero de 2014. Disponible en: <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pirlstimss2011vol1.pdf?documentId=0901e72b8146foca>

- OCDE (2013c). *ESPAÑA—Nota País—Resultados PISA 2012*. Consultado el 4 de enero de 2014. Disponible en: <http://estaticos.elmundo.es/documentos/2013/12/03/pisa-espana.pdf>
- Planas, N. (2011). Buenas prácticas en la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria y Bachillerato. En Goñi, J. M^a. (et al.) (Coord.) *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 57-160). Barcelona: Editorial Graó.
- Ranking web of Repositories (2013). *Ranking de Repositorios*. [Portal de Internet]. Consultado el 27 de diciembre de 2013. Disponible en: http://repositories.webometrics.info/es/top_portales
- Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Boletín Oficial del Estado (6 de noviembre de 2007), núm. 266, pp. 45381-45477. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2007/11/06/pdfs/A45381-45477.pdf>
- Recomendación del Parlamento Europeo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. Diario Oficial de la Unión Europea (30 de diciembre de 2006), núm. 394, pp. 10-18. Disponible en: http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/site/es/oj/2006/l_394/l_39420061230es00100018.pdf
- Taniguchi, P. (1987). *Cómo superar las Matemáticas de 3º de B.U.P. Problemas resueltos y problemas propuestos con solución*. Barcelona: Edunsa.
- Torrecilla, D. y Molina, J.D. (2005). *Compendio de problemas de Matemáticas para el Bachillerato. Aritmética, Álgebra, Trigonometría y Geometría*. Granada: Geu.
- Universidad Internacional de La Rioja (2013). *Educación Personalizada (Tema 5)*. Documento inédito de la asignatura de “Educación Personalizada” del Máster en formación del profesorado de Educación Secundaria. Logroño: Autor.

11.2. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Álvarez, J. L. y Losada, R. (2011). *Los applets de funciones en el Proyecto Gauss, UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 58, 25-37.

Carrillo de Albornoz, A. (2010). *GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas. UNIÓN. Revista iberoamericana de educación matemática*, 23, 201-210. Consultado el 26 de diciembre de 2013. Disponible en: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2010/23/Union_023_020.pdf

Contreras, A. (2003). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En Climent Rodríguez, Nuria de los Ángeles, Contreras González, Luis Carlos y Carrillo Yáñez (Coord.). *Cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (71-85). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM: Universidad de Huelva. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1433/1/Contreras2003La_SEIEM_71.pdf

Corbalán, F. (2011). Los recursos a utilizar. En Goñi, J. M^a. (et al.) (Coord.). *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 53-74). Barcelona: Editorial Graó.

Font, V. y Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación de las matemáticas en Secundaria y Bachillerato. En Goñi, Jesús María (et al.) (Coord.). *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 29-52). Barcelona: Editorial Graó.

García Cruz, J. A. (s.f.). *La didáctica de las Matemáticas: una visión general*. Consultado el 26 de diciembre de 2013. Disponible en: <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm>

García, M^a T. (2011). *La geometría dinámica como herramienta didáctica para el dibujo*. Trabajo de Fin de Máster no publicado. Universidad de Cantabria, Facultad de Educación. Disponible en: <https://www.yumpu.com/es/document/view/7589169/la-geometria-dinamica-como-herramienta-didactica-para-el-dibujo>

Gática, N., Max, A., May, G., Coscy, C., Echeverría, G. y Renaudo, J. A. (2010). Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas. *UNIÓN. Revista iberoamericana de educación matemática*, 22, 121-131. Consultado el 27 de diciembre de 2013. Disponible

en:

http://www.fisem.org/www/union/revistas/2010/22/Union_022_012.pdf

International Group for the Psychology of Mathematics Education (2013). Página web. Consultado el 27 de diciembre de 2013. Disponible en: www.igpme.org

Marín, A. y Lupiáñez, J. L. (2005). Los nuevos principios y estándares del NTSC en castellano. *Revista SUMA*, 48,105-110. Consultado el 27 de diciembre de 2013. Disponible en: <http://revistasuma.es/IMG/pdf/48/105-112.pdf>

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte/INTEF (2013). *Proyecto Gauss*. [Portal de Internet]. Consultado el 28 de diciembre de 2013. Disponible en: http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/bach/actividades/novedades.htm

Miranda, A., Fortes, C. y Gil, M.D. (2000). *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas. Un enfoque evolutivo* (3ªed.). Málaga: Ediciones Aljibe.

Pedró, F. (2011). La tecnología y la educación: una dosis de realismo. *El País*. Consultado el 26 de diciembre de 2013. Disponible en: http://elpais.com/diario/2011/11/21/educacion/1321830001_850215.html

Peña, A. (2010). *Enseñanza de la geometría con TIC en educación secundaria obligatoria*. Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

12. ANEXOS

ANEXO Nº 1. ENCUESTA TIPO REALIZADA A LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

La entrevista realizada a los docentes de tres centros educativos distintos se trató de una encuesta con preguntas de tipo cerradas que a continuación detallamos:

1. ¿Imparte o ha impartido clases de Matemáticas en 4º de ESO o en Bachillerato?
 - ☐ 4º de ESO
 - ☐ Bachillerato
2. ¿En qué parte de la asignatura de Matemáticas observa que los alumnos presentan mayor dificultad?
 - ☐ Conceptos básicos
 - ☐ Álgebra
 - ☐ Geometría
 - ☐ Gráfica de funciones
 - ☐ Estadística
3. ¿Qué dificultades presentan los alumnos ante la asignatura de Matemáticas?
 - ☐ Poca base matemática
 - ☐ Problemas de comprensión
 - ☐ Miedo a las Matemáticas
 - ☐ Memorización de conceptos nuevos
 - ☐ Falta de motivación
4. ¿Piensa que las promociones actuales tienen cada vez más dificultades para la comprensión de las Matemáticas que las de años atrás?
 - ☐ Sí, porque cada vez tienen menos base matemática
 - ☐ Sí, porque la educación actual ha suprimido la exigencia de problemas difíciles en los alumnos
 - ☐ No, creo que las promociones son siempre iguales

5. El tema de representación de funciones gráficas (funciones si enseña en 4º de ESO) ¿es una unidad que los alumnos comprenden y asimilan con facilidad?

- ☐ Sí
- ☐ No
- ☐ La mayoría no la entienden, ni realizan bien en su totalidad

6. ¿Qué parte de la unidad de funciones gráficas les parece más complicada a los alumnos?

- ☐ Comprensión del concepto de función
- ☐ Uso del lenguaje matemático para la función
- ☐ Representación gráfica de la función
- ☐ Cálculo y comprensión de las características de las funciones

7. ¿Cuántos alumnos son capaces de representar de manera completa y bien la gráfica de una función?

- ☐ Todos
- ☐ La mayoría
- ☐ La media de la clase
- ☐ Sólo unos pocos
- ☐ Ninguno

8. ¿Qué recursos usa habitualmente para la explicación de la representación gráfica de funciones?

- ☐ Pizarra tradicional
- ☐ Libro de texto y cuaderno
- ☐ Videos explicativos
- ☐ Fotocopias
- ☐ Juegos
- ☐ Pizarra digital

9. ¿Ha hecho uso de las TIC en las aulas para la explicación de esta unidad?

- ☐ Sí
- ☐ No

10. ¿Qué nivel de formación en TIC cree que tiene?
- ☐ Alto
 - ☐ Medio
 - ☐ Bajo
 - ☐ Nulo
11. ¿Cree que el uso de las TIC en las aulas podrían ser de ayuda en la explicación de representación gráfica de funciones?
- ☐ Totalmente de acuerdo
 - ☐ Parcialmente de acuerdo
 - ☐ Ni de acuerdo, ni en desacuerdo
 - ☐ Parcialmente en desacuerdo
 - ☐ Totalmente en desacuerdo
12. ¿Conoce el programa *GeoGebra* de geometría dinámica?
- ☐ Sí
 - ☐ No
13. ¿Ha utilizado dicho software para la unidad de representaciones gráficas o en cualquier otra?
- ☐ Sí lo he usado en representación de funciones
 - ☐ Sí lo he usado, pero en otras unidades, (Geometría, Estadística, etc.)
 - ☐ No
 - ☐ No tengo intención de usarlo