



**Universidad Internacional de La Rioja**  
**Facultad de Educación**

**Trabajo fin de máster**

**Enseñanza de funciones y  
gráficas en 2º de la ESO  
utilizando la Pizarra Digital  
Interactiva**

**Presentado por:** María de los Ángeles Garat González  
**Línea de investigación:** Métodos pedagógicos (Matemáticas)  
Recursos educativos (TIC)  
**Director:** Dr. Pedro Aurelio Viñuela Villa  
**Ciudad:** Cartagena  
**Fecha:** 15 de mayo de 2014

## **RESUMEN**

En este Trabajo de Fin de Máster se elabora una propuesta didáctica para la enseñanza del bloque funciones y gráficas de la asignatura de matemáticas a alumnos de 2º de la ESO utilizando recursos didácticos a través de la Pizarra Digital Interactiva. Para ello, primero se estudia la situación educativa en España a través del análisis de varios informes de evaluación y se analiza la legislación educativa vigente para conocer los contenidos curriculares del bloque mencionado. Se lleva a cabo una investigación bibliográfica sobre la didáctica de las funciones, las dificultades que se encuentran los alumnos en el aprendizaje de este bloque de contenidos, la pizarra digital interactiva y los recursos existentes para la enseñanza de funciones y gráficas. Se realiza un estudio de campo a través de cuestionarios a alumnos y docentes para conocer las dificultades a las que se enfrentan en la enseñanza-aprendizaje de funciones y gráficas así como para saber su opinión sobre el uso de la pizarra digital interactiva. En base a la investigación realizada y al análisis de los resultados obtenidos se elabora una propuesta didáctica basada en una metodología expositiva y participativa en la cual se exponen diferentes recursos didácticos para la enseñanza de funciones y gráficas en 2º de la ESO cuyo objetivo principal es que los alumnos sean capaces de adquirir la competencia matemática aprendiendo funciones y a su vez competencia digital haciéndolo a través de la PDI. La conclusión principal a la que se ha llegado es que a través del uso adecuado de la PDI como recurso didáctico mejora el proceso-aprendizaje de las funciones y gráficas. Así que como línea de investigación futura se propone ampliar la propuesta a otros bloques de contenidos de la asignatura de matemáticas.

*Palabras clave:* didáctica, función, gráfica, pizarra digital interactiva, recursos didácticos

## **ABSTRACT**

The object of this end-of-master's essay is to present a didactic proposal for the teaching of functions and graphs for second year mathematics students of secondary education, using the Digital Interactive Whiteboard (IWB) as a didactic resource. For this purpose, the educational situation in Spain is revised by analyzing several evaluation reports and current educational legislation, in order to verify the aspects of the curriculum of the above-mentioned block of contents. A bibliographic research on didactic of functions is carried out, together with the difficulties that students encounter when learning this block of contents, the IWB characteristics and the existing resources for the teaching of functions and graphs. A fieldwork is done through questionnaires for students and teachers in order to know the difficulties they face during the functions and graphs teaching-learning process, as well as to know their opinion about the use of the IWB. Taking into account the research carried out and the analysis of the results achieved, a didactic proposal is developed based on an expositive and participative methodology in which different didactic resources for the teaching of functions and graphs are shown, with the main aim that the secondary education 2<sup>nd</sup> year students be able to acquire mathematical competence by learning functions, acquiring at the same time digital competence by using IWB. The main conclusion of this work is that the proper use of IWB as a didactic resource improves the learning process of functions and graphs. Therefore, it is proposed for future research to amplify the didactic proposal to other contents of mathematics curriculum.

*Key words:* didactics, function, graphs, Digital Interactive Whiteboard, didactic resources

# Índice de contenidos

<b>1. Introducción .....</b>	<b>5</b>
1.1. Presentación y justificación .....	5
<b>2. Planteamiento del problema .....</b>	<b>7</b>
2.1. Definición del problema.....	7
2.2. Objetivos .....	7
2.3. Metodología .....	8
2.4. Justificación de la bibliografía utilizada .....	10
<b>3. Fundamentación teórica.....</b>	<b>12</b>
3.1. Situación actual en España: Informes y estudios.....	12
3.1.1. PISA 2012.....	12
3.1.2. TIMSS 2011.....	13
3.1.3. Evaluación General de Diagnóstico 2010.....	14
3.2. Matemáticas en el currículum de ESO: legislación .....	14
3.2.1. LOE.....	14
3.2.2. Real Decreto 1631/2006 .....	14
3.2.3. Decreto que establece el currículo de la ESO en la Región de Murcia.....	15
3.3. Funciones y gráficas.....	16
3.3.1. Contenidos y objetivos.....	16
3.3.2. Dificultades y obstáculos en el aprendizaje de funciones y gráficas .....	17
3.3.3. Didáctica de las funciones y gráficas.....	19
3.4. Pizarra Digital Interactiva como recurso didáctico .....	21
3.4.1. Introducción .....	21
3.4.2. Características de la PDI .....	22
3.4.3. Beneficios, limitaciones y exigencias del uso de la PDI .....	23
3.4.4. Metodología y recursos .....	25
<b>4. Estudio de campo .....</b>	<b>27</b>
4.1. Justificación .....	27
4.2. Objetivos .....	27
4.3. Metodología y materiales empleados .....	27
4.4. Marco contextual .....	28
4.5. Resultados.....	29
4.6. Análisis de los resultados.....	33
<b>5. Propuesta didáctica .....</b>	<b>35</b>
5.1. Presentación .....	35
5.2. Objetivos .....	35
5.3. Contenidos .....	35
5.4. Metodología .....	36
5.5. Recursos y materiales didácticos .....	39
5.6. Aplicación de la propuesta .....	40
<b>6. Aportaciones del trabajo .....</b>	<b>44</b>
<b>7. Discusión .....</b>	<b>45</b>
<b>8. Conclusiones .....</b>	<b>46</b>
<b>9. Limitaciones del trabajo .....</b>	<b>48</b>
<b>10. Líneas de investigación futuras.....</b>	<b>49</b>
<b>11. Bibliografía .....</b>	<b>50</b>
11.1. Referencias bibliográficas .....	51
11.2. Bibliografía complementaria .....	54
<b>12. Anexos .....</b>	<b>55</b>

## **Índice de cuadros**

Cuadro N° 1. Resultados PISA 2012 de España en competencia matemática .....	12
Cuadro N° 2. Resultados de España en TIMSS 2011 .....	13
Cuadro N° 3. Resultados de la EGD 2010 .....	14
Cuadro N° 4. Competencias básicas para la educación secundaria obligatoria.....	15
Cuadro N° 5. Bloques de contenidos de la asignatura de matemáticas .....	15
Cuadro N° 6. Contenidos del bloque de funciones y gráficas .....	16
Cuadro N° 7. Objetivos del bloque de funciones y gráficas .....	17
Cuadro N° 8. Clasificación de errores y dificultades.....	18
Cuadro N° 9. Perspectiva formalista vs perspectiva realista.....	19
Cuadro N° 10. Tipos de contextos del objeto matemático .....	19
Cuadro N° 11. Relación entre las representaciones funcionales y los procesos cognitivos.....	20
Cuadro N° 12. Limitaciones del uso de la PDI .....	23
Cuadro N° 13. Exigencias para el uso adecuado de la PDI.....	23
Cuadro N° 14. Beneficios del uso de la PDI .....	24
Cuadro N° 15. Modelos del uso de la PDI en el aula .....	25
Cuadro N° 16. Recursos didácticos para los contenidos del bloque de funciones y gráficas.....	40
Cuadro N° 17. Secuencia actividades primera sesión.....	41
Cuadro N° 18. Secuencia actividades segunda sesión .....	42
Cuadro N° 19. Justificación de las preguntas y respuestas del cuestionario para los docentes .....	60
Cuadro N° 20. Justificación de las preguntas y respuestas del cuestionario para los alumnos .....	62

## **Índice de gráficas**

Gráfica N° 1. Resultados PISA 2012 por comunidades autónomas .....	13
Gráfica N°2. Dificultad en los tipos de representación funcional .....	29
Gráfica N°3. Capacidad de los alumnos para aplicar funciones .....	30
Gráfica N°4. Formación de los profesores en el uso de la PDI .....	30
Gráfica N°5. Dificultades en el uso de la PDI .....	31
Gráfica N°6. Ventajas del uso de la PDI según los profesores .....	31
Gráfica N°7. Dificultad de las matemáticas con respecto al resto de asignaturas .....	32
Gráfica N°8. Ventajas del uso de la PDI según los alumnos .....	33

# **1. INTRODUCCIÓN**

## **1.1. Presentación y justificación**

Los adolescentes hoy en día se sienten cómodos con el uso de las nuevas tecnologías, han nacido en un mundo en el que se utilizan a diario en todos los ámbitos, incluido el escolar. En el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria se expone lo siguiente acerca de la asignatura de matemáticas:

En la construcción del conocimiento, los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, para hacer matemáticas. Estos instrumentos permiten concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. En este sentido, la calculadora y las herramientas informáticas son hoy dispositivos comúnmente usados en la vida cotidiana, por tanto el trabajo de esta materia en el aula debería reflejar tal realidad (BOE, núm. 5, 2007, p. 751).

Esto es, desde la legislación educativa se insta a utilizar las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el aula de matemáticas.

Montero y Huertas (1997) en su capítulo sobre la motivación en el aula afirman que es el sistema educativo el que debe generar, originar y ayudar a construir la motivación por el aprendizaje a través de los profesores. Dicho de otra manera, los profesores deben utilizar los medios a su alcance, proporcionados por el sistema educativo, para ayudar a los alumnos a construir su propia motivación. En esta línea, Corbalán (2011) sostiene que los docentes tienen que utilizar todos los recursos disponibles ya que los alumnos tienen derecho a recibir una educación que incorpore todos estos recursos. Escaño y Gil de Serna (2001) entienden la motivación como las habilidades y tácticas que tienen que utilizar los docentes para conseguir que sus alumnos trabajen. Es decir, para mejorar el aprendizaje de los alumnos es necesario utilizar todos los medios al alcance con habilidad y criterio.

En el año 2009 el Gobierno de España y las Comunidades Autónomas (excepto Valencia y Madrid) aprueban el Programa Estatal Escuela 2.0. Tal como se recoge en la página web del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado (INTEF), con este programa se pretende poner en marcha en las escuelas aulas digitales dotadas de infraestructuras tecnológicas y conexión a internet, así como un ordenador portátil por cada alumno. Esto es, que las aulas estén dotadas de Pizarras Digitales Interactivas con conexión a internet. Este programa se establece a la luz de una nueva era tecnológica y digital en la que los alumnos deben alcanzar las competencias digitales que establece el sistema educativo a través de la LOE, por lo tanto los docentes deben utilizar estos medios

para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumno. Según Marqués (2006) la pizarra digital interactiva en el aula de clase es “posiblemente el mejor instrumento que tenemos hoy en día para apoyar la renovación pedagógica en las aulas” (p.1). Son muchos los recursos didácticos que se pueden utilizar a través de las PDI para la enseñanza de matemáticas.

Por otro lado, diversos estudios a nivel nacional e internacional (PISA 2012, TIMSS 2011 o EGD 2010) muestran el bajo rendimiento de los alumnos españoles en la asignatura de matemáticas, España se encuentra a la cola de Europa en esta competencia. Por ello se hace necesaria la búsqueda de nuevas metodologías y recursos que de alguna manera puedan solucionar este problema de rendimiento.

En este trabajo se ha seleccionado el bloque de contenidos de funciones y gráficas de la asignatura de matemáticas en 2º de la ESO debido a la importancia de las funciones en el currículo de la asignatura y por la multitud de aplicaciones que estas tienen en la vida real. “La noción de función es uno de los conceptos matemáticos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora” (Font, 2011, p.146). Además, según Valls (2011) “las gráficas, las expresiones numéricas y los símbolos están empezando a ser considerados instrumentos en el aprendizaje de matemáticas” (p. 146). Entre los objetivos que se persiguen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones y gráficas está el de incorporar al lenguaje formas de expresión matemáticas, ser capaz de reconocer situaciones que se pueden interpretar y analizar desde las matemáticas o identificar los elementos matemáticos, como las gráficas, en los medios de comunicación y otras fuentes de información (BOE, núm. 5, 2007). Esto es, se hace necesario dotar a los alumnos de conocimientos suficientes como para que sean capaces de identificar las funciones y gráficas en su día a día y sean capaces de analizarlas para poder comprenderlas. De esta forma, es imprescindible utilizar recursos y métodos que permitan a los alumnos comprender y aprender el bloque de funciones y gráficas de manera significativa para que puedan aplicar estos conocimientos a la vida real.

Es por todo esto que en este trabajo se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas a alumnos de 2º de la ESO utilizando recursos didácticos a través de la pizarra digital interactiva.

## **2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **2.1. Definición del problema**

A lo largo del periodo de prácticas que se ha realizado en el máster de educación secundaria en aulas de 2º ESO del IES Juan Sebastián Elcano (Cartagena, Murcia) se ha podido observar cómo los alumnos que no mostraban interés en la asignatura de matemáticas se han sentido motivados cuando a la hora de impartir ciertos contenidos se han utilizado recursos didácticos a través de la Pizarra Digital Interactiva (PDI). Los alumnos se sienten atraídos por las nuevas tecnologías. El mero hecho de encender la pizarra digital ya parece despertar en ellos un interés que parece oculto cuando se utilizan otros recursos didácticos como la pizarra tradicional.

Según Corbalán (2011), todavía son muchos los docentes que prefieren el uso de la pizarra tradicional a la pizarra digital interactiva, esto se debe a que a veces los profesores no aceptan introducir aparatos o mecanismos en cuya utilización parte de los alumnos son más experimentados que ellos. Otras veces no se utilizan por falta de tiempo o por falta de formación (Herrera, 2009). Con las nuevas tecnologías irrumpiendo en el aula hay que modificar las metodologías de enseñanza, esto implica más tiempo de dedicación por parte de profesores en buscar recursos y crear nuevos materiales (Herrera, 2009).

Pero, ¿favorece el uso de la PDI el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones y gráficas en 2º de la ESO? ¿Qué recursos didácticos se pueden utilizar a través de la PDI para promover un aprendizaje más significativo? ¿Qué opinión tienen los profesores del uso de esta tecnología? ¿Y los alumnos? ¿Se mejora con su uso el interés de los alumnos en la materia?

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica utilizando las TIC, en concreto la PDI, por parte de los docentes para la enseñanza de las funciones y gráficas al alumnado de 2º de la ESO para, de esta forma, favorecer el proceso de aprendizaje de los alumnos, de manera que sea más significativo, y así paliar el problema de la desmotivación detectado en el aula de matemáticas. Esto es, utilizar estas tecnologías para aumentar su grado de comprensión, de interés y, por ende, de motivación para el aprendizaje de la asignatura.

### **2.2. Objetivos**

El objetivo general de este trabajo de fin de máster es el siguiente:

*Realizar una propuesta didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas a alumnos de 2º de ESO utilizando recursos didácticos a través de la Pizarra Digital Interactiva.*

Los objetivos específicos son los siguientes:

- Investigar sobre las dificultades y obstáculos a los que se enfrentan los alumnos a la hora de aprender matemáticas, en concreto en el bloque de funciones y gráficas, en el curso de 2º de la ESO.
- Exponer y examinar diferentes recursos didácticos disponibles para la enseñanza de las funciones y gráficas para el segundo curso de la educación secundaria obligatoria.
- Analizar las dificultades a las que se enfrentan los alumnos de 2º de la ESO del IES Juan Sebastián Elcano (Cartagena) en la asignatura de matemáticas así como su interés por el uso de la pizarra digital interactiva para el aprendizaje de las matemáticas.
- Averiguar la disposición y opinión de diferentes profesores de matemáticas del instituto mencionado sobre el uso de recursos a través de la pizarra digital interactiva como metodología didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas.

### **2.3. Metodología**

Para obtener la información suficiente para llevar a cabo el objetivo principal de este trabajo, esto es, realizar una propuesta didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas en el segundo curso de la ESO utilizando la PDI, se han llevado a cabo diferentes métodos: una investigación bibliográfica, para obtener un marco teórico sobre el que fundamentar la propuesta, y un estudio de campo, para conocer información sobre la realidad educativa en la que se quiere aplicar dicha propuesta.

A continuación se exponen las fases que se han llevado a cabo para el desarrollo de este trabajo:

1. *Análisis de datos de informes de evaluación.* Se han analizado diferentes informes y estudios que revisan el nivel de competencia matemática de España. Se han seleccionado y analizado dos informes internacionales, PISA 2012 y TIMSS 2011, y uno nacional, EGD 2010, obtenidos a través de la página web del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

2. *Análisis de la ley vigente.* A continuación se realiza un análisis acerca de los contenidos curriculares seleccionados para este trabajo y acerca de las TIC en la educación y así poder obtener un marco legislativo en el que basar la propuesta didáctica. Esta información se obtiene del Boletín Oficial del Estado, en el caso de la

legislación y normativa estatal, y del Boletín Oficial de la Región de Murcia, para la legislación autonómica.

*3. Creación del marco teórico.* Se ha realizado el marco teórico sobre las funciones y gráficas y las pizarras digitales interactivas. Se ha investigado, en primer lugar, acerca de los contenidos curriculares del bloque de funciones y gráficas para poder adecuar la propuesta a estos contenidos. A su vez se hace necesario investigar acerca de la didáctica de las funciones y gráficas así como obtener información acerca de las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas en general y de este bloque de contenidos en particular. En segundo lugar, se ha realizado una investigación acerca de la pizarra digital interactiva, sus beneficios y limitaciones, así como las exigencias necesarias para poder utilizarla adecuadamente. Se examinan y exponen diferentes recursos didácticos para utilizar a través de la PDI. Se han buscado documentos, libros y artículos de revista sobre la temática principal de este trabajo, escritos por autores de relevancia en estos campos. Esta búsqueda se ha realizado a través de Google Académico, Dialnet y la Biblioteca virtual de la UNIR. Se ha adquirido algún libro con la finalidad de completar la información encontrada en internet.

*4. Realización de un estudio de campo.* Se realiza este estudio con el fin de obtener datos relevantes de alumnos y profesores para poder realizar adecuadamente la propuesta didáctica. Este estudio se realiza a través del cuestionario como método de investigación, uno para alumnos y otro para profesores. El cuestionario de profesores está dirigido a los docentes pertenecientes al departamento de matemáticas del IES Juan Sebastián Elcano de Cartagena (Murcia), instituto que posee pizarras digitales interactivas en las aulas de 1º y 2º de la ESO. Se pretende conocer cuál es su opinión sobre el uso de recursos a través de la PDI y su forma de utilizar dichos recursos. También se extrae información acerca de las dificultades que consideran que tienen los alumnos en el aprendizaje del bloque de contenidos que atañe a este trabajo. En el momento en el que se realiza este trabajo de fin de máster todavía no se ha impartido la unidad didáctica de funciones en el curso de 2º de la ESO, es por esto que el cuestionario dirigido a los alumnos de este curso de dicho centro se hace con la intención de averiguar cuáles son las dificultades a las que se enfrentan en el aprendizaje de las matemáticas en general, cuáles son los conocimientos previos que poseen del bloque funciones y gráficas y qué interés muestran en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Se cuenta con la autorización expresa del jefe del departamento de matemáticas de dicho instituto para la realización de los cuestionarios tanto a alumnos como a profesores.

5. *Elaboración de la propuesta didáctica.* Finalmente, se realiza una propuesta didáctica en base a lo investigado en el marco teórico y a los resultados obtenidos en el estudio de campo. Se trata de una propuesta didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas a alumnos de 2º de la ESO utilizando la pizarra digital interactiva.

## **2.4. Justificación de la bibliografía utilizada**

El estudio bibliográfico llevado a cabo para esta investigación se ha realizado en varios temas importantes para poder apoyar teóricamente los resultados de esta investigación. Las fuentes han sido elegidas por su relevancia, prestigio de las publicaciones y autores y por su actualidad.

Por un lado se ha hecho necesario investigar y analizar la ley de educación vigente actualmente en España, Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE, núm. 106, 2006), así como el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación secundaria obligatoria (BOE, núm. 5, 2007) y el decreto 291/2007, de 14 de septiembre, por el que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de la región de Murcia (BORM, núm. 221, 2007) y así poder crear un marco legislativo en el que basar la propuesta didáctica.

Otro de los temas que ha sido necesario investigar es el estado actual de las matemáticas en España y el nivel de competencia matemática que tienen los alumnos españoles. Para esto se han analizado, por un lado, el informe PISA 2012 realizado por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), donde se muestra el nivel de España en esta competencia y también el de las comunidades autónomas. Por otro lado se analiza el informe TIMSS 2011 realizado por la IEA (Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento en Educación) que arroja también resultados significativos sobre el nivel de competencia matemática en España. Y finalmente, se analizan los resultados de la Evaluación General de Diagnóstico 2010 propuesta por la LOE en su artículo 144 realizada por el Instituto Nacional de Evaluación.

Por otro lado, la investigación acerca de la didáctica de las matemáticas en general y de la didáctica de funciones y gráficas en particular se ha basado principalmente en las aportaciones realizadas por diferentes autores en tres obras coordinadas por Jesús María Goñi en el año 2011 acerca de la didáctica de las matemáticas, acerca de los complementos de formación disciplinar y sobre investigación, innovación y buenas prácticas (Goñi, 2011a, 2011b, 2011c). Estas

obras están dedicadas a la formación del profesorado de educación secundaria. La primera de ellas Goñi (2011a) trata de forma general la didáctica de las matemáticas. Si bien la lectura de todos los capítulos del libro han ayudado al desarrollo de este trabajo, se ha tenido en cuenta sobre todo el capítulo dedicado al aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria (Valls, 2011) y el capítulo sobre recursos (Corbalán, 2011). Del segundo libro, Goñi (2011b), cabe destacar el análisis que se ha hecho del capítulo sobre funciones (Font, 2011) para poder profundizar en la didáctica del bloque de contenidos que atañe a este trabajo. Goñi (2011c) analiza la investigación en la enseñanza de matemáticas. Para este trabajo se ha profundizado en el capítulo dedicado a las buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas en la secundaria y bachillerato (Planas, 2011), en concreto en la parte dedicada a la contextualización de la enseñanza de esta materia.

Cabe destacar la utilidad de la monografía de Godino et al. (2003) acerca de los fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Concretamente se ha analizado el capítulo dedicado a errores, obstáculos y dificultades que se encuentran los alumnos a la hora de aprender matemáticas.

También, para la investigación sobre la didáctica de funciones y gráficas, ha resultado especialmente útil la obra del Shell Centre for Mathematical Education (1990) acerca del lenguaje de funciones y gráficas. En esta obra se trata la enseñanza de funciones de una manera contextualizada, se divide en dos unidades en los que se proponen multitud de ejemplos prácticos para la enseñanza del bloque de contenidos seleccionados para este trabajo.

Para investigar sobre las dificultades y obstáculos a los que se enfrentan los alumnos a la hora de aprender funciones y gráficas ha sido de gran utilidad Del Río (1990) que cita diferentes investigaciones acerca de las concepciones erróneas de los estudiantes en esta materia. Para investigar acerca de la idea que tienen los alumnos sobre la asignatura se han analizado diferentes artículos, entre el de ellos Hidalgo, Maroto y Palacios (2004) y Núñez et al. (2005).

Finalmente, para la obtener información acerca de la Pizarra Digital Interactiva como recurso didáctico, sus características y ventajas se han analizado multitud de obras y artículos entre los que caben destacar Marqués (2006) acerca de la PDI en el aula de matemáticas, Ferrer (s.f.) en su documento acerca de la PDI, Gallego et al. (2009), en su artículo sobre la PDI como recurso docente y Gandol et al. (2012) en su investigación sobre las potencialidades y limitaciones de la PDI.

### **3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA**

#### **3.1. Situación actual en España: informes y estudios**

Actualmente el rendimiento académico en matemáticas es uno de los desafíos más importantes de los sistemas educativos debido a que la asignatura de matemáticas es una de las fundamentales en el currículo, porque favorece el desarrollo del conocimiento cognitivo del alumno y por la funcionalidad que tienen las matemáticas para la vida adulta (Núñez et al., 2005). La situación actual de la educación española en la competencia de matemáticas, según diversos estudios, presenta grandes lagunas. Por este motivo, en este apartado se analizan diferentes informes acerca del rendimiento de los alumnos españoles en esta competencia.

##### **3.1.1. PISA 2012**

El informe PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos) de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) tiene la finalidad de evaluar las competencias y conocimientos adquiridos por alumnos de 15 años en matemáticas, lectura y ciencias. El último informe se realizó en mayo de 2012 a 510.000 alumnos de 65 países, 34 de ellos de la OCDE y se centró en la competencia matemática. Los resultados para los alumnos españoles en el área de matemática demuestran la carencia que hay en nuestro sistema educativo en relación a esta competencia. La puntuación que obtuvo España en competencia matemática con respecto a la media de la OCDE se muestra en el siguiente cuadro.

**Cuadro Nº 1. Resultados PISA 2012 de España en competencia matemática.**

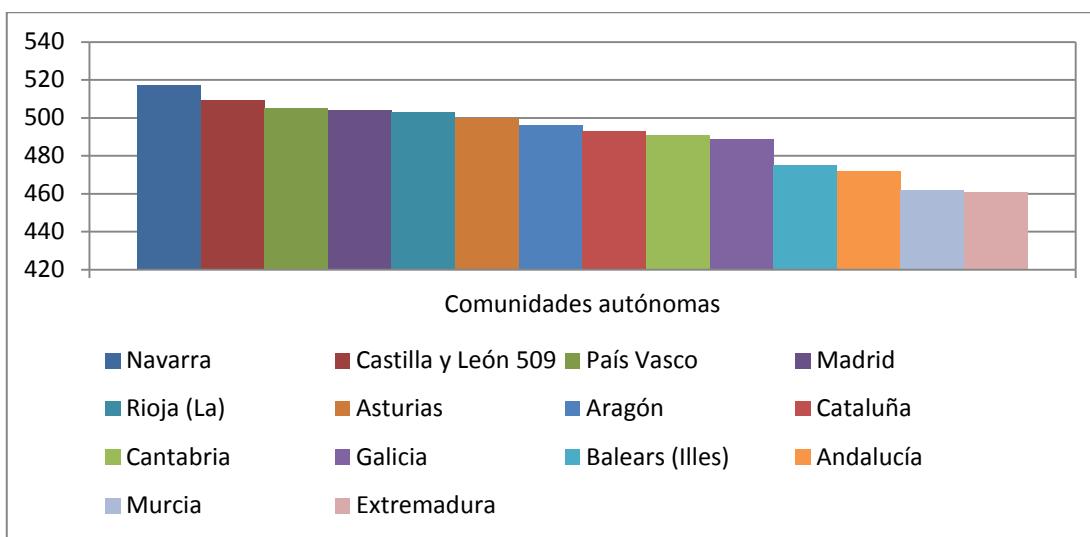
	ESPAÑA	OCDE
PUNTUACIÓN	484	494
%ALUMNOS EXCELENTES	8%	13,1%
%ALUMNOS BAJO NIVEL	23,6%	22,2%

*Nota:* Resultados PISA 2012 para España en competencia matemática. Fuente: OCDE (2009).

Los resultados en la competencia matemática de este informe se presentan en cuatro sub-áreas de contenido matemático: *cantidad, cambio y relaciones, incertidumbre y datos y espacio y forma*. Los alumnos españoles presentan mejor rendimiento relativo en las sub-áreas de *cantidad e incertidumbre y datos* que en *cambio y relaciones y espacio y forma*, por lo que según este informe, aun habiendo que mejorar en todas las áreas, se debería incidir más en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las dos últimas. Esto implica que debería mejorarse el proceso de

enseñanza-aprendizaje de las funciones y gráficas, incluidas en la sub-área de *cambio y relaciones*.

En España el informe se realizó en 14 comunidades autónomas, una de ellas la Región de Murcia, donde esta investigación se está llevando a cabo. Si se analizan los resultados por comunidades autónomas, como se ve en el gráfico a continuación, la Región de Murcia (462 puntos) es de las comunidades que obtienen peores resultados seguida de Extremadura (461).



Gráfica N° 1. Resultados PISA 2012 en competencia matemática por Comunidades Autónomas. Fuente: OCDE (2013).

### 3.1.2. TIMSS 2011

Otro estudio que arroja datos significativos sobre el rendimiento en matemáticas en España es el estudio TIMSS 2011 (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias). Este estudio lo realiza la IEA (Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento en Educación) en más de 60 países para proporcionarles información adecuada para que mejoren sus procesos de enseñanza-aprendizaje en las áreas de matemáticas y ciencias. En el siguiente cuadro se muestran los resultados obtenidos por España en matemáticas en relación a la media de la OCDE.

**Cuadro N°2. Resultados de España en TIMSS 2011.**

	ESPAÑA	OCDE
%ALUMNOS EXCELENTE	1%	5%
%ALUMNOS BAJO NIVEL	13%	7%

Nota: Resultados de España en TIMSS 2011. Fuente: IEA (2013).

Según este informe España debe atender a los alumnos con dificultades desde edades tempranas y además conseguir aumentar el porcentaje de alumnos avanzados mejorando su grado de competencia, dándoles la posibilidad de conseguir

mejores puestos de trabajo y, por ende, aumentar la competitividad del país y favorecer la innovación.

### **3.1.3. Evaluación General de Diagnóstico 2010**

Por otro lado, la LOE establece, en su artículo 144.1, que el Instituto de Evaluación y los organismos correspondientes de las Administraciones educativas han de realizar una evaluación general de diagnóstico para evaluar y analizar las competencias básicas del currículum en alumnos de 4º de primaria y de 2º de ESO.

En la Evaluación General de Diagnóstico de 2010 se evaluó, entre otras, la competencia básica matemática. Los resultados de la comunidad autónoma de la Región de Murcia en relación a la media española son los siguientes.

**Cuadro Nº3. Resultados de la EGD 2010.**

	ESPAÑA	Región de Murcia
%ALUMNOS EXCELENTE	8%	7%
%ALUMNOS BAJO NIVEL	18%	17%

*Nota:* Resultados de la EGD 2010. Fuente: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2011).

## **3.2. Matemáticas en el currículum de ESO: legislación**

Para poder realizar una propuesta didáctica para el bloque de contenidos de Funciones y Gráficas de la asignatura de matemáticas de 2º de ESO es necesario conocer el currículo de la asignatura de matemáticas en este curso de la educación secundaria obligatoria.

### **3.2.1. LOE**

Según la LOE el currículo es “el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente Ley” (BOE núm. 106, 2006, p. 17166). En la LOE se establece que los aspectos básicos del currículo que constituyen las enseñanzas mínimas serán fijados por el gobierno para poder asegurar formación común a todos los españoles y poder garantizar la validez de los títulos. Se indica que serán las administraciones educativas las que establecerán el currículo de las enseñanzas reguladas teniendo en cuenta dichas enseñanzas mínimas.

### **3.2.2. Real Decreto 1631/2006**

En el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, se fijan las competencias básicas que ha de alcanzar el alumno al finalizar la enseñanza obligatoria. Con las diferentes materias del currículo se pretende que los alumnos

alcancen unos objetivos que les permitan adquirir estas competencias. Estas competencias son necesarias para integrar los diferentes aprendizajes y que los estudiantes sean capaces de relacionar distintos tipos de contenidos.

**Cuadro N° 4. Competencias básicas para la educación secundaria obligatoria.**

COMPETENCIAS BÁSICAS
C1: Competencia en comunicación lingüística
C2: Competencia matemática
C3: Competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico
C4: Tratamiento de la información y competencia digital
C5: Competencia social y ciudadana
C6: Competencia cultural y artística
C7: Competencia para aprender a aprender
C8: Autonomía e iniciativa personal

Nota: Competencias básicas para la educación secundaria obligatoria. Fuente: Real Decreto 1631/2006 (BOE núm. 5, 2007, p. 686).

La propuesta didáctica que se elabora en este trabajo se centra en la adquisición de la competencia matemática y la de tratamiento de la información y competencia digital. En el Real Decreto 1631/2006 se define la competencia matemática como la necesaria para poder aplicar destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, utilizar elementos y razonamientos matemáticos para resolver problemas resultantes de situaciones de la vida diaria y poder tomar decisiones. En cuanto a la competencia de tratamiento de la información y competencia digital, su adquisición implica el ser capaz de seleccionar, tratar y utilizar la información de una manera reflexiva, responsable y crítica y saber utilizar los diferentes recursos tecnológicos para resolver problemas de la vida diaria de una manera eficiente.

### **3.2.3. Decreto que establece el currículo de la ESO en la Región de Murcia**

El Decreto número 291/2007 es el que establece el currículo de la ESO en la comunidad autónoma de la Región de Murcia. Este Decreto divide los contenidos de la asignatura de matemáticas para el segundo curso de la educación secundaria obligatoria en seis bloques:

**Cuadro N°5. Bloques de contenidos de la asignatura de matemáticas**

Bloque 1	Contenidos comunes
Bloque 2	Números
Bloque 3	Álgebra
Bloque 4	Geometría
Bloque 5	Funciones y gráficas
Bloque 6	Estadística y probabilidad

Nota: Bloques de contenidos de la asignatura de matemáticas. Fuente: Decreto 291/2007 (BORM núm. 221, 2007, p. 27269).

Dado que este trabajo se refiere al bloque 5 de los contenidos de la asignatura se analizará este bloque en profundidad en el siguiente apartado.

### 3.3. Funciones y gráficas

Las leyes de la naturaleza relacionan variables y esta relación viene dada por las funciones. En Font (2011) se puede apreciar la evolución histórica del objeto “función”: desde Babilonia, donde se utilizaban tablas para los cálculos astronómicos, hasta la aplicación de la teoría de conjuntos de las funciones, pasando por Galileo que, a mediados del s. XVII, fue el primero que relacionó numéricamente las variables que afectan a un fenómeno, por Descartes que fue el primero en representar las funciones en los ejes cartesianos o por Leibniz que fue el primero en utilizar el vocablo “función”.

Las funciones y gráficas están presentes en multitud de áreas y fenómenos de la vida diaria y sirven para ver de forma clara la relación entre dos magnitudes.

#### 3.3.1. Contenidos y objetivos

El Decreto 291/2007 y el Real Decreto 1631/2006 fijan los contenidos del bloque 5 de la asignatura de matemáticas del segundo curso de educación secundaria obligatoria como los expuestos en el siguiente cuadro.

**Cuadro Nº6. Contenidos del bloque de funciones y gráficas.**

Decreto 291/2007	Real Decreto 1631 /2006
Gráficas Cartesianas. Elaboración de una gráfica a partir de una tabla de valores o de una expresión algebraica sencilla que relacione dos variables.	
Descripción global y local de fenómenos presentados de forma gráfica.	Descripción global y local de fenómenos presentados de forma gráfica.
Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Corte con los ejes. Máximos y mínimos absolutos o relativos.	Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Corte con los ejes. Máximos y mínimos absolutos o relativos.
Identificación de magnitudes proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores o de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.	Obtención de la relación entre dos magnitudes directa e inversamente proporcionales a partir del análisis de la tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.
Construcción de tablas y gráficas a partir de la observación y experimentación en casos prácticos.	Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla.
Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales y el mundo de la información.	Interpretación de las gráficas como la relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.
Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.	Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

Nota: Contenidos del bloque de funciones y gráficas. Fuente: Decreto 291/2007 (BORM núm. 221, 2007, p. 27275) y Real Decreto 1631/2006 (BOE núm. 5, 2007, p. 754).

Los decretos referidos al currículum de las materias muestran una serie de objetivos generales para cada asignatura que han de lograrse a lo largo de toda la etapa de educación secundaria. Por otro lado, se exponen los criterios de evaluación por materia y curso. Según Goñi y López-Goñi (2011), las editoriales y los centros, en su proyecto curricular de centro, secuencian los objetivos en base a los criterios de evaluación ofrecidos por los decretos curriculares dado que muestran lo que ha de aprender el alumno en base a los contenidos fijados. En este trabajo se utiliza esta estrategia para fijar los objetivos del bloque de funciones y gráficas. De tal forma, los objetivos, basados en los criterios de evaluación propuestos por el Decreto 291/2007 y por el Real Decreto 1631/2006 referidos al bloque 5 de contenidos, son los expuestos en el siguiente cuadro.

**Cuadro N° 7. Objetivos del bloque de funciones y gráficas.**

<b>Decreto 291/2007</b>	<b>Real Decreto 1631/2006</b>
Intercambiar información entre tablas de valores y gráficas y obtener información práctica de gráficas cartesianas sencillas referidas a fenómenos naturales, a la vida cotidiana y al mundo de la información.	Identificar relaciones de proporcionalidad numérica para solucionar problemas de la vida diaria: identificar relaciones de proporcionalidad entre dos magnitudes y utilizar estrategias (tablas, obtención de la constante de proporcionalidad...) para obtener elementos desconocidos a partir de la relación de proporcionalidad con elementos conocidos.
	Interpretar relaciones funcionales sencillas representadas en forma de tabla, gráfica, expresión algebraica o un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado.
	Manejar los mecanismos que relacionan los tipos de representación funcional.
	Analizar una gráfica y relacionar el resultado del análisis con el significado de las variables representadas.

*Nota:* Objetivos del bloque de funciones y gráficas. Fuente: Decreto 291/2007 (BORM núm. 221, 2007, p. 27276) y Real Decreto 1631/2006 (BOE núm. 5, 2007, p. 755).

### **3.3.2. Dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las funciones y gráficas**

No cabe duda de que en la sociedad se perciben las matemáticas como una asignatura ardua y difícil. Para Núñez et al. (2005) las matemáticas son uno de los conocimientos que resultan más difíciles de adquirir por parte de los alumnos generándoles a veces ansiedad e intranquilidad que se traduce, en ocasiones, en rechazo a la escuela y frustración. Para Hidalgo, Maroto y Palacios (2004) esto se debe a que los alumnos perciben que para poder asimilar los contenidos matemáticos hacen falta estrategias cognitivas de orden superior. Y esto, unido a que la asignatura es acumulativa, les provoca rechazo y aburrimiento. Hace falta motivar

a los alumnos para que superen estos miedos y dificultades y así poder romper el que Hidalgo et al. (2004) llaman el círculo vicioso “dificultad-aburrimiento-suspensión-fatalismo-bajo autoconcepto-desmotivación-rechazo-dificultad” (p.94). Por otro lado, la falta de conexión entre la teoría y la práctica hace que los alumnos no sean capaces de descubrir la aplicación de las matemáticas a la vida real y esto se traduce en un descenso de interés a medida que estos avanzan en sus estudios (Núñez et al., 2005). La concepción que tienen los alumnos sobre la asignatura puede suponer un obstáculo en el aprendizaje de la misma. Resumiendo lo expuesto anteriormente, en el siguiente cuadro se expone una clasificación de las diferentes causas de errores y dificultades a las que se enfrentan los alumnos según Godino et al. (2003).

**Cuadro N°8. Clasificación de errores y dificultades.**

Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos
Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas
Dificultades que se originan en la organización del centro
Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado
Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos
Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los conocimientos anteriores

Nota: Clasificación de errores y dificultades. Fuente: Godino et al. (2003).

Por otro lado, existen diferentes investigaciones acerca de las ideas erróneas que tienen los alumnos acerca de las funciones y gráficas. Las conclusiones a las que se llega en ellas son las siguientes:

1. *Identificación de una gráfica con el dibujo de una situación* (Bell et al., 1987, citado en Del Río, 1990, Clement et al., 1985, citado en Del Río, 1990, y Shell Centre for Mathematical Education, 1990).
2. *Incomprensión de que las gráficas muestran una relación entre dos valores* (Bell et al., 1987, citado en Del Río, 1990 y Shell Centre for Mathematical Education, 1990).
3. *Confusión entre intervalos y gradientes con puntos particulares* (Bell et al., 1987, citado en Del Río, 1990 y Shell Centre for Mathematical Education, 1990).
4. *Confusión de la pendiente de la función con los puntos altos y bajos de la gráfica* (Clement et al., 1985, citado en Del Río, 1990).
5. *Fijación en uno o dos factores y exclusión de los restantes al construir una gráfica* (Bell et al., 1987, citado en Del Río, 1990 y Shell Centre for Mathematical Education, 1990).
6. *Dificultad al interpretar situaciones que no dependen del tiempo* (Shell Centre for Mathematical Education, 1990).

### 3.3.3. Didáctica de las funciones

El Shell Centre for Mathematical Education (1990), en su obra sobre el lenguaje de las funciones y gráficas, entiende las matemáticas como un nuevo lenguaje potente para describir la realidad que hay que aprender y también saber aplicar. Recomienda utilizar las matemáticas como lenguaje, como medio de comunicación. Es necesario que el alumno desarrolle fluidez en la utilización de este lenguaje para poder describir los fenómenos y situaciones del mundo real (Shell Centre for Mathematical Education, 1990).

Existen dos perspectivas sobre la enseñanza de las funciones: la formalista y la realista. La formalista es el origen de las llamadas “matemáticas modernas” y presenta unas matemáticas alejadas de las otras ciencias, centradas en sí mismas mientras que la realista es la que domina en los currículos oficiales y está presente en muchos textos escolares actuales y presenta unas matemáticas contextualizadas relacionadas con situaciones del mundo real (Font, 2011).

**Cuadro Nº 9. Perspectiva formalista vs perspectiva realista.**

	Perspectiva formalista	Perspectiva realista
<b>Contexto</b>	Matemáticas Descontextualizadas	Matemáticas Contextualizadas
<b>Lenguaje</b>	Conjuntista: gráfico y expresiones simbólicas. Conversiones escasas de expresión simbólica a gráfica.	Cuatro representaciones: enunciado, tabla, gráfica y fórmula. Conversiones entre ellos.
<b>Metodología</b>	Clases magistrales de exposición de contenido: -profesor define conceptos, pone ejemplos y demuestra propiedades -alumnos aplican conceptos y propiedades a problemas descontextualizados	Participativa: - profesor propone problemas que los alumnos en grupo intentan resolver - alumnos ponen en común las soluciones para construir conceptos que se organizan y relacionan para resolver problemas contextualizados.
<b>Argumentación</b>	Deductiva	Inductiva y visual

Nota: Perspectiva formalista vs perspectiva realista. Fuente: Font (2011).

En este trabajo se enfoca la didáctica de las funciones desde la perspectiva realista, de manera contextualizada. En este sentido son muchos los autores que investigan y muestran los beneficios sobre la contextualización de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Deulofeu, 2001, Font y Ramos, 2005, Shell Centre for Mathematical Education, 1990 y Planas, 2011).

Martínez (2003, citado en Font y Ramos, 2005) distingue tres tipos de contextos del objeto matemático:

**Cuadro Nº 10. Tipos de contextos del objeto matemático.**

Contexto real	Práctica real de las matemáticas
Contexto simulado	Representación real, reproduce sus características
Contexto evocado	Imaginar la situación donde se da el hecho.

*Nota:* Tipos de contextos del objeto matemático. Fuente: Martínez (2003, citado en Font y Ramos, 2005).

De manera que para la enseñanza de las funciones han de presentarse situaciones y problemas en estos tres contextos.

Por otro lado, Janvier (1987, citado en Font y Ramos, 2005, p. 318) en sus trabajos sobre las funciones, que han servido de base a investigaciones sobre la didáctica de las funciones y han cambiado la manera de enseñar las funciones en las aulas, muestra cuatro tipos de representaciones funcionales que potencian diferentes procesos cognitivos expuestos en el siguiente cuadro.

**Cuadro Nº 11. Relación entre las representaciones funcionales y los procesos cognitivos.**

Representaciones de las funciones	Procesos cognitivos
Expresión analítica	Capacidad simbólica
Tabla	Aspectos numéricos y cuantitativos
Gráfica	Conceptuación de la visualización
Expresión verbal	Capacidad lingüística

*Nota:* Relación entre las representaciones funcionales y los procesos cognitivos. Fuente: Janvier (1987, citado en Font y Ramos, 2005, p.318).

Según Janvier (1987, citado en Font y Ramos, 2005) el aprendizaje de las funciones tiene que abarcar estos cuatro tipos y tiene que incluir, además, la capacidad de convertir la información de una representación a otra. En esta misma línea Duval (2006, citado en Font, 2011) afirma que “las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y las traducciones y conversiones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión y, por lo tanto, para su enseñanza y aprendizaje” (p. 155). Son muchos los alumnos que conocen las gráficas, las tablas o las expresiones algebraicas pero tienen dificultades a la hora de analizarlas e interpretar sus características y realizar conversiones entre unas representaciones y otras.

Siendo todos los tipos de representación de vital importancia para comprender el concepto de función a continuación se exponen diversos motivos acerca de la importancia de cada una de estas representaciones:

1. *Representación simbólica.* El concepto de función se origina a partir de las relaciones entre los fenómenos de la naturaleza, dadas por las leyes físicas. Las relaciones de dependencia entre dos magnitudes físicas originan la función de proporcionalidad directa, básica para modelizar multitud de situaciones (Font, 2011). Según este autor, para iniciar a los alumnos de secundaria en el concepto de función hay que partir de la idea de que una función “es una dependencia entre magnitudes variables que, a cada valor de la variable independiente, le hace corresponder un único valor de la variable dependiente” (p. 153).

2. *Representación tabular.* Deulofeu (2003), en su artículo sobre el porqué y para qué de las funciones, muestra la importancia de las tablas como punto de partida en la introducción de las relaciones funcionales en la educación secundaria. Según este autor una de las ventajas del uso de tablas es la facilidad con la que los alumnos trabajan con ellas.

3. *Representación gráfica.* Ortega (1998) considera que el uso de la representación gráfica cartesiana es de suma importancia dado que puede ser también un instrumento para la resolución de problemas, para representar conceptos y establecer demostraciones. En esta misma línea, Lacasta (2002) expone que el gráfico cartesiano no es un objeto de enseñanza sino un instrumento para obtener rápidamente y de manera visual conocimientos sobre las funciones.

4. *Representación verbal.* La representación verbal es esencial para interpretar y relacionar las otras tres representaciones (Font, 2011). Según Planas (2011) el lenguaje verbal no es muy utilizado actualmente en las aulas para la didáctica de las matemáticas pero no por ello es menos importante, el lenguaje verbal para representar ideas matemáticas se suele encontrar en los medios de comunicación, en la prensa escrita o internet, donde habitualmente lo conjugan con lenguaje gráfico.

Sea como fuere, es necesario que los alumnos conozcan estos cuatro tipos de representaciones y sean capaces de realizar conversiones de un tipo a otro. Muchos alumnos presentan dificultades en este tipo de conversiones dado que se trabajan poco en las actividades de aula, sobre todo el paso de representación gráfica a expresión analítica (Font, 2011).

### **3.4. Pizarra Digital Interactiva como recurso didáctico**

#### **3.4.1. Introducción**

No cabe duda de que en la actualidad se están produciendo cambios rápidos y continuos en la sociedad. Según diversos autores como Bosco y Rodríguez (2008), Llorens y Fernández (2006) y Cabero (2007) citados en Carrasco et al. (2008), el desarrollo de las TIC, la facilidad con la que se puede acceder a ellas y la multitud de recursos disponibles hacen que estén y deban estar presentes en todos los sectores de la sociedad. Esto afecta al sistema educativo ya que ha de adaptarse a los cambios sociales para poder hacer frente a un nuevo tipo de educación en el que dichas tecnologías se pueden emplear de múltiples maneras: como fuente de información, como canal de comunicación o como medio de expresión (Carrasco et al., 2008). Para poder hacer frente a estos cambios la UNESCO (2008, citado en Carrasco et al., 2008, p.104) y RUTE (2008, citado en Carrasco et al., 2008, p. 104) mantienen que es necesario que los docentes desarrollen nuevas competencias tecnológicas que les

permitan poder realizar de manera adecuada su trabajo de acorde con los cambios que se están produciendo en la sociedad.

Para poder elegir entre una tecnología u otra para el proceso de enseñanza-aprendizaje Cabrero (2000, citado en Carrasco et al., 2008) propone ciertos criterios como: tener en cuenta los objetivos, tener en cuenta las preferencias de profesores y alumnos, considerar el contexto donde se quiere utilizar o elegirlas en función de la facilidad para manejarlas.

Para poder adquirir la competencia digital se hace indispensable el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el aula. Para ello, en 2009 el Gobierno de España y las Comunidades Autónomas (excepto Valencia y Madrid) aprobaron el Programa Estatal Escuela 2.0. Con este programa se pretende poner en marcha en las escuelas aulas digitales dotadas de infraestructuras tecnológicas y conexión a internet, así como un ordenador portátil por cada alumno. Esto es, que las aulas estén dotadas de Pizarras Digitales Interactivas con conexión a internet (INTEF).

La Pizarra Digital Interactiva ofrece multitud de posibilidades al profesor en el aula para realizar satisfactoriamente el proceso de enseñanza-aprendizaje. Aunque solo su uso no garantiza el éxito en el proceso enseñanza aprendizaje (Díaz, 2007, citado en Gandol et al., 2012), de tal manera que, tal como afirma Herrera (2009), es necesario fomentar la formación básica del profesorado para el uso de la PDI, así como también se hace necesario que el profesorado dedique tiempo a buscar e investigar sobre nuevas metodologías, a buscar nuevos recursos y a modificar sus materiales didácticos. Los beneficios del uso de esta tecnología se verán incrementados si el docente tiene la suficiente capacidad de manejo de la misma y la capacidad de adecuación a los contenidos de la materia (Hernández y Medina, 2012).

### **3.4.2. Características de la PDI**

Una PDI está formada básicamente por un ordenador con conexión a internet y un video proyector que reproduce la imagen de la pantalla del ordenador a gran tamaño en una pantalla táctil que permite interactuar con el contenido y escribir con un puntero o con los dedos. La PDI “es más que un ordenador, un proyector o una pantalla: la suma es mayor que sus partes” (Glover y Miller, 2002, citados en Gandol et al., 2012, p. 172). La PDI permite compartir información, hacer esquemas, dibujar, escribir, subrayar, colorear, guardar el trabajo realizado en el disco duro...En resumen, permite modificar y controlar cualquier recurso que se proyecta en ella a través del ordenador (Herrera, 2009).

### **3.4.3. Beneficios, limitaciones y exigencias del uso de la PDI**

A continuación se muestran diferentes tablas donde se exponen las limitaciones del uso de la PDI como recurso didáctico, los beneficios que esta proporciona y las exigencias que deben cumplirse para hacer un buen uso didáctico de esta tecnología según diversos autores.

En el siguiente cuadro se pueden ver algunas de las limitaciones encontradas para el uso didáctico de la PDI.

**Cuadro Nº12. Limitaciones del uso de la PDI.**

Limitaciones
Inversión de tiempo inicial es mayor en la preparación de actividades.
Se necesita formación adecuada para poder elaborar actividades propias.
Para optimizar su uso se hace necesario que los docentes la utilicen durante un largo periodo de tiempo.
Requiere más formación, planificación y organización.

*Nota:* Limitaciones del uso de la PDI. Fuente: Ferrer (s.f.), Armstrong et al. (2005, citado en Gandol et al., 2012) y Slay et al. (2008, citado en Gandol et al., 2012).

Marqués (2003) afirma que para poder aprovechar las oportunidades pedagógicas que proporciona el uso de la PDI en el aula se han de cumplir ciertas exigencias.

**Cuadro Nº13. Exigencias para el uso adecuado de la PDI.**

Exigencias
Infraestructuras adecuadas en el centro para que al profesor le resulte cómodo utilizar la PDI.
El profesor debe recibir formación didáctica y tecnológica.
Tiene que haber un firme apoyo por parte de la dirección del centro para implantar este sistema tecnológico.
Voluntad de cambio por parte de los docentes.

*Nota:* Exigencias para el uso adecuado de la PDI. Fuente: Marqués (2003).

En cuanto a los beneficios del uso de la PDI, se realiza una clasificación entre los generales, los que aportan a los profesores y los que aportan a los alumnos.

**Cuadro N°14. Beneficios del uso de la PDI.**

<b>Generales</b>	<b>Profesores</b>	<b>Alumnos</b>
Facilidad de uso y capacidad de comunicación de ideas (Hernández y Medina, 2012)	Ayuda a la visualización en la enseñanza de conceptos difíciles (BECTA, 2007, citado en Gandol et al., 2012)	Mejora las habilidades TIC (Smith et al., 2005, citado en Gandol et al., 2012, p. 179)
Facilitan mayor interacción y debate en el aula (Gerard et al., 1999, citado en Gallego et al., 2009, p. 132)	Permite utilizar herramientas informáticas para simulación y modelación, software matemático o sistemas multimedia. (Hernández y Medina, 2012)	Facilita la comprensión de los alumnos gracias a presentaciones más claras y dinámicas (Smith, 2001, citado en Gallego et al., 2009)
Recurso versátil con aplicaciones para todos los niveles y áreas (Smith, 1999, citado en Gallego et al., 2009, p.132)	Clases más interactivas y motivadoras (Hernández y Medina, 2012)	Facilita el proceso enseñanza aprendizaje (Ferrer, s.f.)
Aumenta la disponibilidad de tiempo de tal manera que el profesor puede presentar recursos de internet de una manera sencilla y eficaz (Walker, 2003, citado en Gallego et al., 2009, p.132)	En la asignatura de matemáticas permiten introducir una metodología constructivista, que promueve la participación del alumno (Ángel y Bautista, 2001; Guedez, 2005; Oteiza y Silva, 2001; citados en Hernández y Medina, 2012, p. 1)	Alta motivación de los alumnos (Marqués, 2003; Gallego et al., 2009)
Aumenta la motivación de alumnos y profesores (Levy, 2002, citado en Gallego et al., 2009, p.132)	Fomenta la flexibilidad y espontaneidad dado que facilita gran variedad de recursos (Smith, 2001, citado en Gallego et al., 2009, p. 133; Ferrer, s.f.)	Facilidad de presentación de las situaciones trabajadas (Marqués, 2003)
Relaciona el mundo fuera del aula con el del aula a través de Internet (Marqués, 2003)	Tecnología integradora de todos los recursos didácticos clásicos que permite realizar actividades didácticas interactivas (Ferrer, s.f.)	Permite aprendizajes más significativos gracias a que aprovecha el mundo digital para tratar los temas de una forma más cercana a la vida diaria de los alumnos. (Ferrer, s.f.)

Nota: Beneficios del uso de la PDI. Fuente: Hernández y Medina (2012), Gallego et al. (2009), Gandol et al. (2012), Ferrer (s.f.) y Marqués (2003).

### **3.4.4. Metodología y recursos**

Para el uso de la PDI se parte de la premisa de que el docente tiene que tener una formación básica que le permita hacer un buen uso didáctico de esta TIC.

Algunos de los diferentes usos de las pizarras digitales interactivas en el aula, basados en los modelos presentados por Marqués (2006), son los siguientes:

**Cuadro N°15. Modelos de uso de la PDI en el aula.**

MODELOS DE USO DE LA PDI EN EL AULA
Apoyo a las explicaciones del profesor
Realizar ejercicios y trabajos colaborativos en clase
Corregir ejercicios en clase de manera colectiva
Aprendizaje de utilización de programas informáticos

Nota: Modelos de uso de la PDI en el aula. Fuente: Marqués (2006).

Es necesario disponer de recursos y materiales adecuados para el uso de la PDI en el aula. El paso previo al uso de la PDI en el aula de matemáticas es realizar una investigación acerca de los recursos disponibles en la red, creados por otros docentes, para poder elaborar nuevos materiales didácticos. El profesor debe hacer una selección previa de recursos adecuados a los contenidos que se quieren impartir y a los objetivos que se quieren conseguir y exponerlos en clase con criterios pedagógicos (Herrera, 2009). Además estos recursos deben permitir la participación del alumnado y la colaboración y cooperación entre ellos y con el profesor (Herrera, 2009). A continuación se muestra una relación de diferentes recursos susceptibles de ser utilizados en la impartición del bloque de funciones y gráficas:

- Para la representación gráfica de funciones a partir de tablas o expresión simbólica: graficadores de funciones online y gratuitos como Fooplot o GeoGebra online.
- Para proporcionar una visión unitaria del concepto de función y sus propiedades como refuerzo de los conocimientos adquiridos: Microsoft Office Power Point para la realización de mapas conceptuales.
- Para mostrar situaciones de la vida diaria representadas con funciones: Google como buscador de imágenes o YouTube de vídeos.
- Para la resolución de problemas en los que intervienen funciones: JClic ([http://clic.xtec.cat/db/listact\\_es.jsp](http://clic.xtec.cat/db/listact_es.jsp)), un conjunto de aplicaciones de software libre para realizar actividades educativas. En su página web hay una biblioteca de actividades que se pueden seleccionar por materia y curso. Para las funciones y gráficas en 2º de la ESO dispone de un programa interactivo para comprender las funciones en la vida diaria.
- Repositorios de actividades y problemas sobre las funciones y sus representaciones: Proyecto Descartes y Proyecto Gauss son dos proyectos

promovidos por el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF) del Ministerio de educación, cultura y deporte que ofrecen a los docentes multitud de ítems didácticos para la enseñanza de matemáticas para primaria y secundaria. Están diseñados para fomentar el uso de las TIC en el aula y se pueden utilizar tanto sobre PDI como en ordenadores.

## **4. ESTUDIO DE CAMPO**

### **4.1. Justificación**

La propia experiencia durante el periodo de prácticas de este máster en el IES Juan Sebastián Elcano en Cartagena (Murcia) es una de las razones por las que el presente trabajo de fin de máster se realiza sobre la enseñanza de funciones y gráficas en 2º de la ESO utilizando la PDI. Durante el periodo de observación se pudo constatar el uso de este recurso que hacía el tutor de prácticas del centro en el aula de matemáticas.

En este trabajo se hace necesario hacer un estudio de campo para obtener datos relevantes sobre la opinión de los profesores de matemáticas y alumnos de 2º de la ESO de este centro acerca del uso de esta tecnología para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en concreto del bloque contenidos objeto de estudio en este trabajo, y poder contrastarlos con los datos obtenidos en el marco teórico. Una vez obtenidos todos estos datos se puede presentar una propuesta didáctica adecuada a las necesidades de profesores y alumnos.

### **4.2. Objetivos**

El objetivo principal de este estudio de campo es obtener información relevante acerca de la opinión de profesores y alumnos sobre las dificultades que encuentran en el proceso-aprendizaje de las funciones y gráficas y sobre el uso de recursos didácticos a través de las pizarras digitales interactivas en el contexto educativo adecuado. Para ello se hace necesario establecer los siguientes objetivos específicos:

- Conocer las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas, desde el punto de vista de profesores y alumnos.
- Analizar los conocimientos previos que tienen los alumnos de 2º de la ESO sobre funciones y gráficas.
- Averiguar el uso que se hace de la PDI en el aula y los recursos utilizados.
- Saber la opinión de los alumnos y profesores sobre las ventajas y dificultades del uso de la PDI y su incidencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

### **4.3. Metodología y materiales empleados**

Para llevar a cabo el estudio de campo se utiliza como método de investigación el cuestionario con preguntas cerradas y semicerradas, uno para profesores y otro para alumnos. Se elige este método y no otro, como entrevistas, de las cuales se podría obtener más información, por dos motivos relacionados con un recurso muy valorado pero escaso, el tiempo: por un lado, porque este tipo de cuestionarios facilita el análisis

estadístico de los resultados y, por otro lado, facilita la tarea al encuestado y, dado que el cuestionario se realiza en horario lectivo, permite que los encuestados inviertan el menor tiempo posible en contestar el cuestionario. Se ha intentado contemplar todas las respuestas posibles a cada pregunta y, en los casos que se ha considerado necesario, se ha permitido comentar alguna de las respuestas.

Se ha acudido personalmente al centro mencionado para la ejecución de los cuestionarios. Se han dejado copias del cuestionario de profesores en el departamento de matemáticas para que los profesores los fueran llenando en sus momentos libres a lo largo de la jornada lectiva. En cuanto al cuestionario de los alumnos, se han entregado las copias necesarias a sus profesores de matemáticas para que lo realicen durante la clase.

Los cuestionarios son completamente anónimos y se ha contado con el permiso del jefe del Departamento de Matemáticas y profesores para la ejecución de este cuestionario.

Los cuestionarios se dividen en tres bloques de preguntas: un primer bloque para obtener las características generales de la muestra para poder realizar un mejor análisis de resultados, un segundo bloque relacionado con las dificultades presentes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y un tercer bloque acerca del uso de la PDI como recurso didáctico. Cabe destacar que en el caso del cuestionario de los alumnos no se les pregunta acerca de las dificultades que encuentran en el aprendizaje de funciones y gráficas dado que todavía no se ha impartido esta unidad didáctica en este curso escolar, es por ello que se intentará averiguar si poseen los conocimientos previos necesarios y se intentará averiguar las dificultades a las que se enfrentan a la hora de aprender matemáticas en general.

Se ha realizado la encuesta a los alumnos de dos clases de 2º de la ESO, 50 alumnos, y a los seis profesores del departamento de matemáticas sin tener en cuenta el curso en el que actualmente imparten matemáticas para tener una visión más amplia del uso de la PDI como recurso didáctico. Los cuestionarios se pueden consultar en los Anexos I y II del presente trabajo. A su vez, en los Anexos III y IV se incluyen dos cuadros con la justificación de las preguntas y respuestas seleccionadas para estos cuestionarios.

#### **4.4. Marco contextual**

El centro en el que se ha realizado el cuestionario es, como se ha mencionado antes, el IES Juan Sebastián Elcano, centro público situado a las afueras de la ciudad de Cartagena, provincia de Murcia. A este centro acuden alumnos de diferentes zonas de Cartagena, la mayoría de entornos urbanos y un pequeño porcentaje de zonas

deprimidas y rurales del campo de Cartagena. El nivel sociocultural de los alumnos se puede definir como medio. La mayoría de los padres de los alumnos tienen estudios de secundaria y bachillerato. Al centro acuden un total de 503 alumnos divididos en 23 grupos de 1º a 4º ESO, bachillerato e Iniciación Profesional de fontanería. El claustro de profesores está formado por 67 miembros. El centro dispone de 30 aulas para grupos, así como aulas de informática, música, tecnología, plástica y fontanería. Dispone de laboratorios de biología, física, química y fotografía. Cuenta con dos pabellones polideportivos para Educación Física, un salón de actos, departamentos, despachos, biblioteca y una sala de medios audiovisuales.

En cuanto a los recursos didácticos, las aulas de 1º y 2º ESO disponen de pizarras digitales interactivas conectadas a ordenadores con acceso a internet.

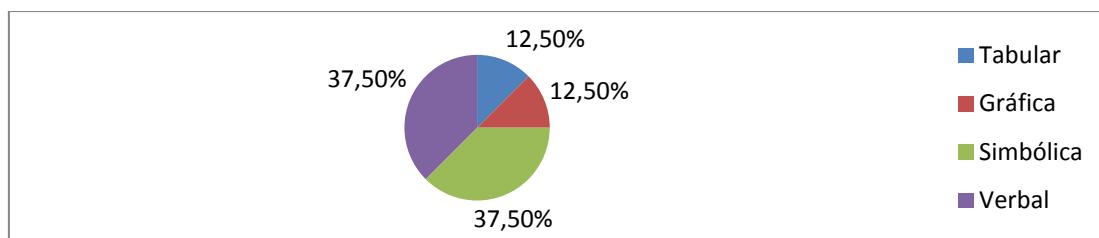
## 4.5. Resultados

La mayoría de los profesores encuestados eran hombres (66,6%). El 50% de los profesores tienen una edad comprendida entre los 36 y 45 años, el 33,3% entre 56 y 65 y el 16,6% entre 46 y 65. En cuanto a la experiencia docente se reparten equitativamente entre 5 y 10 años, 16 y 20 y más de 26 (33,3% respectivamente).

En cuanto a la Pregunta Nº 4 “¿Consideras que los alumnos tienen más dificultades a la hora de aprender funciones y graficas que para el resto de bloques de la asignatura?” la mayoría de los profesores está algo de acuerdo o totalmente de acuerdo (50%).

En cuanto a las repuestas a la Pregunta Nº 5 “A la hora de impartir el bloque de contenidos de funciones y gráficas, ¿has detectado alguna de estas ideas erróneas en los alumnos?” los errores que más se han detectado por parte de los profesores son la incomprendición de que las gráficas muestran una relación entre dos valores y la confusión de intervalos y gradientes con puntos particulares (37,5% respectivamente). Ninguno de los profesores encuestados ha señalado la última opción de respuesta acerca de la fijación en uno o dos factores a la hora de construir una gráfica excluyendo el resto.

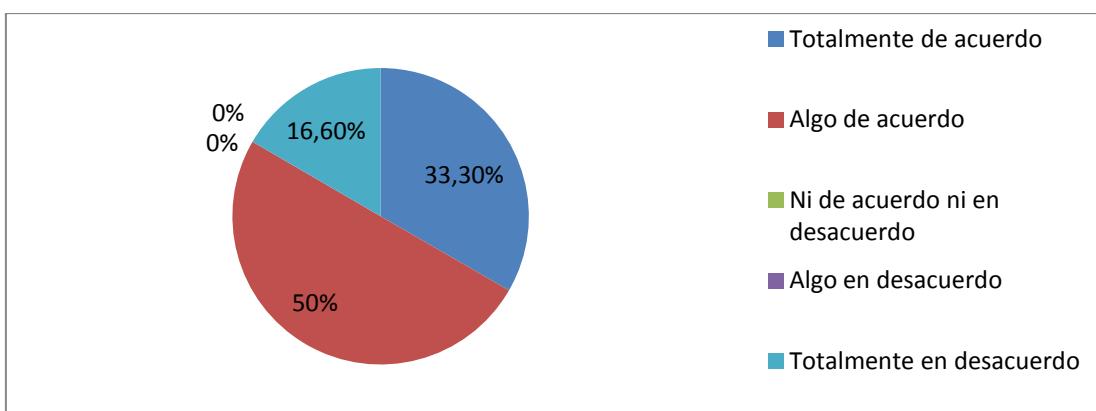
En cuanto al tipo de representación funcional más complicado de aprender por parte de los alumnos (Pregunta Nº 6) se obtienen los siguientes resultados:



Gráfica Nº 2. Dificultad en los tipos de representación funcional. Fuente: Elaboración propia.

En cuanto al tipo de conversión más complicado para los alumnos (Pregunta N° 7) los profesores no se ponen de acuerdo. Para un 50% es la conversión de gráfica a fórmula mientras que para el otro 50% es la de expresión verbal a gráfica.

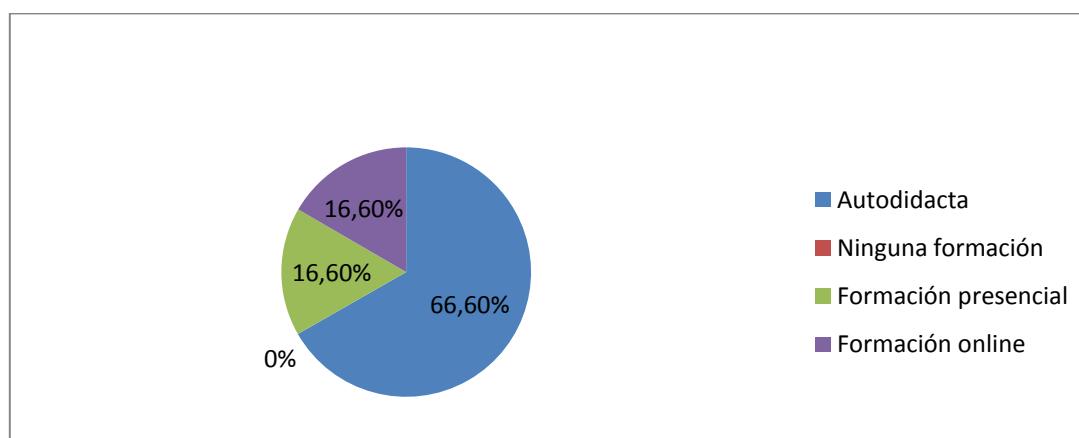
La respuesta a la Pregunta N° 8 “¿Utilizas actividades y problemas contextualizados para introducir el concepto de función en el aula?” es unánime. El 100% de los profesores dice utilizarlos. La mayoría de los profesores piensan que los alumnos son capaces de entender la aplicación de las funciones a la vida real (Pregunta N° 9):



Gráfica N° 3. Capacidad de los alumnos para aplicar funciones. Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, el 100% de los profesores encuestados utiliza alguna TIC fuera de clase (Pregunta N° 10). Los profesores utilizan una media de 2,2 horas al día el ordenador y una media de 1,5 horas lo utilizan con fines didácticos (Preguntas N° 11 y N° 12).

Las respuestas a la pregunta 13 acerca de la formación recibida para el uso de la PDI se muestran en la siguiente gráfica:

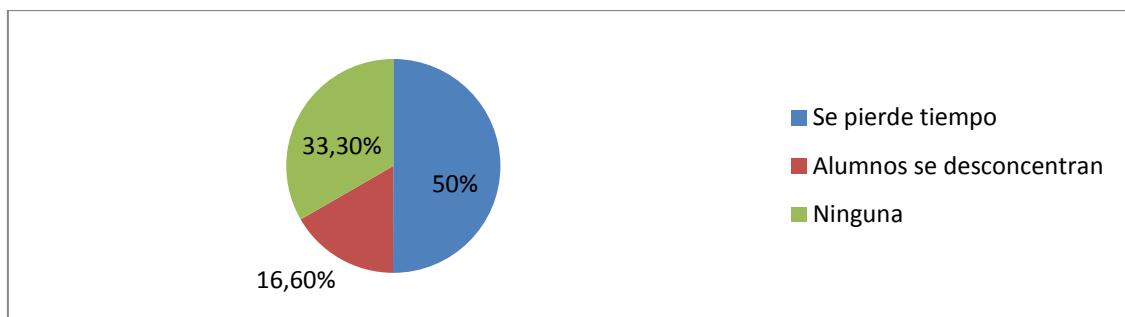


Gráfica N° 4. Formación de los profesores en el uso de la PDI. Fuente: Elaboración propia.

En cuanto al uso que realizan de la PDI en el aula (Pregunta N° 14) el 66,6% de los docentes dice utilizarla a veces y el resto (33,3%) siempre.

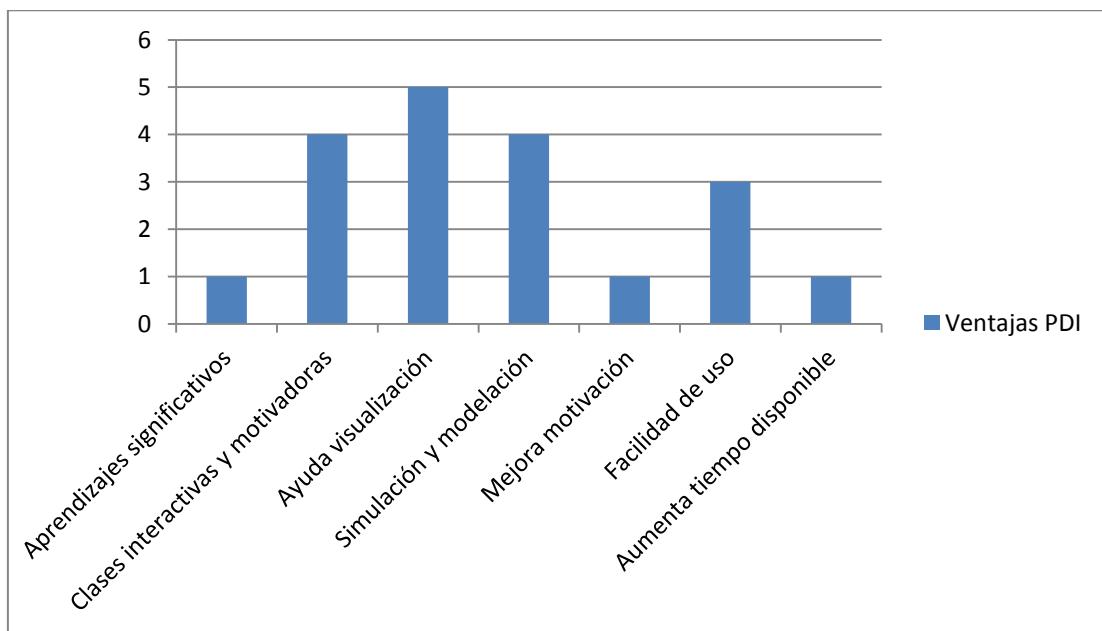
Sólo el 33,3 % de los profesores ha respondido a la Pregunta N° 15 acerca de los motivos por los que no usan siempre la PDI. De estos, el 50 % manifiesta que es por falta de recursos y el otro 50% por falta de tiempo para preparar las clases.

En cuanto a las dificultades que encuentran los docentes en el uso de la PDI (Pregunta N° 16) se obtienen los siguientes resultados:



Gráfica N° 5. Dificultades en el uso de la PDI. Fuente: Elaboración propia.

En la siguiente gráfica se muestran las respuestas dadas por los docentes a la Pregunta N° 17 sobre las ventajas de PDI. Se muestra el número de veces que ha sido seleccionada cada una de las ventajas.

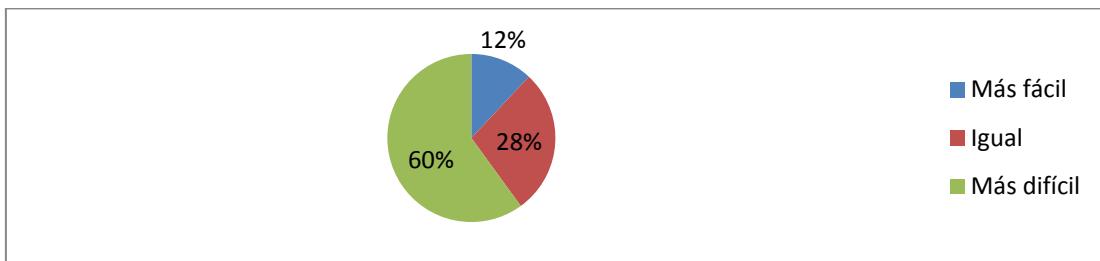


Gráfica N° 6. Ventajas del uso de la PDI según los profesores. Fuente: Elaboración propia.

El 83,3% ha utilizado la PDI para la enseñanza de funciones y gráficas y entre los recursos más utilizados están GeoGebra, Derive, Jclic, ejercicios interactivos, de elaboración propia o gráficas de cualquier información.

En cuanto a los alumnos encuestados el 48% eran chicos y el 52% chicas, todos comprendidos en edades de 13 a 14 años, excepto los dos alumnos repetidores que tienen 16 años.

A la Pregunta N° 4 “¿Qué opinas de la dificultad de la asignatura de matemáticas?”, se obtienen las siguientes respuestas:



*Gráfica N° 7. Dificultad de las matemáticas con respecto al resto de asignaturas. Fuente: Elaboración propia.*

Al 42% de los alumnos encuestados las clases de matemáticas les resultan aburridas mientras que al 58% restante las consideran interesantes (Pregunta N° 5). Sólo un 52% de los alumnos se pregunta para qué sirven las matemáticas (Pregunta N° 6) y el 86% afirma comprender mejor los conceptos en matemáticas si se los explica con problemas o situaciones de la vida real (Pregunta N° 7).

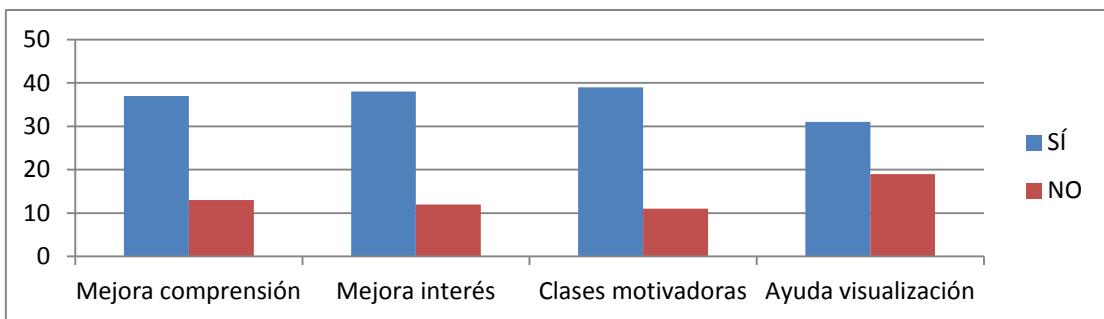
El 46% de los alumnos prefieren realizar actividades en pequeños grupos, el 24% individualmente y el 30% restante prefieren realizarlo en el grupo-clase (Pregunta N° 8). En cuanto a la forma de resolver las actividades, el 38% prefiere resolverlas individualmente en su cuaderno y salir a la pizarra a dar el resultado, el 36% prefiere que sea el profesor el que exponga el resultado mientras que el 26% se inclina por trabajar en grupos y poner en común los resultados.

La mayoría de los alumnos (80%) se considera capaz de representar un punto en los ejes de coordenadas (Pregunta N° 10) y de dar las coordenadas de un punto representado en los ejes de coordenadas (Pregunta N° 11).

El 100% de los alumnos utilizan algún tipo de TIC fuera de clase (Pregunta N° 12). Utilizan el ordenador una media de 1,25 horas diarias (Pregunta N° 13) y una media de 1,20 horas para temas relacionados con el estudio (Pregunta N° 14).

Los profesores de matemáticas de todos los alumnos encuestados utilizan la PDI (Pregunta N° 15). Un 68% de los alumnos manifiesta que su profesor la utiliza siempre y el 38% restante que la utiliza a veces.

En el siguiente gráfico se agrupan las respuestas dadas por los alumnos a las cuatro últimas preguntas del cuestionario relacionadas con las ventajas del uso de la PDI en el aula de matemáticas.



Gráfica Nº 8. Ventajas del uso de la PDI según los alumnos. Fuente: Elaboración propia.

#### 4.6. Análisis de los resultados

En primer lugar, hay que señalar la reducida muestra de profesores que respondieron este cuestionario, por lo que no se pueden extraer conclusiones categóricas sino relativas al contexto escolar donde se ha llevado a cabo esta encuesta. En cuanto a la muestra de la encuesta de alumnos se tiene que especificar también que el hecho de que pertenezcan a dos aulas hace que las conclusiones acerca de la metodología que usa su profesor tampoco sean absolutas. Aun así, este estudio de campo ha permitido extraer conclusiones para poder realizar una propuesta didáctica adecuada ya que, como se expone a continuación, las respuestas corroboran en su mayoría lo estudiado en el marco teórico del presente trabajo.

Valorando los datos referentes a la asignatura de matemáticas, se confirman los datos arrojados por los diferentes informes sobre rendimiento matemático y sobre la concepción que tienen los alumnos de las matemáticas, estos consideran la asignatura más difícil que el resto y, además, según los profesores y como indica PISA 2012, en el bloque de funciones y gráficas presentan más dificultades que en otros contenidos de la asignatura. Los datos confirman también la importancia de la contextualización a la hora de enseñar estos contenidos, expresada por autores como Font (2011), Deulofeu (2001), Font y Ramos (2005), Shell Centre for Mathematical Education (1990) y Planas (2011). Aunque solo la mitad de los alumnos se preguntan para qué sirven las matemáticas la mayoría afirma preferir actividades en contexto, al igual que los profesores, la mayoría dicen utilizarlos para la enseñanza de funciones y gráficas. De hecho la mayoría de los profesores considera que una vez enseñado el bloque funciones y gráficas los alumnos son capaces de ver su aplicación a la vida real. Por otro lado, de los cuatro tipos de representación gráfica presentados por Janvier (1987, citado en Font y Ramos, 2005) los docentes consideran que los alumnos tienen más dificultades en las representaciones simbólica y verbal y menos en la gráfica y tabular. De hecho, los alumnos, antes de iniciar el proceso enseñanza-aprendizaje de funciones en 2º de la ESO, ya tienen ciertos conocimientos previos acerca de la representación de puntos en el eje de coordenadas, lo que sin duda les facilita el trabajo a la hora de aprender la

representación gráfica en el curso mencionado. Los profesores indican que los alumnos tienen menos dificultades en la conversión de la representación tabular a gráfica y de simbólica a gráfica, dato que era de esperar dado que estas dos conversiones forman parte de los objetivos de la asignatura de matemáticas en 2º de la ESO no así el resto de conversiones.

Haciendo una valoración global sobre el uso de la PDI en el aula se puede confirmar lo que se esperaba, tanto alumnos como profesores consideran que el uso de este recurso en general beneficia el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Todos ellos tienen experiencia en el manejo de las TIC fuera del aula y de hecho la mayoría de los profesores las utilizan con fines didácticos y en el caso de los alumnos con fines de aprendizaje. Esto parece influir en el hecho de que todos los profesores dicen utilizar la PDI en el aula, dato que, por su parte, corroboran los alumnos. En cuanto a la formación para el uso de los profesores sorprende que, vista la importancia que tiene tener una formación adecuada para obtener beneficios del uso de la PDI como recurso didáctico (Hernández y Medina, 2012; Díaz, 2007, citado en Gandol et al., 2012), la mayoría de los profesores se considere autodidacta. Las administraciones educativas han instalado pizarras en el centro público donde se realiza la encuesta pero no han dotado al profesorado de la formación suficiente para poder utilizarla correctamente sacándole el máximo partido didáctico. Como dice Herrera (2009) es necesario fomentar la formación básica del profesorado para el uso del PDI, cosa, que a la luz de los datos obtenidos no se ha hecho en este centro. Por otro lado, alumnos y profesores coinciden en que el uso de la PDI hace que las clases sean más motivadoras, despertando el interés de la mayoría de los alumnos que aseguran comprender mejor las matemáticas cuando los profesores hacen uso de esta TIC en clase. Curiosamente, los datos acerca de la mejora de visualización de contenidos utilizando la PDI muestran posiciones contrarias entre alumnos y profesores. Mientras que casi todos los profesores encuestados consideran esto uno de los beneficios más importantes de la PDI no todos los alumnos lo perciben así. Lo mismo ocurre con el aprendizaje significativo a través de la PDI, mientras que la mayoría de los alumnos afirma que el uso de la PDI le ayuda a comprender los contenidos matemáticos los profesores no consideran esto una ventaja reseñable. En cuanto a la enseñanza de funciones y gráficas se demuestra con esta encuesta que los profesores que utilizan la PDI con este fin utilizan la mayoría de los recursos expuestos en el marco teórico de este trabajo y que sirven como base para la propuesta didáctica expuesta a continuación.

## **5. PROPUESTA PRÁCTICA**

### **5.1. Introducción**

Tras haber realizado el marco teórico y el estudio de campo, habiendo analizado la información y utilizando los resultados obtenidos, se presenta esta propuesta didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas a alumnos de 2º de la ESO de la comunidad autónoma de la Región de Murcia, donde se ha realizado esta investigación, a través de la Pizarra Digital Interactiva.

Existen multitud de recursos accesibles que pueden utilizarse para poder enseñar a los alumnos el bloque de contenidos de funciones y gráficas a través de la PDI. Un uso adecuado de estos recursos puede favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de este bloque de contenidos.

La propuesta que se realiza en este trabajo se elabora teniendo en cuenta lo que Carrasco et al. (2008) exponen en su libro sobre la educación personalizada: “Todo método didáctico consiste en proceder de modo ordenado, práctico e inteligente para conseguir los objetivos propuestos” (p. 86). Además, se trata de dar respuesta a las preguntas que Carrasco et al. (2008) se hacen con respecto al uso de los medios tecnológicos, aplicadas a la enseñanza de funciones: con qué finalidad utilizarlos, cómo utilizarlos, qué contenidos y recursos se van a seleccionar y cómo evaluar los conocimientos del alumno. Así que, siguiendo esta línea, la propuesta contiene las siguientes secciones: objetivos, contenidos, metodología y recursos.

### **5.2. Objetivos**

El objetivo principal de esta propuesta didáctica es que el alumno adquiera la competencia matemática a través del aprendizaje de funciones y gráficas utilizando la PDI como recurso didáctico, de tal manera que también pueda adquirir la competencia de tratamiento de la información y competencia digital.

Los objetivos específicos son los que se proponen en el Decreto número 291/2007, de 14 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia para el bloque 5 de contenidos: funciones y gráficas. Estos objetivos vienen recogidos en el Cuadro Nº 7 del presente trabajo.

### **5.3. Contenidos**

Los contenidos que se tienen en cuenta en esta propuesta son los propuestos por el Decreto número 291/2007, de 14 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de la Región de

Murcia, expuestos en el marco teórico y que se recogen en el Cuadro Nº 6 del presente trabajo.

## 5.4. Metodología

Esta propuesta didáctica se basa en una metodología expositiva y participativa. Se pretende con el uso de la PDI hacer una exposición de los contenidos de manera contextualizada y permitir la participación del alumno realizando actividades en grupo e individuales de tal manera que el aprendizaje sea lo más significativo posible. La PDI es el recurso didáctico principal relegando a un segundo plano la pizarra tradicional, todas las sesiones se realizan a través de esta TIC. Para definir la metodología seguiremos el esquema propuesto en el informe Cockcroft acerca de qué debe incluir la enseñanza de las matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas en todos los niveles debe incluir:

- Exposición del profesor,
- Discusión entre el profesor y los alumnos, y entre estos últimos,
- Trabajo práctico adecuado,
- Consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas,
- Resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana
- Realización de trabajos de investigación (Informe Cockcroft, 1982, citado en Shell Centre for Mathematical Education, 1990, p. 10).

### 1) Primera fase: exposición del profesor

Tal como se ha investigado en este trabajo, una buena metodología del uso de la PDI parte de la premisa de que el profesor, al igual que ha de tener una buena formación matemática y pedagógica, también debe tener una formación básica en el uso de la PDI como recurso didáctico para poder sacarle el máximo partido didáctico en la enseñanza de funciones y gráficas. Además, esto le ahorra tiempo a la hora de preparar las clases y le permite seleccionar recursos didácticos adecuados.

Una vez salvado este obstáculo, el primer paso que se ha de llevar a cabo para una buena exposición del contenido es una buena preparación de las sesiones a través de una minuciosa y correcta selección basada en criterios pedagógicos de los recursos que se van a utilizar en la impartición del bloque de funciones y gráficas.

El siguiente paso a seguir es la organización de la sesión. El profesor ha de tener en cuenta los tiempos necesarios para el uso de la PDI: el tiempo que tarda en encenderse tanto la pizarra como el ordenador asociado y el tiempo necesario para la búsqueda y proyección de los recursos seleccionados previamente. Para salvar estos tiempos se propone a los alumnos que, en cada clase, dediquen este tiempo para de manera individual ir apuntando en una hoja de su cuaderno de trabajo diferentes situaciones de la vida diaria que consideran que son susceptibles de ser representadas a través de funciones. De esta manera se superan dos de las dificultades que la mayoría

de los profesores, en el estudio de campo, indicaron que se encontraban al utilizar la PDI, la pérdida de tiempo y la distracción de los alumnos.

El profesor ha de exponer los cuatro tipos de representación funcionales que hay que tener en cuenta a la hora de enseñar las funciones de manera contextualizada, es decir, proponiendo variados contextos en los que las funciones cobran importancia. Se ha visto en el marco teórico de este trabajo la importancia de la contextualización a la hora de exponer contenidos matemáticos para que los alumnos sean capaces de aplicar estos contenidos a la vida diaria.

A través de la PDI el profesor utiliza los recursos didácticos adecuados y previamente seleccionados para hacer una correcta exposición de los contenidos.

## **2) Segunda fase: Discusión entre el profesor y los alumnos, y entre estos últimos**

Esta segunda fase se basa en una metodología participativa. El profesor a través de la PDI presenta diferentes gráficas, fórmulas, tablas o enunciados (las cuatro formas de representación funcionales) de cualquier índole para generar un debate en el aula sobre el hecho de si son representaciones funcionales o no. Esto puede realizarse para averiguar los conocimientos previos de los alumnos sobre las funciones y sus distintas representaciones. A su vez, con este tipo de discusiones se puede introducir a los alumnos en nuevos conceptos como el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos o puntos de corte con los ejes.

Este debate puede realizarse de manera individual, en pequeños grupos o en el grupo-clase. Según el estudio de campo realizado, casi la mitad de los alumnos encuestados prefieren realizar las actividades en pequeños grupos.

## **3) Tercera fase: Trabajo práctico adecuado**

Esta fase consiste en realizar suficientes actividades contextualizadas a través de recursos didácticos adecuados en la PDI que permitan al alumno alcanzar los objetivos propuestos para este bloque. Han de realizarse actividades contextualizadas de introducción, desarrollo y consolidación (Bujosa et al., 2001, citado en Font, 2011).

Al igual que los debates, este trabajo se puede realizar tanto en grupo como de manera individual. En cuanto a la resolución de las actividades propuestas se realiza de diversas maneras: si se ha realizado la actividad de manera individual se escoge a un alumno para que dé la solución utilizando él mismo la PDI. Esta es la manera que prefieren los alumnos encuestados en el estudio de campo. Por otro lado, el profesor puede dar las soluciones de las actividades propuestas él mismo o, si se ha trabajado en grupos, el portavoz de cada grupo sale a la pizarra digital a solucionarlo.

#### **4) Cuarta fase: Consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas**

La manera más adecuada para consolidar los conocimientos adquiridos y que el alumno tenga una visión única del concepto de función y todas sus propiedades es a través de la realización de un mapa conceptual (Font, 2011). Este mapa conceptual se va a ir elaborando en cada clase a medida que se van introduciendo conceptos y propiedades nuevas, de tal manera que al final se obtiene un mapa conceptual completo sobre las funciones, sus representaciones y sus propiedades. El profesor tiene que seleccionar el recurso que considere adecuado para poder hacer el mapa conceptual en la PDI, de tal manera que además de permitir que los alumnos visualicen de una forma atractiva dicho mapa, las distintas fases de construcción del mismo se van guardando en el ordenador para la siguiente sesión.

Por otro lado, para la consolidación y aplicación de las destrezas y conocimientos adquiridos se realizan sesiones en el aula de informática para que los alumnos utilicen ellos mismos alguno de los recursos para la didáctica de funciones que el profesor haya utilizado durante las sesiones de clase. De esta manera el alumno adquiere destrezas tecnológicas a la par que consolida sus conocimientos y destrezas sobre las funciones y gráficas.

#### **5) Quinta fase: Resolución de problemas**

La resolución de problemas es uno de los objetivos más importantes de la asignatura de matemáticas. Hay que dotar a los alumnos de estrategias e instrumentos suficientes para poder solucionar problemas de la vida cotidiana. Se ha visto en el marco teórico de este trabajo que las diferentes representaciones de las funciones, especialmente la representación gráfica, pueden servir de instrumentos para la resolución de problemas. La conversión de una forma de representación a otra son las estrategias a seguir para resolverlos. En 2º de la ESO, hay que hacer especial hincapié a las conversiones entre la representación tabular y la gráfica y la simbólica y la gráfica, objetivo de este bloque de contenidos, y también sobre la conversión de gráfica a fórmula que es la que los profesores encuestados considera que es más difícil de realizar por los alumnos. Esta estrategias permiten realizar el análisis e interpretación de las funciones necesario para solucionar problemas de la vida diaria, fenómenos naturales y del mundo de la información. El profesor ha de hacer una selección de los recursos didácticos adecuados para poder proporcionar estas estrategias de conversión a los alumnos a través de la PDI.

## **6) Sexta fase: Realización de trabajos de investigación**

En la primera fase de exposición por parte del profesor se propone que para aprovechar el tiempo que hay que emplear en poner en marcha la PDI los alumnos escriban en una hoja de su cuaderno diferentes situaciones susceptibles de ser representadas a través de las funciones. En esta última fase, se hacen pequeños grupos de dos o tres alumnos para que pongan en común sus propuestas, elijan dos de estas situaciones y realicen un trabajo de investigación acerca de la validez o no de las propuestas y de las características de las funciones extraídas. De esta manera, el estudiante se ve implicado en su proceso de aprendizaje y puede pensar y aplicar los conocimientos que ha adquirido a situaciones de la vida real, es decir, situaciones contextualizadas.

### **5.5. Recursos y materiales didácticos**

La pizarra digital interactiva es el recurso didáctico principal de esta propuesta. Se utiliza en todas las sesiones correspondientes a la impartición de la unidad didáctica a la que se refiere esta propuesta. A través de la PDI se utilizan multitud de recursos y materiales didácticos online para exponer y afianzar los contenidos del bloque de contenidos de funciones y gráficas.

A continuación se exponen diferentes recursos disponibles para los distintos tipos de actividades que se proponen en esta metodología didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones y gráficas.

- *Conocimientos previos:* actividades de representación de puntos en el eje de coordenadas a través de graficadores de funciones disponibles online como GeoGebra online o fooplot.
- *Refuerzo de lo aprendido* a través de la creación de mapas conceptuales: a través de Microsoft Office PowerPoint.
- *Exposición de contenidos y actividades contextualizadas:* en el siguiente cuadro se muestran diferentes recursos didácticos para exponer y contextualizar los diferentes contenidos del bloque de funciones y gráficas.

**Cuadro Nº 16. Recursos didácticos para los contenidos del bloque de funciones y gráficas.**

Contenidos	Recurso didáctico
Gráficas Cartesianas. Gráfica a partir de una tabla de valores. Grafica a partir de expresión algebraica que relaciona dos variables.	Exposición: Graficadores de funciones online como GeoGebra online o Fooplot. Para actividades: repositorio del proyecto Gauss, Descartes o Jclic
Descripción global y local de fenómenos presentados de forma gráfica.	Exposición: búsqueda de gráficos de situaciones reales a través de Google imágenes. Por ejemplo: temas relacionados con deportes, rendimiento de los jugadores, la bolsa, meteorología... Actividades: Jclic
Estudio gráfico para análisis de una situación: -crecimiento y decrecimiento -continuidad y discontinuidad -corte con los ejes -máximos y mínimos absolutos o relativos	Exposición: GeoGebra online o Fooplot. Actividades: análisis de gráficas recuperadas a través del buscador Google (por ejemplo, una gráfica sobre la subida de precios de los conciertos en los últimos años disponible en <a href="http://revoluciongeek.files.wordpress.com/2009/12/grafico1.jpg">http://revoluciongeek.files.wordpress.com/2009/12/grafico1.jpg</a> )
Proporcionalidad a través de tabla de valores o de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.	Exposición: graficadores como Graphmática permiten representar varias funciones a la vez, de esta forma los alumnos pueden visualizar los cambios que se producen en las funciones a medida que varía su constante de proporcionalidad. Actividades: Proyecto Gauss, Descartes y Jclic
Construcción de tablas y gráficas a partir de la observación y experimentación en casos prácticos.	Exposición y actividades: Búsqueda en Google de datos extraídos de la realidad con los que poder construir una tabla de valores o gráficas. (ej. la temperatura hora a hora que ha hecho en tu ciudad)
Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales y el mundo de la información.	Exposición y Actividades: Jclic
Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.	Exposición y actividades: GeoGebra online, Graphmática, Fooplot, Proyecto Gauss o Jclic en el aula de informática.

*Nota:* Recursos didácticos para los contenidos del bloque de funciones y gráficas. Fuente: Elaboración propia.

## 5.6. Aplicación de la propuesta

En este apartado se muestra la aplicación de la metodología expuesta en esta propuesta en dos sesiones de la unidad didáctica del bloque de funciones y gráficas.

### 5.6.1. Sesión dedicada al estudio gráfico para el análisis de una situación

El objetivo de esta sesión es analizar una situación a través de un estudio gráfico. Para ello se introducen los conceptos de crecimiento y decrecimiento, máximo

y mínimo y puntos de corte con los ejes. La secuenciación de las actividades durante la sesión de 55 minutos es la siguiente:

**Cuadro Nº 17. Secuencia actividades primera sesión.**

Tipo actividad	Desarrollo de actividades	Temporalización
Introducción	Encendido PDI por parte del profesor. Los alumnos proponen situaciones para representarlas con funciones al final de la unidad didáctica.	5 min.
Exposición	Explicación de los conceptos crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimo a través de diferentes gráficas de Google proyectadas en la pizarra.	20 min.
Discusión y refuerzo	Actividad en grupos para reforzar los contenidos expuestos.	15 min.
Trabajo práctico y consolidación	Realización de actividades del proyecto Gauss cuyo enunciado se proyecta en la pizarra digital.	15 min.

*Nota:* Secuencia actividades primera sesión. Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se expone el desarrollo de las actividades secuenciadas para la sesión.

### *1. Introducción (5 min.)*

Al inicio de la clase el profesor enciende la pizarra digital y pide a los alumnos que escriban en una hoja situaciones reales que puedan ser expresadas a través de funciones. Dicha hoja será utilizada en la última sesión para realizar un trabajo de investigación.

### *2. Exposición (20 min.)*

A continuación el profesor busca en Google una gráfica (previamente seleccionada por él) para poder introducir los nuevos conceptos a los alumnos y la proyecta en la PDI. Sobre la gráfica proyectada se exponen los contenidos indicando en la gráfica donde existen intervalos de crecimiento y de decrecimiento, donde están los máximos y los mínimos y donde los puntos de corte. El profesor va explicando, a medida que va señalando estos conceptos, las razones por las que se dan estas propiedades (ej., “la función crece en el intervalo  $(a,b)$  dado que al aumentar la  $x$  al recorrerla de izquierda a derecha, aumenta también el valor de  $y$ ”)

### *3. Discusión y refuerzo (15 min.)*

Se proyecta una nueva gráfica seleccionada previamente por el profesor. Se divide la clase en grupos de 2-3 alumnos y se les pide que anoten en una hoja las características de la gráfica, aplicando y reforzando de esta manera los conceptos expuestos por el profesor en la actividad anterior.

Se pide a los alumnos que elijan un representante de cada grupo que irá saliendo a la PDI a mostrar los resultados obtenidos explicando con corrección los motivos de sus respuestas. Habrá una discusión en el grupo-clase acerca de la validez de los resultados obtenidos por los grupos dirigida por el profesor.

#### *4. Trabajo práctico y consolidación (10 min.)*

Se realizan actividades de desarrollo a través de la página web del Proyecto Gauss, proyectando actividades de crecimiento de funciones correspondientes al segundo curso de la ESO.

#### **5.6.2. Sesión dedicada a la construcción de tablas y gráficas a partir de la observación y experimentación en casos prácticos**

El objetivo de esta sesión es obtener datos de la realidad para poder aplicarlos a los conocimientos sobre los distintos tipos de representaciones de las funciones que han ido adquiriendo los alumnos y así, a partir de estos datos, poder construir tablas y gráficos. Para ello se introducen los conceptos de tabla de valores y la conversión de tabla de valores a gráfico cartesiano. La secuenciación de las actividades durante la sesión de 55 minutos es la siguiente:

**Cuadro Nº 18. Secuencia actividades segunda sesión.**

Tipo actividad	Desarrollo de actividades	Temporalización
Introducción	Encendido PDI y proponer situaciones para representarlas con funciones al final de la unidad didáctica	5 min.
Exposición	Búsqueda en internet de datos reales para formar una tabla de valores que relacione dos variables y a partir de ella una gráfica de la función obtenida.	20 min.
Discusión y refuerzo	Actividad en grupos para reforzar los contenidos expuestos.	15 min.
Trabajo práctico y consolidación	Realización de actividades de JClic aplicadas a situaciones reales.	15 min.

*Nota:* Secuencia actividades segunda sesión. Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se expone el desarrollo de las actividades secuenciadas para la sesión.

#### *1. Introducción (5 min.)*

Al inicio de la clase el profesor enciende la pizarra digital y pide a los alumnos que escriban en una hoja situaciones reales que puedan ser expresadas a través de funciones. Dicha hoja será utilizada en la última sesión para realizar un trabajo de investigación.

*2. Exposición (20 min.)*

Para la realización de esta actividad se proyectará en la PDI la página web de la Agencia Estatal de Meteorología (AEMET, s.f.). En la sección acerca de la temperatura se pueden obtener valores de la temperatura que ha hecho a lo largo del día en cualquier localidad y la que hará en las próximas horas. Se pide a los alumnos que vayan anotando estos datos en sus cuadernos. Anotarán pares de datos tales como (11 de la mañana, 15 grados). Es labor del profesor explicarles como elaborar una tabla de valores a partir de esos datos y, a su vez, hacer una gráfica de la función a partir de esa tabla de valores utilizando el graficador de funciones GeoGebra online.

*3. Discusión y refuerzo (15 min.)*

Una vez obtenida la gráfica se dividirá la clase en grupos de 3-4 personas de tal forma que discutirán las características de la gráfica obtenida reforzando así los conocimientos adquiridos sobre las propiedades de las funciones en sesiones anteriores.

*4. Trabajo práctico y consolidación (10 min.)*

Se realizan actividades de desarrollo a través de los recursos sobre funciones de Jelic.

## **6. APORTACIONES DEL TRABAJO**

La principal aportación de este trabajo es mostrar los beneficios del uso de recursos didácticos a través de la Pizarra Digital Interactiva en la enseñanza de funciones y gráficas en un aula de 2º de la ESO a través de una propuesta didáctica que hace uso de esta TIC, dado que esta contribuye a la adquisición por parte de los alumnos de la competencia matemática a la par que la adquisición de la competencia de tratamiento de la información y competencia digital.

En el desarrollo de este trabajo de fin de máster se ha investigado acerca de los aspectos necesarios para crear una propuesta adecuada al contexto educativo en el que se desarrolla. En el marco teórico se han expuesto los motivos por los cuales es necesario introducir las TIC en el aula, en concreto de la PDI, ya que desde la legislación educativa se insta a los docentes a utilizar este tipo de medios. También el porqué de la enseñanza de funciones a través de actividades y problemas contextualizados.

En la propuesta, a través de una selección previa de recursos didácticos para la enseñanza de cada uno de los contenidos del bloque funciones y gráficas de manera contextualizada, se da respuesta a dos de las principales necesidades del proceso de enseñanza-aprendizaje de este bloque a través de la PDI encontradas en este trabajo: salvar la falta de tiempo por parte de los docentes para hacer una selección previa de recursos y la necesidad de exponer los contenidos de funciones y gráficas de una manera contextualizada para que el alumno pueda aplicar sus conocimientos a situaciones de la vida real. Además esta propuesta metodológica trata de dar al docente una nueva forma de enseñar funciones y gráficas de una manera atractiva para el alumno.

## **7. DISCUSIÓN**

En la enseñanza de funciones y gráficas se ha podido constatar en este trabajo la necesidad de enseñar de una manera contextualizada para que el alumno pueda aplicar los conocimientos adquiridos a la vida real y sea capaz de analizar situaciones reales a través de estos conocimientos (Font, 2011, Deulofeu, 2001, Font y Ramos, 2005, Shell Centre for Mathematical Education, 1990 y Planas, 2011). No cabe duda de que un alumno se implicará más en el aprendizaje si es capaz de comprender el contexto en el que se le presentan los contenidos. Sin embargo, aunque la enseñanza contextualizada favorece el proceso-aprendizaje de las funciones, es necesario mostrar a los alumnos cómo descontextualizar los objetos matemáticos para poder construir el significado de función (Godino et al., 2006) y así poder aplicar ese objeto de nuevo a contextos reales (Font y Godino, 2006).

El uso de la Pizarra Digital Interactiva para la enseñanza de las matemáticas tiene muchos beneficios. Pere Marqués (2005, citado por Herrera, 2009) se pregunta por qué los profesores no van a querer utilizar las TIC una vez conocen los beneficios para su labor docente y poseen la formación suficiente para utilizarlas. Pues bien, como se ha visto en el estudio de campo, no todos los profesores del IES Juan Sebastián Elcano poseen ese tipo de formación. En este centro público se han instalado pizarras digitales en los primeros cursos de la ESO pero los profesores no poseen formación específica, al menos de manera oficial, a través de cursos de formación ya sean presenciales u online. Tras haber realizado este trabajo, se puede decir que no tiene sentido invertir en pizarras digitales si no se invierte en formación (Gallego et al., 2009) dado que sin esta formación los profesores no serán capaces de obtener todos los beneficios didácticos del uso de la PDI.

## **8. CONCLUSIONES**

Este trabajo se ha realizado cumpliendo todos los objetivos que se marcaron al principio del mismo. A continuación se exponen las conclusiones que se han obtenido.

En relación al primer objetivo marcado, *investigar sobre las dificultades y obstáculos a los que se enfrentan los alumnos a la hora de aprender matemáticas, en concreto en el bloque de funciones y gráficas, en el curso de 2º de la ESO*, en el desarrollo del marco teórico se han estudiado los problemas que encuentran los alumnos en el aprendizaje de matemáticas. Se ha observado la influencia que tiene en el proceso de enseñanza-aprendizaje la concepción de los alumnos sobre la asignatura dado que estos consideran que las matemáticas son uno de los conocimientos más difíciles de aprender. Para completar esta investigación, en el estudio de campo se ha corroborado esta concepción por parte de los alumnos, la mayoría considera que la asignatura conlleva más dificultad que el resto de asignaturas del currículum. Por su parte, los profesores han confirmado las ideas erróneas que los alumnos tienen sobre los contenidos de funciones y gráficas, examinadas previamente en el marco teórico, y las dificultades que tienen los alumnos a la hora de aprender los cuatro tipos de representación funcional y la conversión entre ellas, básicas para el aprendizaje de este bloque de contenidos y también expuestas en el marco teórico. Por tanto, podemos afirmar que este objetivo se ha cumplido.

En cuanto al segundo objetivo específico, *exponer y examinar diferentes recursos didácticos disponibles para la enseñanza de las funciones y gráficas para el segundo curso de la educación secundaria obligatoria*, se ha hecho necesario investigar primero sobre la didáctica de las funciones para poder hacer una selección de recursos adecuados a su enseñanza-aprendizaje. De esta manera, se ha constatado la importancia de presentar los contenidos de este bloque de manera contextualizada para la mayor comprensión de los alumnos, y, a su vez, la necesidad de que los alumnos conozcan las representaciones funcionales y las conversiones entre ellos. Teniendo en cuenta estas investigaciones, en el marco teórico se ha hecho una selección de recursos para los distintos tipos de actividades propuestos en el aula, concretando en la propuesta didáctica cuáles de los recursos seleccionados son adecuados para cada contenido del bloque de funciones y graficas. Se han seleccionado graficadores de funciones, buscadores de internet, páginas web o repositorios de actividades interactivas que se han descrito en el marco teórico. Por otro lado, los profesores, en el estudio de campo, han corroborado la validez de los recursos seleccionados en el marco teórico cuando se les ha preguntado cuáles son los que ellos utilizan para la enseñanza de funciones y gráficas. Podemos afirmar por tanto la consecución de este objetivo.

Para la consecución del tercer objetivo marcado, *analizar las dificultades a las que se enfrentan los alumnos de 2º de ESO de IES Juan Sebastián Elcano en la asignatura de matemáticas así como su interés por el uso de la pizarra digital interactiva para el aprendizaje de las matemáticas*, se ha realizado un estudio de campo a través de un cuestionario a los alumnos de 2º de la ESO del instituto mencionado en el que la mayoría de los alumnos han corroborado que la asignatura de matemáticas les resulta más difícil que el resto de asignaturas. Por otro lado, se ha constatado el interés que muestran los alumnos del centro mencionado en el uso de la PDI dado que la mayoría ha considerado que su uso mejora su interés en la asignatura, su comprensión de los contenidos matemáticos, les permite visualizar los conceptos más difíciles y hace que las clases sean más divertidas y motivadoras. Podemos por ello confirmar que se ha cumplido este objetivo específico.

Para *averiguar la disposición y opinión de diferentes profesores de matemáticas del instituto mencionado sobre el uso de recursos a través de la pizarra digital interactiva como metodología didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas*, último objetivo específico propuesto, primero se ha considerado necesario realizar un análisis en el marco teórico de los beneficios y limitaciones en el uso de la PDI así como las exigencias necesarias para su uso. Partiendo de este punto, se ha realizado una encuesta a los profesores de matemáticas del centro para conocer su opinión acerca del uso de esta TIC. Todos ellos se muestran a favor del uso de la PDI, de hecho todos ellos utilizan este recurso en sus clases, aunque sorprende que la mayoría de ellos se proclame autodidacta en cuanto a la formación que poseen para su uso. La mayoría no ha recibido formación de manera oficial y quizás sea por esto por lo que parte de ellos piensa que pierden tiempo en clase en su manejo. Por otro lado, los docentes constatan las ventajas ofrecidas por la PDI para la mejora de proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones y gráficas. De esta manera se cumple el último objetivo específico marcado.

Una vez logrados todos los objetivos específicos marcados se obtienen los fundamentos teóricos y prácticos necesarios para poder realizar una propuesta didáctica que refleje los resultados obtenidos. Esto es, una propuesta que permita la contextualización de actividades y problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de funciones y gráficas. El objetivo principal de este trabajo de fin de máster era *realizar una propuesta didáctica para la enseñanza de funciones y gráficas a alumnos de 2º de la ESO utilizando recursos didácticos a través de la Pizarra Digital Interactiva*. Podemos por tanto concluir que el objetivo principal de este trabajo se ha logrado.

## **9. LIMITACIONES DEL TRABAJO**

Una vez terminado este trabajo de fin de máster cumpliendo con éxito el objetivo principal conviene mostrar ciertas limitaciones que hay que tener en cuenta.

Debido a la naturaleza de este trabajo y, por lo tanto, al tiempo disponible para realizarlo se ha tenido que centrar la propuesta en el bloque de contenidos de funciones y gráficas. La metodología de la propuesta didáctica que se ha presentado se puede aplicar a otros contenidos de la asignatura de matemáticas de 2º de la ESO. El uso de recursos didácticos a través de la PDI puede favorecer la enseñanza de otros bloques, para ello es necesario investigar acerca de los aspectos curriculares de estos bloques así como sobre los recursos disponibles adecuados para su enseñanza.

La propuesta no se ha podido extender a otros cursos de la ESO. Por un lado, esta propuesta tendría que haber abarcado el primer ciclo de la ESO para intentar paliar las limitaciones que los alumnos arrastran de cursos anteriores en relación a los contenidos tratados. Por otro lado, no se ha podido ampliar el trabajo al segundo ciclo de la ESO por falta de recursos. El centro donde se ha realizado el estudio no posee pizarras digitales en estos cursos.

El estudio de campo se ha tenido que realizar sobre una muestra muy pequeña por no tener acceso y contacto permanente en el centro educativo. Por ello, las conclusiones obtenidas a partir de él no pueden extrapolarse a toda la realidad educativa. Además, el estudio de campo realizado sobre los alumnos no ha podido arrojar datos sobre su concepción acerca de la enseñanza-aprendizaje de funciones y gráficas debido a que en el momento en el que se ha realizado este trabajo todavía no han estudiado esta unidad didáctica.

Finalmente, la propuesta no ha podido aplicarse en un contexto educativo real por lo que su utilidad didáctica para la mejora del proceso-aprendizaje de las funciones y gráficas no se ha podido constatar.

## **10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS**

En este apartado se proponen nuevas líneas de investigación que puedan ampliar o completar la investigación realizada en este trabajo de fin de máster.

La primera de ellas es la de aplicar la propuesta didáctica a un entorno real, hacer un seguimiento de los alumnos, un estudio sobre la respuesta que dan a esta metodología y, de esta manera, poder realizar mejoras para ajustarla a sus necesidades y poder obtener unas conclusiones más concretas acerca del uso de la PDI para la enseñanza de funciones y gráficas en 2º de la ESO.

Otra de las líneas de investigación que derivan de este trabajo es la ampliación de la propuesta a otros cursos de ESO. Para ello se haría necesario investigar acerca de los aspectos del currículum en cada nivel, conocer cuáles son los contenidos del bloque de funciones y gráficas de cada curso e investigar sobre la didáctica de las funciones en cada nivel, y así poder seleccionar los recursos didácticos adecuados para cada curso. De esta forma podría aplicarse la propuesta a lo largo de toda la secundaria y los resultados serían más concluyentes.

Por otro lado, se hace necesario investigar acerca de la validez de esta propuesta para otros bloques de contenidos de la asignatura de matemáticas en el 2º curso de la ESO. Para ello habría que estudiar los aspectos curriculares y didácticos de los bloques elegidos.

Finalmente, en este trabajo se ha realizado una propuesta didáctica que utiliza recursos didácticos ya existentes para la enseñanza de funciones. Una línea de investigación que se puede abordar a partir de esta propuesta sería la de realizar una propuesta didáctica en la que el profesor elaborara sus propios materiales didácticos para la enseñanza de funciones a través de la PDI. Para ello se haría necesario investigar sobre cómo elaborar recursos didácticos para utilizar a través de la PDI que verdaderamente sirvan para mejorar el proceso-aprendizaje de los contenidos que se quieren enseñar.

## 11. BIBLIOGRAFÍA

### 11.1. Referencias bibliográficas

- AEMET (s.f.). [www.aemet.es](http://www.aemet.es). [En línea]. Disponible en <http://www.aemet.es/es/portada>
- Carrasco, J.B., Javaloyes, J. J. y Calderero, J. F. (2008). *Cómo personalizar la educación. Una solución de futuro* (2<sup>a</sup> ed.). Madrid: Narcea.
- Corbalán, F. (2011). Los recursos que utilizar. En Goñi, Jesús María (coord.). *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 53-74). Barcelona: Editorial Graó.
- Decreto número 291/2007, de 14 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia. Boletín oficial de la Región de Murcia (24 de septiembre de 2007), núm. 221, pp. 27179-27303. Disponible en <http://www.borm.es/borm/documento?obj=anu&id=325185>
- Del Rincón, T. O. (2002). Algunos apuntes sobre el uso de gráficas cartesianas. *Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 155-164). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2729339.pdf>
- Del Río Sánchez, J. (1990). Concepciones erróneas en matemáticas. Revisión y evaluación de las investigaciones. *Educar*, 17, 205-219. Recuperado de <http://ddd.uab.cat/pub/educar/0211819Xn17p205.pdf>
- Deulofeu, J. (2003). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación. *Conferencias y ponencias de las XJAEM. Ponencia 4.* (pp. 367-377). Recuperado de [http://www.quadernsdigitals.net/datos/hereroteca/r\\_40/nr\\_458/a\\_6226/6226.pdf](http://www.quadernsdigitals.net/datos/hereroteca/r_40/nr_458/a_6226/6226.pdf)
- Escaño, J. y Gil de la Serna, M. (2001). Motivar a los alumnos y enseñarles a motivarse. *Revista Aula. De innovación educativa*, 101. Recuperado el 1 de abril de 2014 de <http://www.grao.com/revistas/aula/101-motivacion-escolar/motivar-a-los-alumnos-y-ensenarles-a-motivarse>
- Ferrer, S. (s.f.). La pizarra digital. Recuperado de <http://www.ardilladigital.com/DOCUMENTOS/TECNOLOGIA%20EDUCATIVA/TICs/T9%20PIZARRA%20DIGITAL/09%20LA%20PIZARRA%20DIGITAL.pdf>
- Font, V. (2011). Funciones. En Goñi, J. M. (coord.). *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar* (pp. 145-186). Barcelona: Editorial Graó.

- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educacao Matemática Pesquisa*, 1(8), 67-98. Recuperado de <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/538/430>
- Font, V. y Ramos, A.B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338, 309-345. Recuperado de [http://www.revistaeducacion.mec.es/re338/re338\\_19.pdf](http://www.revistaeducacion.mec.es/re338/re338_19.pdf)
- Gallego, D., Cacheiro, M. L. y Dulac, J. (2009). La pizarra digital interactiva como recurso docente. *Revista Electrónica Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 10 (2), 127-145. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3041712&orden=221800&info=link>
- Gandol, F., Carrillo E. y Prats, M. A. (2012). Potencialidades y limitaciones de la pizarra digital interactiva. Una revisión crítica de la literatura. *Pixel-Bit: Revista de medios y educación*, 40, 171-183. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3805804>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para maestros. En Godino, J.D. (Dir.) (2003) *Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 5-123). Granada: Universidad de Granada. Recuperado de <http://www.matesup.ugal.cl/modelos/articulos/fundamentos.pdf>
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252. Recuperado de [http://funes.uniandes.edu.co/1288/1/Godino2006Analisis\\_SEIEM\\_36.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1288/1/Godino2006Analisis_SEIEM_36.pdf)
- Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas. Anexo al artículo, Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Reserchesen Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284. Recuperado de [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones\\_semioticas/anexo2\\_enfoque%20ontosemi%F3tico%20cognici%F3n.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones_semioticas/anexo2_enfoque%20ontosemi%F3tico%20cognici%F3n.pdf)
- Goñi, J. M. (coord.) (2011a). *Didáctica de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Graó.
- Goñi, J. M. (coord.) (2011b). *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar*. Barcelona: Editorial Graó.

- Goñi, J.M. (coord.) (2011c). *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas*. Barcelona: Editorial Graó.
- Goñi, J.M. y López-Goñi, I. (2011). La programación como labor del docente de matemáticas. En Goñi, J.M. (coord.). *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 111-136). Barcelona: Editorial Graó.
- Hernández, E. y Medina, F. (2012). La Pizarra Digital Interactiva y el programa GeoGebra como herramientas que facilitan la atención a la diversidad en el aula de Matemáticas. En Navarro, J., Fernández, M. T., Soto, F.J. y Tortosa F. (Coords.). *Respuestas flexibles en contextos educativos diversos*. Murcia: Consejería de Educación, Formación y Empleo. Disponible en: <http://diversidad.murciaeduca.es/publicaciones/dea2012/index.html>
- Herrera, M. A. N. (2009). Pizarra digital interactiva en aulas de matemáticas. *Números*, 72, 121-127. Recuperado de [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/72/Enlared\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/72/Enlared_01.pdf)
- Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A. y Palacios Picos, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación*, 334, 75-95. Recuperado el 1 de abril de 2014 de [http://www.revistaeducacion.mec.es/re334/re334\\_06.pdf](http://www.revistaeducacion.mec.es/re334/re334_06.pdf)
- IEA (2012). *TIMSS 2011. Marcos de la evaluación*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Recuperado de [http://www.iea.nl/fileadmin/user\\_upload/Publications/Electronic\\_versions/TIMSS\\_2011\\_Frameworks\\_Spanish.pdf](http://www.iea.nl/fileadmin/user_upload/Publications/Electronic_versions/TIMSS_2011_Frameworks_Spanish.pdf)
- IEA (2013). *PIRLS-TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. Informe español (Volumen I)*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pirlstimss2011vol1-1.pdf?documentId=0901e72b81825be4>
- IES Juan Sebastián Elcano (2012). *Programación General Anual*. Cartagena: Autor INTEF (s.f.). [www.ite.educacion.es](http://www.ite.educacion.es). [En línea]. Disponible en: <http://www.ite.educacion.es/>
- Lacasta, E. (2002). Funcionamiento didáctico de los gráficos de las funciones. *Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 135-154. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2729336>
- Lamas Rojas, H. (2008). Aprendizaje autorregulado, motivación y rendimiento académico. *Liber.*, 14(14), 15-20. Recuperado de

[http://www.scielo.org.pe/scielo.php?pid=S1729-48272008000100003&script=sci\\_arttext](http://www.scielo.org.pe/scielo.php?pid=S1729-48272008000100003&script=sci_arttext)

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado (4 de mayo de 2006), núm. 106, pp. 17158-17207. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>

Marquès, P. (2006). La pizarra digital en el aula de clase. Barcelona: Grupo Edebé. Disponible en: <http://lapizarradigital.es/wp-content/manual-pizarra-digital.pdf>

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2011). *Informe general de diagnóstico 2010: Informe de resultados.* Madrid. Recuperado de <https://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-2010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e>

Montero, I., Huertas, J.A. (1997). Motivación en el Aula. En J.A. Huertas (Editor), *Motivación. Querer Aprender* (pp. 291-315). Argentina: Aique Grupo Editor. Recuperado de [http://mateandoconlaciencia.zonalibre.org/TA\\_Huertas\\_Unidad\\_4.pdf](http://mateandoconlaciencia.zonalibre.org/TA_Huertas_Unidad_4.pdf)

Núñez, J. C., González-Pienda, J. A., Álvarez, L., González, P., González-Pumariega, S., Roces, C., Castejón, L., Solano, P., Bernardo, A., García, D., da Silva, E. H., Rosário, P. y Rodrigues, L. S. (2005). Las actitudes hacia las matemáticas: perspectiva evolutiva. In *Actas do VIII Congreso Galaico-Portugués de Psicopedagogía* (pp. 2389-2396). Recuperado de <http://www.educacion.udc.es/grupos/gipdae/documentos/congreso/viicongreso/pdfs/291.pdf>

OCDE (2013). *PISA 2012. Informe español (Volumen I).* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012lineavolumen.pdf?documentId=0901e72b81786310>

Planas, N. (2011). Buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. En Goñi, Jesús María (coord.). *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 57-160). Barcelona: Editorial Graó.

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (5 enero 2007), núm. 5, pp. 677-773. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf>

Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* Bilbao: Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Valls, J. (2011). Aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Goñi, Jesús María (coord.). *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 137-166). Barcelona: Editorial Graó.

## 11.2. Bibliografía complementaria

- Azcárate C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10(2), 135-149. Recuperado de <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/matias-carmen.pdf>
- García-Valcárcel, A. y Domingo, A. (2011). Integración de las TIC en la práctica escolar y selección de recursos en dos áreas clave: Lengua y Matemáticas. En Roig Vila, R. y Laneve, C. (Eds.). *La práctica educativa en la sociedad de la información. Innovación a través de la investigación. La pratica educativa nella società dell'informazione. L'innovazione attraverso la ricerca* (pp. 129-144). Alcoy-Brescia: Marfil & La Scuola Editrice. Recuperado de [http://www.edutic.ua.es/wp-content/uploads/2012/06/La-practica-educativa\\_129\\_144-CAP12.pdf](http://www.edutic.ua.es/wp-content/uploads/2012/06/La-practica-educativa_129_144-CAP12.pdf)
- Gómez-Chacón, I.M. (2005). Motivar a los alumnos de secundaria para hacer matemáticas. *Ministerio de Educación y Ciencia. Matemáticas: Pisa en la práctica*. Recuperado de <http://www.mat.ucm.es/~imgomezc/almacen/pisa-motivar>
- Gómez-Chacón, I.M. (2007). Sistema de creencias sobre las matemáticas en alumnos de secundaria. *Revista Complutense de Educación*, 18 (2), 125-143. Recuperado de <http://revistas.ucm.es/index.php/RCEDE/article/view/RCED0707220125A>
- González-Pienda, J. A. (2003). El rendimiento escolar. Un análisis de las variables que lo condicionan. *Revista galego-portuguesa de psicoloxía e educación*, 7 (8), 247-258. Recuperado de [http://ruc.udc.es/bitstream/2183/6952/1/RGP\\_9-17.pdf](http://ruc.udc.es/bitstream/2183/6952/1/RGP_9-17.pdf)
- Martín-Laborda, R. (2005). *Las nuevas tecnologías en la educación*. Madrid: Fundación Auna. Disponible en <http://estudiantes.iems.edu.mx/cired/docs/ae/pp/fl/aepflp11pdf01.pdf>
- Moya, A. M. (2009, noviembre). Las nuevas Tecnologías en la educación. *Innovación y experiencias educativas*, 24. Consultado el 20 de abril, 2014. Disponible en <http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/artigo/1-2008-12-07-14-20-40.pdf>

## **12. ANEXOS**

### **12.1. Anexo I: Cuestionario Alumnos**

#### **CUESTIONARIO ALUMNOS**

Este cuestionario forma parte de un estudio de campo que se está llevando a cabo para realizar un Trabajo de Fin de Máster sobre la didáctica de las funciones y gráficas utilizando la Pizarra Digital Interactiva (PDI).

**Por favor, elige tu respuesta y marca con una X la casilla que corresponda.**

**1. Edad:**

**2. Sexo:**

Hombre

Mujer

**3. ¿Estás repitiendo curso actualmente?**

Sí                                    No

**4. ¿Qué opinas de la dificultad de la asignatura de matemáticas?**

Más fácil que el resto

Igual que el resto

Más difícil que el resto

**5. Las clases de matemáticas te resultan...**

aburridas                                    interesantes

**6. Cuando estudias matemáticas, sueles preguntarte ¿para qué sirve esto?**

Sí                                    No

**7. ¿Consideras que comprendes mejor los conceptos en matemáticas si te los explican con problemas o situaciones de la vida real?**

Sí                                    No

**8. En clase de matemáticas, ¿cómo prefieres realizar las actividades propuestas por el profesor?**

Individualmente

En pequeños grupos

Toda la clase

**9. En clase de matemáticas, ¿cómo prefieres resolver las actividades propuestas por el profesor?**

Resolverlas en tu cuaderno y que el profesor ponga el resultado en la pizarra

Resolverlas en tu cuaderno y salir a la pizarra a dar el resultado

Resolverlas en grupos y poner en común los resultados

**10. ¿Sabrías representar un punto dado ( $x,y$ ) en los ejes de coordenadas?**

Sí

No

**11. ¿Sabrías dar las coordenadas de un punto representado en los ejes de coordenadas?**

Sí

No

## **12. ¿Utilizas alguna de la siguientes TIC fuera de clase?**

Teléfono móvil con acceso a internet

Tablet

Ordenador

Otros:

### **13. ¿Cuántas horas diarias utilizas el ordenador?**

**Respuesta:**

**14. ¿Cuántas horas lo utilizas para temas relacionados con el estudio?**

**• Respuesta:**

**15. ¿Utiliza tu profesor de matemáticas la pizarra digital interactiva en sus clases?**

Sí, siempre

No, nunca

Sí, a veces

**16. ¿Consideras que el uso de la pizarra digital interactiva mejora o podría mejorar tu comprensión de los contenidos matemáticos?**

Sí

□ No

**17. ¿Consideras que el uso de la pizarra digital interactiva mejora o podría mejorar tu interés en la asignatura?**

Sí

□ No

**18. ¿Consideras que el uso de la pizarra digital interactiva hace que las clases sean más divertidas y motivadoras?**

Sí

□ No

**19. ¿Consideras que el uso de la pizarra digital interactiva te permite visualizar los conceptos más difíciles?**

Sí

□ No

## **12.2. Anexo II: Cuestionario Profesores**

### **CUESTIONARIO PROFESORES**

**Este cuestionario forma parte de un estudio de campo que se está llevando a cabo para realizar un Trabajo de Fin de Máster sobre la didáctica de las funciones y gráficas utilizando la Pizarra Digital Interactiva (PDI).**

**Por favor, elige tu respuesta y marca con una X la casilla que corresponda. Puedes comentar tus respuestas en las preguntas que así te lo indican.**

**1. Edad:**

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Menos de 25 | <input type="checkbox"/> 46-55     |
| <input type="checkbox"/> 26-35       | <input type="checkbox"/> 56-65     |
| <input type="checkbox"/> 36-45       | <input type="checkbox"/> Más de 66 |

**2. Sexo:**

- |                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Hombre | <input type="checkbox"/> Mujer |
|---------------------------------|--------------------------------|

**3. Años de experiencia docente:**

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Menos de 5 | <input type="checkbox"/> 16-20     |
| <input type="checkbox"/> 5-10       | <input type="checkbox"/> 21-25     |
| <input type="checkbox"/> 11-15      | <input type="checkbox"/> Más de 26 |

**4. ¿Consideras que los alumnos tienen más dificultades a la hora de aprender el bloque de contenidos de funciones y gráficas que para el resto de bloques de la asignatura?**

- |   |
|---|
| <input type="checkbox"/> Totalmente de acuerdo          |
| <input type="checkbox"/> Algo de acuerdo                |
| <input type="checkbox"/> Ni de acuerdo ni en desacuerdo |
| <input type="checkbox"/> Algo en desacuerdo             |
| <input type="checkbox"/> Totalmente en desacuerdo       |

**5. A la hora de impartir el bloque de contenidos de funciones y graficas, ¿has detectado alguna de estas ideas erróneas en los alumnos? (Puedes seleccionar más de una opción)**

- |   |
|---|
| <input type="checkbox"/> Identificación de una gráfica con el dibujo de una situación.                        |
| <input type="checkbox"/> Incomprensión de que las gráficas muestran una relación entre dos valores            |
| <input type="checkbox"/> Confusión entre intervalos y gradientes confundiéndolos con puntos particulares      |
| <input type="checkbox"/> Fijación en uno o dos factores y exclusión de los restantes al construir una gráfica |
- Comente:

**6. ¿Qué tipo de representación funcional consideras que los alumnos tienen más dificultad para aprender?**

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> Expresión simbólica | <input type="checkbox"/> Tabular          |
| <input type="checkbox"/> Expresión gráfica   | <input type="checkbox"/> Expresión verbal |

**7. ¿Qué tipo de conversión es la más complicada para ellos?**

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> Fórmula a gráfica | <input type="checkbox"/> Tabla a gráfica          |
| <input type="checkbox"/> Gráfica a fórmula | <input type="checkbox"/> Expresión verbal a tabla |

Expresión verbal a gráfica

**8. ¿Utilizas actividades y problemas contextualizados para introducir el concepto de función en el aula?**

Sí

No

**9. Una vez terminado el proceso enseñanza-aprendizaje de funciones y gráficas, ¿consideras que los alumnos son capaces de entender su aplicación a la vida real?**

Totalmente de acuerdo

Algo de acuerdo

Ni de acuerdo ni en desacuerdo

Algo en desacuerdo

Totalmente en desacuerdo

Comente:

**10. ¿Utilizas alguna de la siguientes TIC fuera de clase?**

Teléfono móvil con acceso a internet

Tablet

Ordenador

Otros:

**11. ¿Cuántas horas diarias utilizas el ordenador fuera del centro?**

Respuesta:

**12. ¿Cuántas horas diarias utilizas el ordenador con fines didácticos fuera del centro?**

Respuesta:

**13. ¿Has recibido algún tipo de formación para el uso de la PDI?**

No, soy autodidacta

Sí, curso de formación presencial

No, no sé utilizarla

Sí, curso de formación online

Comente:

**14. ¿Sueles utilizar la PDI en el aula?**

Sí, siempre

No, nunca

Sí, a veces

**15. Si la respuesta es no o a veces, ¿cuál es el motivo?**

Falta de formación

Falta de recursos

Falta de tiempo para preparar las clases

Falta de experiencia suficiente

Otros:

**16. ¿A qué dificultades te enfrentas cuando utilizas la PDI en clase?**

Se pierde tiempo en su manejo

Los alumnos se desconcentran

Otros:

**17. ¿Cuál de estas ventajas consideras que puede aportar el uso de la PDI para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? Puedes marcar más de una.**

Permite aprendizajes más significativos

Las clases son más interactivas y motivadoras

Ayuda a la visualización en la enseñanza de conceptos difíciles

- Permite utilizar herramientas informáticas para simulación y modelación
- Mejora la motivación de los alumnos
- Facilidad de uso
- Aumenta la disponibilidad de tiempo

**18. ¿Has utilizado la PDI para la enseñanza de funciones y gráficas?**

- Sí
- No

**19. Si es así, por favor, nombra alguno de los recursos didácticos que has utilizado.**

## 12.3. Anexo III

**Cuadro N° 19. Justificación de las preguntas del cuestionario para los docentes.**

BLOQUE	PREGUNTAS Y RESPUESTAS	JUSTIFICACIÓN
DATOS MUESTRALES	Edad Sexo Años de experiencia	Se hacen estas preguntas para obtener datos característicos de la muestra.
FUNCIONES Y GRÁFICAS	¿Consideras que los alumnos tienen más dificultades a la hora de aprender el bloque de contenidos de funciones gráficas que para el resto de bloques de la asignatura? <input type="checkbox"/> De acuerdo <input type="checkbox"/> Algo de acuerdo <input type="checkbox"/> Ni de acuerdo ni en desacuerdo <input type="checkbox"/> Algo en desacuerdo <input type="checkbox"/> En desacuerdo	Se realiza esta pregunta para conocer su opinión sobre la dificultad de este bloque.
	A la hora de impartir el bloque de contenidos de funciones y graficas, ¿has detectado alguna de estas ideas erróneas en los alumnos? (Puedes seleccionar más de una opción) <input type="checkbox"/> Identificación de una gráfica con el dibujo de una situación. <input type="checkbox"/> Incomprensión de que las gráficas muestran una relación entre dos valores <input type="checkbox"/> Confusión entre intervalos y gradientes confundiéndolos con puntos particulares <input type="checkbox"/> Fijación en uno o dos factores y exclusión de los restantes al construir una gráfica	Conocer datos sobre las ideas erróneas de los alumnos y si se corresponden con las investigadas en el marco teórico.
	¿Qué tipo de representación funcional consideras que los alumnos tienen más dificultad para aprender? <input type="checkbox"/> Expresión simbólica <input type="checkbox"/> Expresión gráfica <input type="checkbox"/> Tabular <input type="checkbox"/> Expresión verbal	Se obtiene información acerca de la dificultad que tienen los alumnos en los cuatro tipos de representación propuestos en el marco teórico.
	¿Qué tipo de conversión es la más complicada para ellos? <input type="checkbox"/> Fórmula a gráfica <input type="checkbox"/> Gráfica a fórmula <input type="checkbox"/> Tabla a gráfica <input type="checkbox"/> Expresión verbal a tabla <input type="checkbox"/> Expresión verbal a gráfica	Conocer cuáles son las conversiones más difíciles para los alumnos, como respuestas se ofrecen las conversiones más comunes.
	¿Utilizas actividades y problemas contextualizados para introducir el concepto de función en el aula? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No	Se pretende conocer si los profesores utilizan la metodología realista contextualizada para presentar el bloque de funciones.
	Una vez terminado el proceso enseñanza-aprendizaje de funciones y gráficas, ¿consideras que los alumnos son capaces de entender su aplicación a la vida real? <input type="checkbox"/> De acuerdo <input type="checkbox"/> Algo de acuerdo <input type="checkbox"/> Ni de acuerdo ni en desacuerdo <input type="checkbox"/> Algo en desacuerdo <input type="checkbox"/> En desacuerdo	Conocer la capacidad de los alumnos para aplicar los conocimientos a la vida real
PDI	¿Utilizas alguna de las siguientes TIC fuera de clase? <input type="checkbox"/> Teléfono móvil con acceso a internet <input type="checkbox"/> Tablet <input type="checkbox"/> Ordenador Otros:	Obtener datos sobre el uso que realizan de las TIC en otros ámbitos
	¿Cuántas horas diarias utilizas el ordenador fuera del centro?	Conocer el manejo del ordenador
	¿Cuántas horas con fines didácticos?	Conocer si dedica tiempo al ordenador para temas relacionados con la enseñanza y ver si esto se corresponde con el uso de recursos

		con la PDI
	<p>¿Has recibido algún tipo de formación para el uso de la PDI?</p> <p><input type="checkbox"/> No, soy autodidacta <input type="checkbox"/> No, no sé utilizarla <input type="checkbox"/> Sí, curso de formación presencial <input type="checkbox"/> Sí, curso de formación online</p>	Conocer si ha recibido formación para relacionarlo con el uso que hace de ella
	<p>¿Sueles utilizar la PDI en el aula?</p> <p><input type="checkbox"/> Sí, siempre <input type="checkbox"/> Sí, a veces <input type="checkbox"/> No, nunca</p>	Necesario para luego analizar el por qué.
	<p>Si la respuesta es no, ¿cuál es el motivo?</p> <p><input type="checkbox"/> Falta de formación <input type="checkbox"/> Falta de tiempo para preparar las clases <input type="checkbox"/> Falta de recursos <input type="checkbox"/> Falta de experiencia suficiente</p> <p>Otros:</p> <p>¿A qué dificultades te enfrentas cuando utilizas la PDI en clase?</p> <p><input type="checkbox"/> Se pierde tiempo en su manejo <input type="checkbox"/> Los alumnos se desconcentran Otros:</p>	Conocer si las causas son similares a las que se han obtenido a través del marco teórico y para obtener información de cara a la propuesta didáctica.
	<p>¿Cuál de estas ventajas consideras que puede aportar el uso de la PDI para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas? Puedes marcar más de una.</p> <p><input type="checkbox"/> Permite aprendizajes más significativos  <input type="checkbox"/> Las clases son más interactivas y motivadoras  <input type="checkbox"/> Ayuda a la visualización en la enseñanza de conceptos difíciles  <input type="checkbox"/> Permite utilizar herramientas informáticas para simulación y modelación  <input type="checkbox"/> Mejora la motivación de los alumnos  <input type="checkbox"/> Facilidad de uso  <input type="checkbox"/> Aumenta la disponibilidad de tiempo</p>	Conocer la opinión de los docentes sobre las ventajas más significativas del uso de la PDI para la enseñanza de matemáticas.
	<p>¿Has utilizado la PDI para la enseñanza de funciones y gráficas?</p> <p><input type="checkbox"/> Sí  <input type="checkbox"/> No</p>	Necesario para obtener información para la propuesta.
	<p>Si es así, por favor, enumera los recursos didácticos que has utilizado.</p>	Pregunta abierta para obtener información para la propuesta.

Nota: Justificación de las preguntas del cuestionario para los docentes. Fuente: Elaboración propia.

## 12.4. Anexo IV

**Cuadro Nº 20. Justificación de las preguntas del cuestionario para los alumnos.**

BLOQUE	PREGUNTAS Y RESPUESTAS	JUSTIFICACIÓN
DATOS MUESTRALES	Edad	Se hacen estas preguntas para obtener datos característicos de la muestra.
	Sexo	
	¿Has repetido curso?	
FUNCIONES Y GRÁFICAS	¿Qué opinas de la dificultad de la asignatura de matemáticas? <input type="checkbox"/> Más fácil que el resto <input type="checkbox"/> Igual que el resto <input type="checkbox"/> Más difícil que el resto Las clases de matemáticas te resultan... <input type="checkbox"/> aburridas <input type="checkbox"/> interesantes	Conocer la actitud que tienen hacia la asignatura de matemáticas
	Cuando estudias matemáticas, sueles preguntarte ¿para qué sirve esto? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No	Saber si son capaces de aplicar los conocimientos que adquieren a la vida real.
	¿Consideras que comprendes mejor los conceptos en matemáticas si te los explican con problemas o situaciones de la vida real? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No	Conocer su opinión sobre el uso de problemas contextualizados.
	En clase de matemáticas, ¿cómo prefieres realizar las actividades propuestas por el profesor? <input type="checkbox"/> Individualmente <input type="checkbox"/> En pequeños grupos <input type="checkbox"/> Toda la clase	Conocer cuál es la metodología que prefieren los alumnos de cara al desarrollo de la propuesta didáctica.
	En clase de matemáticas, ¿cómo prefieres resolver las actividades propuestas por el profesor? <input type="checkbox"/> Resolverlas en tu cuaderno y que el profesor ponga el resultado en la pizarra <input type="checkbox"/> Resolverlas en tu cuaderno y salir a la pizarra a dar el resultado <input type="checkbox"/> Resolverlas en grupos y poner en común los resultados	Conocer cuál es la metodología que prefieren los alumnos de cara al desarrollo de la propuesta didáctica.
	¿Sabrías representar un punto dado ( $x, y$ ) en el eje de coordenadas? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No	Conocer si poseen los conocimientos previos dados por el departamento de matemáticas del instituto necesarios para impartir el bloque de funciones y gráficas.
	¿Sabrías dar las coordenadas de un punto representado en el eje de coordenadas? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No	
PDI	¿Utilizas alguna de las siguientes TIC fuera de clase? <input type="checkbox"/> Teléfono móvil con acceso a internet <input type="checkbox"/> Tablet <input type="checkbox"/> Ordenador Otros:	Obtener datos sobre el uso que realizan de las TIC en otros ámbitos.
	¿Cuántas horas diarias utilizas el ordenador?	Conocer el manejo del ordenador.
	¿Cuántas horas lo utilizas para temas relacionados con el estudio?	Conocer si dedican tiempo de ordenador para estudiar.
	¿Utiliza tu profesor de matemáticas la PDI en sus clases? <input type="checkbox"/> Sí, siempre <input type="checkbox"/> Sí, a veces <input type="checkbox"/> No, nunca	Dato necesario para obtener información sobre su opinión de la PDI.
	¿Consideras que el uso de la PDI mejora o podría mejorar tu comprensión de los contenidos matemáticos? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No	Conocer este dato para corroborar lo investigado en el marco teórico.
	¿Consideras que el uso de la PDI mejora o podría mejorar tu interés en la asignatura?	Conocer este dato para corroborar lo

	<input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No ¿Consideras que el uso de la PDI hace que las clases sean más divertidas y motivadoras? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No	investigado en el marco teórico.
	¿Consideras que el uso de la PDI te permite visualizar los conceptos más difíciles? <input type="checkbox"/> Sí <input type="checkbox"/> No	Conocer si consideran esta ventaja de la PDI y comparar con las respuestas de los profesores

*Nota:* Justificación de las preguntas y respuestas del cuestionario para los docentes. Fuente: Elaboración propia.