



Universidad Internacional de La Rioja

Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

# Uso de *GeoGebra* en la enseñanza de geometría analítica en 4º de la ESO

**Presentado por:** Marta Ezquerro García

**Línea de investigación:** Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)

**Director/a:** Pedro Viñuela

**Ciudad:** Galdakao (Vizcaya)

**Fecha:** 5 de junio de 2014

## RESUMEN

El presente Trabajo Fin de Máster plantea una metodología para la enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica en 4º de la ESO mediante el software matemático *GeoGebra* y consta de tres partes. En el marco teórico, se ha investigado, en primer lugar, sobre la situación de las TIC en la legislación educativa, concretamente en la asignatura de matemáticas. En segundo lugar, se ha estudiado la posición que ocupa la geometría analítica en la enseñanza de las matemáticas y la importancia de dicho bloque. Además, se han analizado los problemas más comunes que surgen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de dicha unidad didáctica. Por último, se ha realizado una investigación sobre diferentes programas matemáticos para enseñar geometría analítica y se ha terminado por hacer un análisis de la herramienta de *GeoGebra*. A continuación, se ha llevado a cabo un estudio de campo en el Instituto Etxebarri BHI situado en la localidad de Etxebarri en Vizcaya. Dicho estudio se ha basado en realizar una encuesta a los profesores de matemáticas del centro para ver el nivel de formación de los mismos respecto a las TIC en general y *GeoGebra* concretamente y para averiguar cuáles son las dificultades que ellos y los alumnos encuentran en la enseñanza de geometría analítica. Por otro lado, tras varias sesiones impartidas mediante *GeoGebra*, se ha realizado otro cuestionario a los alumnos sobre la metodología empleada en las sesiones y su grado de satisfacción. Finalmente, se ha elaborado una propuesta didáctica con una metodología adecuada para la impartición del bloque de geometría analítica con ayuda del software de estudio. La conclusión principal que se ha obtenido en dicha investigación es que la utilización de *GeoGebra* en la enseñanza de geometría analítica favorece el aprendizaje significativo de las matemáticas y estimula el interés por parte de los alumnos.

*Palabras clave:* Software, *GeoGebra*, TIC, metodología, aprendizaje significativo.

## ABSTRACT

The following Master's Thesis presents a methodology for the education and learning process in the field of analytic geometry for 4th year ESO (Compulsory Secondary Education) students using the *GeoGebra* mathematics software. This thesis consists of three main parts. First of all, in the theoretical framework, I have studied the state of the ICT in the education legislation and more specifically in the mathematics subject. Secondly, I have examined the position of analytic geometry in mathematics education and the importance of this block in the whole subject. In addition, I have analyzed the most common problems that arise in the teaching-learning process of this teaching unit. Finally, I have conducted research on various mathematics softwares used to teach analytic geometry, including a complete analysis on the tool *GeoGebra*. Then, I carried out a field study in the Etxebarri BHI high school located in the town of Etxebarri in Vizcaya. On the one hand, this study consisted of conducting a survey of the familiarity the teachers showed with the ICT tools in general and more specifically with *GeoGebra* and finding out which were the major difficulties they and the students found when teaching or learning analytic geometry. On the other hand, after giving several lectures using *GeoGebra*, the students were asked about the methodology used in the sessions and their satisfaction. Finally, I developed an educational proposal with a methodology for teaching of the analytic geometry block using the studio software. The most remarkable conclusion obtained in this research is that the use of *GeoGebra* in the teaching of analytic geometry favors meaningful learning of mathematics and offers a significant interest from the students.

*Key words:* Software, *GeoGebra*, ICT, methodology, meaningful learning.

# ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN .....	5
1.1. PRESENTACIÓN .....	5
1.2. JUSTIFICACIÓN .....	6
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	8
2.1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA .....	8
2.2. OBJETIVOS .....	9
2.3. METODOLOGÍA .....	9
2.4. JUSTIFICACIÓN DE LA BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA .....	10
3. MARCO TEÓRICO .....	12
3.1. SITUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN ESPAÑA.....	12
3.2. COMPETENCIA MATEMÁTICA .....	15
3.2.1. Enseñanza de la competencia matemática.....	16
3.3. GEOMETRÍA ANALÍTICA .....	18
3.3.1. Contenidos del bloque de geometría analítica en 4º de la ESO.....	19
3.3.2. Problemas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica .....	20
3.4. LAS TIC EN LA LEGISLACIÓN EDUCATIVA.....	23
3.5. SOFTWARE MATEMÁTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA ..	24
3.5.1. Cabri .....	26
3.5.2. Wiris.....	26
3.5.3. GeoGebra.....	26
4. ESTUDIO DE CAMPO .....	29
4.1. JUSTIFICACIÓN .....	29
4.2. OBJETIVOS DEL ESTUDIO DE CAMPO .....	29
4.3. METODOLOGÍA Y MATERIALES EMPLEADOS.....	30
4.4. MARCO CONTEXTUAL DEL ESTUDIO DE CAMPO .....	31
4.5. RESULTADOS Y ANÁLISIS .....	32
4.5.1. Resultados obtenidos del cuestionario dirigido a los profesores .....	32
4.5.2. Resultados derivados de la actividad práctica.....	40
4.5.3. Resultados obtenidos del cuestionario de los alumnos .....	41
4.6. INTERPRETACIÓN GLOBAL DE LOS RESULTADOS.....	44
5. PROPUESTA DIDÁCTICA .....	46
5.1. INTRODUCCIÓN.....	46
5.2. OBJETIVOS .....	46
5.2.1. Objetivos Curriculares .....	47
5.2.2. Objetivos Didácticos .....	48
5.3. COMPETENCIAS .....	48
5.4. METODOLOGÍA .....	49
5.4.1. Acciones a realizar en cada sesión .....	50
5.4.2. Actividades prácticas .....	54
5.4.3. Ejemplo de actividad .....	56
6. APORTACIONES DEL TRABAJO.....	58
7. DISCUSIÓN.....	59
8. CONCLUSIONES .....	60
9. LIMITACIONES DEL TRABAJO .....	62
10. LINEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS .....	63
11. BIBLIOGRAFÍA .....	64
11.1. REFERENCIAS.....	64
11.2. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA.....	67
ANEXOS .....	68
ANEXO I.....	69
Cuestionario profesores .....	69
ANEXO II .....	77
Detalle de la actividad práctica llevada a cabo con <i>GeoGebra</i> .....	77
ANEXO III.....	89
Cuestionario Alumnos.....	89

## ÍNDICE DE GRÁFICAS

<i>Gráfico N° 1.</i> Capacidades para algunas TIC .....	35
<i>Gráfico N° 2.</i> Opinión general sobre las TIC. ....	36
<i>Gráfico N° 3.</i> Opinión sobre las TIC. ....	37
<i>Gráfico N° 4.</i> Conocimientos de <i>GeoGebra</i> . ....	37
<i>Gráfico N° 5.</i> Formación sobre <i>GeoGebra</i> . ....	38
<i>Gráfico N° 6.</i> Importancia de las áreas de las matemáticas en 4º de la ESO. ....	39
<i>Gráfico N° 7.</i> Gustos en matemáticas. ....	42
<i>Gráfico N° 8.</i> Uso de TIC en el aula. ....	43

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla N° 1. Contenidos del bloque de geometría analítica. ....	20
Tabla N° 2. Áreas y variables de los cuestionarios a profesores. ....	33
Tabla N° 3. Práctica con <i>GeoGebra</i> .....	40
Tabla N° 4. Temporización y tipo de acciones a realizar por el profesor en cada sesión. ....	49
Tabla N° 5. Páginas web interesantes para trabajar con <i>GeoGebra</i> . ....	54

## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura N° 1.</i> Países participantes en PISA. ....	12
<i>Figura N° 2.</i> Comunidades participantes en PISA. ....	13
<i>Figura N° 3.</i> Porcentaje de alumnos de 15 años con nivel 1 o <1 en escala PISA. ....	13
<i>Figura N° 4.</i> Evolución de los resultados globales en las tres competencias de PISA. ....	14
<i>Figura N° 5.</i> Resultados PISA 2012 por comunidades. ....	15
<i>Figura N° 6.</i> Diagrama Piramidal de recursos didácticos. ....	17
<i>Figura N° 7.</i> Clasificación del material de matemáticas agrupado por temas en la web de Manuel Sada. ....	55
<i>Figura N° 8.</i> Actividades para trabajar geometría analítica en 4º de la ESO. ....	56
<i>Figura N° 9.</i> Captura de pantalla de ejercicio resuelto con <i>GeoGebra</i> . ....	57
<i>Figura N° 10.</i> Captura de pantalla de variante del ejercicio resuelto con <i>GeoGebra</i> . ....	57
<i>Figura N° 11.</i> Operaciones con vectores. ....	78
<i>Figura N° 12.</i> Sesión 1, Actividad 1. ....	79
<i>Figura N° 13.</i> Sesión 1, Actividad 2. ....	79
<i>Figura N° 14.</i> Sesión 1, Actividad 3. ....	80
<i>Figura N° 15.</i> Sesión 1, Actividad 2. ....	80
<i>Figura N° 16.</i> Punto medio del vector. ....	81
<i>Figura N° 17.</i> Alineación de tres puntos. ....	81
<i>Figura N° 18.</i> Sesión 2, Actividad 2. ....	82
<i>Figura N° 19.</i> Sesión 2, Actividad 2. ....	82
<i>Figura N° 20.</i> Distancia entre dos puntos. ....	83
<i>Figura N° 21.</i> Sesión 3, Actividad 1. ....	84
<i>Figura N° 22.</i> Sesión 3, Actividad 2. ....	84
<i>Figura N° 23.</i> Sesión 3, Actividad 3. ....	85
<i>Figura N° 24.</i> Sesión 4, Actividad 1. ....	87
<i>Figura N° 25.</i> Sesión 4, Actividad 2. ....	87
<i>Figura N° 26.</i> Sesión 4, actividad 3. ....	88

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. PRESENTACIÓN

En el día a día de un profesor se puede observar cómo las ventajas que las TIC ofrecen como recurso educativo no están siendo eficientemente aprovechadas. Por este motivo se pretende hacer una aportación para poder ofrecer una mayor información sobre cómo aprovechar de forma óptima estos recursos.

En estos últimos años, la sociedad ha sufrido un gran cambio debido a la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Esto ha venido acompañado de grandes cambios en la forma de vivir de las personas en diferentes ámbitos.

En el ámbito educativo es importante saber aprovechar los nuevos recursos que nos proporcionan las TIC y no quedarse atrás en los avances que los cambios de la sociedad nos está ofreciendo. Sin embargo, el uso que se les da mayormente a estos avances está limitado al ocio y el entretenimiento, sin prestar apenas atención al gran potencial que las TIC poseen para el aprendizaje.

Los jóvenes, además, se sienten muy atraídos y tienen fácil acceso a ellas, por lo que es importante enseñarles cómo sacar el máximo provecho de las mismas también en el ámbito educativo. Sin embargo, no basta con enseñarles a cómo utilizar un ordenador o el funcionamiento de un programa concreto, sino que se debe mostrar el modo adecuado en el que deben ser usados de tal manera que ofrezcan nuevas y mejores metodologías de aprendizaje para poder permitir al alumno alcanzar los objetivos deseados.

Además, para poder trabajar con las TIC en el aula, es imprescindible que los docentes tengan una actitud positiva respecto a las mismas y se muestren abiertos a los cambios constantes que estos nuevos recursos suponen. También es importante tener en cuenta que no es suficiente con formar al cuerpo docente, sino que también hay que saber trasladar al alumno los conocimientos de tal manera que porten beneficios a su aprendizaje.

En el área de las matemáticas, existen varios software o aplicaciones informáticas que permiten trabajar esta asignatura de manera más eficaz. Este trabajo se ha centrado concretamente en *GeoGebra*, un programa informático diseñado para la enseñanza de las matemáticas el cual está considerado uno de los mejores y de mayor actualidad. Su uso es muy sencillo y dinámico para que los alumnos puedan utilizarlos sin mayores complicaciones.

La web oficial de *GeoGebra* define la herramienta como:

Un software libre, de matemática para educación en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraica general y simbólica, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. (Hohemwarter, 2014, párr. 2).

## **1.2. JUSTIFICACIÓN**

En los últimos años, la competencia matemática ha adquirido gran relevancia a nivel europeo y se considera imprescindible para el desarrollo personal. Asimismo, de acuerdo con las conclusiones del consejo sobre preparar a los jóvenes para el siglo XXI en agenda para la cooperación europea en las escuelas:

La competencia numérica, matemática y digital, así como la capacidad para comprender las ciencias, resultan vitales para la participación plena en la sociedad del conocimiento y para la competitividad de las economías modernas. Las primeras experiencias durante la infancia son decisivas y, sin embargo, los estudiantes experimentan con frecuencia ansiedad respecto a las matemáticas y, en ocasiones, con tal de evitar esta asignatura, alteran sus decisiones sobre su formación futura. Diversos métodos de enseñanza pueden contribuir a mejorar las actitudes, a incrementar los niveles de rendimiento y a abrir nuevas posibilidades de aprendizaje (Comisión Europea, 2008, p. 425).

Sin embargo, dos principales estudios de evaluación de las matemáticas como son el estudio PISA (Program for International Student Assessment, Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes) y TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study, Tendencias en Matemáticas y Ciencias) dejan ver cómo el rendimiento en el estudio de matemáticas ha disminuido a lo largo de los años.

Los resultados obtenidos por los estudiantes en PISA se ven influenciados por múltiples factores. Nuestro país tiene un sistema educativo homogéneo respecto a los recursos educativos y metodología. Es importante concienciarse de que en los centros educativos no solo hay alumnos buenos, regulares y malos, sino que hay alumnos con diferentes dificultades en el aprendizaje y con necesidades diferentes, por ello es importante ofrecer una metodología que se fundamente en una diversidad, ya que no todos los alumnos necesitan lo mismo ni aprender de la misma forma o con los mismos métodos de aprendizaje.

Es evidente que aún queda mucho por mejorar y el camino que queda por recorrer es muy largo. Cambios en la metodología de la educación que se están dando a día de hoy como el uso de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje, están siendo beneficiosos a la hora de adquirir conocimientos de manera dinámica y visual para los

alumnos ya que el aprendizaje de una competencia está muy alejado de un aprendizaje mecánico y permite comprender la complejidad de los procesos de aprendizaje. Enseñar competencias implica utilizar formas de enseñanza consistentes en dar respuesta a situaciones de la vida real.

Sin embargo, las TIC por sí solas pueden resultar algo inútiles en cuanto a educación se refiere, por lo que hay que ir más allá y ver las opciones que nos ofrecen y verlas como herramientas que nos puedan motivar a aprender cada vez más de una manera más eficiente.

El uso del software matemático *GeoGebra* puede favorecer este tipo de aprendizaje favoreciendo los ambientes y procesos de aprendizaje tomando en cuenta las circunstancias y los procesos de aprendizaje. Como bien lo afirma Moya (2009), las nuevas tecnologías representan oportunidades beneficiosas para llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje, para diversificar sus modos de ejecución y adecuar el conocimiento con la realidad, con los intereses y propósitos de los alumnos. Del mismo modo, Ferrer (2012) menciona también que para lograr una escuela de éxito y sin fracaso escolar, las TIC pueden colaborar de manera muy efectiva. *GeoGebra* es sin duda una de las mejores opciones para poder desarrollar este tipo de aprendizaje en el aula de matemáticas. Este software libre permite al profesor ofrecer un aprendizaje más personalizado y significativo que se adapte a las necesidades de los alumnos.

En el ámbito de la geometría analítica, nos permite poder plantear ejercicios dinámicos en el aula y conseguir que los alumnos puedan adquirir los conocimientos de manera visual.

## **2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **2.1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA**

Las TIC ocupan un papel hoy en día en nuestra sociedad, por lo tanto, su integración en el sistema educativo es imprescindible. Además, es importante saber formar personas competentes en este ámbito y capaces de aprovechar las ventajas que las TIC pueden ofrecer para poder trasladarlas a las necesidades de cada uno.

Mediante este trabajo, se pretende ofrecer una metodología sobre el uso de una de estas novedades tecnológicas, en este caso el software *GeoGebra*, concretamente en el aula de matemáticas para la enseñanza-aprendizaje de la unidad de geometría analítica en 4º de la ESO.

Como se ha podido observar anteriormente en el informe PISA, la asignatura de matemáticas es una de las que más dificultades presenta entre los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria y la que más se suspende. Por lo tanto, es importante poner una solución a este problema y tratar de mejorar la situación actual.

Muchos profesores aunque están dispuestos a tratar de modificar sus metodologías y adaptarse a la nueva sociedad, y aun disponiendo de medios para hacerlo, no saben cómo ni cuándo hacer uso de las TIC. Por ello, es importante formar a los docentes constantemente y concienciar a los alumnos sobre un uso educativo de las TIC tanto en el aula como fuera del mismo.

Para comenzar, se debe tener claro que la geometría analítica estudia las figuras geométricas utilizando un sistema de coordenadas y resuelve los problemas geométricos por métodos algebraicos, donde las coordenadas se representan por grupos numéricos y las figuras por ecuaciones. Dicha temática es fundamental para el estudio y desarrollo de nuevos materiales que nos facilitan la vida diaria, razón por la cual esta unidad siempre influye en la vida de todo ser humano.

La importancia sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica también ha sido reconocida por autores como Hernández y Villalba (2001) quienes la definen como un punto de encuentro en una matemática teórica y una matemática como fuente de modelos. Sin embargo, la geometría analítica aún no ha llegado a alcanzar el lugar que merece en el currículo de las matemáticas y por lo tanto, tampoco se han logrado introducir los cambios propicios para permitir un aprendizaje significativo de dicho temario a los estudiantes.

Mediante esta investigación lo que se pretende es valorar el uso del software *GeoGebra* en el área de la geometría analítica y estudiar las ventajas que éste presenta en la enseñanza y el aprendizaje de dicha materia.

## 2.2. OBJETIVOS

El objetivo principal del presente trabajo es:

Presentar y fundamentar una metodología didáctica para enseñar el bloque de geometría analítica a alumnos de 3º de la ESO, basada en el software *GeoGebra*.

Los objetivos específicos planteados en este Trabajo Fin de Máster fueron los siguientes:

- Realizar encuestas a profesores de matemáticas del Instituto Etxebarri BHI sobre los conocimientos de las TIC y más concretamente *GeoGebra* y conocer el uso que dan en el aula.
- Investigar los problemas que mayormente se les presentan en la enseñanza de la geometría analítica en 4º de la ESO.
- Analizar las ventajas y desventajas que ofrece el software *GeoGebra* para trabajar la geometría analítica en 4º de la ESO.
- Realizar encuestas a los alumnos del Instituto Etxebarri BHI en Vizcaya sobre el interés, la motivación y la actitud de los mismos ante las matemáticas aprendidas con *GeoGebra*.

## 2.3. METODOLOGÍA

Para poder alcanzar los objetivos propuestos en el apartado anterior, se ha seguido un proceso metodológico concreto basándose en la combinación de un estudio bibliográfico con un posterior estudio de campo. Además se ha realizado una propuesta metodológica sobre *GeoGebra* en un aula de matemáticas de 4º de la ESO sobre geometría analítica.

El estudio bibliográfico se ha llevado a cabo consultando buscadores especializados (Dialnet) y la Biblioteca Virtual de la UNIR. También se han consultado obras de autores relevantes, revistas especializadas y referencias bibliográficas de los textos consultados. Se ha procurado, además, que la información consultada provenga de organismos oficiales o de autores expertos en la materia, para que sea un estudio fiable y de calidad. La bibliografía consultada debe estar además actualizada teniendo en cuenta los cambios que se dan a diario.

El cuerpo de esta investigación consta, por lo tanto, de tres fases claramente diferenciadas: estudio bibliográfico, estudio de campo y finalmente, una propuesta bibliográfica.

- 1) *Primera Fase: Investigación bibliográfica preliminar:* En esta fase se ha realizado una investigación bibliográfica para desarrollar el marco teórico del

trabajo. Se ha hecho una breve referencia a la competencia matemática y se ha investigado sobre la situación de las matemáticas en la legislación educativa. A continuación, se ha reunido información sobre la importancia de la geometría analítica y los problemas que se presentan en su aprendizaje y enseñanza. Finalmente, se ha hecho referencia a las ventajas del uso de las TIC, más concretamente *GeoGebra*, en el aula de matemáticas donde se ha recogido la opinión e investigaciones de distintos autores/as sobre las ventajas de introducir las TIC en el aula.

- 2) *Segunda Fase: Estudio de campo:* Este ha consistido en realizar un cuestionario a los profesores de matemáticas del Instituto Etxebarri BHI de Vizcaya, con la finalidad de investigar sobre los conocimientos que estos tienen sobre las TIC en general y *GeoGebra* en particular, el interés que muestran por las mismas y su predisposición para utilizarlas en el aula. También se ha querido investigar sobre las dificultades que estos encuentran en la enseñanza de la geometría analítica. A continuación, se ha llevado a cabo una actividad práctica, la cual ha consistido en 4 sesiones de 50 minutos cada una para enseñar geometría analítica mediante *GeoGebra* a los alumnos de una clase 4º de la ESO del mismo instituto. Además, se ha realizado otro cuestionario a los alumnos del aula donde se han impartido las sesiones con *GeoGebra* para ver la opinión que presentan sobre la aplicación de dicho software en el aula de matemáticas.
- 3) *Tercera Fase: Propuesta didáctica:* Aquí, se ha planteado una propuesta didáctica a partir de la información obtenida en los apartados anteriores. Esta propuesta se ha basado en plantear una metodología para enseñar geometría analítica mediante *GeoGebra* a los alumnos de una clase 4º de la ESO, con el fin mejorar el aprendizaje significativo de los alumnos, así como motivar y facilitar tanto la enseñanza como el aprendizaje.

#### **2.4. JUSTIFICACIÓN DE LA BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA**

La bibliografía que ha sido utilizada en la presente investigación se ha localizado mediante buscadores o bibliotecas fiables tratando siempre de seleccionar información de mayor actualidad.

A la hora de realizar la búsqueda bibliográfica se han seguido diferentes líneas de investigación. Se ha partido de conceptos más generales como la didáctica de las matemáticas; para esta parte del trabajo ha sido imprescindible conocer la situación que presentan las matemáticas a nivel internacional mediante los informes PISA 2012 y TIMSS 2011 y hacer una evaluación general de los mismos tanto a nivel internacional,

como en nuestro país y más concretamente en nuestra comunidad autónoma, el País Vasco.

A continuación, se ha hecho un estudio sobre la competencia matemática para el que se han recopilado varias definiciones del concepto como la expuesta por el informe PISA (2012) o Recio (2006). Además, se ha investigado sobre la evolución que ha sufrido la enseñanza de esta competencia en los últimos años recorriendo diferentes documentos curriculares como es el caso de la LOCE (2002a) o la LOE (2006). Además, la aportación de Alsina (2010a) respecto a la necesidad de limitar el uso del libro de texto también ha sido importante.

En el apartado sobre geometría analítica se ha hecho un repaso a la historia así como a los contenidos de este bloque en 4º de la ESO tomando como base el libro de matemáticas de la editorial Anaya elaborado por J. Colera et al. (2012). Se ha prestado especial atención a los problemas más frecuentes que aparecen a lo largo de su aprendizaje y enseñanza. Para esto, ha sido relevante la aportación del artículo sobre *Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI* escrito por Hernández y Villalba (2001), así como la realizada por Lehman (1989) en la que da importancia al razonamiento matemático.

Además, se ha estudiado la introducción de las TIC en la sociedad y a su vez en la educación, para terminar concretando aspectos más relevantes y significativos sobre la temática que se pretende tratar finalmente, *GeoGebra*. Para ello ha sido imprescindible la aportación que el autor Ferrel (2010) hace con su artículo *Fracaso escolar y TIC* en el que establece que existen recursos que previenen el fracaso escolar y hace mención expresa a las TIC.

Finalmente, se han descrito de un modo introductorio las aplicaciones más empleadas para impartir geometría analítica, como son Calibri, Wiris y *GeoGebra*. Sobre este último se ha hecho una descripción y se han estudiado sus características principales así como sus aportaciones en el aula. Aquí ha sido importante la aportación de Losada (2011) quien hace un estudio de esta herramienta analizando sus ventajas más relevantes. Mucha de esta información ha sido obtenida del manual de la página oficial de *GeoGebra*.

### 3. MARCO TEÓRICO

#### 3.1. SITUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN ESPAÑA

Las matemáticas son muchas veces percibidas por el alumnado como una materia difícil porque al igual que todas las disciplinas científicas suponen la suma de conocimientos con una determinada estructura y organización que están interrelacionados. La comunidad educativa realiza periódicamente evaluaciones para determinar el nivel del alumnado en esta y otras áreas. Estos estudios sirven para ir comparando la evolución de los resultados y como reflexión para realizar cambios que mejoren los datos obtenidos. Estos datos se recogen en varios informes como el anteriormente mencionado informe PISA.

Este informe consiste en analizar el rendimiento de una determinado número de estudiantes de distintos países con el fin de conseguir una valoración internacional mediante pruebas estándares realizadas a alumnos de 15 años. Dicho informe es realizado por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) y en la última prueba realizada en el año 2012 participaron un total de 65 países de los cinco continentes, incluyendo los 34 pertenecientes a la OCDE.

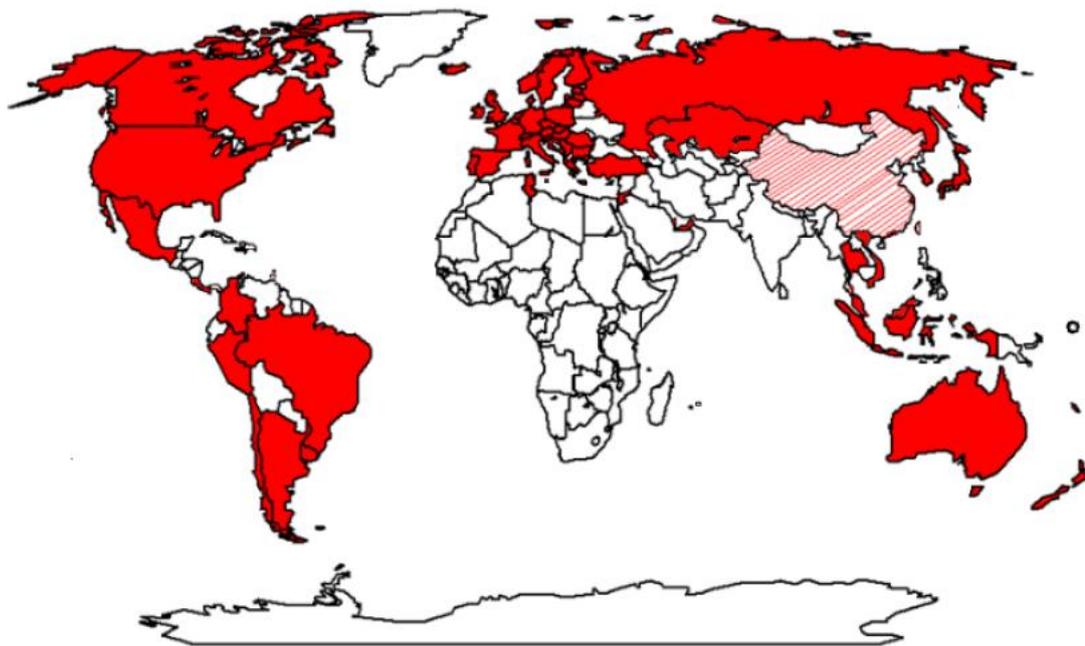


Figura N° 1. Países participantes en PISA. Fuente: OCDE (2012)

En España han sido 14 las comunidades autónomas que han tomado parte en dicha investigación.



Figura N° 2. Comunidades participantes en PISA. Fuente: OCDE (2012).

Las áreas de evaluación en este informe han sido las matemáticas, la lectura y las ciencias, teniendo la evaluación de las matemáticas especial relevancia en este último estudio del 2012.

En este informe, se divide el rendimiento medio del alumnado de 15 años en una escala de 6 niveles siendo la puntuación media de la mayoría de los países de la OCDE correspondiente al nivel 3 (puntuaciones entre 482 y 545). Sin embargo, son muchos los alumnos que adquieren únicamente un nivel 1 o inferior y aunque en los últimos años ha descendido, los Estados miembros de la Unión Europea han establecido como objetivo reducir el porcentaje de alumnos de 15 años con bajo rendimiento en matemáticas a menos de un 15% para el año 2020.

España			OCDE (Promedio)			Unión Europea (25 países)			Puntos de referencia Europa 2020
2006	2009	2012	2006	2009	2012	2006	2009	2012	
24,7%	23,7%	23,6%	21,3%	22,0%	23,0%	24,0%	22,2%	23,9%	15%

Figura N° 3. Porcentaje de alumnos de 15 años con nivel 1 o <1 en escala PISA. Fuente: OCDE (2012).

Los resultados de España han permanecido estables a lo largo del tiempo en las tres materias evaluadas (matemáticas, ciencias y lectura). No se han producido cambios significativos en los resultados de España en matemáticas entre 2003 y 2012, ediciones en las que las matemáticas han sido el foco de especial atención de la evaluación PISA. El descenso entre 2003-2012 ha sido de un solo punto (de 485 a 484), lo que no

constituye un cambio significativo. Por un lado, la poca variación de los resultados indica una cierta estabilidad del sistema educativo español en el tiempo. No obstante, también apunta al estancamiento del sistema educativo y a la falta de una evolución positiva.

Además, como muestra la siguiente tabla, España se encuentra 10 puntos por debajo de la media de la OCDE lo que indica que aún queda un largo camino por recorrer en la mejora de esta materia. Los países asiáticos, sin embargo, son quienes se encuentran a la cabeza de la OCDE según el último informe: Corea del Sur (554), Japón (536) y Suiza (531).

		2000	2003	2006	2009	2012
España	Matemáticas		485			484
	Lectura	493			481	488
	Ciencias			488		496
OCDE	Matemáticas		500			494
	Lectura	500			494	497
	Ciencias			498		501
Diferencia Promedio OCDE/España	Matemáticas		15			10
	Lectura	7			13	9
	Ciencias			10		5

Figura N° 4. Evolución de los resultados globales en las tres competencias de PISA. Fuente: OCDE (2012).

De entre las 14 comunidades autónomas que se presentaron a PISA 2012, cuatro son las que obtienen la mayor puntuación: Navarra (517), Castilla y León (509), País Vasco (505) y Madrid (504). Las cuatro están por encima de la media española (484 puntos), europea (489) y de la OCDE (494). En el País Vasco, se queda así 9 puntos por encima de la OCDE, aunque con un resultado de 5 puntos por debajo respecto a 2009. Se puede observar una diferencia entre comunidades muy notable, hasta el punto de que entre la que obtiene mejores resultados de rendimiento, Navarra (517) y la que menos, Extremadura (461) hay una brecha de 55 puntos.

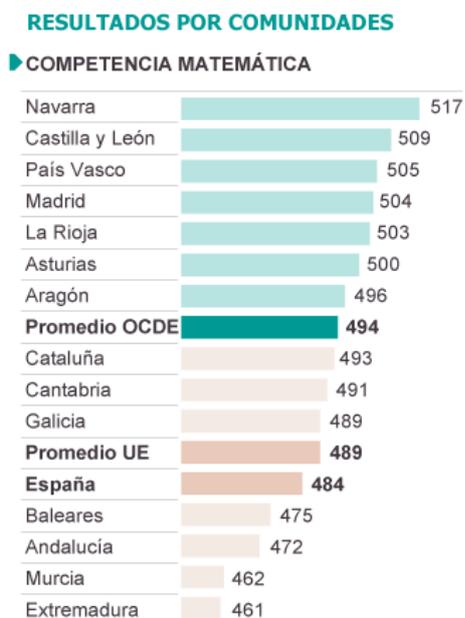


Figura Nº 5. Resultados PISA 2012 por comunidades. Fuente: OCDE (2012).

Estos datos indican que aún queda mucho por hacer y que se debe avanzar utilizando todos los recursos que están a nuestro alcance para poder así mejorar estos resultados. Es significativa además la diferencia que existe entre los resultados de algunas comunidades, por lo que se debe avanzar en la búsqueda de objetivos comunes que, aun respetando las diferencias individuales, persigan la misma meta.

### 3.2. COMPETENCIA MATEMÁTICA

A efectos del informe PISA, la competencia matemática se define como:

La capacidad personal para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (OCDE, 2012, p. 14).

Tal y como afirma Recio (2006) desde hace algunos años, la enseñanza ha tomado un rumbo distinto en el que ya no priman los contenidos sino los objetivos generales y finales del currículo como son las competencias para afrontar situaciones de la vida cotidiana.

La inclusión de las competencias en el currículo implica que los aprendizajes que debe adquirir el alumnado deben ser significativos, útiles para desenvolverse en su medio y adaptados a las condiciones y características de la sociedad actual. Además

tiene que servir como fundamento para lo que debe ser un aprendizaje permanente a lo largo de su vida.

Según Niss (2002) la competencia matemática debe entenderse como la capacidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en variedad de contextos intra y extra matemáticos.

García (2011) destaca también en su tesis doctoral que la competencia matemática se basa en las expectativas que los alumnos tienen sobre el aprendizaje matemático, que se refieren a solución de problemas y situaciones de la vida real. Es decir, se trata de que los alumnos sean capaces de aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones que se les plantean fueran del entorno escolar o académico, a situaciones reales.

### **3.2.1. Enseñanza de la competencia matemática**

Hasta hace pocos años, la enseñanza de las matemáticas se basaba en enseñar una serie de algoritmos y definiciones, con el único fin de aprobar un examen de un tema determinado. Si analizamos los currículos de la Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE) (MEC, 2002b) vemos que los contenidos estaban divididos en tres clases: conceptuales, procedimentales y actitudinales. Esto supuso un cambio respecto a la enseñanza tradicional de las matemáticas que se basaba exclusivamente en la adquisición de conceptos y destrezas. Con este cambio los contenidos se estructuraban de forma más amplia haciendo una clara distinción entre ellos e interrelacionándolos a la vez. Los currículos de las matemáticas (y de casi todas las materias) estaban diseñados para adquirir una serie de contenidos a base de repeticiones sin comprender el significado de los mismos.

En el caso de las matemáticas, se ha ido considerando la necesidad de formar a los alumnos, no únicamente para dominar una serie de contenidos, sino también para saber reflejar lo aprendido a situaciones de la vida cotidiana y lograr que así consideren las matemáticas un recurso de gran utilidad en su día a día.

Para lograr este objetivo, ha sido imprescindible realizar un cambio en la estructura de los contenidos y tratar de desarrollar cada área de la asignatura de matemáticas de manera que se integren unas en otras. Es decir, se debe hacer ver al alumno que los diferentes temas de una asignatura no son independientes unos de otros, sino que están relacionados y es importante comprender uno para poder dominar el siguiente.

Sin embargo, para alcanzar estos nuevos objetivos se debe trabajar en unas nuevas metodologías desde los primeros cursos de la enseñanza, para poder, así, desarrollar lo que se denomina la “competencia matemática”.

Según Alsina (2010b), para mejorar el desarrollo de la competencia matemática desde las edades más tempranas, es necesario comenzar con un aprendizaje significativo y ajustar dicho aprendizaje a las necesidades individuales de cada alumno. Además, Alsina (2010c) plantea una Pirámide de la Educación Matemática basada en un símil con la pirámide de la alimentación. En dicha pirámide, indica de una manera clara y sencilla el tipo de recursos que son necesarios para desarrollar un pensamiento matemático y en qué medida y con qué frecuencia su uso es recomendable. Al igual que en la pirámide de la alimentación no se prescinde de ningún alimento, aquí sucede igual, es decir, informa sobre lo ventajoso que resultaría restringir el uso de algún recurso, como entre otros, el caso del libro de texto.



Figura N° 6. Diagrama Piramidal de recursos didácticos. Fuente: Alsina (2010).

En la base del diagrama piramidal de los recursos didácticos según Alsina (2010d), figuran los recursos que son imprescindibles para que los alumnos puedan desarrollar la competencia matemática. No obstante, en la cima de la pirámide, se encuentran aquellos recursos que solo debería ser utilizados ocasionalmente sin abusar de los mismos, como ocurre con el libro de texto.

Aunque el libro de texto no debería ser la base de cualquier sistema de enseñanza, éste sigue ejerciendo un papel imprescindible, y sobre todo en el caso de las matemáticas. Por lo tanto, se considera que esta pirámide está invertida, dando lugar a una enseñanza de matemáticas poco motivacional para los alumnos, y como consecuencia aprendizaje poco significativo.

Por otro lado, en el caso de las TIC, ocurre justamente lo contrario. Se ha demostrado, que la enseñanza de esta materia con tecnología tiene un efecto positivo tanto en la actitud de los alumnos ante las matemáticas como en su rendimiento. Según Alemán de Sánchez (2002, citado en Macías, 2007, p. 11) son varias las ventajas que

ofrece el uso de la computadora en el aprendizaje de las matemáticas; entre otras la participación activa del alumno, posibilidad de dar una atención individual al estudiante, el desarrollo cognitivo del estudiante, etc.

Por último, es evidente que la sociedad sufre cambios constantemente y por ello es importante adecuar el aprendizaje de las matemáticas a dicha evolución y aprovechar los beneficios que esto puede ofrecer al proceso de enseñanza-aprendizaje. De esta manera, se puede motivar a los alumnos y conseguir a su vez un aprendizaje eficiente.

### **3.3. GEOMETRÍA ANALÍTICA**

La geometría analítica consiste en el estudio de las propiedades de figuras geométricas algebraicamente en un sistema de coordenadas. Esta área de las matemáticas es de gran importancia ya que ha unido los conceptos de análisis y geometría.

Tal y como menciona Montesinos (2010) en su libro *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*, la creación de la geometría analítica fue impulsada por dos individuos franceses: René Descartes (1596-1650) y Pierre Fermat (1601-1655). Cada uno de ellos desarrolló su trabajo por su lado pero casi al mismo tiempo. Sin embargo, la geometría analítica no fue producto exclusivo de las investigaciones de Fermat y Descartes, sino que derivó de la síntesis de otros muchos matemáticos entre los que se encuentran como más relevantes Apolonio, Vieta y Oresme.

El primer punto que dio comienzo al origen de la geometría analítica fue la introducción de las coordenadas, el cual fue labor de los griegos, en particular de Menecmo, Apolonio y Pappus. A continuación, fue Oresme quien consiguió el trazado de una curva construyendo ordenadas a partir de abscisas mientras que Vieta desarrolló la aplicación del álgebra simbólica a los problemas geométricos.

Descartes y Fermat se ocuparon de la derivación de ecuaciones de los lugares geométricos y la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones por un lado, y del estudio de curvas dadas por ecuaciones lineales y cuadráticas por otro.

Euler fue quien consiguió la representación gráfica de una curva dada mediante la expresión analítica funcional. Éste también comenzó con la derivación de fórmulas fundamentales para resolver problemas sobre puntos, rectas, planos, ángulos, paralelismo, perpendicularidad, distancias, áreas, etc. aunque, fueron Lagrange, Monge y Lacroix quienes continuaron con dicho trabajo.

Finalmente, se dio una clasificación general de curvas y superficies de segundo orden en lo que participaron varios matemáticos como De Witt, Wallis, Stirling, Euler y Monge dando así origen a la geometría analítica.

### **3.3.1. Contenidos del bloque de geometría analítica en 4º de la ESO**

El Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, divide los contenidos de las matemáticas de 4º de la ESO (opción B) en 6 bloques: contenidos comunes, números, algebra, geometría, funciones y gráficas y estadística y probabilidad.

Como se ha mencionado anteriormente, aunque la geometría analítica no está considerado entre los contenidos esenciales en la asignatura de matemáticas, ya ha quedado confirmado que la impartición de este bloque es esencial para el alumnado y se le debería prestar mayor atención.

Las funciones lineales comienzan a darse en 2º de la ESO y se continúa en 3º y 4º de la ESO haciendo un repaso general. Por lo tanto, los alumnos de 4º de la ESO deberían dominar a la perfección todo tipo de funciones.

En el bloque de geometría analítica se vuelven a repetir las ecuaciones de cursos anteriores, pero esta vez desde un punto de vista geométrico: posición relativa de dos rectas, paralelismo y perpendicularidad. Por ello es más conveniente profundizar en las funciones antes de introducirse en la geometría.

Aunque no es siempre así, la geometría analítica también puede utilizar vectores, por lo que es recomendable comenzar por definir y tener claro el concepto de vector y aprender a utilizarlos. Además, ayudarán a crear ciertos conceptos y relaciones como:

- Punto central de una recta, situar el punto simétrico de un punto respecto a otro, analizar si tres puntos están alineados, calcular la distancia entre dos puntos mediante la igualdad entre triángulos o el teorema de Pitágoras.
- Analizar la posición relativa entre dos rectas (paralelismo, perpendicularidad, punto de intersección).
- Conseguir la ecuación de la circunferencia, partiendo de la distancia entre dos puntos. Conociendo las coordenadas del centro  $(a,b)$  y el radio  $r$  de la circunferencia saber representar una circunferencia:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Los contenidos mínimos que se deben adquirir en este bloque, así como otros importantes, quedan reflejados en la siguiente tabla:

**Tabla N° 1. Contenidos del bloque de geometría analítica.**

<b>Contenidos mínimos</b>	<b>Otros contenidos importantes</b>
Vectores. Operaciones.	Razonando, calcular el/los punto/s que dividen una recta en dos, tres o más fragmentos.
Punto medio de una recta.	
Punto simétrico de un punto respecto a otro.	Calcular que valor debe adquirir un parámetro para que dos rectas sean paralelas, perpendiculares o para que la distancia entre dos puntos tenga un valor determinado.
Analizar si tres puntos están alineados.	
Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.	La ecuación de la circunferencia.
Punto de intersección de dos rectas.	
Recta paralela a los ejes de coordenadas.	Zonas del plano.
Distancia entre dos puntos.	

*Nota:* Contenidos del bloque de geometría analítica. Fuente: Elaboración propia.

### **3.3.2. Problemas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica**

Son varios los autores que opinan que la geometría debe ser un núcleo central en el currículo escolar. Almeida (2002) menciona en su tesis doctoral que existen algunos objetivos generales que todo ciudadano debería alcanzar tras su formación, entre los que están tener una cultura geométrica con visión histórica e interdisciplinaria y aplicar conocimientos geométricos para modelar. Sin embargo, este bloque de la asignatura, en el Real Decreto 1631/2006 donde establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, no es considerado un contenido esencial, por lo que no se le presta demasiada atención.

La LOE establece 4 horas semanales de clase para el área de matemáticas, la LOMCE, en cambio, añade una hora más a la semana. En cualquier caso, y aunque esto suponga un avance, es fundamental estructurar bien los contenidos e incidir especialmente en la metodología para trabajarlos.

Por otro lado, la consideración del libro de texto como eje central de la asignatura a veces es un obstáculo para la utilización de otros recursos. Es importante no centrarse únicamente en su utilización y tratar de ofrecer a los alumnos un aprendizaje más

motivacional mediante el uso de diferentes herramientas didácticas. Tal y como mencionan Chamoso y Miguel (1995) en una investigación muy interesante, “la calidad de la enseñanza en general, y de las matemáticas en particular, exige introducir diversos materiales y recursos tratando de que la clase sea más receptiva, práctica manipulativa y amena” (p.1).

### ***A. Problemas en la enseñanza***

Son varios los problemas que se dan a la hora de enseñar matemática, y más concretamente geometría analítica, en el aula. El profesorado carece de una formación constante y continúa además de una mayor autonomía para desarrollar los contenidos en el aula.

También es importante tener en cuenta que no todos los alumnos necesitan el mismo tipo de metodología ni aprenden de la misma manera, por lo que es importante poder diversificar los recursos y adaptarlos a las necesidades de cada uno. Muchas veces por comodidad se tiende a homogeneizar la enseñanza en el aula sin ningún tipo de criterio.

Por otro lado, algunos docentes priorizan la enseñanza de matemáticas en otras áreas y van desplazando los contenidos de geometría analítica hacia el final del curso, lo cual les lleva muchas veces a verlo de manera superficial o incluso a excluirlo por falta de tiempo.

A la hora de enseñar geometría analítica con *GeoGebra* hay que evitar limitarse a explicar el funcionamiento del software y mostrar diferentes aplicaciones. Es importante centrarse en conseguir que los alumnos interioricen diferentes conceptos del bloque de estudio mediante dicha aplicación.

### ***B. Problemas en el aprendizaje***

En el caso del aprendizaje de la geometría analítica por parte de los alumnos, el mayor problema se da a la hora de la comprensión de conceptos vinculados a dicho bloque, entre ellos la dificultad de identificación, tratamiento y relación entre distintos registros de representación. Por ello es importante dar un espacio a la reflexión sobre lo actuado.

Existen también dificultades en la interpretación práctica de los contenidos debido a una tendencia a la memorización reproductiva de las fórmulas. Tal y como mencionan Engler, et al (2002) las dificultades que presentan los alumnos tienen mucha influencia a la hora de adquirir nuevos conocimientos y son con frecuencia un impedimento para avanzar en la adquisición de otros nuevos. Por esto, es fundamental

que el alumno reconozca sus dificultades ya que solo así podrá emprender el camino de la superación para avanzar en nuevas adquisiciones.

La resolución de problemas es, en sí mismo, un bloque muy importante del área de matemáticas por lo que debe ser objeto específico de aprendizaje. Santos (1997) considera que es fundamental una secuenciación según dificultades que permita al alumnado ir superando niveles ya que esto jugará un importante papel motivador.

Además, es importante evitar los problemas cuyo único objetivo sea la fijación de contenidos y trabajar más problemas que reflejen situaciones de la práctica o la ciencia. Lehman (1989) se centraba en la importancia de razonar apartando así al alumno del hecho de memorizar conceptos. Es decir, evitar adquirir conceptos sin un conocimiento básico por parte del alumno.

Mosvskovitz, Inbar y Zaslavsky (1987) realizan una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos, determinando seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados:

- 1-Datos mal utilizados
- 2-Interpretación incorrecta del lenguaje
- 3-Inferencias no válidas lógicamente: errores en el razonamiento.
- 4-Teoremas o definiciones deformados
- 5-Falta de verificación en la solución
- 6-Errores técnicos: errores de cálculo.

Por otro lado, los errores están originados muchas veces por la adquisición de conocimientos previos erróneos y esto hace que sea fundamental indagar para detectarlos, solo así será posible corregirlos y empezar a superarlos. Los errores forman parte del proceso de aprendizaje y son el síntoma de que hay algo que modificar por lo que debemos ser críticos al analizar su origen.

Además los errores también pueden ser debidos a un abuso de los conceptos teóricos y en un área como las matemáticas y concretamente en el bloque de geometría se debe insistir en la importancia de la manipulación de herramientas. La utilización de este tipo de herramientas facilita que el alumno visualice sus errores y pueda corregirlos. Además ayuda a solucionar los problemas que habitualmente aparecen debido a la falta de precisión en las medidas.

Por otro lado, el trabajo en grupo también sirve para que los alumnos cooperen entre ellos y se ayuden unos a otros a corregir los errores y dudas que puedan surgir en la resolución de las actividades.

### **3.4. LAS TIC EN LA LEGISLACIÓN EDUCATIVA**

En el País Vasco y tras la puesta en marcha del Programa Eskola 2.0 en el curso 2009-2010, se intentó definir un modelo de centro innovador en cuanto a implantación de las nuevas tecnologías y para ello se creó el nivel de Madurez TIC en el que cada centro se plantea su propio itinerario para conseguir los diferentes grados que se deseen y se planteen sus propias necesidades dependiendo del nivel de competencia de su profesorado, de la formación planteada, de la implicación, etc. Este planteamiento y la ayuda de la figura creada de Dinamizador/a TIC en todos los centros implicados en el Proyecto, ha supuesto un avance notorio en cuanto a la puesta en marcha de las nuevas tecnologías en todos los centros de la Comunidad Autónoma y ha facilitado la utilización de los recursos tecnológicos que la administración ha puesto a disposición de los mismos. Se han establecido tres niveles de madurez y se han establecido unos plazos para que, aquellos centros que se comprometían, puedan conseguir las correspondientes acreditaciones.

Según un estudio realizado por el ISEI-IVEI (2004) sobre el uso y la implantación de las Nuevas Tecnologías en la Enseñanza Secundaria, se concluye que estas apenas aparecen en los documentos oficiales de los centros objeto de estudio y que el 50% del profesorado dice utilizar las TIC en su práctica educativa, el 39,9% confiesa no utilizarlas. En este estudio se destaca que prácticamente un 89% del profesorado y alumnado tenían ordenador en casa y hacían uso de él aunque no todos tenían conexión a internet.

En estos últimos 10 años el avance ha sido notorio y actualmente prácticamente la totalidad del alumnado dispone de ordenador, conexión a internet y otros dispositivos móviles que utiliza diariamente y con una frecuencia muchas veces excesiva. Esta realidad hace que la práctica educativa haya tenido y tenga que adaptarse al alumnado, un alumnado “nativo digital” que responde a las características de la sociedad actual. El papel del profesorado aquí ha tenido que ser constantemente modificado y ha supuesto un esfuerzo notable para la mayoría de los profesionales por lo que ha supuesto de adaptación y formación.

Tal y como recoge el Decreto 175/2007 del País Vasco y concretamente en el área matemática, en su Anexo V se resalta la importancia de:

- Utilización de distintos ámbitos de experiencias del alumnado como fuente de actividades matemáticas.
- Uso racional de la calculadora científica y software específico (asistentes matemáticos).

Además se señala:

El bloque relativo a la Geometría y la Medida, además de trabajar con los aspectos relacionados con las definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes, incide, sobre todo, en describir y analizar propiedades y relaciones, así como clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos. (BOPV 175/2007, 2007, p. 487).

Y añade:

Tiene especial interés el uso de programas informáticos de geometría, que permitirán a los alumnos interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas. (BOPV 175/2007, 2007, p. 487).

Por todo esto, es imprescindible la utilización de algunos programas como es el caso de *GeoGebra* que permite al alumnado realizar de forma eficiente ejercicios y explicaciones que hasta ahora eran costosas y no dejaban satisfechos ni a los docentes ni a los estudiantes. Gran parte del alumnado de la ESO considera las matemáticas como una asignatura de gran dificultad, pero esto podría cambiar con el uso de *GeoGebra* en el aula.

### **3.5. SOFTWARE MATEMÁTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA**

Investigaciones como las de Rubín (2000) y Hitt (2003) han demostrado cómo las TIC mejoran el aprendizaje en los alumnos.

En la asignatura de matemáticas, es importante que los alumnos muestren interés y motivación y que además de que les resulte atrayente, vean esta asignatura como algo útil para la vida cotidiana.

Las nuevas tecnologías, que están cada vez más presentes en nuestro día a día, nos ofrecen también diferentes recursos para trabajar las asignaturas en el aula. Además, como se ha mencionado anteriormente, el empleo de las TIC en el aula resulta muy útil a la hora de incentivar el aprendizaje y motivar a los alumnos.

A la hora de integrar las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje, existen diferentes tipos de categorías y Rubín (2000) agrupa las herramientas destinadas a la educación en cinco tipos:

- *Conexiones dinámicas manipulables*: da la posibilidad de ver qué sucede al cambiar una variable observando las distintas fases. Las simulaciones permiten observar cómo funciona un fenómeno.

- *Herramientas avanzadas:* en el aula de matemáticas, los alumnos pueden utilizar hojas de cálculo como herramienta numérica visual, gráfica, etc.
- *Comunidades ricas en recursos matemáticos:* Los profesores disponen de una amplia gama de recursos en internet para impartir matemáticas en el aula, como por ejemplo: simulaciones, calculadoras, software para resolver ecuaciones, realizar gráficas de funciones, encontrar derivadas, convertir unidades de medida, visualizar figuras geométricas, etc.
- *Herramientas de diseño y construcción:* esta herramienta consiste en el diseño y construcción de artefactos robóticos mediante un lenguaje de programación, lo cual desarrolla en el alumno un razonamiento y pensamiento lógico.
- *Herramientas para explorar complejidad:* Son herramientas para manejar fenómenos complejos. Permite crear simulaciones interactivas que requieren cálculos complejos, ofreciendo así un aprendizaje personalizado.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría analítica existen diferentes programas que pueden ser de gran utilidad. Sin embargo, es importante que no solo sean flexibles en su utilización, sino que también muestren ciertos progresos y den una sensación de control por parte de los alumnos. Además deben permitir imprimir o guardar los trabajos realizados e incluso modificarlos.

Aun así debemos tener cuidado con el uso de este tipo de recursos y tratar de no abusar de los mismos. Martín afirma que:

El uso indiscriminado de la calculadora en el primer ciclo impedirá, por ejemplo, que los alumnos adquieran las destrezas de cálculo básicas que necesitarán en cursos posteriores. Por otra parte, la calculadora y ciertos programas informáticos, resultan ser recursos investigadores de primer orden en el análisis de propiedades, relaciones numéricas y gráficas; en este sentido debe potenciarse su empleo (2008, p.6).

Es por esto que debe mantenerse un equilibrio en el uso de este tipo de herramienta didáctica y que sea el propio profesor quien decida cuando y como utilizarlas.

Algunos de esos programas son: Cabri, Cinderella, Wiris y *GeoGebra*. Cabri y Cinderella son exclusivos para geometría, mientras que *GeoGebra* incorpora también elementos algebraicos y de cálculo, al igual que Wiris cuyo uso está más limitado al álgebra.

### **3.5.1. Cabri**

Es un software simple y completo para entender la geometría espacial en clase. Posee una gran galería de imágenes interactivas en 3D. Esta aplicación es muy efectiva para la enseñanza de geometría en primaria.

Este software necesita Adobe Reader para su funcionamiento y su gran inconveniente es que no es gratuito. Tiene diferentes tipos de licencias dependiendo del uso que se le vaya a dar y variando también su precio de una a otra:

- Licencia Individual: (100€) Solo puede ser utilizado en un único ordenador.
- Licencia Aula: (275€) Puede ser utilizado en un máximo de 10 ordenadores de un centro con la misma dirección.
- Licencia Centro: (600€) Puede instalarse en un número limitado de ordenadores del mismo centro con una dirección y hasta un máximo de 10 profesores podrán instalarlo en su ordenador personal.
- Licencia Alumno: Los alumnos de un centro que tenga una licencia centro, podrán adquirir una licencia alumno para instalarlo en su ordenador personal.
- 1 año de licencia de descarga (25€).

### **3.5.2. Wiris**

Wiris es un programa de cálculo simbólico, es decir, nos da la posibilidad de trabajar las matemáticas mediante fórmulas. Permite trabajar con elementos geométricos y representarlos gráficamente.

Wiris se puede utilizar en todas las áreas de las matemáticas (números, álgebra, funciones, derivadas, integrales y geometría) aunque su uso está más extendido al álgebra. Es un software libre que se utiliza en línea y está muy integrado en la plataforma Moodle.

### **3.5.3. GeoGebra**

Markus Hohenwarter fue el creador de *GeoGebra* y su actual director. Éste comenzó el proyecto de dicho software en el año 2001 y la primera versión salió en el año 2002 en inglés y alemán.

Este software, desde sus comienzos (*GeoGebra 1.0*) hasta el día de hoy (*GeoGebra 5.0*) ha evolucionado positivamente y ha ido ampliando su uso a distintos campos de las matemáticas. La principal novedad de este software es su soporte para tres dimensiones (Vista 3D).

*GeoGebra* es un software informático que pertenece al grupo de Sistemas de Geometría Dinámica (DGS). Es una aplicación libre muy útil para la enseñanza de las matemáticas de cualquier nivel (desde nivel primario hasta universitario), y está disponible en diversas plataformas.

Este software tiene una gran variedad de materiales y recursos y su uso, lejos de estar limitado a un área de las matemáticas, se expande a diferentes campos como: aritmética, geometría, álgebra, cálculo e incluso probabilidad y estadística.

Como se ha mencionado anteriormente, este programa es gratuito y se puede distribuir libremente, siempre y cuando, no sea para uso comercial. Es decir, este programa se puede llevar a cualquier colegio y los alumnos podrán disponer del mismo para que practiquen en sus casas, lo que supone una gran ventaja para que los alumnos pueda estudiar en sus casas e indagar sobre lo visto en clase. Además, *GeoGebra* se encuentra traducido a un total de 50 idiomas europeos y mundiales entre los que se encuentran el castellano, euskera, catalán y gallego.

R. Losada (2011), en su artículo *GeoGebra, La eficiencia de la intuición* analiza las ventajas que hace que dicho software sea uno de los mejores programas para la educación matemática. Una de las características más relevantes es que es al mismo tiempo DGS (Sistema Geométrico Dinámico) y CAS (Sistema de Álgebra computacional). Lo cual, significa que los comandos pueden ser introducidos mediante el ratón o mediante el teclado (como en los DGS y CAS respectivamente).

Otras características de *GeoGebra* son:

- Es un recurso con gran potencial para la enseñanza de las matemáticas, útil tanto para la educación primaria como secundaria.
- Permite llevar a cabo todo tipo de acciones matemáticas: demostraciones, supuestos, análisis, deducciones, etc.
- Combina tres áreas fundamentales de las matemáticas, como son la geometría, álgebra y cálculo. Además, integra, deriva, representa gráficas descritas algebraicamente, etc.
- Permite dibujar figuras con puntos, segmentos, rectas, vectores, cónicas y además, construye gráficas que se pueden modificar mediante el ratón de manera dinámica.
- Mediante *GeoGebra* se puede visualizar cualquier cambio o edición en las expresiones y representaciones. Es decir, un cambio sobre el objeto afectará a su expresión matemática, mientras que cualquier modificación a su expresión matemática modificará su representación gráfica.
- Se puede utilizar tanto online como offline, es decir, instalado en el ordenador.

- Para que pueda ser utilizado online necesita tener instalado el Java 1.4.2 o superior.

El software *GeoGebra* ha adquirido diversos premios relacionados con la educación como, por ejemplo, el *Tech Awards Distinción en Tecnología 2009* (Silicon Valley, EE. UU.).

El proyecto Gauss ha sido desarrollado por el INTEF (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado), el cual ofrece al profesorado una gran variedad de ítems didácticos de *GeoGebra*, quedando así cubiertos todos los niveles de las matemáticas desde Primaria hasta Secundaria. Además, estos ítems están diseñados para ser utilizados tanto en PDI como en un ordenador, por lo que este proyecto ofrece a la comunidad educativa una gran posibilidad para enseñar matemáticas de manera novedosa y creativa.

Tal y como menciona Losada (2011):

GeoGebra es un programa pensado para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, intuitivo, fácil de usar, de estética cuidada, con grandes posibilidades pedagógicas y en continuo desarrollo. Para el profesorado y el alumnado de educación secundaria puede ser más que un recurso. (p.22)

Sin embargo, según afirman Meza y Cantarell (2002) se debe tener en cuenta que las ventajas obtenidas mediante esta herramienta educativa, dependerá de la capacidad de manejo que se tenga de la misma así como de saber adecuarla a los contenidos de la materia de estudio. Es importante que la docente lleve a cabo un uso adecuado de dicha aplicación para poder llevar a cabo una metodología de enseñanza adecuada para que los alumnos vean aumentadas sus habilidades de aprendizaje.

Además, Sandoval (2009) realizó un estudio en el que demostraba que para los alumnos y alumnas era más fácil entender los conceptos más que a base de ejemplos, demostrando que los resultados tienden a repetirse variando las condiciones. Algo que es muy fácil mostrar con esta aplicación.

Por otro lado, Mora (2007) llevó a cabo un interesante estudio en el que mostraba cómo aplicar la geometría dinámica al análisis de las obras de artes, lo que nos da la posibilidad de ampliar el uso de este software a otras áreas lejos de las matemáticas.

## 4. ESTUDIO DE CAMPO

### 4.1. JUSTIFICACIÓN

Después de analizar el marco teórico, se ha realizado un breve estudio de campo para poder profundizar en aspectos necesarios para la correcta realización de la propuesta didáctica.

Como ya se ha mencionado anteriormente, las matemáticas es una de las asignaturas que más problemas presenta en su proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, la geometría analítica es uno de los bloques que se pasa por alto y al cual no se le da la importancia que requeriría.

Este estudio de campo viene motivado por la experiencia vivida en el periodo de prácticas del Máster de Educación Secundaria en el centro Etxebarri BHI. Durante su realización se pudo observar un amplio uso de la pizarra digital y como es el funcionamiento de un aula inmersa en el programa Eskola 2.0.

Este estudio de campo facilitará información acerca de los conocimientos del profesorado sobre el software en cuestión, y como una metodología concreta mediante *GeoGebra* puede influir en el aprendizaje del alumnado en el bloque de geometría analítica.

### 4.2. OBJETIVOS DEL ESTUDIO DE CAMPO

El principal objetivo de este estudio de campo es investigar sobre el uso de *GeoGebra* en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas en el bloque de geometría analítica. Para ello se pretenden llevar a cabo los siguientes objetivos específicos:

- Averiguar el grado de formación de los profesores de matemáticas respecto a las TIC en general y *GeoGebra*.
- Estudiar la opinión que tiene el profesorado sobre el bloque de geometría analítica y sus mayores dificultades.
- Impartir 4 sesiones para enseñar geometría analítica con la colaboración del software *GeoGebra*.
- Investigar la opinión de los alumnos tras llevar a cabo la propuesta en el aula de 4º de la ESO.

### 4.3. METODOLOGÍA Y MATERIALES EMPLEADOS

La investigación se ha desarrollado en diferentes etapas teniendo en cuenta varios aspectos y diferentes formas de actuación según el caso.

Primeramente, se buscó información bibliográfica para tener una base de información suficiente para desarrollar el tema en cuestión. Esta búsqueda se ha realizado en base a unos criterios:

- Se debe definir claramente el tema sobre el que queremos investigar y la información que necesitamos para ello.
- Definir los conceptos que nos interesan y cuáles son los términos que vamos a necesitar para definirlos.
- Hacer una selección de las fuentes de las que obtener la información asegurándonos de su fiabilidad y actualidad.
- Organizar de forma eficaz la búsqueda de la información antes de proceder a la misma.
- Una vez obtenida la información, proceder a revisar, filtrar y clasificarla.
- Realizar los cambios que sean pertinentes tras el análisis de los resultados.

Tras la recogida de todos los datos e información que completan el marco teórico, se ha realizado una encuesta a los profesores de matemáticas del Instituto Etxebarri BHI. Esta encuesta, ha sido llevada a cabo entre 4 profesores de dicho centro, que imparten matemáticas en 2º, 3º y 4º de la ESO (1 hombre y 3 mujeres concretamente) de edades comprendidas entre 32 y 53 años.

El contenido de la encuesta repartida a los profesores, se puede encontrar en el Anexo I en el apartado final del presente Trabajo Fin de Máster. Esta encuesta, aunque se encuentra traducida, ha sido realizada en euskera por ser éste el idioma oficial empleado en el centro de investigación.

A continuación, en una de las aulas de 4º de la ESO se ha procedido a impartir una parte del temario de matemáticas con la colaboración de *GeoGebra*. El tema de esta actividad práctica ha sido la geometría analítica, el cual, a pesar de ser un tema que se acostumbra a trabajar a finales de curso, el profesor accedió a adelantar parte del temario para que los alumnos pudiesen experimentar este tipo de enseñanza novedosa mediante *GeoGebra*.

La clase en la que se ha llevado a cabo la investigación, es una aula de 4º de la ESO en la que hay 16 alumnos (7 chicas y 9 chicos). La profesora de matemáticas de la clase es también la tutora del aula de estudio y, por lo tanto, nos ha podido facilitar información relevante respecto a los alumnos. El 40% de los estudiantes se muestran

participativos en clase y muestran interés por aprender en las asignaturas. De ese 40%, aproximadamente la mitad suelen aprobar matemáticas sin mayor dificultad, mientras que otro tanto, a pesar de hacer grandes esfuerzos, ven la asignatura como un lastre y muestran muchas dificultades para comprenderla.

La actividad práctica se llevó a cabo en el aula de informática en un total de 4 sesiones de 50 minutos de duración cada una, las cuales están detalladas en el Anexo II. Las actividades y cuestiones que se plantearon en el aula fueron obtenidas de una colección de ejercicios planteados por Manuel Sada (2005).

Finalmente, para dar por finalizado el estudio de campo, se ha llevado a cabo una encuesta a los alumnos que han tomado parte en la actividad práctica para poder así evaluar el grado de satisfacción de los mismos. Al igual que la encuesta a los profesores, esta también fue realizada en euskera aunque se encuentra traducida en el Anexo III al final del trabajo.

#### **4.4. MARCO CONTEXTUAL DEL ESTUDIO DE CAMPO**

Con el objetivo de regular el uso de las lenguas oficiales del País Vasco en la enseñanza primaria y secundaria, se publicó el Decreto 138/1983, de 11 de julio, en el Boletín Oficial del País Vasco en julio de 1983. Dicho decreto, publicado en el BOPV núm. 108, y Orden de 1 de agosto, en su capítulo I de Actividades docentes, en el 3º artículo dice que “el uso de las lenguas oficiales en la enseñanza no universitaria se hará tomando como referencia los modelos de enseñanza bilingüe A, B y D descritos en los Anexos I y II del presente Decreto” (BOPV, núm. 108, 1983, p. 2899). Siendo A el modelo en que todas las materias (excepto euskera) se imparten en castellano; en el modelo B tanto el euskera como el castellano se utilizarán para impartir el resto de las materias; y en el modelo D todas las materias excepto lengua castellana se impartirán en euskera.

El Instituto Etxebarri BHI, donde se ha realizado la investigación, es un centro público en el que se imparte la enseñanza de la ESO (desde 1º a 4º) en el modelo “D” (euskera). Por lo tanto, todas las asignaturas se imparten en euskera; incluido Matemáticas.

Actualmente está inmerso en los siguientes proyectos:

- *Agenda XXI*: Es un compromiso y plan de actuación entre las escuelas de aprendizaje junto con el ayuntamiento para preservar la calidad del entorno.
- *Convivencia*: Es un programa promovido por el Departamento de Educación y dirigida a 115 centros públicos de educación primaria y

secundaria, con la finalidad de preparar un plan de convivencia y un observatorio de la convivencia dentro de los centros educativos.

- *Proyecto de Normalización del Euskera*: Se trabaja para que el euskera se hable con naturalidad y normalidad en el centro.
- *Tratamiento Integrado de las Lenguas*: El Proyecto de Tratamiento Integrado de las Lenguas es el fruto de las aportaciones, en los últimos años, de profesores del centro de diversas asignaturas. El objetivo principal ha sido tratar de unificar, en la medida de lo posible, la enseñanza de las diversas lenguas, haciendo abstracción de sus diferentes tradiciones académicas, para que los conocimientos adquiridos en una lengua sirvan de refuerzo en las otras.
- *Tecnologías de la Información y Comunicación TIC*: Tiene como objetivo el desarrollo de la capacidad para el manejo de las TIC.

#### **4.5. RESULTADOS Y ANÁLISIS**

Estos son los resultados más significativos obtenidos de presente trabajo de investigación:

##### **4.5.1. Resultados obtenidos del cuestionario dirigido a los profesores**

Entre las herramientas utilizadas para cuantificar los resultados de este trabajo de investigación están los cuestionarios y han sido dos los utilizados, uno al profesorado que imparte matemáticas en este instituto y otro al alumnado receptor de 4º curso de Educación Secundaria.

El primero consta de áreas y variables específicas referidas a los conocimientos y uso de las TIC en las aulas además de sus conocimientos previos sobre el programa de *GeoGebra* y opinión sobre el área de geometría analítica y su importancia.

Este cuestionario está dividido en diferentes bloques mostrados en la siguiente tabla:

**Tabla N° 2. Áreas y variables de los cuestionarios a profesores.**

AREAS	VARIABLES
<b>Datos Personales</b>	Sexo
	Edad
	Asignatura
	Curso
<b>Capacidades TIC</b>	Componentes de un sistema informático
	Reunir y recuperar información
	Internet
	Correo electrónico
	Herramientas ofimáticas: Procesador de texto
	Herramientas ofimáticas: Presentaciones
	Herramientas ofimáticas: Hoja de cálculo
	Multimedia: Tratamiento de dibujos
Multimedia: Tratamiento de audio y video	
<b>Uso de las TIC en el aula</b>	TIC en el aula
	<i>GeoGebra</i>
<b>Geometría analítica</b>	Geometría analítica

*Nota:* Áreas y variables de los cuestionarios a profesores. Fuente: Elaboración propia a partir del cuestionario.

Además, en la primera parte del cuestionario se ha pedido al profesorado que valore del 1 al 5 según los siguientes apartados:

- 1 Lo conozco o lo sé hacer.
- 2 Tengo dificultades. Tengo que revisarlo.
- 3 No lo conozco o no sé hacerlo.
- 4 Me apuntaría a un cursillo para aprender.
- 5 No me interesa.

Mientras que en la segunda parte referente al uso de las TIC en el aula y en concreto *GeoGebra* y sobre el área de geometría analítica, las opciones que se han dado a la hora de responder han sido las siguientes:

- SI
- NO
- A VECES

A continuación se presentan los resultados obtenidos de los diferentes bloques:

#### **A. Datos personales**

Este primer bloque da idea del muestreo y de quiénes son las personas que han respondido al cuestionario. En este caso, 4 docentes (3 mujeres y un hombre), todos del Departamento de Matemáticas aunque uno también da clases de Informática. Imparten clases en los cuatro cursos de Educación Secundaria y la franja de edad va desde los 32 a los 53 años aunque uno de los profesores encuestados ha rehusado cumplimentar el campo correspondiente a la edad.

## ***B. Capacidades en las TIC***

Referente a la pregunta número 1 de este apartado en la que se hace referencia al dominio y conocimiento de los componentes de un sistema informático, el 75% han contestado que lo conocen y tienen un buen dominio del mismo, mientras que el 25% ha manifestado tener dificultades en el manejo de las conexiones externas de un ordenador.

En la pregunta número 2 que se refiere a la capacidad para reunir y recuperar información, el 100% manifiesta no presentar dificultades para crear carpetas, guardar archivos, comprimir o descomprimir etc. Sin embargo el 25% reconoce no saber de antivirus o instalar y descargar programas pero manifiestan su interés por aprender a hacerlo.

En la pregunta número 3 referida a Internet, solamente un 25% ha afirmado tener un total manejo y el 75% reconoce tener dificultades para realizar búsquedas fiables aunque manifiesta su interés por formarse en este campo.

En la pregunta número 4 referida a utilización del correo electrónico, el 100% afirma tener un total manejo del mismo. Idéntico resultado en la pregunta número 5 que se refiere al uso de herramientas ofimáticas de procesador de textos.

En cuanto a la pregunta número 6 sobre herramientas de “presentación”, el 100% afirma conocer y manejarlas pero el 75% desearían recibir más formación sobre el tema y solo el 25% reconocen un dominio completo de esta herramienta.

En la pregunta número 7 sobre manejo de las TIC en general y más concretamente en la utilización de las hojas de cálculo, dos de los profesores encuestados manifiestan su interés por formarse en este punto mientras que uno de ellos dice dominar su uso. El resto manifiestan su indiferencia.

En las preguntas 8 y 9 que se refieren a la utilización de recursos multimedia, tratamiento de imagen, audio, sonido... casi el 50% del profesorado de la muestra ha afirmado que necesitaría revisarlo mientras que el 30% aproximadamente dice que no sabe cambiar el tipo de formatos de video, audios, etc.

A continuación se presenta un gráfico para resumir este bloque y dar una visión general sobre qué aspectos domina el profesorado del área y aquellos en los que sería necesaria formación:

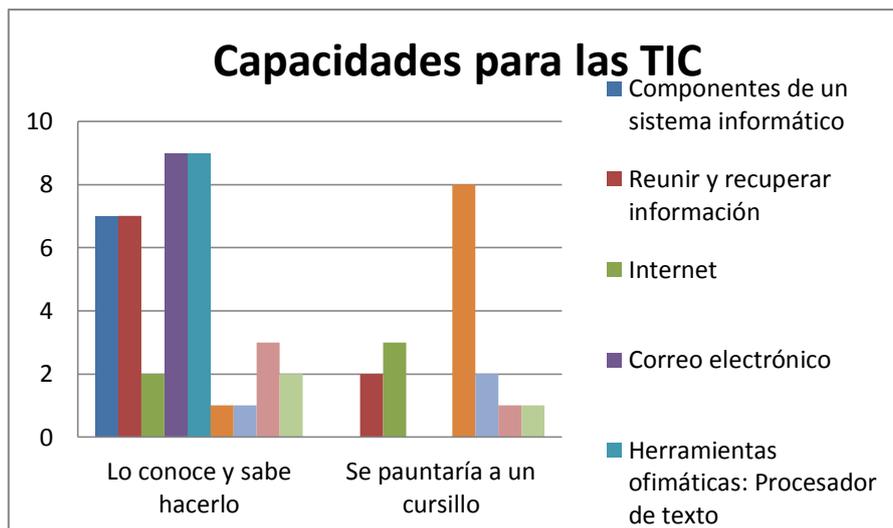


Gráfico N<sup>o</sup> 1. Capacidades para algunas TIC. Fuente: Elaboración propia

Como se ha podido observar, es en las hojas de cálculo y presentaciones donde menos conocimiento existe por parte del profesorado y lo que más solicitan. Más concretamente, en el tema de presentaciones es donde mayor interés han mostrado a la hora de querer aprender.

### C. Uso de las TIC en el aula (*GeoGebra*)

En este último bloque se han realizado diferentes tipos de preguntas, unas sobre las TIC en general y otras sobre *GeoGebra*:

TIC en el aula:

- ¿Conoces TIC para comunicarte con los alumnos? (blogs, plataformas, PDI...)
- ¿Las empleas en el aula?
- ¿Crees que los alumnos prestan mayor atención cuando los usas?
- ¿Qué avances notas con el uso de las TIC?
- ¿Tienen alguna desventaja? ¿Cuál?

*GeoGebra*:

- ¿Has oído hablar sobre *GeoGebra*? ¿Dónde?
- ¿Sueles emplearlo en el aula? ¿Te ha parecido de fácil manejo?
- ¿Crees que es útil?
- ¿Has recibido formación de esta aplicación? ¿Te gustaría?
- ¿Crees que este tipo de programas ayudan a una mejor comprensión de las matemáticas?

- ¿En tu opinión, que tipo de ventajas o inconvenientes podría traer este tipo de software?

En el primer apartado de preguntas, el 100% de los profesores han afirmado conocer tanto los blogs, como diferentes plataformas y la PDI. Además el 75% de los mismos afirman utilizar las TIC en el aula, puesto que observan una mayor atención por parte de los alumnos.

En el gráfico de sectores siguiente se puede observar con claridad la opinión general de los profesores sobre el uso de las TIC en el aula. Un 75% del profesorado se muestra completamente a favor del uso de las mismas para mejorar el aprendizaje de la materia y motivación del alumnado, mientras que un 25% se muestra en contra porque dice que distrae y nos aleja del objetivo de la enseñanza.

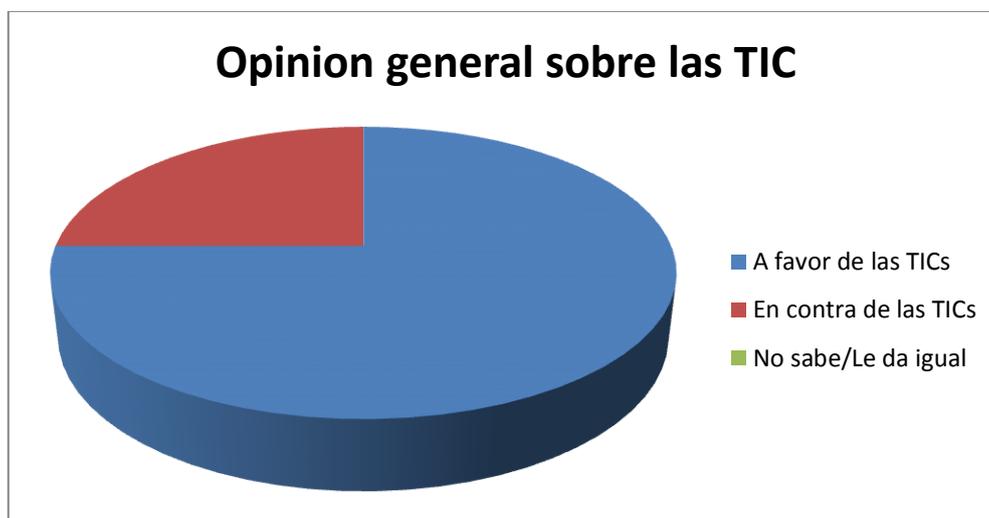


Gráfico Nº 2. Opinión general sobre las TIC. Fuente: Elaboración propia.

Además, en las preguntas de respuesta libre referentes a qué tipo de avances observan y si creen que su uso tiene alguna desventaja, han contestado lo siguiente:

- ✓ *Mejoras*: Mayor motivación y participación de los alumnos (2), mejores resultados obtenidos en el aprendizaje (1), contenidos más visuales y atractivos (1).
- ✓ *Inconvenientes*: pérdida de tiempo entre arrancar ordenadores etcétera (1), distrae a los alumnos de su verdadero objetivo (1), mucho trabajo para el profesor (2), necesidad de una continua formación (3).

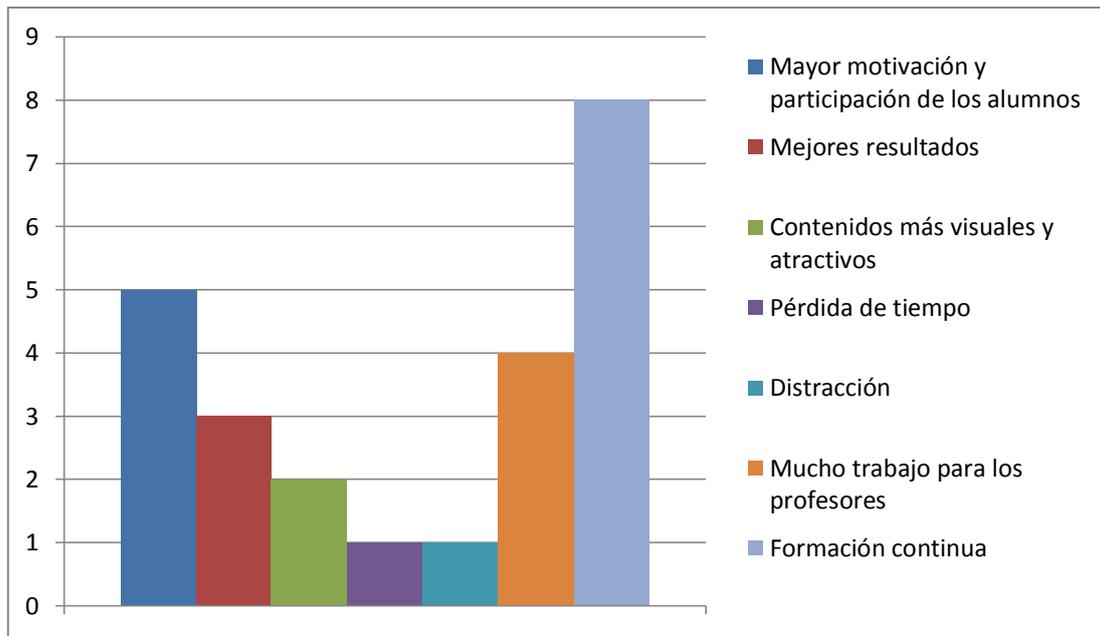


Gráfico N° 3. Opinión sobre las TIC. Fuente: Elaboración propia.

En las preguntas dirigidas exclusivamente al software *GeoGebra*, se ha podido observar que prácticamente el 100% de los profesores han oído hablar alguna vez sobre esta aplicación en diferentes medios. En la siguiente gráfica se muestran las fuentes de este conocimiento:

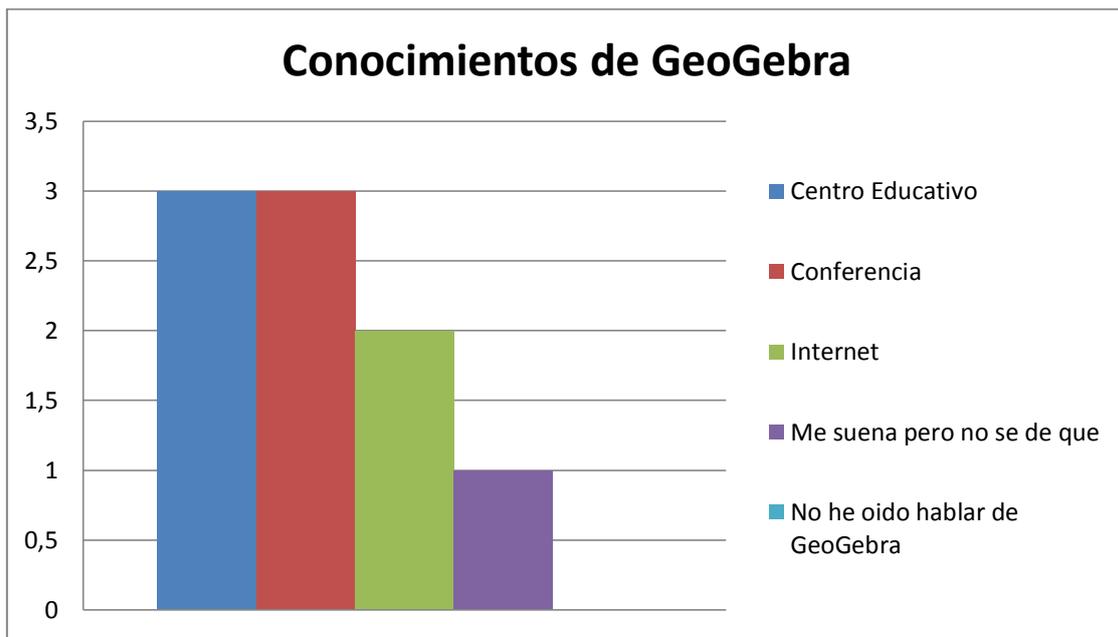


Gráfico N° 4. Conocimientos de *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia.

A la pregunta de si acostumbran a usar el software *GeoGebra* en el aula solo un profesor ha afirmado que lo ha usado algún vez para elaborar algún ejercicio práctico

con los alumnos, mientras que el resto ha dicho que no. A la pregunta de si ha resultado fácil su manejo, la respuesta ha sido que no, puesto que requiere trabajo.

Ante la pregunta de si creen que podría ser útil su uso en el aula, el 75% han contestado que sí, frente a un 25% que dice que solo a veces.

Las dos siguientes preguntas referentes a la formación de dicha aplicación, quedan reflejadas en la siguiente gráfica:

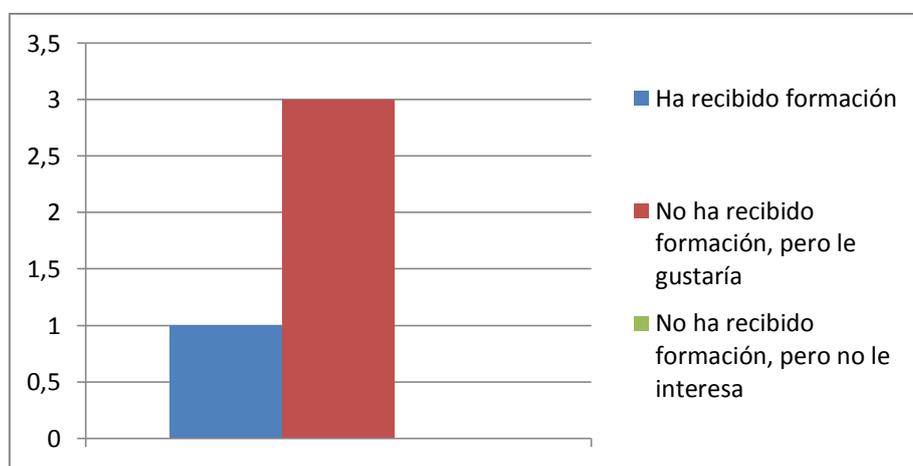


Gráfico Nº 5. Formación sobre *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia.

Para concluir con este apartado, se ha planteado una última pregunta sobre las ventajas e inconvenientes que puede traer la utilización de *GeoGebra* en el aula, en la que se han recogido diferentes respuestas, las cuales se han repartido entre ventajas y desventajas:

#### *Ventajas:*

- ✓ Una mayor motivación para las matemáticas por parte de los alumnos y un aprendizaje más significativo.
- ✓ Clases más dinámicas y participativas por parte de los alumnos.

#### *Desventajas:*

- ✓ Requiere mayor formación para los profesores y necesidad de actualizarse constantemente.
- ✓ No se debe abusar de la aplicación porque el trabajo en papel y el cálculo manual también es importante.

Tal y como se puede apreciar a lo largo de este cuestionario, a pesar de que el profesorado dice tener conocimientos básicos sobre las TIC no terminan de emplearlas en el aula por falta de formación o por no saber cómo integrarlas en la educación de las matemáticas. Es por esto que es necesario plantear una metodología adecuada para

poder introducir este tipo de aplicaciones en el aula y poder garantizar una mejora en la enseñanza y el aprendizaje. Tal y como mencionan Lee y Hollebrands (2008) en su investigación, es necesario preparar a los profesores para que puedan enseñar a los estudiantes de matemáticas un uso apropiado de las tecnologías, a la vez que proporcionar herramientas para ello.

Sin embargo, a pesar de todo esto, los profesores del Instituto Etxebarri BHI tienen un punto de vista favorable respecto a las TIC opinan que su incorporación en las aulas podría traer ventajas. Opinan también que aunque requieren un gran trabajo inicial, a la larga podría ahorrar mucho tiempo y mejorar la dinámica de las aulas.

#### ***D. Geometría analítica***

Finalmente, en el último bloque de este cuestionario se trata el tema de la geometría analítica. El objetivo principal de este bloque es ver en qué medida es esta área importante para el profesorado y cuál de las áreas de las matemáticas encuentran más imprescindibles.

En el gráfico de sectores que se muestra a continuación queda reflejado cuál de los temas de las matemáticas es considerada de mayor importancia entre los profesores del centro de estudio:

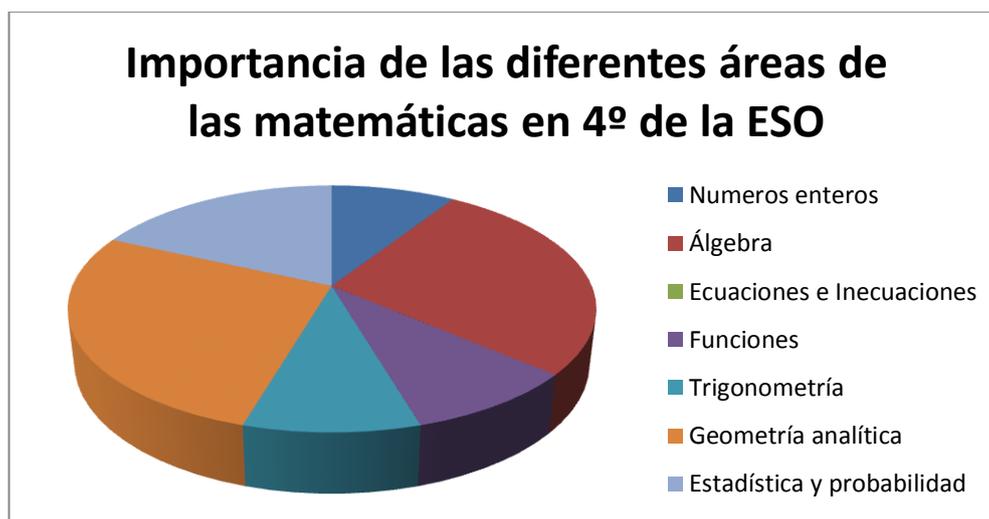


Gráfico N° 6. Importancia de las áreas de las matemáticas en 4º de la ESO. Fuente: Elaboración propia.

Por lo tanto, tal y como se puede observar, las áreas consideradas más importantes son la geometría analítica y el álgebra.

Por otro lado a la pregunta de si creen que los alumnos llegan a comprender el concepto de geometría analítica al final de la unidad, el 100% ha asegurado que no, ya que es un tema abstracto y muchos terminan por aprenderse la unidad como una serie de algoritmos que debe aplicar según el caso.

Además, el 75% de los profesores cuestionado afirman que el libro de texto no es suficiente para enseñar matemáticas y que es interesante disponer de otro tipo de recursos. De esta manera se puede llegar a una mejor comprensión de dicha unidad por parte de los alumnos.

Por último, los profesores están de acuerdo en que la mayor dificultad que se presenta a la hora de enseñar geometría analítica, es que los alumnos no llegan a tener una visión de los problemas y de las cuestiones que se piden en los mismos. No comprenden en la mayoría de los casos lo que se pide ni el procedimiento a seguir para alcanzar la solución. Por lo que estudian de memoria los pasos a seguir en cada caso sin tratar de buscar una explicación lógica y razonable.

#### 4.5.2. Resultados derivados de la actividad práctica

La segunda parte del estudio de campo de este trabajo se ha basado en la propuesta de una práctica, la cual se encuentra descrita en el Anexo II. Esta actividad que trata sobre geometría analítica, se ha llevado a cabo a lo largo de 4 sesiones impartidas en el aula de informática con la colaboración de la tutora del aula de 4º de la ESO (también profesora de matemáticas).

La práctica se compuso por una determinada temporalización de contenidos definidos en la siguiente tabla:

**Tabla N° 3. Práctica con GeoGebra.**

DÍA	4º de la ESO Práctica con GEOGEBRA
1º	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introducción</li> <li>• Vectores en el plano</li> <li>• Operaciones con vectores</li> </ul>
2º	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Punto medio de un vector</li> <li>• Comprobar que tres puntos están alineados</li> </ul>
3º	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Distancia entre dos puntos</li> <li>• Ecuación de la recta</li> </ul>
4º	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Paralelismo y perpendicularidad</li> <li>• Posición relativa entre dos rectas</li> </ul>

*Nota.* Práctica con *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, se ha observado el comportamiento de los alumnos en el aula durante la práctica con *GeoGebra* para poder estudiar su grado de satisfacción. Durante esta fase, se ha hecho una valoración general del aula junto con la profesora la cual ha sido muy positiva.

Se ha podido observar una gran motivación por parte de los alumnos así como una participación general. Además se ha contemplado una actitud de trabajo y de

colaboración y ayuda de unos con otros. El trabajo en equipo ha sido uno de los resultados que más han destacado. Muchas de las dudas que se les presentaban las han ido resolviendo entre ellos con una actitud de trabajo en grupo.

Los alumnos, además, en seguida se han familiarizado con la aplicación y les ha resultado muy sencillo trabajar con la misma. Por parte de la profesora, su opinión también ha sido muy positiva y se ha mostrado muy interesada, participativa y con ganas de profundizar en algunos aspectos de la herramienta. Además, no ha negado la posibilidad de recibir más formación para poder ampliar el uso de esta herramienta a todas las áreas de las matemáticas.

### **4.5.3. Resultados obtenidos del cuestionario de los alumnos**

Tras la práctica realizada en el aula de informática durante 4 sesiones de 50 minutos cada una, estos alumnos han realizado un cuestionario para conocer su posición frente a las matemáticas y la opinión tras la propuesta con la colaboración de *GeoGebra*.

Este cuestionario se ha dividido en tres apartados que son los siguientes:

- Opinión del alumnado sobre las matemáticas.
- Implantación de las TIC en clase.
- *GeoGebra*.

#### **A. Opinión del alumnado sobre las matemáticas**

En este apartado se han realizado una serie de preguntas con el fin de conocer la opinión que tiene los alumnos sobre las matemáticas y que área les parece más sencillos o les gusta más.

En la primera pregunta de este apartado, se pregunta si gustan las matemáticas, a lo que solo un 25% de los alumnos ha contestado que sí, mientras que el 62,5% ha contestado que no. El resto han mostrado indiferencia.

A la pregunta de si creen que las matemáticas son útiles en el día a día, un 75% han contestado que bastante, mientras que el resto han dicho que poco o muy poco.

Finalmente, para concluir con este apartado, en la 3<sup>o</sup> pregunta se preguntaba sobre el área preferido de las teniendo que valorarlos del 1 al 5 (siendo el uno la nota más baja y el 5 la más alta). Los resultados han quedado reflejados en la siguiente gráfica:

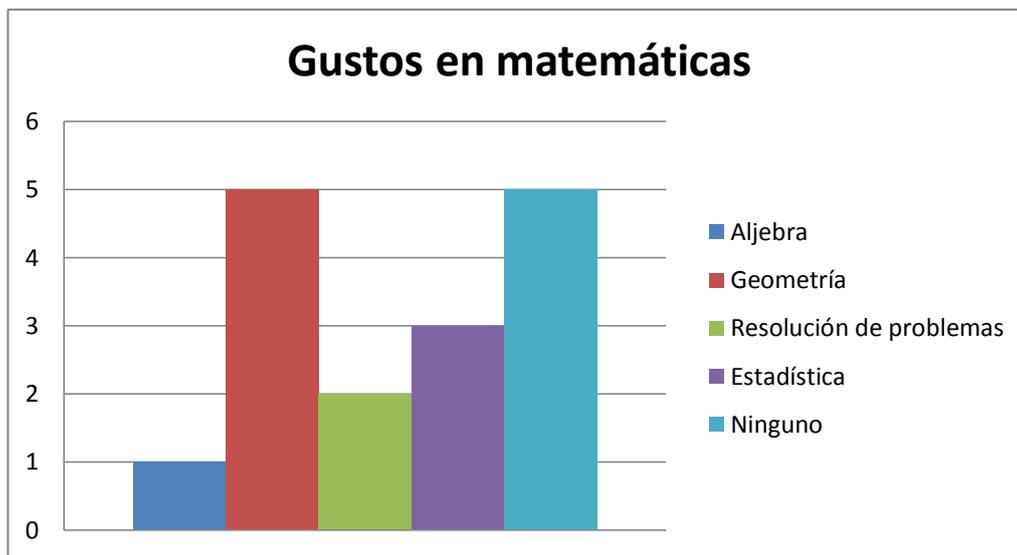


Gráfico N° 7. Gustos en matemáticas. Fuente: Elaboración propia.

### ***B. Implantación de las TIC en clase***

En este segundo bloque se ha querido indagar sobre el uso que dan los alumnos a las nuevas tecnologías y en qué medida las utilizan y con qué fin.

En la primera pregunta de este apartado, se pregunta sobre qué tipo de tecnologías utilizan fuera del aula y cuánto tiempo interactúan con cada una de ellas. A esta pregunta el 100% de los alumnos ha afirmado ver la tele a diario y un 75% dice jugar mucho a los videojuegos. Además, un 81,25% dice usar el ordenador o la Tablet también a diario.

Respecto a la segunda pregunta en la que se plantea si creen que el profesorado emplea otro tipo de recursos diferentes al libro de texto o la pizarra convencional, el 75% afirma que solo algunas veces.

Por último, las respuestas obtenidas de la tercera y última pregunta de este bloque, han quedado reflejadas en el siguiente gráfico:

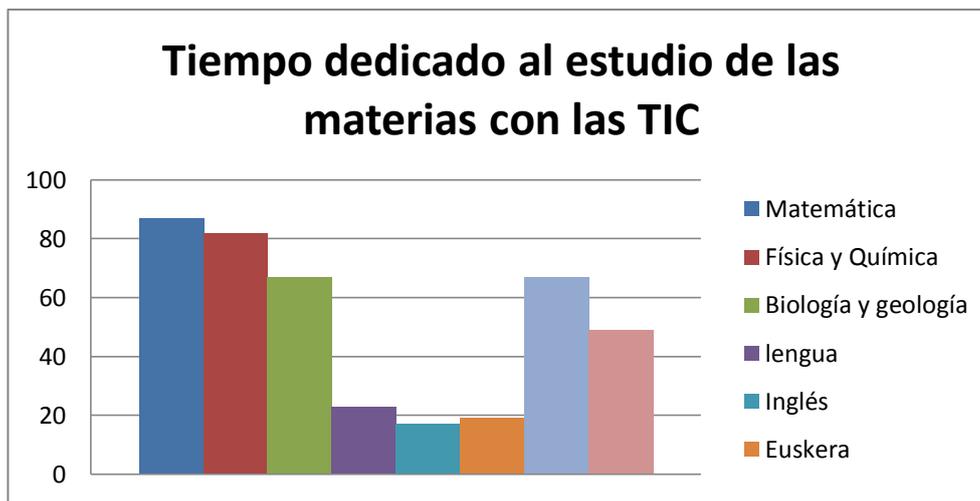


Gráfico N° 8. Uso de TIC en el aula. Fuente: Elaboración propia.

### C. GEOGEBRA

Por último, en el tercer bloque hay 9 preguntas relacionadas con la práctica y utilización de *GeoGebra*.

Ante la primera cuestión sobre si al alumnado le había gustado utilizar el ordenador en la clase de matemáticas, el 100% respondió afirmativamente.

En la segunda pregunta en la que se les plantea si creen que la utilización de este tipo de programas puede mejorar su aprendizaje, el 50% responden que “puede que sí”, el 25% contesta que “seguro que sí” y el 25% restante responde que “no lo sabe”.

En las cuestiones 3º y 4º en las que se les pide expresen su opinión sobre la utilización de este tipo de programas, la mayoría ha respondido de forma favorable indicando que les ha parecido divertido y han apreciado la diferencia con otro tipo de enseñanza más tradicional.

A la pregunta número 5 en las que se les plantea directamente si han adquirido los conceptos de la actividad trabajada, el 93,75% del alumnado ha respondido afirmativamente y el 6,25% restante ha respondido que “bastante”.

En la cuestión planteada en sexto lugar se les pregunta si, en su opinión, la utilización de *GeoGebra* fomenta la imaginación y creatividad y los datos de las respuestas son: el 50% ha respondido que sí, un 12,5% ha dicho que bastante, y el resto, el 37,5% dice que no.

En la séptima pregunta del cuestionario se les plantea si con la utilización de este programa se han sentido más motivados y ante esta cuestión el 62,5% ha dicho que sí, el 12,5% ha dicho que igual, y el resto ha respondido que no.

Las dos últimas preguntas que hacen los números 8 y 9, son preguntas que admiten múltiples respuestas. En la número 8 se les pide reflejen lo que más les ha gustado y lo que menos y estas son las respuestas:

*Lo que más:*

- ✓ Ha sido divertido y entretenido
- ✓ Se puede trabajar también desde casa
- ✓ Se entiende mejor
- ✓ Me he quedado con ganas de más
- ✓ No hace falta ni libro ni cuaderno

*Lo que menos:*

- ✓ Al principio me he liado un poco
- ✓ Tardaba mucho en cargar

Por último y en la última cuestión en la que se les pedía alguna propuesta de mejora, solamente un alumno respondió y propuso “hacer los exámenes con *GeoGebra*”.

#### **4.6. INTERPRETACIÓN GLOBAL DE LOS RESULTADOS**

Como conclusión de este trabajo se deduce que el profesorado se siente interesado en aplicar las nuevas tecnologías a su práctica educativa pero la falta de formación hace que se sientan inseguros y no den el paso para un cambio metodológico aunque reconozcan las mejoras que implicaría. Sería necesario el planteamiento de unos planes de formación efectivos que impliquen a todo el profesorado y que les procure las herramientas necesarias para mejorar su práctica educativa.

La introducción de las TIC supone un gran avance y este se produce de forma tan rápida que el profesorado no siempre posee la formación suficiente. Además la utilización de nuevos recursos debe hacerse con total seguridad y garantía de éxito por lo que es necesario invertir en formación para asegurar la viabilidad y utilidad de los mismos.

Cabe mencionar que el profesorado mencionado en este trabajo ha manifestado en todo momento una receptividad digna de mención.

En cuanto al alumnado, se ha demostrado que se siente mucho más motivado ante la utilización de programas como *GeoGebra* que ante el trabajo con el libro de texto y esto supone un acicate que se debería aprovechar más. Se debe tener en cuenta que nos encontramos antes un alumnado de “nativos digitales” para quienes las nuevas tecnologías forman parte de su vida diaria en todos sus aspectos (lúdico, de comunicación, formación, información, etc.) y la utilización de estas herramientas supone incorporar a su proceso de enseñanza aprendizaje los recursos que les son muy familiares, cercanos y motivadores.

Los alumnos han trabajado con entusiasmo este programa que tiene, además, a su favor el que no haya necesidad de instalarlo sino que basta con conexión a internet y Java. Además, y puesto que cada alumno puede disponer de un ordenador, se ha podido trabajar de forma individualizada respetando los diferentes ritmos, capacidades y destrezas.

El resultado se ha valorado de forma muy positiva ya que los dos colectivos implicados, docentes y alumnos, han mostrado su satisfacción aunque en diferentes grados y sería necesaria una mayor inversión para incentivar y generalizar su utilización. El hecho de dar a conocer el programa ya ha supuesto un avance y ha despertado tanto en profesores como en los alumnos la intención y el deseo de seguir avanzando en su conocimiento y utilización.

## **5. PROPUESTA DIDÁCTICA**

### **5.1. INTRODUCCIÓN**

Como se ha ido mencionando a lo largo del presente trabajo, el objetivo de esta investigación es analizar las ventajas y/o desventajas del uso de las TIC, en este caso *GeoGebra*, para la enseñanza-aprendizaje de geometría analítica en el aula de matemáticas de 4º de la ESO.

Esta propuesta didáctica está fundamentada por las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de la geometría analítica y en la ayuda que supone tener a nuestro alcance recursos tecnológicos que ayuden a superarlas. El alumnado que llega a las aulas suele ser experto en utilización de las nuevas tecnologías y el profesorado debe actualizarse para atender a sus necesidades con un plan de formación que les permita acceder y utilizar todos los recursos TIC.

La geometría analítica, se da a conocer por primera vez en 2º y 3º de la ESO. Se ha elegido este tema no solo por motivos ya mencionados anteriormente, sino también porque contribuye a la mejora de las estructuras mentales del alumno y a la adquisición de cualidades como la constancia, la perseverancia, la creatividad, así como una mayor capacidad para adquirir una amplia gama de saberes y habilidades.

Los contenidos que se van a impartir en esta propuesta están fundamentados en el libro de texto de Matemáticas de la editorial Anaya.

Con esta propuesta didáctica se pretende trabajar los conceptos de vectores, operaciones con vectores, punto medio de un vector, alineación de puntos, distancia entre puntos, paralelismo y perpendicularidad utilizando el software *GeoGebra* para lo que previamente se les dará a los alumnos una explicación general con ejercicios prácticos que les permitirán conocer la utilización de las herramientas para posteriormente comenzar a trabajar los conceptos propiamente dichos.

### **5.2. OBJETIVOS**

El objetivo de esta investigación es analizar las ventajas y/o desventajas del uso de *GeoGebra* y estudiar la eficacia de su utilización en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría analítica en un aula de 4º de la ESO. Se pretende mostrar que con su utilización, el profesorado se siente más realizado porque se le facilita su trabajo y porque se consigue mejorar los resultados. De la misma manera, el alumnado se muestra mucho más motivado porque la utilización de recursos tecnológicos forma

parte de su bagaje personal como nativos digitales que son y esto supone romper ya muchas barreras.

Con esta propuesta se pretende además que los estudiantes que cursan la asignatura geometría analítica, superen los errores y dificultades con que se encuentran y permitan orientarlos en la interpretación y comprensión de estos conceptos.

Mediante esta propuesta, se espera que los alumnos comprendan los conceptos básicos de la unidad y sepan utilizarlos de manera adecuada. Se pretende también que desarrollen unas estrategias y métodos matemáticos para interpretar y solucionar problemas de la vida cotidiana. Además, es importante que sepan expresar situaciones matemáticamente y llevar a cabo un procedimiento para su resolución.

Podemos dividir estos objetivos en dos tipos: los curriculares (del currículo) y los didácticos (de la propuesta didáctica).

### **5.2.1. Objetivos Curriculares**

Los objetivos curriculares basados en el Real Decreto 175/2007 de la propuesta que se plantea para enseñar geometría analítica a alumnos de 4º de la ESO, son los siguientes:

- Saber representar puntos en el plano con un sistema de coordenadas  $(x, y)$ .
- Conocer el punto central de un vector, o un punto simétrico respecto a otro punto.
- Averiguar si tres puntos dado se encuentran alineados o no.
- Saber representar en el plano rectas y vectores definidos de diversos modos (expresión algebraica, dos puntos, pendiente y punto, etc.)
- Operaciones entre vectores.
- Comprender el concepto de pendiente de una recta y saber interpretarla.
- Comprender las condiciones de perpendicularidad y paralelismo entre dos rectas o vectores atendiendo a sus pendientes.
- Conocer las distintas ecuaciones para representar una misma recta y saber desarrollarlas.
- Saber obtener a través de la representación gráfica de una recta, su expresión algebraica. Conseguir también dicha expresión conociendo dos puntos de una recta, su pendiente y un punto, o posición relativa respecto a otra recta y un punto.
- Conocer cómo calcular la distancia en unidades entre dos puntos, punto y recta o dos rectas paralelas.

### 5.2.2. Objetivos Didácticos

Los objetivos didácticos son los que recogen de manera clara y precisa la intención de la propuesta didáctica. Son los siguientes:

- Desarrollar la visión de vectores en el plano así como sus operaciones de manera gráfica.
- Aprender a usar *GeoGebra* para la resolución de problemas geométricos.
- Plantear, resolver y representar problemas de la vida cotidiana a través de la geometría analítica.
- Desarrollar capacidades para visualizar las propiedades de los vectores y sus formas.
- Aprender a razonar. Comprender los resultados obtenidos de los ejercicios.
- Aprender a aplicar la geometría analítica a otros contextos de las matemáticas.

### 5.3. COMPETENCIAS

En este apartado se detalla la contribución que esta propuesta didáctica hace a las competencias básicas que se establecen en el currículo:

- *Competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico.*

La resolución de problemas de la vida real.

- *Competencia para aprender a aprender.*

Los contenidos geométricos trabajados ayudan al alumno a desarrollar destrezas como la autonomía, la reflexión, la perseverancia y la crítica constructiva. Participar de forma activa en el aprendizaje personal.

- *Competencia matemática.*

Mediante el desarrollo de conceptos matemáticos. Utilizando el lenguaje matemático representar adecuadamente los conceptos y desarrollar los problemas mediante los datos y estrategias adecuadas.

- *Competencia en comunicación lingüística.*

En la resolución de problemas a través del razonamiento, en la expresión de la formulación y expresión de ideas. Interpretar adecuadamente los textos y la información tanto oral como escrita.

- *Tratamiento de la información y competencia digital.*

A través de la utilización del software informático *GeoGebra* para geometría analítica o incluso otro tipo de recursos como por ejemplo, la pizarra digital, proyecciones, etc.

- *Competencia social y ciudadana.*

A través de un enfoque constructivista de los errores cometidos en la resolución de problemas.

- *Autonomía e iniciativa personal.*

Mediante la planificación de estrategias en el proceso de resolución de problemas, la toma de decisiones y asumiendo nuevos retos.

## 5.4. METODOLOGÍA

Como hemos visto anteriormente, la geometría analítica es la parte de las matemáticas que estudia la geometría desde cálculos algebraicos y funciones. Por lo tanto, para poder trabajar este bloque de las matemáticas, es imprescindible tener conocimientos de álgebra y funciones.

Las sesiones de la propuesta práctica tendrán lugar en el aula de informática para que los alumnos puedan disponer de un ordenador para cada uno. Todos los ordenadores estarán provistos de internet y además se deberá disponer de una pizarra digital para dar las explicaciones.

La PDI jugará un papel muy importante ya que se podrá trabajar con ella de manera grupal con el aula al completo y se fomentará la participación de los alumnos y esto hará que se ofrezcan muchos voluntarios para hacer demostraciones en la misma junto con sus compañeros.

La temporización de los contenidos que se impartirán en esta propuesta práctica se muestra a continuación, teniendo en cuenta que cada sesión tendrá una duración de 50 minutos aproximadamente y estará dividida en varias acciones mostradas en la siguiente tabla:

**Tabla Nº 4. Temporización y tipo de acciones a realizar por el profesor en cada sesión.**

SESIÓN	Conceptos a estudiar	Acciones
1º	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introducción.</li> <li>• Vectores en el plano.</li> <li>• Operaciones con vectores.</li> </ul>	1ª Información básica de la herramienta <i>GeoGebra</i> . 2ª Explicación teórica. 3ª Propuesta de actividades para realizar manualmente. 4ª Realizar las mismas actividades con <i>GeoGebra</i> . 5ª Corrección de las actividades entre todos con PDI. 6ª Propuesta de otros ejemplos de actividades por parte de los alumnos.
2º	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Punto medio de un vector.</li> <li>• Punto simétrico respecto a otro punto.</li> </ul>	1ª Recogida de información. 2ª Explicación teórica. 3ª Propuesta de actividades para realizar manualmente. 4ª Realizar las mismas actividades con <i>GeoGebra</i> . 5ª Corrección de las actividades entre todos con PDI. 6ª Propuesta de otros ejemplos de actividades por parte de los alumnos.

3º	• Comprobar que tres puntos están alineados.	1ª Recogida de información. 2ª Explicación teórica. 3ª Propuesta de actividades para realizar manualmente. 4ª Realizar las mismas actividades con <i>GeoGebra</i> . 5ª Corrección de las actividades entre todos con PDI. 6ª Propuesta de otros ejemplos de actividades por parte de los alumnos.
4º	• Distancia entre dos puntos.	1ª Recogida de información. 2ª Explicación teórica. 3ª Propuesta de actividades para realizar manualmente. 4ª Realizar las mismas actividades con <i>GeoGebra</i> . 5ª Corrección de las actividades entre todos con PDI. 6ª Propuesta de otros ejemplos de actividades por parte de los alumnos.
5º	• Ecuaciones de la recta.	1ª Recogida de información. 2ª Explicación teórica. 3ª Propuesta de actividades para realizar manualmente. 4ª Realizar las mismas actividades con <i>GeoGebra</i> . 5ª Corrección de las actividades entre todos con PDI. 6ª Propuesta de otros ejemplos de actividades por parte de los alumnos.
6º	• Paralelismo y perpendicularidad.	1ª Recogida de información. 2ª Explicación teórica. 3ª Propuesta de actividades para realizar manualmente. 4ª Realizar las mismas actividades con <i>GeoGebra</i> . 5ª Corrección de las actividades entre todos con PDI. 6ª Propuesta de otros ejemplos de actividades por parte de los alumnos.
7º	• Posición relativa entre dos rectas.	1ª Recogida de información. 2ª Explicación teórica. 3ª Propuesta de actividades para realizar manualmente. 4ª Realizar las mismas actividades con <i>GeoGebra</i> . 5ª Corrección de las actividades entre todos con PDI. 6ª Propuesta de otros ejemplos de actividades por parte de los alumnos.
8º	• Problemas de repaso.	1ª Recogida de información. 2ª Propuesta de actividades para realizar manualmente. 3ª Realizar las mismas actividades con <i>GeoGebra</i> . 4ª Corrección de las actividades entre todos con PDI.

*Nota.* Temporalización y tipo de acciones a realizar por el profesor en cada sesión.  
Fuente: Elaboración propia.

#### 5.4.1. Acciones a realizar en cada sesión

Tal y como puede observarse en la tabla se plantean un máximo de 6 fases en cada sesión, cada una de las cuales se describen y explican detalladamente a continuación:

##### A) 1ª Acción: Información básica de la herramienta *GeoGebra*

Esta acción formará parte exclusivamente de la primera sesión y tendrá una duración de media hora.

Aquí se comenzará haciendo una presentación general del software y mencionando las ventajas que este puede ofrecer a la hora de aprender matemáticas.

Además se repartirá entre los alumnos un pendrive para que puedan descargarse el manual del software con sus herramientas y comandos más utilizados por si quieren disponer de mayor información.

Esta fase consistirá básicamente en una clase magistral impartida por el profesor con la colaboración de la PDI y *GeoGebra*. Mediante estos recursos se explicarán los conceptos principales del área de geometría analítica y se han plantearán ejemplos visuales que serán adquiridos y comprendidos muy rápidamente por los alumnos.

En las sesiones posteriores las dificultades de los alumnos para manejar el programa ya serán mínimas, por lo que esta fase se incluirá únicamente en la primera sesión.

Se les pedirá a los alumnos que manifiesten su impresión, sus dificultades y sus expectativas respecto al programa utilizado. En la evaluación final de la propuesta pondrán de manifiesto su entusiasmo y su deseo de seguir utilizando este software.

#### *B) 2ª Acción: Recogida de información*

En esta acción se pretende realizar un pequeño repaso o revisión sobre lo aprendido hasta ese momento mediante una tormenta de ideas. Se espera que los alumnos respondan de forma satisfactoria recordando prácticamente todo lo trabajado en las sesiones anteriores. De esta manera, se comenzará la clase de manera muy dinámica y haciéndola participativa por parte del alumnado respondiendo a las expectativas del profesorado y de los alumnos, evitando así una clase en la que los alumnos se limitan a tomar apuntes.

Esta acción se llevará a cabo en todas las sesiones a excepción de la primera y tendrá una duración aproximada de 10 minutos.

#### *C) 3ª Acción: Explicación teórica*

Esto consistirá en una clase magistral en la que el profesor explicará los conceptos a estudiar en cada sesión. En las clases magistrales la importancia se centra fundamentalmente en la labor del docente y su transmisión de conocimientos. Los alumnos serán simples receptores de la información, es decir, sujetos pasivos. Sin embargo, se introducirá una PDI con intención de buscar una mayor interactividad con el alumnado y al utilizar herramientas de trabajo digitales se tratará de que de forma natural en muchas ocasiones ellos mismos sean los que construyan sus propios conocimientos.

Esta acción por parte del profesor se llevará a cabo en las sesiones 1º, 2º, 3º, 4º, 5º y 6º. Tendrá una duración aproximada de entre 10 y 20 minutos, dependiendo de los conceptos que se expliquen.

*D) 4ª Acción: Propuesta de actividades para realizar manualmente*

Esta acción, al igual que la sesión anterior, se llevará a cabo en todas y cada una de las sesiones y tendrá una duración de 5 minutos por actividad a realizar. El número de actividades que se realicen dependerá del tiempo disponible en cada sesión.

Se comenzará dando explicaciones concisas sobre los ejercicios a realizar y sobre el tiempo del que dispondrán los alumnos para realizar dichos ejercicios.

Se plantearán a los alumnos unos problemas de complejidad creciente dándoles todos los datos y se les pedirá que investiguen las posibles estrategias para su resolución utilizando los medios y recursos de los que ellos dispongan. Ante las soluciones o modos de resolución planteados, entre todos se discutieron las que serían más eficaces. Esto provocará algunos debates muy interesantes porque reflejarán las inquietudes y las diferentes maneras de enfocar una misma cuestión. Este planteamiento se realizará en unas de las sesiones de forma individual y en otras en pequeños grupos aunque en ambos casos se realizará al final una puesta en común para sacar conclusiones entre todos.

En la formación de grupos se tendrá en cuenta que sean heterogéneos agrupando a alumnos con diferentes niveles de madurez y capacidades para trabajar además la cooperación. Por otro lado, en las actividades realizadas de forma individual se podrá hacer una incidencia mayor atendiendo a las necesidades individuales.

*E) 5ª Acción: Realizar las mismas actividades con GeoGebra*

Al igual que en las acciones anteriores, se hará en todas las sesiones y tendrá también una duración de 5 minutos por actividad que se realice.

Una vez planteada la forma de resolver una actividad, se les propondrá a los alumnos utilizar el software objeto de trabajo para hacerles ver sus características, efectividad y efecto visual.

Primeramente en pequeños grupos y posteriormente de forma individual comenzarán a utilizar el programa para resolver los problemas que se les han planteado en la fase anterior. En su utilización surgirán algunos problemas lógicos debidos a la falta de manejo y desconocimiento de algunas herramientas pero estas dificultades serán rápidamente subsanadas porque investigarán la funcionalidad de todos los iconos y enseguida visualizarán su funcionalidad. Aquí surgirán actitudes de rivalidad y competitividad que harán que la clase sea mucho más dinámica.

Ante el descubrimiento de este programa se pretenderá que el alumnado reaccione de forma muy positiva porque les resultará atrayente desde el principio. Esto provocará que rápidamente manifiesten su deseo de comenzar a utilizar el programa.

También se les pedirá a los alumnos que manifestaran su impresión, sus dificultades y sus expectativas respecto al programa utilizado. Los alumnos podrán comprobar que la utilización del software facilita la resolución de las actividades además de facilitar la visualización de las figuras.

Sin embargo, es importante recalcar que *GeoGebra* es solo una herramienta o un medio más, pero el verdadero fin de esta práctica será enseñar geometría analítica a los alumnos de 4º de la ESO.

#### *F) 6ª Acción: Corrección de las actividades entre todos con PDI*

Esta acción se llevará a cabo en todas las sesiones y tendrá una duración de 15 minutos aproximadamente. Se procurará no alargar esta sesión más del tiempo debido, por lo que se corregirán exclusivamente las actividades que más problemas hayan causado a los alumnos en su elaboración

Se formarán otros grupos para resolver las actividades propuestas en las fases anteriores y se realizarán de forma muy dinámica y con buen ritmo de trabajo con los ordenadores. La formación de los grupos, como se ha mencionado anteriormente, será realizada por el profesor teniendo en cuenta las características del alumnado y buscando que sean heterogéneos. Al final se realizarán comprobaciones en la PDI para corregir las actividades y comprobar si la utilización de este recurso cumple el objetivo real que es mejorar los resultados del alumnado en el bloque de geometría analítica

Se pedirán voluntarios para salir a la pizarra y hacer y corregir los ejercicios con la ayuda de sus compañeros, consiguiendo así una clase dinámica y cooperativa en la que se han aprendido nuevos conceptos de manera clara y sin apenas ninguna duda.

Se espera que la respuesta de los alumnos ante esta propuesta de trabajo sea muy positiva demostrando con ello su interés por participar de forma activa en la realización de las tareas.

El trabajo en grupo es muy importante aquí, ya que en un equipo se dispone de más información para trabajar porque se suman las informaciones de sus miembros. El hecho de haber varias opiniones enriquece el trabajo ya que se presentan diferentes puntos de vista. El formar parte de un grupo favorece la motivación y hace que el sentido de pertenencia a un grupo fomente el esfuerzo por jugar un papel fundamental en él. Además, las decisiones adoptadas dentro de un grupo siempre tienen mayor aceptación en el resto. También en los trabajos de equipo se fomenta la cooperación entre ellos y se ayuda a aquellos miembros que presentan mayores dificultades. Es

decir, el grupo se nutre de las ideas de sus miembros. Cada estudiante tiene una mirada única sobre las cosas y por eso pueden presentar ideas y conceptos de maneras diferentes. Las ideas presentadas pueden ser discutidas por todo el grupo para encontrar las que se atengan mejor a su necesidad o las que sean más efectivas. El grupo puede ser creativo para pasarse las ideas entre sus integrantes para encontrar las mejores soluciones a los problemas o las tareas ante las que se encuentran.

Es importante tener en cuenta también que no hay un solo estudiante que sea bueno en todo. Un estudiante bueno en matemática puede no serlo en inglés o un estudiante bueno en los deportes puede ser que no sea tan bueno en otras actividades. En un grupo, los individuos pueden compartir las habilidades en las que son buenos y encabezar un proyecto que sienten que pueden desarrollar bien. Por ello, esta es una gran oportunidad para que los miembros del grupo aprendan las habilidades y talentos de unos y otros.

*G) 7ª Acción: Propuesta de otros ejemplos de actividades por parte de los alumnos*

Esta se llevará a cabo en todas las sesiones a excepción de la última, y tendrá una duración máxima de 15 minutos.

En los últimos minutos de la sesión se les dejará que ellos mismos propongan actividades y problemas para que los resuelvan de forma autónoma.

Los problemas propuestos serán trabajados en pequeño grupo de tal manera que cada grupo proponga una serie de actividades al resto. Se pretenderá que dentro de cada grupo se potencie la creatividad y la competitividad que surja entre ellos servirá para crear problemas más complejos.

La batería de problemas que surgirán de esta actividad servirán para posteriores sesiones o para trabajar en otros grupos.

**5.4.2. Actividades prácticas**

Existen varias plataformas donde se recogen problemas de matemáticas de todo tipo. Estas son algunas de las páginas web más interesantes para trabajar con *GeoGebra*:

**Tabla N° 5. Páginas web interesantes para trabajar con *GeoGebra*.**

Web de <i>GeoGebra</i>	<a href="http://www.geogebra.org/cms/es/download/">http://www.geogebra.org/cms/es/download/</a>
<i>GeoGebra</i> online	<a href="http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html">http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html</a>
<i>GeoGebra</i> en Google Chrome Web Store	
<i>GeoGebra</i> en Drive de Gmail	

Geogebra 3D (beta)	<a href="http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp">http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp</a>
Tutoriales	<a href="http://geogebra.es/cvg/manual/index.html">http://geogebra.es/cvg/manual/index.html</a>
Videotutoriales de Manuel Sada	<a href="https://sites.google.com/site/bideotutorialak/geogebra">https://sites.google.com/site/bideotutorialak/geogebra</a>

*Nota:* Páginas web interesantes para trabajar con *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia a partir de Manuel Sada (2005).

Sin embargo, una de las webs interactivas de matemáticas para educación secundaria que más se utilizará es la propuesta por Manuel Sada. Los materiales que se presentan en esta página son colecciones de otras direcciones web de contenido matemático.

Aquí, las actividades están agrupadas por temáticas y están pensadas para ser utilizadas o bien por el profesor en su labor de docente, o por los propios alumnos para realizar los ejercicios con el ordenador.

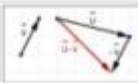
	Áreas		Familias de Funciones elementales
	Medidas de ángulos		Derivadas e Integrales
	Puntos y Rectas notables de un triángulo		Problemas de Optimización
	Movimientos y transformaciones en el plano		Trigonometría
	Teorema de Pitágoras		Distribución normal
	Geometría analítica: Vectores y Rectas		Igualdades Notables
	Cónicas		Cicloides y Trocoides
	Disecciones		

*Figura N° 7.* Clasificación del material de matemáticas agrupado por temas en la web de Manuel Sada. Fuente: Manuel Sada (2005).

El apartado de geometría analítica se encuentra dividido en dos secciones: vectores y rectas. Este consta de una serie de actividades para trabajar la geometría analítica en 4º de la ESO.

La primera mitad de las actividades hacen referencia a los vectores, operaciones entre vectores, etc. La segunda mitad de las actividades está dedicada a las rectas, ecuaciones de las rectas, posiciones relativas, etc.

## Vectores

	<a href="#">Vectores</a>		<a href="#">Resta de vectores</a>
	<a href="#">Producto de un número por un vector</a>		<a href="#">Combinación lineal</a> <a href="#">Figura 1</a> <a href="#">Figura 2</a> <a href="#">Figura 3</a>
	<a href="#">Suma de vectores</a>		<a href="#">Producto escalar</a>

## Rectas

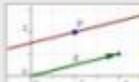
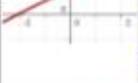
	<a href="#">Determinación lineal de una recta</a>		<a href="#">Ecuación explícita: pendiente y ordenada en el origen</a>
	<a href="#">Ecuación vectorial de la recta</a>		<a href="#">Rectas con la misma pendiente</a>
	<a href="#">Ecuaciones de la recta</a>		<a href="#">Paralelismo y perpendicularidad</a>
	<a href="#">Recta por dos puntos</a>		<a href="#">Ejercicios y sus Soluciones</a>

Figura N° 8. Actividades para trabajar geometría analítica en 4º de la ESO. Fuente: Manuel Sada (2005).

### 5.4.3. Ejemplo de actividad

Partiendo de la ecuación general de una recta,

$$Ax + By + C = 0$$

Despejando la  $y$  obtendremos la ecuación explícita de la recta:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad y = mx + n$$

Siendo  $m$  la pendiente de la recta y  $n$  ordenada en el origen de una recta, siendo  $(0, n)$  el punto de corte con el eje OY.

Un ejemplo de una actividad podría ser el siguiente:

- *Hallar la ecuación explícita de una recta que pasa por A (2, 3) y tiene una pendiente de  $m = -1$ .*

Resuelto a mano se haría lo siguiente:

$$y - 3 = -1(x - 3); \quad y = -x + 6$$

Quedando así el resultado de la ecuación y dibujándola en un sistema de coordenadas. Por lo tanto, quedará una recta con pendiente  $m=-1$  y ordenada  $n = 6$ .

En el planteamiento del ejercicio escrito solo se pueden dar unas variables, sin embargo, en el planteamiento del ejercicio con *GeoGebra*, tal y como se muestra en la siguiente figura, estas variables se pueden ir modificando a medida que se realiza el ejercicio para que el alumnado vea las variaciones que se producen cambiando los parámetros, facilitando así su comprensión y la adquisición de conceptos.

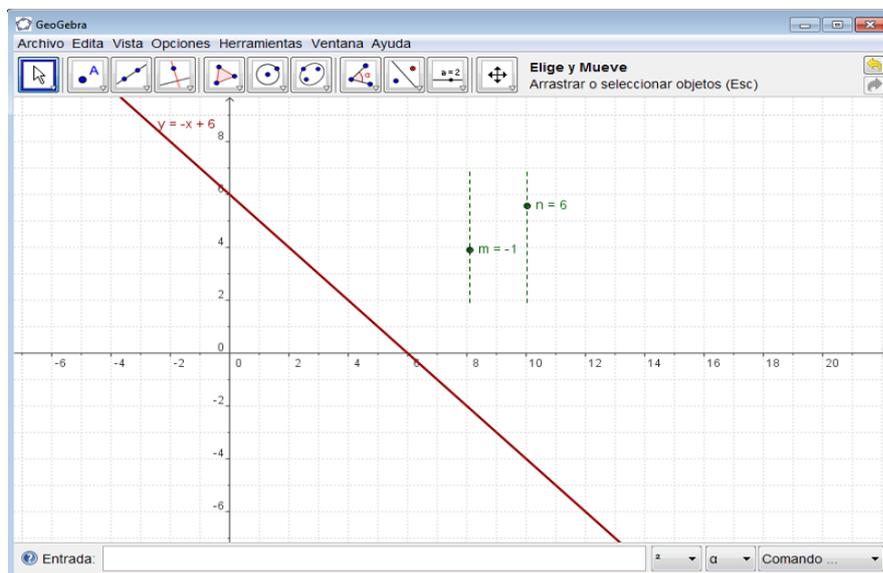


Figura N<sup>o</sup> 9. Captura de pantalla de ejercicio resuelto con *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia.

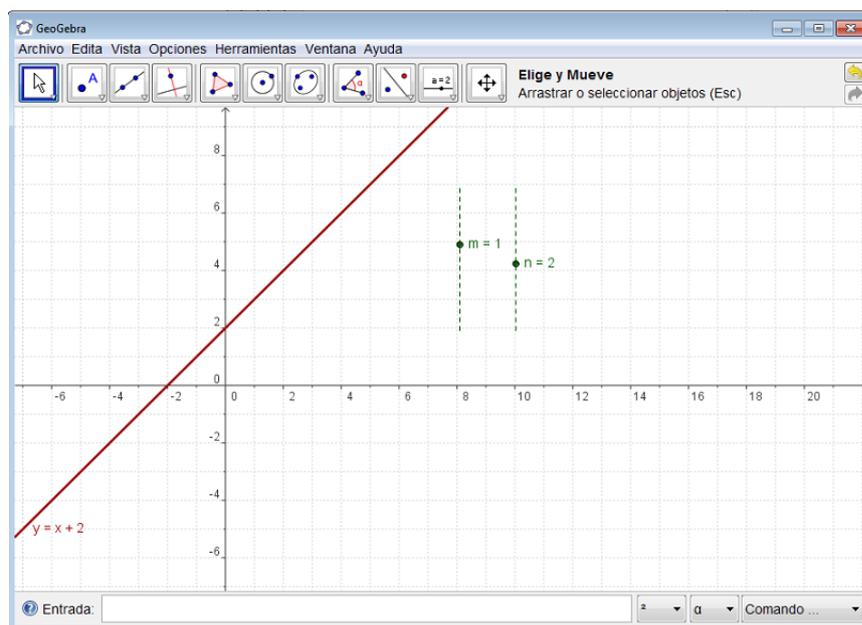


Figura N<sup>o</sup> 10. Captura de pantalla de variante del ejercicio resuelto con *GeoGebra*. Fuente: Elaboración propia.

## 6. APORTACIONES DEL TRABAJO

La aportación principal del trabajo consiste en mostrar un modo más significativo de enseñar la geometría analítica en 4º de la ESO mediante *GeoGebra*, consiguiendo que los alumnos adquieran conocimientos desde la comprensión de los conceptos y no mediante algoritmos o batería de problemas. Hoy en día es imprescindible la utilización de las TIC y debemos aprovechar todos los recursos que nos ofrecen las nuevas tecnologías para conseguir que nuestros alumnos avancen en los conocimientos y alcancen los objetivos propuestos con todos los medios a nuestro alcance.

Se pretende proporcionar evidencias, estrategias e ideas que sean de utilidad a otros docentes que se dedican a incorporar *GeoGebra* en sus clases. La formación que recibe el profesorado sobre este tema es escasa y limitada. Además, los talleres que se ofrecen son de corta duración y escasa información muy general, por lo que no cubren la cuestión de cómo integrar este software con éxito en la enseñanza-aprendizaje de la geometría analítica. Además, muchos talleres se centran en dar un curso sobre el funcionamiento de la aplicación y no en cómo aprender y/o enseñar el tema en cuestión mediante *GeoGebra*.

Es importante tener en cuenta que, hoy por hoy, cualquier propuesta educativa debe considerar la introducción de las TIC, la adecuada para cada nivel o materia, y por ello debe estudiarse profundamente cómo realizar esta integración. Cada Centro debería disponer de un banco de recursos para que no dependa de cada profesor la investigación o búsqueda de materiales que faciliten su labor educativa.

Cabe mencionar que este trabajo únicamente ha abierto una vía que permite seguir buscando nuevas actividades y metodologías. Se podría complementar con otros trabajos sobre utilización o desarrollo de otros programas educativos que son muy valiosos por sus aportaciones, por facilitar la labor educativa pero que son difíciles de integrar por el desconocimiento o las dificultades que supone para el profesorado su implementación. Se debe ayudar a extender y a formar a los docentes haciendo que sean vistos como una ayuda y no como un trabajo “extra” que supone más esfuerzo y carga. El trabajo de actualización y perfeccionamiento del profesorado es aún hoy una tarea pendiente en la que la mayor parte del esfuerzo aún recae en la voluntariedad personal. Tiene que ser las instituciones quienes garanticen y aseguren una formación general y orientada a mejorar nuestro sistema educativo.

## 7. DISCUSIÓN

En la didáctica de geometría analítica es importante que el alumno pueda emplear recursos que le faciliten la adquisición de conceptos de un modo significativo. Sin embargo, tampoco podemos abusar y evitar que el alumno adquiera destrezas a la hora de desarrollar algoritmos matemáticos. Es importante sobre todo en alumnos de enseñanzas superiores que no cometan errores de cálculo manual por lo que será uno de los elementos a evaluar.

Tal y como se mencionaba al comienzo del trabajo, según Moya (2009), las nuevas tecnologías ofrecen beneficios para llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje, dando mayor diversidad a la enseñanza y adecuando el aprendizaje a las necesidades e intereses de los alumnos. Sin embargo, no se pone en práctica en el aula. La carga de trabajo de los profesores, el poco tiempo del que disponen para innovar, etc. parece estar afectando a la implantación de las TIC de un modo efectivo en las aulas.

Además, tal y como se ha comentado sobre el estudio que Sandoval (2009) realizó se demostraba que para los alumnos y alumnas era más fácil entender los conceptos demostrando que los resultados tienden a repetirse variando las condiciones. No obstante, se debe tener cuidado y no limitar estas explicaciones a la comprensión exclusiva del software. Se debe tener en cuenta que *GeoGebra* no es el verdadero fin de la práctica, sino que es un medio para una mejor comprensión del área de estudio de las matemáticas.

Por último, y no por ello menos importante, cabe mencionar que la formación del profesorado debe ser continua y dinámica y se deberían incluir más sesiones prácticas de aplicación en las aulas que les permitan adquirir mayor seguridad en su empleo. Es por ello que deberán cambiar algunos aspectos de su metodología y mostrarse más dispuestos a interactuar con nuevos recursos. Aún queda un largo camino por recorrer hasta conseguir que estos recursos estén incluidos en las programaciones didácticas de manera que se sistematice y generalice su utilización ya que a día de hoy la pizarra convencional y el libro de texto siguen siendo los recursos más utilizados.

## 8. CONCLUSIONES

Después de analizar los resultados de este trabajo se puede sacar la conclusión de que la utilización de *GeoGebra* facilita la labor de los docentes y sirve de motivación al alumnado por lo que debería ser utilizado de forma habitual y sistemática en las aulas.

Por parte del profesorado y una vez superada la reticencia inicial mostrada por el desconocimiento y la falta de práctica en su utilización, se ha visto que su disposición es total para afrontar cualquier cambio que suponga una mejora de su práctica educativa. En lo que se debe insistir es en la necesidad de unos planes de formación que sean continuos y que abarquen a todo el profesorado para poder hacer uso de todas las innovaciones que están a nuestro alcance y aceptarlas como una ayuda eficaz y nunca como una carga. Por lo tanto se considera que el objetivo sobre *realizar encuestas a los profesores sobre los conocimientos de las TIC en general y GeoGebra más concretamente y conocer el uso que dan a las mismas en el aula* se ha cumplido.

Además, los alumnos han estado muy receptivos en este trabajo y se ha demostrado que los avances tecnológicos lejos de suponerles un trabajo añadido, son un acicate para atraer su atención y esta es una vía de acceso que no se puede eludir. Se debe aprovechar todo el potencial de que disponen los alumnos del siglo XXI en conocimientos y utilización de las TIC y ponerlos de nuestra parte para trabajar aquellos contenidos que supongan mayor dificultad con el fin de ofrecer alternativas y propiciar los cambios metodológicos que sean necesarios para superar las dificultades. Por lo tanto se considera que el objetivo sobre *realizar encuestas a los alumnos sobre el interés, la motivación y la actitud de los mismos ante las matemáticas aprendidas con GeoGebra* se ha cumplido.

Cabe mencionar también, que pese a encontrarnos con algún inconveniente a la hora de llevar a cabo esta práctica con *GeoGebra*, como en el caso de tener en cuenta que hay conceptos que deben ser trabajado manualmente; estos han sido mínimos si los comparamos con las grandes mejoras que este tipo de aprendizaje puede ofrecernos en la enseñanza de la geometría analítica. La motivación que han mostrado los alumnos, el aprendizaje significativo que estos han mostrado y su fácil manejo han sido solo unos de los beneficios que se han observado. Por lo tanto, se ha cumplido el objetivo sobre *analizar las ventajas y desventajas que ofrece el software GeoGebra para trabajar la geometría analítica en 4º de la ESO*.

En relación al cuarto y último objetivo específico, *investigar los problemas que mayormente se presentan en la enseñanza de la geometría analítica en 4º de la ESO*, se ha comprobado que la falta de una metodología adecuada es lo que principalmente

ocasiona dificultades en la enseñanza y aprendizaje de este bloque. Además, se tiende mucho a homogeneizar recursos sin atender a las necesidades específicas de cada alumno. También es importante tener en cuenta los conocimientos previos de cada alumno, ya que muchos errores en el aprendizaje son consecuencia de conceptos previos erróneos o mal aprendidos.

El objetivo principal planteado al inicio de este documento era *presentar y fundamentar una metodología didáctica para enseñar el bloque de geometría analítica a alumnos de 4º de la ESO, basada en el software GeoGebra*. Debido a las dificultades que el bloque de geometría analítica presenta para el alumnado haciendo que estos respondan de forma pasiva ante las actividades que se les plantean, se ha propuesto una metodología efectiva y motivadora tanto para profesores como alumnado. El resultado de este trabajo demuestra la eficacia de la utilización de recursos TIC, en este caso *GeoGebra*, para conseguir que los alumnos adquieran los conocimientos de geometría analítica de una forma más atrayente, más adaptada a la sociedad actual y siempre con la labor de un profesorado debidamente formado y utilizando una metodología adecuada a la situación que se plantea en cada caso. Con este nuevo planteamiento de trabajo se ha demostrado que la utilización del software *GeoGebra* es eficaz para trabajar la geometría analítica, por lo que se ha alcanzado el objetivo principal. Con los recursos que tenemos a nuestro alcance, con un profesorado debidamente formado y con una metodología adecuada se conseguirá que los alumnos se sientan reconfortados y animados a seguir aprendiendo.

## 9. LIMITACIONES DEL TRABAJO

Aunque las conclusiones muestran que la propuesta didáctica ha resultado válida para trabajar la geometría analítica mediante el software *GeoGebra* en 4º de la ESO, el poco tiempo para la realización de este trabajo ha sido una limitación, ya que no se ha podido profundizar en otros aspectos interesantes o en una práctica más prolongada en el tiempo. Se ha intentado, no obstante, ajustar los datos dentro del marco de trabajo establecido.

Hubiese sido interesante realizar una comparación entre los resultados obtenidos en un examen de geometría analítica entre dos aulas: una con la unidad estudiada con *GeoGebra* y la segunda con recursos convencionales. De esta forma, se hubiese estudiado más profundamente como los alumnos mejoran su aprendizaje gracias a este software y una metodología adecuada. Esta posibilidad hubiera permitido una valoración más clara de los resultados obtenidos. Sin embargo, el tiempo del que se disponía no permitió hacer esta comparativa ya que se hubieran necesitado más sesiones para desarrollarla y analizar los resultados.

Aunque en el marco teórico se mencionaba la utilización de otros programas para la enseñanza de geometría analítica, no se ha podido incluir una metodología para todos ni una comparativa más extensa.

El factor tiempo también ha influido a la hora de tener que acotar el trabajo a un curso determinado y a un bloque determinado. El hecho de acotar la muestra a un grupo y un bloque matemático concreto nos da unos datos precisos de este grupo y bloque concretos. Además, el número de profesores participantes también ha estado limitado así como el hecho de centrarse en un instituto concreto situado en un entorno socio cultural medio.

Esta experiencia ha sido esta ha sido una experiencia aislada y sin continuidad pierde el afán motivador que implica. Por lo tanto, sería importante poder alargar su uso y prescindir de la limitación del tiempo.

## **10. LINEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS**

Principalmente, se podría plantear el estudio de geometría analítica mediante otro tipo de recursos y hacer un estudio sobre las ventajas que ofrece cada uno de los mismos. Se podría permitir la participación de wikis, blogs, etc. o incluso otro tipo de herramientas o programas, lo que abre un infinito campo de posibilidades. Se podría, por lo tanto, ampliar el trabajo con la recogida de información sobre utilización de otros recursos, de otros programas o recursos que se utilicen en el área de matemáticas haciendo una valoración de la utilización y de los resultados obtenidos teniendo en cuenta la mejora o no de los resultados escolares y de cara a su inclusión en los Planes de Mejora de los centros. Por ejemplo, un estudio interesante es el realizado por Gairín y Fernández (2010) sobre cómo enseñar matemáticas con recursos de ajedrez.

Este estudio pretende demostrar la importancia de herramientas como esta que abren un amplio mundo de opciones diferentes y que son realmente y altamente motivadoras. Por ello, sería importante recoger datos de su utilización en otros niveles educativos como Primaria donde su uso aún está en los inicios principalmente por desconocimiento por parte de la mayor parte del profesorado, y también en otras áreas como puede ser la Educación artística, Dibujo técnico, etc. Entre el grupo de profesores se podría hacer una comparativa introduciendo una estadística de utilización de recursos metodológicos basados en las TIC por franjas de edades o habilitación profesional.

Además, se podría también ampliar el muestreo, es decir, varios grupos de alumnos, de varios centros diferentes, con características socio-económicas y culturales diferentes aunque todos del mismo nivel. Se les pasaría el mismo cuestionario y las mismas actividades y se compararían los resultados para ver si se cumple el objetivo de adquisición de conocimientos del bloque matemático que se está trabajando. También se podría hacer comparaciones entre grupos que están habituados a trabajar con medios tecnológicos y recursos web con otros que utilizan una enseñanza tradicional basada en el libro de texto y que introducen este cambio metodológico en su proceso de enseñanza aprendizaje por primera vez.

Para terminar, también se podría considerar el estudio de nuevos recursos que ayuden a aplicar este tipo de metodología sin la necesidad de una extensa preparación de este tipo de actividades. Así el docente no requerirá de demasiado tiempo, recurso que a día de hoy es el más preciado. Este tipo de trabajos suelen servir de ayuda y orientación al profesorado a la hora de decidir los que le pueden resultar más convenientes según el alumnado y además le facilitan la labor de búsqueda que tanto tiempo ocupa en el trabajo docente.

# 11. BIBLIOGRAFÍA

## 11.1. REFERENCIAS

- TICSE 2.0. (2010). *¿Qué opina el profesorado sobre el Programa Escuela 2.0?* Resultados de una encuesta. Recuperado el 25 de abril de 2014 de: [http://ntic.educacion.es/w3//3congresoe20/Informe\\_Escuela20-Prof2011.pdf](http://ntic.educacion.es/w3//3congresoe20/Informe_Escuela20-Prof2011.pdf)
- Alsina, A. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.
- Celaá, I. (2010). *Decretos curriculares para la Educación Infantil, Básica y Bachiller en la Comunidad Autónoma del País Vasco*. País Vasco: Departamento de Educación, Universidades e Investigación.
- Chamoso, J.M. y Miguel, E. (1995). *Materiales y recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas*. Facultad de Educación. Universidad de Salamanca. Disponible en: [http://www.researchgate.net/publication/41555746\\_Materiales\\_y\\_recursos\\_didcticos\\_para\\_la\\_enseanza\\_de\\_las\\_Matemticas\\_El\\_cuenta-drez](http://www.researchgate.net/publication/41555746_Materiales_y_recursos_didcticos_para_la_enseanza_de_las_Matemticas_El_cuenta-drez)
- Comisión Europea (2008). *Comunicación de la Comisión al Consejo y al Parlamento Europeo. Mejorar las competencias en el siglo XXI: agenda para la cooperación europea en las escuelas*. Bruselas: Comisión Europea.
- Real Decreto 138/1983, de 11 de Julio, del Departamento de Educación y Cultura, por el que se regula el uso de las lenguas oficiales en la enseñanza no universitaria en el País Vasco. Disponible en: [http://www.euskadi.net/cgi-bin/k54/ver\\_c?CMD=VERDOC&BASE=B03J&DOCN=000031663&CONF=/config/k54/bopv\\_c.cnf](http://www.euskadi.net/cgi-bin/k54/ver_c?CMD=VERDOC&BASE=B03J&DOCN=000031663&CONF=/config/k54/bopv_c.cnf)
- Real Decreto 175/2007, de 16 de Octubre, del Departamento de Educación y Cultura, por el que se establece el currículo de la Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco (BOPV del 13 de noviembre). Disponible en: [http://www.lehendakaritza.ejgv.euskadi.net/r48-bopv2/es/bopv2/datos/2007/11/s07\\_0218.pdf](http://www.lehendakaritza.ejgv.euskadi.net/r48-bopv2/es/bopv2/datos/2007/11/s07_0218.pdf)
- EACEA (2012). *Enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales*. Bruselas: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Engler, A. Hecklein, M. Vrancken, S. Müller, D. Gregorini, M. I. (2002). *Los errores en el aprendizaje de Matemática*. Universidad Nacional del Litoral, Facultad de

- Ciencias Agrarias. Disponible en:  
<http://www.soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf>
- Ferrer, R. (2012). *Fracaso escolar y TIC*. Recuperado el 28 de abril de 2014 de:  
<http://rodrigoferrergarcia.blogspot.com.es/2012/05/fracaso-escolar-y-tic.html>.
- Gairin, J. y Fernández, J. (2010). *Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez. Tendencias pedagógicas*. Universidad Autónoma de Madrid. Departamento de Didáctica y Teoría de la Educación. Recuperado el 28 de abril de 2014 de:  
<https://repositorio.uam.es/xmlui/handle/10486/4618>.
- García M. M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula*. Universidad de Almería, Facultad de Ciencias de la Educación. Disponible de:  
[file:///D:/Users/Marta/Desktop/Tesis\\_MariadelMarGarciaLopez.pdf](file:///D:/Users/Marta/Desktop/Tesis_MariadelMarGarciaLopez.pdf)
- Hernández, V. y Villalba, M. (2001, febrero). *Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICM. Recuperado el 28 de abril de 2014 de:  
<http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm>.
- Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 2, 213-223. Disponible en:  
<http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>
- ISEI / IVEI. (2004). *Investigación: Integración de las TIC en centros de ESO*. País Vasco: Departamento de Educación, Universidades e Investigación.
- Lehman, C. (1989). *Geometría analítica*. México: Limusa
- Losada, R. (2011). *GeoGebra, la eficiencia de la intuición*. Recuperado el 20 de abril de 2014 de: <http://www.iespravía.com/rafa/rafa.htm>
- Macías, D. (2007). *Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Instituto de Estudios Superiores de Tamaulipas. Disponible en:  
<http://www.rieoei.org/deloslectores/1517Macias.pdf>
- Martín, C. (2008). *Programación de Matemáticas 1º, 2º, 3º y 4º ESO*. Recuperado el 22 de mayo de 2014 de: [http://www.elaprendiz.es/program\\_MS.pdf](http://www.elaprendiz.es/program_MS.pdf)
- Meza, A. y Cantarell, L. (2002). *Importancia del manejo de estrategias de aprendizaje para el uso educativo de nuevas tecnologías de información y comunicación en educación*. Recuperado el 22 de mayo de 2015 de:  
[http://funredes.org/mistica/castellano/ciberoteca/participantes/docuparti/es\\_p\\_doc\\_71.html](http://funredes.org/mistica/castellano/ciberoteca/participantes/docuparti/es_p_doc_71.html)

- Montesinos, J. L. (2010). *Historia de las Matemáticas en la enseñanza Secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Mora, J. A. (2007) La Geometría Dinámica para el análisis de obras de arte. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 9, 83-99.
- Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavksy, O.; Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 3-14.
- Moya, M. (2009). *Las nuevas tecnologías en la educación*. *Revista digital innovación y experiencias educativas*. Recuperado el 22 de mayo de 2014 de: [http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod\\_ense/revista/pdf/Numero\\_24/ANTONIA\\_M\\_MOYA\\_1.pdf](http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_24/ANTONIA_M_MOYA_1.pdf)
- Mullis, I.; Martin, M.; Foy, P. y Arora, A. (2012). *International Results in Mathematics*. USA: TIMSS y PIRLS Centro de Estudios Internacionales, Universidad de Boston.
- Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.
- OCDE/PISA (2012). *Programa para la Evaluación Internacional de los alumnos*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First Results from PISA 2003*. Paris: OECD.
- OECD (2006). *Assessing scientific, reading and mathematical literacy: A framework from OECD (2007)*. *PISA 2006 Science competence for tomorrow's world*. Paris: OECD.
- Real Decreto 1631 / 2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del País Vasco (1 de agosto), núm. 108.
- Rubín, A. (2000). *Technology Meets Maths Education: Envisioning a practical future*. Manuscrito preparado para el Foro de Tecnología en la Educación: Imaginando el Futuro. Cambridge, MA: TERC.
- Recio, T (2006): PISA y la evaluación de las matemáticas. *Revista de Educación*, 1, 263-273.
- Sandoval, C. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, 21(1), 5-27.
- Santos Trigo, L. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

## 11.2. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Colera, J. Olivera, M.J. Gaztelu, I. Martínez, M. (2008). *Matemáticas 4º ESO*. Madrid: Anaya.

INTEF (2011, junio 18). *Proyecto Gauss*. [Sitio de internet]. Recuperado el 22 de mayo de 2014: <http://recursostic.educacion.es/gauss/web/>.

Losada, R (2011). *GeoGebra, la eficiencia de la intuición*. [En línea]. Disponible en: <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RecursosInternet/RecInternet/Geogebra/Geogebra1.asp>.

Sada, M. (2005) *Webs interactivas de matemáticas* [Sitio de Internet]. Recuperado el 22 de mayo de 2014 de: <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/>

# **ANEXOS**

# **ANEXO I**

## **Cuestionario profesores**

En este anexo consta de un cuestionario dirigido a los profesores con el fin de recoger información sobre el conocimiento y la capacidad del profesorado para utilizar las TIC y también y más concretamente sobre el programa *GeoGebra*.

# VALORACIÓN DE LA COMPETENCIA TIC DEL PROFESORADO

**Objetivo:** Este cuestionario servirá para hacer un diagnóstico sobre la formación del profesorado en TIC.

**Cómo cumplimentar:** Después de leer la frase, poner una X en la casilla correspondiente según los criterios:

- 1 Conozco o se hacer.
- 2 Tengo dificultades. Debo revisarlo.
- 3 No conozco o no se hacer.
- 4 Me apuntaría a un cursillo para aprender.
- 5 No me interesa.

## DATOS PERSONALES

Sexo: \_\_\_\_\_

Edad: \_\_\_\_\_

Asignatura: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

<b>CAPACIDADES EN LAS TIC</b>					
<b>Componentes de un equipo informático</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
1.- Concepto de Hardware					
2.- Componentes principales de un ordenador y funciones básicas (ratón, teclado, monitor....)					
3. Conexiones de entrada y salida de un ordenador (USB, conexión de red, VGA...)					
4.- Periféricos (Pen Drive, proyector, impresora....)					

<b>Almacenamiento y recuperación de información</b>					
1.- Concepto de Software					
2.- Archivos y carpetas					
2.1 Crear archivos y carpetas. Clases de archivos					
2.2 Crear, eliminar, nombrar					
2.3 Cortar, copiar, mover, adjuntar					
2.4 Buscar archivos y guardar					
2.5 Comprimir y descomprimir archivos y carpetas					
3.- Hacer copias de seguridad					
4.- Software libre					
5.- Algunos programas					
5.1 Leer documentos, programas para ver y reproducir (PDF, WMP..)					
5.2 Compresores					
5.3 Antivirus					
6.- Descargar e instalar programas					

<b>Internet</b>					
1.- Concepto de “Navegador” y clases de navegadores					
2.- Concepto de “Página web”					
3.- Acceder a diferentes páginas web, utilización de links y acceso a páginas institucionales(hezkuntza.net, berrikuntza.net, elkarrekin.org, edukiak.info...)					
4.- Buscadores					
4.1 Utilización de diferentes buscadores					
4.2 Realizar búsquedas avanzadas y fiables					
5.- Buscar archivos diferentes y descargar: archivos de procesadores de textos, presentaciones, hojas de cálculo, imágenes, sonidos, videos...					
6.- Utilización ética de Internet					

<b>Correo electrónico</b>					
1.- Concepto de “correo electrónico”					
2.- Componentes de un correo electrónico: (Asunto, Para, CC, CCO, “cuerpo del mensaje”)					
3.- Enviar un mensaje a una o varias personas					
3.1 Añadir un archivo adjunto					
4.- Consejos generales para envío de correos electrónicos					
4.1 Medidas a adoptar para abrir un archivo adjunto a un mensaje					

<b>Herramientas Ofimáticas: Procesadores de texto</b>					
1.- Concepto de “Procesador de texto”					
2.- Abrir, cerrar, guardar...un archivo de un procesador de texto					
3.- Añadir, cortar, copiar...un texto					
4.- Revisar la ortografía					
5.- Imprimir un documento					
6.- Letra, párrafo y formato de la página					
7.- Insertar tablas e imágenes					
8.- Propiedades del documento					

<b>Herramientas ofimáticas: Presentaciones</b>					
1.- Concepto de “Programas de presentaciones”					

2.- Componentes y esquemas para hacer presentaciones					
3.- Abrir, cerrar y guardar un archivo de presentación					
4.- Escribir texto, insertar objeto, cortar, copiar, arrastrar...					
5.- Buscar y reemplazar					
6.- Insertar diapositivas, borrar, copiar					
7.- Plantillas de diapositivas					
8.- Insertar objetos, manipular, juntar, separar					
9.- Insertar archivos de audio					
10.- Insertar archivos de video					
11.- Formatos (Letra, párrafo, diapositiva)					
12.-Insertar explicaciones que ayuden a la presentación					
13.- Vista de las diapositivas: Normal y en esquema					
14.-Vista de la presentación: Edición/ Pantalla completa					
15.- Imprimir la presentación					

### **Herramientas ofimáticas: Hoja de cálculo**

1.- Definición y descripción de una hoja de cálculo: línea, columna, nombre, fórmulas...					
2.- Abrir, cerrar, buscar, guardar e imprimir documentos de una hoja de cálculo.					

### **Multimedia: Tratamiento de imágenes**

1.- Tipos de imágenes					
2.- Origen de las imágenes (cámara, escáner, internet, subidas por uno mismo...)					
3.- Destino de las imágenes: procesador de texto o presentaciones					
3.1 Tener en cuenta opciones de resolución y medidas					
3.2 Copiar, cortar y pegar					

**Multimedia: Tratamiento de audio y videos**

1.-Tipos de formatos de video y audio.					
2.- Procedencia de audio y video.					
3.- Grabación de reproducción de video y audio.					
4.- Cambiar los formatos de video y audio.					
5.- Edición de video y audio.					

**Uso de las TIC en el aula. GEOGEBRA.**

TIC en el aula	SI	NO	A VECES
1.- ¿Conoces TIC para comunicarte con los alumnos?			
1.1.- Blogs			
1.2.- Plataformas			
1.3.- Pizarra digital			
1.4.- ¿OTROS? _____			
2.- ¿Los empleas en el aula?			
3.- ¿Crees que los alumnos prestan mayor atención cuando los usas?			

¿Qué avances notas con el uso de las TIC?

¿Tienen alguna desventaja? ¿Cuál?

<b>GeoGebra</b>	SI	NO	A VECES
1.- ¿Has oído hablar del software GeoGebra?			
1.1.- ¿Dónde? _____			
2.- ¿Sueles emplearlo en el aula?			
2.1.- ¿Si lo has usado alguna vez, te ha parecido de fácil manejo?			
3.- ¿Crees que es útil?			
4.- ¿Has recibido formación de esta aplicación?			
4.1.- ¿Si es que no, te gustaría recibirla?			
5.- ¿Crees que este tipo de programas ayudan a una mejor comprensión de las matemáticas?			

¿En tu opinión, qué tipo de ventajas o inconvenientes podría traer este tipo de software?



## **ANEXO II**

### **Detalle de la actividad práctica llevada a cabo con *GeoGebra***

En el este anexo se recogen las actividades que se presentaron al alumnado ordenadas según la sesión en la que fueron trabajadas.

Los contenidos que se han impartido en esta unidad didáctica están fundamentados en el libro de texto de Matemática de la editorial Anaya.

Por otro lado los ejercicios realizar en la propuesta didáctica han sido obtenidos de una colección de ejercicios planteados por Manuel Sada (2005).

La propuesta práctica con *GeoGebra* se llevó a cabo en 4 sesiones que se describen a continuación:

### **1ª SESIÓN**

Se dio una breve explicación en la pizarra sobre los siguientes conceptos:

#### **✓ VECTORES EN EL PLANO**

Aquí empezamos a trabajar los diferentes términos relacionados con los vectores, ya que es importante que los alumnos sepan los principales conceptos así como la forma de representar o escribir cada uno.

Se explicaron y quedaron claramente representados los siguientes conceptos: Sentido, Dirección y Módulo.

#### **✓ OPERACIONES CON VECTORES**

En este apartado se explicó como sumar o restar vectores y como multiplicarlos por cualquier número. Se plantearon las operaciones de dos maneras: gráficamente y analíticamente.

Para sumar dos vectores libres  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector.

Para restar dos vectores libres  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se suma  $\vec{u}$  con el opuesto de  $\vec{v}$ . Las componentes del vector resta se obtienen restando las componentes de los vectores.

El producto de un número  $k$  por un vector  $\vec{v}$  es otro vector:

- De igual dirección.
- Del mismo sentido, si  $k$  es positivo.
- De sentido contrario, si  $k$  es negativo.

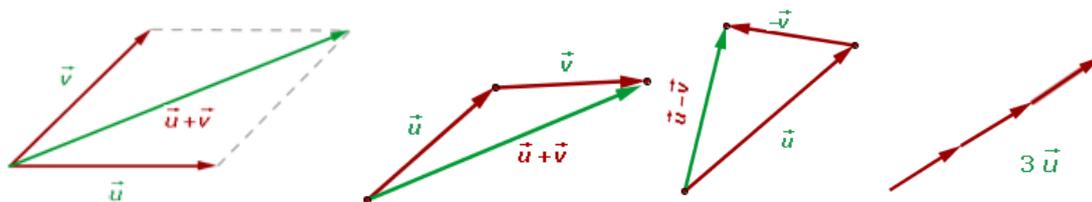
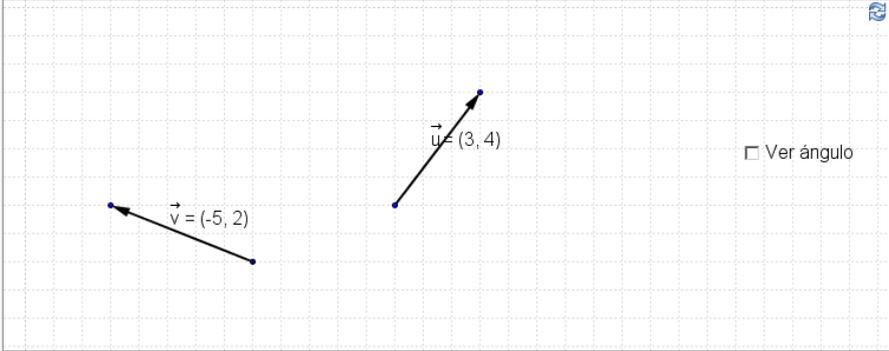


Figura N° 11. Operaciones con vectores. Fuente: T. Martín y A. Serrano (2014).

Tras explicar dichos conceptos, se procedió a realizar una serie de actividades con *GeoGebra*. A continuación se muestra su contenido:

Actividad 1ª:

**Vectores: Coordenadas** Google  
https://www.google.es



Ver ángulo

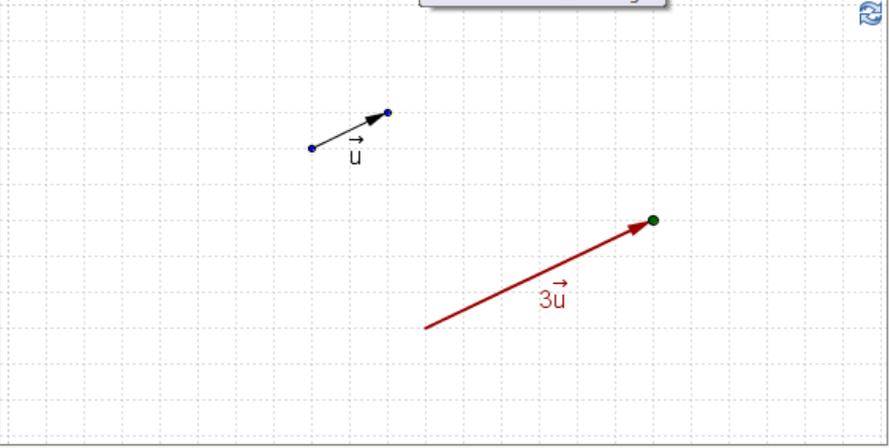
- Mueve los puntos azules hasta visualizar los vectores de coordenadas (6,-4) y (0,5).
- Visualiza ahora el (-4,-4) y el (-10,0)
- Haz que ambos vectores tengan las mismas coordenadas (-2,8). ¿Cómo han de ser dos vectores para tener las mismas coordenadas?
- Explica qué miden las coordenadas de un vector cualquiera.
- Visualiza pares de vectores que sean paralelos entre sí. ¿Cómo son sus coordenadas?
- Visualiza el vector de coordenadas (3,2) y otro que sea perpendicular. ¿Observas alguna relación entre sus coordenadas?

 Creado con [GeoGebra](#) por Manuel Sada Allo (Noviembre 2005)

Figura Nº 12. Sesión 1, Actividad 1. Fuente: M. Sada (2005).

Actividad 2ª:

**Producto de un número por un vector** Tuenti  
www.tuenti.com/?m=login



Mueve los puntos azules y observa los cambios.

- ¿Qué relación encuentras entre los vectores  $u$  y  $3u$ ?

Mueve ahora el punto verde y observa.

- ¿Qué relación encuentras entre los vectores  $u$  y  $ku$ , siendo  $k$  un número positivo cualquiera?
- ¿Y qué ocurre cuando  $k$  es negativo o 0?

Utiliza el deslizador para ver las coordenadas.

- ¿Qué relación encuentras entre las coordenadas de los vectores  $u$  y  $ku$ , siendo  $k$  un número cualquiera?

 Creado con [GeoGebra](#) por Manuel Sada Allo (Noviembre 2005)

Figura Nº 13. Sesión 1, Actividad 2. Fuente: M. Sada (2005).

Actividad 3ª:

**Suma de vectores**

Primer método -->

Segundo método -->

Desliza el punto verde y observa.

Mueve los puntos azules hasta que  $u$  sea el vector  $(-5,2)$  y  $v$  el  $(7,0)$ .

- Describe cómo se obtiene la suma de dos vectores aplicando el "Primer método"
- Comprueba que el segundo método conduce a la misma solución y describe las diferencias entre ambos métodos.

Activa la casilla para ver las coordenadas.

- ¿Qué relación encuentras entre las coordenadas de los vectores  $u$ ,  $v$  y  $u+v$ ?

Creado con [GeoGebra](#) por Manuel Sada Allo (Noviembre 2005)

Figura N° 14. Sesión 1, Actividad 3. Fuente: M. Sada (2005).

Actividad 4ª:

**Resta de vectores**

$\vec{u}-\vec{v}$

$\vec{v}-\vec{u}$

Desliza los puntos verdes y observa.

Vuelve a la posición inicial y mueve los puntos azules hasta que  $u$  sea el vector  $(-3,1)$  y  $v$  el  $(5,0)$ . Desliza ahora el punto verde.

- Describe cómo se obtiene la resta de dos vectores.
- ¿Son iguales los vectores  $u-v$  y  $v-u$ ?

Utiliza el deslizador para ver las coordenadas.

- ¿Qué relación encuentras entre las coordenadas de los vectores  $u$ ,  $v$ ,  $u-v$  y  $v-u$ ?

Creado con [GeoGebra](#) por Manuel Sada Allo (Noviembre 2005)

Figura N° 15. Sesión 1, Actividad 2. Fuente: M. Sada (2005).

## 2ª SESIÓN:

Primero realizamos un pequeño repaso sobre los conceptos vistos el día anterior y a continuación seguimos con la explicación de los nuevos conceptos:

### ✓ PUNTO MEDIO DE UN VECTOR

Si los puntos extremos de un segmento son A y B, las coordenadas del punto medio del segmento coinciden con la semisuma de las coordenadas de los puntos extremos.

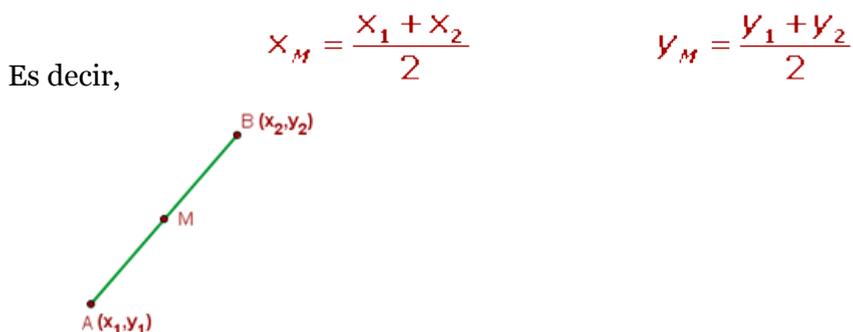


Figura N° 16. Punto medio del vector. Fuente: T. Martín y A. Serrano (2014).

### ✓ COMPROBAR QUE TRES PUNTOS ESTÁN ALINEADOS

Aquí, utilizamos la proporcionalidad para explicar este fenómeno, y los alumnos lo vieron muy claro.

Tres o más puntos están alineados si están en una misma recta, y por tanto el rango de los vectores determinados por ellos es 1.

Si tres puntos A(x1,y1), B(x2,y2), C(x3,y3) están alineados si,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

Figura N° 17. Alineación de tres puntos. Fuente: T. Martín y A. Serrano (2014).

Tras una breve explicación de los principales conceptos, proseguimos haciendo estas dos actividades individualmente para a continuación corregirlas grupalmente con el resto de la clase:

Actividad 1ª:

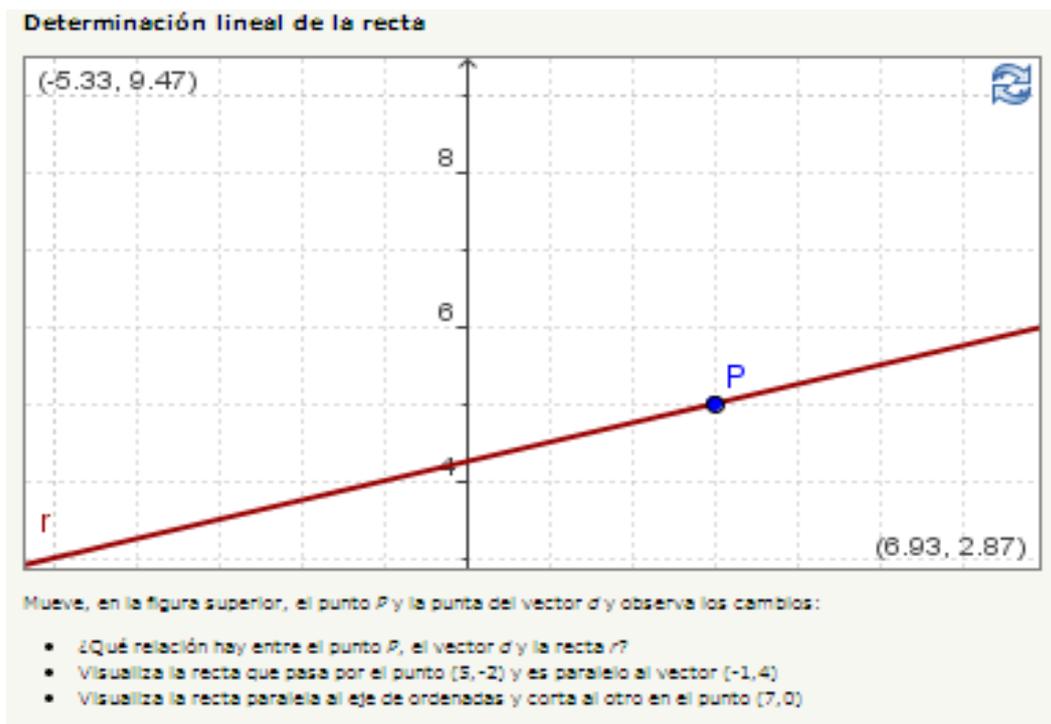


Figura N° 18. Sesión 2, Actividad 2. Fuente: M. Sada (2005).

Actividad 2ª:

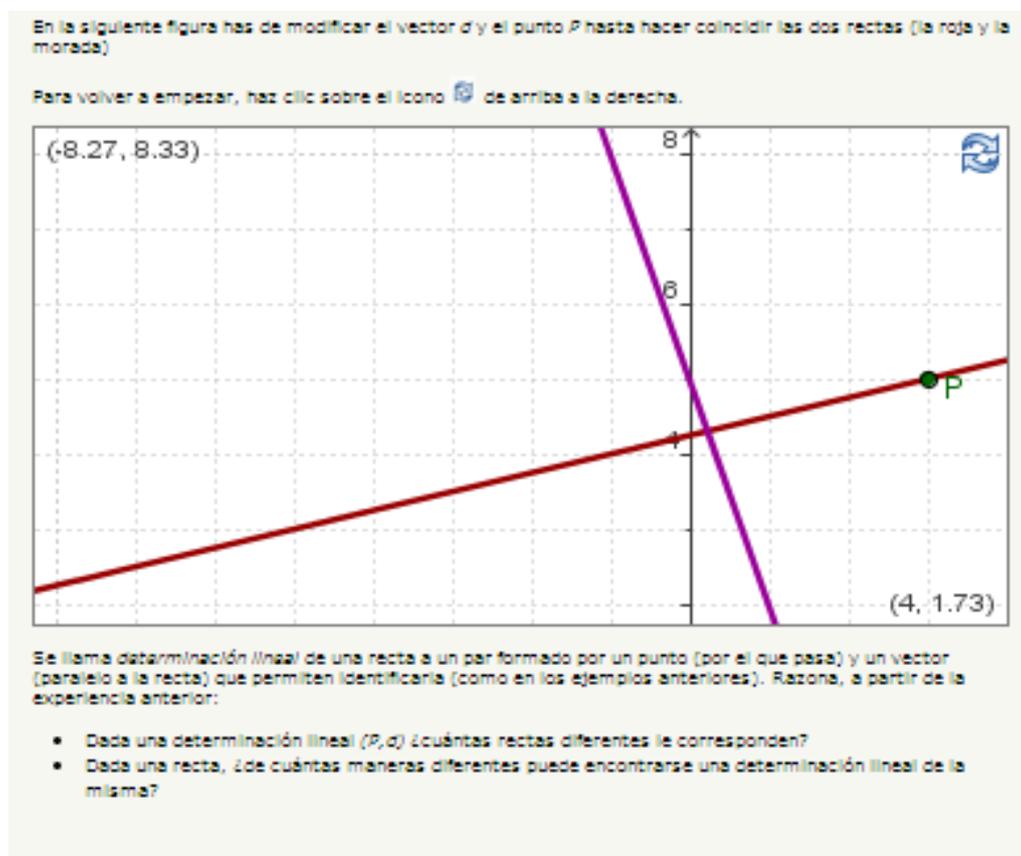


Figura N° 19. Sesión 2, Actividad 2. Fuente: M. Sada (2005).

### 3ª SESIÓN:

Se comenzó con una explicación sobre la distancia entre dos puntos y la ecuación de la recta:

#### ✓ DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  se halla aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo:

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

*Figura N° 20. Distancia entre dos puntos. Fuente: T. Martín y A. Serrano (2014).*

#### ✓ ECUACIÓN DE LA RECTA. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD.

Antes de comenzar con esta materia, hemos hecho un pequeño repaso de temas anteriores, entre otros:

- Calcular la pendiente de una recta que pasa por A y B.
- La ecuación de la recta.
- La condiciones de paralelismo de dos rectas.

Para ello hemos hecho una tormenta de ideas en la que cada alumno ha aportado algún dato y entre todos hemos hecho un pequeño esquema.

Esto nos ha servido para hacer una clase más dinámica y participativa y no basarnos en una clase magistral en la que los alumnos se limitan a tomar apuntes.

A continuación se han explicado algunos conceptos básicos que figuran en el libro de Anaya anteriormente mencionado.

A continuación se propusieron estas dos actividades:

Actividad 1ª:

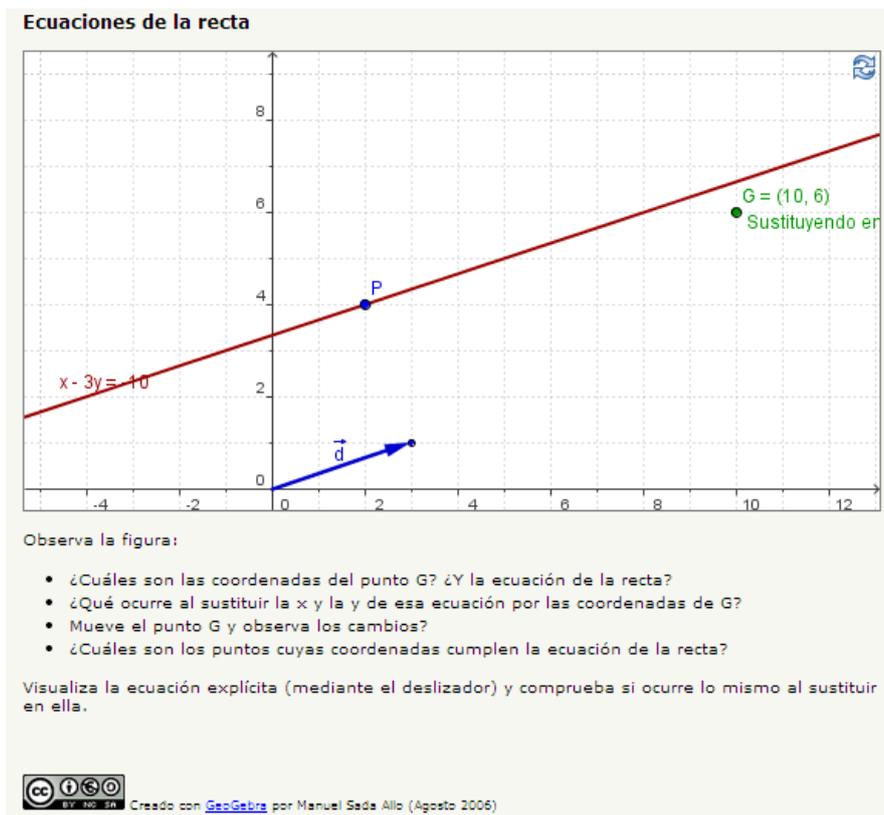


Figura Nº 21. Sesión 3, Actividad 1. Fuente: M. Sada (2005).

Actividad 2ª:

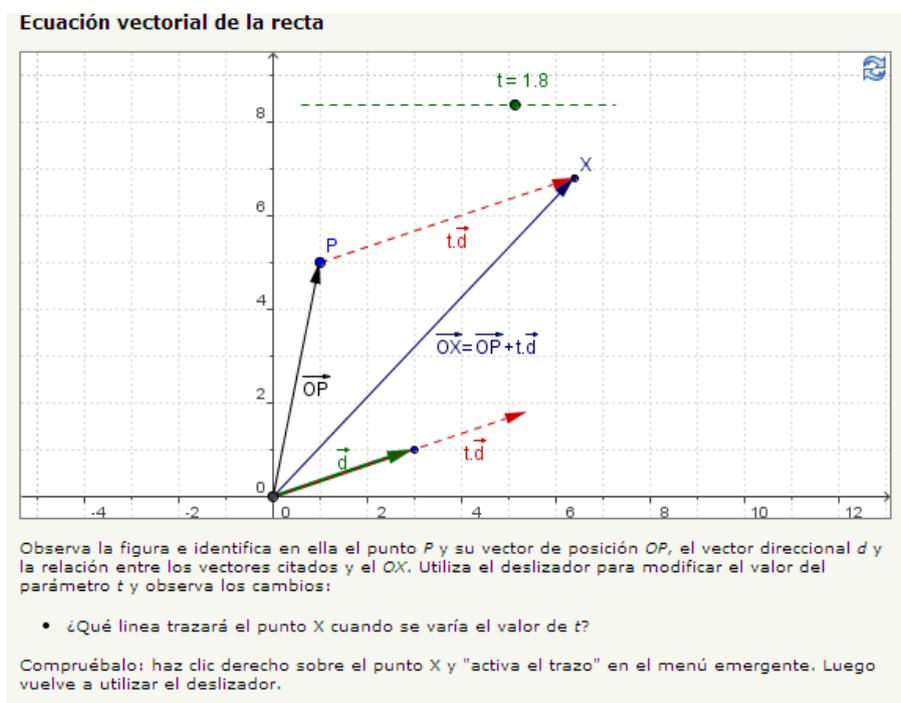


Figura Nº 22. Sesión 3, Actividad 2. Fuente: M. Sada (2005).

Actividad 3ª:

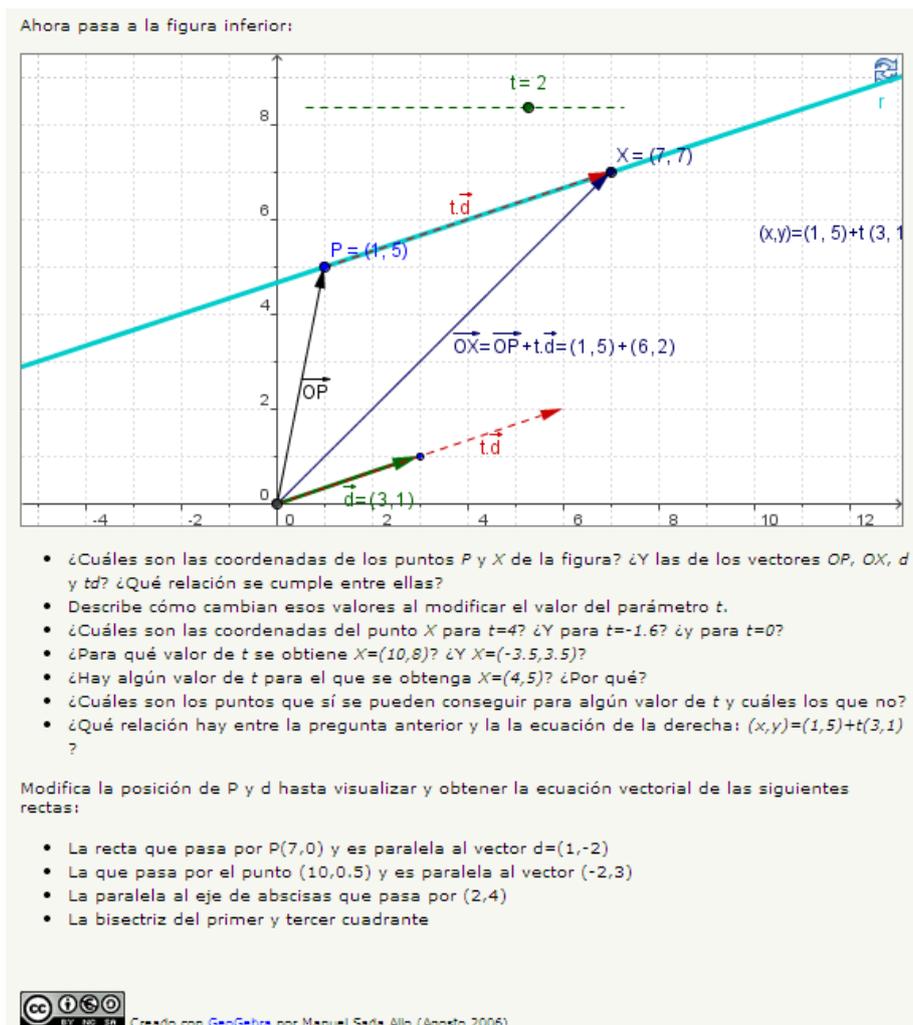


Figura N° 23. Sesión 3, Actividad 3. Fuente: M. Sada (2005).

#### **4º SESIÓN:**

Los alumnos conocían bien las técnicas para calcular el punto de intersección entre dos rectas, así como los métodos para saber si dos rectas son paralelas o iguales entre ellas. Sin embargo, antes de comenzar con estas actividades hicimos un pequeño repaso en clase sobre estos conceptos e hicimos varios ejemplos.

A continuación, se dio una breve explicación sobre los siguientes conceptos:

#### **✓ POSICIÓN RELATIVA ENTRE DOS RECTAS**

Dos rectas en el plano, pueden ser:

- Coincidentes: Tienen infinitos puntos en común
- Secantes: Tienen un punto en común
- Paralelas: No tienen ningún punto en común

El correspondiente estudio de la posición relativa de dos rectas se puede hacer de dos maneras:

- Analíticamente: Resolvemos el sistema
  - No tiene solución: Paralelas
  - Una solución: Secantes
  - Infinitas soluciones: Coincidentes
- Gráficamente: Dibujar las dos rectas en los mismos ejes

Tras esta breve explicación y recordando algún concepto de la sesión anterior comenzamos con las siguientes actividades:

Actividad 1ª:

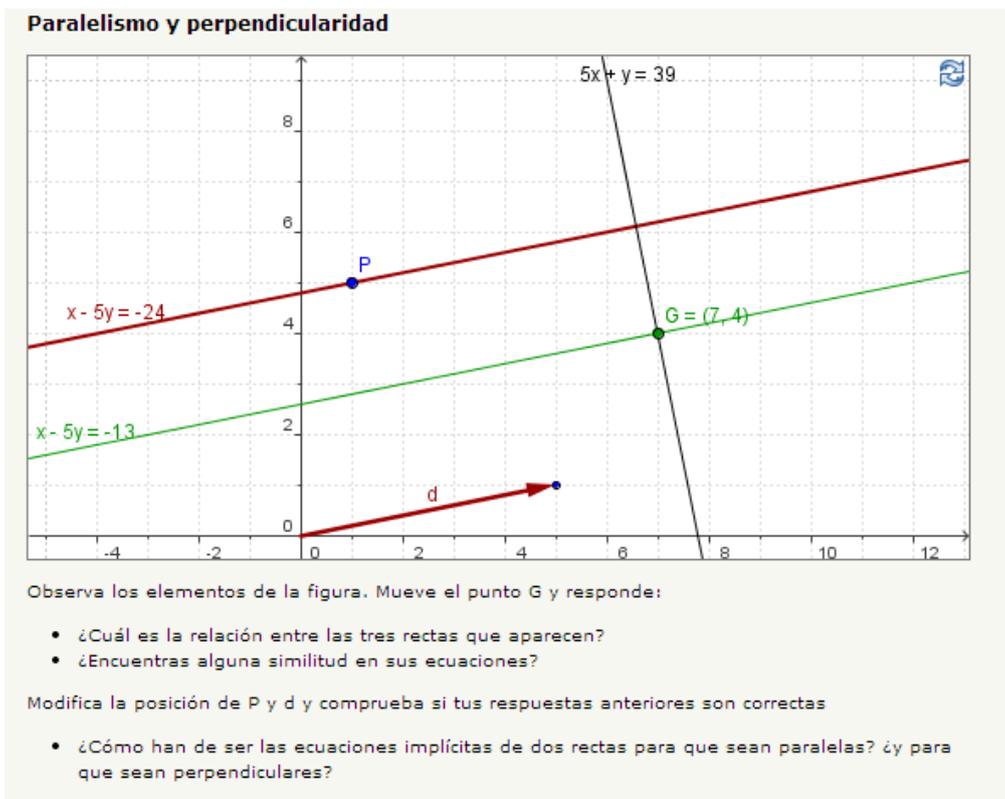


Figura N° 24. Sesión 4, Actividad 1. Fuente: M. Sada (2005).

Actividad 2ª:

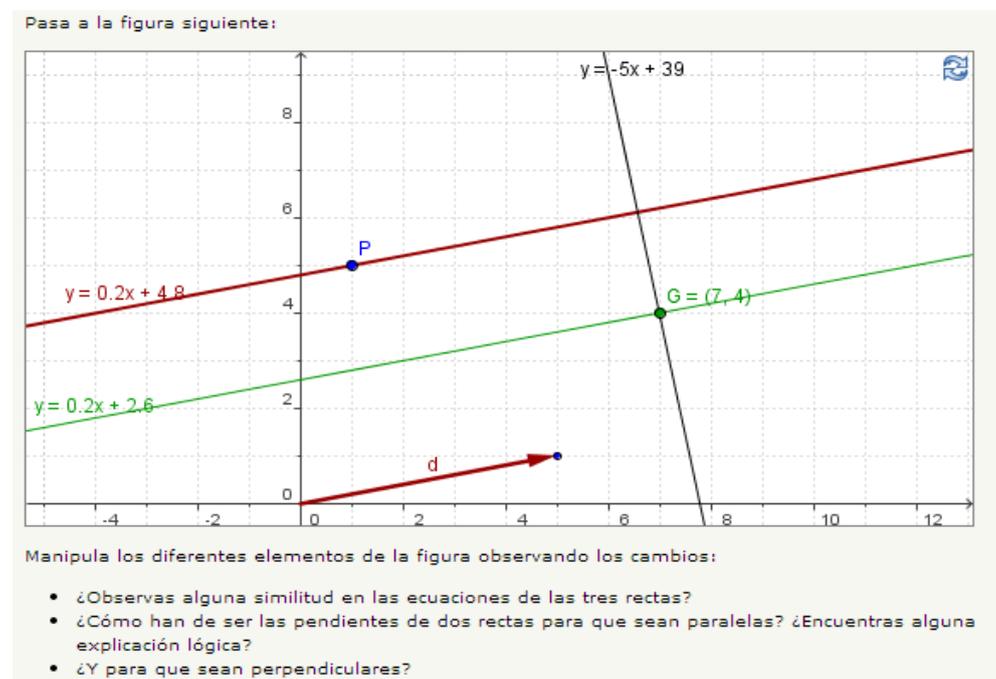
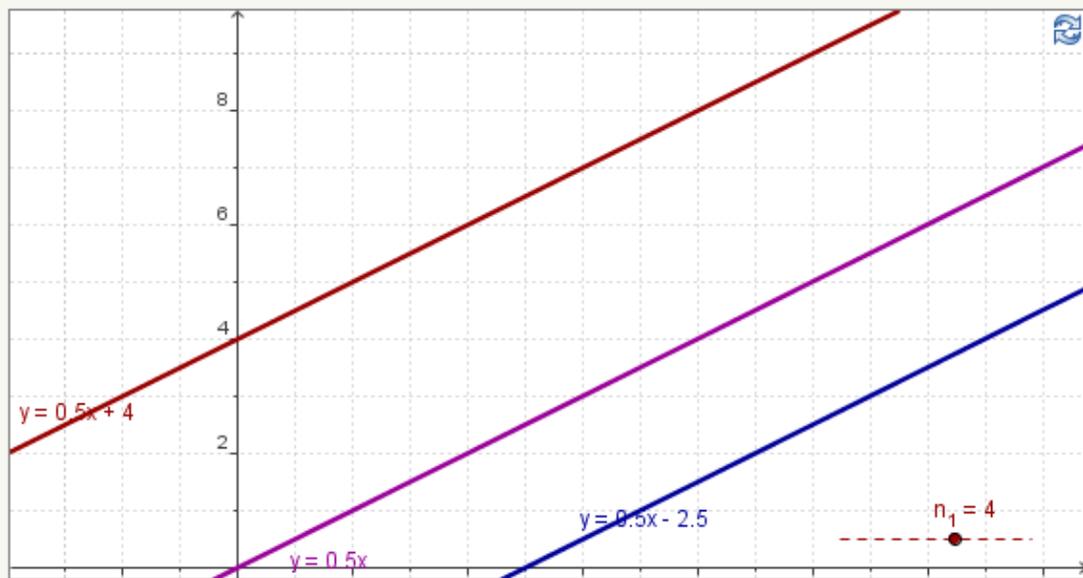


Figura N° 25. Sesión 4, Actividad 2. Fuente: M. Sada (2005).

Actividad 3ª:

Rectas con la misma pendiente



Observa las tres rectas de la figura:

- ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian? ¿y sus correspondientes ecuaciones?

Mueve los deslizadores y observa los cambios.

- Describe lo que ocurre.
- ¿Cómo son las gráficas de todas las rectas con la misma pendiente (valor de  $m$ )?

Figura N° 26. Sesión 4, actividad 3. Fuente: M. Sada (2005).

## **ANEXO III**

### **Cuestionario Alumnos**

En este anexo figura el cuestionario que fue realizado a los alumnos. En él se les pide su valoración y opinión sobre la utilización de las TIC en las clases en general y en matemáticas concretamente. Finalmente, se les pide que valoren la utilización del programa *GeoGebra* y que hagan una valoración de las sesiones impartidas con el programa comparándolas con las clases tradicionales.

## Presentación

A continuación, encontrareis algunas preguntas relacionadas con las clases dadas. Os agradecería responder a todas para poder hacer una valoración sobre la aplicación de Geogebra.

## Datos Personales

Edad .....

Sexo

Hombre

Mujer

## Opinión de la práctica

1.- De 1 a 6, ¿Qué te ha parecido la clase? (6 “muy interesante” y 1 “muy aburrida”)

1	2	3	4	5	6

¿Te ha parecido interesante la clase dada con *GeoGebra*?

2.- ¿Qué es lo que más te ha atraído de esta clase?

Utilización

Facilidad de  
utilización

Que sea  
visual

Diferente

Nada

Otros (concreta por favor)

--

## A.- OPINIÓN QUE TIENE EL ALUMNADO SOBRE LAS MATEMÁTICAS

A1. ¿Te gustan las Matemáticas?

1. Nada o muy poco	
2. Poco	
3. Ni mucho ni poco. Me da igual.	
4. Bastante	
5. Mucho	

A2. ¿Crees que se utilizan en la vida cotidiana?

1. Nada o muy poco	
2. Poco	
3. Ni mucho ni poco. Me da igual	
4. Bastante	
5. Mucho	

A3. ¿Qué es lo que más te gusta de las Matemáticas? Pon nota de 1 a 5 (siendo 1 la más baja y 5 la más alta)

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
Algebra					
Geometría					
Solución de problemas					
Estadística					
Nada					

### **B.- IMPLANTACIÓN DE LAS TIC EN CLASE**

B1. Fuera de clase, ¿Cuánto tiempo dedicas a interactuar con las nuevas tecnologías?

	Nada	Casi nada	Algo	Mucho	Diariamente
Televisión					
Ordenador/Tablet					
Videojuegos					
Otros _____					

B2. ¿Crees que el profesorado aprovecha en clase todos los recursos?

1. Sí, mucho	
2. Solo algunas veces	
3. No, nada	

B3. ¿Cuánto tiempo dedicas a estudiar cada tema utilizando recursos tecnológicos? (Indica el porcentaje de tiempo)

<b>ASIGNATURAS</b>	<b>%</b>
1. Matemáticas	
2. Física y Química	
3. Biología y Geología	
4. Lengua	
5. Inglés	
6. Euskera	
7. Dibujo/Plástica	
8. Historia	

### C.- GEOGEBRA

C1. En esta clase, ¿Te ha gustado utilizar el ordenador para aprender Matemáticas?

1. Sí, mucho	
2. Me da igual	
3. No, nada	

C2. Si se implantan en clase esa clase de programas, ¿Crees que pueden ser beneficiosos para el alumnado?

1. Sí, seguro que sí.	
2. Puede ser	
3. No se	
4. No creo	
5. Será perder el tiempo	

C3. ¿Te ha parecido más divertida la clase con *GeoGebra* que las que habitualmente da el profesorado?

1. Sí, mucho	
2. Bastante	
3. Igual	
4. No	

C4. ¿Ves ventajas en las clases dadas con el ordenador?

1. Sí, muchas	
2. Bastantes	
3. Igual	
4. No	

C5. ¿Has comprendido bien los conceptos trabajados?

1. Sí, mucho	
2. Bastante	
3. Igual	
4. No	

C6. ¿Crees que con *GeoGebra* se trabaja la imaginación y creatividad?

1. Sí, mucho	
2. Bastante	
3. Igual	
4. No	

C7. ¿GeoGebra te ha motivado a la hora de trabajar?

1. Sí, mucho	
2. Bastante	
3. Igual	
4. No	

C8. ¿Qué es lo que más te ha gustado de esta clase? ¿Y lo que menos?

C9. ¿Cambiarías algo en general? ¿Qué cambiarías?