



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

**Enseñanza de trigonometría en 4º de
la ESO con GeoGebra**

Presentado por: M^a Trinidad Díaz Fernández

Línea de investigación: Métodos pedagógicos
(Matemáticas)/Recursos educativos (TIC)

Director/a: D. Pedro Aurelio Viñuela

Ciudad: Talavera de la Reina

Fecha: 5 de junio de 2014

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo principal presentar una propuesta didáctica basada en el uso de GeoGebra para favorecer la comprensión de la trigonometría en 4º de la ESO (opción B) y así mejorar el proceso de aprendizaje de esta rama que tantas dificultades presenta para los alumnos. Para realizar dicho trabajo se han desarrollado tres partes fundamentales: en primer lugar el marco teórico a través del cual se ha querido indagar sobre las dificultades psicológicas que conllevan los conceptos matemáticos y en concreto la trigonometría para tener un fundamento teórico. Además se han estudiado los recursos que ofrece GeoGebra para abordar la trigonometría con dicha herramienta de forma que sea un aprendizaje más experimental y sencillo para el alumno. Posteriormente se realizó el estudio de campo a través de entrevistas a profesores para apoyar la investigación. Por último se presenta una propuesta didáctica fundamentada en lo expuesto anteriormente que consiste en realizar actividades complementarias con GeoGebra que faciliten la comprensión de la trigonometría a los alumnos de 4º de la ESO. Con lo que del presente trabajo se puede concluir que el uso de GeoGebra facilita al alumno la introducción, justificación y comprensión de la trigonometría mejorando su aprendizaje y se marcan, en este tema, posibles líneas de investigación futura que se centren en los aspectos relacionados con los procesos de aprendizaje de la trigonometría.

Palabras clave: trigonometría, GeoGebra, dificultades de aprendizaje, educación secundaria, propuesta didáctica.

Abstract

This paper's main objective is to present a methodological approach based on the use of GeoGebra, to promote understanding of trigonometry in 4^o ESO (option B) and improve the learning process in this branch the students are presented with so many difficulties. To make this work we have developed three main parts: first the theoretical framework through which we have tried to investigate the psychological difficulties involved in specific mathematical concepts and trigonometry to have a theoretical foundation. We have also studied that the GeoGebra provides resources to address trigonometry with the tool to be more experimental and simple for student learning. Subsequently the field study was conducted through interviews with teachers to support research. Finally an educational proposal based on the above that is complementary with activities, with GeoGebra, that facilitate the understanding of trigonometry for students in the 4th ESO is presented. Whereby the present study can be concluded that the use of GeoGebra provides students with the introduction, justification and understanding of trigonometry improving learning and possible lines of future research that focus on the cognitive aspects that are marked in this topic learning trigonometry to clearly define what difficulties are involved with these processes.

Keywords: trigonometry, GeoGebra, learning difficulties, secondary, education, teaching proposal.

Índice de contenidos

1. Introducción.....	2
1.1. Presentación.....	2
1.2. Justificación.....	3
2. Planteamiento del problema.....	5
2.1 Definición del problema	5
2.2. Objetivos	6
2.3. Metodología	6
2.4. Justificación de la bibliografía utilizada	9
3. Marco teórico	11
3.1. Normativa estatal	11
3.1.1. Ley Orgánica de Educación (LOE) y Real Decreto 1631/2006.....	11
3.1.2. Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE).....	12
3.1.3. Normativa autonómica de Castilla-La Mancha	13
3.2. Dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas	13
3.2.1. Dificultades en el proceso de aprendizaje de la trigonometría de 4 ^o de la ESO	15
3.3. Las TIC en la enseñanza de las matemáticas	16
3.3.1. Las posibilidades de la geometría dinámica en el aula	17
3.3.2. GeoGebra y trigonometría	19
4. Estudio de campo.....	22
4.1. Presentación	22
4.2. Objetivos	22
4.3. Encuesta.....	23
4.3.1. Resultados y análisis de la encuesta.....	25
4.4. Test de trigonometría.....	27
4.4.1. Contexto del centro	27
4.4.2. Perfil del grupo y estructura del test.....	28
4.4.3. Resultados e interpretación del test	29
4.4.3. Conclusiones del test	33
5. Propuesta didáctica.....	34
5.1. Introducción	34
5.2. Objetivos.....	34
5.2. Aspectos técnicos y formativos	35
5.3. Contenidos y objetivos	35
5.4. Metodología.....	36
5.4.1. Exposición didáctica.....	36
5.4.2. Trabajo cooperativo	38
5.5. Descripción de la propuesta	38
5.5.1. Actividades y temporalización.....	38
5.5.2. Desarrollo de actividades con GeoGebra	40
6. Aportaciones del trabajo	43
7. Discusión.....	44
8. Conclusiones.....	45
9. Limitaciones del trabajo	48
10. Líneas de investigación futura	49
11. Referencias bibliográficas.....	50
11.1 Referencias	50
11.2 Bibliografía complementaria	53
12. Anexos	55
Anexo I: Modelo del test de trigonometría.	55

Índice de cuadros

Cuadro N° 1. Comparativa entre geometría tradicional y dinámica.	18
Cuadro N° 2. Comparativa de los principales sistemas de geometría dinámica.....	19
Cuadro N° 3. Resumen de la encuesta con opciones y justificación.	24
Cuadro N° 4. Entrevista a profesora de Matemáticas.	28
Cuadro N° 5. Esquema del test de trigonometría.....	29
Cuadro N° 6. Contenidos y objetivos de la trigonometría de 4º de la ESO.	36
Cuadro N° 7. Secciones y contenidos del tema trigonometría.	37
Cuadro N° 8. Actividades y temporalización de la propuesta didáctica.	39
Cuadro N° 9. Guía de actividades para realizar sobre GeoGebra.....	42

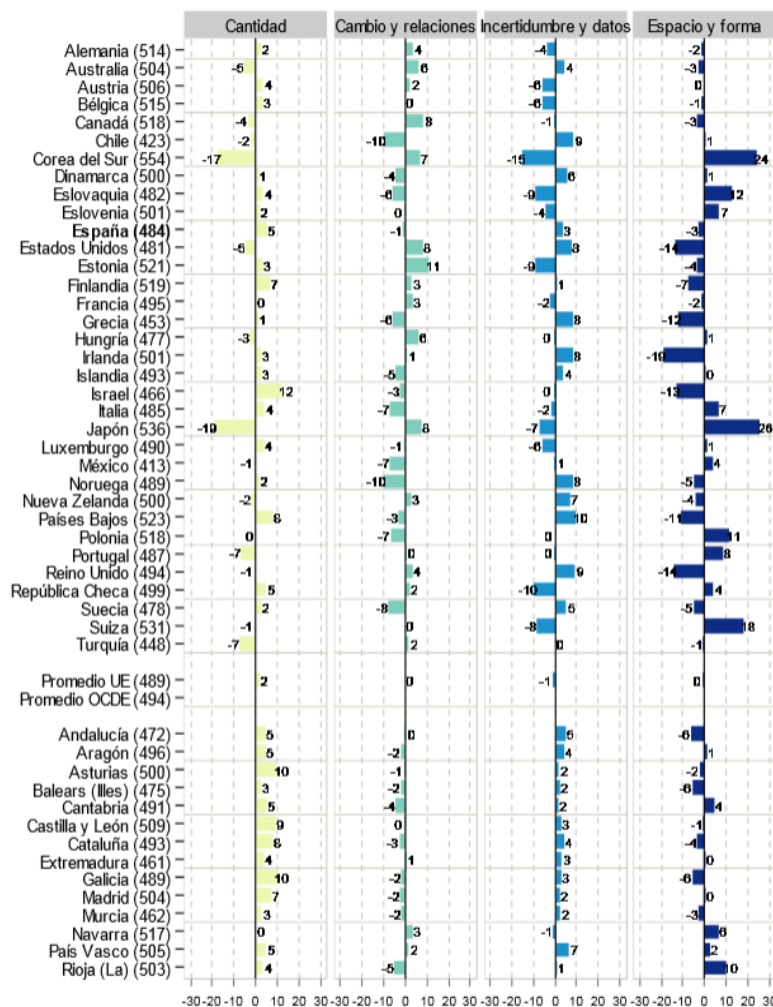
Índice de ilustraciones y gráficas

Ilustración N° 1. Clasificación de respuestas a la identificación de las razones trigonométricas.....	32
Ilustración N° 2. Applet desarrollado con GeoGebra para trabajar las razones trigonométricas.....	41
Gráfica N° 1. Diferencia entre las distancias de los resultados por sub-área y puntuaciones globales, tomando como referencia la OCDE.	2
Gráfica N° 2. Bloque de mayor dificultad para los estudiantes según los profesores.	25
Gráfica N° 3. Actividades relacionadas con la trigonometría que presentan mayor dificultad para los estudiantes.....	26
Gráfica N° 4. Recursos didácticos usados por los profesores para la enseñanza de la trigonometría.	26
Gráfica N° 5. Resultados sobre la correcta conceptualización de la trigonometría. .	30
Gráfica N° 6. Porcentaje de alumnos que consideran o no difícil la trigonometría..	30
Gráfica N° 7. Grado de dificultad de actividades relacionadas con la trigonometría según alumnos.	31

1. Introducción

1.1. Presentación

Las matemáticas siempre han resultado una de las materias más complejas para los alumnos de la ESO. Tal y como demuestra el Informe PISA (2012) en España el rendimiento en matemáticas de nuestros alumnos está por debajo de la media de la OCDE. De hecho, hay una tendencia negativa en el rendimiento educativo de esta asignatura, en particular cuando hablamos de fortalezas como: utilización de conceptos, hechos, procedimientos, razonamiento matemáticos, y formular situaciones matemáticamente, según el mismo informe. Este hecho se puede apreciar en la siguiente gráfica, realizada por el INEE a partir de los datos de PISA 2012, donde los resultados en la competencia matemática aparecen divididas en cuatro sub-áreas.



Gráfica N^o 1. Diferencia entre las distancias de los resultados por sub-área y puntuaciones globales, tomando como referencia la OCDE. Fuente: INEE (2013, p.52).

Podemos ver en dicha gráfica que esta complejidad se acentúa en campos como en el de la trigonometría para los alumnos de 4º de la ESO, ya que no sólo se enfrentan por primera vez a ella sino que implica muchas cuestiones nuevas y abstractas, como por ejemplo: la justificación de la trigonometría, conceptos débilmente adquirido de ideas importantes, distintas aplicaciones de las mismas funciones trigonométricas, trabajar con nuevos sistemas de medida, nuevos usos de la calculadora, etc.

Esta dificultad en el área de las matemáticas es una cuestión que no sólo aparece reflejada en informes sino que aparece fundamentada en investigaciones y estudios de diversa naturaleza. Por ejemplo, Socas (1997) plantea que las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas se pueden organizar en diferentes tópicos que van desde la complejidad hasta las actitudes afectivas y emocionales que el alumno tiene hacia las Matemáticas y que más adelante desarrollaremos y analizaremos. O más específicamente centrándonos en la trigonometría, Brown (2006) habla de dos problemas básicos que tiene el alumno: los conceptos de fondo y las cuestiones relacionadas con el contexto de la trigonometría. Temas que también aparecen reflejados en el trabajo de Flores (2008) quien reconoce la tecnicidad de esta rama y por ello el especial cuidado que debe presentar el profesor a la hora de tratarla intentando siempre motivar y ver el lado más práctico de la trigonometría para facilitar el aprendizaje del alumno sobre todo en el primer año en que se presenta este tema que corresponde a 4º de la ESO (opción B).

1.2. Justificación

El tema presentado, la trigonometría de 4º de la ESO (opción B), forma parte del currículum de enseñanzas mínimas exigibles de la Educación Secundaria Obligatoria a nivel estatal y presentadas en el Real Decreto 1631/2006. Por lo que se ha podido leer en la presentación no solo es un tema exigible sino que además es un tema que presenta ciertas dificultades para el aprendizaje lo que justifica un estudio de tal problemática y el desarrollo de propuestas didácticas para facilitar la comprensión. En este sentido es importante que el profesor sea consciente de dónde el alumno tiene específicamente dificultades de aprendizaje para poder solventarlas y ayudar al alumno en el proceso de estos conceptos, ya que según plantea la LOE, en el artículo 91, entre las funciones del profesorado están:

- La programación y enseñanza de las áreas, materias y módulos que tengan encomendados.
- La investigación, la experimentación y la mejora continua de los procesos de enseñanza correspondientes.

Por lo tanto el profesor como profesional de la educación debe indagar sobre los recursos disponibles para mejorar los procesos de aprendizaje, y buscar herramientas, programas y metodologías específicas que ayuden al alumno en el aprendizaje. El National Council of Teachers of Mathematics (2000) propone con respecto al aprendizaje un principio curricular que se basa en que los estudiantes deben aprender matemáticas, comprendiéndolas, construyendo activamente desde la experiencia y el conocimiento previo. En función de lo expuesto desde la problemática, las funciones del profesor y los principios curriculares del aprendizaje del alumno surge la idea de plantear un entorno de trabajo dinámico como los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) que como afirman Assude y Camponi (1996, citado en Gonzáles-López, 2001) no es un simple medio de interacción entre el alumno y los objetos representados, sino que modifica la forma en que se ejerce la actividad matemática respecto de la enseñanza tradicional de la geometría con lápiz y papel, ya que tiene unos claros condicionantes sobre las acciones de los alumnos y, en consecuencia, influye en la modificación de sus concepciones y en el aprendizaje que éstos realizan. Dentro de los SGD que se han desarrollado vamos a centrarnos en la utilización de GeoGebra. La justificación de la elección de este programa pasa por varias de sus características que lo hacen atractivo para cubrir las necesidades expuestas. Es un software gratuito, de licencia libre, diseñado específicamente para la enseñanza de la geometría y trigonometría en la etapa de secundaria. Tiene una interfaz clara que permite realizar construcciones que pueden modificarse posteriormente. Y alrededor de GeoGebra se ha creado una gran comunidad de docentes y especialistas que hacen que sea una herramienta en continuo desarrollo. Por estas características se ha considerado a GeoGebra como la herramienta en torno a la cual se va a desarrollar la propuesta didáctica del presente trabajo.

2. Planteamiento del problema

2.1 Definición del problema

Los alumnos de la Educación Secundaria Obligatoria tienen contacto con la Geometría desde 1º hasta 3º de la ESO, a través del mismo bloque que lleva el nombre en el currículo establecido por la legislación estatal. Pero no es hasta 4º de la ESO cuando se les introduce específicamente y por primera vez en la trigonometría. Este paso a la trigonometría siempre ha sido una cuestión complicada y que abre varios interrogantes que vamos a intentar responder a lo largo del desarrollo del presente trabajo como por ejemplo: ¿dónde residen las dificultades, son aspectos técnicos o teóricos?, ¿se aborda y justifica de forma adecuada la trigonometría?, ¿qué herramientas pueden ayudar al profesorado para facilitar el proceso de aprendizaje en el alumno? Hay varios factores que van a influir en ello y que tendremos que considerar para buscar solución.

Uno de los principales obstáculos con los que se encuentran los estudiantes en el proceso del aprendizaje en la trigonometría y que refleja muy bien Flores (2008) es que pese a ser una rama muy visual es una de las más técnicas. Al ser visual debería ser más fácil de entender para los alumnos porque es 'visible', y sin embargo no es así porque a la hora de dibujar e interpretar se encuentran con varios obstáculos: la geometría basada en el uso de lápiz y papel deja al alumno poco margen de improvisación y sobre todo de dinamismo lo que es importante a la hora de interpretar, por ejemplo, las razones trigonométricas que son una de las cuestiones fundamentales de la trigonometría, o a la hora de realizar dibujos que son básicos para establecer las bases de esta parte de la geometría.

Por ello se considera importante buscar herramientas que permitan este dinamismo permitiendo al alumno interpretar bien los conceptos asociados a la trigonometría y pudiéndose centrar en reflexionarlos y adquirirlos, de esta forma nos centraríamos en la problemática relacionada con las cuestiones teóricas y prácticas del tema.

2.2. Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo consiste en:

Presentar y fundamentar una propuesta didáctica basada en el uso del software GeoGebra para mejorar el proceso de aprendizaje de la trigonometría de los alumnos de 4º de la ESO.

Los objetivos específicos que se busca conseguir en el trabajo son los siguientes:

- a) Explicar e identificar las principales dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la impartición de la trigonometría a alumnos de 4º de la ESO.
- b) Presentar, analizar y estructurar los objetivos propios y contenidos curriculares de la unidad didáctica dedicada a la trigonometría, así como las competencias básicas asociadas a los mismos.
- c) Averiguar y exponer los recursos de GeoGebra que pueden ayudar en la tarea de solventar alguna de las problemáticas presentadas en el proceso de aprendizaje de la trigonometría en 4º de la ESO.

2.3. Metodología

La metodología específica del trabajo será el resultado de realizar una investigación bibliográfica y un estudio de campo.

En dicha investigación primeramente nos hemos centrado en los aspectos psicológicos del proceso de aprendizaje de la rama de las matemáticas para tener conocimiento de las dificultades que conlleva para los alumnos, y también, identificar los aspectos externos que influyen en tal hecho. Posteriormente se busca delimitar y ver en la trigonometría las problemáticas enunciadas. Para llevar a cabo dicha investigación se ha procedido a la lectura y reflexión de diverso material, el cual ha sido localizado recurriendo a diversas fuentes y siguiendo los siguientes criterios:

1. *La relevancia para el tema:* a la hora de elegir el material se ha tenido en cuenta que tratara alguna de las cuestiones que nos ocupa de una forma directa.
2. *El prestigio de la publicación:* se ha prestado atención principalmente a publicaciones con un registro académico adecuado.
3. *La autoridad del autor:* a la hora de considerar una obra se ha tenido en cuenta el prestigio y el trabajo llevado a cabo por el escritor o investigador.
4. *La actualidad de la fuente:* se ha tenido en cuenta la fecha de publicación de todo el material para así tener un contexto adecuado (UNIR, 2014).

A continuación se pasa a nombrar algunas de las fuentes a las que se ha recurrido: catálogo de la Red de Bibliotecas Públicas de Castilla-La Mancha, haciendo uso del servicio de préstamo interbibliotecario, se ha hecho uso del catálogo de la biblioteca de la UNED en su sede de Talavera de la Reina, pudiendo consultar en sala los ejemplares que interesaban y de la biblioteca del departamento de matemáticas del I.E.S. Gabriel Alonso de Herrera. Se ha recurrido a la biblioteca virtual de la UNIR y Dialnet. También se han consultado diferentes fuentes a través de internet haciendo uso de las páginas del Ministerio de Educación Ciencia y Deporte y del Boletín Oficial del Estado, con el fin de localizar la normativa relacionada con los contenidos y criterios de evaluación de la trigonometría de 4º de la ESO y proyectos de educación relacionados. Se ha hecho uso de diferentes revistas electrónicas relacionada con la temática como Edutec. Asimismo se ha recurrido a la web de GeoGebra.

El estudio de campo se basa en encuestas realizadas a profesores con experiencia en la docencia de esta rama con la idea de fijar los problemas reales en el aula a la hora de tratar la trigonometría y delimitar el marco en el que se puede aplicar la metodología y los recursos expuestos. Las encuestas han sido realizadas por medio de un cuestionario que se ha diseñado a través de la herramienta SurveyMonkey que permite crear encuestas en línea favoreciendo su difusión. El diseño de las preguntas que forman la encuesta se han hecho teniendo en cuenta la información que se quiere contrastar a partir de las conclusiones obtenidas en la investigación bibliográfica:

- La visión de los profesores con respecto a la dificultad de la trigonometría en comparación a otras ramas.
- Los problemas que se ven en el aula con respecto al aprendizaje de la trigonometría.

- Recursos que usan para la enseñanza de la trigonometría.
- Metodología empleada en la enseñanza de la trigonometría.

Paralelamente se ha realizado un test a los alumnos de 4º de la ESO (opción B) del I.E.S. Gabriel Alonso de Herrera de Talavera de la Reina que ya han visto la trigonometría para ver el nivel de comprensión alcanzado de dicha unidad e identificar problemas de conceptos que pueden existir incluso después de haber terminado dicho tema. El test fue diseñado para ese fin teniendo en cuenta los errores más comunes que se cometen en trigonometría.

Para llevar a cabo todo lo expuesto el trabajo fue realizado en varias fases:

- 1) *Primera fase: Delimitación de la temática a estudiar.* Ha consistido en establecer la problemática en torno a la cual se quería realizar el trabajo. Para ello se ha reflexionado e investigado sobre los distintos temas que presentan dificultades en el curso de 4º de la ESO centrándonos en el de la trigonometría al presentar una problemática muy reconocida pero poco tratada. En función de ello se hizo una pequeña investigación a partir de distintos textos sobre la temática y se fijó el objetivo general del presente trabajo y los objetivos específicos derivados del mismo.
- 2) *Segunda fase: Establecimiento del marco teórico.* En esta fase y ya con los objetivos específicos marcados se procedió a establecer el marco teórico en torno a la problemática identificada. En primer lugar se procedió a establecer el marco legislativo que afecta al tema elegido. Posteriormente se atendió a las cuestiones más teóricas con respecto a los problemas cognitivos, así como de aprendizaje de la trigonometría y los recursos que ofrecen las TIC en el aula, específicamente los recursos de GeoGebra. Para ello se realizó la investigación bibliográfica con el fin de encontrar la documentación adecuada que tratara cada uno de los temas expuestos. Se tomó como base el catálogo de la Red de bibliotecas públicas de Castilla-La Mancha y la biblioteca de la UNIR, buscando a autores de gran relevancia en el tema, revistas actuales, y tesis sobre educación.
- 3) *Tercera fase: Estudio de campo.* Esta fase ha sido el complemento empírico de la segunda fase. Se ha llevado a cabo un estudio de campo realizando encuestas a profesores de la materia que nos ocupa para tener un contraste práctico del marco teórico. Y también se han realizado test a alumnos de 4º

de la ESO que acaban de estudiar el tema para ver el nivel de comprensión alcanzado.

- 4) *Cuarta fase: Propuesta didáctica.* En esta última fase se ha procedido a diseñar la propuesta concreta que se estableció en el objetivo principal, reflexionando y atendiendo a los datos recopilados tanto en la investigación bibliográfica como en el estudio de campo. Para ello se ha prestado atención a cada uno de los objetivos específicos con el fin de que quedaran cubiertos con la puesta en práctica de dicha propuesta y así hacer frente a la finalidad del presente trabajo.

2.4. Justificación de la bibliografía utilizada

La bibliografía utilizada se puede clasificar en función de los objetivos que han querido cubrir. Primeramente se van a destacar aquellas fuentes consultadas con el objetivo de cubrir la normativa tanto a nivel estatal como autonómica y establecer el currículo del área de las matemáticas que nos ocupa:

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE). En ella se establecen el currículo en torno a las enseñanzas mínimas para cada uno de los niveles educativos, en nuestro caso para 4º de la ESO, así como los criterios de evaluación y métodos pedagógicos.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen los contenidos, criterios de evaluación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.
- Decreto 69/2007, de 29 mayo, por el que se establece y ordena el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha.

Con respecto a las fuentes consultadas en torno a las dificultades del aprendizaje de las matemáticas y específicamente de la trigonometría en 4º de la ESO cabe destacar las siguientes:

- Flores Gil (2008). *Historia y Didáctica de la Trigonometría*. Este libro nos da una mirada particular de la historia, contenido y problemas relacionados

con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría. En los Capítulos 3, 4 y 5 se nos presentan los objetivos y competencias relacionadas con el tema de la trigonometría así como los contenidos concretos de la unidad lo que se va a tener en cuenta a la hora de desarrollar la propuesta práctica.

- En la tesis de San Martín Sicre (2003), *Una exploración de un proceso de construcción del significado del seno de un ángulo agudo como función y como razón*, realiza una investigación que se centra en el estudio particular de los problemas de significatividad en el concepto de las funciones trigonométricas lo que nos va a ayudar a identificar alguna de las problemáticas más comunes que se dan en el aprendizaje de la trigonometría.
- Fiallo Leal (2010) en *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*, en esta tesis además de plantear la principal problemática del aprendizaje de la trigonometría se presentan las ventajas de un entorno de Geometría dinámica para hacer frente a las mismas.

En relación a las ventajas de las TIC en el aula, y específicamente de un entorno de Geometría dinámica (GeoGebra) para el estudio de la trigonometría se han tenido en cuenta las siguientes publicaciones:

- El artículo de Sánchez Rosal (2010) titulado *Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TIC* ha resultado útil para el trabajo, pues en él se habla de los recursos electrónicos y TIC disponibles para el estudio y la práctica relacionados con la trigonometría. Esto ha servido para ver cuáles son los aportes que el uso de las TIC pueden hacer en el aprendizaje de la trigonometría.
- En la publicación *Representación de las Funciones Trigonométricas en el Software Educativo como es el Programa GeoGebra* de Benites, Herrera, Salas y Cuenca (2009) se exponen algunos ejemplos e ideas de las ventajas de GeoGebra como medio didáctico de enseñanza de la trigonometría. Lo que ha servido para ver aplicaciones concretas de la aplicación de este software.

3. Marco teórico

3.1. Normativa estatal

3.1.1. Ley Orgánica de Educación (LOE) y Real Decreto 1631/2006

Para establecer el marco teórico en el que se basa el presente trabajo es necesario partir de la vigente Ley Orgánica de Educación 2/2006, de 3 de mayo, ya que en ella se establecen los componentes básicos para articular el sistema educativo en nuestro país. En primer lugar cabe destacar en dicha Ley la mención al currículo y los elementos básicos que constituyen las enseñanzas mínimas:

1. A los efectos de lo dispuesto en esta Ley, se entiende por currículo el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente Ley.
2. Con el fin de asegurar una formación común y garantizar la validez de los títulos correspondientes, el Gobierno fijará, en relación con los objetivos, competencias básicas, contenidos y criterios de evaluación, los aspectos básicos del currículo que constituyen las enseñanzas mínimas. (BOE núm. 106, 2006, p. 17166).

Acotando y centrándonos en la Educación Secundaria Obligatoria nombramos al Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la ESO y las ocho competencias básicas que los alumnos han debido desarrollar al finalizar dicha etapa:

1. Competencias en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística.
7. Competencia para aprender a aprender.
8. Autonomía e iniciativa personal.

A continuación se presenta la descripción de la competencia matemática:

Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre

aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. (BOE núm. 5, 2007, p. 685).

En dicho Real Decreto 1631/2006 se establecen otra de las cuestiones que debemos tener en cuenta a la hora de abordar el presente trabajo, los contenidos de matemáticas en el curso que nos ocupa 4º de la ESO, opción B. Y específicamente en la materia de Trigonometría que aparece reflejada en el Bloque 4: "Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas". (BOE núm. 5, 2007, p. 759). Además, en el mismo, se establecen los criterios de evaluación siguientes: "Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales".

3.1.2. Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)

La Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) fue aprobada por el Congreso de los Diputados el 28 de noviembre y publicada en el Boletín Oficial del Estado el 10 de diciembre.

Según el actual calendario su implantación en 4º de la ESO no será efectiva hasta el curso 2016-2017. Sin embargo, debemos tener en cuenta las nuevas variantes con respecto a la estructura que afectan a las matemáticas:

- En el primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria (1º y 2º) aparecen las Matemáticas como materia general dentro del bloque de asignaturas troncales.
- En 3º de la ESO aparece como materia de opción dentro del bloque de asignaturas troncales. El estudiante deberá elegir entre Matemáticas Orientadas a la Enseñanzas Académicas, o bien Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.
- En la organización de 4º de la ESO se deberá elegir entre dos opciones:
 - a) Opción de enseñanzas académicas para la iniciación al Bachillerato.
 - b) Opción de enseñanzas aplicadas para la iniciación a la Formación Profesional.

A estos efectos, no serán vinculantes las opciones tomadas en 3º. En la opción a) las Matemáticas son Orientadas a las Enseñanzas Académicas, y en la opción b) son las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

3.1.3. Normativa autonómica de Castilla-La Mancha

A la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha le corresponde establecer el 35 % del currículo una vez establecido el mínimo en los Reales Decretos del MEC. Con ello se pretende responder a los intereses, necesidades, y rasgos específicos del contexto social y cultural de Castilla-La Mancha. En el Decreto 69/2007, de 29 de Mayo de 2007, se establece dicho currículo. En el mismo aparecen especificados los contenidos con respecto al bloque que nos concierne, el bloque 3: "Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas" (DOCM núm. 116, p. 14894). Así como los criterios de evaluación correspondientes: "Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales". Se observa que en estos aspectos no hay diferencias entre la normativa estatal y la autonómica.

En el citado Decreto agrega una nueva competencia a las ocho básicas descritas anteriormente: la competencia emocional. Consiste en que el alumnado de educación secundaria obligatoria será competente para, desde el conocimiento que tiene de sí mismo y de sus posibilidades, abordar cualquier actividad asumiendo sus retos de forma responsable y de establecer relaciones con los de más de forma positiva.

3.2. Dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Identificar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas es una cuestión fundamental a la hora de buscar estrategias y propuestas didácticas que mejoren el proceso de aprendizaje para los estudiantes. Para indagar sobre estas cuestiones que se van a exponer a continuación nos hemos basado en las obras e investigaciones de Socas (1997), Skemp (1999).

En primer lugar en el trabajo realizado por Socas (1997) se organizan estas dificultades en los siguientes puntos:

1. *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos Matemáticos.* Hay diferentes conflictos asociados a la comprensión de los objetos matemáticos y relacionados con el uso del lenguaje. Por ejemplo en el uso del lenguaje ordinario dentro del contexto matemático, así como, el uso de un lenguaje exclusivamente matemático nuevo para el alumno y que presenta al alumno considerables dificultades.
2. *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.* Se ha considerado siempre una de las principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas.
3. *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas.* Estos tiene que ver con la institución escolar, con el currículo de Matemáticas y con los métodos de enseñanza. Dentro del currículo hay cuatro elementos a considerar: las habilidades necesarias para desarrollar las capacidades, contenidos anteriores, nivel de abstracción y la naturaleza lógica.
4. *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.* Hay varias teorías generales sobre el desarrollo cognitivo pero muy pocas que se hayan ocupado específicamente de las Matemáticas.
5. *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.* Las actitudes negativas y emocionales hacia las Matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo que generan bloqueos en los alumnos.

Estas cuestiones deberemos tenerlas en cuenta a la hora de plantear los problemas de aprendizaje en los alumnos de 4º de la ESO, ahondando en las dificultades de los procesos de enseñanza desarrolladas para el aprendizaje de las Matemáticas. De hecho, en el libro *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas* (Skemp, 1999, pp. 39-40) expone que en el aprendizaje de las Matemáticas, aunque hemos de crear todos los conceptos de nuevo en nuestras propias mentes, sólo somos aptos para hacerlo mediante el empleo de los conceptos logrados por matemáticas anteriores. Y pone énfasis en que para el estudiante medio esto hace que el aprendizaje de las matemáticas sea muy dependiente de una buena enseñanza.

3.2.1. Dificultades en el proceso de aprendizaje de la trigonometría de 4º de la ESO

Una vez expuestos los problemas más generales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas el trabajo se va a centrar en los problemas de la misma naturaleza pero atendiendo y profundizando en la trigonometría de 4º de la ESO. Las obras que se han tenido en cuenta para dicho contexto son las investigaciones y obras de Fiallo (2010), Flores (2008), San Martín (2003).

En dichas obras ya se hace una mención directa de los problemas en la enseñanza y en el aprendizaje de la rama de la trigonometría.

En la investigación llevada a cabo por Fiallo (2010) se indica que uno de los problemas más importantes que radican en la dificultad de la trigonometría para los alumnos es la de ser un tema complicado e interconectado que lleva a que los estudiantes tengan que estar cambiando las definiciones dadas para las razones trigonométricas de acuerdo al enfoque y contexto planteado que hace sin duda referencia directa a las dificultades 1), 2) y 4) expuestas en el apartado anterior. Uno de estos problemas que afecta a la base fundamental del tema, como son las razones trigonométricas, consiste en que el alumno tiene que cambiar el estudio de las mismas en el triángulo rectángulo al plano cartesiano, cambia de una definición geométrica a una definición analítica, se cambia el concepto de ángulo como región comprendida entre dos lados de un triángulo rectángulo a analizar los valores de las coordenadas del plano y el radio de la circunferencia.

Por otro lado San Martín (2003) habla de la naturaleza abstracta de la Trigonometría que se manifiesta en varios aspectos que inciden de forma negativa en el aprendizaje, como por ejemplo los pocos recursos de representación gráfica que se usan para el tratamiento de los objetos matemáticos lo que limita la comprensión del alumno. Ya que al tratar el seno en las mayorías de las ocasiones se recurre a la representación como una razón, no se toma en cuenta otras formas de representarla.

En el libro *Historia y Didáctica de la trigonometría* (Flores Gil, 2008, pp. 6-7) se expone la necesidad de que la trigonometría al ser una rama muy técnica debe ser tratada con especial cuidado por el profesorado, intentando siempre motivar y animar a los alumnos para que confíen en sus propias capacidades y hacerles ver el lado más práctico de la trigonometría. En el mismo libro se presentan los que deben ser los objetivos de la unidad dedicada a la trigonometría y que tendremos en cuenta a la hora de focalizar el trabajo:

- Identificar la semejanza entre figuras planas.
- Definir las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo y de un ángulo cualquiera en la circunferencia unidad.
- Obtener las razones trigonométricas de un ángulo con la calculadora.
- Obtener un ángulo con la calculadora a partir de una razón trigonométrica de ese ángulo.
- Obtener el signo de las razones trigonométricas de un ángulo en función del cuadrante en el que se encuentre.
- Hallar las razones trigonométricas de un ángulo a partir de una de ellas.
- Resolver un triángulo rectángulo.
- Aplicar las relaciones trigonométricas para resolver problemas diversos: cálculo de distancias, de áreas, etc.

3.3. Las TIC en la enseñanza de las matemáticas

Hay muchas y muy diversas definiciones de TIC. La que proponen Ochoa y Cordero (2002) establece que son un conjunto de procesos y productos derivados de las nuevas herramientas (hardware y software), soportes y canales de comunicación, relacionados con el almacenamiento, procesamiento y la transmisión digitalizada de la información. Es uno de los elementos fundamentales que ha influenciado y ha hecho posible el cambio de la Sociedad de la Información a la Sociedad del Conocimiento. La importancia de este cambio radica en que el usuario ya no permanece estático sino que participa de una forma activa en el desarrollo, transformación y difusión del conocimiento. Han pasado a ser un elemento de la sociedad, y por lo tanto, de la educación. De hecho, como vimos anteriormente, en la normativa estatal, es una de las competencias básicas que debe adquirir el alumno al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria. En el Anexo I del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, se define tal competencia como:

Esta competencia consiste en disponer de habilidades para buscar, obtener, procesar y comunicar información y para transformarla en conocimiento. Incorpora diferentes habilidades, que van desde el acceso a la información hasta su transmisión en distintos soportes una vez tratada, incluyendo la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación como elemento esencial para informarse, aprender y comunicarse. (BOE, núm. 5, 2007, p.12).

Dentro de la enseñanza el papel de las TIC es fundamental y no sólo por influenciar de una forma directa en el desarrollo y adquisición de la competencia definida anteriormente sino porque tiene una serie de características que son positivas para la educación: inmaterialidad, diversidad, innovación, interconexión, colaboración, autonomía, creatividad, etc. En particular en el área de las matemáticas permiten la construcción del conocimiento y como afirma el NCTM (2008): "Cuando las herramientas tecnológicas están disponibles, los estudiantes pueden concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas" Esto sin lugar a dudas va a favorecer el aprendizaje matemático. Expuesta la idea de que las TIC ayudan en el aprendizaje matemático y de acuerdo al NCTM (2008), debemos tener en cuenta que el uso de estas herramientas no puede sustituir la conceptualización ni los procesos que conllevan la enseñanza de la asignatura sino que tienen que servir de soporte para lograr un mejor entendimiento de estos. De hecho, en general, y citando a Kofi Annan (2003):

Las tecnologías de la información y la comunicación no son ninguna panacea ni fórmula mágica, pero pueden mejorar la vida de todos los habitantes del planeta. Se disponen de herramientas para llegar a los Objetivos de Desarrollo del Milenio, de instrumentos que harán avanzar la causa de la libertad y la democracia, y de los medios necesarios para propagar los conocimientos y facilitar la comprensión mutua. (Annan, 2003, párr. 7).

3.3.1. Las posibilidades de la geometría dinámica en el aula

Para Goldenberg y Cuoco (1998, citado en Barroso y Gavilán 2003, p.23), los programas de geometría dinámica permiten a los usuarios, después de haber hecho una construcción (figura), mover ciertos elementos arrastrándolos libremente y observando cómo otros elementos responden dinámicamente al alterar las condiciones. Estas características de los programas relacionados con la Geometría dinámica según Fiallo (2010) van a permitir integrar diferentes concepciones de un tema, además de poder visualizar, explorar, analizar, plantear conjeturas acerca de las relaciones observadas y manipular diversas representaciones que le permitan establecer conexiones entre las diferentes definiciones, relaciones y propiedades de las razones trigonométricas. A continuación se presenta un cuadro comparativo entre las características de la Geometría dinámica y la Geometría tradicional:







Cuadro N° 1. Comparativa entre geometría tradicional y dinámica.

Geometría tradicional	Estática: una vez dibujada la figura no se puede manipular.	Poco precisas: sujetas a las destrezas del alumno para dibujar.	No se desarrolla el tratamiento de la información y competencia digital.
Geometría dinámica	Dinámica: una vez diseñada la figura se puede mover con el ratón y ver cómo se comporta.	Muy precisas: es el software quien realiza los dibujos.	Se desarrolla el tratamiento de la información y competencia digital.

Nota: Cuadro comparativo entre las características de la representación tradicional y dinámica de la Geometría. Fuente: Elaboración propia.

Además, según el mismo autor Fiallo (2010) en su investigación, las herramientas de software dinámico, analizando la respuesta de diferentes alumnos, van a permitir que por un lado a los que obtengan mejores resultados no sólo les sirva de andamio al proceso de solución sino que les va a ayudar a poder pasar de la argumentación a la deducción lógica. Y por otro lado como resultado del mismo estudio se concluye cómo las herramientas del software que no pueden ser programadas para ajustarse a los objetivos de los estudiantes pueden impedir expresar sus ideas matemáticas de forma correcta y así impedir la solución del problema. Es decir que para establecer los entornos de geometría dinámica con los que se quiere trabajar en el aula se tienen que tener una serie de consideraciones didácticas en cuenta para que su uso sea el adecuado. Basándonos en la publicación de Miranda (2006) presentamos un cuadro comparativo de los principales software de geometría dinámica con sus principales características:

Cuadro N° 2. Comparativa de los principales sistemas de geometría dinámica.

	 Cabri	 Sketchpad	 Cinderella	 GeoGebra	 Geonext	 Kig	Máximo
Manipulación de objetos	4	3	1	1	0	2	4
Tipos de objeto	9	7	6	9	6	10	10
Comprobación de propiedades	6	7	6	5	0	6	7
Construcciones incorporadas	11	11	7	14	8	19	19
Medición	8	8	6	7	4	6	9
Ecuaciones y coordenadas	6	5	3	8	4	7	8
Lugares geométricos	5	4	4	4	3	3	5
Macros y revisión de la construcción	3	4	1	3	1	3	4
Exportación a páginas Web	1	2	3	3	3	0	3
Formato y visualización de objetos	5	5	4	6	5	4	8
Total	58	56	41	60	36	60	77

Nota: Cuadro comparativo de los principales sistemas de geometría dinámica que se usan en educación. Fuente: elaboración propia a partir de Miranda (2006).

Como podemos observar existen diversos programas de geometría dinámica pero no todos ellos tienen los mismos recursos. Los que obtienen mejor puntaje según el cuadro comparativo en funcionalidad son GeoGebra y Kig, sin embargo, GeoGebra es el que más constante se mantiene en cada una de las características sin tener ninguna carencia llamativa. Por lo tanto vamos a centrarnos en el mismo para desarrollar nuestra propuesta didáctica y por ello a continuación vamos a exponer las cuestiones más importantes en referencia a GeoGebra en el estudio de la trigonometría.

3.3.2. GeoGebra y trigonometría

GeoGebra es un sistema de geometría dinámica creado en 2001 como trabajo de fin de máster en la Universidad de Salzburgo (Austria) y actualmente dirigido por Markus Hohenwarter. Además de las ventajas expuestas en la comparativa anterior

respecto a sus funcionalidades, tiene una serie de características que lo hacen especialmente atractivo para su uso en la educación secundaria:

1. Es un *software libre y gratuito*, además está disponible para varios sistemas operativos lo que le hace accesible a toda la comunidad educativa. Estas características han favorecido que en torno a GeoGebra se genere una comunidad de profesionales y docentes que investigan y trabajan para la continua mejora e innovación de los recursos que ofrece tanto a nivel técnico como de educación. Algunas de estas comunidades son: Geometría Interactiva Interoperable en Europa (I2G), o a través de la propia página de GeoGebra se encuentran foros y distintas comunidades.
2. Es una *herramienta diseñada específicamente para la enseñanza* de la geometría en la educación secundaria, por lo tanto orientada al uso de los alumnos de la educación secundaria. Su interfaz es sencilla y fácil de manejar y esto facilita la realización de actividades.
3. *Combina distintos elementos* de Aritmética, Geometría, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística, además de Vista Gráfica y Vista Algebraica, lo que según Losada (2011) establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos, los valores numéricos y las gráficas geométricas.

Centrándonos en el ámbito de la enseñanza de la trigonometría tiene otras ventajas que sin duda van a ayudar en el aprendizaje de la trigonometría en los alumnos de 4º de la ESO. Para ello y basándonos en el artículo publicado por Benites, Herrera, Salas y Cuenca (2009) en la *Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales*, vamos a presentar las características más importantes de GeoGebra que pueden ayudar en las siguientes actividades didácticas relacionadas con el aprendizaje de la trigonometría:

- Lograr el dominio del aprendizaje.
- Realizar procesos de aprendizaje con la finalidad de descubrir sus capacidades intelectuales.
- Interactuar entre el usuario y el ordenador con la finalidad de lograr mejores aprendizajes.
- Generar procesos de actualización dentro de la educación.

- Favorecer este software con la finalidad de que las clases sean más creativas, dinámicas, didácticas proporcionando una mejor concentración por parte de los estudiantes.

En relación con su aplicación en la trigonometría y basándonos en lo expuesto por Losada (2011) pasamos a describir algunas de las funcionalidades del programa y qué utilidad tiene en relación al aprendizaje de la trigonometría. GeoGebra permite que los alumnos puedan:

1. *Visualizar* conceptos abstractos y relaciones entre objetos. A través de actividades con GeoGebra se pueden realizar construcciones que ayuden a visualizar los conceptos básicos de la trigonometría y sus propiedades tal y como son las razones trigonométricas. Además va a permitir ver la relación entre la definición analítica y geométrica de una forma más intuitiva ya que el programa permite modificar los datos y mover la figura al alumno. Esto sin duda supone una mejora en la comprensión de los conceptos.
2. *Representar* gráficamente y relacionar. Hemos visto que uno de los problemas con los que se encuentran los alumnos es a la hora de las representaciones gráficas. Los recursos tradicionales (lápiz, papel, pizarra tradicional, etc.) muchas veces son limitados y no permiten proyectar al alumno impidiendo una buena comprensión. A través de las herramientas que ofrece GeoGebra se pueden dibujar distintas funciones trigonométricas e incluso manipular con el cursor para ver su comportamiento con el cambio de valores.
3. *Experimentar* con las matemáticas y ejemplos de uso. GeoGebra permite incluir imágenes reales y de esta manera analizar las relaciones trigonométricas que se puedan observar, por ejemplo, el plano de una cosa. Y con esta herramienta atendemos a la justificación de la trigonometría, a la experimentación y creatividad. Lo que supone un aliciente para los alumnos.

4. Estudio de campo

4.1. Presentación

El estudio de campo se realiza como complemento al marco teórico, con la intención de respaldar las teorías e investigaciones expuestas e identificar algunas cuestiones más concretas que se dan en el aula. Dicho estudio consistirá en dos partes que pasamos a enumerar y que serán desarrolladas en los siguientes puntos:

- 1) Encuesta a profesores que imparten dicha asignatura.
- 2) Test a alumnos de 4º de la ESO (opción B) que ya han estudiado la unidad de trigonometría en el presente curso.

4.2. Objetivos

El objetivo principal del estudio de campo con dichas herramientas pretende conocer directamente de profesores que imparten la asignatura algunas cuestiones que pueden resultar útiles a la hora de plantear la propuesta didáctica:

- Los medios y propuestas didácticas que usan los profesores para introducir y enseñar la trigonometría.
- Averiguar el conocimiento sobre geometría dinámica, y específicamente de GeoGebra, tanto de la aplicación como de sus utilidades que tienen los profesores.
- Conocer las problemáticas que representa el proceso de aprendizaje de la trigonometría.
- Observar el nivel de conocimiento y comprensión adquirido por los estudiantes una vez estudiado dicho bloque.

Los dos primeros objetivos expuestos se cubren con la fase de encuestas llevadas a cabo a docentes. Y los dos últimos con los correspondientes test a los alumnos.

4.3. Encuesta

Las encuestas se han realizado a profesores que imparten Matemáticas en 4º de la ESO (opción B) usando la herramienta en línea que la empresa SurveyMonkey pone a disposición del usuario y que permite diseñar encuestas en función de las necesidades del estudio. La encuesta consta de 8 preguntas las cuales pretenden responder a dos aspectos fundamentales que se han considerado en el marco teórico, pero ahora centrándonos en la experiencia real y concreta de los docentes en las aulas: la primera cuestión es con respecto a la percepción de los profesores de las citadas dificultades que presenta el aprendizaje de la trigonometría para los alumnos de 4º de la ESO (pregunta 2 y 3), y la segunda cuestión a la que hacemos referencia en la encuesta es a los medios y metodologías que usa el docente en el aula y a su conocimiento y uso de GeoGebra. A continuación se exponen las preguntas usadas para la encuesta así como su justificación:

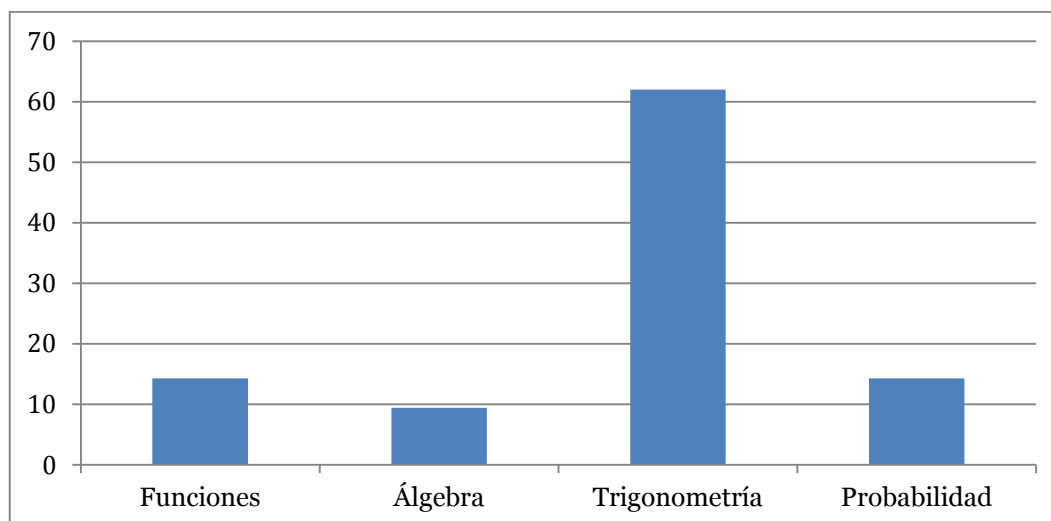
Cuadro N° 3. Resumen de la encuesta con opciones y justificación.

Preguntas	Justificación	Opciones	Justificación
Aproximadamente, ¿cuántos años lleva impartiendo trigonometría?	Experiencia como factor a considerar.	Cuadro en blanco	Poder expresar el dato requerido.
¿Cuál de los siguientes bloques considera de mayor dificultad para los estudiantes?	Contrastar la teoría sobre la dificultad que acarrea la trigonometría en comparación a los otros temas.	<ul style="list-style-type: none"> • Funciones • Álgebra • Trigonometría • Probabilidad 	Son los bloques que se ven en 4° de la ESO que presentan más dificultad.
¿Dónde reside el problema de aprendizaje de la trigonometría?	Conocer la opinión de los profesores con respecto a dónde reside la dificultad.	<ul style="list-style-type: none"> • Falta de justificación • Desarrollo cognitivo no adecuado • Conceptos débilmente adquiridos • Nuevos sistemas de medida • Nuevo uso de la calculadora • Falta de visualización de los problemas 	Listado de las actividades asociadas a la trigonometría y que según varios estudios vistos, más dificultad presentan para los estudiantes.
¿Qué tipo de metodología usa para enseñar trigonometría?	Conocer la metodología más usadas en torno a la enseñanza de la trigonometría.	<ul style="list-style-type: none"> • Operativo-participativa • Clases magistrales • Trabajos individuales o en grupo • Clases prácticas 	Las metodologías más usadas en el aula.
¿En qué tipo de recurso didáctico se apoya para enseñar trigonometría?	Conocer en el aula que recursos se usan para enseñar la trigonometría.	<ul style="list-style-type: none"> • Pizarra • Apuntes, libros de texto. • TIC • Otro 	Los recursos didácticos más usados en el aula.
¿Sabe qué recursos ofrece la geometría dinámica?	Ver el conocimiento que si los profesores tienen conocimiento de los SGD.	<ul style="list-style-type: none"> • Si • No 	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.
¿Ha usado algún software para trabajar trigonometría?, ¿cuál?	Complementaria a la anterior para conocer los más usados.	<ul style="list-style-type: none"> • Si • No • Especifique 	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.
¿Cree que el uso de GeoGebra puede ayudar a mejorar el aprendizaje de la trigonometría?	Saber si el profesorado conoce realmente los recursos para el aprendizaje que ofrece esta herramienta.	<ul style="list-style-type: none"> • Si • No 	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.

Nota: Resumen del cuestionario usado para la encuesta. Fuente: Elaboración propia.

4.3.1. Resultados y análisis de la encuesta

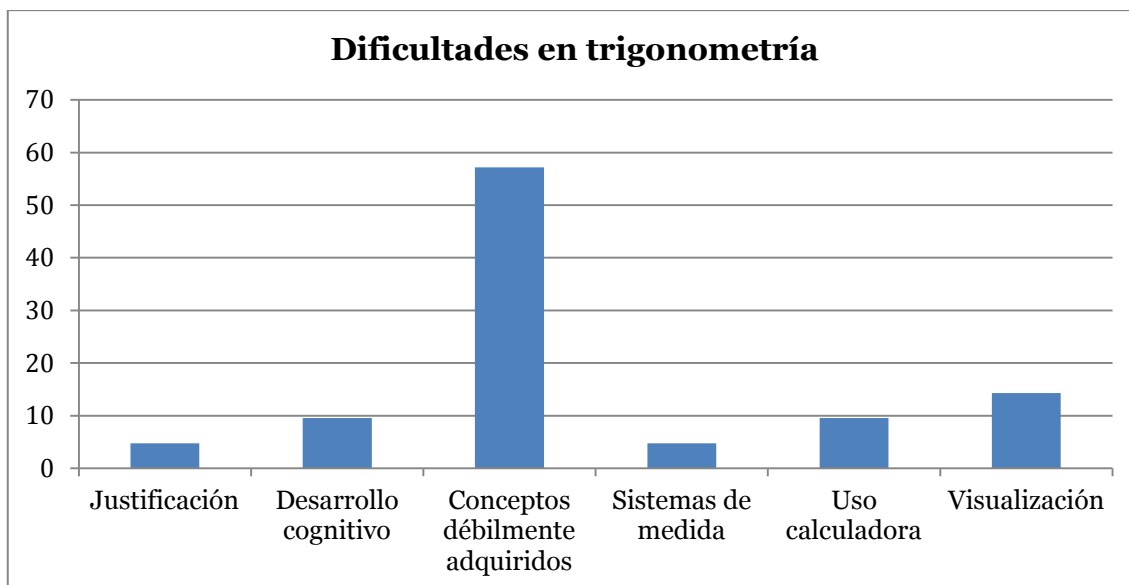
A continuación se presentan los resultados obtenidos en dicha encuesta. La media de experiencia en los encuestados es en torno a 10 años. Con respecto a la cuestión de cuál es el bloque que consideran de mayor dificultad para los estudiantes los resultados han sido los siguientes:



Gráfica N° 2. Bloque de mayor dificultad para los estudiantes según los profesores. Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados de SurveyMonkey.

De los 21 docentes que han respondido la encuesta el 62% consideran el bloque de la trigonometría de mayor dificultad lo que apoya la idea expuesta en el marco teórico.

En la siguiente cuestión se daba un listado de las actividades relacionadas con la trigonometría y que según los estudios revisados más dificultad presentan en el aprendizaje de los alumnos, en dicho listado los profesores encuestados tenían que elegir una opción. A continuación mostramos los resultados:



Gráfica N° 3. Actividades relacionadas con la trigonometría que presentan mayor dificultad para los estudiantes. Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en SurveyMonkey.

De los encuestados sobre el 57% consideran que la mayor dificultad en el aprendizaje está en los conceptos débilmente adquiridos. Es decir, la percepción de los docentes es que los alumnos no asimilan de una forma adecuada los conceptos relacionados con el tema de la trigonometría.

La metodología usada por el 80% de estos docentes es la operativo-participativa. A continuación mostramos en qué recursos didácticos se apoyan para enseñar trigonometría:



Gráfica N° 4. Recursos didácticos usados por los profesores para la enseñanza de la trigonometría. Fuente: Elaboración propia a partir de los datos obtenidos en SurveyMonkey.

La mayoría de los docentes encuestados siguen apoyándose en el uso de la pizarra tradicional para la enseñanza de la trigonometría. Siguiendo en la línea de esta cuestión cabe relacionar la siguiente en la que se preguntaba a los docentes si conocían los recursos de la geometría dinámica y respondieron afirmativamente el 54%. Parece que hay una falta de conocimiento con respecto a las herramientas disponibles que pueden ayudar en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. De hecho el 100% de los encuestados cree que el uso de programas como GeoGebra pueden ayudar a la mejor comprensión de la trigonometría.

4.4. Test de trigonometría

Los test han sido diseñados con el objetivo de identificar cuáles son los conceptos y las ideas que pueden continuar débilmente adquiridas en alumnos que ya han dado la trigonometría para así contrastar los datos obtenidos con respecto a las dificultades del aprendizaje en la trigonometría en la investigación bibliográfica. El test se ha realizado en el I.E.S. Gabriel Alonso de Herrera de Talavera de la Reina (Toledo). Para contextualizar primero vamos a exponer las características más importantes del centro, a continuación pasaremos a describir el perfil del centro y la estructura del test que se ha llevado a cabo y por último se expondrán los resultados del test y la interpretación de los mismos.

4.4.1. Contexto del centro

El Instituto de Educación Secundaria *Gabriel Alonso de Herrera* es un centro de titularidad pública que se encuentra situado en la avda. Pío XII de la ciudad de Talavera de la Reina (Toledo). Por su carácter público se compromete con los valores e ideales democráticos recogidos en la Constitución española, lo que se traslada a sus principios educativos que son: igualdad, solidaridad, tolerancia y pluralidad. Además de responsabilizarse con el modelo de enseñanza pública, en el que promoverá la participación en la gestión y en la vida del centro de todos los sectores implicados en ésta.

El Instituto Gabriel Alonso de Herrera es un centro de Educación Secundaria en el que se imparten los estudios de la ESO y las modalidades del Bachillerato de

Ciencias y Tecnología y del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales. Así mismo, se imparten dos Programas de Diversificación y un Programa de Cualificación Profesional Inicial.

La mayoría de los alumnos procede de los colegios públicos de la zona; entre un 10 y un 15% se desplaza desde las localidades próximas a Talavera de la Reina. La zona de influencia del Instituto abarca la mitad este de la ciudad y los pueblos situados al NE. El Instituto y su zona de influencia están situados en la parte de la ciudad más desarrollada económica y socialmente. Comparada con el resto del Estado, la renta familiar es media-baja y el nivel cultural igualmente medio-bajo. Su economía depende de las actividades terciarias poco evolucionadas; la industria mayoritaria es la construcción y el resto es de bajo nivel tecnológico.

4.4.2. Perfil del grupo y estructura del test

El test se ha realizado a un grupo de 4º de la ESO (opción B) del I.E.S. Gabriel Alonso de Herrera de Talavera de la Reina. El centro es de carácter público y el nivel socio económico de los estudiantes es medio. A continuación se presenta los datos obtenidos a partir de una entrevista que se realizó a la profesora de Matemáticas del grupo para conocer las características más relevantes y saber qué metodologías y recursos utilizó la profesora para la enseñanza de la trigonometría.

Cuadro Nº 4. Entrevista a profesora de Matemáticas.

Experiencia de la docente	Más de 20 años.
Número de alumnos del curso	Son 22 que vienen de las tres líneas diferentes que hay en 4º de la E.S.O. Hay 2 repetidores.
Nivel académico	Medio
Atención a la Diversidad	No
Características del grupo y ambiente en clase	Son bastante tranquilos y trabajadores en clase. Fuera les cuesta más. El ambiente en clase es agradable, se trabaja normalmente.
Dificultades con la trigonometría	<ul style="list-style-type: none"> • Tema nuevo. • Difícil justificación de las razones como funciones. • Uso de la calculadora. • Nuevas medidas.
Metodología empleada	Operativo-participativa.
Recursos utilizados	<ul style="list-style-type: none"> • Pizarra tradicional. • Apuntes propios. • Libro de texto. • Apuntes de internet.

Nota: Resumen de la entrevista realizada a la profesora del grupo al que se ha realizado el test de trigonometría. Fuente: Elaboración propia.

El test ha sido diseñado con la intención de identificar en el aula los problemas más comunes en el aprendizaje de la trigonometría que se han establecido con anterioridad. Presentamos la estructura del test con la justificación de cada una de las preguntas diseñadas.

Cuadro N° 5. Esquema del test de trigonometría.

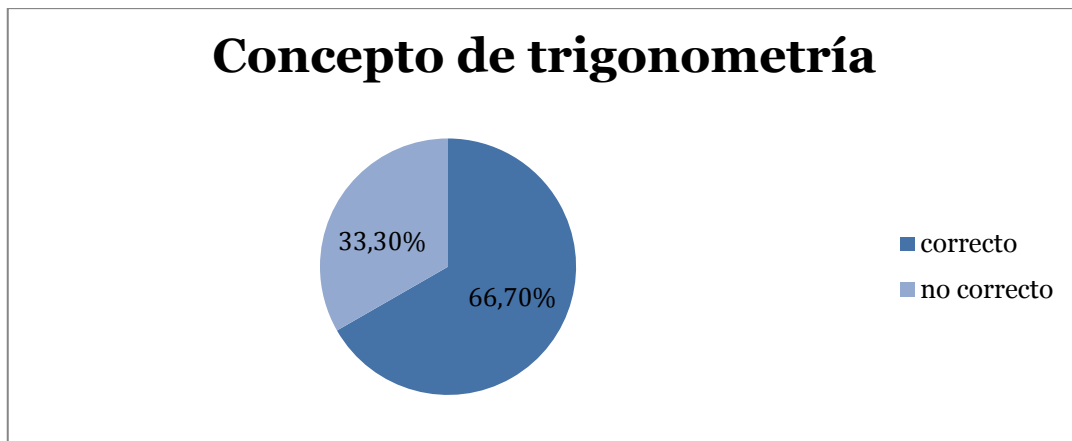
Pregunta o enunciado	Justificación
Explica brevemente qué es la trigonometría	Saber si los alumnos saben en qué consiste lo que han estudiado.
Pon algún ejemplo de uso práctico en la vida cotidiana	Saber si los alumnos saben justificar el uso de la trigonometría.
Dificultad de la trigonometría	Tener en cuenta la propia percepción de dificultad de los alumnos.
En 3º de la ESO, ¿viste algo relacionado?	Ver si los alumnos asocian adecuadamente la trigonometría con la geometría.
Enumera del 1 al 5 el grado de dificultad	Se ha hecho un listado con las dificultades más comunes asociadas a la trigonometría para que el alumno valore.
Razones trigonométricas sobre un triángulo girado	Ver si los alumnos son capaces de identificar las razones trigonométricas independientemente de la orientación del ángulo.
Razones trigonométricas sobre triángulos semejantes	Saber si los alumnos tienen el conocimiento adquirido de que las razones trigonométricas en triángulos semejantes son iguales.

Nota: Esquema de las preguntas incluidas en el test de trigonometría realizado a los alumnos de 4º de la ESO. Fuente: Elaboración propia.

4.4.3. Resultados e interpretación del test

A continuación se van a presentar por orden los resultados obtenidos en el test y se van a ir interpretando de forma paralela.

La primera cuestión hacía referencia al concepto de trigonometría. Para evaluarla se ha tenido en cuenta si los alumnos han nombrado de forma correcta las dos palabras clave de esta rama: *medida y triángulos*. Siguiendo este criterio se han obtenido los siguientes resultados:

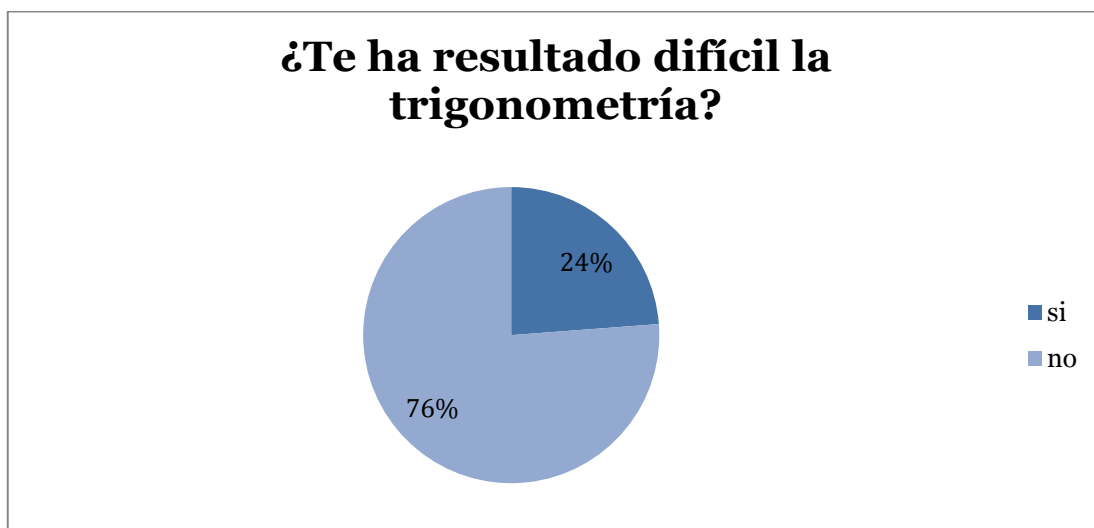


Gráfica N° 5. Resultados sobre la correcta conceptualización de la trigonometría. Fuente: Elaboración propia.

La mayoría de los alumnos han respondido de forma correcta, sin embargo, el porcentaje de los que no lo han hecho es bastante alto considerando que ya han visto el tema.

La segunda cuestión planteaba escribir algún ejemplo de aplicación en la vida cotidiana. Los que lo han hecho de forma correcta se han limitado a enunciar modelos de ejercicio hechos en clase como por ejemplo: calcular la altura de un árbol conociendo su sombra, altura de edificio en función de la sombra, etc. Es decir, no han sabido de forma autónoma plantear otro tipo de aplicaciones.

Con la tercera pregunta se quería ver la percepción de dificultad de este tema para los alumnos. Los resultados han sido los siguientes:

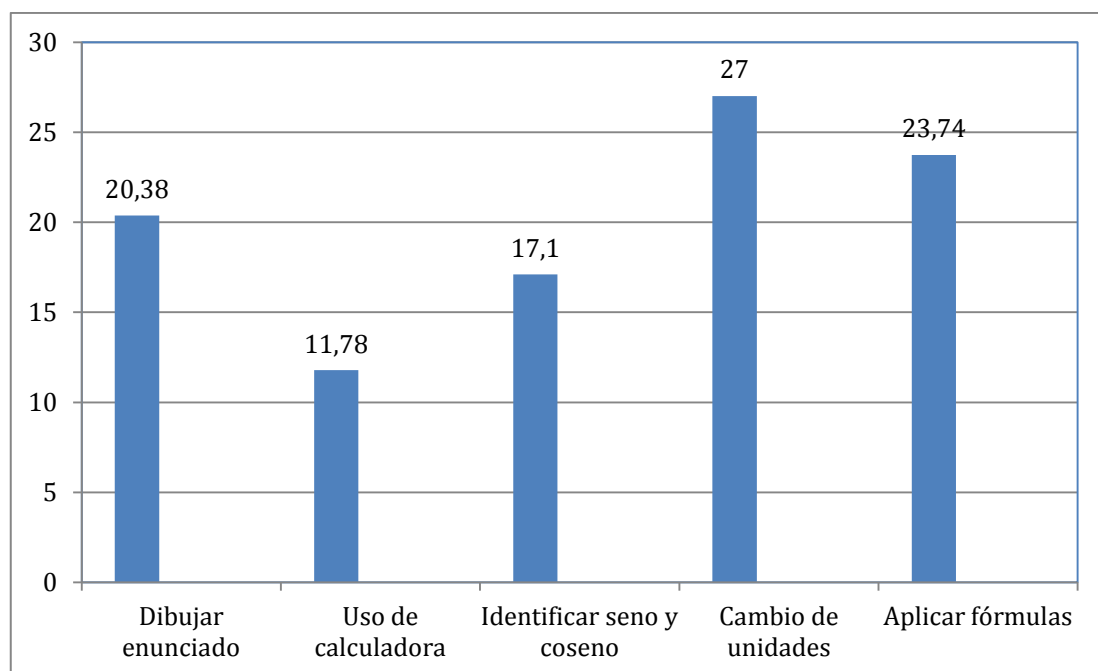


Gráfica N° 6. Porcentaje de alumnos que consideran o no difícil la trigonometría. Fuente: Elaboración propia.

Resulta llamativo que la idea de la mayoría de los alumnos es que la trigonometría no les ha resultado difícil cuando en realidad y como vamos a poder comprobar con el resto de las cuestiones se observan problemas de comprensión. Por lo tanto hay una falta de coherencia entre la percepción de los alumnos y los resultados obtenidos.

La cuarta pregunta se propuso con la idea de ver si los alumnos relacionaban la trigonometría con la geometría de 3º de la ESO, con el estudio de los triángulos, distancias y teorema de Pitágoras. Solo el 29 % respondieron que si e hicieron alusión directa a la geometría y estudio de triángulos como tema relacionado. El resto de los estudiantes no vieron ninguna relación.

En la quinta cuestión se daba una lista de 5 actividades relacionadas directamente con la trigonometría las cuales tenían que numerar del 1 (menor grado de dificultad) al 5 (mayor grado de dificultad). Han sido seleccionadas tomando como base lo expuesto en la investigación bibliográfica, eligiendo aquellas en la que los alumnos suelen tener más problemas en el aprendizaje. Exponemos a continuación la gráfica con los resultados:



Gráfica N° 7. Grado de dificultad de actividades relacionadas con la trigonometría según alumnos. Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar que no hay una actividad que predomine en su grado de dificultad para los alumnos sobre las demás. La mayoría han considerado que lo más

fácil es el uso de la calculadora. Sin embargo, el trabajo con unidades nuevas, el trabajo con fórmulas e identidades trigonométricas e identificar las razones trigonométricas son las que más les cuestan. Las siguientes preguntas expuestas van a servir, como veremos, para apoyar esta tendencia.

La sexta cuestión consistía sobre un triángulo girado identificar las razones trigonométricas para saber si los alumnos tienen los conocimientos bien adquiridos con capacidad de razonar o, por el contrario, los conceptos han sido memorizados. A continuación se presentan los resultados clasificados:

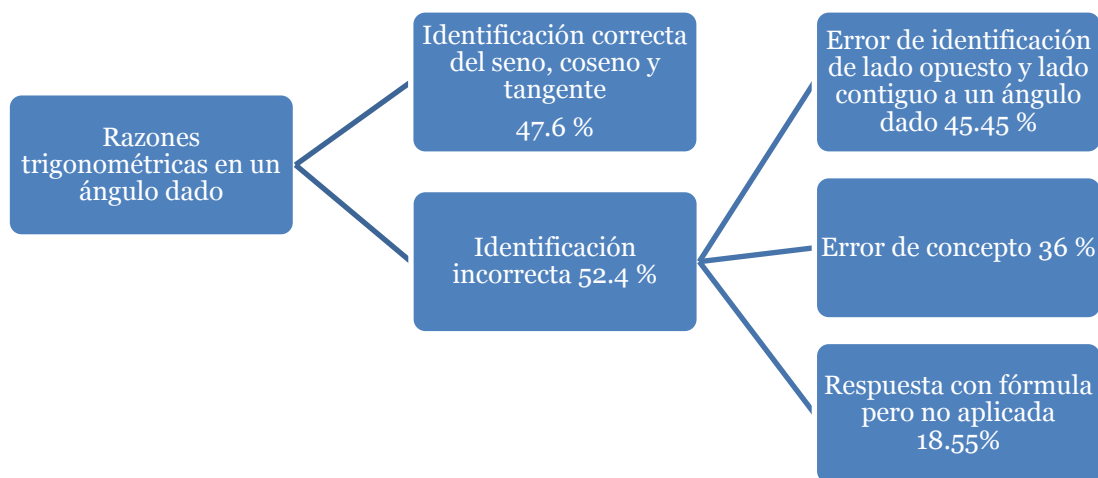


Ilustración N° 1. Clasificación de respuestas a la identificación de las razones trigonométricas.

Los alumnos que han respondido de forma correcta no han llegado al 50 % y fijándonos en el tipo de error cometido, sobre el 45 % de los alumnos no han sabido identificar el lado contiguo y lado opuesto en el triángulo girado, o se han limitado a expresar la fórmula de forma correcta pero sin poner resultados sobre el triángulo dado, lo que apoya la idea de que los conceptos están débilmente adquiridos y con problemas de identificación en un triángulo girado.

Por último, la séptima pregunta plantea un ejercicio para determinar la comprensión de triángulos semejantes y de funciones trigonométricas. Esta pregunta fue respondida de forma correcta por 76% de los alumnos. Pero lo llamativo es que sobre el 60% de los que respondieron de forma acertada hicieron los cálculos, es decir, no razonaron la proporcionalidad de figuras sino que se limitaron a hacer cálculos con los datos dados.

4.4.3. Conclusiones del test

Con la realización del test se quería obtener un ejemplo concreto de los problemas descritos en el aprendizaje de la trigonometría. Los resultados han mostrado las siguientes conclusiones:

1. Los alumnos no han podido extender el conocimiento de la trigonometría más allá de los enunciados de problemas vistos en clase, lo que supone una falta de comprensión que se podría solucionar haciendo una introducción al tema más completa y dinámica, poniendo ejemplos de aplicación más variados y llamativos para los alumnos.
2. La percepción de dificultad de la trigonometría con los resultados obtenidos en los test no han sido coherentes como hemos podido observar, ya que la mayoría de los estudiantes respondieron que no les había resultado difícil el tema de la trigonometría y, sin embargo, los resultados han mostrado que ha habido una falta de comprensión en la mayoría de los alumnos. Hay una falta de conciencia y objetividad en la percepción de su conocimiento sobre el tema. Lo que genera la necesidad de hacer conscientes a los estudiantes de su verdadero nivel de aprendizaje y desarrollar su capacidad de autorregulación. Una posible herramienta consiste en hacer pruebas regularmente que les permita ver sus avances o no en el tratamiento de la trigonometría.
3. Hay falta de relación, asociación y continuidad entre los conceptos sobre geometría vistos en 3º y la trigonometría de 4º. Por lo que sería importante hacer un repaso o asociar el comienzo del tema con los visto anteriormente para que los alumnos vieran una extensión del estudio de los triángulos.
4. Los conocimientos débilmente adquiridos y la dificultad de identificar las razones trigonométricas son cuestiones fundamentales que hay que tratar. Estas cuestiones se pueden trabajar con GeoGebra ya que usando ambientes de geometría dinámica hemos visto a partir de lo expuesto por Losada (2011) en el apartado 3.3.2. GeoGebra y trigonometría, como permite al alumno y de una forma sencilla visualizar conceptos abstractos, representar gráficamente, experimentar además de construir y modificar las figuras y de esta forma centrarse en el razonamiento y la adquisición de conceptos.

5. Propuesta didáctica

5.1. Introducción

Una vez llevado a cabo el marco teórico y el estudio de campo pasamos a desarrollar la propuesta didáctica que era la finalidad del presente trabajo. A través de ella se pretende mostrar un ejemplo concreto de aplicación de GeoGebra como apoyo al profesor y medio de resolución de distintas actividades para los alumnos que favorezcan el aprendizaje y la comprensión de los conceptos fundamentales relacionados con este tema.

Primeramente plantearemos los objetivos que hemos fijado para desarrollar la propuesta didáctica. Después nos centraremos en los aspectos técnicos y formativos a considerar para poder desarrollarla y fijaremos los contenidos y objetivos relacionados con la misma a fin de tenerlos en cuenta en el diseño de las sesiones que conformaran la propuesta didáctica. Seguidamente se describirá la metodología en la que se va a basar la propuesta para después pasar a la descripción de la misma. Por último y para ver la aplicación real de GeoGebra en el aprendizaje de la trigonometría se expondrá y desarrollará un ejemplo de actividad.

5.2. Objetivos

La propuesta didáctica ha sido diseñada con el fin de alcanzar los siguientes objetivos específicos:

1. Introducir y justificar la trigonometría adecuadamente a los alumnos.
2. Cubrir los contenidos específicos del tema establecidos por la normativa vigente, Real Decreto 1631/2006.
3. Diseñar clases usando distintas metodologías según la finalidad de la sesión para favorecer el aprendizaje: operativo-participativa, exposición didáctica, trabajo cooperativo e individual.
4. Usar GeoGebra como apoyo a la introducción de distintos conceptos y actividades para facilitar el razonamiento y comprensión de los alumnos.

Una vez llevados a cabo se ha conseguido el objetivo final del presente trabajo: *Presentar y fundamentar una propuesta didáctica basada en el uso del software GeoGebra para mejorar el proceso de aprendizaje de la trigonometría de los alumnos de 4º de la ESO.* Para ello se han tenido en cuenta los puntos más importantes y relevantes observados y estudiados a partir tanto del marco teórico como del estudio de campo, a través de los cuales hemos establecido las dificultades cognitivas asociadas al estudio de la trigonometría en el grupo de los alumnos de 4º de la ESO (opción B) y como GeoGebra puede ayudar en el proceso del mismo al ser una herramienta dinámica y visual.

5.2. Aspectos técnicos y formativos

En esta sección se van a nombrar los recursos necesarios para implementar la propuesta metodológica. Para llevar a cabo dicha propuesta necesitamos en primer lugar contar con una serie de elementos técnicos en el aula y en el centro. Es necesaria un aula de informática que esté dotada de un proyector conectado al ordenador del profesor, así como un ordenador por cada dos alumnos. Se necesita además: conexión a internet, que los ordenadores tengan sistema: Java Enviroment (versión 1.4.2 o superior) para poder acceder a la instalación de GeoGebra (Freeware), personal que se encargue de actualizar, etc. Es importante también para llevar a cabo dicha propuesta que el docente tenga conocimiento de la herramienta, sus aplicaciones y recursos. Igualmente importante para la puesta en marcha de la presente propuesta didáctica es el dominio de dicha herramienta por parte de profesor y en este sentido cabe destacar que en torno a GeoGebra hay un amplio abanico de instituciones y comunidades que a través de internet ofrecen información, formación e investigaciones para la mejora de la aplicación del software en el ámbito educativo.

5.3. Contenidos y objetivos

Para diseñar la propuesta didáctica hemos fijado primeramente cuáles son los contenidos y objetivos específicos que quieren ser cubiertos a través de la misma teniendo en cuenta la legislación vigente y tomando como referencia lo expuesto por

Flores (2008) con respecto a los objetivos de la trigonometría que pasamos a reflejar y relacionar en el siguiente cuadro:

Cuadro N° 6. Contenidos y objetivos de la trigonometría de 4º de la ESO.

Contenidos	Objetivos
Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas.	Conocer las razones trigonométricas de un ángulo y sus relaciones.
Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.	Utilizar adecuadamente la calculadora para efectuar cálculos trigonométricos.
Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.	Aplicar las relaciones trigonométricas para el cálculo de distancias de ángulos en situaciones reales. Y utilizar los conocimientos geométricos para efectuar mediciones indirectas relacionadas con situaciones tomadas de contextos cotidianos.

Nota: Relación entre contenidos y objetivos de la trigonometría de 4º de la ESO. Fuente: Elaboración propia a partir de Flores (2008).

5.4. Metodología

Con respecto a la metodología que se va a usar para realizar la propuesta didáctica vamos a tener en cuenta distintos métodos dependiendo de la actividad que estemos llevando a cabo para favorecer el desarrollo de las sesiones según su objetivo. A continuación presentamos qué metodologías se van a usar y con qué fin dentro de esta propuesta didáctica.

5.4.1. Exposición didáctica

La exposición didáctica o lección explicativa es una metodología operativo-participativa que Alves (1963) define como: "es el procedimiento por el cual el profesor, valiéndose de todos los recursos de un lenguaje didáctico adecuado, presenta a los alumnos un tema nuevo, definiéndolo, analizándolo y explicándolo" (p. 187). Según el mismo autor una exposición para que sea adecuada debe seguir los siguientes pasos: introducción (con buena carga motivadora), desarrollo y síntesis. A

continuación pasamos a desarrollar estos pasos en función de las necesidades marcadas por nuestro tema:

- a) *Introducción*: hemos visto la importancia y la necesidad de justificar e introducir la trigonometría de una forma adecuada para favorecer el aprendizaje del alumno. Para ello el profesor debe enlazarlo con el estudio de los triángulos visto en la geometría de 3º haciendo un repaso para que el alumno vea una continuidad y relación, y no un tema totalmente nuevo. Para la introducción y justificación se podría hacer un recorrido desde las primeras aplicaciones de la trigonometría hasta la actualidad a través de alguna presentación multimedia preparada por el profesor.
- b) *Desarrollo*: una vez hecha la presentación y justificación adecuadas pasamos al desarrollo propio de la trigonometría. Este debe ser esencialmente analítico y bien ordenado. Para llevar a cabo este punto el profesor debe establecer los contenidos concretos y los objetivos que quiere cubrir en el tema. A partir de la legislación vigente y lo redactado por Flores (2008) consideramos los contenidos y objetivos descrito en el *Cuadro N°5*. Para llevar a cabo el desarrollo es importante que haya preparación por parte del profesor siguiendo una estructura que permita al alumno seguir una secuenciación lógica de los conceptos y los contenidos. A continuación establecemos la estructura de la secuenciación de contenidos en trigonometría:

Cuadro N° 7. Secciones y contenidos del tema trigonometría.

Sección de la unidad	Contenido de la sección
Los ángulos y su medida	<ul style="list-style-type: none"> • Recorridos en la circunferencia • Radianes • Grados sexagesimales • De radianes a grados • Midiendo ángulos
Razones trigonométricas	<ul style="list-style-type: none"> • Razones trigonométricas • Seno y coseno en la circunferencia • Tangente en la circunferencia • Razones de 30°, 45° y 60°
Relaciones trigonométricas	<ul style="list-style-type: none"> • Relaciones fundamentales
Resolver triángulos rectángulos	<ul style="list-style-type: none"> • Con un ángulo y la hipotenusa • Dados un ángulo y un cateto • Conocidos dos lados
Razones de ángulos cualesquiera	<ul style="list-style-type: none"> • Seno, coseno y tangente
Aplicaciones de la trigonometría	<ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas métricos

Nota: Secciones de la unidad de trigonometría con sus correspondientes contenidos.

Fuente: Elaboración propia a partir de García y Ruiz (2008).

- c) *Síntesis*: en esta parte se presenta tanto la conclusión como las aplicaciones concretas del tema. Es importante que el docente presente a los alumnos una síntesis del tema que puede ser a modo de esquema a partir de la estructura seguida en clase. Y plantear las aplicaciones sobre las que se va a evaluar el tema.

5.4.2. Trabajo cooperativo

El trabajo en grupo tiene diferentes ventajas que caben destacar: motivación, tratamiento de la diversidad, cooperación frente a la competitividad y es más eficiente (UNIR, 2014). Además el trabajo cooperativo en matemáticas según la investigación llevada a cabo por Pons et al. (2008) favorece el rendimiento en actividades relacionadas con contenidos más novedosos y complejos. Lo que sin duda son dos características del contenido que estamos tratando para los alumnos de 4º de la ESO. Por ello se plantearán diversas actividades en las que se use esta forma de trabajo. Estas actividades cuyo contenido se desarrollara más adelante consisten en resolver ejercicios en pequeños grupos de 3 alumnos organizados por el profesor. Las actividades estarán encaminadas a trabajarlas a través de GeoGebra.

5.5. Descripción de la propuesta

A continuación se van a describir las principales características que conforman la propuesta didáctica, tanto el número de sesiones, duración, contenidos y actividades que se van a llevar a cabo en cada una de ellas. Y a continuación se expondrá un ejemplo de actividades a desarrollar en grupo mediante GeoGebra.

5.5.1. Actividades y temporalización

Pasamos a describir los contenidos, actividades y temporalización por bloques:

Cuadro N° 8. Actividades y temporalización de la propuesta didáctica.

Bloque 1: Los ángulos y su medida			
Sesión	Duración	Contenido	Actividades
Primera	25 min.	Presentación de cómo se va a trabajar la trigonometría. Explicar contenidos, metodología y recursos que se van a usar. Formar grupos.	En el aula reflexionar sobre aplicaciones de la trigonometría.
	25 min.	Introducción a la trigonometría. Recorrido por la historia de la trigonometría. Recordar lo visto en 3º de la ESO relacionado..	
Segunda	50 min.	Exposición de los contenidos mediante exposición didáctica.	Realizar actividades relacionadas con lo visto en el aula.
Tercera	15 min.	Corrección de ejercicios y resolución de dudas.	Realizar actividades relacionadas con lo visto en el aula.
	35 min.	Exposición didáctica de los contenidos con apoyo en GeoGebra.	
Bloque 2: Razones trigonométricas			
Cuarta	15 min.	Corrección de ejercicios y resolución de dudas.	Actividades para realizar en casa relacionadas con el contenido de clase.
	35 min.	Exposición didáctica. Introducción a GeoGebra.	
Quinta	20 min.	Exposición didáctica de los contenidos. Introducción para la realización de actividades en grupo con GeoGebra.	Realización de esquema del bloque 1 y bloque 2.
	30 min.	Taller de actividades con GeoGebra.	
Bloque 3: Relaciones trigonométricas			
Sexta	15 min.	Corrección de ejercicios y resolución de dudas.	Actividades para realizar en casa relacionadas con el contenido de clase.
	35 min.	Exposición de los contenidos correspondientes mediante exposición didáctica.	
Séptima	15 min.	Corrección de ejercicios y resolución de ejercicios.	Actividades para realizar en casa relacionado con lo visto en clase.
	35 min.	Exposición didáctica y desarrollo de ejercicios en clase.	
Bloque 4: Resolver triángulos rectángulos			
Octava	25 min.	Exposición de los diferentes tipos de situaciones posibles con ejemplos.	Realizar esquema de resolución de triángulos y las fórmulas para aplicar en cada caso.
	25 min.	Exposición de los contenidos mediante exposición didáctica.	
Novena	20 min.	Exposición didáctica con GeoGebra.	Actividades para casa relacionadas con el tema.
	30 min.	Taller de GeoGebra para trabajar resolución de triángulos rectángulos.	
Bloque 5: Razones de ángulos cualquiera			
Décima	25 min.	Corrección de ejercicios y resolución de dudas.	Actividades para realizar en casa relacionadas con el contenido de clase.
	25 min.	Exposición didáctica apoyada en GeoGebra.	
Undécima	20 min.	Exposición didáctica de los contenidos. Realización de actividades en grupo con GeoGebra.	
	30 min.	Taller de actividades con GeoGebra.	
Bloque 6: Aplicaciones de la trigonometría			
Duodécima	15 min.	Corrección de ejercicios y resolución de dudas.	Actividades para realizar en casa relacionadas con el contenido de clase.
	35 min.	Exposición didáctica y ejemplos.	
Tredécima	20 min.	Exposición didáctica de los contenidos. Actividades con GeoGebra.	
	30 min.	Taller de actividades con GeoGebra.	

Nota: Actividades y temporalización de las actividades que se van a llevar a cabo en la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia a partir de García y Ruiz (2008).

5.5.2. Desarrollo de actividades con GeoGebra

A continuación vamos a describir una actividad para desarrollar con GeoGebra en la propuesta didáctica presentada. La actividad elegida para desarrollar está relacionada con el bloque 2: *Razones trigonométricas*. Hemos elegido este bloque para desarrollar la actividad con GeoGebra porque además de ser de los fundamentales, ya que son los conceptos base de la trigonometría, es uno de los que mayor dificultad presenta para los alumnos por lo que podemos desarrollar un ejemplo concreto del uso GeoGebra para facilitar la comprensión de las razones trigonométricas. La actividad se desarrollará en la segunda parte de la sesión quinta. A continuación pasamos a describir brevemente dicha sesión para a continuación desarrollar la actividad mencionada:

1. *Exposición didáctica*: esta primera parte de la sesión que se desarrollará al igual que la segunda parte en el aula de informática, tendrá una duración de 20 minutos. En ella se corregirán ejercicios hechos en casa, se resolverán dudas y se terminará de hacer la exposición didáctica relacionada con las razones trigonométricas.
2. *Trabajo en grupo*: tendrá una duración de 30 minutos. Esta parte de la sesión comenzará con la explicación del profesor en qué va a consistir la actividad y agrupará a los alumnos de dos en dos por ordenador. Se procederá a la entrega del guión de la actividad que se leerá en voz alta para aclarar las dudas que vayan surgiendo relacionadas con el enunciado. A continuación se procederá a la realización de la actividad que consistirá en que a partir de una applet desarrollada por el docente en GeoGebra para tal fin, los alumnos tengan que ir respondiendo a partir de lo observado y experimentado a través del mismo a una serie de preguntas en el guión.

A continuación se describe el guión sobre el que se va a desarrollar la actividad:

1. *Descargar el applet*: los alumnos tendrán que descargarse el applet del enlace facilitado por el profesor y sobre el que se va a desarrollar la actividad. A continuación se observa una imagen de applet desarrollada por Larrosa (2014) y sobre el que vamos a desarrollar este ejemplo en concreto:

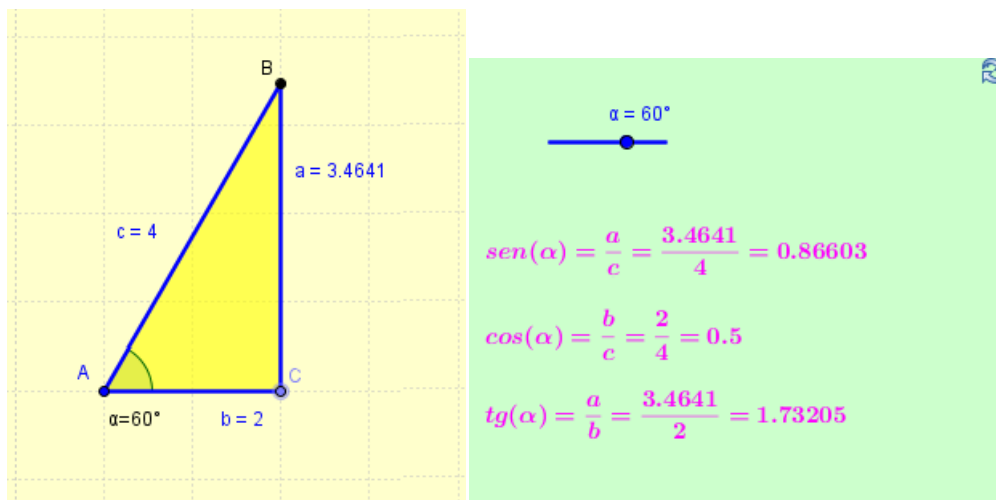


Ilustración N^o 2. Applet desarrollado con GeoGebra para trabajar las razones trigonométricas. Fuente: Larrosa (2014).

En este applet el alumno puede manipular dos elementos: el vértice C del triángulo, lo que le va a permitir aumentar el tamaño del triángulo, y el ángulo α , que le va a permitir aumentar el ángulo del triángulo. Y de esta forma el alumno puede experimentar y relacionar los cambios de tamaño, aumentando o disminuyendo los lados, y de forma del triángulo, variando el valor de α , con los valores de las razones trigonométricas.

2. *Realizar las actividades:* en el guión facilitado a los alumnos se presentará una guía de realización y experimentación sobre la que tienen que ir respondiendo una serie de preguntas de forma ordenada en relación a las razones trigonométricas. A continuación presentamos el cuadro de las preguntas y su justificación:

Cuadro N° 9. Guía de actividades para realizar sobre GeoGebra.

Preguntas y actividades	Justificación de la pregunta
1. ¿Las razones trigonométricas dependen del tamaño del triángulo? ¿o del ángulo?	Para hacer una reflexión anterior a la experimentación y saber de qué punto de comprensión parten los alumnos.
2. En el applet dado arrastra el vértice del triángulo C a la derecha y anota los resultados de las razones trigonométricas para los nuevos valores de los lados. Haz lo mismo hacia la izquierda. ¿Qué observas?	Experimentar y reflexionar la constancia de las razones trigonométricas sobre el tamaño del triángulo.
3. En el mismo applet toma el ángulo α y arrástralo hacia un valor más pequeño y anota el resultado de las razones trigonométricas. Haz lo mismo con un valor más grande. ¿Qué observas?	Experimentar y reflexionar sobre la variabilidad de las razones trigonométricas en función del ángulo.
4. Entonces, ¿el valor de las razones trigonométricas varían con el tamaño o con la forma del triángulo?	Reflexionar sobre lo experimentado a través del applet de GeoGebra y sacar conclusiones.
5. Haz una tabla con las razones trigonométricas de los ángulos fundamentales (0, 30, 45, 60, 90 grados) y calcúlalos usando la aplicación.	Repasar las razones trigonométricas usando el applet para calcular.

Nota: Guía de preguntas y actividades con su justificación para desarrollar a través de un applet diseñado con GeoGebra. Fuente: Elaboración propia a partir de Larrosa (2014).

6. Aportaciones del trabajo

El presente trabajo ha presentado una propuesta didáctica concreta para facilitar el aprendizaje de la trigonometría a los alumnos de 4º de la ESO de la opción B usando GeoGebra. Para llegar a ella se han tenido en cuenta diversas cuestiones que atienden sobre todo a la dificultad de esta rama de las matemáticas e identificando el porqué. Muchos autores coinciden en que la dificultad de la trigonometría reside en su falta de justificación, de visualización, conceptos débilmente adquiridos, etc. Por lo que teniendo en cuenta estas cuestiones se han buscado herramientas que faciliten el aprendizaje y pongan remedio a las dificultades identificadas en el marco teórico y apoyadas por el estudio de campo. Para la búsqueda de estas herramientas hemos centrado nuestra atención en las TIC ya que a través de los programas orientados a la geometría dinámica se propone una forma de aprendizaje y trabajo que favorece la adquisición y comprensión de los conceptos más básicos y a la vez relevantes de la trigonometría. GeoGebra es uno de estos software que además tiene multitud de ventajas: orientado a la educación secundaria, software libre, en continuo desarrollo, etc. Contando con estos factores hemos desarrollado una propuesta didáctica que se desarrolla en diversas fases y en la que se presenta un proceso de enseñanza de la trigonometría que facilita el aprendizaje de los estudiantes.

Por lo tanto las aportaciones del presente trabajo consisten en enseñar la trigonometría usando una exposición didáctica y trabajos en grupo, complementándola con actividades individuales y grupales, en la que el profesor apoyado en GeoGebra explique de manera didáctica los principales y básicos conceptos fundamentales para la comprensión de la trigonometría, de tal manera que el alumno de una forma visual pueda justificar, ver y construir remediando así los problemas identificados. Además apoyándonos en GeoGebra promovemos de una forma directa el tratamiento de la información y competencia digital.

7. Discusión

Una vez finalizado el trabajo, planteada y fundamentada la propuesta didáctica se puede reflexionar sobre los objetivos planteados en los que se ha basado el trabajo y lo obtenido finalmente. Fiallo (2010) resalta la idea de que la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría es un campo poco explorado por los investigadores en didáctica de las matemáticas, algo que se ha podido comprobar a través de la investigación bibliográfica. Y sin embargo los estudios sobre la dificultad específica que presenta esta rama para los alumnos de 4º de la ESO son bastante claros. Por lo que realmente hay un amplio campo en el que explorar para establecer de forma más concreta si el problema de dificultad es cognitivo o curricular. Las limitaciones del presente trabajo no han permitido hacer un estudio exhaustivo al respecto sino más bien, a partir de los datos recopilados, libros e investigaciones leídas, hacer una propuesta didáctica que facilite al alumno el aprendizaje. En este sentido el estudio y la publicación de Flores (2008) es bastante completo ya que presenta de forma específica lo relativo a la trigonometría desde lo curricular dando algunas pautas de enseñanza que pueden favorecer el aprendizaje.

Para llevar a cabo la propuesta didáctica varias de las actividades de exposición y ejercicios se han diseñado apoyadas en GeoGebra ya que a partir de la investigación bibliográfica y del estudio de campo se ha podido observar que los sistemas de geometría dinámica ayudan al alumno a visualizar y poder centrarse en la adquisición de los conceptos. Sin embargo, en el aula hay todavía un gran vacío con respecto a las TIC, por lo menos en lo que se ha podido comprobar con respecto a la enseñanza de la trigonometría. Esta es una línea de discusión abierta sobre la que se puede trabajar ya que son varios los autores que plantean las TIC y los sistemas de geometría dinámica como la forma de enseñanza ideal, sin embargo hay un vacío con respecto a la formación de los docentes al respecto.

8. Conclusiones

Una vez finalizada la parte central y fundamental del trabajo pasamos a hacer el análisis correspondiente y sacar las conclusiones de cada una de las partes desarrolladas. Por ello analizaremos cada uno de los objetivos propuestos para ver qué conclusiones se han obtenido al llevarlos a cabo y así obtener la conclusión principal del trabajo.

El primero de los objetivos específicos propuestos consistía en *explicar e identificar las principales dificultades que se presentan en el proceso de aprendizaje e la trigonometría para los alumnos de 4º de la ESO*. Para llevar a cabo esta parte del trabajo se realizaron dos actividades:

1. Primero se investigaron los distintos libros, artículos, y tesis que se consideraron fundamentales para tal fin con el propósito de enumerar de una forma concreta las dificultades que se presentan en el aprendizaje matemático y más concretamente de la trigonometría.
2. Para complementar la investigación realizada se llevó a cabo un estudio de campo que consistió en encuestas a profesores de distintos centros que imparten dicha asignatura. Así hemos podido conocer cuál es la realidad del aula para apoyar el apartado 1). Paralelamente y en complementación a este fin se realizaron test a los alumnos que ya han cursado la asignatura para saber el nivel alcanzado y las dificultades que pueden subyacer.

Por tanto, con esta primera parte, se respaldó y apoyó tanto a través de las investigaciones y lecturas como los resultados de las encuestas y los test el hecho de que hay una importante dificultad en el bloque de trigonometría para los alumnos de 4º de la ESO. Además se identificaron, en el marco teórico, y se probaron a través de los test algunas de estas dificultades que pasan sobre todo por la falta de justificación adecuada, falta de asociación de conocimientos y conceptos débilmente adquiridos. De este modo se considera que el objetivo se ha conseguido al haber obtenido una lista concreta de los problemas de aprendizaje relacionados con la trigonometría.

El segundo de los objetivos específicos *era presentar los objetivos propios y contenidos de la unidad didáctica dedicada a la trigonometría*, así como las competencias básicas asociadas a los mismos. Para ello se acudió a la legislación vigente tanto estatal como autonómica, a la vez que se consultaron a varios autores

que han trabajado sobre la trigonometría, así quedaron definidos los conocimientos que al alumno tiene que haber adquirido al terminar la unidad correspondiente a trigonometría. De esta forma quedaron establecidos de una forma concreta los objetivos y contenidos relacionados con el bloque de la trigonometría que se querían trabajar en la propuesta didáctica para a partir de ellos estructurarla, secuenciarla y diseñar las actividades en función de los mismos. De esta forma el segundo objetivo ha quedado realizado y se ha dado cuerpo a la estructura básica de la propuesta.

El tercero de los objetivos era *averiguar y exponer los recursos de GeoGebra que pueden ayudar en la tarea de solventar alguna de las problemáticas presentadas en el proceso de aprendizaje de la trigonometría en 4º de la ESO*. Para llevar a cabo esta parte se trabajó el marco teórico y el estudio de campo. A través del marco teórico hicimos un estudio secuencial fijándonos primeramente en los ambientes de geometría dinámica y sus ventajas en la enseñanza de la geometría. Hicimos un cuadro comparativo de los principales software que trabajan en ambientes de geometría dinámica y fijamos GeoGebra como uno de los más ventajosos por sus características tanto de soporte como de aplicación. Fijado GeoGebra como recurso investigamos y desarrollamos sus ventajas en la aplicación de la trigonometría. En paralelo realizamos la encuesta a los profesores de secundaria que imparten trigonometría apoyando así el estudio, ya que la mayoría de los encuestados ven ventajoso la aplicación de GeoGebra como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría. Una vez expuestas las ventajas se buscaron a través de distintos artículos y páginas web recursos para diseñar algunas de las sesiones explicativas y actividades para que desarrollen los alumnos en el aula con el propósito de trabajar las carencias presentes en el estudio de la trigonometría cuando se realizan a través de la geometría tradicional. Por lo tanto se considera que el objetivo se ha logrado, ya que se presentaron las ventajas de GeoGebra como soporte para la trigonometría y se presentaron recursos de GeoGebra concretos a través de la propuesta didáctica para solventar algunas de las dificultades que presentan los estudiantes e el aprendizaje de la trigonometría.

Por lo tanto, hay una problemática en el aprendizaje de la trigonometría de 4º de la ESO ya que los alumnos tienen una especial dificultad en comprender y asimilar los conceptos relacionados con este campo. Algunos de los problemas identificados pasan por cuestiones como falta de justificación, falta de visualización, conceptos débilmente adquiridos, etc. Muchos de estos problemas pueden ser abordables a través de sistemas de geometría dinámica ya que permiten al alumno visualizar y construir de una forma sencilla y manipular las construcciones, lo que le permite experimentar y reflexionar sobre los conceptos y comprender mejor. Por lo

tanto es una herramienta que hay que tener en cuenta a la hora de diseñar las sesiones de la unidad de trigonometría. Y a través de una exposición didáctica del profesor que justifique y relacione de forma adecuada la trigonometría y la enseñanza de una forma organizada y clara complementada con actividades basadas en GeoGebra mejoran la comprensión de los alumnos. Por lo tanto y basándonos en todo lo expuesto hemos presentado una propuesta didáctica que cumple estos requisitos y que son un ejemplo de las ventajas que supone para el aprendizaje una metodología complementada con el uso de GeoGebra, quedando cumplido el objetivo principal: *Presentar y fundamentar una propuesta didáctica basada en el uso del software GeoGebra para mejorar el proceso de aprendizaje de la trigonometría de los alumnos de 4º de la ESO.*

9. Limitaciones del trabajo

Han sido varias las limitaciones a las que se ha visto sujeta el presente trabajo que pasamos a describir. El tiempo disponible para la realización de trabajo ha supuesto una limitación a tener en cuenta que ha influenciado en el desarrollo y en la acotación del mismo.

El tema sobre el que se ha basado el trabajo ha sido la trigonometría de 4º de la ESO (opción B) lo que supone una limitación en dos aspectos a tener en cuenta: el bloque de contenidos y la etapa educativa. Por un lado en el bloque de contenidos nos hemos centrado específicamente en la trigonometría de 4º de la ESO lo que supone una parte de la geometría que se estudia en ese curso y juntos conforman uno solo de los bloques que se ven en 4º de la ESO, por lo que el estudio se podría extender de forma natural a los problemas de aprendizaje que hay en la etapa de 4º de la ESO, y así abarcar todos los contenidos.

Con relación a la etapa educativa en la que hemos desarrollado el trabajo también ha sido muy concreta ya que nos hemos limitado a 4º de la ESO, el último curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Supone una limitación a tener en cuenta porque algunos de los temas relacionados con el desarrollo del trabajo, es decir, con las dificultades de aprendizaje de la trigonometría, estaban directamente relacionados con los aprendizajes desarrollados en cursos anteriores y la falta de conexión y relación.

La investigación bibliográfica ha supuesto una limitación ya que pese a ser un problema bien identificado el de la problemática de aprendizaje de la trigonometría son pocos los autores que han hecho una investigación didáctica de un tema tan concreto, por lo que el material al que se ha tenido acceso con respecto al tema de las dificultades del aprendizaje de la trigonometría ha sido escaso.

El estudio de campo, tanto en el test como en la encuesta, se han basado en muestras pequeñas lo que supone una limitación ya que nos hemos basado en población concreta, por lo que la realidad de la comunidad educativa no ha quedado reflejada en su totalidad.

10. Líneas de investigación futura

En el trabajo desarrollado se ha presentado una propuesta concreta apoyada en actividades realizadas con GeoGebra para dar el tema de trigonometría a los alumnos de 4º de la ESO de tal forma que se favorezca el aprendizaje de dicho tema. Para ello hemos llevado a cabo una investigación bibliográfica que nos ha ayudado a describir los problemas principales de aprendizaje y que a su vez ha dejado la puerta abierta a futuras investigaciones.

La enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría, como afirma Fiallo (2010), es un campo poco explorado por los investigadores en didáctica de las matemáticas, por lo que en este ámbito hay un gran campo por explorar. Una de las cuestiones que se ha abordado en el estudio del porqué de las dificultades, es la falta de conexión con temas anteriores y el hecho de enfrentarse a un tema completamente nuevo para los estudiantes. En este sentido se debería reflexionar e investigar sobre las ventajas e inconvenientes de introducir el tema, o mejor dicho, el concepto de trigonometría con anterioridad a 4º, no tanto por dar y desarrollar los contenidos, que resultarían complejos para el desarrollo cognitivo de etapas anteriores a 4º, sino más bien porque el alumno vaya conociendo e introduciéndose progresivamente en la trigonometría: historia, usos, medida de triángulos, etc. De tal forma que el estudiante que llegue a 4º no se encuentre ante un tema nuevo del que no tiene nociones.

A la hora de abordar las soluciones al objetivo propuesto con respecto a las TIC se ha visto, a través del marco teórico y del estudio de campo, que en general hay un desfase entre lo que representan las TIC en el día a día de la sociedad y como están presentes en la educación. Ya que por un lado se ha comprobado, a través de distintas investigaciones, las ventajas de los usos de programas para la realización de actividades en el aula y, a través del estudio de campo la mayoría de los profesores apoyaban la misma idea pero, sin embargo, a la hora de ponerlo en práctica son pocos los que lo llevan a cabo. Cuáles son los motivos de fondo de esta situación: formación, recursos, etc. y cómo abordarlos son una proyección del presente trabajo que deja la puerta abierta para futuras investigaciones.

Por lo tanto basándonos en lo desarrollado en el presente trabajo una línea de investigación futura sería estudiar en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria las dificultades de aprendizaje en la geometría y qué herramientas podrían favorecer tal proceso.

11. Referencias bibliográficas

11.1 Referencias

- Alves, L. (1963). *Compendio de didáctica general*. Buenos Aires: Kapelusz.
- Annan K. (2003). *The world Summit on the information society*. Cumbre mundial sobre la sociedad de la información. Discurso inaugural 10 de diciembre de 2003. Recuperado el 20 de mayo de 2014 de: <http://www.itu.int/wsis/geneva/coverage/statements/opening/annan.pdf>
- Barroso Campos, R., Gavilán Izquierdo, J.M. (2003). Resolución de problemas de geometría con Cabri II. *Números*, 54, 23-30. Recuperado el 3 de mayo de 2014 de: <http://www.uv.es/aprenggeom/archivos2/Barroso03b.pdf>
- Benites G., Herrera A., Salas C. y Cuenca J. (2009). Representación de las Funciones Trigonómicas en el Software Educativo como es el Programa GeoGebra. *Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales*, 12, 13-17. Recuperado el 18 abril de 2014 de: <http://laboratorios.fi.uba.ar/lie/Revista/Articulos/060612/A4jul2009.pdf>
- Brown, S.A. (2006). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. *Proceeding of the 30th PME International Conference*, 1, 1-228. Recuperado el 25 mayo de 2014 de: http://www.academia.edu/936099/Conceptual_change_in_advanced_mathematical_thinking_the_case_of_tangent_line
- Decreto 69/2007, de 29 mayo de 2007, por el que se establece y ordena el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha. Diario Oficial de Castilla-La Mancha (1 de junio de 2007), núm. 116, pp. 14819-14942. Disponible en: <http://docm.jccm.es/portaldocm/verDisposicionAntigua.do?ruta=2007/06/01&idDisposicion=123061847189250069>
- Fiallo Leal, J. E. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonómicas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia, Valencia. Recuperado el 8 de marzo de 2014, de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=23802>

- Flores Gil, F. L. (2008). *Historia y Didáctica de la Trigonometría*. Jaén: Íttakus.
Recuperado el 8 de abril de 2014 de: <http://www.publicatuslibros.com>
- García, M.J., Ruiz, C. (2008). *Cidead 4º de la ESO*. Recuperado el 15 de mayo de 2014:
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/trigonometria/index4_7.htm
- GeoGebra (2013). *International GeoGebra Institute*. Recuperado el 20 de abril de 2014 de: <http://www.geogebra.org/cms/es/>
- Goikoetxea, E. y Pascual, G. (2002). Aprendizaje cooperativo: Bases teóricas y hallazgos empíricos que explican su eficiencia. *Revista Educación*, XXI, 227-247. Recuperado el 15 de mayo de 2014 de:
<http://www.redalyc.org/pdf/706/70600512.pdf>
- González-López, M.J. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría Utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En Gómez, P. y Rico L. (2001), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 277-290). Recuperado el 15 de mayo de 2014 de:
<http://www.uv.es/gutierre/apregeom/archivos2/homenaje/00Indice.PDF>
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado (4 de Mayo de 2006), núm. 5, pp. 17158-17207. Disponible en:
<http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado (10 diciembre 2013), núm. 295, pp. 97858-97924. Disponible en:
<http://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf>
- Larrosa, I. (2014). *Trigonometría con GeoGebra*. Recuperado el 20 de mayo de 2014 de: http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/index_trigonometria.html
- Losada, R. (2011). *GeoGebra en la enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Recuperado el 22 de mayo de 2014 de:
<http://www.ite.educacion.es/formacion/materiales/123/cd/index.htm>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). *PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los alumnos. OCDE Informe español*. Madrid: Autor. Recuperado el 19 abril de 2014 de:

<http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012v-oli-24-02-2014.pdf?documentId=0901e72b8189abb8>

- Miranda R. (2006). Comparación de procesadores geométricos. Recuperado el 20 de abril de 2014 de: <https://docs.google.com/file/d/0B7uBef43KcNqYjExMjJmJctNjMwZCooNzhLLTk3NjItNWJhODgzYjIwODdi/edit?hl=es>
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Recuperado el 25 abril de 2014 de: <http://revistasuma.es/IMG/pdf/48/105-112.pdf>
- NCTM (2008). *The Role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics*. NCTM. Recuperado el 26 abril de 2014 de www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233
- OCDE (2013). *Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA) Resultados: España*. OCDE. Recuperado el 18 de abril de 2014 de <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-spain-ESP.pdf>
- Pons, R. M., Serrano, J. M., y González Herrero, M. E. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido. *Anales de psicología*, 24(2), 253-261. Recuperado el 25 de mayo de 2014 de: <http://digitum.um.es/xmlui/handle/10201/8175>
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de Diciembre del Ministerio de Educación, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (5 enero 2007), núm. 5, pp. 677-773. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf>
- San Martín Sicre, O. J. (2003). *Una exploración de un proceso de construcción del significado del seno de un ángulo agudo como función y como razón*. Tesis de Maestría. Universidad de Sonora, México. Recuperado el 8 de abril de 2014 de: <http://lic.mat.uson.mx/tesis/97TesisSicre.PDF>
- Sánchez Rosal, A. A. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICS. *EDUTEC*, 31. Recuperado el 8 de abril de 2014 de: http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec31/articulos_n31_pdf/Edutec-e_n31_Sanchez.pdf
- Skemp, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

- Socas Robayna, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico Romero, L. (1997), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 245-260). Barcelona: Horsori. Recuperado el 10 de abril de 2014, de: <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/SocasM97-2532.PDF>
- SurveyMonkey. (2014). *SurveyMonkey*. [Portal de Internet]. Recuperado el 25 de mayo de 2014 de: <https://es.surveymonkey.com>
- Universidad Internacional de La Rioja (2013). *El trabajo en grupo guiado (Tema 5)*. Documento inédito de la asignatura de “Metodología de la especialidad” del Máster en formación del profesorado de Educación Secundaria. Logroño: Autor.
- Universidad Internacional de La Rioja (2014). *TIC en la Educación (Tema 1)*. Documento inédito de la asignatura de “Tecnologías de la información y la comunicación aplicadas a la Educación” del Máster en formación del profesorado de Educación Secundaria. Logroño: Autor.
- Universidad Internacional de La Rioja (2014). *Contextualizar la investigación para un Trabajo Fin de Máster (Tema 3)*. Documento inédito de la asignatura de “Innovación e Investigación para la mejora de la práctica docente” del Máster en formación del profesorado de Educación Secundaria. Logroño: Autor.

11.2 Bibliografía complementaria

- Álvarez Santonja, O. (2013). *Trabajo cooperativo en matemáticas: Enseñanza de sistemas de ecuaciones a alumnos de 4º de ESO mediante una red social*. Trabajo Fin de Máster para obtener el grado de Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato por la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR). Disponible en: http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1946/2013_07_20_TFM_ESTUDIO_DEL_TRABAJO.pdf?sequence=1
- Chorques Espí, M. (2013). *Metodología para enseñar álgebra a alumnos de 1º de la ESO basada en el aprendizaje cooperativo*. Trabajo Fin de Máster para obtener el grado de Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato por la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR). Disponible en:

http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1952/2013_07_22_TFM_ESTUDIO_DEL_TRABAJO.pdf?sequence=1

Dubrovsky, S. (2001). El valor de la teoría socio-histórica de Vigotski para la comprensión de los problemas de aprendizaje escolar. *Candidus*, 13. Recuperado el 8 de marzo de 2014 de: http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=5450v

Gil Ariza, A. (2013). *Enseñanza de Trigonometría en 4º de ESO, basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner*. Trabajo Fin de Máster para obtener el grado de Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato por la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR). Disponible en: http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1471/2013_02_01_TFM_ESTUDIO_DEL_TRABAJO.pdf?sequence=1

12. Anexos

Anexo I: Modelo del test de trigonometría

A continuación se presenta el test de trigonometría diseñado para la realización del estudio de campo. El modelo proporcionado a continuación es sobre el que los alumnos del I.E.S. Gabriel Alonso de Herrera tuvieron que responder.

Test de trigonometría 4º de la ESO (opción B)

En el siguiente test se presentan una serie de preguntas sobre el tema de trigonometría.

Por favor, lee atentamente e intenta responder de una forma clara.

1. Explica brevemente qué es la trigonometría.

2. Pon algún ejemplo de uso práctico en la vida cotidiana de la trigonometría.

3. En general, ¿te ha resultado difícil el tema de la trigonometría?

- Sí
- No

4. En 3º de la ESO, ¿viste algo relacionado con este tema? (en caso de respuesta afirmativa explica brevemente el qué)

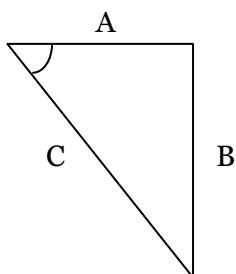
- Sí

No

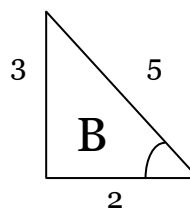
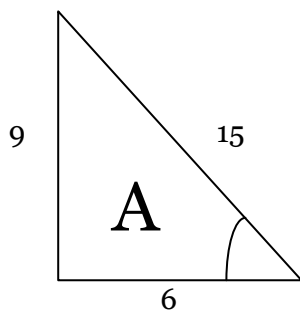
5. De las siguientes actividades numera del 1 al 5 según las que te hayan resultado más difíciles (siendo 1 menos difícil y 5 la más difícil):

- Dibujar las figuras descritas en el enunciado.
- Usar la calculadora para trigonometría.
- Identificar el seno y el coseno en un triángulo.
- Pasar de grados a radianes.
- Aplicar las fórmulas trigonométricas.

6. Escribe las razones trigonométricas del ángulo señalado en el siguiente triángulo:



7. Fíjate en las figuras y marca la frase correcta:



- El coseno del triángulo A es mayor que el del triángulo B.
- La tangente del triángulo A es mayor que la del triángulo B.
- Las razones trigonométricas de los dos triángulos son iguales.