



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

**Metodología para enseñar
probabilidad y estadística
mediante juegos de magia en
matemáticas de 3^o de ESO**

Presentado por: Nerea Casas Bernas
Línea de investigación: Metodología de las matemáticas
Director/a: Pedro Viñuela

Ciudad: Bilbao
Fecha: 15 de mayo de 2014

Resumen

El trabajo analiza las dificultades que se presentan a los profesionales de la enseñanza de las matemáticas para explicar -y a los alumnos de educación secundaria para asimilar- los contenidos del área de probabilidad y estadística en la asignatura de matemáticas del curso 3º de ESO. El objetivo general del trabajo es proponer una metodología para la enseñanza de probabilidad y estadística en 3º de ESO empleando la magia para captar la atención de los alumnos y despertar su interés y motivación. Para el logro de este objetivo se plantean tres objetivos parciales: justificar la necesidad del nuevo enfoque metodológico mediante un estudio de campo; probar la utilidad de la magia como recurso válido para la enseñanza y el aprendizaje; proponer recursos “matemáticos” adecuados para la enseñanza de probabilidad y estadística en 3º de ESO. Tras sendos análisis del marco normativo vigente aplicable y de los elementos que definen el problema a resolver, se ha llevado a cabo la identificación de los recursos docentes aplicables disponibles y el contraste de viabilidad de su empleo, mediante entrevistas con profesionales de la enseñanza de matemáticas de la comunidad autónoma del País Vasco. Las conclusiones alcanzadas confirman que existen dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y la estadística, dada la naturaleza abstracta de los conceptos que se manejan y confirman también que la utilización de los juegos de magia aporta elementos capaces de captar la atención de los alumnos, de lograr su interés y de transmitir los conceptos que se manejan. A la vista de tales conclusiones, se plantea una propuesta metodológica para la enseñanza de la probabilidad y la estadística en 3º de ESO mediante la utilización de la magia.

Palabras clave: Probabilidad, Estadística, Magia, Motivación, Aprendizaje

Abstract

The paper analyzes the difficulties encountered by professionals teaching mathematics to explain - and high school students to assimilate-the contents that belong to the area of probability and statistics in the mathematics course 3^o ESO. The overall objective of the paper is to propose a methodology for the teaching of probability and statistics in 3^o ESO using magic to capture the students' attention and spark their interest and motivation. To achieve this goal three partial objectives are formulated: justify the need of new methodological approach through a field study ; test the utility of magic as a valid resource for teaching and learning; propose "mathemagic" resources suitable for teaching probability and statistics in 3rd ESO . After two separate analysis of the current regulatory framework applicable and of the elements that define the problem to be solved, it has been carried out the identification of the applicable teaching resources available and the validation of their feasibility, through interviews with professionals teaching math in the autonomous community of the Basque Country. The conclusions confirm that there are difficulties in the teaching and learning of probability and statistics, given the abstract nature of the concepts involved and also confirm that the use of the magic games provides elements able to capture the attention of students, to achieve their interest and transmit the concepts used. In view of such findings, it is proposed a methodology for the teaching of probability and statistics in 3rd year of ESO using magic.

Key Words: Probability, Statistics, Magic, Methodology, Motivation, Learning.

Índice de contenidos

1. Introducción.....	6
1.1. Presentación.....	6
1.2. Justificación.....	6
2. Planteamiento del problema.....	8
2.1. Definición del problema.....	8
2.2. Objetivos.....	9
2.3. Metodología seguida.....	9
2.3.1. Análisis del marco normativo.....	10
2.3.2. Análisis del problema a resolver.....	10
2.3.3. Identificación de los recursos docentes existentes.....	10
2.3.4. Contraste de viabilidad.....	11
2.3.5. Propuesta metodológica.....	11
2.3.6. Justificación de la bibliografía utilizada.....	11
3. Marco teórico.....	13
3.1. Legislación aplicable.....	13
3.2. La enseñanza de probabilidad y estadística.....	15
3.2.1. Dificultades para la enseñanza de probabilidad y estadística.....	15
3.2.2. Dificultades para el aprendizaje de probabilidad y estadística.....	16
3.3. La magia como recurso educativo.....	17
4. Estudio de Campo.....	20
4.1. Objetivos específicos.....	20
4.2. Metodología seguida.....	20
4.2.1. Encuestas.....	20
4.2.2. Entrevistas.....	23
4.3. Análisis de resultados.....	25
4.3.1. Resultados de las encuestas.....	25
4.3.2. Resultados de las entrevistas.....	29
4.4. Conclusiones del estudio de campo.....	32
5. Propuesta metodológica de enseñanza.....	34
5.1. Objetivos de la propuesta metodológica.....	34
5.2. Metodología.....	34
5.2.1. Antes de la clase.....	34
5.2.2. Durante la clase.....	35
5.2.3. Después de la clase.....	36
5.3. Recursos docentes propuestos.....	36
5.3.1. Actividades.....	36
5.3.2. Recursos materiales.....	41
5.4. Ejemplo de sesiones.....	41
6. Aportaciones del trabajo.....	43
7. Discusión.....	44

8. Conclusiones	45
9. Limitaciones del trabajo	47
10. Líneas de investigación futuras	48
11. Referencias bibliográficas	49
11.1. Referencias bibliográficas	49
11.2. Bibliografía complementaria	50

Índice de tablas

Tabla N° 1... Contenidos del área de probabilidad y estadística de matemáticas de 3º ESO.....	14
Tabla N° 2... Preguntas realizadas en la encuesta publicada en Survey Monkey.	21
Tabla N° 3... Preguntas realizadas en las entrevistas con 3 docentes de un mismo centro.....	24
Tabla N° 4... Sesión de explicación de conceptos estadísticos.....	41
Tabla N° 5... Sesión de inicio del tema de probabilidad	42

Índice de gráficas

Gráfica N° 1. Tiempo que los profesores llevan impartiendo la asignatura de matemáticas.	25
Gráfica N° 2. Trimestre en el que los encuestados imparten el área de probabilidad y estadística.	25
Gráfica N° 3. Importancia que los docentes encuestados dan al área de probabilidad y estadística.	26
Gráfica N° 4. Contenidos ordenados de mayor a menor dificultad de explicación.	26
Gráfica N° 5. Contenidos ordenados de mayor a menor dificultad de comprensión.	27
Gráfica N° 6. Recursos utilizados para la docencia de probabilidad y estadística según el número de docentes que los emplean.	27
Gráfica N° 7. Factores que dificultan a los alumnos el aprendizaje de probabilidad y estadística.....	28
Gráfica N° 8. Porcentaje de docentes encuestados que consideran que el empleo de ejemplos que acercan la asignatura a la realidad ayuda a los alumnos. ..	28
Gráfica N° 9. Enumeración de recursos que acercan relacionan la materia con la realidad.	29
Gráfica N° 10. Predisposición de los docentes a probar una nueva metodología para la enseñanza de la probabilidad y la estadística.	29

1. Introducción

1.1. Presentación

Nadie pone en duda la importancia que tienen las matemáticas en la mayoría de los aspectos de la vida cotidiana. Tanto las actividades relacionadas con las ciencias, con la tecnología, con la economía, incluso las relacionadas con la creación artística necesitan, unas en mayor grado, otras en menor, del conocimiento matemático. Es por tanto imprescindible e inevitable que las matemáticas figuren entre las disciplinas de cualquier nivel obligatorio de educación. Nadie lo discute.

No obstante, desde siempre, las matemáticas han sido consideradas como una materia difícil de explicar y difícil de entender, muchas veces acompañada del desánimo y del desinterés. Permanentemente los pedagogos y los docentes buscan mejorar los métodos de enseñanza de las matemáticas. Si bien hay áreas de las matemáticas como la geometría que quizá sean más fáciles de percibir por emplearse conceptos más tangibles, existen otras áreas como la probabilidad y estadística menos intuitivas, más abstractas y, por tanto, más difíciles de captar.

Ciñéndonos, pues, a estas dos áreas específicas, este trabajo presenta la propuesta de una metodología dirigida a despertar el interés de los alumnos y aumentar su motivación mediante el empleo de recursos que les faciliten entender la materia que se les explica para que, de esta manera, el aprendizaje sea significativo. La metodología que se propone se basa en el empleo de la “matemagia” es decir, magia aplicada a las matemáticas para, por un lado, llamar la atención de los alumnos, predisponiéndolos al aprendizaje y, por otro lado, facilitar la explicación de los contenidos aportando herramientas intuitivas y atractivas.

Son oportunas las reflexiones de Alegría (2002, p.146).

Las matemáticas y la magia han estado relacionadas durante mucho tiempo. Ambos, magos y matemáticos se sienten atraídos y motivados por el sentido de sorpresa que representan las curiosidades del mundo. Los magos intentan mostrar estas curiosidades, en cambio los matemáticos intentan explicarlas. La ciencia de la ilusión versus la ilusión de la ciencia.

1.2. Justificación

Como prueban numerosos estudios como los de Graham (1987) o Batanero (2011), es frecuente que los alumnos encuentren la asignatura de matemáticas difícilmente entendible, aburrida y poco práctica, por lo cual se desmotivan, dejan de prestar atención a las explicaciones de los profesores, y descuidan su estudio.

Se trata de un hecho grave y preocupante debido a que el conocimiento de las matemáticas es indispensable para el aprendizaje de todas las materias del ámbito científico (ciencias puras, ingenierías, arquitectura, medicina, etc.), y del ámbito de las ciencias sociales (sociología, economía, etc.). Incluso las disciplinas de los ámbitos conocidos como de “letras” (psicología, historia, etc.) también necesitan de las matemáticas, especialmente de su rama estadística.

Ante esta situación, se hace necesaria la búsqueda de técnicas que permitan lograr un aprendizaje significativo; es decir, técnicas y actividades que tengan significado concreto para los alumnos. Para ello, por una parte, debe existir una información previa en el alumno sobre la que construir nuevos conocimientos; por otra parte, debe suceder que la información nueva que se le proporcione se relacione con la anterior.

La magia se ha revelado experimentalmente, tal y como afirman Kelly (2013) y Lesser (2009), como una herramienta útil para que los alumnos, basándose en los conocimientos adquiridos en cursos anteriores (ya han conocido conceptos como la media aritmética, gráficos estadísticos etc.) y aprovechando la capacidad que tienen los juegos de magia para relacionar intuitivamente conceptos abstractos como la probabilidad con sucesos que se pueden ver y tocar, logren entender y aprender las explicaciones de los profesores.

De acuerdo con lo expuesto, el trabajo que nos ocupa presenta una propuesta metodológica para la utilización de los juegos de magia en la enseñanza de probabilidad y estadística a alumnos de 3º de ESO, para lo cual propone un conjunto de recursos asequibles y de fácil adquisición para reforzar las habilidades docentes de los profesores.

2. Planteamiento del problema

2.1. Definición del problema

Las cuestiones que se plantean y a las cuales se busca dar solución son las siguientes: ¿por qué es importante el estudio de la probabilidad y la estadística? y ¿por qué se considera que en ello hay un problema?

En los años finales de la década 1980, la comunidad matemática acentuó su interés por la enseñanza de la estadística debido a su creciente empleo en la sociedad. Diversos autores han explicado las razones. Por citar uno significativo, de acuerdo con Holmes (1980), encontramos las siguientes:

- La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos. Para orientarse en el mundo actual, ligado por las telecomunicaciones e interdependiente social, económica y políticamente, es preciso interpretar una amplia gama de información sobre los temas más variados.
- Es un útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema. La estadística es indispensable en el estudio los fenómenos complejos, en los que hay que comenzar por definir el objeto de estudio, y las variables relevantes, tomar datos de las mismas, interpretarlos y analizarlos.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva; hemos de ser capaces de usar los datos cuantitativos para controlar nuestros juicios e interpretar los de los demás; es importante adquirir un sentido de los métodos y razonamientos que permiten transformar estos datos para resolver problemas de decisión y efectuar predicciones.
- Ayuda a comprender otros temas del currículum, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Asumida pues la importancia del estudio de la probabilidad y la estadística falta responder la pregunta acerca de la naturaleza del problema. Prueba de que éste existe es que la revista “Teaching Statistics” se viene publicando tres veces al año desde 1979 ofreciendo artículos y recursos para la enseñanza de estas materias.

El núcleo del problema estriba en que se trata de un apartado de la asignatura de matemáticas desconocido hasta el momento por los alumnos y cuyos conceptos les resultan extraños. Ocurre en este primer contacto que “para la mayoría de los estudiantes la estadística es un tema misterioso donde operamos con números por medio de fórmulas que no tienen sentido” (Graham, 1987, p. 5)

Vemos pues que los alumnos, por una parte, llegan a 3º de ESO sin una base matemática suficientemente sólida para hacer frente a esta materia; por otra parte, además, se enfrentan a conceptos que les resultan muy abstractos y que no relacionan fácilmente con eventos observables en la realidad.

Como consecuencia aparece la desmotivación, el aburrimiento y el fracaso en el aprendizaje.

En los apartados que siguen se muestran los objetivos que se quieren conseguir con la realización de este trabajo y la metodología a seguir para la consecución de los mismos.

2.2. Objetivos

El presente trabajo presenta como objetivo principal:

Proponer una metodología para la enseñanza de probabilidad y estadística en 3º de ESO empleando la magia para mejorar el grado de atención de los alumnos, su predisposición al aprendizaje y la transmisión de los conocimientos.

Para conseguirlo los objetivos específicos son:

- Realizar un estudio de campo a varios profesores de matemáticas de la comunidad autónoma del País Vasco sobre la necesidad de aplicar una nueva metodología para el estudio de probabilidad y estadística en 3º de ESO.
- Contrastar la utilidad de la magia como recurso válido para el aprendizaje significativo de probabilidad y estadística en matemáticas de 3º de ESO.
- Proponer recursos “matemágicos” adecuados para la enseñanza de probabilidad y estadística en 3º de ESO.

2.3. Metodología seguida

La metodología que se ha seguido para la realización del trabajo ha incluido, por una parte, la construcción de un marco teórico mediante el estudio del entorno

normativo y la recogida de información conceptual y experimental existentes; por otra parte, el contraste de los planteamientos mediante un estudio de campo consistente en la realización de entrevistas y encuestas a profesores y el ensayo experimental de dos unidades didácticas.

2.3.1. Análisis del marco normativo

Se ha procedido a consultar la legislación vigente tanto a nivel estatal como a nivel de la comunidad autónoma del País Vasco en cuanto a contenidos para las áreas de estudio. Esta información se ha recopilado de internet debido a que toda la legislación está disponible en las páginas oficiales tanto del ministerio de educación y ciencia como en las correspondientes a las comunidades autónomas.

2.3.2. Análisis del problema a resolver

Se ha recopilado información acerca de la problemática existente a la hora del proceso de enseñanza-aprendizaje para poder enfocar bien la propuesta metodológica. Esta información se ha obtenido en fuentes diversas, desde revistas disponibles en formato digital como por ejemplo “Teaching Statistics” a las que se ha accedido desde la Universidad del País Vasco hasta artículos obtenidos de Dialnet y de otras páginas web como la del Grupo de Investigación sobre Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Además se han realizado un trabajo de campo mediante encuestas a 10 profesores de matemáticas de la comunidad autónoma del País Vasco empleando la herramienta Survey Monkey sobre su percepción acerca del problema y de la necesidad real de aplicar una nueva metodología en el estudio de esta materia así como para sondear su disposición a aplicar una nueva propuesta.

2.3.3. Identificación de los recursos docentes existentes

Se ha obtenido documentación sobre la experiencia existente acerca de la enseñanza de las matemáticas empleando la magia. Esta información se ha recopilado sobre todo mediante libros proporcionados o recomendados por la AVI “Asociación Vizcaína de Ilusionismo” y por la Fundación March que dispone de una amplia sección de Magia científica. Debido a que la documentación es amplia, se ha seleccionado solamente aquella que tiene que ver directamente con las matemáticas y más en concreto con la probabilidad y estadística. Los recursos hallados se han ordenado y se han seleccionado aquellos que resultan adecuados para trabajar con los alumnos de 3º de ESO.

2.3.4. Contraste de viabilidad

Se ha contratado la viabilidad de aplicar los recursos seleccionados mediante entrevistas realizadas a tres profesores de matemáticas de un mismo centro, el colegio Nuestra Señora de la Merced que se encuentra en Bizkaia, en la localidad de Lujua. Estos profesores dan clase de la misma asignatura a tres grupos diferentes: línea A todo en castellano, línea B en castellano y en euskera y finalmente diversificación curricular, al objeto de conocer su opinión acerca de si la metodología propuesta es adecuada para cada una de las situaciones. En este caso el estudio es correspondiente a un centro con varias modalidades de enseñanza pero, para poder hacerse extensivo y generalizarse, debería realizarse en más centros.

2.3.5. Propuesta metodológica

Finalmente, a la vista de las conclusiones extraídas tanto de las tres entrevistas como de las diez encuestas, se ha propuesto una metodología y se han identificado posibles futuras líneas de investigación en este tema.

2.3.6. Justificación de la bibliografía utilizada

Se reseñan a continuación los principales documentos utilizados en el trabajo.

Dos son los textos legales vigentes que regulan la materia objeto del presente trabajo, uno de ellos de ámbito estatal y otro de ámbito autonómico. Se trata del Real Decreto 1631/2006 (BOE, núm. 5, 2007, 677-773) y el Decreto 175/2007 (BOPV, núm. 218, 2007, 357-397) en los que aparecen los contenidos a impartir para el área de probabilidad y estadística y que se han citado en el apartado de normativa 3.1.

A la hora de estudiar los problemas relativos que presenta la actividad docente en las materias de probabilidad y estadística, de entre la abundante y variada documentación, se han seleccionado varias obras como puede verse en el apartado dedicado a las referencias bibliográficas. La principal fuente de información sobre los problemas que presenta la enseñanza de estas disciplinas, que se exponen en el apartado 3.2.1, ha sido el trabajo de Batanero et al. (1994). Por su parte, para lo relativo a las dificultades en el aprendizaje, las cuales se exponen en el apartado 3.2.2, la principal fuente ha sido el artículo de Brousseau (1983).

Para desarrollar la relación existente entre la magia y las matemáticas, las principales fuentes de información utilizadas han sido las que se citan a continuación: para lo relativo a la evolución histórica de la utilización de la magia en las matemáticas, que se expone en el apartado 1.2, se ha utilizado el artículo de Alegría y Ruíz de Arcaute (2002); para lo concerniente a los recursos docentes existentes, relacionados en el

punto 5.2.1, las principales fuentes han sido el artículo ya citado de Alegría y Ruiz de Arcaute (2002) y el libro de Gardner (1984); para lo relativo a la enseñanza mediante el empleo de la magia, desarrollada en el apartado 3.3, la principal fuente utilizada ha sido Ruiz (2013); por último, para lo que tiene que ver con la enseñanza de la probabilidad y estadística en niveles universitarios empleando la magia, desarrollado en el apartado 3.3, la principal fuente ha sido Lesser y Glickman (2009).

3. Marco teórico

Antes de adentrarnos en el contenido de la propuesta metodológica que se propone en el presente trabajo, conviene describir –aunque sea someramente- ciertos aspectos que configuren un marco teórico en el que encuadrar aquélla. Aspectos tales como: el entorno normativo en el que se desarrolla la enseñanza de las matemáticas y, por tanto la probabilidad y la estadística; las dificultades que los estudios han ido identificando y describiendo; la importancia de la motivación y la atención en el aprendizaje; el papel que la magia puede jugar como instrumento facilitador.

3.1. Legislación aplicable

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de Mayo, de Educación (LOE) regula las actividades docentes. En ella se enmarcan las normativas vigentes, tanto estatal (Real decreto 1631/2006 del BOE) como autonómica (Decreto 175/2007 del BOPV), las cuales enumeran los contenidos relativos a probabilidad y estadística que deben ser trabajados.

En cuanto a la normativa futura, está ya aprobada la Ley Orgánica 8/2013 de 9 de Diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) y entrará en vigor para 3º de ESO en el curso 2015-2016. El cambio más significativo que propone para matemáticas es la aparición de dos opciones: matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y matemáticas orientadas a las enseñanzas prácticas. No menciona específicamente la probabilidad y la estadística por lo que habrá que prestar atención al desarrollo normativo de la ley.

Los libros de texto autorizados para 3º de ESO agrupan esos contenidos en dos unidades didácticas ubicadas al final del temario: “Parámetros estadísticos” y “Sucesos aleatorios y probabilidad”.

La tabla que se presenta a continuación recoge de manera integrada los contenidos tal como se mencionan en las normativas vigentes mencionadas más arriba y su relación con las unidades didácticas de los libros de texto.

Tabla Nº 1. Contenidos del área de probabilidad y estadística de matemáticas de 3º ESO.

Tema donde aparecen en los libros de texto	Legislación Estatal		Legislación Autonómica		
	Concepto	Subconcepto	Concepto	Subconcepto	
Parámetros Estadísticos	Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra	Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales.	Población y muestra	Métodos de selección de una muestra aleatoria.	
	Atributos y variables	Discretas	Variables estadísticas	Discretas	
		Continuas		Continuas	
	Agrupación de datos en intervalos	Histogramas	Agrupación de datos en intervalos.		
	Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones	Actitud crítica ante la información de índole estadística.		Gráficos estadísticos.	
	Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.	Media	Medidas de centralización: media, moda, mediana y cuartiles.	Media	
		Moda		Moda	
Cuartiles		Mediana			
Mediana		Cuartiles			
Análisis de la dispersión	Rango	Medidas de dispersión	Rango		
	Desviación típica		Desviación típica		
			Varianza		
Sucesos aleatorios y probabilidad	Experiencias aleatorias	Sucesos y espacio muestral	Experiencias aleatorias	Espacio muestral	
		Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.		Frecuencia de un suceso	
	Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace	Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.	Probabilidad de un suceso		
	Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación.		Parámetros estadísticos		
Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos	Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.	Sucesos aleatorios y probabilidad			

Nota: Contenidos del bloque de estadística y probabilidad de Matemáticas de 3º de ESO.
 Fuentes: Real Decreto 1631/2006 (BOE, núm. 5, 2007, 677-773) y Decreto 175/2007 (BOPV, núm. 218, 2007, 357-397)

3.2. La enseñanza de probabilidad y estadística

Como ya se ha citado previamente en este trabajo, la probabilidad y la estadística son un área de las matemáticas que comienza a estudiarse en 3º de ESO por primera vez. Si bien es cierto que en cursos anteriores comienzan a estudiarse los conceptos de moda, mediana, promedio, etc. no es hasta este momento cuando se delimitan estos conceptos como unidad didáctica y adquieren mayor desarrollo y contenido.

Desde finales de los 1980 se comenzaron a introducir aspectos tanto teóricos como prácticos relacionados con la probabilidad y la estadística:

Por lo que se refiere a la estadística, se reveló como de indudable utilidad para interpretar fenómenos de carácter social. La cada vez más notable presencia de la estadística descriptiva en los medios de comunicación, exige que los alumnos que cursan enseñanzas obligatorias conozcan y sean capaces de interpretar tablas y gráficos, de analizar de forma crítica las informaciones estadísticas que reciben y de utilizar los algoritmos de cálculo más elementales que conducen a la obtención de los parámetros de centralización y de dispersión, practicándolos en situaciones diversas.

En cuanto a la probabilidad, es llamativa la apreciación que puede encontrarse en el libro de texto Arévalo, González y Torresano (2012, p. 649), que establece la importancia de relacionar los conceptos propios de esta materia con sucesos cotidianos conocidos:

La utilización creciente del cálculo de probabilidades, unido a la estadística, en materias como la predicción de riesgos, la incidencia de determinadas enfermedades, los hábitos de consumo, los procesos de control de calidad, etc., lo convierte en una de las herramientas matemáticas que mayor presencia tienen en muchas situaciones cotidianas.

3.2.1. Dificultades para la enseñanza de probabilidad y estadística

Según informan Batanero et al. (1994, p. 528)

La principal dificultad en la enseñanza de esta materia se basa en que la estadística ha recibido, hasta la fecha, menos atención que otras ramas de las matemáticas como el álgebra, la aritmética o la geometría. Además la mayor parte de las investigaciones realizadas se han llevado a cabo por psicólogos en lugar de por matemáticos en situaciones experimentales en lugar de situaciones escolares.

Afortunadamente, esta situación está comenzando a cambiar y cada vez son más numerosos los estudios realizados por educadores matemáticos centrados en el por qué de que los alumnos cometan errores o dejen en blanco ejercicios al realizar diversas tareas. Algunos autores como Radatz (1980, p. 17) consideran el análisis de errores

como “una estrategia de investigación prometedora para clarificar cuestiones fundamentales del aprendizaje matemático”.

Ante esto, es necesario atender al principio enunciado por Ausubel (1983, p.1.): “el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente”. De forma que, para este caso, dado que la probabilidad y la estadística es un tema muy poco abordado por los alumnos de 3º de ESO en los cursos anteriores, el proceso de enseñanza y de adquisición de los conceptos debe ser más lento para dar tiempo a que ocurra el aprendizaje, y debido a que se encuentra al final del temario esta situación no ocurre con frecuencia.

De manera resumida, pueden mencionarse las dificultades más significativas que se presentan en la enseñanza de probabilidad y estadística:

- La novedad que representa en comparación con los contenidos de los cursos anteriores.
- Escasez de estudios realizados por docentes matemáticos sobre cómo abordar este tema con alumnos de edades comprendidas entre 11 y 16 años.
- Tiempo insuficiente para realizar un proceso de enseñanza-aprendizaje lento.
- La época del curso en la que se aborda la materia: el tercer trimestre, en el cual los alumnos acusan del cansancio propio de fin de curso.

3.2.2. Dificultades para el aprendizaje de probabilidad y estadística

Existen obstáculos de naturaleza cognitiva que pueden explicar la existencia de errores y dificultades especiales en el aprendizaje de estas materias. Brousseau (1983) identifica tres tipos de obstáculos.

1. Obstáculos ontogénicos

Estos obstáculos se deben a las características del desarrollo del alumno. Por ejemplo para la idea de probabilidad es necesario tener adquirido el razonamiento proporcional.

2. Obstáculos didácticos

Estos obstáculos parten de la idea de integrar durante una nueva explicación símbolos matemáticos o conceptos abstractos que anteriormente no han sido explicados o entendidos por el alumno.

3. Obstáculos epistemológicos

Están relacionados intrínsecamente con el propio concepto y su significado.

Además, como ya se ha citado con anterioridad, es necesario que los alumnos cuenten con un conocimiento básico sobre el que poder construir y poder comprender correctamente los nuevos conocimientos que se presentan.

De la lectura de los artículos de Holmes (1980) y Brousseau (1983) puede concluirse la existencia de deficiencias de aprendizaje propias del área que es preciso corregir.

- *Representación gráfica y tabulación de datos*

Es necesario que los alumnos aprendan como se lee una tabla o un gráfico. Que comprendan que hay ejes y hay elementos de entrada y salida y comprendan que éstos son importantes. Muchos alumnos cometen el error de realizar una tabla únicamente con números sin encabezado. O una gráfica sin explicación de qué es cada eje.

- *La media, moda y mediana*

Son parámetros que se explican, generalmente, en una misma sesión. Y los alumnos, lejos de llegar a comprenderlos, lo que hacen es mezclarlos a la hora de realizar las actividades.

- *El muestreo*

Es necesario que los alumnos comprendan que, para obtener información sobre una población, no se precisa estudiar todos y cada uno de los individuos (además de que no es posible) sino que basta con seguir unas normas de muestreo y hacer extensivo el análisis. En ocasiones les cuesta mucho entender estos conceptos.

- *Lo abstracto*

Se consideran conceptos muy abstractos y en ocasiones se queda en una simple explicación en la pizarra y en unos ejercicios sacados del libro de texto. Sin posibilidad de relacionar lo aprendido con la realidad, la probabilidad y la estadística carecen de sentido.

3.3. La magia como recurso educativo

Podría decirse que la magia y las matemáticas han estado unidas desde la época de los pitagóricos. Descubrimientos, como el que los tres números consecutivos 3, 4, 5 son las longitudes de los lados que forman un triángulo rectángulo, o que con los nueve

primeros números se puede formar un cuadrado mágico, han fomentado la creencia de que algunos números tienen poderes mágicos. (Alegría, 2002, p.147).

Estudios recientes, como el de Lesser (2009), muestran que la magia es una de las veinte modalidades de “divertimento” que tienen potencial motivador para las clases de matemáticas. No obstante, cabe preguntarse por qué emplearlas, es decir, por qué utilizar la magia como recurso educativo.

Tomemos un centro de enseñanza secundaria y, en particular, las clases de matemáticas. Desgraciadamente, es frecuente observar que no pocos alumnos se aburren y se evaden, bien porque no entienden lo que se les está explicando, bien porque la metodología que emplea el profesor es monótona, bien porque no le ven aplicación a la vida real. En estos casos no basta con que los profesores pidan o exijan a los alumnos que no se distraigan durante las clases sino que es preciso innovar y poner en práctica recursos para evitarlo.

Este trabajo pretende aportar algunos de esos recursos y en él se propone la inclusión de la magia en la metodología de enseñanza de matemáticas, concretamente de la parte de probabilidad y estadística. No se trata de convertir la clase en un espectáculo circense pero sí de aprovechar la indiscutible similitud que existe entre los roles de un mago y un profesor a la hora de captar la atención de su público. Como menciona Ruiz (2013, p.20):

El mago debe captar la atención de su público y luego transmitirle la pasión por su espectáculo: emoción, intriga, humor, ilusión. El profesor también necesita captar la atención de su público para luego transmitirle conocimientos y el gusto por aprender. Además debe hacerlo de forma interesante, no aburrida. Ambos, profesores y magos, necesitan tener habilidades similares y esas habilidades se pueden aprender.

Incorporar juegos de magia en la clase dedicada a estadística y probabilidad puede repercutir positivamente en su enseñanza de formas diferentes. En primer lugar, los juegos de magia permiten incluir en las explicaciones demostraciones visuales y proporcionan la oportunidad de salirse de la rutina, el libro de texto y la pizarra tradicional. En segundo lugar, los juegos de magia en las aulas son habitualmente demostraciones participativas lo cual los convierte en herramientas para un aprendizaje activo que facilite la comprensión de los conceptos. En tercer lugar, todos los efectos mágicos se basan en una simple premisa: partiendo de lo que un espectador asume que va a ocurrir, al finalizar el juego ocurre un evento inesperado, y la sorpresa que un estudiante experimenta puede ayudarle a entender lo que es la probabilidad que, aunque se crea baja, resulta no serlo tanto.

Así, la magia puede emplearse de diferentes formas: Como instrumento de motivación, como medio de introducción a temas o centros de interés, como descanso entre actividades y como técnica para llamar la atención (Ruiz, 2013). A continuación se desarrollan algunas de estas opciones.

A. La magia como instrumento de motivación

La magia proporciona un instante asombroso dentro de la rutina de las aulas. Pocas cosas habrá más motivadoras para un joven estudiante que poder salir de la monotonía y adentrarse en la experimentación de situaciones desconocidas hasta el momento.

B. La magia como elemento para llamar la atención

La motivación es necesaria pero no suficiente para llamar la atención. Y esto último es indispensable para poder enseñar algo a los alumnos. Si se consigue que el aprendizaje sea divertido, los alumnos se interesarán y se logrará el objetivo: que quieran aprender. Indudablemente los juegos de magia son idóneos para captar la atención de los alumnos, dado que cuentan a su favor con elementos como la sorpresa, el asombro, el misterio etc. Una vez captada la atención lo que se haga o enseñe en los siguientes minutos será escuchado con interés.

C. La magia como descanso entre actividades

A veces el docente considera que, debido a la aridez de la materia que se explica, es momento de hacer un pequeño descanso. Otras veces se producen tiempos muertos al finalizar tandas de ejercicios. Si el profesor puede proporcionar a los alumnos recursos como juegos de matemagia, seguramente aprovecharán este tiempo para hacérselos unos a otros. Sin darse cuenta, estarán aprendiendo e interiorizando conceptos. Incluso este efecto podría extenderse y no solo aprovechar el tiempo de descanso en la clase de matemáticas sino que en los recreos podrían seguir “jugando” y mostrando a los compañeros de otros cursos lo que han aprendido.

D. La magia como introducción a un tema

Hay ocasiones en las que la frase “sacad el libro” viene relacionada con el comienzo de un nuevo tema y los alumnos temen una sesión de teoría aburrida. Sin embargo, si el tema comienza con un juego de magia, los alumnos se adentran en el mismo casi sin darse cuenta, estarán enganchados y la predisposición a la introducción de nuevos conceptos será mayor.

4. Estudio de Campo

4.1. Objetivos específicos

Los objetivos específicos para este trabajo de campo son los que se presentan a continuación:

- Verificar, mediante la realización de encuestas, la existencia efectiva de los problemas sobre la enseñanza de probabilidad y estadística para 3º de ESO que han sido señalados en el marco teórico.
- Proponer dos sesiones a seguir en un centro de la comunidad autónoma del País Vasco para la puesta en práctica de la metodología que se propone.
- Conocer, por medio de entrevistas, la experiencia que tres docentes se hayan formado tras poner en práctica las dos sesiones mencionadas en el punto anterior.

4.2. Metodología seguida

La metodología seguida durante el estudio de campo ha constado de dos partes. Por un lado, una encuesta practicada empleando la plataforma Survey Monkey a diez profesores de matemáticas de 3º de ESO de la Comunidad Autónoma del País Vasco para conocer si realmente ven la necesidad de implantar una nueva metodología para la enseñanza de estadística y probabilidad. Por otro lado, una entrevista con profesores de matemáticas de un centro de la Comunidad Autónoma del País Vasco que cuenta con tres profesores diferentes que imparten la asignatura de matemáticas a un mismo curso -3º de ESO- y por lo tanto deben seguir el mismo temario.

4.2.1. Encuestas

Las encuestas realizadas mediante la plataforma Survey Monkey fueron publicadas en la plataforma Survey Monkey (disponible en el enlace <https://es.surveymonkey.com/s/7LK8Y7X> y constaron de siguientes preguntas:

Tabla N° 2. Preguntas realizadas en la encuesta publicada en Survey Monkey.

N°	Pregunta	Opciones dadas de respuesta	Comentario	Justificación de lo que se busca conseguir con la pregunta
Pregunta N° 1.	Especifique cuántos años lleva impartiendo la asignatura.	a. 1-5 b. 5-10 c. 10-15 d. 15-20 e. Más de 20	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Caracterizar la muestra en función de la experiencia docente.
Pregunta N° 2.	¿En qué trimestre están ubicadas las unidades de probabilidad y estadística?	a. Primer trimestre b. Segundo trimestre c. Tercer trimestre	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer la predisposición de los alumnos ante los temas a abordar.
Pregunta N° 3.	¿Qué importancia da a la probabilidad y estadística dentro de la signatura de matemáticas?	a. Igual que las demás b. Más que a las demás c. Menos que a las demás	Pregunta cerrada de múltiples opciones y una respuesta.	Conocer la importancia que el profesor da a la probabilidad y estadística comparándolo con otras áreas de las matemáticas.
Pregunta N° 4.	Ordene los siguientes contenidos de mayor a menor dificultad para explicar.	a. Variables estadísticas b. Gráficos estadísticos c. Experiencias aleatorias d. Probabilidad de un suceso	Pregunta con escala de valoración.	Conocer cuál es el aspecto más difícil de explicar. Así se conocerá en qué se necesita más apoyo.
Pregunta N° 5.	Ordene los siguientes contenidos de mayor a menor dificultad para comprender.	a. Variables estadísticas b. Gráficos estadísticos c. Experiencias aleatorias a. Probabilidad de un suceso	Pregunta cerrada de múltiples opciones a ordenar.	Conocer cuál es el aspecto más difícil de entender. Así se conocerá en qué se necesita más apoyo.
Pregunta N° 6.	¿Qué recursos utiliza más frecuentemente para enseñar estadística y probabilidad?	a. Uso tradicional de la pizarra. b. Libros de texto. c. Ejercicios d. TIC e. Otros	Pregunta cerrada de múltiples opciones a elegir.	Conocer los recursos que emplean los docentes a la hora de explicar la materia.

Pregunta N° 7.	¿Cuáles considera que son los principales factores que dificultan a sus alumnos la comprensión de los contenidos de probabilidad y estadística?	<ul style="list-style-type: none"> a. Falta de comparación con la realidad. b. Escasa argumentación matemática. c. Conocimientos previos insuficientes. d. Poca motivación. e. Otros 	Pregunta cerrada de múltiples opciones a elegir.	Conocer los principales factores que dificultan el aprendizaje de la materia de la opinión de los docentes.
Pregunta N° 8.	¿Considera que el empleo de ejemplos que se acercan a la realidad ayuda a los alumnos a comprender la asignatura?	<ul style="list-style-type: none"> a. Si b. No 	Pregunta cerrada con dos opciones a elegir.	Conocer si los docentes consideran importante que los alumnos relacionen lo aprendido con la realidad.
Pregunta N° 9.	En el caso de que la pregunta anterior haya sido afirmativa: Enumere cuales emplea	<ul style="list-style-type: none"> a. Juegos matemáticos b. Juegos de magia c. Noticias de prensa d. Otros 	Pregunta cerrada de múltiples opciones a elegir.	Conocer los recursos que emplean los docentes para acercar la asignatura a la realidad.
Pregunta N° 10.	¿Si le propusieran una nueva metodología de enseñanza para estadística y probabilidad estaría dispuesto a probarla?	<ul style="list-style-type: none"> a. Si. Especificar razón. b. No. Especificar razón. 	Pregunta cerrada de múltiples opciones a elegir con posibilidad de añadir comentario.	Conocer la predisposición del profesorado ante la propuesta de una nueva metodología.

Nota: Preguntas realizadas en las entrevistas. Fuente: Elaboración propia.

4.2.2. Entrevistas

Las entrevistas se hicieron en el colegio Nuestra Señora de la Merced del municipio vizcaíno de Loiu. En este centro se imparten clases desde el aula de dos años hasta Bachillerato. Cuenta con dos líneas por curso A y B. Modelo A íntegramente en castellano y modelo B bilingüe en euskera y en castellano. Además dispone de diversificación curricular por lo que también se imparte esta materia en el ámbito de ciencias. La diferencia entre cada docente es que cada uno imparte la materia con alumnos diferentes y con realidades diferentes.

Se debe citar que, mientras que los docentes han accedido a responder a las preguntas muy amablemente, los tres coinciden en que prefieren que no se publiquen los nombres en el trabajo. Por respeto a su deseo, en lo sucesivo el docente de 3º A será llamado "docente A", el docente de 3º B será llamado "docente B" y el docente de diversificación curricular será llamado "docente C".

- A. Numerar El docente A imparte clase íntegramente en castellano. El temario es el mismo pero la realidad es que, a medida que los cursos van en aumento, el modelo A se va llenando de alumnos “rebotados” del modelo bilingüe por lo que esto influye en el nivel educativo del aula y también en el ambiente de enseñanza.
- B. El docente B imparte clase en castellano a pesar de que el modelo en su aula sea bilingüe. Como ya se ha comentado el ambiente del aula favorece mucho más el clima de trabajo.
- C. El docente C imparte clase del ámbito científico en diversificación curricular.

A todos ellos se les proporcionaron las mismas actividades para realizar en dos sesiones relativas al estudio de probabilidad en el aula. Con posterioridad a su realización se llevó a cabo la entrevista que consistió en las siguientes preguntas que se muestran en la tabla siguiente.

Tabla N° 3. Preguntas realizadas en las entrevistas con 3 docentes de un mismo centro.

N°	Pregunta	Comentario	Justificación de lo que se busca conseguir con la pregunta
Pregunta N° 1.	¿Cuáles son las principales dificultades que has encontrado impartiendo el área de estadística y probabilidad para tu grupo de alumnos?	Pregunta de respuesta abierta.	Conocer los diferentes problemas para alumnos con situaciones y realidades distintas.
Pregunta N° 2.	¿La metodología propuesta te parece adecuada para la explicación de la materia?	Pregunta de respuesta abierta.	Conocer si la metodología se adapta a la realidad de un centro.
Pregunta N° 3.	¿Con respecto al año anterior, las actividades propuestas han mejorado la comprensión de los alumnos?	Pregunta de respuesta abierta.	Conocer si los recursos aportados mejoran la comprensión de los conceptos.
Pregunta N° 4.	¿Te han resultado difíciles de implementar las actividades propuestas?	Pregunta de respuesta abierta.	Conocer si la implementación de esta metodología supone un gran esfuerzo para el docente.
Pregunta N° 5.	¿Las actividades han incrementado el interés de los alumnos en el área estudiada?	Pregunta de respuesta abierta.	Conocer si los recursos captan la atención de los alumnos y les resultan motivadoras.
Pregunta N° 6.	¿Volverías a implementar las actividades propuestas el curso siguiente?	Pregunta de respuesta abierta.	Conocer si los docentes estarían dispuestos a implementar las actividades en su programación.

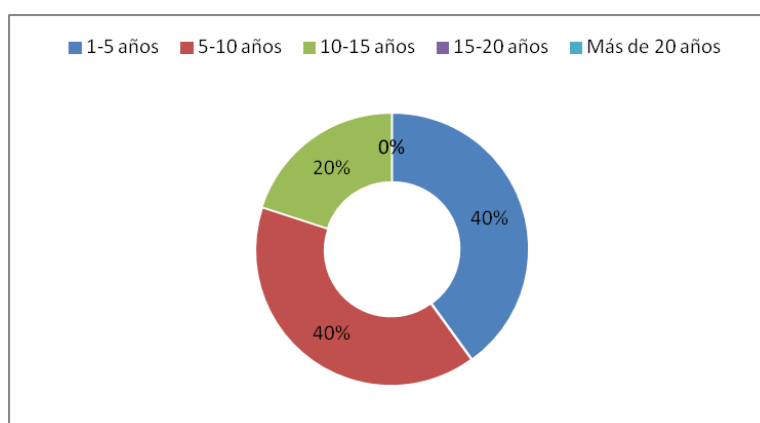
Nota: Preguntas realizadas en las entrevistas. Fuente: Elaboración propia.

4.3. Análisis de resultados

Se presentan a continuación, en primer lugar, los resultados de las encuestas y de las entrevistas para finalmente, exponer en el apartado siguiente las conclusiones generales que se han obtenido.

4.3.1. Resultados de las encuestas

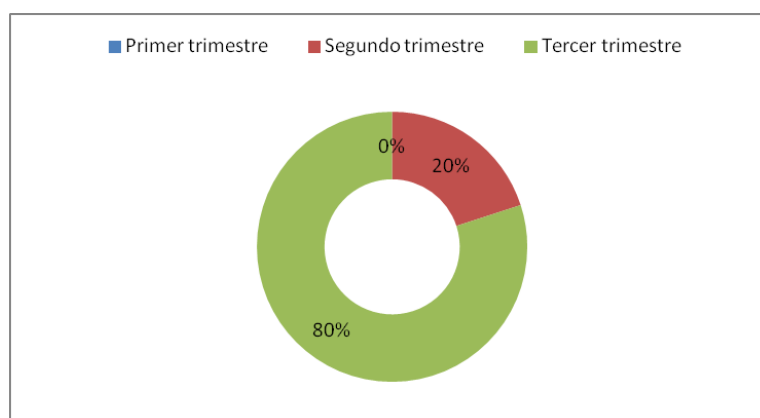
A) Pregunta N° 1: *Especifique cuántos años lleva impartiendo la asignatura.*



Gráfica N° 2. Tiempo que los profesores llevan impartiendo la asignatura de matemáticas
Fuente: Elaboración propia.

Puede observarse que un 80% del profesorado lleva menos de diez años impartiendo la asignatura.

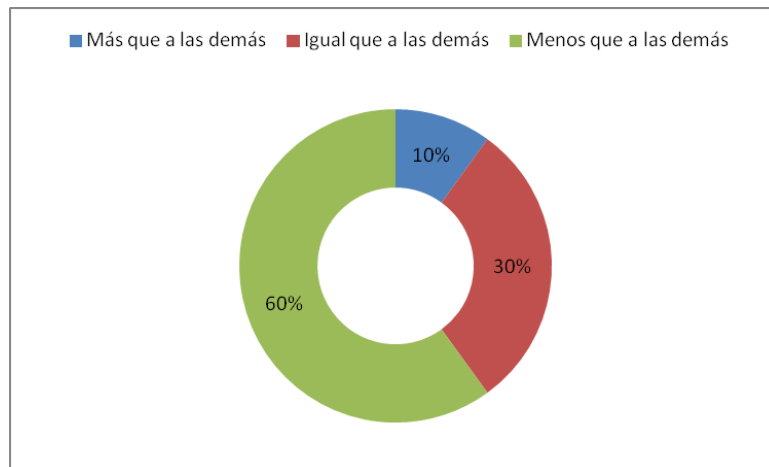
B) Pregunta N° 2: *¿En qué trimestre están ubicadas las unidades de probabilidad y estadística?*



Gráfica N° 2. Trimestre en el que los encuestados imparten el área de probabilidad y estadística. Fuente: Elaboración propia.

Se observa que un 80% del profesorado imparte el área de probabilidad y estadística en el tercer trimestre.

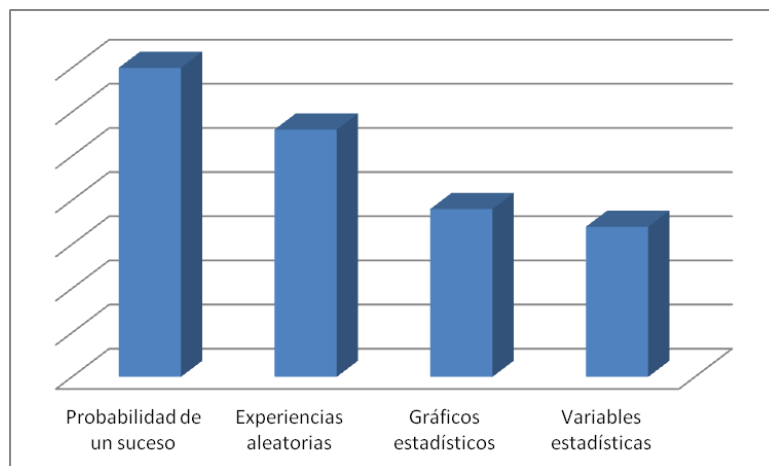
C) Pregunta N° 3: *¿Qué importancia da a la probabilidad y estadística dentro de la signatura de matemáticas?*



Gráfica N° 3. Importancia que los docentes encuestados dan al área de probabilidad y estadística. Fuente: Elaboración propia.

Un 60 % del profesorado considera el área de probabilidad y estadística menos importante que otras áreas de las matemáticas.

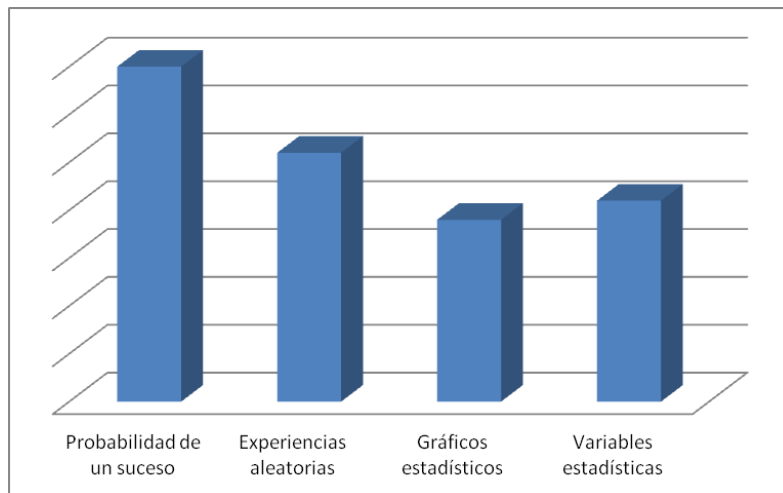
D) Pregunta N° 4: *Ordene los siguientes contenidos de mayor a menor dificultad para explicar.*



Gráfica N° 4. Contenidos ordenados de mayor a menor dificultad de explicación. Fuente: Elaboración propia.

Se observa que de los contenidos estudiados los profesores consideran el concepto de probabilidad como el más difícil de explicar, mientras que consideran como de menor dificultad explicar qué es una variable estadística y cuáles existen.

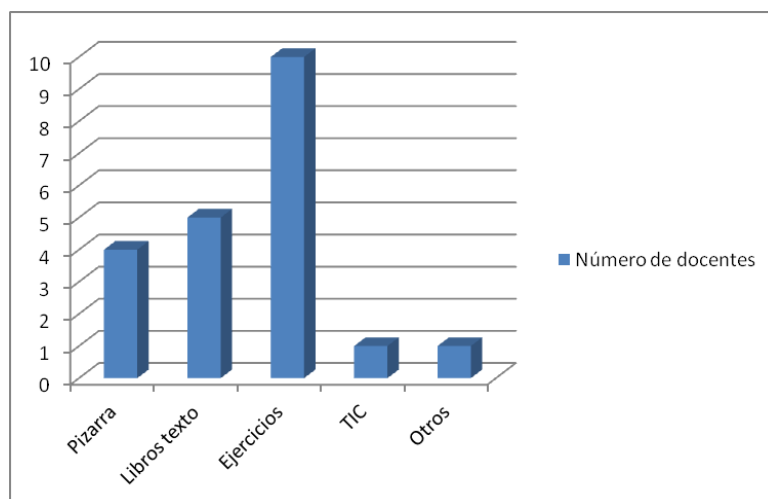
E) Pregunta N° 5: *Ordene los siguientes contenidos de mayor a menor dificultad para comprender.*



Gráfica N° 5. Contenidos ordenados de mayor a menor dificultad de comprensión. Fuente: Elaboración propia.

Puede observarse la dificultad de aprendizaje coincide con la dificultad para explicar en los conceptos más difíciles: probabilidad de un suceso y experiencias aleatorias. Sin embargo, en el caso de gráficos estadísticos se considera más fácil de aprender que las variables estadísticas.

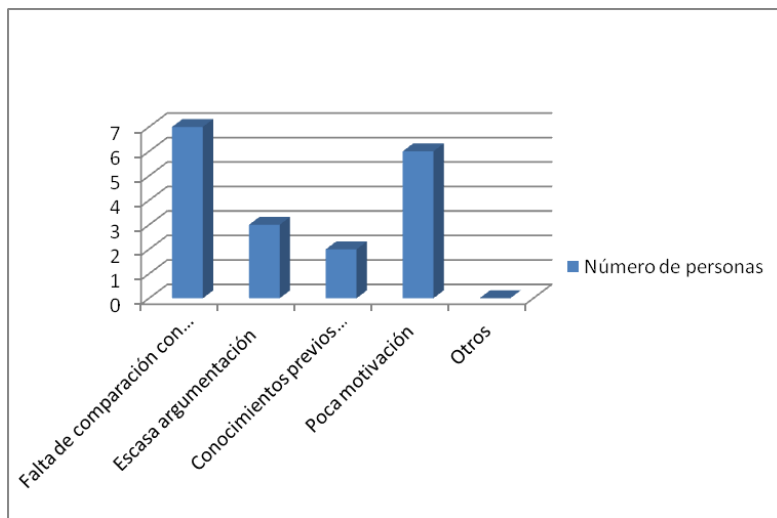
F) Pregunta N° 6: *¿Qué recursos utiliza más frecuentemente para enseñar estadística y probabilidad?*



Gráfica N° 6. Recursos utilizados para la docencia de probabilidad y estadística según el número de docentes que los emplean. Fuente: Elaboración propia.

El recurso más empleado, con diferencia, es el de hacer ejercicios, mientras que las tecnologías de la información y la comunicación apenas son utilizados, resultando que los docentes se apoyan claramente en recursos “clásicos”.

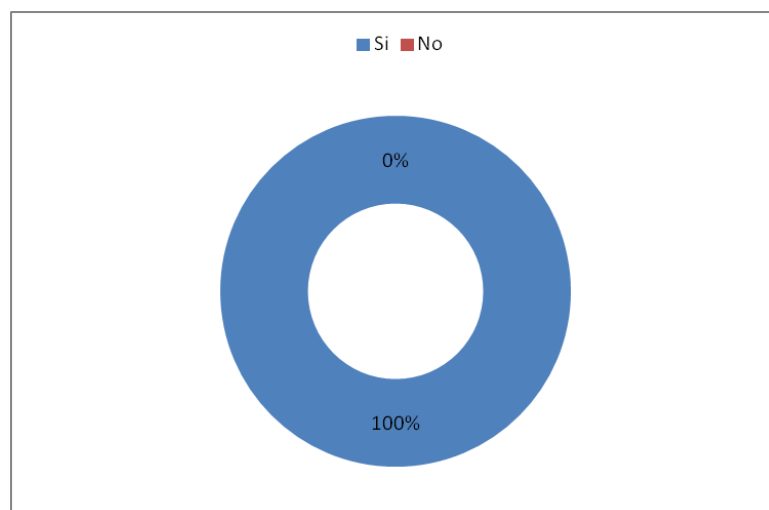
G) Pregunta N° 7: *¿Cuáles considera que son los principales factores que dificultan a sus alumnos la comprensión de los contenidos de probabilidad y estadística?*



Gráfica N° 7. Factores que dificultan a los alumnos el aprendizaje de probabilidad y estadística. Fuente: Elaboración propia.

Resulta claro que los dos principales factores que dificultan el aprendizaje son la falta de motivación y la incapacidad para relacionar los conceptos con la realidad.

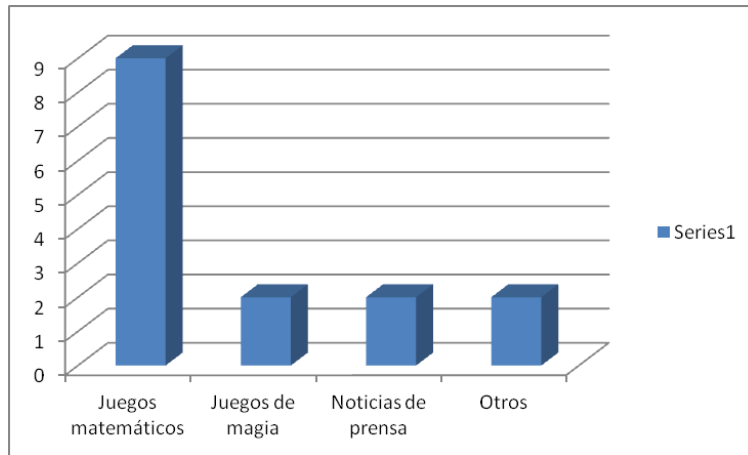
H) Pregunta N° 8 *¿Considera que el empleo de ejemplos que se acercan a la realidad ayuda a los alumnos a comprender la asignatura?*



Gráfica N° 8. Porcentaje de docentes encuestados que consideran que el empleo de ejemplos que acercan la asignatura a la realidad ayuda a los alumnos. Fuente: Elaboración propia.

El 100% de los docentes encuestados se mostraron de acuerdo en que el empleo de ejemplos que acerquen la materia a la realidad favorecerá el aprendizaje.

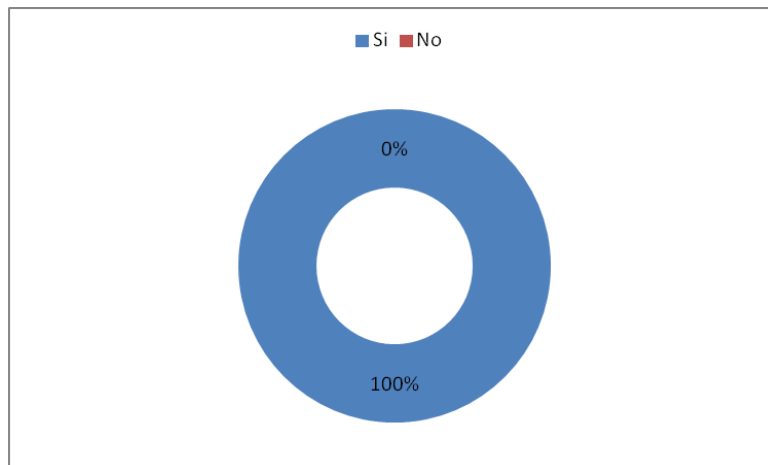
I) Pregunta N° 9: *En el caso de que la pregunta anterior haya sido afirmativa: Enumere cuales emplea.*



Gráfica N° 9. Enumeración de recursos que acercan relacionan la materia con la realidad. Fuente: Elaboración propia.

Se observa que los recursos “alternativos” más empleados son los juegos de matemáticas mientras que las los de las demás categorías apenas son empleados.

J) Pregunta N° 10: *¿Si le propusieran una nueva metodología de enseñanza para estadística y probabilidad estaría dispuesto a probarla?*



Gráfica N° 10. Predisposición de los docentes a probar una nueva metodología para la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Fuente: Elaboración propia.

Fue unánime la disposición favorable de los docentes encuestados a probar una nueva metodología si les fuera propuesta.

4.3.2. Resultados de las entrevistas

Como ya ha quedado indicado en el apartado 4.2.2. por respeto al deseo de los docentes entrevistados, en lo sucesivo el docente de 3° A será llamado "docente A", el

docente de 3º B será llamado "docente B" y el docente de diversificación curricular será llamado "docente C".

A) Pregunta Nº 1: *¿Cuáles son las principales dificultades que has encontrado impartiendo el área de estadística y probabilidad para tu grupo de alumnos?*

En esta pregunta, los tres docentes están de acuerdo en que la mayor dificultad con la que se encuentran es el tiempo, o mejor dicho, la falta de tiempo, ya que los temas aparecen al final del temario y son complicados de explicar dado que los alumnos a final de curso se encuentran más nerviosos por los exámenes finales y también cansados y con ganas de acabar.

El docente A comenta que es un área abstracta que a los alumnos les resulta difícil de imaginar. No consigue llegar a transmitirles en qué consiste un espacio muestral o lo que implica un suceso aleatorio. Afirma que cuando se tratan problemas de probabilidad relacionados con monedas los alumnos lo relacionan más con la realidad y consiguen interiorizar mejor los contenidos.

El docente C indica que en su temario este apartado, de estadística y probabilidad, es más breve que en la asignatura de matemáticas de 3º de ESO. Afirma que en ocasiones, el hecho de que en el libro de texto aparezca más breve, lo que implica es una falta de documentación ya que los ejercicios pedidos suelen ser similares. La principal dificultad detectada es que los alumnos enseguida pierden el interés cuando habla de probabilidad de un suceso. En palabras del docente: "Los alumnos comprenden fácilmente que cuando se tira una moneda la probabilidad de que salga cara o cruz es de $\frac{1}{2}$, y que cuando se tira un dado es de $\frac{1}{6}$ pero cuando se comienzan a tirar dos dados desconectan porque no comprenden la variación".

B) Pregunta Nº 2: *¿La metodología propuesta te parece adecuada para la explicación de la materia?*

Los tres docentes están de acuerdo con que, a pesar de que el tiempo sigue siendo un factor limitante para estos últimos temas de la asignatura, y que esa circunstancia no cambia a no ser que se recorte el temario o se alargue el periodo lectivo, es una metodología que sitúa al alumno en la realidad al comprender mediante actividades cercanas el significado de lo estudiado.

Todos ellos están de acuerdo con que, para aplicar este tipo de metodologías hay que cambiar la conciencia de clase y realizar sesiones mucho más participativas.

El docente B afirma que a pesar de que sus alumnos son estudiosos y el comportamiento en el aula es muy bueno, al cambiar la forma de trabajar se alteran y es algo que el profesor debe saber controlar. Comenta que ya no se trata de que los alumnos estén en silencio en el aula escuchando al profesor sino que se impliquen de forma activa en el aprendizaje y que hablen entre ellos y experimenten.

El docente C señala que sus alumnos estuvieron muy participativos e implicados durante las dos sesiones realizadas.

C) Pregunta N° 3: *¿Con respecto al año anterior, las actividades propuestas han mejorado la comprensión de los alumnos?*

Los tres docentes al realizar esta pregunta contestaron que aun están a la espera de ver los resultados finales en el examen. Aun así afirman que los alumnos preguntan mucho más que en otras ocasiones y que esto puede ser debido a que se interesan más por lo estudiado y a que el proceso de comprensión está en marcha.

Afirman que, lo que han podido observar hasta ahora es que al ir avanzando en el temario los alumnos parece que prestan atención por lo que algo comprenden. También señalan que las actividades realizadas y corregidas a lo largo de los temas están la mayor parte de las veces bien realizadas.

D) Pregunta N° 4: *¿Te han resultado difíciles de implementar las actividades propuestas?*

Los tres docentes han contestado de manera similar a ésta pregunta. En los tres casos la respuesta ha sido negativa, es decir, que no les han resultado actividades difíciles de implementar.

Los tres están de acuerdo en que siempre conlleva un trabajo extra el añadir actividades, aprenderlas y ver dónde encajan mejor, así como cambiar la forma en la que se está habituado a trabajar. El docente C comenta que es habitual que, para motivar a sus alumnos, tenga que buscar actividades y metodologías diferentes con el objetivo de explicar de manera más sencilla pero eficaz los conceptos y esta nueva metodología basada en los juegos de magia no la conocía y le parece interesante.

Los tres docentes recuerdan como buena experiencia la actividad “un problema con los cumpleaños” ya que no solo lograron sorprender a los alumnos sino que se sorprendieron ellos mismos.

E) Pregunta N° 5: *¿Las actividades han incrementado el interés de los alumnos en el área estudiada?*

Ante esta pregunta, el docente A comenta que ha sido el área en el que ha visto a los alumnos más atentos a las actividades propuestas y con más ganas de realizarlas. Dice que normalmente cuando no entienden los conceptos desconectan y es como si en el aula no hubiese nadie. No montan alboroto pero ni preguntan ni realizan ejercicios. En cambio en este caso, todos trajeron el material necesario y al trabajar más en grupos fueron mucho más activos y durante la corrección de ejercicios, alumnos que nunca participan ni salen a corregir a la pizarra en este caso sí que lo hacían.

En el caso del docente B afirma que sus alumnos ya muestran, en general, interés por la asignatura de matemáticas pero sí que ha constatado que este cambio de metodología ha animado a los estudiantes a participar más sobre todo entre ellos. A colaborar de manera activa y a comentar resultados obtenidos.

En cuanto al docente C, éste comenta que ya era consciente de que para favorecer un aprendizaje significativo con sus alumnos era necesario un cambio de metodología y él lo lleva poniendo en práctica durante tres cursos consecutivos. Por lo que afirma que, “cualquier metodología o recurso que haga que los alumnos aumenten su interés, hará que el aprendizaje sea más efectivo”.

F) Pregunta N° 6: *¿Volverías a implementar las actividades propuestas el curso siguiente?*

Ante esta pregunta la respuesta es rotunda en los tres casos: sí. Todos ellos comentaron que les gustaría disponer de la propuesta metodológica completa de cara a poder realizar, a final de este curso 2013-2014, la programación para el curso siguiente e implementarla.

4.4. Conclusiones del estudio de campo

Como resultado de las encuestas, se observa que se ha cumplido el objetivo de verificar que resultan ser ciertos los problemas apuntados en el marco teórico en relación con la enseñanza de probabilidad y estadística en 3º ESO. Las encuestas son representativas de un grupo de profesores con experiencia impartiendo matemáticas en 3º de ESO de entre 1 y 15 años por lo que se considera una muestra adecuada. Se confirma que, en el 80% de los casos, la asignatura se imparte en el tercer trimestre del curso por lo que los alumnos se encuentran más cansados y con ganas de terminar el año escolar. Un 60% de los profesores afirma que consideran la enseñanza de la

estadística y la probabilidad menos importante que otras áreas de las matemáticas por lo que este es un factor importante también a tener en cuenta ya que los alumnos lo captan. En cuanto a las dificultades de enseñanza, éstas coinciden en orden de importancia con las dificultades de aprendizaje. Este hecho tiene sentido ya que, si a un profesor se le presentan dificultades a la hora de enseñar una materia, los alumnos percibirán esas dificultades y se amplificarán las suyas propias a la hora de entenderla y de aprenderla. Por consiguiente, es realmente esencial que los profesores dominen la materia a impartir y la consideren importante. En cuanto a los recursos empleados para impartir la materia todos los docentes encuestados afirman emplear ejercicios y una gran mayoría emplea también el libro de texto y la pizarra. Esto pone de manifiesto que la metodología y los recursos que se emplean son tradicionales y no favorecen la motivación de los alumnos para estudiar la asignatura. Como resultado positivo cabe citar que el 100% de los encuestados se muestran de acuerdo en que el acercamiento a la realidad tanto de la materia a explicar como de sus ejemplos ayudarían a la comprensión de los alumnos y todos ellos estarían dispuestos a ensayar una nueva metodología de enseñanza para probabilidad y estadística.

Como resultado de las entrevistas realizadas en el centro educativo a tres profesores de matemáticas de un mismo curso sobre dos sesiones implementadas en sus asignaturas, se observa igualmente que se han cumplido los objetivos de presentar dos sesiones implementando la nueva metodología en un centro y el de conocer la opinión de tres docentes sobre la misma. Por un lado es positivo que el centro y los docentes hayan aceptado llevar a cabo estas dos sesiones. Por otro lado todos ellos afirman que ante la nueva metodología los alumnos se mostraron más activos, más participativos y más interesados que en otras ocasiones. Como inconveniente mencionaron que al tratarse de clases más participativas, se requiere mayor esfuerzo para mantener el orden.

5. Propuesta metodológica de enseñanza

La propuesta metodológica se centra en el empleo de recursos matemáticos para la presentación y explicación de los conceptos que integran las áreas objeto de enseñanza y que quedaron enumerados en el apartado 3.1. Estos recursos se explican en el apartado 5.2. Se incluyen en el apartado 5.3 dos ejemplos de sendas sesiones demostrativas de la puesta en práctica de los recursos.

5.1. Objetivos de la propuesta metodológica

El objetivo principal de la propuesta es:

Favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de estadística y probabilidad en 3º de ESO mediante el empleo de juegos de magia.

Como objetivos secundarios se plantean los siguientes:

- Incluir con coherencia en la programación de la asignatura los recursos matemáticos que se aportan.
- Fomentar la participación activa de los alumnos mediante los juegos de magia y el trabajo en grupo.
- Facilitar al alumno la identificación con la realidad de la materia a estudiar favoreciendo actividades cercanas y con ejemplo reales.
- Favorecer un aprendizaje basado en la experiencia que resulte significativo para los alumnos.

5.2. Metodología

Se exponen a continuación los contenidos de la propuesta metodológica para el desarrollo de las clases.

5.2.1. Antes de la clase

El docente deberá conocer a la perfección el temario a impartir, los contenidos relativos a la probabilidad y la estadística, los procedimientos aplicables y el sistema de evaluación. Es imprescindible, y no sólo para esta metodología sino para cualquiera, que el docente comprenda exhaustivamente cada área, es decir, dominar los conceptos que se manejan en la probabilidad y estadística en el marco de la legislación aplicable, tanto estatal como autonómica. Deberá haber realizado una programación de -en este

caso- dos unidades didácticas en las que se trabaje tanto estadística como probabilidad. Esta programación deberá incluir tanto las herramientas convencionales para la transmisión de los conocimientos matemáticos como las nuevas herramientas, fundamentalmente juegos de magia.

El docente deberá adquirir destreza, además de en el empleo de los recursos convencionales (libro de texto, ejercicios complementarios, pizarra digital, etc.) también en la ejecución de los juegos mencionados que pretenda llevar a cabo, para lo cual deberá ensayarlos suficientemente antes de ponerlos en práctica. Deberá también tener presente qué actividades son más adecuadas para la introducción del tema o para la explicación del mismo. Por ejemplo, la actividad “*Un problema con los cumpleaños*” permite presentar la definición de probabilidad.

5.2.2. Durante la clase

Esta metodología de enseñanza favorece mucho la participación de todos los alumnos del grupo, ya sea en grupos pequeños o en el conjunto del aula. Por ello, el docente deberá tenerlo en cuenta a fin de dominar la situación y de presentar la asignatura como habitualmente hace, pero empleando los nuevos recursos. Deberá dejar más de lado el libro de texto y la pizarra y tener a mano monedas, dados y cartas. Podrá pedir a los alumnos que lleven al aula este tipo de material poco frecuente en un centro y que lo empleen para el estudio de probabilidad y estadística.

Si se presenta una actividad en la que se lanza 3 o 4 veces una moneda al aire, los alumnos tendrán permiso explícito para lanzar la moneda al aire con libertad y comprobar que el experimento que están realizando resulta correcto. De la misma manera, si se les manda comprobar que el número más probable de obtener si se lanzan dos dados es el 7, ellos podrán emplear dados en el aula y dibujar los diagramas necesarios. Es importante limitar la duración de esta práctica libre, durante la cual se permitirá un cierto desorden, a fin de diferenciar con claridad los tiempos en que los alumnos experimentan de los tiempos en los que se explica materia o se corrigen ejercicios.

En cuanto a los juegos de magia que realizará el profesor, hay que tener en cuenta que estos recursos generan curiosidad y expectación por parte de los alumnos y que es conveniente “dejarles con las ganas” en cierta medida. Para ello conviene alternar sesiones en las que se expongan novedades con otras sesiones de realización de ejercicios y de aplicación de lo aprendido. De esta forma, estarán atentos y alerta por si surge algo nuevo y a la vez trabajarán.

En estos casos, dado que son juegos matemáticos, en la mayoría de los casos el secreto puede ser explicado a los alumnos, ya que la comprensión finalizará con dicha explicación.

5.2.3. Después de la clase

El docente deberá ser capaz de verificar si los recursos empleados han sido válidos al igual que en cualquier otra propuesta de metodología. Pero en este caso podrá observar si el recurso mágico empleado ha sido más efectivo que el método tradicional para llamar la atención de los alumnos y conseguir que se involucren más en el desarrollo de la clase, además de interesarse por esta parte de la asignatura que mucho tiene que ver con el juego en sí.

Deberá realizar una evaluación y considerar si puede repetir el mismo recurso otro día para comprobar que los alumnos ya han alcanzado la comprensión del mismo o incluso pedirles a ellos mismos que lo realicen en grupos pequeños.

Todo ello debe ser reflexionado y adecuado a lo que después se les vaya a exigir. En la mayoría de los casos se comprobará que los alumnos recuerdan a la perfección lo sucedido en el juego de magia para que les sirva de referencias cuando se les pregunta por conceptos, por ejemplo durante un examen.

5.3. Recursos docentes propuestos

5.3.1. Actividades

Las actividades que se proponen a continuación son solamente ejemplos que pueden llevarse a la práctica con sencillez. Pueden encontrarse numerosos otros ejemplos en la bibliografía que se expone al final del trabajo, así como directrices para diseñar nuevas actividades

Actividad N° 1: *Un problema con los cumpleaños.*

Este juego, adaptado de Lawrence (2009, p 267), sirve como introducción a la metodología propuesta en los temas de estadística y probabilidad porque llamará la atención de los alumnos.

Para realizar este juego de magia, debe asumirse que la clase es de al menos 35 alumnos. En caso de no ser así, para la realización podría solicitarse al profesor de otra aula del mismo nivel que le conceda 5 minutos de su tiempo. El profesor que dinamiza la actividad les explicará a los alumnos que van a realizar un juego de magia y pedirá a

los alumnos que creen una imagen mental del día de su cumpleaños. Después de un poco de teatro, el profesor proclama que dos de los alumnos cumplen años el mismo día.

La explicación matemática de este efecto no es adecuada para alumnos de 3º de ESO por lo que el objetivo es simplemente llamar su atención en cuanto a temas de probabilidad y estadística se refiere. Así los alumnos pensarán que se necesitan alrededor de 183 ($365 \text{ días del año} / 2$) personas para tener al menos un 50% de posibilidades de que coincidan los cumpleaños de dos personas cuando realmente el número es 23.

El profesor pedirá a los alumnos que digan el día de su cumpleaños en voz alta mientras se mueve alrededor de la clase. El profesor encontrará dos alumnos que cumplen años el mismo día. Finalmente, y adecuando la explicación a 3º de ESO, el profesor deberá explicar que, a pesar de que parece casi imposible, realmente la probabilidad de que ocurra es baja y depende del número de alumnos que estén en el aula.

Actividad N° 2: *Sucesos casi seguros.*

En el transcurso de esta actividad, adaptada de Alegría (2002, p 168), el profesor entrega una baraja a mezclar a un alumno. Después de colocar la baraja cara abajo pide que el espectador nombre los valores de dos cartas (sin precisar el palo). Si es una baraja española supongamos que el alumno dice el tres y la sota. A continuación, el alumno deberá ir pasando cartas de la baraja, una a una y cara arriba, hasta que aparezcan seguidos el tres y la sota.

Lo que el profesor deberá saber es que este efecto funciona un 90% de las veces debido a las leyes de la probabilidad y, en caso contrario, es muy posible que estén separadas únicamente por una sola carta. Una propiedad tan inusual como esta crea un gran impacto pues a priori da la impresión de ser algo que ocurre en pocas ocasiones. Será tarea del profesor hacer creer a los alumnos la casi imposibilidad del resultado.

Sin embargo una vez realizado el juego una serie de veces e incluso, de que los alumnos lo hicieran unos a otros en grupos pequeños, deberán de calcular la probabilidad del suceso y ver que realmente es mayor de lo que pensaban.

Otra variación de este juego es que dos alumnos tomen cada uno una baraja y vayan pasando cartas cara arriba, una por una, de ambas barajas a la vez. Es casi seguro

que, en el transcurso del reparto, aparecerán dos cartas iguales a la vez, una de cada baraja.

Actividad N° 3: *“Predicción de la cara de una moneda, el lado de un dado y una carta de una baraja.”*

Esta tercera actividad, adaptada de Lawrence (2009, p 266), se puede emplear para introducir a los alumnos el concepto de probabilidad. En él el profesor explica que va a predecir el resultado de lanzar una moneda al aire, el valor resultante de tirar un dado y de adivinar una carta seleccionada de entre 52. El profesor explica como en primer lugar adivinará el resultado de lanzar una moneda al aire. En la esquina izquierda de la pizarra, el profesor escribe la predicción y la tapa con algo opaco, un papel, una cartulina... Un estudiante seleccionado al azar, tira una moneda y se le pide que debajo de la predicción del profesor apunte el resultado real. Posteriormente el profesor, en el centro de la pizarra escribirá una predicción acerca del resultado de tirar un dado. Tras tapanlo al igual que la vez anterior, pedirá a un alumno al azar que lance un dado y apunte el resultado debajo de la segunda predicción. Finalmente el profesor realizará una tercera y última predicción sobre el resultado de seleccionar una carta entre 52, que son las que tiene una baraja de Póker. Tras escribirla en la esquina derecha de la pizarra y tapanla, pedirá a un tercer alumno que coja una baraja, extraiga de ella una carta y apunte el resultado debajo de la tercera y última predicción.

Antes de desvelar a los alumnos si las predicciones, se comentará entre toda la clase que probabilidad hay de que las tres predicciones sean correctas:

- Probabilidad de lanzar una moneda y que salga cara o cruz: $\frac{1}{2}$
- Probabilidad de tirar un dado y adivinar el resultado: $\frac{1}{6}$
- Probabilidad de adivinar una carta entre 52: $\frac{1}{52}$
- Luego la probabilidad de adivinar las tres cosas: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{52} = \frac{1}{624}$.

Finalmente el profesor desvela que las tres predicciones son correctas por lo que la sorpresa de los alumnos es aun mayor después de ver que la probabilidad era tan baja.

Actividad N° 4. *Madre del año.*

Esta cuarta actividad, tomada de Gardner (1984, p 116), más que un juego de magia es una paradoja pero el efecto es el mismo ya que sorprenderá a los alumnos. Sería para trabajar los conceptos de media, moda, mediana, valor típico... durante una sesión entera.

El profesor contará esta breve historia a sus alumnos: “La madre de Félix, fue premiada por la alcaldía. Había sido elegida madre del año. El periódico local publicó una foto de Félix junto con su esposa y sus trece hijos. El redactor jefe estaba encantado y le pidió al fotógrafo que le llevase una fotografía de una familia de tamaño medio de la ciudad. Pero el fotógrafo fue incapaz de cumplir el encargo. ¿Por qué? Porque en la ciudad no había ni una sola familia de tamaño medio. El número promedio de hijos era, según los cálculos 2.5”

El docente deberá entonces dividir la clase en grupos y dejarles tiempo para que piensen en la verdadera solución del problema. A continuación se muestra lo que debe tener en cuenta para después debatir con la clase.

Un prejuicio muy erróneo y difundido acerca del “valor medio” es que en el fenómeno estudiado debe haber casos particulares que materialicen tal valor. Después de este episodio, donde tanto los alumnos como el docente comprenden que no puede haber familias con 2 hijos y medio, el profesor deberá pedir a los alumnos que pongan otros ejemplos en los que el valor medio no esté concretado en un caso particular.

Después podrían seguir trabajando lo siguiente: “Si el redactor-jefe quisiera una foto de una familia típica ¿Podría siempre el fotógrafo encontrar una familia así?” El docente debe saber que sí, porque el caso típico existe por definición.

“¿Podría suceder que haya más de una moda? Por ejemplo, ¿Podrían ser ejemplos de moda una familia con 2 hijos y una de 3?” El docente debería saber que sí. Si imaginamos que la ciudad tiene 1476 familias de 2 hijos y 1476 familias de 3 hijos, la ciudad tendría entonces dos clases de familias típicas y cada clase define una moda.

“Si el redactor jefe quisiera una foto de la familia “mediana” ¿Se podría siempre encontrar alguna?” El profesor debería saber que por lo general sí, pero podría ocurrir que, como ya se ha visto, si en la ciudad hay un número par de familias, y las dos familias de lugar central no tienen igual número de hijos, la mediana puede no ser un número entero.

Actividad N° 5: “*El mundo es un pañuelo*”

Durante esta actividad, tomada de Gardner (1984, p 119), el profesor contará la siguiente historia: Paco y Jaime acaban de conocerse en un avión. - Paco: ¡Así que es usted de sevillano! Yo tengo allí una gran amiga, Lola Valdecilla, que es abogada. - Jaime: ¡El mundo es un pañuelo! ¡Mi mujer y ella son grandes amigas! El profesor pregunta: ¿Es esto magia?

El profesor deberá proponer a los alumnos que, por grupos, intenten buscar coincidencias que hasta el momento no conocían hablando del lugar el que veranean, o la actividad deportiva que hacen fuera del centro... Seguramente se descubrirán en la clase un par de coincidencias de este tipo.

Casi todo el mundo se sorprende cuando al conocer a un extraño descubre que tienen un amigo en común. Un grupo de investigadores del MIT descubrieron que elegidas al azar dos personas en Estados Unidos, por término medio cada una de ellas conoce a unas 1000 más. Se tiene entonces una probabilidad de $1/100000$ de que ambas se conozcan directamente. La probabilidad de que tengan un amigo común se eleva hasta $1/100$. La probabilidad de que puedan quedar conectados a través de una cadena de dos intermediarios es en realidad superior al $99/100$. En cambio el psicólogo Stanley Milgram ha estudiado el mismo problema en todo el mundo y el número de la cadena oscilaba entre 2 y 10, con mediana en 5. Luego en un aula entre dos alumnos es prácticamente seguro que el alumno A conoce a alguien que conoce a otra persona que conoce al alumno B. (O en lugar de dos eslabones serán necesarios 3).

Finalmente no es cosa de magia, sino de matemáticas.

Actividad N° 6: *“El juego de las tres nueces”*

En esta última propuesta, extraída de de Gardner (1984, p 100), el profesor adoptará el papel de “trilero”. Les dirá a los alumnos que les mandará, por ejemplo, un ejercicio menos para casa cada vez que adivinen debajo de que nuez hay un guisante, en cambio cada vez que fallen un ejercicio más. Esto puede ser que sólo sirva de pretexto y al final de toda la explicación no haya ejercicios mandados para casa.

Los alumnos al de poco rato se darán cuenta de que, como mucho, podrían acertar una de cada 3 veces de forma que los ejercicios en lugar de disminuir irán en aumento. Por lo que el profesor, para animarles a seguir jugando, les propondrá que cuando ellos elijan una de las nueces, él le dará la vuelta a una de las que se encuentre vacía. Luego el guisante deberá estar debajo de una de las otras dos y la probabilidad de ganar será mayor.

Al de un rato los alumnos querrán dejar de jugar porque habrán visto que sus posibilidades de acertar no han aumentado y sus tareas para casa sí.

El profesor después de la experiencia les deberá explicar que, después de que ellos eligieran una nuez, al menos una de las otras dos estará con certeza vacía. Como es el profesor el que sabe donde puso el guisante, siempre puede levantar una nuez vacía.

Por esto, el gesto no aporta a los alumnos ninguna certeza de haber elegido la nuez correcta.

5.3.2. Recursos materiales

Para el desarrollo de las actividades es necesario que el profesor tenga a su alcance diversos recursos materiales tales como naipes, dados, monedas, cartulinas, etc. todos ellos objetos ordinarios de la actividad docente.

5.4. Ejemplo de sesiones

A continuación se plantean dos sesiones de ejemplo teniendo en cuenta todo lo anteriormente citado. Las sesiones serán de 50 minutos y las actividades propuestas se han tomado de las explicadas en el apartado 5.2.1.

Sesión N° 1: Sesión de explicación de conceptos estadísticos

Se trata de una sesión de explicación de un concepto por lo que, como se ha citado anteriormente, el docente deberá conocer y dominar los conceptos a impartir, en este caso: moda, media y mediana, así como el recurso a emplear. En este caso se trata de una paradoja, que contiene preguntas que pueden intentar resolver los alumnos de forma intuitiva. Los alumnos agrupados en equipos de 5 deberán de consensuar una solución a la pregunta realizada. De esta forma irán poco a poco intentando definir ellos mismos el significado de los nuevos conceptos. Finalmente el profesor resolverá la paradoja y aprovechará la atención de los alumnos para explicar los conceptos.

Los recursos materiales que se necesitan para desarrollar esta sesión son: pizarra, cuadernos y bolígrafos.

Tabla N° 4. Sesión de explicación de conceptos estadísticos.

Objetivo	Temporalización	Organización de la clase	Actividades
Explicar el concepto de media, moda y mediana	5 minutos	Grupo grande, toda la clase.	Explicación de la actividad a realizar. Lectura de la paradoja “madre del año”, apartado de la media.
	10 minutos	Grupos de 5 alumnos	Trabajo apartado de la media.
	10 minutos	Grupos de 5 alumnos	Lectura y trabajo apartado de la moda
	5 minutos	Grupos de 5 alumnos	Lectura y trabajo apartado de la mediana.
	15 minutos	Toda la clase, participación de los alumnos.	Puesta en común de los resultados obtenidos
	10 minutos	Toda la clase, preferencia de participación del profesor.	Explicación de los conceptos y corrección de los resultados obtenidos.

Nota: Distribución temporal de la sesión. Fuente: Elaboración propia.

Sesión N° 2: Sesión de inicio de tema: probabilidad

Se trata de una sesión de introducción del tema por lo que la clase puede ser más distendida con el objetivo de motivar a los alumnos a afrontar el tema con entusiasmo. En este caso el recurso elegido es un juego de magia, por lo que, como ya se ha comentado anteriormente es necesario que el docente haya ensayado previamente el mismo y se encuentre seguro de sí mismo a la hora de realizarlo. La presentación la hará él por lo que las predicciones a realizar también.

Los alumnos agrupados en equipos de 5 intentarán relacionar el concepto que ya conocen de porcentaje con el que no conocen de probabilidad. Finalmente el profesor explicará el concepto de probabilidad e introducirá el tema.

Los recursos materiales necesarios para esta sesión son: monedas, dados, barajas de 52 cartas, pizarra, cartulina, cuadernos y bolígrafos.

Tabla 5. Sesión de inicio del tema de probabilidad.

Objetivo	Temporalización	Organización de la clase	Actividades
Introducir el tema de probabilidad	5 minutos	Grupo grande, toda la clase.	El profesor realiza la primera predicción: moneda.
	5 minutos	Grupos de 5 alumnos	Se lanza la moneda y los alumnos calculan el posible porcentaje de acierto.
	5 minutos	Grupo grande, toda la clase.	El profesor realiza la segunda predicción: el dado.
	5 minutos	Grupos de 5 alumnos	Se tira el dado y los alumnos calculan el posible porcentaje de acierto.
	5 minutos	Grupo grande, toda la clase.	El profesor realiza la tercera predicción: la carta.
	10 minutos	Grupos de 5 alumnos	Se elige la carta y los alumnos individualmente calculan el posible porcentaje de acierto.
	15 minutos	Grupo grande, toda la clase.	Se corrigen los porcentajes. Se relacionan con la probabilidad y se descubren las predicciones.

Nota: Distribución temporal de la sesión. Fuente: Elaboración propia.

6. Aportaciones del trabajo

El estudio de campo realizado aporta solidez experimental a la opinión ampliamente extendida de que se aprende lo tangible con más facilidad que lo abstracto y que la motivación y el interés son factores clave para que los alumnos muestren receptividad.

Supone una modesta, pero importante, aportación al acervo documental existente en torno a la enseñanza de materias abstractas y concretamente a dos pertenecientes al ámbito matemático como son la probabilidad y la estadística.

Aporta igualmente una metodología para la enseñanza de estas materias, inscrita en el marco normativo vigente (apartado 3) y cuya validez ha sido contrastada mediante entrevistas y encuestas (apartado 4). La propuesta incluye, asimismo, un conjunto de actividades y de recursos asequibles para los profesores, capaces de generar un ambiente de trabajo distendido en el que los alumnos puedan probar, hacer ruido con monedas etc. y a la vez organizado que hace que sea posible mantener el orden en el aula (apartado 5).

Si bien los recursos aportados en el trabajo no son de creación propia, sí introducen una práctica novedosa en la docencia puesto que aunque no se trata de actividades nuevas inexistentes hasta ahora, sí es cierto que su utilización es escasa y en muchos casos desconocida.

7. Discusión

Los resultados del estudio de campo (estudio de campo mediante encuestas, entrevistas y sesiones experimentales) confirman plenamente la posición de los autores consultados acerca de la dificultad que los docentes encuentran para enseñar, y los alumnos encuentran para aprender, cuestiones abstractas no inmediatamente asimilables a objetos o eventos que puedan encontrarse en la realidad.

Además confirman el hecho de que las metodologías predominantes hasta la fecha se limitan a emplear el libro de texto y los ejercicios como recursos principales. Si bien es cierto que en el artículo consultado de Batanero y Díaz (2011) se plantea una nueva forma de trabajar mediante proyectos, a día de hoy la realidad es que predomina el estilo “clásico”. Se confirma así la necesidad de potenciar alternativas innovadoras como la que se ha pretendido en este trabajo.

Igualmente se confirma la validez y utilidad de técnicas capaces de provocar sorpresa, asombro, curiosidad, etc. para despertar el interés y potenciar la motivación de los alumnos.

Es preciso señalar que, si bien los docentes participantes en el estudio de campo manifestaron unánimemente su disposición a utilizar recursos novedosos, también es cierto que dichos recursos requieren la adquisición previa de ciertas destrezas que solamente se consiguen con la práctica y la repetición. Lo cual requiere un esfuerzo inicial por parte de los profesores y una actitud favorable a vencer las inercias que conlleva el ejercicio prolongado de cualquier actividad.

8. Conclusiones

Para llegar a formular la propuesta metodológica, objetivo principal del trabajo, ha sido preciso llevar a cabo una serie de acciones que han permitido alcanzar las metas que fueron propuestas como objetivos específicos:

Primer objetivo específico: Realizar un estudio de campo a varios profesores de matemáticas de la comunidad autónoma del País Vasco sobre la necesidad de aplicar una nueva metodología para el estudio de probabilidad y estadística en 3º de ESO.

En primer lugar fue preciso diseñar una encuesta compuesta de diez preguntas de elaboración propia basadas en los problemas a estudiar detectados en tras el análisis de la bibliografía consultada (ver marco teórico). Estas encuestas fueron publicadas en internet mediante la herramienta Survey Monkey que facilita de manera gratuita éste tipo de encuestas de ámbito limitado. Utilizando el correo electrónico se solicitó a un número de profesores de matemáticas su colaboración para cumplimentar las encuestas. Como resultado de su participación se obtuvieron diez respuestas. Tras el análisis de las encuestas llevadas a cabo, el resultado confirma que son ciertos los problemas que plantea la enseñanza de probabilidad y estadística en 3º ESO, que ya fueron apuntados en el marco teórico. Se revela esencial que tanto los docentes como los alumnos consideren importante la materia y que se superen los métodos tradicionales de enseñanza-aprendizaje aplicando métodos y recursos innovadores que ayuden a la comprensión de los alumnos fomentando la motivación y la atención de éstos.

De manera complementaria a las encuestas, se diseñó una entrevista con la finalidad de obtener de los profesores su opinión y su juicio acerca de la validez y la aplicabilidad de dos sesiones diseñadas para el empleo de la nueva metodología propuesta. Fueron seleccionados tres profesores de entre quienes respondieron a la encuesta. La experiencia de enseñanza en un centro educativo con la que ya se contaba, y la amistad adquirida con el personal del centro, facilitó el contacto y la selección de las tres personas que fueron entrevistadas.

Como resultado de las entrevistas se constató la existencia de la necesidad de aplicar una nueva metodología para el estudio de probabilidad y estadística en 3º de ESO. (ver apartado Conclusiones del estudio de campo).

Segundo objetivo específico: *Probar la utilidad de la magia como recurso válido para el aprendizaje significativo de probabilidad y estadística en matemáticas de 3º de ESO.*

La utilidad de la magia como instrumento docente expuesta el marco teórico y avalada por la abundante bibliografía sobre experiencias existentes ha quedado ratificada por la experiencia práctica llevada a cabo en el estudio de campo que ha formado parte de este trabajo. La opinión favorable manifestada por los profesores en las entrevistas realizadas fue confirmada por los resultados satisfactorios obtenidos tras la realización de las dos sesiones prácticas que fueron propuestas. Quedó así pues confirmada la utilidad de los juegos de magia como recurso válido para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos tales como media aritmética, sucesos aleatorios, probabilidad de un suceso, parámetros estadísticos etc.

Tercer objetivo específico: *Proponer recursos “matemágicos” adecuados para la enseñanza de probabilidad y estadística en 3º de ESO.*

Completa el presente trabajo la entrega de una selección de seis actividades completas, con sus correspondientes guías de ejecución, suficientes para desarrollar las dos unidades didácticas exigidas por el currículo oficial (ver apartado de normativa). La práctica de dichas actividades puede servir de modelo a partir del cual desarrollar nuevos recursos adicionales.

Como conclusión final, este trabajo supone una aportación adicional eminentemente práctica, avalada por la bibliografía especializada existente sobre la materia que puede encontrarse en el apartado de Referencias bibliográficas, a los diversos instrumentos empleados para la enseñanza vigente de probabilidad y estadística en 3º de ESO, empleando la magia para mejorar el grado de atención de los alumnos, su predisposición al aprendizaje y la transmisión de los conocimientos. Queda cumplido el objetivo general del trabajo: *Proponer una metodología para la enseñanza de probabilidad y estadística en 3º de ESO empleando la magia para mejorar el grado de atención de los alumnos, su predisposición al aprendizaje y la transmisión de los conocimientos.*

9. Limitaciones del trabajo

La naturaleza del trabajo ha sido desarrollado sujeto a las siguientes limitaciones:

1- Alcance:

La materia objeto del presente trabajo se circunscribe a la enseñanza de las matemáticas, más en concreto las materias probabilidad y estadística en el curso 3º de la ESO. Si bien es perfectamente extensible a otras materias y otras disciplinas, ello habría excedido la naturaleza de este trabajo.

2- Ámbito:

El trabajo de campo para contraste de las hipótesis fue llevado a cabo en un centro educativo de enseñanza privada concertada en la Comunidad Autónoma del País Vasco. Aunque el trabajo ha estado limitado a un centro educativo, ello no menoscaba la validez de los resultados dado que se trata de un centro tipo en el conjunto del sector.

3- Muestra experimental:

Las propuestas del trabajo fueron puestas en práctica a lo largo de dos sesiones docentes llevadas a cabo por tres profesores de matemáticas. Fue realizada una encuesta a 10 profesores de matemáticas. La limitación de tiempo disponible y la época en la que ha debido ser llevado a cabo el estudio de campo (vacaciones de Semana Santa) ha impedido dar más profundidad a este punto, no obstante lo cual se considera suficientemente significativo el resultado obtenido.

4- Material disponible:

La disponibilidad de materiales específicos para el ciclo de enseñanza secundaria es poca debido a que la popularización del empleo de la magia en la docente se encuentra aun en sus inicios.

5- Plazo de realización:

El trabajo fue llevado a cabo a lo largo de cuatro semanas durante el mes de Abril de 2014 coincidiendo con la finalización del máster.

10. Líneas de investigación futuras

El trabajo abre diversas vías susceptibles de estudio, e investigación para avanzar en el desarrollo de la metodología presentada y en la generalización del empleo de la magia como recurso educativo.

A efectos putamente expositivos y no limitativos, se sugieren como posibles vías de investigación las siguientes:

- Ampliar la aplicación de la propuesta metodológica a más centros de la Comunidad Autónoma Vasca y otras comunidades. Esto permitiría profundizar en el contraste de la propuesta y posibilitar el perfeccionamiento de la misma.
- Extender la propuesta metodológica a todas las áreas de las matemáticas de 3º de ESO. Ya durante la revisión bibliográfica se han encontrado recursos para las áreas de álgebra, aritmética y sobre todo geometría sobre los cuales merecería la pena avanzar.
- Ampliar el ámbito a cursos superiores como 4º de ESO e incluso Bachillerato y ampliar el alcance a más disciplinas, no solo matemáticas, practicando las necesarias adaptaciones curriculares, a fin de aprovechar al máximo las ventajas de la metodología en los distintos cursos y ciclos educativos.
- Adaptar más juegos de magia a necesidades docentes ampliando y enriqueciendo el abanico de recursos disponibles facilitando a los docentes la elección de las que más se adapten a las necesidades de su campo.

11. Referencias bibliográficas

11.1. Referencias bibliográficas

- Alegría, P. y Ruiz de Arcaute, J. C. (2002). La matemagia desvelada. *Sigma*, 21, 145-174.
- Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Arévalo, R., González, J. L. y Torresano, J. A. (2012) *Recursos didácticos Matemáticas Pitágoras 3º ESO*. España: SM.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). El Papel de los Proyectos en la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística. En J. Patricio Royo (Ed.) *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-164). Zaragoza: ICE.
- Batanero, C., Godino, J.D., Green, D.R., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques (C. Batanero, Trans.). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 164-198.
- Davison, J. y McOwan, P. (2011). *Maths Made Magic*. Londres: Queen Mary University of London and University of Warwick.
- Decreto 175/2007, de 16 de octubre, por el que se establece el currículo de la Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco. BOPV 13/11/2007. Recuperado de <http://www.isei-ivei.net/cast/nora/noraindex.htm#>
- Gardner, M. (1984). *Paradojas*. Barcelona: Labor.
- Graham, A. (1987). *Statistical investigations in the secondary school*. Cambridge: The Open University Centre for Mathematics Education.
- Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics*. Sloug: Foulsham Educational.
- Kelly, M. (2013). *In the art of mathematics, work is play and tricks are the trade*. Princeton University. Recuperado de

<https://www.princeton.edu/main/news/archive/S36/37/98S70/index.xml?section=featured>

Lesser, L. M. y Glickman, M. E. (2009). Using Magic in the Teaching of Probability and Statistics. *Model Assisted Statistics and Applications*, 4, 265-274.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre. BOE 10/12/2013. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/educacion-mecd/areas-educacion/sistema-educativo/lomce.html>

Radatz, H. C. (1980). Student errors in the mathematical learning: a survey. *For the Learning of Mathematics*, 1, 16-20.

Ruiz Domínguez, X. (2013). *Educando con Magia*. Madrid: Narcea Ediciones.

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Orden ECI/1845/2007, de 19 de junio por la que se establecen los elementos de los documentos básicos de evaluación de la educación básica regulada por la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, así como los requisitos formales derivados del proceso de evaluación que son precisos para garantizar la movilidad del alumnado. BOE 05/05/2006. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/educacion-mecd/areas-educacion/sistema-educativo/ensenanzas/educacion-secundaria-obligatoria.html>

11.2. Bibliografía complementaria

Alegría, P. (2008). *Magia por principios*. Bilbao: Publidisa.

Eckert, S. (1994). Teaching Hypothesis Testing With Playing Cards: A Demonstration. *Journal of Statistics Education*, 2, 1.

Enzensberger, H.M. (1997). *El diablo de los números*. Madrid: Siruela.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación*, 334, 75-95.

Maxwell, N. P. (1994). A Coin-Flipping Exercise to Introduce the P-Value. *Journal of Statistics Education*, 2, 1.

McOwan, P. y Parker, M. (2010). *The Manual of Mathematical Magic*. Londres: Queen Mary University of London.