Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Autoconcepto matemático y problemas verbales. Un binomio para 4º de Educación Primaria

Trabajo fin de grado presentado por: Marta Pilar Sánchez Santos
Titulación: Grado de Maestro de Educación Primaria
Línea de investigación: Investigación Educativa
Directora: Dra. Blanca Arteaga Martínez

Quintanar de la Orden (Toledo)
22 de Junio de 2012
Firmado por: Marta Sánchez

CATEGORÍA TESAURO: MÉTODOS PEDAGÓGICOS

A Marcos y a Lucas

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría comenzar dando las gracias a mi Directora. Muchas gracias Blanca por tu apoyo constante, por compartir conmigo tus conocimientos, por tus palabras de aliento y por tu buen hacer. He sido muy afortunada conociéndote. Gracias.

Gracias a los directores del colegio Nuestra Señora de la Consolación de Quintanar de la Orden (Toledo). Gracias Conchita, gracias Antonio, por haberme permitido realizar la investigación en vuestro centro, por haberme tratado desde el principio como a una más.
Gracias a todo el claustro de profesores del colegio, por todo lo que me habéis aportado personal y profesionalmente.

Gracias a mis compañeros de la UNIR, en especial a mis amigos Alberto, Yolanda y Lucía. Gracias por hacerme reír en los momentos más duros, por vuestra inestimable compañía, por vuestra amistad. Seréis unos grandes maestros.

Gracias a mi madre, por ser mi referente de fortaleza y voluntad. Gracias a mis hermanos, Elia, Cristina y Rodrigo, por disculpar mi cansancio reiterado, por vuestros ánimos, por creer en mí.

Gracias a Toni, compañero en mi camino. Gracias por tu apoyo, por tu amor, por tu entrega y tu cercanía. Sin ti, mi sueño no se hubiese hecho realidad.

Gracias a mis dos hombrecitos, Marcos y Lucas. Gracias porque siendo tan pequeños, habéis comprendido mis ausencias de manera ejemplar. Espero poder compensaros algún día.

Y por último y especialmente, gracias a Dios.

RESUMEN

Las matemáticas constituyen una materia escolar con una fuerte carga social, a su vez influenciada por las valoraciones y creencias que uno tiene de sí mismo con respecto a su desempeño. Por tanto se puede considerar que el autoconcepto matemático es determinante en el rendimiento académico.
Una parte importante en el currículum de las matemáticas en Educación Primaria son los problemas verbales. A través de los problemas, se conectan las matemáticas con la vida, logrando así aprendizajes significativos modelizando situaciones reales. Sin embargo no se debe obviar que el proceso de resolución de los problemas a menudo representa diversas dificultades en los alumnos.
Se ha realizado una investigación con alumnos de 4º de Educación Primaria para comprobar si ofreciendo a los niños diversas estrategias para resolver los problemas verbales mejoran en su rendimiento. Así mismo, se ha determinado si este factor está relacionado con una mejora en el autoconcepto en matemáticas.

PALABRAS CLAVE: matemáticas, primaria, problemas, autoconcepto.

INDICE

ÍNDICE DE TABLAS

Pág.

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Pág.

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

"Aquel que duda y no investiga, se torna no sólo infeliz, sino también injusto"

Blaise Pascal

Justificación

Son varias las razones que me han llevado a elegir este tema para realizar mi Trabajo Fin de Grado. Algunas de las motivaciones son de naturaleza práctica.

Hace unos meses experimenté mi primer contacto con la realidad educativa como maestra en prácticas. Sin duda, fue un periodo enriquecedor personal y profesionalmente que me permitió observar diferentes cuestiones de la realidad educativa.

Como futura maestra, son muchos los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje que me cuestiono y que me inquietan, con la finalidad de ayudar a los alumnos en su desarrollo integral.

Entre estas reflexiones e inquietudes, se encuentran las emociones y afectos negativos que las dificultades en el área de matemáticas generan en algunos alumnos. Estas emociones negativas influyen en la percepción que el alumno tiene de sí mismo y de su desempeño en la materia, esto es, el autoconcepto, desarrollando de esta forma un modelo interno negativo de creencias sobre sí mismo, así como una determinada actitud hacia las matemáticas.

Las matemáticas representan el área de conocimiento que más problemas ha presentado a lo largo de la historia. La ansiedad y el estrés que producen en algunos alumnos las tareas matemáticas constituyen un hecho ampliamente demostrado. Según Alsina, Burgués, Fortuny, Giménez & Torra (1996, en Arteaga, 2006), "las matemáticas son la única disciplina escolar de la que la sociedad acepta el fracaso".

En este contexto resulta conveniente valorar los resultados de los estudiantes españoles al hablar de las matemáticas en informes como PISA[1] (2009) que si bien han mejorado[2] ligeramente respecto a informes anteriores (PISA, 2003), continúan alejados de las medias europeas al hablar de rendimiento.

1 La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) inició en 1997 el proyecto PISA para poder ofrecer la evolución de los sistemas educativos, medidos a través de la valoración del rendimiento de los alumnos de 15 años en competencias consideradas clave, como son la matemática, la lectora y la científica. Recuperado el 11 de mayo de 2012 de: http://iaqse.caib.es/documents/aval2009-10/pisa2009-informe-espanol.pdf

2 Según el informe PISA 2009 los resultados españoles en competencia matemática han mejorado ligeramente con respecto a años anteriores: 2000(476), 2006(480), 2009 (483). Sin embargo el promedio continúa alejado en 13 puntos del que presenta la OCDE (496). El país europeo con mayor puntuación es Finlandia (541), aproximándose a los mejores resultados promedios obtenidos en las ciudades asiáticas de Hong Kong-China (555) y Singapur (562). Alejada queda la puntuación más elevada conseguida por Shangái-China (600 puntos).

El rendimiento, así como determinados conceptos, destrezas y actitudes se miden en la evaluación de diagnóstico en 4º de Educación Primaria[3]. Según los datos analizados en esta prueba correspondiente a la competencia matemática en 2009, se evidencia un grado de dificultad creciente cuando se trata de reproducir, establecer conexiones y "reflexionar sobre cuestiones planteadas (destrezas que implican un cierto grado de perspicacia y creatividad a la hora de identificar los elementos matemáticos de un problema)."[4]

La reflexión adecuada así como la resolución de los problemas en matemáticas, constituyen un punto de partida en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que los contenidos matemáticos adquieren sentido minimizando su grado de abstracción en la medida que permiten resolver problemas y encontrar soluciones, siendo además una parte esencial del currículo de matemáticas en la Etapa de Educación Primaria.

Tal y como regula el artículo 17 de la Ley Orgánica de Educación 2/2006, vigente en la actualidad, uno de los catorce objetivos de Educación Primaria es el siguiente:

> g) Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana.

La presente Ley introdujo las Competencias Básicas[5] , establecidas como un conjunto de habilidades cognitivas, procedimentales y actitudinales que deben ser logradas por todos los alumnos a lo largo de la enseñanza obligatoria.

En Educación Primaria, una de las ocho Competencias es la Competencia matemática[6], la cual implica la identificación de las situaciones cotidianas que precisan elementos y razonamientos matemáticos, así como la aplicación de estrategias de resolución de problemas, tal y como sostiene el RD 1513/2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Primaria.

---

[3] Artículo 21 de la Ley Orgánica de Educación 2/2006: "Al finalizar el segundo ciclo de la educación primaria todos los centros realizarán una evaluación de diagnóstico de las competencias básicas alcanzadas por sus alumnos. Esta evaluación, competencia de las Administraciones educativas, tendrá carácter formativo y orientador para los centros e informativo para las familias y para el conjunto de la comunidad educativa. Estas evaluaciones tendrán como marco de referencia las evaluaciones generales de diagnóstico que se establecen en el artículo 144.1 de esta Ley."

[4] Evaluación general de diagnóstico 2009. Recuperado el 12 de Mayo de 2012 de: http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/evaluaciongeneraldiagnostico/pdf-completo-informe-egd-2009.pdf?documentId=0901e72b8015e34e

[5] En 1997 la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) ya mencionaba las *competencias clave.* En el año 2006 el Parlamento Europeo recomendó a todos los Estados miembros que incorporasen en las enseñanzas obligatorias *ocho competencias* clave, planteadas detalladamente para asegurar la oportuna homologación. Siguiendo sus instrucciones, la Ley Orgánica de Educación (LOE) en 2006, incorpora las Competencias Básicas en el sistema educativo español. Recuperado el 8 de junio de 2012 de :
http://www.edebeinforma.com/por-que-ahora-las-competencias-basicas/

[6] "Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral "(Real Decreto 1513 de 7 de diciembre de 2006).

Analizando de forma exhaustiva y pausada estas impresiones, y teniendo en cuenta la importancia que desempeña el autoconcepto en el rendimiento (Martínez-Otero, 2007), se encuentra entre mis intenciones proporcionar una posible herramienta que consiga mejorar el autoconcepto en matemáticas de los alumnos.

Teniendo en cuenta que los problemas verbales ocupan un lugar esencial en el currículo de matemáticas en Educación Primaria, y que el proceso de resolución de los mismos suele entrañar diversas dificultades para los alumnos, una vía para que se produzca la mejora en el autoconcepto matemático podría ser la contribución docente a que dichas dificultades disminuyesen.

Si estas dificultades en el proceso de análisis y reflexión que son inherentes a la resolución de los problemas se minimizan, es posible que se logre mejorar el autoconcepto matemático en los niños, contribuyendo de esta manera a modificar al alza su rendimiento en la asignatura siendo posible conectar la realidad, su realidad, con las matemáticas.

Para ahondar en el conocimiento de los problemas aritméticos verbales y los procesos cognitivos y afectivos que se ponen en juego en su resolución, se llevará a cabo un estudio sobre la clasificación de los problemas dada en la literatura existente, las dificultades que entrañan para los alumnos, el papel del docente y la relación, si la hubiere, que la resolución eficaz de problemas tiene con el autoconcepto de las matemáticas.

Objetivos

- El **objetivo general** de este Trabajo es
    - Promover una mejora en el autoconcepto matemático utilizando los Problemas Aritméticos Verbales.

Para alcanzar dicho objetivo general, se pretenden los siguientes **objetivos específicos**:

- Profundizar en el conocimiento de las diferentes clasificaciones de los problemas aritméticos verbales.
- Revisar bibliografía existente acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje en la resolución de los problemas verbales.
- Identificar los errores más frecuentes cometidos por los alumnos en el proceso de resolución de los problemas.
- Plantear una herramienta que sirva como elemento de diagnóstico del nivel de autoconcepto en matemáticas que presentan los alumnos de 4º de Primaria.
- Valorar posibles mejoras en el rendimiento de los alumnos en el proceso de resolución de los problemas verbales tras ofrecer diversas estrategias específicas.
- Contribuir a que los alumnos de Educación Primaria logren una adecuada comprensión en la resolución de los problemas aritméticos verbales.

Fundamentación de la metodología

Con la finalidad de conseguir la información necesaria para indagar en los aspectos y dificultades que se exponen, se llevará a cabo una investigación cuasi-experimental.

Este tipo de investigación es considerada adecuada para los escenarios educativos (Carrasco & Calderero, 2000), ya que en el caso que se presenta no es viable alterar la estructura del grupo ya formado debido a que el centro cuenta con una sola línea.

Dentro de la metodología cuasi-experimental, se emplea el diseño de un solo grupo con pretest y postest. Se trata de una muestra incidental o causal.

Se llevará a cabo un pretest para valorar el autoconcepto matemático en un grupo formado por 28 alumnos de 4º de Educación Primaria. Así mismo, se realizará un pretest para conocer el nivel inicial de rendimiento en la resolución de los Problemas Aritméticos Verbales.

Tras una intervención en la que se llevan a cabo diversas actividades en las que se trabaja con Problemas Aritméticos Verbales, se repetirá el cuestionario de autoconcepto matemático al mismo grupo, así como el postest para valorar el rendimiento tras las sesiones desarrolladas en el aula.

CAPÍTULO 2. DESARROLLO

"El arte más importante del maestro es provocar la alegría en la acción creadora y en el conocimiento"

Albert Einstein

PARTE 1. MARCO TEÓRICO

Existen numerosas acepciones de problema. Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua, un problema es "Cuestión que se trata de aclarar."[7]

Según el matemático George Polya (1969, en Martínez, 2010), "tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata." Es decir, el concepto mismo de problema, entraña cierto grado de dificultad y búsqueda.

Krulik y Rudnik (1980, en Martínez, 2010) definen el problema como "una situación cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma". En este sentido, encontramos la aplicación y utilidad del problema en la enseñanza.

Por tanto se hace preciso facilitar al estudiante la forma de encontrar ese camino y después recorrerlo de forma satisfactoria para llegar a la meta de la resolución del mismo.

Existen diferentes clasificaciones para los tipos de problemas. Nos quedamos con la dada por Abrantes (1989, en Contreras, 1998), dado que nos interesa para el posterior planteamiento del trabajo. Este autor clasifica los problemas en ocho categorías:

Tabla 1. Clasificación de problemas en matemáticas

Clasificación de problemas	
Ejercicios	Enigmas o problemas para descubrir
Problemas Verbales	Problemas de la vida real
Problemas para plantear ecuaciones	Situaciones problemáticas
Problemas para demostrar	Situaciones

Extraída de Contreras, 1998, pp. 95-96

Nuestro interés se centra en los problemas verbales.

Un problema verbal es aquel cuya información viene dada por palabras, por textos con una o varias frases.

[7] Real Academia de la Lengua (2012).Recuperado el 4 de Abril de 2012 de: http://buscon.rae.es/draeI/SrvltConsulta?TIPO_BUS=3&LEMA=problema

Los problemas aritméticos cuyo enunciado es verbal, se denominan Problemas Aritméticos Verbales (en adelante, PAV) (Castro, Rico & Gil, 1992).

Pero el concepto de problema, no tiene sentido por sí solo en la escuela si no lo planteamos desde la perspectiva de la resolución, que se asocia a actividades como la exploración del contexto y la propia formulación del problema, lo que proporciona un nuevo concepto: "situación problemática" (Borasi 1986, en Abrantes et al., 2002).

La escuela debería ser un contexto que enseñe al educando a resolver diversos tipos de problemas, entre los que se encuentran los problemas aritméticos verbales, inmersos en el currículo escolar.

Los PAV y los procedimientos incluidos en su resolución han sido objeto de estudio en diversas investigaciones, existiendo una consideración prácticamente unánime sobre su importancia dentro de la didáctica de las matemáticas. De hecho, para Guzmán (1989), la resolución de problemas son considerados como la parte más importante de la enseñanza matemática.

Los problemas aritméticos constituyen un refuerzo en los contenidos y un medio eficaz para lograr un aprendizaje significativo, tal y como promueve el Constructivismo[8].

Requieren un alto grado de comprensión, de razonamiento y de otras habilidades cognitivas que se deben poner en juego para alcanzar su solución.

Tanto es así, que en la actualidad se sostiene que deben ser introducidos en las aulas anteriormente a los algoritmos, ya que enseñando en primer lugar estos últimos, se enseña-aprende la respuesta con anterioridad a la pregunta.

Parece que en esta afirmación hay un acuerdo de la mayoría de los autores que han realizado investigaciones diversas acerca de esta cuestión.

Aportaremos a continuación, diferentes clasificaciones atendiendo a diferentes características específicas de los PAV.

Clasificación de los problemas aritméticos verbales

Existen varias clasificaciones de problemas verbales en matemáticas atendiendo a diversos factores. Polya (1969) realiza una diferenciación entre problemas de encontrar y problemas de demostrar. Por su parte en Blanco (1993), se sintetizan las aportaciones realizadas por Butts, Charles, Lester y Borasi que realizan la siguiente clasificación: 1) Ejercicios de reconocimiento; 2) Ejercicios algorítmicos o de repetición; 3) Problemas de traducción simple o compleja; 4) Problemas de procesos; 5) Problemas sobre situaciones reales; 6) Problemas de investigación matemática; 7) Problemas de puzzles y 8) Historias matemáticas.

---

8 El Constructivismo es una corriente pedagógica que aúna diferentes tendencias de la investigación psicológica y educativa. Entre ellas se encuentran las teorías de Piaget, Vigotsky, Ausubel, Bruner y la psicología cognitiva.
El constructivismo sostiene que el aprendizaje es un proceso activo por parte del que aprende construido a partir de los conocimientos anteriores. Recuperado el 15 de mayo de 2012 de :
http://www.cca.org.mx/profesores/cursos/cep21-tec/modulo_1/main0_35.htm

Analizando las diferentes clasificaciones existentes en la literatura que nos ocupa, para referirnos a los Problemas Aritméticos Verbales se considera adecuada al contexto la clasificación que propone Bermejo (2004), la cual tiene en cuenta aspectos como la solución, la estructura semántica o la ubicación de la incógnita.

Clasificación en función de la solución

Si se atiende a la solución**,** los problemas pueden ser de una sola respuesta o tener varias posibles, o incluso no tenerla.

Desde este punto de vista, Baroody (1994) establece dos clases de problemas: rutinarios y no rutinarios.

La diferencia entre ambos estriba en que en los problemas rutinarios la incógnita está claramente especificada, ofrecen información suficiente para su resolución, el procedimiento a seguir es evidente y hay una única solución correcta; mientras que los no rutinarios pueden tener varias soluciones posibles, la incógnita puede que no esté especificada, la información es posible que sea insuficiente y por último el procedimiento a seguir puede no estar claro.

Los beneficios que reportan este tipo de problemas en el aula son entre otros, el fomento de la reflexión, la flexibilidad cognitiva y el pensamiento divergente.

Algunos ejemplos de este tipo de problemas no rutinarios son:

"*Javier tiene 6 cromos. Gana algunos más. ¿Cuántos tiene ahora?"*

"Claudia compra 10 caramelos. Le da algunos a Marta y otros a Lucía. Ahora tiene 3. ¿Cuántos caramelos ha regalado a Marta?"

"Inés compra 8 globos. Regala algunos a María. ¿Cuántos globos ha regalado a María?"

Clasificación en función de la estructura semántica

La estructura semántica hace alusión a si existe acción en el enunciado verbal del problema, o si por el contrario, es estático.

Atendiendo a este concepto, la clasificación se llevaría a cabo de la forma que se ilustra teniendo en cuenta las cuatro operaciones básicas de las matemáticas: adición, sustracción, multiplicación y división. Para la estructura aditiva la clasificación que se ha recuperado pertenece a Bermejo (2004); en cambio la que hace referencia a la estructura multiplicativa se ha seleccionado de Castro (2008).

Tabla 2. Clasificación de los PAV en función de la estructura semántica

Adición y sustracción	Multiplicación y división
Cambio	Proporcionalidad simple
Combinación	Comparación multiplicativa
Comparación	Producto cartesiano
Igualación	--------------

A) Problemas verbales correspondientes a la estructura aditiva

En los problemas verbales correspondientes a la adición y la sustracción Heller y Greeno (1979) en Castro et al. (1992), establecen las siguientes categorías de acuerdo con la estructura semántica: Causa/ Cambio, Combinación y Comparación.

Esta clasificación semántica coincide con la realizada por Nesher y Katriel en 1978 (Nesher, 1982 en Castro et al. ,1992). Carpenter, Hiebert & Moser (1981), en Castro et al. (1992), consideran además la categoría de Igualación. Así mismo, Bermejo (2004) recoge las cuatro categorías mencionadas: cambio, combinación, comparación e igualación.

Los problemas de cambio parten de una situación inicial que es modificada para llegar a un nuevo resultado. Si la acción consiste en añadir, el problema es de sumar y si la acción entraña un decremento, el problema será de restar.

Otros autores, como Vergnaud (1982, en Castro et al., 1992), califican a estos problemas con la etiqueta de ETE: estado-transformación-estado o "transformación entre dos medidas".

Atendiendo a la ubicación de la incógnita y si se trata de adición o sustracción, se pueden diferenciar seis tipos diferentes de problemas aritméticos de cambio, representados en la siguiente tabla.

Tabla 3. Categorías de problemas de cambio[9]

Cambio 1	D	D	I	Aumento
Cambio 2	D	I	D	Aumento
Cambio 3	I	D	D	Aumento
Cambio 4	D	D	I	Decremento
Cambio 5	D	I	D	Decremento
Cambio 6	I	D	D	Decremento

Algunos ejemplos de problemas de cambio son:

[9] I= Incógnita y D= datos

Tabla 4. Categorías de problemas de cambio. Ejemplos

Cambio 1	Juan tiene 8 cromos. Gana 5 más. ¿Cuántos cromos tiene Juan ahora?
Cambio 2	Juan tiene 8 cromos. Gana algunos más. Si ahora tiene 13, ¿cuántos cromos ha ganado?
Cambio 3	Juan tiene algunos cromos. Si gana 5 y en total tiene 13, ¿cuántos tenía al principio?
Cambio 4	Juan tiene 8 cromos. Jugando pierde 5. ¿Cuántos cromos tiene ahora?
Cambio 5	Juan tiene 8 cromos. Jugando pierde algunos y en total le quedan 3. ¿Cuántos cromos ha perdido?
Cambio 6	Juan tiene algunos cromos. Si jugando ha perdido 5 y en ahora tiene 3. ¿Cuántos tenía al principio?

Aunque este tipo de problemas se resuelvan en todos los casos por medio de la suma o la resta, no deben presentarse a los alumnos en el mismo nivel, ya que los problemas “Cambio 1” (adición con cantidad final desconocida) y “Cambio 4” (sustracción con cantidad final desconocida), son los primeros que deben enseñarse al iniciar la suma o la resta respectivamente, por entrañar menos dificultad. Esto es debido a que el lugar que ocupa la incógnita plantea una mayor facilidad para los alumnos, tal y como se considera en posteriores apartados relativos a esta cuestión.

Los problemas de combinación aluden a una situación estática, es decir, a partir de dos conjuntos diferenciados se ha de hallar el resultado final. Vergnaud (1982, en Castro et al., 1992) llama a este tipo de problemas “composición de dos medidas”.

En este tipo de problemas, solamente se dan tres categorías, siendo estas aditivas.

Tabla 5. Categorías de problemas de combinación

Combinación 1	
D	D
I	

Combinación 2	
D	I
D	

Combinación 3	
I	D
D	

Ejemplos de los distintos tipos de problemas de Combinación son los siguientes:

Tabla 6. Categorías de problemas de combinación. Ejemplos

Combinación 1	Silvia tiene 4 caramelos. Ana tiene 6. ¿Cuántos caramelos tienen entre las dos?
Combinación 2	En el patio hay 8 alumnos. 5 son chicos y el resto son chicas. ¿Cuántas chicas hay?
Combinación 3	En una cuadra hay 8 caballos. Algunos son marrones y 5 son negros. ¿Cuántos caballos marrones hay?

Los problemas de comparación plantean una relación comparativa entre dos cantidades. La incógnita puede establecerse en la diferencia de los conjuntos comparados, en el referente conocido o en el referente desconocido.

Esta clase de problemas es la que corresponde con la categoría establecida por Vergnaud (1982, en Castro et al., 1992) “relación estática entre medidas”.

Existen seis categorías diferentes, tres relativas a una situación estática de aumento (suma) y tres a una situación estática de decremento (resta).

Tabla 7. Categorías de problemas de comparación

Comparación 1	D	D	I	Aumento
Comparación 2	D	I	D	Aumento
Comparación 3	I	D	D	Aumento
Comparación 4	D	D	I	Decremento
Comparación 5	D	I	D	Decremento
Comparación 6	I	D	D	Decremento

Atendiendo a estos tipos de problemas de comparación, algunos problemas enunciados podrían ser:

Tabla 8. Categorías de problemas de comparación. Ejemplos

Comparación 1 Diferencia desconocida	Sara tiene 8 cuadernos y Bea tiene 5 cuadernos. ¿Cuántos cuadernos tiene Sara **más que** Bea?
Comparación 2 Referente desconocido	Sara tiene 8 cuadernos. Tiene 3 **más que** Bea. ¿Cuántos cuadernos tiene Bea?
Comparación 3 Referente conocido	Sara tiene 6 cuadernos. Bea tiene 3 cuadernos **más que** Sara. ¿Cuántos cuadernos tiene Bea?
Comparación 4 Diferencia desconocida	Sara tiene 3 lápices. Bea tiene 8 lápices. ¿Cuántos lápices tiene Sara **menos que** Bea?
Comparación 5 Referente desconocido	Sara tiene 4 lápices. Tiene 2 **menos que** Bea. ¿Cuántos lápices tiene Bea?
Comparación 6 Referente conocido	Sara tiene 7 lápices. Bea tiene 3 **menos que** Sara. ¿Cuántos lápices tiene Bea?

Los problemas de igualación se diferencian de los de comparación, en que en ellos se lleva a cabo una acción dinámica cuyo objeto es igualar las dos cantidades presentadas, cambiando una de ellas. De nuevo se pueden establecer seis categorías en función de la ubicación de la incógnita y de si la acción implica adición o sustracción: igualación desconocida, igualar conjunto conocido, igualar conjunto desconocido (aumento); igualación desconocida, igualar conjunto conocido, igualar conjunto desconocido (decremento).

Tabla 9. Categorías de los problemas de igualación

Igualación 1	D	D	**I**	Aumento
Igualación 2	D	**I**	D	Aumento
Igualación 3	**I**	D	D	Aumento
Igualación 4	D	D	**I**	Decremento
Igualación 5	D	**I**	D	Decremento
Igualación 6	**I**	D	D	Decremento

En función de estas categorías, se presentan los siguientes ejemplos:

Tabla 10. Categorías de problemas de igualación. Ejemplos

Igualación 1 Igualación desconocida	Pablo tiene 8 globos y Pedro tiene 5 globos. ¿Cuántos globos necesita Pedro para tener **los mismos** globos que Pablo?
Igualación 2 Igualar conjunto conocido	Pablo tiene 4 globos. Si le dan 3 globos más tendría **los mismos** que Pedro. ¿Cuántos globos tiene Pedro?
Igualación 3 Igualar conjunto desconocido	Pablo tiene 8 globos. Si a Pedro le dieran 4 globos tendría **los mismos** que Pablo. ¿Cuántos globos tiene Pedro?
Igualación 4 Igualación desconocida	Pablo tiene 8 cromos y Pedro tiene 4 cromos. ¿Cuántos cromos tendría que perder Pablo para tener **los mismos** cromos que Pedro?
Igualación 5 Igualar conjunto conocido	Pablo tiene 8 cromos. Si perdiese 5 cromos, tendría **los mismos** cromos que Pedro. ¿Cuántos cromos tiene Pedro?
Igualación 6 Igualar conjunto desconocido	Pablo tiene 3 globos. Si Pedro perdiese 4 cromos tendría los mismos que Pablo. ¿Cuántos cromos tiene Pedro?

Se han analizado los tipos de problemas aritméticos verbales correspondientes a la suma y a la resta, teniendo en cuenta su estructura semántica y la ubicación de la incógnita. A continuación se exponen los PAV relativos a la multiplicación y la división.

B) Problemas verbales correspondientes a la estructura multiplicativa

Es al final del segundo ciclo de Educación Primaria (la temporalización puede variar dependiendo de los decretos curriculares de las Comunidades Autónomas) cuando se comienza a introducir en las aulas la multiplicación, en concreto con la enseñanza de las tablas de multiplicar.

Entre el primer y el segundo ciclo, los alumnos deben haber aprendido a multiplicar y dividir. Estos conceptos les permitirán de nuevo resolver una gran variedad de problemas que tengan lugar en su vida cotidiana.

Estas operaciones se consideran relacionadas al igual que la suma y la resta: la una es la inversa de la otra tal y como se presenta en la figura 1.

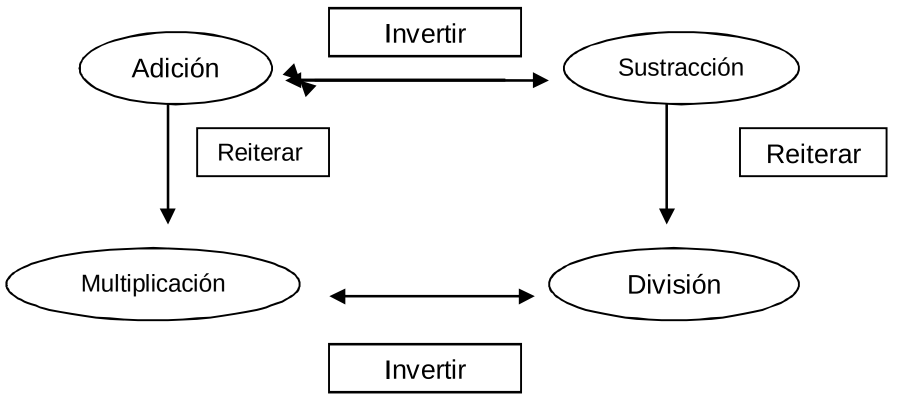


Figura 1. Relación entre las cuatro operaciones básicas. (Castro, 2008, p. 213)

Los problemas de estructura multiplicativa de acuerdo a su estructura semántica, se pueden clasificar en las siguientes categorías:

Problemas de proporcionalidad simple. Indican una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes, es decir, al aumentar o disminuir una de ellas, la otra lo hace en la misma proporción. Se pueden expresar con "cada" y "por", según las siguientes variantes de problemas de proporcionalidad simple.

Se exponen los siguientes ejemplos.

Tabla 11. Categorías de problemas de proporcionalidad simple. Ejemplos
.

Expresión verbal →	**"cada"**	**"por"**
Multiplicación	Javier tiene 3 paquetes de cartas. **Cada** paquete contiene 30 cartas, ¿cuántas cartas hay en total?	Javier compra 4 chicles **por** hijo. Si tiene 5 hijos, ¿cuántos chicles compra en total?
División partitiva	Javier tiene 3 paquetes de cartas iguales. Si en total hay 90 cartas, ¿cuántas cartas hay en **cada** paquete?	En una familia hay 5 hijos. El padre compra 20 chicles, ¿cuántos chicles **por** niño hay?
División cuotitiva o de medida	Javier compra varios paquetes de cartas de 30 **cada** uno y en total tiene 90 cartas, ¿cuántos paquetes de cartas ha comprado?	Javier compra 4 chicles **por** hijo. En total ha comprado 20 chicles, ¿cuántos hijos tiene?

Problemas de comparación multiplicativa. Pueden considerarse como una extensión de la comparación aditiva.

En ellos intervienen una cantidad referente, una cantidad comparada y un escalar o factor de comparación.

Su clasificación hace referencia a tres tipos de problemas de comparación multiplicativa:

Tabla 12. Categorías de problemas de comparación multiplicativa. Ejemplos

Expresión verbal ➞	**"veces más que"** (aumento)	**"veces menos que"** (disminución)	**"veces tanto como"**
Comparado desconocido	Javier ha encestado 6 canastas. Marcos 4 veces más que él, ¿cuántas canastas ha encestado Marcos?	Javier ha encestado 24 canastas. Marcos 4 veces menos que él, ¿cuántas canastas ha encestado Marcos?	Javier ha encestado 6 canastas. Marcos ha encestado 4 veces tantas canastas como Javier, ¿cuántas canastas ha encestado Marcos?
Escalar desconocido	Javier ha encestado 6 canastas y Marcos 24, ¿cuántas veces más ha encestado Marcos que Javier?	Javier ha encestado 24 canastas y Marcos 6, ¿cuántas veces menos ha encestado Marcos que Javier?	Javier ha encestado 24 canastas y Marcos 6, ¿cuántas veces ha encestado Javier tantas como Marcos?
Referente desconocido	Javier ha encestado 24 canastas, que son 4 veces más de las encestadas por Marcos, ¿cuántas canastas ha encestado Marcos?	Javier ha encestado 6 canastas, que son 4 veces menos de las encestadas por Marcos, ¿cuántas canastas ha encestado Marcos?	Javier ha encestado 24 canastas, que son 4 veces tantas canastas encestadas por Marcos, ¿cuántas canastas ha encestado Marcos?

<u>Problemas de producto cartesiano.</u> Hacen alusión a aquellos donde se trata de averiguar todas las combinaciones posibles por parejas de unos objetos de un conjunto con los de otro conjunto.
Existen dos tipos de problemas de producto cartesiano:

Tabla 13. Categorías de problemas de producto cartesiano. Ejemplos

Se conocen los valores a combinar	Carmen tiene 15 camisetas y 6 faldas. ¿De cuántas maneras las puede combinar para vestirse?
Se desconoce el valor a combinar	Carmen tiene 15 camisetas que al combinarlas con las faldas que tiene le permiten 90 maneras diferentes de vestirse. ¿Cuántas faldas tiene Carmen?

Clasificación en función de la ubicación de la incógnita

El lugar que ocupa la incógnita plantea en qué parte del enunciado del problema se encuentra aquello que se necesita aclarar.
Dependiendo de dónde se ubique, la resolución de los problemas será considerada más asequible o más compleja por parte de los alumnos.

<u>En los problemas de estructura aditiva</u>, dentro de las categorías de cambio y combinación plantearán más dificultades aquellos problemas aritméticos verbales que no contengan la incógnita en la pregunta final (Castro et al., 1992).

El orden de menor a mayor dificultad coincide con lo que se representa a continuación:

Tabla 14. Ubicación de la incógnita de menor a mayor dificultad

D ± D = **I**	D ± **I** = D	**I** ± D = D

Sin embargo, en las categorías de comparación aditiva y de igualación, los problemas que mayor complejidad representan son aquellos en los que se trata de hallar el referente.

<u>En los problemas de estructura multiplicativa</u>, dentro de la categoría de comparación, los problemas de comparado desconocido entrañan menor grado de dificultad que los de referente desconocido y escalar desconocido.
Es oportuno conocer la clasificación de los PAV, pues si bien su utilidad e importancia para la vida cotidiana en el niño suelen apreciarse por los docentes de matemáticas en Educación Primaria, es difícil encontrar unidad en cuanto a la terminología y las diferentes categorías entre los mismos.
La resolución de problemas tal y como se ha señalado anteriormente, ocupa un lugar destacado en el currículum de la Primaria, por tanto el conocimiento de lo que conlleva en sí mismo dicho proceso se convierte en una cuestión fundamental por parte del maestro que imparte la materia, ya que a través de los problemas se pretende que el alumno construya conocimiento matemático, conectando el mismo con la realidad.

Resolución de problemas

Si se plantea la pregunta "¿qué es resolver un problema?", se puede argumentar que se trata de realizar una serie de acciones para llegar a una solución. Sin embargo, esta sería una versión simplificada de lo que entraña en sí la resolución de problemas.

Brownell, (1942, en Contreras, 2009) realiza una definición holística de Resolución de Problemas[10], englobando a los principales agentes que intervienen en dicho proceso, esto es, contexto, tarea y sujeto.

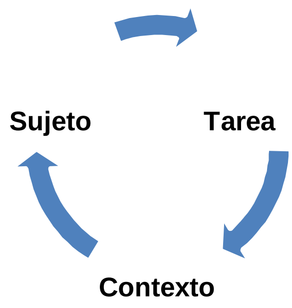


Figura 2. Proceso de resolución de problemas. Componentes principales

Estos elementos se deben tener presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas en la escuela. Desde esta perspectiva pedagógica, cabe mencionar a Kilpatrick (1985) citado por Contreras (2009), el cual establece que el proceso de resolución de problemas se entiende como un proceso de:

- Ósmosis: se caracteriza por una repetición de ejercicios, desestimando la capacidad de problemas no escolares. El autor afirma que "Ningún programa de formación en Resolución de Problemas tendrá éxito si tiene efectos negativos sobre las actitudes y la creencias de los estudiantes".
- Memorización y desarrollo de estrategias algorítmicas que se emplean en situaciones semejantes.
- Imitación, por ejemplo a los modelos que recogen las características para ser un buen resolutor de problemas.
- Cooperación: discutir, negociar, conocer los procedimientos y razonamientos de otros.

[10] "La resolución de problemas se refiere a) exclusivamente a tareas perceptivas y conceptuales, b)cuya naturaleza puede comprender el sujeto por razón de su naturaleza original, de su aprendizaje previo o de la organización de la tarea, pero para la cual no conoce de momento ningún medio de satisfacción.(d) El sujeto experimenta perplejidad en la situación problemática, pero no excesiva confusión...La resolución de problemas se convierte en el proceso por el que el sujeto se desembaraza de su problema... Así definido, podemos considerar los problemas situados en una zona intermedia de un continuo que abarca desde el "enigma", en un extremo, hasta la totalmente familiar y comprensible situación en el otro." (p.416).

- Reflexión, ya que se aprende haciendo y pensando acerca de lo que se hace y lo que ya se ha hecho, es decir, conocer cómo aprendo (metacognición).

El proceso en sí mismo, engloba habilidades cognitivas y afectivas que deben ser conocidas y valoradas por el profesor, de tal manera que guíe y oriente dicho proceso.

En definitiva, los problemas se pueden considerar como una excelente herramienta para ayudar al alumno a aprender a aprender, autorregulando sus aprendizajes.

Una manera de estimular la metacognición y autoevaluación del proceso de resolución de problemas es ofrecer a los niños una tabla donde recoger sus impresiones, como la que se ilustra a continuación:

Tabla 15. Fases para realizar la resolución de problemas (Bermejo, 2004, p. 235)

1. PLANIFICAR	Debo pensar antes de responder y seguir los siguientes pasos
2. LEO EL PROBLEMA DESPACIO	Lo repito en voz alta con mis palabras
3. BUSCO LA INFORMACIÓN IMPORTANTE	- ¿Qué datos conozco? - ¿Qué me piden?
4. DECIDO	¿Qué operación debo aplicar?
5. ESTIMACIÓN	¿Cuál creo que será el resultado?
6. REALIZO LA OPERACIÓN	
7. COMPROBAR EL RESULTADO	Leo de nuevo el problema. ¿El resultado responde a la pregunta?
8. AUTOVALORACIÓN	- Lo he hecho bien ¡Fenomenal! - Lo debo volver a intentar. La próxima vez seguro que lo conseguiré

Con frecuencia este proceso se lleva a cabo con errores por diversas cuestiones que se analizarán en el siguiente apartado. Sin embargo, en el proceso de enseñanza-aprendizaje un error no debe ser percibido como un obstáculo, sino que debe considerarse como una oportunidad de aprendizaje significativo para el alumno, tal y como afirmó Jean Piaget (1969).

Errores y dificultades de aprendizaje

No todos los problemas aritméticos verbales entrañan la misma dificultad. Por ello, se debe seguir una secuencia lógica teniendo en cuenta los conocimientos previos de los alumnos y su estadio evolutivo. Además, el docente ha de contar con las diferencias interindividuales existentes en el grupo.

Interviniendo en el aula de esta manera, parece lógico que se logre un mayor porcentaje de éxito por parte de los escolares al enfrentarse a la resolución de los mismos.

Errores más frecuentes

Para Rico (1995) un error es "un conocimiento deficiente e incompleto". Si el objeto de enseñanza-aprendizaje es lograr que los alumnos alcancen unos conocimientos verdaderos y significativos, los errores de los escolares deben ser identificados por parte del docente con el fin de que sean sustituidos por conocimientos que garanticen el andamiaje con el contenido previo, y por tanto tenga un carácter satisfactorio en cuanto a rendimiento.

Los errores en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas han sido objeto de múltiples investigaciones, y dentro de estos, aquellos que aluden a los problemas aritméticos verbales.

En 1979, Radatz (en Rico, 1995) estableció diversas categorías de los errores a partir del procesamiento de la información, lo cual se considera estrechamente vinculado a los problemas verbales, ya que una parte relevante para conseguir resolverlos acertadamente, es procesar la información de manera adecuada.

Estas categorías son la que a continuación se detallan en la siguiente tabla:

Tabla 16. Categorías de errores a partir del procesamiento de la información

Errores debidos a dificultades de lenguaje
El aprendizaje del vocabulario y símbolos propios del lenguaje matemático está lleno de errores, por ello, la resolución de los problemas verbales es más susceptible de entrañar dificultades que lleven a cometer errores en su ejecución.
Errores debidos a dificultades para obtener información espacial
Existen diferencias individuales relativas a la capacidad de representación espacial, visual e icónica de los conceptos matemáticos que dan lugar a diversos errores.
Errores debidos a un aprendizaje insuficiente de hechos, destrezas y conceptos previos
Hacen referencia al aprendizaje incompleto en cuanto a los procedimientos y contenidos propios de las tareas matemáticas. Incluye deficiencias en el conocimiento de algoritmos, hechos numéricos, símbolos y conceptos necesarios.
Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento
Cuando se tiene una experiencia previa con problemas similares, el conocimiento procedimental se transforma en conocimiento declarativo, propinando así cierta rigidez de pensamiento y falta de

fluidez para procesar la información que se presenta en nuevos problemas. Dentro de estos errores, se encuentran los errores por perseveración, errores de asociación, errores de asimilación, errores de interferencia y errores de transferencia negativa a otras tareas.
Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes
Ocurren frecuentemente cuando se aplican con éxito reglas o estrategias parecidas en contenidos diferentes.

Extraída de Radatz (1979, en Rico, 1995, p. 13)

Otra clasificación de los errores más frecuentes es la que realiza Bermejo (2004), quizá más concreta que la anterior en cuanto a estar más centrada en los aspectos de los problemas que a nosotros nos interesa.

Según diversas investigaciones, los errores están relacionados con los niveles, es decir, cada curso es propicio a cometer sus errores específicos. Sin embargo este tipo de errores no está relacionado con la categoría semántica de los problemas.

Para el autor, los errores típicos más frecuentes cometidos por los escolares en el proceso de resolución de los PAV se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 17. Errores más frecuentes en los PAV. (Bermejo, 2004, pp.66-67)

Se repite una de las cantidades que ofrece el problema
Según el autor, este error tiene lugar porque el alumno no comprende la relación partes-todo, así en el enunciado "María tiene 4 cromos más que Ana", el alumno puede afirmar que "María tiene 4 cromos", sin tener en cuenta el resto del problema.
Interpretación de las palabras clave
A la hora de analizar y comprender el problema, hay determinadas palabras que se consideran clave para decidir el tipo de operación que se debe realizar para hallar la solución correcta. Estas palabras pueden inducir a error a la hora de interpretar los datos. Por ejemplo, en "María tiene 8 cromos. Tiene 5 <u>más</u> que Ana. ¿Cuántos cromos tiene María?, el alumno relaciona <u>más</u> con aumento, es decir, con suma, en lugar de la resta, que sería la operación correcta en este problema verbal.

Transformación del problema
Este error trata de transformar un problema *no-canónico en su forma canónica*, resultando así más fácil de resolver. Por ello, cuando la incógnita en los problemas aditivos se sitúa en otro lugar que no sea la pregunta final, tienden a reubicar la misma donde para ellos resulte menos complicado.
Inventar la respuesta
Es más frecuente en los primeros cursos, cuando el alumno no comprende el problema o no está motivado para abordarlo. El profesor es consciente de este error cuando pregunta al alumno qué estrategia o procedimiento ha empleado para llegar a dicha conclusión.

Dificultades en la resolución de problemas aritméticos verbales

En muchas investigaciones acerca de los problemas aritméticos verbales se ha prestado especial atención al lenguaje, ya que para poder resolver eficazmente un problema verbal, este ha de ser comprendido.

Para lograr pasar esta primera fase con éxito, se hace especial hincapié en tres aspectos: habilidad lectora, legibilidad de los textos y factores lingüísticos (Castro et al., 1992).

La comprensión lectora es fundamental para lograr entender el problema en su conjunto, para discernir qué es lo que se pretende solucionar. Colomé, Sans, López-Sala & Boix (2009) afirman que:

> La dificultad en la comprensión lectora probablemente se debe a la interpretación literal de lo que leen, sin saber realizar inferencias o abstracciones, ni relacionar conceptos. Esta dificultad se evidencia más con la edad, cuando el nivel de abstracción requerido aumenta, sobre todo si se trata de material novedoso.

Destacados los principales factores del lenguaje que inciden en la garantía de resolver con éxito los PAV, se establecen los siguientes aspectos relacionados con la dificultad que entrañan los problemas verbales. Estos se pueden entender en función de la estructura semántica, el enunciado verbal, las palabras clave y la ubicación de la incógnita, entre otros.

- <u>Estructura semántica</u>

Los tipos de problemas verbales según su estructura semántica, presentan diferente grado de dificultad al alumno. En los problemas **de adición y sustracción**, algunas investigaciones (Riley et al., 1983, en Castro et al., 1992), determinaron que los problemas que menos dificultades causan son los de cambio, seguidos por los de combinación y en último lugar los de comparación.
Añadiendo la categoría semántica de igualación, esta relación quedaría como sigue: cambio-combinación-igualación y comparación (Bermejo, 2004).
En cuanto a los problemas de **estructura multiplicativa**, el número de éxitos es mayor en los problemas de proporcionalidad simple, seguida de los problemas verbales de comparación multiplicativa. Por último, los que más dificultades plantean a los alumnos son los problemas de producto cartesiano (Castro, 2008).

- <u>Enunciado verbal y Palabras clave</u>

Se debe tener en cuenta que todas las palabras que se encuentran en un enunciado de un problema no desempeñan el mismo papel para llevar a cabo su resolución. Hay palabras o grupos de estas que se consideran clave para determinar qué tipo de operación se debe llevar a cabo. Por ejemplo, la palabra "más" se interpreta como aumento, es decir, como suma. Sin embargo, en ocasiones estas palabras "clave" pueden inducir a error. Si se enuncia el siguiente problema:

"Juan tiene 8 euros y Pepe tiene 22 euros. ¿Cuántos euros más debe conseguir Juan para tener los mismos que Pepe?"

Al utilizar la palabra "más", los niños tienden a sumar, sin pararse a comprender que se requiere realizar una resta para hallar la diferencia.
Este mismo problema, podría no inducir a error si se enunciase de manera diferente. Un ejemplo es el siguiente, en el cual se prescinde de la palabra clave" más":

"Juan tiene 8 euros y Pepe tiene 22 euros. ¿Cuántos euros debe conseguir Juan para tener los mismos que Pepe?"

Otra cuestión es la contextualización. Si se formula el problema de manera significativa para los alumnos, estos tienden a comprenderlo con mayor facilidad[11].

---

[11] Se ha experimentado con un grupo–clase de tercero de primaria formado por 22 niños la importancia de la contextualización a la hora de trabajar los PAV. Del total del grupo, 20 no comprendieron el enunciado del siguiente problema:

"Compramos un producto por 635 euros. ¿Por cuánto hemos de venderlo para ganar 135 euros?"

"Un producto" es abstracto, el alumno no experimenta la situación. Además, la mayoría de los alumnos restaron la cantidad porque no comprendieron el problema, asociaron "vender" a decremento, es decir, a la resta, poniendo de manifiesto además la importancia de la relación de las palabras clave a las operaciones que los alumnos suponen que han de realizar.

- Ubicación de la incógnita

El lugar que ocupa la incógnita tiene influencia directa sobre la dificultad que entraña la resolución de problemas.

En los problemas de adición, los alumnos suelen considerar más fáciles aquellos problemas cuya incógnita se encuentra en el resultado, siendo más dificultosos aquellos que presentan la incógnita en el segundo sumando, incrementándose esta si está en el primer sumando.

Ejemplificando lo expuesto, la relación quedaría de la siguiente manera:

"María tiene 5 caramelos. Le dan 4 más. ¿Cuántos tiene ahora?"

"María tiene 5 caramelos. Le dan algunos más y ahora tiene 9. ¿Cuántos le han dado?"

"María tiene algunos caramelos. Si le dan 4 y en total tiene 9, ¿cuántos tenía al principio?"

Se deben tener en cuenta las diversas investigaciones realizadas en cuanto a las dificultades que plantean los problemas aritméticos verbales para llevar a cabo una adecuada intervención, teniendo en cuenta que cada niño es único y que las dificultades en un alumno y en otro pueden variar, así como las estrategias que son utilizadas.

Una ayuda sin duda en el aula es partir de la matemática informal del niño, de sus intereses y experiencias, y formular los problemas en un lenguaje claro y contextualizado.

El papel del profesor

El proceso de aprendizaje es un proceso activo por parte del que aprende y que se da en un contexto social. Dewey (1963, en AA.VV. 2005, *Guía Inter*), subraya que el aprendizaje es una construcción colectiva de conocimientos que ha de estar estrechamente unida a las experiencias de los estudiantes y sus entornos. De esta manera, aprender debe ser algo realmente significativo para el que aprende.

Siguiendo con estos principios propios del Constructivismo, corriente pedagógica que afirma que el conocimiento no se descubre sino que se construye, parece lógico admitir la relevancia del hecho de partir de las experiencias y conocimientos previos del alumno en el proceso de enseñanza-

---

Para que comprendieran el problema, se tuvo que escenificar la situación, cambiando el "producto" por un "estuche": *"Compramos un estuche por 15 euros. ¿Por cuánto hemos de venderlo para ganar 6 euros?"*, simulando la compra y la venta. De esta manera, no encontraron dificultades en la reflexión sobre los datos que el problema aportaba, generalizando el procedimiento empleado en el problema verbal improvisado al que no supieron resolver.

aprendizaje. Es decir, en el área que se trata, el docente debe conocer la matemática informal del alumno ya que este no solo aprende en la escuela.

Partiendo de esta matemática informal, ha de facilitar el proceso de aprendizaje por parte del que aprende para conectar cada uno de los conocimientos previos a los nuevos conocimientos matemáticos, asegurando la implicación del estudiante, ya que como señala la corriente constructivista si se participa de manera activa, se conseguirán aprendizajes significativos.

El maestro, facilitador de los aprendizajes, ha de adquirir un rol de guía y orientador en su proceso de enseñanza. De esta forma, tal y como afirma Palmer (1998, en Morales & Landa, 2004), "los estudiantes aprenden de muy diversas maneras, pero en cualquier situación el profesor posee el poder de crear condiciones que pueden enseñar a sus estudiantes a aprender."

Es un hecho que enseñar bien es una labor compleja, un desafío que requiere un gran esfuerzo por parte del que enseña, por ello las acciones del docente son esenciales en el proceso de comprensión y resolución de los problemas verbales, para lograr una ejecución exitosa por parte de sus alumnos colaborando de esta forma a fomentar una actitud positiva hacia las matemáticas, así como a establecer una conexión entre los contenidos y la vida cotidiana del educando.

Se trata pues de relacionar vida y escuela.

Teniendo en cuenta estas premisas, el trabajo dedicado a la resolución de problemas en el aula se puede llevar a cabo de tres formas: fuera del ámbito de los distintos temas, bien como un tema diferenciado o bien dedicando un tiempo en la sesión de matemáticas a la resolución de problemas (Castro, 2008).

En cualquier caso, constituirán uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas.

Conocimientos previos

"El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia". (Ausubel, Novak & Hanesian, 1983, en Coll et al., 2007).

Como ya se ha mencionado, el primer paso a seguir en el proceso de enseñanza-aprendizaje para que se produzcan aprendizajes significativos es partir de los conocimientos, experiencias e intereses que tiene cada alumno. De esta forma se obtendrá la información necesaria y se podrá alcanzar uno de los objetivos de la educación actual, esto es, la educación personalizada.

La educación personalizada constituye el tipo de educación más adecuada a la naturaleza humana, ya que aúna las exigencias propias de la individualización y de la socialización en la educación, atendiendo a aquello que los alumnos tienen en común como personas, y a aquello que tienen de propio (Carrasco, Javaloyes, Calderero, Muñoz, Jimeno & Castellanos, 2011).

Si se conoce el punto de partida de los alumnos relativo a los contenidos de aprendizaje que se desean abordar, el proceso de enseñanza-aprendizaje se podrá adaptar a las necesidades individuales que se presenten en los mismos.

Al tratar de conocer este estado inicial del proceso de enseñanza-aprendizaje, pueden surgir ciertos interrogantes relativos al qué, cuándo y cómo explorar los conocimientos previos (Coll et al., 2007).
Algunas indicaciones con respecto al primer interrogante, esto es, "qué explorar", el docente ha de conocer los conocimientos previos pertinentes y necesarios para trabajar los nuevos contenidos de aprendizaje que se propone, si bien previamente, ha de determinar cuáles son los conocimientos que reúnen las características mencionadas.
Además de esto, se deben considerar no solo los conceptos, procedimientos o actitudes, sino las conexiones entre estos elementos y cómo se van a relacionar con los nuevos aprendizajes.
Con relación al "cuándo explorar", parece oportuno iniciar la evaluación de los conocimientos previos de manera global al iniciar un curso escolar, al comienzo de una unidad didáctica o bloque de contenidos y en definitiva, en cualquier momento que el docente decida incluir nuevos contenidos y estime la necesidad de valorar lo que conocen sus alumnos a ese respecto. Esta evaluación inicial o evaluación diagnóstica permitirá ajustar los programas a cada alumno, atendiendo a sus necesidades individuales. Una vez realizada, tendrá lugar un nuevo proceso de enseñanza-evaluación diagnóstica-propuesta de enseñanza (Puigdellívol, 2007).
La última cuestión relativa a "cómo explorar" los conocimientos previos disponibles, se puede resolver mediante diferentes maneras. Hay test y pruebas estandarizadas que cumplen dicha función, así como métodos más abiertos y flexibles, como el diálogo o la lluvia de ideas, en los que hay una mayor interacción profesor-alumno.
Por este motivo parece que esta metodología donde se plantean situaciones abiertas en las cuales se fomenta el razonamiento y el pensamiento flexible, es más adecuada si se pretenden seguir los principios del Constructivismo, es decir, la construcción activa del conocimiento por parte del que aprende.
Una vez se ponen de manifiesto los conocimientos disponibles de los alumnos, se deben ofrecer situaciones contextualizadas que tengan sentido para estos.
A esta cuestión hace ya cerca de doscientos años se refirió el famoso pedagogo Pestalozzi[12] (1819) cuando dio por sentada la necesidad de actuar con los niños "a base de explicaciones sacadas de la realidad y no usando reglas abstractas".

Motivación

Etimológicamente, *Motivación* proviene del latín "motus", que significa mover.
Está íntimamente vinculada al interés, a la autoconfianza, al esfuerzo y a la implicación. Desde esta perspectiva, cabe pensar que la motivación hacia la tarea es esencial en el aprendizaje para lograr actitudes favorables y positivas.

[12] Pestalozzi, J.H. (1988). *Cartas sobre educación infantil*. Madrid: Editorial Tecnos.

Según Martínez-Otero (2007), cuando el niño está motivado, afronta la actividad con absoluta implicación, lo cual favorece los buenos resultados escolares. Sin embargo, cuando el alumno está desmotivado presenta unas condiciones negativas para llevar a cabo la actividad con éxito.

Por tanto parece acertado que el docente conozca que la labor académica del alumno además de capacidad, requiere de esfuerzo y de una tendencia autoperfectiva (Martínez-Otero, 2007).

Para conseguir que el alumno esté motivado, el docente debe crear un clima en el aula favorable al aprendizaje, fomentando a su vez la confianza y la seguridad.

En el tema que se aborda, la resolución de los PAV, lleva implícito asumir riesgos, ya que constituyen una tarea que exige pensar, reflexionar y posibilidades de equivocarse. Si el alumno se siente seguro tendrá más autoconfianza y como consecuencia mayor motivación hacia la actividad.

Una tarea especialmente interesante es que los alumnos formulen sus propios problemas para que sean resueltos en clase por sus compañeros. De esta forma, se está potenciando el desarrollo de la actividad cognitiva ya que es una fuente de reflexión, autorregulación y motivación.

¿Cómo enseñar a resolver problemas?

Se ha especificado la importancia del papel del profesor en la resolución de los PAV, siendo necesario que el docente asuma y valore su importancia en el desarrollo cognitivo y afectivo del educando, empleando diversas estrategias para que los aprendizajes sean significativos.

A la hora de enfrentarse en el aula a la enseñanza del proceso de resolución de los PAV, existen diferentes autores que han determinado tras varias investigaciones cuáles son las fases que un alumno debe llevar a cabo para realizar la tarea con éxito.

Uno de ellos es George Polya (1969), el cual estimó que el núcleo fundamental de la actividad matemática es la resolución de problemas. Según el autor la acción del enseñante es determinante para conseguir que los estudiantes logren convertirse en expertos resolviendo problemas.

Para orientar el proceso de resolución de los problemas típicos escolares, Polya (1969, en Llanos, 2011) estableció cuatro pasos que pueden ser utilizados por el maestro de matemáticas de Educación Primaria en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula. Estas cuatro fases son:

1. Comprender el problema
2. Concebir un plan
3. Ejecutar un plan
4. Examinar la solución obtenida

Para que los alumnos puedan entender dicho proceso, es conveniente según apunta el célebre matemático que se les planteen preguntas y sugerencias en cada una de las fases:

- Fase 1. Comprender el problema. En este paso del proceso es fundamental hacer pensar al alumno sobre los datos que nos proporciona el problema, teniendo en cuenta cuál es la pregunta y dónde está ubicada la incógnita. Para ello en los primeros años de la etapa, una estrategia a desarrollar es que los alumnos realicen un esquema tipo al que se detalla.

> *"En una feria hay 329 bombillas. Si se funden 45 y se colocan 15 más ¿Cuántas bombillas hay luciendo?"*
> *DATOS: Hay 329 bombillas. Se funden 45. Se añaden 15.*
> *PREGUNTA: ¿Cuántas bombillas hay luciendo?*

- Fase 2. Concebir un plan. En esta fase se debe pensar si se han encontrado con un problema similar en alguna ocasión, si el problema se puede enunciar de otra forma o si se puede resolver parte del problema, en el caso de que requiera más de una operación. Tras estos apuntes, se trata de establecer una estrategia, esto es, ¿qué operación se debe emplear para hallar el resultado?

> *"En una feria hay 329 bombillas. Si se funden 45 y se colocan 15 más ¿Cuántas bombillas hay luciendo?"*
> *DATOS: Hay 329 bombillas. Se funden 45. Se añaden 15.*
> *PREGUNTA: ¿Cuántas bombillas hay luciendo?*
> OPERACIÓN: ¿Cuál es la operación que se debe realizar?

- Fase 3. Ejecutar el plan. Lo importante en este momento es que el alumno realice la operación comprobando los resultados.

- Fase 4. Examinar la solución obtenida. Visión retrospectiva.
  Se trata de una fase importante ya que el alumno podrá autoevaluarse y de esta forma regular su propio aprendizaje.
  Consiste en que el alumno se enfrente a la tarea siendo capaz de autovalorar su desempeño, de reflexionar acerca de sus estrategias, de conseguir una autorregulación.
  Si se realiza acertadamente, no solamente se conseguirán beneficios cognitivos sino afectivos y emocionales, ya que la autorregulación tiene que ver con la autoestima.
  Por consiguiente, la secuencia terminaría de esta forma:

> *"En una feria hay 329 bombillas. Si se funden 45 y se colocan 15 más ¿Cuántas bombillas hay luciendo?"*
> *DATOS: Hay 329 bombillas. Se funden 45. Se añaden 15.*
> *PREGUNTA: ¿Cuántas bombillas hay luciendo?*
> OPERACIÓN: ¿Cuál es la operación que se debe realizar?
> SOLUCIÓN: Una vez se ha obtenido la solución, se debe verificar el resultado.

Estas fases clarifican el proceso a seguir por los alumnos, dotándoles de unas sencillas pautas que facilitarán la resolución de los problemas aritméticos verbales, así como el fomento de la reflexión, la identificación de sus conocimientos y por consiguiente, la metacognición.

Materiales y recursos didácticos

Los materiales y los recursos didácticos son aquellos objetos que se emplean para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas o de cualquier otra disciplina. Si se han diseñado con fines educativos se llaman materiales didácticos. Si no ha sido así, se trata de recursos (Castro, 2008).

El empleo de ambos es de especial importancia en la enseñanza de las matemáticas, por ser una disciplina que reúne diversos conceptos abstractos que requieren del uso de la estrategia denominada modelado directo[13] por parte de los escolares.

En la escuela se puede contar con una serie de materiales didácticos como las regletas de Cuissenaire, los bloques de Dienes, juegos, calculadoras, softwares específicos y ábacos, entre otros. Sin embargo, cualquier objeto se puede considerar recurso para enseñar y aprender matemáticas. Esto depende de la disponibilidad en el momento y de la creatividad del profesor.

No obstante, tal y como señala Castro (2008), el uso de estos objetos considerados como recursos, debe ser tratado por los docentes con prudencia si aún no se tiene constancia de los efectos en el aula por parte de otros docentes.

Deben ser usados teniendo en cuenta que son solo un medio para conseguir algo, no un fin en sí mismos. Si no producen un aprendizaje fructífero, se debería evitar su utilización, ya que el objetivo no es que el alumno aprenda el uso de los distintos materiales, sino el aprendizaje de las matemáticas.

En el proceso de resolución de los problemas aritméticos verbales el uso de los recursos y materiales sirve de especial ayuda a los alumnos para comprender el enunciado del problema y la operación que deben realizar.

Se ha comprobado que hay problemas que cuando se leen por primera vez, aun realizando una adecuada lectura comprensiva, el alumno no es capaz de hallar el procedimiento correcto para encontrar la solución.

Si el enunciado se modeliza, esto es, se representa con un recurso o material didáctico adecuado, ocurre que en la mayoría de los casos el problema se resuelve con facilidad porque se comprende, se "ve". De forma paulatina, una vez realizado este trabajo manipulativo, se podrá pasar a otros recursos más elaborados de representación matemática.

[13] La estrategia denominada "modelado directo" suele ser la primera estrategia utilizada por los escolares a la hora de resolver problemas aritméticos verbales. Consiste en utilizar dedos u objetos para representar los sumandos (Bermejo, 2004, p. 62).

Es conveniente el uso de distintos materiales y recursos didácticos en el aula para abordar la enseñanza –aprendizaje del proceso de resolución de los PAV, ya que la diversidad de estos permite alcanzar ciertas ventajas, entre las que se encuentran las siguientes[14]:

- Desarrollo de la creatividad.
- Desarrollo de diversas estrategias para abordar los problemas.
- Permiten la adaptabilidad de las matemáticas a las características personales de cada alumno.
- Mejora de la actitud hacia las matemáticas, logrando un mejor autoconcepto matemático en los niños.

Autoconcepto matemático en Educación Primaria

El autoconcepto es un componente esencial de la personalidad. Puede definirse como “la evaluación que el individuo hace y que generalmente mantiene con respecto así mismo. Expresa una actitud de aprobación y desaprobación e indica la medida en que el sujeto se cree capaz, importante, exitoso y valioso” (Martínez-Otero, 2007).

Autoconcepto y autoestima, son conceptos diferentes que están estrechamente vinculados ya que dependen el uno del otro. Es decir, si el individuo tiene una percepción de sus cualidades, aptitudes y características positiva, el valor que se atribuye como persona será más elevado.

El autoconcepto, siguiendo el modelo Jerárquico-Multidimensional creado por Shavelson, Hubner & Stanton (1976, en Martínez-Otero, 2007), incluye cuatro dimensiones. Estas son: autoconcepto académico, autoconcepto social, autoconcepto emocional y autoconcepto físico.

En el desarrollo del autoconcepto general y en el académico en particular, la escuela adquiere gran importancia en la etapa escolar del niño, ya que el autoconcepto se construye en interacción social y el alumno en esta etapa mantiene un gran número de relaciones sociales con los profesores y con los iguales.

Diversas investigaciones manifiestan que lo que piensa el niño sobre sus posibilidades y capacidades depende en gran medida de las expectativas que el docente tiene hacia él. (Rosenthal & Jacobson, 1980 en Martínez-Otero, 2007).

Dentro de las áreas de conocimiento del sistema educativo, especial relevancia tienen las matemáticas en cuanto a la trascendencia que el autoconcepto puede desempeñar en los alumnos dentro de la Educación Primaria.

[14] “Materiales didácticos en Matemáticas”. Consultado el 14 de junio de 2012 en http://www.slideshare.net/yosoyarual/materiales-didacticos-de-matemtica

Autoconcepto matemático

Dentro del autoconcepto académico que el alumno tiene, propiciado por los profesores, compañeros y padres, se encuentra el autoconcepto matemático.

El autoconcepto matemático puede entenderse como “la percepción que tiene una persona sobre su capacidad de obtener resultados positivos en el aprendizaje de matemáticas” (Arteaga, 2006).

Las matemáticas presentan una importante carga social. Se tiene por costumbre añadir la etiqueta de “niño listo” a aquel alumno que obtiene un buen rendimiento en matemáticas, y por el contrario, si el escolar no resuelve con fluidez las tareas propias de la asignatura, socialmente se estima que no sobresale en capacidad cognitiva.

Aunque tradicionalmente se han estudiado las relaciones entre el rendimiento en matemáticas y los aspectos cognitivos de los alumnos, desde hace unos años se tiene en cuenta la influencia de las emociones que se dan en los éxitos y fracasos con los resultados obtenidos en matemáticas.

Cuando los resultados no son buenos, la respuesta que se obtiene de los alumnos, suele ser “que las matemáticas son difíciles”. Es cierto que constituyen una disciplina que requiere de esfuerzo y de estrategias cognitivas de orden superior, sin embargo, esto es así para todos los alumnos.

Y aunque hay algunos que tienen una mayor capacidad, hay otros que disponen de una actitud positiva y una vivencia emocional hacia las matemáticas que hace superar los posibles obstáculos para obtener éxitos.

Según Gómez-Chacón (2000) se debe diferenciar entre actitud matemática y actitudes hacia las matemáticas.

La primera hace referencia a lo cognitivo, al modo en el que se emplean las capacidades mentales para realizar trabajos en matemáticas. La segunda alude al aspecto afectivo, al interés y valoración hacia la materia y hacia su aprendizaje.

Cuando se tiene un autoconcepto matemático negativo, nace de la dificultad o del rechazo. Esto se refiere a la actitud hacia las matemáticas.

Este autoconcepto se va desarrollando en función del éxito o del fracaso en las diversas actividades de matemáticas, así como con la interacción con los profesores, iguales y padres.

Según Gómez-Chacón (2000, en Gil, Guerrero, & Blanco, 2006), el entramado de creencias y percepciones relativas al autoconcepto es una de las variables que más determina el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

De esta forma se pone de manifiesto la integración de la perspectiva afectiva y cognitiva a las situaciones de enseñanza-aprendizaje, tal y como señala Gómez- Chacón (2000), a pesar de que en ocasiones los aspectos afectivos del escolar se dejen de lado.

La autora afirma que las emociones intervienen en el aprendizaje de manera significativa ya sea facilitándolo o a modo de obstáculo, entendiendo que las dificultades encontradas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas pueden tener su origen en las actitudes que tienen los alumnos hacia la asignatura.

Es por ello esencial que se promueva desde el aula un conjunto de creencias y valoraciones positivas en el alumno hacia las matemáticas. Esto es, el autoconcepto matemático.

PARTE 2. MARCO EMPÍRICO

En este apartado se expone de manera sintetizada la investigación que se ha llevado a cabo. Partiendo de la exposición de los problemas e hipótesis que se han planteado, se detalla la muestra seleccionada, la definición de las variables e instrumentos y el análisis de los resultados obtenidos.

Planteamiento del problema de investigación

Las investigaciones realizadas en los últimos años ponen de manifiesto que el autoconcepto es un factor determinante en la regulación de la conducta humana.

Dentro de este autoconcepto general, nos ocupamos del autoconcepto académico y en concreto del autoconcepto de las matemáticas como punto de partida para la investigación realizada.

El autoconcepto es un constructo que predice el rendimiento escolar (Nuñez & González-Pienda, 1994, en Peralta & Sánchez (s.f.)). Y así mismo el rendimiento determina el autoconcepto. Por tanto se podría decir que autoconcepto y rendimiento se influyen mutuamente.

Dentro de la matemática, materia en la que socialmente se identifica un buen rendimiento con signo de una gran capacidad cognitiva, el autoconcepto académico es especialmente relevante.

Uno de los aspectos de dicha área que más dificultades presenta, es el que hace referencia a los trabajos que se abordan desde el punto de vista curricular en la resolución de los Problemas Aritméticos Verbales, ya que los enunciados con los que los niños se encuentran resultan en ocasiones complejos y abstractos.

Estos obstáculos cognitivos y afectivos que los niños deben superar cuando se presentan las dificultades en el proceso de resolución de los PAV, a veces no son salvados, produciendo frustración y sentimiento de incapacidad.

Estas emociones pueden provocar el hecho de que el autoconcepto matemático del alumno no sea positivo, incidiendo de manera negativa en su rendimiento escolar.

Hipótesis

Hipótesis 1: Sobre la mejora del autoconcepto matemático

Se espera que tras proporcionar a los alumnos una guía que les facilite el proceso de resolución de los PAV, y trabajar diferentes actividades y estrategias que permitan mejorar este proceso para salvar dificultades que habitualmente encuentran en esta tarea, se produzca una mejora en su autoconcepto matemático.

Hipótesis 2. Sobre la mejora del rendimiento en la resolución de los PAV

Se espera que dando algunas pautas para llevar a cabo el proceso de resolución de los PAV, los alumnos tendrán menos dificultades a la hora de abordar los mismos, mejorando así su rendimiento.

Muestra

La muestra seleccionada pertenece al Colegio Nuestra Señora de la Consolación. Es un centro concertado católico situado en Quintanar de la Orden (Toledo), cuya entidad titular es la Congregación de las Hermanas de Nuestra Señora de la Consolación, institución religiosa católica (ver Anexo I).

Corresponde a un grupo de 28 alumnos de 4º de Educación Primaria – 14 niños y 14 niñas-, tratándose de una muestra incidental o causal al disponer el centro de una sola línea y haber seleccionado la misma de manera intencionada para realizar el trabajo de investigación.

Metodología

La metodología empleada es la denominada cuasi-experimental. Dentro de esta metodología, se ha empleado el diseño de un solo grupo con pretest y postest.

Se llevará a cabo un pretest para valorar el autoconcepto matemático en la muestra seleccionada. Así mismo, se realizará un pretest para medir el nivel de rendimiento inicial en el proceso de resolución de los problemas.

Tras una intervención de 5 sesiones en la que se llevan a cabo diversas actividades en las que se trabaja con Problemas Aritméticos Verbales, se repetirán el cuestionario relativo al autoconcepto matemático y el postest para evaluar el rendimiento, permitiendo así valorar si las variables comentadas han experimentado alguna modificación.

Variables e instrumentos

Las variables que encontramos en la investigación hacen referencia a los alumnos, siendo estas las siguientes:

► Nivel

Variable que nos dice en qué curso se encuentran los alumnos con los que se ha llevado a cabo la investigación. En este caso, el nivel o curso es 4º de Educación Primaria.
Es una variable cuantitativa discreta.

► Autoconcepto matemático

El autoconcepto matemático es la percepción que una persona tiene sobre su capacidad de obtener unos resultados positivos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Para su medición se ha utilizado el cuestionario de autoconcepto matemático (Anexo III), diseñado por Gairín (1990)[15] y modificado por Arteaga (2006). A su vez, se ha adaptado al contexto de la muestra.

► Rendimiento en la justificación del proceso de resolución de los PAV

Al trabajar durante varias sesiones las pautas que deben seguir los alumnos para resolver con éxito los PAV, esta variable hace referencia a la mejora de rendimiento a la hora de justificar los pasos, operaciones y resultados de los PAV trabajados.

En cuanto a los instrumentos utilizados, se recogen en el Anexo III, IV y V respectivamente, siendo los siguientes:

- Cuestionario de autoconcepto matemático.
- Prueba para evaluar el rendimiento en la resolución de los PAV.
- Registro anecdótico de las sesiones que se han llevado a cabo en el aula.

Planificación de las sesiones. Cronograma

Con la finalidad de poder verificar las hipótesis formuladas, se han desarrollado 5 sesiones de trabajo en el aula encaminadas principalmente a mejorar el rendimiento en el proceso de resolución de los Problemas Aritméticos Verbales, ahondando en diferentes aspectos considerados relevantes para alcanzar tal fin.
El desarrollo de las sesiones así como el registro anecdótico de lo sucedido en el aula se muestran en el Anexo V.
Cada una de las sesiones ha sido programada minuciosamente contemplando diversos objetivos y contenidos, los cuales se muestran a continuación en la Tabla 18.

[15] Gairín, J (1990). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre educación matemática*. Barcelona: Boixerau Universitaria, en Arteaga, B. (2006). *La Educación Adaptativa: Una propuesta para la mejora del rendimiento en matemáticas de los alumnos de enseñanza secundaria obligatoria*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid, España.

Anterior al trabajo de aula se han mantenido dos reuniones, una con el director pedagógico[16] y otra con el tutor del grupo.

Tabla 18. Planificación de las sesiones

SESIONES	OBJETIVOS	CONTENIDOS
Reunión con el Director Pedagógico 2 -05-2012	- Informar de los objetivos y los contenidos de la investigación - Recibir la aprobación para llevar a cabo el trabajo	
Reunión con el tutor de 4º de Educación Primaria 3-05-2012	- Informar de los objetivos y los contenidos de la investigación - Establecer el calendario de sesiones	
Primera sesión 14-05-2012	-Cumplimentar el cuestionario de autoconcepto matemático - Comenzar a guiar a los alumnos en el proceso de resolución de los PAV[17] - Realizar la evaluación inicial del rendimiento	- Breve introducción sobre las actividades programadas - Explicación del cuestionario - Pautas para llevar a cabo el proceso de resolución de los PAV
Segunda sesión 16-05-2012	- Comenzar a trabajar problemas siguiendo los pasos indicados en la sesión anterior - Resaltar la importancia de marcar los datos - Reescribir el problema con sus propias palabras (comprensión) - Modelizar situaciones reales	- Identificación de los datos - Reescritura del problema con sus propias palabras - Modelización de situaciones reales
Tercera sesión 21-05-2012	- Familiarizarse con el lenguaje que encuentran en los PAV - Ahondar en el proceso de traducción del lenguaje verbal al matemático - Representar el problema gráficamente	- Traducción del lenguaje verbal al matemático -Representación gráfica de los problemas
Cuarta Sesión 28-05-2012	- Favorecer la reflexión, el razonamiento y la autoevaluación	- Estrategias para lograr una autoevaluación y autorregulación
Quinta sesión 29-05-2012	- Cumplimentar el cuestionario (postest) -Evaluar el estado final en el rendimiento en los PAV	- Breve síntesis sobre los trabajos desempeñados a lo largo de las sesiones

[16] En el centro educativo donde se ha realizado la investigación hay dos directores: una Directora Titular de la Institución Religiosa y un Director Pedagógico que se ocupa de las tareas propias del centro escolar.

[17] Se entrega a los alumnos una guía con el fin de orientarles en el proceso de resolución de los PAV. Ver Anexo VI.

Análisis de los datos

Debido a la metodología utilizada, se ha llevado a cabo un análisis comparativo de los datos obtenidos en los pretest y en los postest relativos al autoconcepto matemático, y al nivel de rendimiento en la resolución de los PAV.

◙ Sobre la mejora del autoconcepto matemático

"Se espera que tras proporcionar a los alumnos una guía que les facilite el proceso de resolución de los PAV, y trabajar diferentes actividades y estrategias que permitan mejorar este proceso para salvar dificultades que habitualmente encuentran en esta tarea, se produzca una mejora en su autoconcepto matemático."

Para la comprobación de esta hipótesis, se ha realizado una prueba para medir el autoconcepto matemático a través de un cuestionario específico (ver Anexo III). Este cuestionario se utilizó antes y después de la intervención.

Consta de 16 ítems con tres tipos de respuesta: "Sí", "No", "A veces", definiéndose de la siguiente forma:

0: Valoración negativa (No); 1: Valoración algo positiva (A veces); 2: Valoración más positiva (Sí).

Los ítems son los siguientes:

1. Tengo muchas dudas cuando hago ejercicios de matemáticas
2. En clase de matemáticas me iría
3. Procuro cuidar bien mi libro de matemáticas
4. Cuando hago los deberes de matemáticas me olvido de ir a jugar
5. Me gustan de verdad las matemáticas
6. Me divierten las clases de matemáticas
7. Las clases de matemáticas se hacen muy pesadas
8. No me interesan las matemáticas
9. Me alegro que por las tardes no haya clase de matemáticas
10. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de matemáticas
11. Si pudiera quitar una clase sería la de matemáticas
12. Me siento mal cuando pienso en matemáticas
13. El estudio de las matemáticas es muy importante para mi vida
14. Me gusta hacer trabajos y problemas de matemáticas
15. Paso mucho tiempo estudiando matemáticas
16. Las matemáticas no sirven para nada

De los 16 ítems se han recodificado los siguientes: 1,2, 7, 8, 9, 11,12 y 16, tomando como intención el poder calcular una medida global del cuestionario, a través de la suma de los resultados de los distintos ítems.

- ***Resultados pretest/ postest. Moda***

- En el pretest, en 13 de los ítems la moda es 2, es decir, la valoración más positiva.
- En el postest se alcanza la moda 2 en 14 de los ítems. Las tablas descriptivas del pretest y del postest se pueden ver en el Anexo VII.

- ***Resultados pretest /postest. Porcentajes***

Se ha valorado de manera porcentual el tipo de respuestas tanto en el pretest como en el postest. Los resultados en cada uno de los ítems se muestran en el Anexo VII. En líneas generales, el autoconcepto se ha mantenido a nivel individual en casi todos los ítems.

Destacar la mejora individual del ítem 1: “Tengo muchas dudas cuando hago ejercicios de matemáticas”.

Los resultados totales de las variaciones que se han obtenido de los resultados obtenidos en el pretest y el postest, se representan en el siguiente gráfico, siendo “M”: Mejora; “I”: Igual; “E”: Empeora.

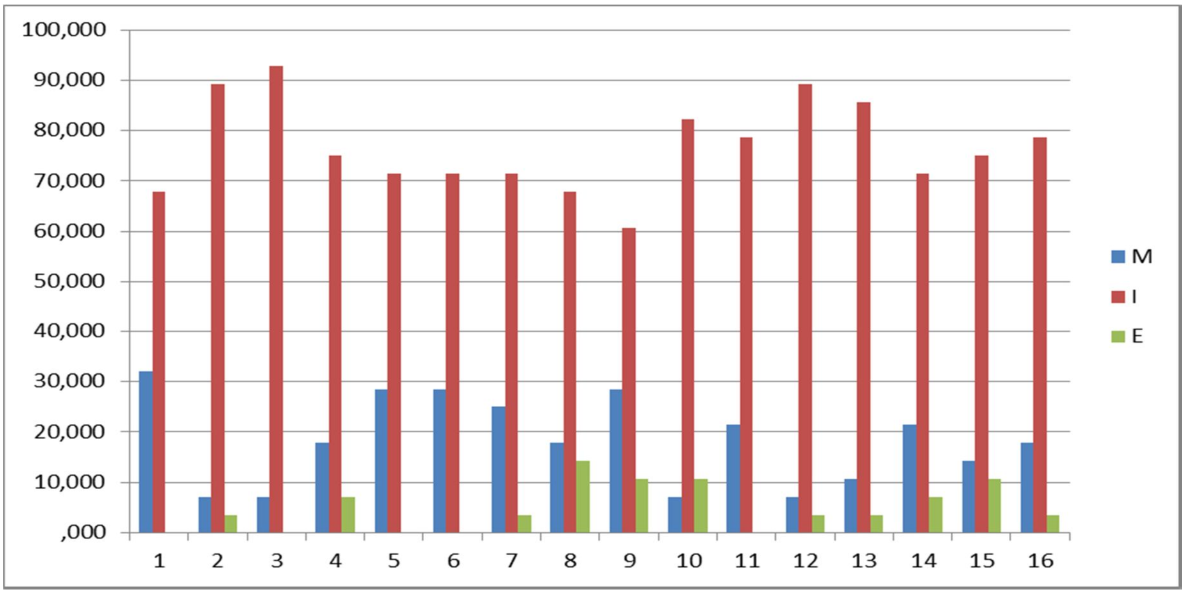


Gráfico 1. Autoconcepto. Diferencia porcentual pretest/ postest

- ***Resultados pretest /postest. Coeficiente de correlación***

El Coeficiente de correlación obtenido es de 0,737, lo que indica una relación positiva entre los resultados de antes y después de la intervención.

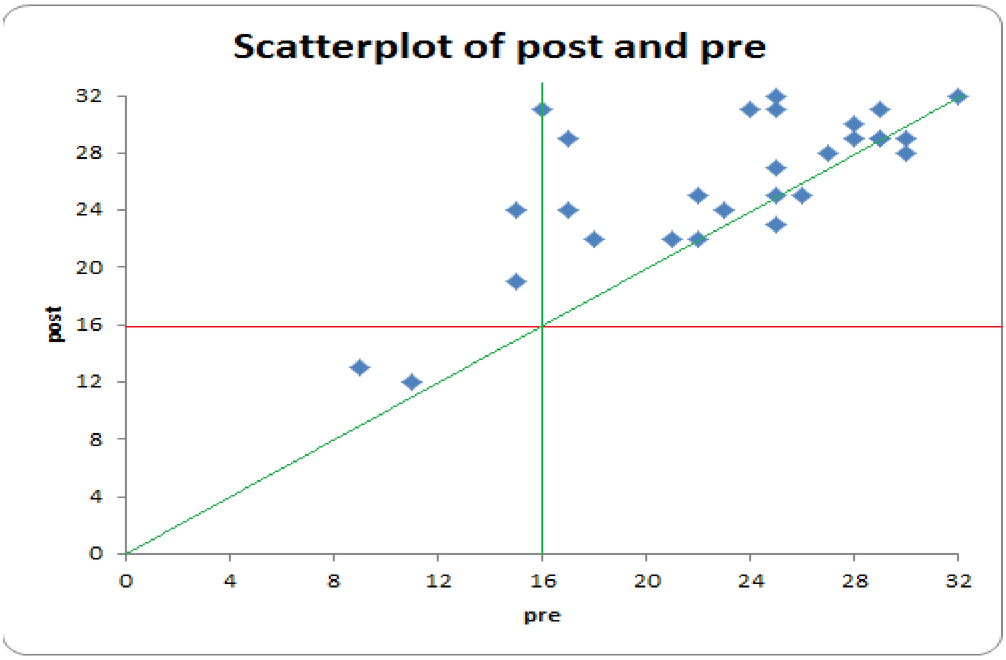


Gráfico 2. Autoconcepto. Coeficiente de correlación

Desde el gráfico podemos comprobar como la mayoría de los estudiantes se sitúan por encima de la bisetriz del primer cuadrante, lo que indica una mejora en los resultados globales del test.

La relación entre el autoconcepto inicial y el autoconcepto final indica una diferencia significativa. Tras una media de 22,964 conseguida en el pretest, se ha obtenido una media de 25,929 en el postest.

La variabilidad ha disminuido de un 6,095 a un 5,192. Por tanto, los datos globales del test indican una mejora, observada a través de los valores expuestos, y de la tabla y el gráfico que a continuación se presentan:

Tabla 19. Autoconcepto matemático. Comparativa de la media en Prestest/ Postest

	POSTEST	PRETEST
Mean:	25,929	22,964
Std. Dev.:	5,192	6,095
N Pairs:	28	
Mean Difference:	2,964	
SE of Diff.:	,789	
Eta Squared:	,335	
T-Score:	3,756	
P:	,001	

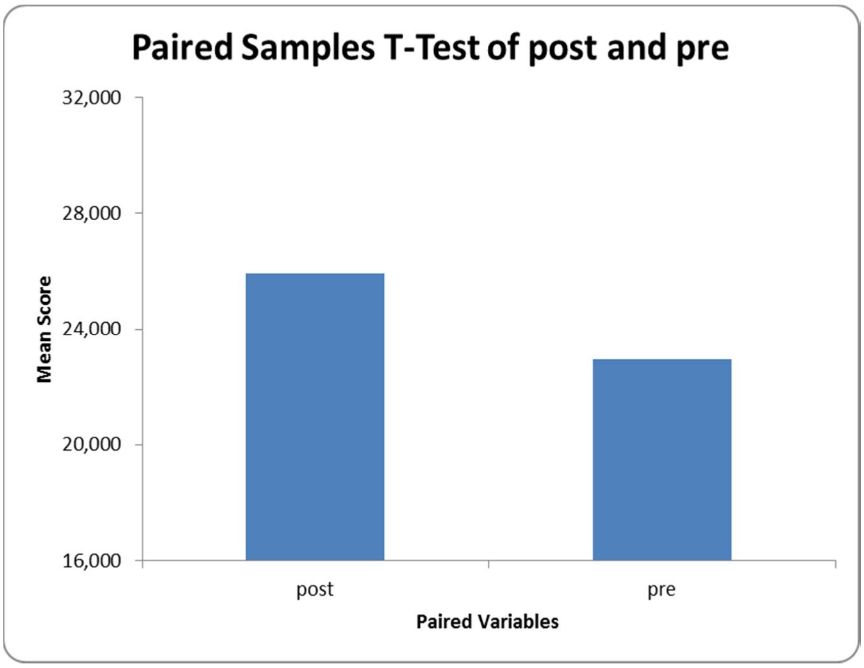


Gráfico 3. Autoconcepto. Comparativa de la media

De acuerdo a los resultados del contraste, tenemos una diferencia significativa entre los datos correspondientes al autoconcepto, antes y después de la intervención.

◙ Sobre la mejora del rendimiento en la resolución de los PAV

"Se espera que dando algunas pautas para llevar a cabo el proceso de resolución de los PAV, los alumnos tendrán menos dificultades a la hora de abordar los mismos, mejorando así su rendimiento."

Para verificar esta hipótesis se han utilizado tres problemas verbales, siendo resueltos por los alumnos antes y después de trabajar los pasos que se incluyen en la guía que se ha ofrecido a los niños para que aprendan a ser buenos resolutores de problemas.

Los criterios de evaluación utilizados, han sido seleccionados siguiendo las fases que propone Polya (1969, en Llanos (2011), ya que constituyen una síntesis de la guía de pasos proporcionada.

Los criterios seleccionados se muestran a continuación en la siguiente tabla, así como el valor numérico que se le ha otorgado a cada uno de los ítems. La calificación más alta corresponde al valor "10".

	SI	NO	EN PROCESO	Valor Ítem
1. COMPRENDER EL PROBLEMA				
Identifica los datos				1,4
Conoce cuál es la incógnita				1,4
2. CONCEBIR UN PLAN				
Es capaz de enunciar el problema de forma diferente				1,2
Elige las operaciones adecuadas				1,2
3. EJECUTAR EL PLAN				
Lleva a cabo los pasos correctamente				1,2
4. EXAMINAR LA SITUACIÓN OBTENIDA				
Indica el resultado de forma adecuada				1,2
Verifica el resultado				1,2
Es capaz de autoevaluarse				1,2

Tabla 20. Criterios de evaluación. Rendimiento en la resolución de los PAV

Siguiendo estos criterios y su valor, se ha desarrollado una valoración inicial y posterior acerca del rendimiento en el proceso de resolución de los PAV.

Se han evaluado los tres problemas propuestos (ver Anexo IV) y se ha realizado la media aritmética en las calificaciones obtenidas en la evaluación inicial y en la evaluación final.

- ***Problema 1***: Los resultados han sido satisfactorios, ya que la media se ha incrementado de 5,629 a 7,493 puntos, disminuyendo la variabilidad (desviación típica), de 2,604 a 2,101.
- ***Problema 2***: Los resultados son significativos. La media inicial es de 4,971 y la final de 6,593. En este problema en cambio ha aumentado la variabilidad de 2,395 al 2,716.
- ***Problema 3***: La diferencia entre los resultados de la evaluación inicial a la evaluación final es significativa. La media ha variado de 5,079 a 7,364 y la desviación típica de 2,479 a 2,370.

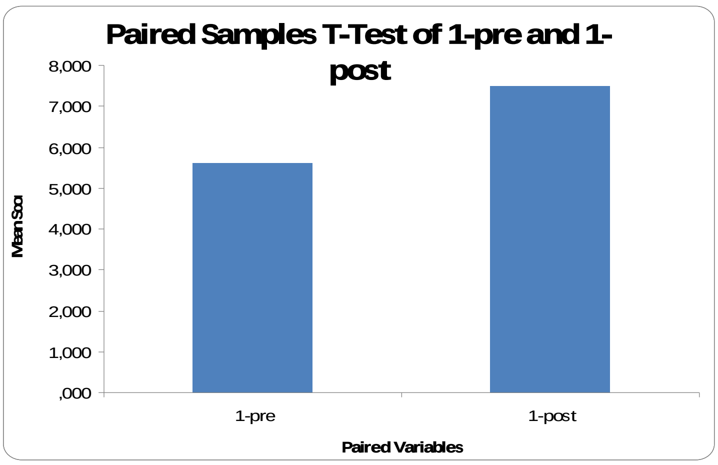


Gráfico 4. Comparativa de la media en problema 1

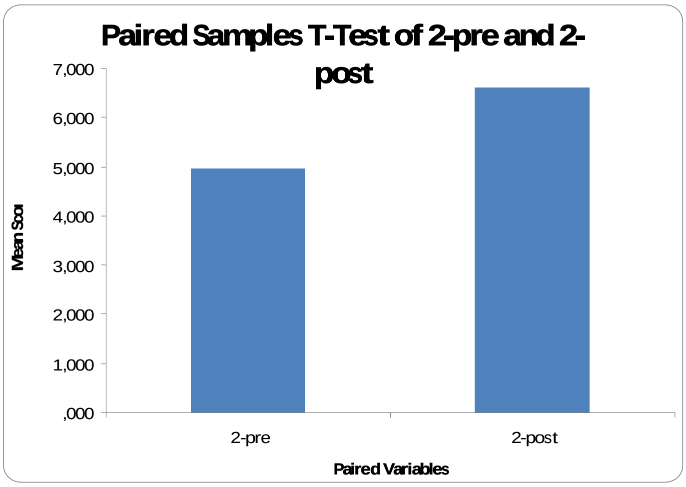


Gráfico 5. Comparativa de la media en problema 2

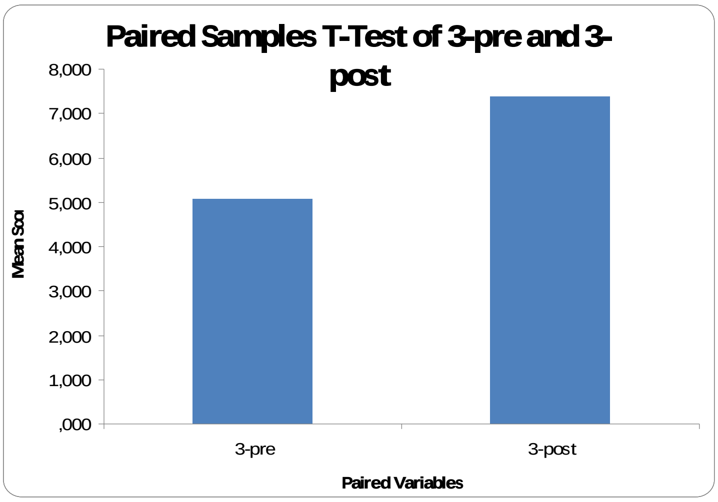


Gráfico 6. Comparativa de la media en problema 3

Si se analiza la media de los resultados obtenidos en los tres problemas propuestos, cabe mencionar que la diferencia es significativa tras realizar las sesiones para lograr la mejora del rendimiento. La media ha variado de 5,226 a 7,150, disminuyendo la variación de 2,286 a 2,207.

Son resultados satisfactorios, comprobando así la hipótesis 2 formulada en la investigación que nos ocupa: se ha mejorado el rendimiento en el proceso de resolución de los PAV en el grupo con el cual se ha trabajado.

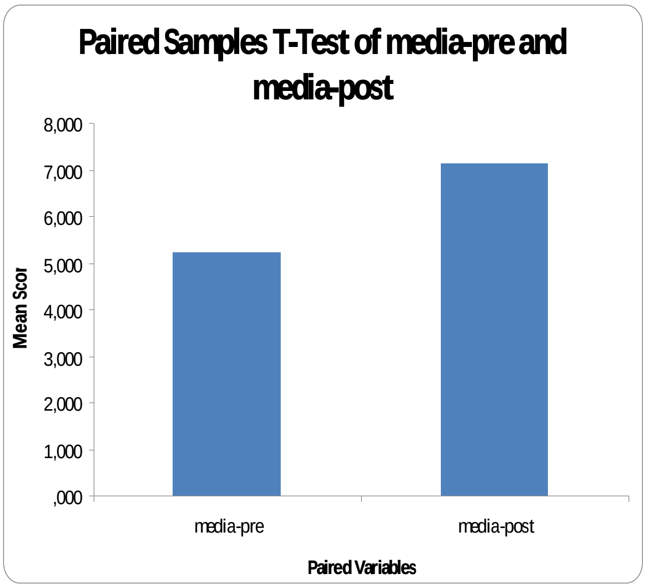


Gráfico 7. Comparativa global de la media en los tres problemas

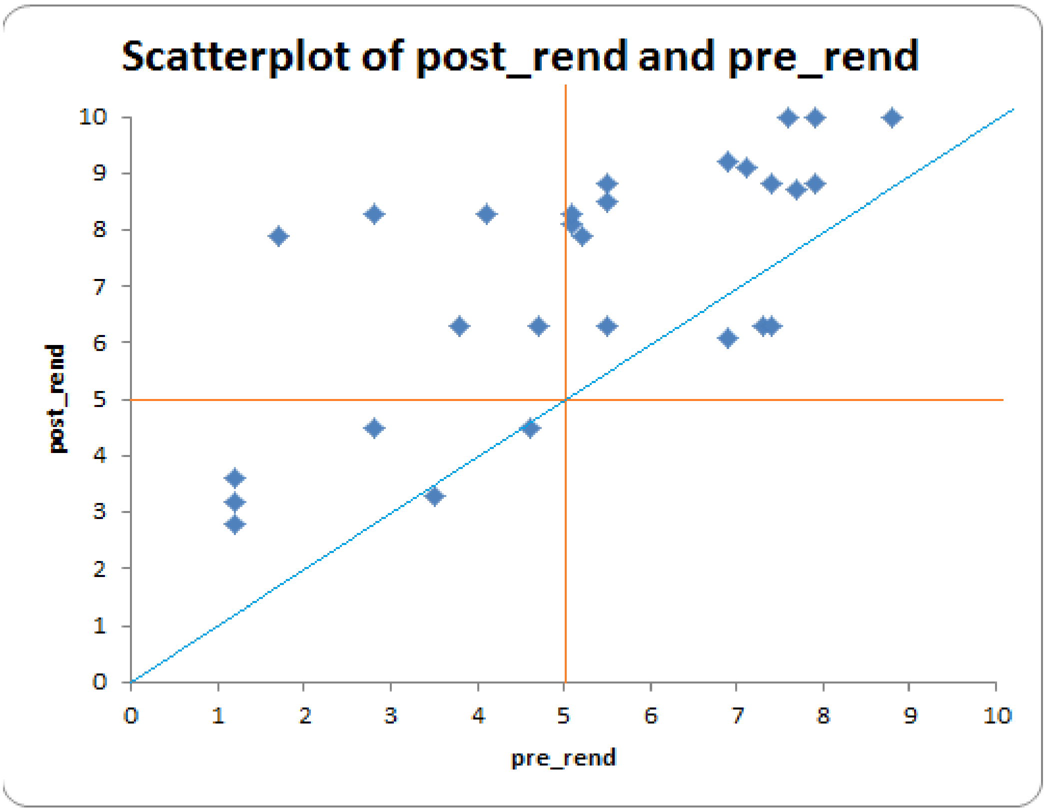


Gráfico 8. Rendimiento. Coeficiente de correlación

Desde el gráfico podemos comprobar como la mayoría de los estudiantes se sitúan por encima de la bisetriz del primer cuadrante, lo que indica una mejora en los resultados globales del rendimiento.

Tabla 21. Rendimiento. Datos del coeficiente de correlación

Pearson Correlation	,702
N	28,000
P	,000

El coeficiente de correlación indica una relación lineal positiva respecto a los resultados de rendimiento antes y después de la intervención.

CAPÍTULO 3. CONCLUSIONES Y PROSPECTIVA

"Persevera y espera un mañana mejor"

Virgilio

Una vez analizados los datos, se plantean en este capítulo las conclusiones y la prospectiva de la investigación realizada, teniendo en cuenta los objetivos propuestos al inicio de este trabajo, así como las propuestas de mejora para futuras investigaciones.

Conclusiones

Siguiendo el orden de los objetivos planteados, las conclusiones halladas son las que siguen:

- ***Profundizar en el conocimiento de las diferentes clasificaciones de los problemas aritméticos verbales.***

Se ha podido comprobar que existe una amplia literatura acerca de las diversas clasificaciones de los problemas en matemáticas. Ahondando en las informaciones obtenidas del estudio que nos ocupa, nos hemos centrado en la clasificación más adecuada al contexto de la Educación Primaria en cuanto a los problemas aritméticos verbales, utilizando la propuesta de Bermejo (2004).

- ***Revisar bibliografía existente acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje en la resolución de los problemas verbales.***

Habiendo llevado a cabo una revisión de la bibliografía aportada por diferentes autores sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en la resolución de los problemas en matemáticas, cabe mencionar que es sin duda un tema que ha suscitado numerosas investigaciones, debido a su relevancia en el desarrollo cognitivo y afectivo de los alumnos y al papel esencial que desempeña en la construcción del aprendizaje significativo de los contenidos matemáticos.

- ***Identificar los errores más frecuentes cometidos por los alumnos en el proceso de resolución de los problemas.***

Se han identificado los errores que más suelen cometer los alumnos en el proceso de resolución de los problemas. Esta información, puede contribuir a cambiar positivamente el proceso de enseñanza-aprendizaje, modificando diversos aspectos susceptibles de mejora a la hora de plantear y enseñar a resolver problemas aritméticos verbales.

- ***Plantear una herramienta que sirva como elemento de diagnóstico del nivel de autoconcepto en matemáticas que presentan los alumnos de 4º de Primaria.***

Se ha logrado este objetivo específico a través de la adaptación de un cuestionario de autoconcepto matemático al contexto de los alumnos de 4º de Educación Primaria.
El cuestionario original y el modificado, se muestran en el Anexo III.

- ***Valorar posibles mejoras en el rendimiento de los alumnos en el proceso de resolución de los problemas verbales tras ofrecer diversas estrategias específicas.***

Tras el análisis comparativo de los datos obtenidos en el pretest y postest relativos al rendimiento inicial y final en la resolución de los problemas, se concluye que este objetivo se ha superado ya que se ha producido una mejora significativa.

- ***Contribuir a que los alumnos de Educación Primaria logren una adecuada comprensión en la resolución de los problemas aritméticos verbales.***

Tras el establecimiento de pautas específicas para comprender el enunciado verbal y traducir el mismo al lenguaje matemático, en la mayoría de los sujetos que representan la muestra se ha logrado una mejor comprensión de los problemas aritméticos verbales.

A través de la consecución de los objetivos específicos expuestos, el objetivo general propuesto en el Trabajo ha sido logrado, siendo éste: ***Promover una mejora en el autoconcepto matemático utilizando los Problemas Aritméticos Verbales.***
Mediante el análisis de datos, se ha podido demostrar que minimizando las dificultades que entrañan para algunos alumnos la resolución de los problemas aritméticos verbales, se ha mejorado en autoconcepto en matemáticas.
Por tanto, se pone en evidencia que la acción del docente mediante estrategias y metodologías adecuadas, es fundamental para promover una mejora del autoconcepto académico y a su vez general del educando, ya que este entramado de creencias y valoraciones que supone el autoconcepto influirá en su rendimiento académico.
En consecuencia, el maestro potenciará un desarrollo funcional adecuado ya que no hay mecanismos cognitivos sin elementos afectivos, atendiendo así la necesidad de formar a niños más seguros, más capaces y más felices.

Cabe destacar que estas conclusiones, no son generalizables a otro contexto y otra situación; dado que la investigación se ha llevado a cabo con una muestra relativamente pequeña, y en un aula determinada.

Prospectiva

Tras la realización de la investigación, cabe mencionar los siguientes aspectos de mejora a tener en cuenta en futuras investigaciones.

- Se ha puesto de manifiesto la importancia que representa la aptitud verbal para resolver con éxito los problemas verbales de matemáticas.
La primera fase del proceso para resolver problemas propuesta por Polya (1969), así como la propuesta por Bermejo (2004), utilizadas en esta investigación, hacen referencia a la comprensión del problema, esto es, del enunciado verbal. Consideramos este primer paso fundamental para lograr transformar el lenguaje verbal en lenguaje matemático.
Por este motivo se propone para futuras investigaciones realizar una prueba de aptitud verbal y relacionarla con la aptitud en la resolución de problemas matemáticos.
Se hace por tanto esencial en este proceso conocer la relación, si la hubiere, entre la aptitud verbal del alumno con la aptitud en la resolución de los problemas en matemáticas.

- Se podría realizar una prueba para valorar los ítems incluidos en el cuestionario para medir el autoconcepto matemático que están relacionados con el rendimiento en matemáticas. Si bien se debe considerar que las pruebas estadísticas que se deben aplicar no son sencillas de entender.

- Se puede plantear una recogida de datos de rendimiento más ajustada a la realidad, ya que los problemas seleccionados para valorar el rendimiento incluyen diversos aspectos a tener en cuenta.

- Valorando que los alumnos con los que se ha trabajado son niños de una edad comprendida entre los 9 y los 10 años, se podrían emplear otras herramientas como el mapa de humor, utilizadas dentro de la matemática emocional planteada por Gómez-Chacón, con el fin de que nos facilite la autoevaluación del estudiante.

- Por último, convendría realizar estudios sobre estadística que permitan mejorar los posibles análisis de datos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes,P., Barba, C., Batlle, I., Bofarull, T., Colomer, T., Fuertes, T., García, J., García, J., Martí, E., Ramos, N., Recarens, E., Segarra, L., Serra, T. & Torra, M. (2002). *La resolución de problemas en matemáticas*. Barcelona: Grao.

Arteaga, B. (2006). *La Educación Adaptativa: Una propuesta para la mejora del rendimiento en matemáticas de los alumnos de enseñanza secundaria obligatoria*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid, España. Recuperado el 15 de mayo de 2012 de: http://www.ucm.es/BUCM/tesis/edu/ucm-t29532.pdf

AA.VV. (2005). *Guía Inter*. Recuperado el 7 de Abril de 2012 de: http://inter.up.pt/inter.php?item=inter_guide

Baroody, A. (1994). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: Editorial CCS.

Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos, *Epsilon* Nº 25*.* pp. 49-60. recuperado el 2 de mayo de 2012 de: http://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/blanco93.pdf

Carrasco, J. & Calderero, J. (2000). *Aprendo a investigar en educación.* Madrid: Rialp.

Carrasco, J.,Javaloyes, J., Calderero, J., Muñoz, M., Jimeno, J. & Castellanos, A. (2011). *Educación personalizada: Principios, técnicas y recursos*. Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. & Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las ciencias, 10,* pp. 243-253. Recuperado el 12 de abril de 2012 de: http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v10n3p243.pdf

Castro, E. (2008). *Didáctica de la matemática en Educación Primaria.* Madrid: Editorial Síntesis.

Coll, C., Martín, E.,Mauri, T.,Mirás, M., Onrubia, J., Solé. I. & Zabala, A. (2007). *El constructivismo en el aula (18ª ed.).* Barcelona: Grao.

Colomé, R., Sans, A., López-Sala, A. & Boix, C. (2009). Trastorno de aprendizaje no verbal: características cognitivo-conductuales y aspectos neuropsicológicos. *Revista Neurol*. *Nº 48 (supl 2*), p. 79. Recuperado el 14 de mayo de 2012 de: http://www.neurologia.com/pdf/Web/48S02/bbS02S077.pdf

Contreras, L. (1998). *Resolución de problemas: un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva, España. Recuperado el 29 de abril de 2012 de: http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2953

Contreras, L. (2009). El papel de la resolución de los problemas en el aula. *Revista electrónica iberoamericana de Educación en ciencia y tecnología*. *Vol. 1*, Nº 1. Recuperado el 13 de mayo de 2011 de: http://www.exactas.unca.edu.ar/riecyt/VERSION%20DIGITAL/Doc%20RIECyT%201-3.pdf

Gil, N., Guerrero, E. y Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista electrónica de investigación psicoeducativa. Nº8. Vol 4(1),* pp. 47-72. Recuperado el 2 de mayo de 2012 de: http://www.investigacion-sicopedagogica.org/revista/articulos/8/espannol/Art_8_96.pdf

Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Guzmán, M. (1989). *Enseñanza de las ciencias y las matemáticas*. Organización de Estados Iberoamericanos. Recuperado el 6 de abril de 2012 de: http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

Informe PISA 2009. Recuperado el 18 de abril de 2012 de: http://www.educacion.gob.es/horizontales/prensa/notas/2010/12/informe-pisa.html

Ley Orgánica de Educación del 3 de mayo de 2006. Publicada en el BOE núm.106 el 4 de mayo de 2006. Recuperado el 10 de abril de 2012 de: http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/loe_boe.pdf

Llanos, L. (2011). Enseñanza del Álgebra y la Resolución de Problemas. Universidad Interamericana de Puerto Rico. *Revista 360º*, Nº 6. Recuperado el 13 de junio de 2012 de: http://cremc.ponce.inter.edu/360/revista360/matematica/Lina%20Llanos-%20Algebra.pdf

Martínez, J. (2010). Resolución de problemas en matemáticas. *Cuadernos de educación y desarrollo.* Vol. 2, Nº 15. Recuperado el 30 de abril de 2012 de: http://www.eumed.net/rev/ced/15/jamp.htm

Martínez-Otero, V. (2007). *La Inteligencia Afectiva: Teoría, Práctica y programa*. Madrid: Editorial CCS.

Morales, P. & Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoría, Vol.13*, pp. 145-157. Recuperado el 15 de mayo de 2012 de: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/299/29901314.pdf

Peralta, F. & Sánchez, M. (s.f.). Relaciones entre el autoconcepto y el rendimiento académico, en los alumnos de Primaria., *Revista electrónica de Investigación Psicoeducativa. Vol.1*, pp. 95-120. Recuperado el 9 de junio de 2012 de: http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/articulos/1/espannol/Art_1_7.pdf

Pestalozzi, J.H. (1988). *Cartas sobre educación infantil*. Madrid: Editorial Tecnos.

Piaget, J. (1969). *Psicología y pedagogía*. Barcelona: Ariel.

Polya, G. (1969). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Puig, L. & Cerdán, F. (1988*). Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis. Recuperado el 2 de mayo de 2012 de: http://www.uv.es/puigl/lpae3.pdf

Puigdellívol, I. (2007). *La educación especial en la escuela integrada. Una perspectiva desde la diversidad (7ª ed.)*. Barcelona: Grao.

Real Decreto 1513/2006 del 7 de diciembre de 2006, publicado en el BOE núm. 293 del 8 de diciembre de 2006. Recuperado el 30 de abril de 2012 de: http://www.boe.es/boe/dias/2006/12/08/pdfs/A43053-43102.pdf

Rico, L. (1995). Didáctica de la Matemática. Licenciatura de Matemáticas. 5º Curso. *Errores en el aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado el 14 de abril de 2012 de: http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF

BIBLIOGRAFÍA

Abramson, M. (2002). *Problemas verbales de matemáticas indoloros*. Nueva York: Barron´s Educational Series.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

ANEXOS

Anexo I. Contextualización del centro donde se ha llevado a cabo la investigación

El centro al que pertenece la muestra seleccionada es el colegio Nuestra Señora de la Consolación. Se encuentra en el municipio toledano de Quintanar de la Orden.

Tiene una extensión de 88,22 km² y un total de 12.831 habitantes. Su distancia a Toledo es de 112 Km y a Madrid de 123 Km.

Cuenta con poca industria, por lo que los habitantes se desplazaban a trabajar a otros pueblos circundantes que se han visto afectados por la crisis del sector de la construcción (sector fabricantes de puertas). Esto ha ocasionado que en la actualidad la tasa de paro esté por encima del 13%.

El centro Nuestra Señora de la Consolación se encuentra situado en la periferia del municipio, en el barrio de San Valentín, cuyos habitantes pertenecen a una clase social y económica media y media baja.

En el ámbito cultural, Quintanar de la Orden es un pueblo que ha ido progresando con el transcurso de los años. Actualmente, cuenta con dos centros educativos concertados donde se imparten enseñanzas de Educación Infantil, Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria; dos centros públicos de Educación Infantil y Primaria; dos institutos de Educación Secundaria Obligatoria, Bachiller y Módulos de formación profesional; un Centro de Atención a la Infancia; un centro de Educación para Adultos; y otro de la U.N.E.D.

Anexo II. Descripción de la situación

Grupo-Clase. Características

El grupo con el cual se va a desarrollar la investigación es 4º de Educación Primaria.

Está compuesto por 14 niños y 14 niñas, siendo un total de 28 alumnos de edades comprendidas entre los 9 y los 10 años.

Es un grupo que manifiesta problemas de convivencia con cierta asiduidad, siendo por lo general muy habladores. Esta situación origina dificultades para atender al profesor, por lo que en ocasiones este ambiente dificulta la marcha de las sesiones.

Tutor del grupo

El tutor acogió con una gran receptibilidad la investigación planteada desde la primera reunión, así como las sesiones que se programaron.

De hecho, participó en la elaboración de los problemas para medir el rendimiento antes y después del trabajo en el aula.

Ha colaborado en todas las sesiones considerando que los objetivos planteados son útiles para el desarrollo cognitivo y afectivo de los alumnos, así como para la mejora del rendimiento en matemáticas.

La comunicación con el tutor ha sido asidua, antes y después de cada una de las sesiones con el fin de intercambiar impresiones y valorar los aspectos susceptibles de mejora.

Anexo III. Cuestionario autoconcepto matemático

4º de Educación Primaria

Marca con una "X" en "Sí" "No" "A veces"

Autoconcepto matemático	SI	NO	A VECES
1. Tengo muchas dudas cuando hago ejercicios de matemáticas			
2. En clase de matemáticas me iría			
3. Procuro cuidar bien mi libro de matemáticas			
4. Cuando hago los deberes de matemáticas me olvido de ir a jugar			
5. Me gustan de verdad las matemáticas			
6. Me divierten las clases de matemáticas			
7. Las clases de matemáticas se hacen muy pesadas			
8. No me interesan las matemáticas			
9. Me alegro que por las tardes no haya clase de matemáticas			
10. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de matemáticas			
11. Si pudiera quitar una clase sería la de matemáticas			
12. Me siento mal cuando pienso en matemáticas			
13. El estudio de las matemáticas es muy importante para mi vida			
14. Me gusta hacer trabajos y problemas de matemáticas			
15. Paso mucho tiempo estudiando matemáticas			
16. Las matemáticas no sirven para nada			

Modificación del cuestionario adaptado al contexto

CUESTIONARIO ORIGINAL[18]	**CUESTIONARIO MODIFICADO**
Me siento poco seguro cuando hago matemáticas	**Tengo muchas dudas** cuando hago **ejercicios de** matemáticas
En clase de matemáticas me iría	En clase de matemáticas me iría
Procuro cuidar bien mi libro de matemáticas	Procuro cuidar bien mi libro de matemáticas
Cuando estoy estudiando matemáticas me olvido de salir	Cuando **hago los deberes de** matemáticas me olvido de **ir a jugar**
Espero encontrar pronto un amigo que me haga las matemáticas	No se ha incluido
Yo amo de verdad las matemáticas	**Me gustan** de verdad las matemáticas
Me divierten las clases de matemáticas	Me divierten las clases de matemáticas
Las clases de matemáticas se me hacen muy largas	Las clases de matemáticas se hacen muy **pesadas**
Daría dinero a un amigo para que hiciera los ejercicios de "mates"	No se ha incluido
No me interesan las matemáticas	No me interesan las matemáticas
Me gustan los días que no hay clase de matemáticas	Me **alegro que por las tarde**s no **haya** clase de matemáticas
Los que saben matemáticas encuentran un trabajo mejor	No se ha incluido
Estoy dispuesto a hacer muchos ejercicios de matemáticas	Estoy dispuesto a hacer muchos **trabajos** de matemáticas
Si pudiera quitar alguna clase diaria sería la de matemáticas	Si pudiera quitar **una** clase sería la de matemáticas
Me siento mal cuando pienso en las matemáticas	Me siento mal cuando pienso en matemáticas
El estudio de las matemáticas es muy importante para mi vida	El estudio de las matemáticas es muy importante para mi vida
En todas las casas debería haber muchos libros de matemáticas	No se ha incluido
Todos los días pienso mucho en saber más matemáticas	No se ha incluido
Me gusta hacer trabajo y problemas de matemáticas	Me gusta hacer **trabajos** y problemas de matemáticas

[18] Cuestionario autoconconcepto matemático (Gairín, 1990), modificado por Arteaga (2006). A su vez, se ha adaptado al contexto de la Educación Primaria.

No se deberían dar matemáticas en las escuelas	No se ha incluido
Paso mucho tiempo estudiando matemáticas	Paso mucho tiempo estudiando matemáticas
Las matemáticas no sirven para nada	Las matemáticas no sirven para nada

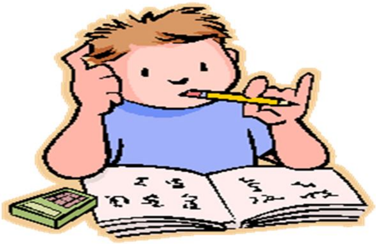
► Se debe tener en cuenta que el cuestionario original ha sido aplicado en alumnos de Educación Secundaria. Por tanto, se ha adaptado el mismo considerando el estadio evolutivo de los niños en el segundo ciclo de Educación Primaria, ya que los alumnos se encuentran en 4º curso.

Se han suprimido algunos ítems por considerarse complejos de entender y se han variado otros, contemplando que son más adecuados para los niños de 9 y 10 años.

Anexo IV. Problemas para medir el rendimiento en la resolución de los PAV

4º EDUCACIÓN PRIMARIA

Fecha:



Alumno número:

1.- Lee estos problemas, elige la solución aproximada de cada uno de ellos y, después, resuelve la operación para comprobar los resultados.

a) La cuarta parte de los 789 alumnos de un colegio han ido al teatro. ¿Cuántos alumnos han ido aproximadamente?
   - 150
   - 200
   - 400

b) Si el precio de cada entrada es de 3 euros, ¿cuánto han pagado en total aproximadamente?
   - 500 €
   - 400 €
   - 600 €

2.- Una caja llena de naranjas pesa 18 Kg y vacía 2.000 gr. ¿Cuántos gramos pesan las naranjas? ¿Cuántos Kg son?

3.- Una familia consume ¼ Kg de queso al día. ¿Cuántos gramos consume en una semana?

Anexo V. Desarrollo de las sesiones

REGISTRO ANECDÓTICO

REUNIONES PREVIAS AL TRABAJO EN EL AULA

Reunión con el Director Pedagógico del centro

Fecha: 2 de Mayo de 2012

Desarrollo de la reunión

Se trata de informar a la dirección del centro donde se va a llevar a cabo la investigación de los objetivos y contenidos de la misma.

Una vez el Director conoce estos datos, da su aprobación para poner en marcha las sesiones programadas.

Reunión con el tutor del grupo

Fecha: 3 de Mayo de 2012

Desarrollo de la reunión

Se explica al tutor cuáles son los objetivos y contenidos de la investigación, informando de que se tiene la aprobación de la Dirección para llevar a cabo la misma.

El tutor expone que tiene el tiempo limitado para acabar la Programación de Aula, por lo que solicita que el calendario de las sesiones programadas sea lo más ajustado posible y que los problemas trabajados sean acordes con los contenidos de la Unidad Didáctica que en ese momento se esté enseñando-aprendiendo.

Se le entrega la programación de las sesiones. Así mismo, éste facilita las dos unidades didácticas que coinciden con el periodo en el cual se van a desarrollar las sesiones.

SESIÓN: Primera

FECHA: 14 de mayo de 2012

OBJETIVOS:

-Rellenar el cuestionario del autoconcepto matemático

-Evaluar el estado inicial del rendimiento

-Comenzar a guiar a los alumnos en los pasos de resolución de los problemas.

Desarrollo de la sesión

1.- Tras una introducción explicativa sobre el cuestionario elegido, se da a los niños el mismo para que lo rellenen.

Están preocupados por si lleva "nota", ante lo cual se expone que no deben indicar su nombre sino un número que se les adjudica y que deben ser totalmente sinceros.
Parecen aliviados.
2.- Una vez cumplimentado el cuestionario, se explica a los niños que vamos a ayudarles a aprender a solucionar problemas de matemáticas con éxito.
Se lleva a cabo una lluvia de ideas donde los niños exponen qué les parecen los problemas, si tienen alguna dificultad en su resolución, etc.
Los primeros minutos de la discusión guiada, las ideas fluyen sin problemas, sin embargo, en torno a los 5 minutos de empezar, comienzan a no respetar los turnos y se dificulta la marcha de la misma.
De esta actividad se desprenden las siguientes ideas principales:
- En líneas generales, los niños prefieren "las cuentas", esto es, los ejercicios de algoritmos, a los ejercicios de problemas.
- Casi todos parecen tener dificultades a la hora de resolver los problemas, dicen que son "difíciles", "que tienen muchas dudas a la hora de elegir la operación", que no "lo entienden".

3.- Se realiza la evaluación inicial del rendimiento en la resolución de los PAV.
4.- Posteriormente, se entrega una guía de pasos que deben seguir para resolver problemas de matemáticas, explicando paso por paso, a la vez que se escuchan y registran sus impresiones.
Cada uno pega su guía en el cuaderno de matemáticas para tenerla a la vista. También se pone una en el tablón de la clase.

SESIÓN: Segunda

FECHA: 16 de mayo de 2012

OBJETIVOS:
- Comenzar a trabajar los problemas siguiendo los pasos indicados en la sesión anterior.
- Resaltar la importancia de marcar bien los datos.
- Reescribir el problema con sus propias palabras
- Modelizar situaciones reales a partir de los contenidos de la unidad que están finalizando (los céntimos y el euro).

Desarrollo de la sesión

1.-Se enseñan productos que generalmente se encuentran en un supermercado, los cuales tienen un precio indicado. Se utiliza unos folletos de publicidad de un supermercado de la localidad.
2.-Por parejas se inventan un problema donde haya al menos tres productos de los que se han mostrado.
3.-Esta pareja pasa el problema a otros dos alumnos que deben dramatizar la situación y encontrar el resultado.

4.-El resto de la clase va anotando los datos para resolver el problema.
5.-Se escogen dos problemas del libro de texto. Se pide a los niños que los reescriban y que analicen los datos. Se llega al resultado observando el proceso.

La modelización les ha gustado. Se han mostrado muy motivados y han trabajado por parejas razonando los pasos. Se observa cómo razonan entre ellos, cuestionándose cuáles son los datos que se deben anotar y cómo.
El tutor se ha mostrado satisfecho con el trabajo.
Cuando se han comenzado ha trabajar los problemas del libro de texto en cambio no se ha percibido la misma motivación e implicación que en la primera parte de la sesión.
De hecho, 4 alumnos no han terminado el trabajo solicitado.

SESIÓN: Tercera
FECHA: 21 de mayo de 2012
OBJETIVOS:
-Familiarizarse con el lenguaje que encuentran en los problemas verbales.
-Ahondar en el proceso de traducción del lenguaje verbal al lenguaje matemático.
-Representar el problema de modo gráfico.

Desarrollo de la sesión
1.-Se forman grupos de 4 alumnos. Se intenta en la medida de lo posible que sean heterogéneos.
2.-Cada uno de los 7 grupos debe inventar un problema utilizando unidades de la magnitud masa.
3.-Se explica a los niños que se va a llevar a cabo un concurso que consiste en resolver los problemas que sus compañeros han enunciado.
4.-El grupo que más problemas haya podido resolver correctamente tendrá un positivo en matemáticas, explicando qué pasos ha seguido para poderlo desarrollar.
5.-El grupo que mejor haya elaborado el problema teniendo en cuenta el lenguaje y los datos que proporciona, así como la pregunta, tendrá un positivo en matemáticas.
6.-Se escoge un problema del libro de texto. Se pide que analicen los datos y que lo reescriban. A continuación se enseña a representar de manera gráfica de forma simple.
7.-Se observa el proceso hasta que encuentran la solución.

En la primera parte de la sesión, los alumnos se han mostrado motivados e implicados. El trabajo en grupo les gusta ya que habitualmente no son agrupados en el aula debido a que son habladores y a los problemas de convivencia que surgen en el transcurso de las clases.
Son dos los grupos que han resuelto bien todos los problemas. Al principio, uno de los grupos no es capaz de inventar ningún problema y pide ayuda al tutor. Finaliza inventado el problema y aunque

de menor dificultad verbal y procedimental que los demás grupos, son capaces de hacerlo, por lo que se muestran satisfechos de haberlo conseguido.

En la segunda parte de la sesión, como ocurrió con la anterior, les cuesta concentrarse y mantener la atención. Realizan el trabajo planteado salvo un alumno.

SESIÓN: Cuarta

FECHA: 28 de mayo de 2012

OBJETIVOS:

-Favorecer la reflexión, el razonamiento y autoevaluación.

Desarrollo de la sesión

-Breve explicación acerca de la decisión a tomar en cuanto a la operación que se debe realizar para hallar la solución, ejemplo ¿Hay que multiplicar o dividir?

-Se escoge un problema inventado con mayor grado de dificultad que los anteriores (que exija un mayor razonamiento) y se analizan los datos. Se reescribe y se representa.

-Se razona acerca de cuál es el plan que se debe seguir.

-Se explica la importancia de revisar el problema reflexionando sobre si la operación realizada es adecuada.

No se puede terminar la sesión, faltando algunas actividades programadas. Se ha llevado a cabo por la tarde y no han atendido. Han estado muy habladores y no estaban receptivos.

Se habla con el tutor y se deja la sesión para el día siguiente por la mañana.

SESIÓN: Quinta

FECHA: 29 de mayo de 2012

OBJETIVOS:

-Favorecer la reflexión, el razonamiento y autoevaluación.

(Continuación de la sesión anterior)

Desarrollo de la sesión

Se comienza poniendo en la pizarra el problema que intentaron resolver sin éxito en la sesión anterior.

- Se explica la importancia de revisar el problema (todos los pasos que se han de realizar) una vez se haya conseguido encontrar la solución.

-Por parejas se corrigen los problemas (se intercambian los cuadernos).

-Se devuelve corregido. Se corrige en voz alta y cada uno valora si ha estado o no acertado en la planificación y resultado obtenido.

- Califica cada uno su problema con notación numérica (del 0 al 10).

SESIÓN: Sexta

FECHA: 30 de mayo de 2012

OBJETIVOS:

- Realizar la evaluación final del rendimiento en la resolución de PAV.
- Rellenar el postest del autoconcepto matemático.

Desarrollo de la sesión

- Se explica que deben resolver tres problemas que entregamos en un folio.
- Se van a corregir entre todos y cada uno debe ponerse nota numérica en función de cómo haya llevado a cabo todos los pasos entregados en la guía y que han aprendido durante las sesiones.
- Conocen los problemas y nos dicen que ya los hicieron.
- Realizan los problemas y se corrigen entre todos.
- Se recogen los folios y a continuación cumplimentan el cuestionario del autoconcepto matemático (postest)

En general, la sesión transcurre sin problemas.

Anexo VI. Guía de pasos para solucionar problemas

PASOS PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS de MATEMÁTICAS

1.-Planificar: **Debo pensar antes de responder y seguir los siguientes pasos:**

2.- Leo el problema despacio **y lo repito en voz alta con mis palabras**

3.- Busco la información importante**:**

*** ¿Qué datos conozco?**

*** ¿Qué es lo que me piden?**

4.- Decido: **¿Qué operación debo aplicar?**

5.- Estimación**: ¿Cuál creo que será el resultado?**

6.- Realizo la operación

7.- Compruebo el resultado**: Leo de nuevo el problema y compruebo que el resultado tiene sentido.**

8.- Autovaloración**:** *** Lo he hecho bien ¡GENIAL!**

***Debo volver a intentarlo. Seguro que lo consigo**

Anexo VII. Resultados. Análisis Estadístico.

PRETEST

	PRE1	PRE2	PRE3	PRE4	PRE5	PRE6	PRE7	PRE8
N Valid:	28	28	28	28	28	28	28	28
N Missing:	0	0	0	0	0	0	0	0
Mode:	1,000	2,000	2,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000

	PRE9	PRE10	PRE11	PRE12	PRE13	PRE14	PRE15	PRE16
N Valid:	28	28	28	28	28	27	27	28
N Missing:	0	0	0	0	0	1	1	0
Mode:	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	1,000	2,000

POSTEST

	POST1	POST2	POST3	POST4	POST5	POST6	POST7	POST8
N Valid:	28	28	28	28	28	28	28	27
N Missing:	0	0	0	0	0	0	0	1
Mode:	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000

	POST9	POST10	POST11	POST12	POST13	POST14	POST15	POST16
N Valid:	28	27	28	28	28	28	28	28
N Missing:	0	1	0	0	0	0	0	0
Mode:	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	1,000	2,000

PRETEST-POSTEST. Autoconcepto matemático.				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
,000	19	67,857	67,857	67,857
1,000	7	25,000	25,000	92,857
2,000	2	7,143	7,143	100,000
rest2				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-2,000	1	3,571	3,571	3,571
,000	25	89,286	89,286	92,857
1,000	1	3,571	3,571	96,429
2,000	1	3,571	3,571	100,000
rest3				

	Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
,000	26	92,857	92,857	92,857
1,000	2	7,143	7,143	100,000
rest4				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-1,000	2	7,143	7,143	7,143
,000	21	75,000	75,000	82,143
1,000	2	7,143	7,143	89,286
2,000	3	10,714	10,714	100,000
rest5				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
,000	20	71,429	71,429	71,429
1,000	6	21,429	21,429	92,857
2,000	2	7,143	7,143	100,000
rest6				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
,000	20	71,429	71,429	71,429
1,000	5	17,857	17,857	89,286
2,000	3	10,714	10,714	100,000
rest7				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-1,000	1	3,571	3,571	3,571
,000	20	71,429	71,429	75,000
1,000	4	14,286	14,286	89,286
2,000	3	10,714	10,714	100,000
rest8				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-2,000	3	10,714	10,714	10,714
-1,000	1	3,571	3,571	14,286
,000	19	67,857	67,857	82,143
1,000	4	14,286	14,286	96,429
2,000	1	3,571	3,571	100,000
rest9				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-2,000	1	3,571	3,571	3,571
-1,000	2	7,143	7,143	10,714
,000	17	60,714	60,714	71,429
1,000	5	17,857	17,857	89,286
2,000	3	10,714	10,714	100,000
rest10				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-1,000	3	10,714	10,714	10,714
,000	23	82,143	82,143	92,857
1,000	2	7,143	7,143	100,000

rest11				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
,000	22	78,571	78,571	78,571
1,000	2	7,143	7,143	85,714
2,000	4	14,286	14,286	100,000
rest12				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-1,000	1	3,571	3,571	3,571
,000	25	89,286	89,286	92,857
2,000	2	7,143	7,143	100,000
rest13				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-1,000	1	3,571	3,571	3,571
,000	24	85,714	85,714	89,286
1,000	2	7,143	7,143	96,429
2,000	1	3,571	3,571	100,000
rest14				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-1,000	2	7,143	7,143	7,143
,000	20	71,429	71,429	78,571
1,000	5	17,857	17,857	96,429
2,000	1	3,571	3,571	100,000
rest15				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-1,000	3	10,714	10,714	10,714
,000	21	75,000	75,000	85,714
1,000	4	14,286	14,286	100,000
rest16				
	Frequency	**Percent**	**Valid Percent**	**Cumulative Percent**
-2,000	1	3,571	3,571	3,571
,000	22	78,571	78,571	82,143
1,000	2	7,143	7,143	89,286
2,000	3	10,714	10,714	100,000