



Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología

Grado en Física

Resolución de ecuaciones en derivadas parciales aplicadas a la Física

Trabajo de fin de estudio presentado por:	Luis Fernando Rodríguez García
Director/a:	Jorge Giner Navarro
Fecha:	2025-07-09

AGRADECIMIENTOS

A mi madre:

Por su apoyo incondicional en todas las decisiones que he tomado en mi vida.

Por ser mi modelo y ejemplo a seguir.

Por su amor y dedicación, su capacidad de sacrificio y entrega absoluta.

Nada de lo que soy ni de lo que he conseguido sería posible sin ella.

A mi director de TFG:

Jorge Giner Navarro, por su orientación y apoyo durante todo el proceso de elaboración de este trabajo. Disfruté de él como profesor y como director de TFG. Te animo a que sigas con esta labor docente en la que creo que puedes aportar mucho a esta universidad y a sus alumnos.

A mi director del Grado en Física en Unir:

Alberto Corbí Bellot, por su dedicación absoluta en la resolución de todos los problemas que surgen al dirigir unos estudios de esta envergadura, así como por adentrarnos en el mundo de los estándares de la Física, entre ellos Typst, con el que se ha elaborado este documento y del que es un referente a nivel mundial con sus publicaciones.

Resumen

Este trabajo pretende ser un compendio didáctico para la formación en Física en cuanto a la aplicación que tiene la resolución de ecuaciones en derivadas parciales a problemas como la conducción de calor en una varilla, la amplitud de vibración de una cuerda vibrante o la distribución de temperatura en una placa rectangular. Se hará un repaso de los aspectos necesarios para dicha resolución como son el problema de Sturm-Liouville regular y las series de Fourier. El problema es ambicioso ya que se desea conocer la temperatura en un punto de una varilla o la amplitud de vibración de un punto de una cuerda en cualquier instante. Por último se presentarán algunos métodos numéricos para resolver ecuaciones en derivadas parciales que son de gran utilidad ya que no siempre las condiciones iniciales y las condiciones frontera serán tan simples como para poder aplicar la resolución analítica.

Palabras clave: EDP, Ecuación de calor, Ecuación de onda, Sturm-Liouville, Método de separación de variables, Series de Fourier.

Abstract

This work aims to be a didactic compendium for Physics training regarding the application of solving partial differential equations to problems such as heat conduction in a rod, the vibration amplitude of a vibrating string, or the temperature distribution in a rectangular plate. A review will be made of the necessary aspects for such resolution, such as the regular Sturm-Liouville problem and Fourier series. The problem is ambitious since the objective is to know the temperature at a point on a rod or the vibration amplitude of a point on a string at any instant. Finally, some numerical methods for solving partial differential equations will be presented, which are very useful since the initial and boundary conditions will not always be simple enough to apply analytical solutions.

Keywords: PDE, Heat equation, Wave equation, Sturm-Liouville, Separation of variables, Fourier series.

Índice de contenidos

1. Introducción	1
2. Base matemática para la resolución de EDP	3
2.1. Un problema de Sturm-Liouville regular	3
2.1.1. Caso 1	3
2.1.2. Caso 2	4
2.1.3. Caso 3	5
2.1.4. Caso 4	5
2.1.5. Caso periódico	6
2.2. Serie de Fourier	8
2.2.1. Definición	8
2.2.2. Coeficientes de Fourier a_n y b_n	8
2.2.3. Propiedades	8
2.2.4. Teorema de Dirichlet	9
2.2.5. Ejemplo de función sin simetría	9
2.2.6. Convergencia de la serie para distintos valores de N	11
2.2.7. Aplicación a la suma de series	12
2.2.8. Ejemplo de función con simetría par	13
2.2.9. Ejemplo de función con simetría impar	15
3. Ecuación de calor homogénea	18
3.1. Varilla con temperatura nula en los extremos	19
3.1.1. Ejemplo resuelto Caso 1	21
3.2. Varilla con temperatura aislada en los extremos	24
3.2.1. Ejemplo resuelto Caso 2	26
3.3. Varilla con temperatura nula en un extremo y aislada en el otro	28

3.3.1. Ejemplo resuelto Caso 3	30
3.4. Varilla circular	34
3.4.1. Ejemplo resuelto caso periódico	35
4. Ecuación de onda	37
4.1. Cuerda vibrante con extremos fijos	38
4.2. Ejemplo resuelto Caso 1 cuerda vibrante con extremos fijos	39
4.3. Cuerda vibrante con extremos libres	41
4.4. Ejemplo resuelto Caso 2 cuerda con extremos libres	43
5. Resumen	45
5.1. Ecuación de calor	45
5.2. Ecuación de onda	46
6. Métodos numéricos	47
6.1. Método FTCS para la ecuación de calor	47
6.2. Código en Python para la resolución del ejemplo de calor caso 1	50
6.3. Método implícito para la ecuación de onda	53
6.4. Código en Python para la resolución del ejemplo de onda caso 1	55
7. Resumen y conclusiones	59
Bibliografía	60

1. Introducción

Las ecuaciones de calor y de onda son ecuaciones en derivadas parciales (EDP) y su estudio es fundamental en la modelización de fenómenos físicos.

La ecuación de calor describe la evolución temporal de la temperatura en un cuerpo, mientras que la ecuación de onda modela la propagación de perturbaciones como el sonido, vibraciones, ondas electromagnéticas, etc. Ambas se aplican en diversas disciplinas como la física, la ingeniería mecánica y eléctrica o la geofísica y la medicina.

El estudio de estas ecuaciones no solo permite comprender fenómenos naturales, sino también desarrollar métodos numéricos que sirven de base para herramientas modernas de simulación computacional.

La motivación central es entender cómo se resuelven las ecuaciones de calor y de onda desde un punto de vista analítico y numérico. Esto permitirá:

- Interpretar con precisión el comportamiento físico de sistemas reales.
- Contrastar soluciones exactas con aproximaciones computacionales.
- Adquirir habilidades prácticas en modelado y simulación numérica.
- Prepararse para resolver problemas reales en física e ingeniería mediante herramientas matemáticas y digitales.

Situando en contexto histórico el origen de estas ecuaciones tenemos que en el siglo XVIII la ecuación de onda fue una de las primeras EDP en aparecer en la física. Fue formulada por Jean le Rond d'Alembert en 1747 [1] para describir la vibración de cuerdas.

En el siglo XIX la ecuación de calor fue introducida por Joseph Fourier en 1822 [2] donde desarrolló el uso de series de Fourier para su resolución.

Su enfoque marcó el nacimiento del análisis de Fourier como rama matemática.

Una EDP, ecuación en derivadas parciales [3] es una ecuación matemática que contiene derivadas parciales de una función, por ejemplo:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 15 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

donde se desea determinar la función $u(x, t)$ que verifica dicha ecuación.

Usaremos la notación subindicial en la que el subíndice representa la variable respecto a la que se deriva, por ejemplo:

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

En el caso de la Física hay tres ecuaciones en derivadas parciales que son relevantes:

- La ecuación de calor:

$$u_t = k \cdot u_{xx} + q(x, t) \quad (1)$$

- La ecuación de onda:

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx} + q(x, t) \quad (2)$$

- La ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = q(x, t) \quad (3)$$

Debido que el trabajo sería muy extenso nos centraremos en la ecuación de calor y la ecuación de onda.

Para resolver estas ecuaciones necesitamos conocer algunos conceptos previos.

2. Base matemática para la resolución de EDP

2.1. Un problema de Sturm-Liouville regular

El siguiente problema de Sturm-Liouville [4] aparece en prácticamente todos los casos que se estudian en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales:

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (4)$$

sujeta a las condiciones frontera:

$$\begin{cases} k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \\ k_3 y(b) + k_4 y'(b) = 0 \end{cases}$$

siendo λ un número real, k_1 y k_2 (respectivamente k_3 y k_4) números reales no nulos simultáneamente y $[a, b]$ un intervalo de la recta real.

Los valores de λ para los que existe una solución no nula de Ec. 4 son los autovalores de la ecuación y las soluciones no nulas son las autofunciones de la ecuación asociadas a λ .

Suponiendo $\lambda \geq 0$ escribiremos $\lambda = \alpha^2$ con $\alpha \geq 0$

La solución general de Ec. 4 es:

- Para $\lambda \geq 0 \Rightarrow f(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)$
- Para $\lambda = 0 \Rightarrow f(x) = Ax + B$

2.1.1. Caso 1

Las condiciones frontera se corresponden con:

$$y(a) = y(b) = 0 \Rightarrow k_2 = k_4 = 0 \quad (5)$$

- Si $\lambda = 0$ al imponer las condiciones frontera $Aa + B = 0$ y $Ab + B = 0$ con lo que obtenemos la solución nula que no estamos considerando.
- Si $\lambda \neq 0$ al imponer las condiciones frontera llegamos al sistema:

$$\begin{cases} A \sin(\alpha a) + B \cos(\alpha a) = 0 \\ A \sin(\alpha b) + B \cos(\alpha b) = 0 \end{cases}$$

que tiene solución no trivial si:

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha a) & \cos(\alpha a) \\ \sin(\alpha b) & \cos(\alpha b) \end{vmatrix} = \sin(\alpha a) \cos(\alpha b) - \cos(\alpha a) \sin(\alpha b) = \sin(\alpha(b-a)) = 0$$

entonces $\alpha(b-a) = n\pi$ con $n \geq 1$ ya que $\alpha \geq 0$ y $b-a > 0$ por tanto $\alpha_n = \frac{n\pi}{b-a}$

Los autovalores serán $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$ y las autofunciones $f_n(x) = \sin\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$ con $n \geq 1$.

2.1.2. Caso 2

Las condiciones frontera se corresponden con:

$$y'(a) = y'(b) = 0 \Rightarrow k_1 = k_3 = 0 \quad (6)$$

- Si $\lambda = 0$ al imponer las condiciones frontera $A = 0$ con lo que obtenemos soluciones constantes $f(x) = B$.
- Si $\lambda \neq 0$ al imponer las condiciones frontera llegamos al sistema:

$$\begin{cases} \alpha A \cos(\alpha a) - \alpha B \sin(\alpha a) = 0 \\ \alpha A \cos(\alpha b) - \alpha B \sin(\alpha b) = 0 \end{cases}$$

que tiene solución no trivial si:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha \cos(\alpha a) & -\alpha \sin(\alpha a) \\ \alpha \cos(\alpha b) & -\alpha \sin(\alpha b) \end{vmatrix} &= -\alpha^2 \sin(\alpha b) \cos(\alpha a) + \alpha^2 \cos(\alpha b) \sin(\alpha a) = \\ &= -\alpha^2 \sin(\alpha(b-a)) = 0 \end{aligned}$$

entonces $\alpha(b-a) = n\pi$ con $n \geq 1$ ya que $\alpha \geq 0$ y $b-a > 0$ por tanto $\alpha_n = \frac{n\pi}{b-a}$

Los autovalores serán $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$ y las autofunciones $f_n(x) = \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$ con $n \geq 1$.

Podemos tomar $f_n(x) = \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$ con $n \geq 0$ ya que $f_0(x) = 1$

2.1.3. Caso 3

Las condiciones frontera se corresponden con:

$$y(a) = y'(b) = 0 \Rightarrow k_2 = k_3 = 0 \quad (7)$$

- Si $\lambda = 0$ al imponer las condiciones frontera $Ab + B = 0$ y $A = 0$ con lo que $A = 0$ y $B = 0$ obtenemos la solución nula que no estamos considerando.
- Si $\lambda \neq 0$ al imponer las condiciones frontera llegamos al sistema:

$$\begin{cases} A \sin(\alpha a) + B \cos(\alpha a) = 0 \\ \alpha A \cos(\alpha b) - \alpha B \sin(\alpha b) = 0 \end{cases}$$

que tiene solución no trivial si:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \sin(\alpha a) & \cos(\alpha a) \\ \alpha \cos(\alpha b) & -\alpha \sin(\alpha b) \end{vmatrix} &= -\alpha \sin(\alpha a) \sin(\alpha b) - \alpha \cos(\alpha a) \cos(\alpha b) = \\ &= -\alpha \cos(\alpha(b-a)) = 0 \end{aligned}$$

entonces $\alpha(b-a) = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ con $n \geq 1$ ya que $\alpha \geq 0$ y $b-a > 0$ y tendremos por tanto que $\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}$
Los autovalores serán $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}\right)^2$ y las autofunciones $f_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{x-a}{b-a}\right)$ con $n \geq 1$.

2.1.4. Caso 4

Las condiciones frontera se corresponden con:

$$y'(a) = y(b) = 0 \Rightarrow k_1 = k_4 = 0 \quad (8)$$

- Si $\lambda = 0$ al imponer las condiciones frontera $A = 0$ y $Ab + B = 0$ con lo que $A = 0$ y $B = 0$ obtenemos la solución nula que no estamos considerando.
- Si $\lambda \neq 0$ al imponer las condiciones frontera llegamos al sistema:

$$\begin{cases} \alpha A \cos(\alpha a) - \alpha B \sin(\alpha a) = 0 \\ A \sin(\alpha b) + B \cos(\alpha b) = 0 \end{cases}$$

que tiene solución no trivial si:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \alpha \cos(\alpha a) & -\alpha \sin(\alpha a) \\ \sin(\alpha b) & +\cos(\alpha b) \end{array} \right| &= \alpha \cos(\alpha a) \cos(\alpha b) + \alpha \sin(\alpha a) \sin(\alpha b) = \\ &= \alpha \cos(\alpha(b-a)) = 0 \end{aligned}$$

entonces $\alpha(b-a) = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ con $n \geq 1$ ya que $\alpha \geq 0$ y $b-a > 0$ y tendremos por tanto que $\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}$.

Los autovalores serán $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}\right)^2$ y las autofunciones $f_n(x) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{x-a}{b-a}\right)$ con $n \geq 1$.

2.1.5. Caso periódico

Las condiciones frontera se corresponden con:

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases} \quad (9)$$

- Si $\lambda = 0$ al imponer las condiciones frontera $Aa + B = Ab + B$ y $A = A$ por lo que tendremos que $A = 0$ y obtenemos las soluciones constantes $f(x) = B$
- Si $\lambda \neq 0$ al imponer las condiciones frontera llegamos al sistema:

$$\begin{cases} A \sin(\alpha a) - \alpha B \cos(\alpha a) = A \sin(\alpha b) + B \cos(\alpha b) \\ \alpha A \cos(\alpha a) - \alpha B \sin(\alpha a) = \alpha A \cos(\alpha b) - \alpha B \sin(\alpha b) \end{cases}$$

que tiene solución no trivial si:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \sin(\alpha b) - \sin(\alpha a) & \cos(\alpha b) - \cos(\alpha a) \\ \alpha(\cos(\alpha b) - \cos(\alpha a)) & -\alpha(\sin(\alpha b) - \sin(\alpha a)) \end{array} \right| &= \\ &= -2\alpha(1 - (\cos(\alpha a) \cos(\alpha b) + \sin(\alpha a) \sin(\alpha b))) = 0 \end{aligned}$$

entonces $\cos(\alpha(b-a)) = 1$ luego $\alpha(b-a) = 2n\pi$ con $n > 0$ ya que $\alpha > 0$ y $b-a > 0$ y tendremos por tanto que $\alpha_n = \frac{2n\pi}{b-a}$ y los autovalores serán $\lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{b-a}\right)^2$ siendo sus autofunciones $f_{n1}(x) = \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)$ con $n \geq 1$ y $f_{n2}(x) = \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)$ y con $n \geq 0$

Resumimos todos los casos en Tabla 1

Tabla 1: Resumen casos Sturm-Liouville

Casos $a < b$	Autovalores λ_n	Autofunciones $f_n(x)$	n
Caso 1: $y(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$	$\sin\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$	$n \geq 1$
Caso 2: $y'(a) = y'(b) = 0$	$\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$	$\cos\left(n\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$	$n \geq 0$
Caso 3: $y(a) = y'(b) = 0$	$\left(\frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}\right)^2$	$\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\frac{x-a}{b-a}\right)$	$n \geq 1$
Caso 4: $y'(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)}\right)^2$	$\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\frac{x-a}{b-a}\right)$	$n \geq 1$
Caso periódico: $y(a) = y(b) = 0$ $y'(a) = y'(b) = 0$	$\left(\frac{2n\pi}{b-a}\right)^2$	$\sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)$ $\cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}x\right)$	$n \geq 1$ $n \geq 0$

2.2. Serie de Fourier

2.2.1. Definición

Dada una función $f(t)$ periódica de periodo T su serie de Fourier viene dada por: [5]

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right) \quad (10)$$

con periodo $T = 2L$.

2.2.2. Coeficientes de Fourier a_n y b_n

Los coeficientes a_n y b_n se obtienen integrando a lo largo de un periodo con las siguientes fórmulas:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (11)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (12)$$

2.2.3. Propiedades

- Si $f(t)$ presenta simetría par (simetría respecto al eje y), es decir, si $f(t) = f(-t)$ los coeficientes b_n son cero.
- Si $f(t)$ presenta simetría impar (simetría respecto al origen), es decir, si $f(t) = -f(-t)$ los coeficientes a_n son cero.
- Si la función es simétrica (par o impar) se puede integrar en la mitad del periodo y multiplicar por dos para hallar los coeficientes.

Tabla 2: Simetría en series de Fourier

Función	a_n con $n \geq 0$	b_n con $n \geq 1$
Impar Simetría respecto al origen	0	$\frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$
Par Simetría respecto al eje Y	$\frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$	0

2.2.4. Teorema de Dirichlet

Si $f(t)$ es una función continua por tramos y de periodo T , entonces la serie de Fourier converge a $f(t_0)$ si la función en t_0 es continua o presenta discontinuidad evitable y a la media de los límites laterales si la discontinuidad en t_0 es de salto finito.

2.2.5. Ejemplo de función sin simetría

Calcular el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(t) = t^2$ en el intervalo $(0, 2\pi)$ siendo periódica de periodo 2π .

Lo primero que haremos será representar la función periódica a la que vamos a aproximar mediante la serie de Fourier y veremos si presenta algún tipo de simetría.

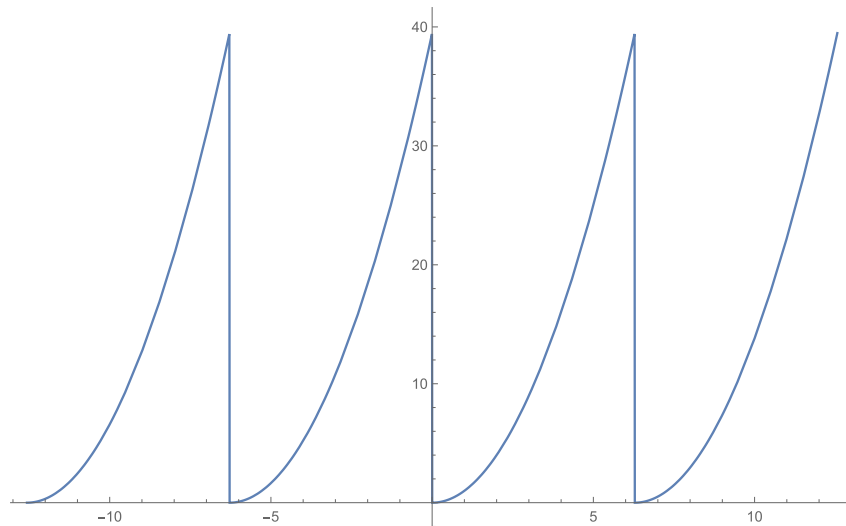


Figura 1: Función $f(t) = t^2$ en el intervalo $(-4\pi, 4\pi)$

El periodo es 2π por lo tanto $2L = 2\pi$ con lo que $L = \pi$

La función no presenta simetría par ni impar por lo tanto tendremos que calcular ambos coeficientes a_n y b_n y sustituimos en Ec. 10

Calculamos los coeficientes a_n :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cos\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cos(nt) dt$$

$$\begin{cases} u = t^2 & \Rightarrow du = 2t \cdot dt \\ dv = \cos(nt)dt & \Rightarrow v = \frac{\sin(nt)}{n} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[t^2 \cdot \frac{\sin(nt)}{n} - \int \frac{\sin(nt)}{n} 2t \cdot dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[t^2 \cdot \frac{\sin(nt)}{n} - \frac{2}{n} \int \sin(nt) \cdot t \cdot dt \right] =$$

$$\begin{cases} u = t & \Rightarrow du = dt \\ dv = \sin(nt)dt & \Rightarrow v = \frac{-\cos(nt)}{n} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[t^2 \cdot \frac{\sin(nt)}{n} - \frac{2}{n} \left[\frac{-t \cos(nt)}{n} - \int \frac{-\cos(nt)}{n} dt \right] \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2 \sin(nt)}{n} + \frac{2t \cos(nt)}{n^2} - \frac{2 \sin(nt)}{n^3} \right]_0^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4\pi^2 \sin(2\pi n)}{n} + \frac{4\pi \cos(2\pi n)}{n^2} - \frac{2 \sin(2\pi n)}{n^3} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

ya que $\sin(2\pi n) = 0$ y $\cos(2\pi n) = 1 \quad \forall n$

Como el valor de $n = 0$ anula al denominador de a_n el coeficiente a_0 tenemos que calcularlo aparte.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cos\left(\frac{0\pi t}{\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$

Calculamos los coeficientes b_n :

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \sin\left(\frac{n\pi t}{\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \sin(nt) dt$$

$$\begin{cases} u = t^2 & \Rightarrow du = 2t \cdot dt \\ dv = \sin(nt)dt & \Rightarrow v = \frac{-\cos(nt)}{n} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[t^2 \cdot \frac{-\cos(nt)}{n} - \int \frac{-\cos(nt)}{n} 2t \cdot dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[t^2 \cdot \frac{-\cos(nt)}{n} - \frac{2}{n} \int -\cos(nt) \cdot t \cdot dt \right]$$

$$\begin{cases} u = t & \Rightarrow du = dt \\ dv = -\cos(nt)dt & \Rightarrow v = \frac{-\sin(nt)}{n} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-t^2 \cos(nt)}{n} + \frac{2t \sin(nt)}{n^2} + \frac{2 \cos(nt)}{n^3} \right]_0^{2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-4\pi^2 \cos(2\pi n)}{n} + \frac{4\pi \sin(2\pi n)}{n^2} + \frac{2 \cos(2\pi n)}{n^3} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-4\pi^2}{n} = \frac{-4\pi}{n}$$

ya que $\sin(2\pi n) = 0$ y $\cos(2\pi n) = 1 \quad \forall n$

Por lo tanto sustituyendo en Ec. 10 la serie de Fourier pedida es:

$$f(t) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos(nt) + \frac{-4\pi}{n} \sin(nt) \right) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(nt)}{n^2} - \frac{\pi \sin(nt)}{n} \right)$$

2.2.6. Convergencia de la serie para distintos valores de N

Como acabamos de ver la serie de Fourier para la función dada es:

$$f(t) \simeq \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^N \left(\frac{\cos(nt)}{n^2} - \frac{\pi \sin(nt)}{n} \right)$$

con $N \rightarrow \infty$.

Representada para valores de $N = 4$, $N = 8$, $N = 15$ y $N = 40$, nos queda:

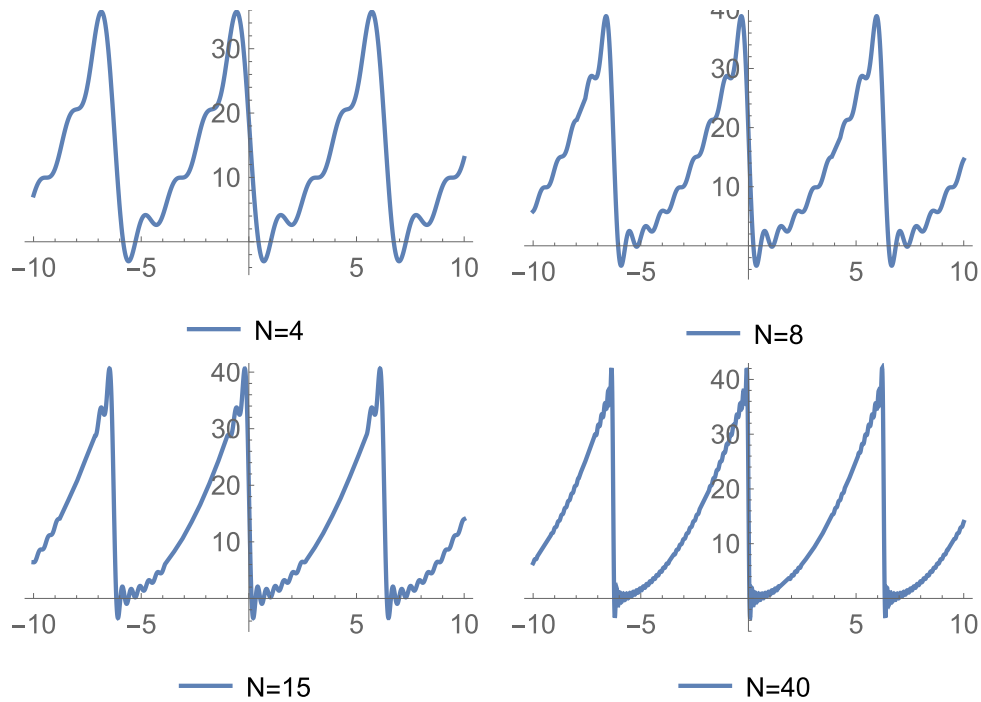


Figura 2: Evolución de la serie de Fourier para distintos valores de $N \rightarrow \infty$

Vemos que al aumentar N la serie converge a la función original.

2.2.7. Aplicación a la suma de series

Aunque para nuestro estudio no tiene importancia esta parte, considero interesante el que se vea esta aplicación de las series de Fourier al cálculo de suma de series.

Calcula a partir de la serie de Fourier obtenida previamente el valor de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Para ello partimos de la serie de Fourier obtenida:

$$f(t) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(nt)}{n^2} - \frac{\pi \sin(nt)}{n} \right)$$

y particularizamos para $t = 0$:

$$f(0) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Aplicando el teorema de Dirichlet en $t = 0$, tenemos una discontinuidad de salto finito por lo que:

$$f(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{0 + 4\pi^2}{2} = 2\pi^2$$

Luego,

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

y despejando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

Por lo tanto el valor de la suma de la serie es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2.2.8. Ejemplo de función con simetría par

Dada la función:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

determinar su serie de Fourier suponiendo que es una función par.

Comenzamos representando la función en el intervalo $[0, 2]$ y extendiendo su dominio para que sea simétrica par (respecto al eje y).

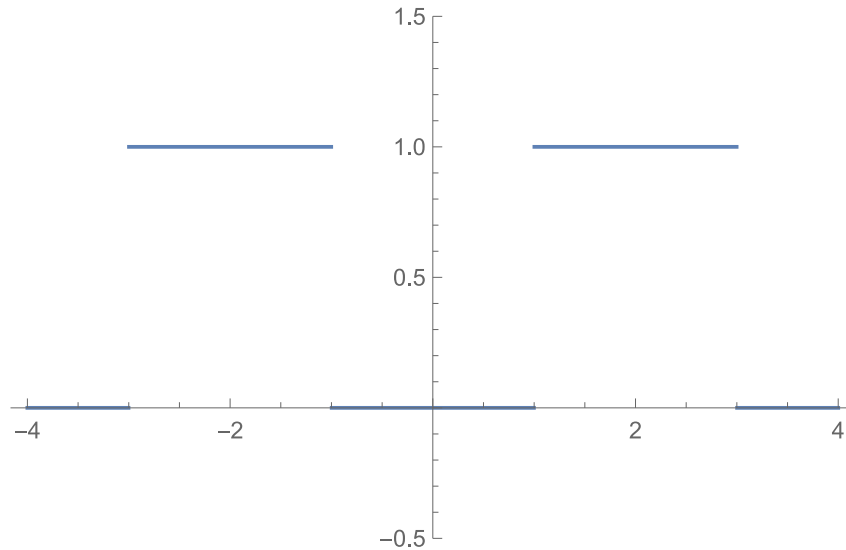


Figura 3: Serie de Fourier de $f(t)$ simétrica respecto al eje y

El periodo es 4 por lo tanto $2L = 4$ con lo que $L = 2$

La función presenta simetría par por lo tanto la serie de Fourier tendrá la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right) \quad (13)$$

Calculamos los coeficientes a_n :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^1 0 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt + \frac{2}{2} \int_1^2 1 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt$$

$$a_n = \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} \right]_1^2 = \frac{2 \sin(n\pi) - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} = \frac{-2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}$$

Vemos que en $n = 0$ se anula el denominador por lo tanto el coeficiente a_0 tenemos que calcularlo aparte.

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^1 0 \cos\left(\frac{0\pi t}{2}\right) dt + \frac{2}{2} \int_1^2 1 \cos\left(\frac{0\pi t}{2}\right) dt = \int_1^2 dt = [t]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

Por lo tanto sustituyendo en Ec. 13 la serie de Fourier de la función dada es:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

En la siguiente gráfica se muestra la suma de los 40 primeros términos de la serie de Fourier obtenida.

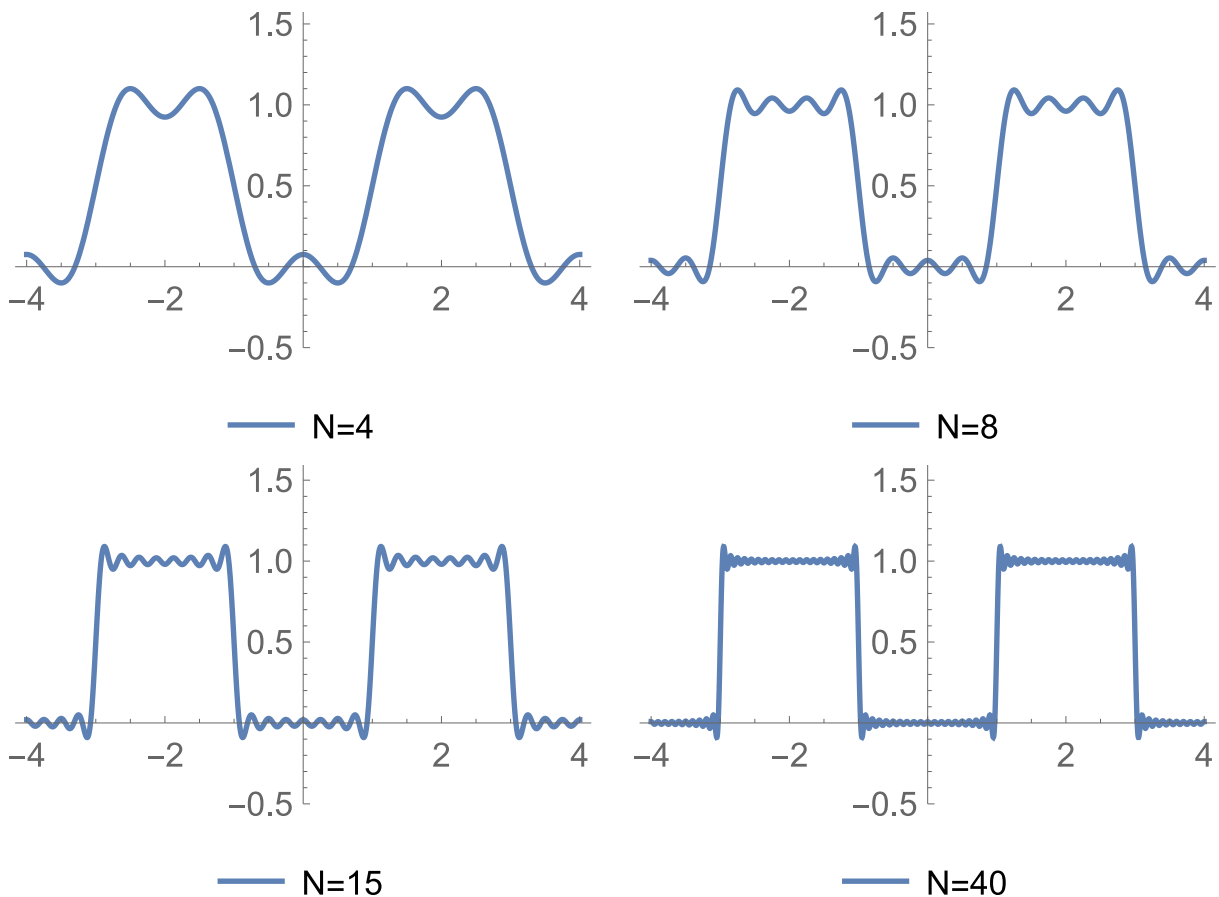


Figura 4: Serie de Fourier de $f(t)$ simétrica respecto al eje y para distintos valores de N .

2.2.9. Ejemplo de función con simetría impar

Dada la función $f(t) = 2 - t$ con $0 \leq t \leq 1$

Determinar su serie de Fourier suponiendo que es una función impar.

Comenzamos representando la función en el intervalo $[0, 1]$ y extendiendo su dominio para que sea simétrica impar (respecto al origen).

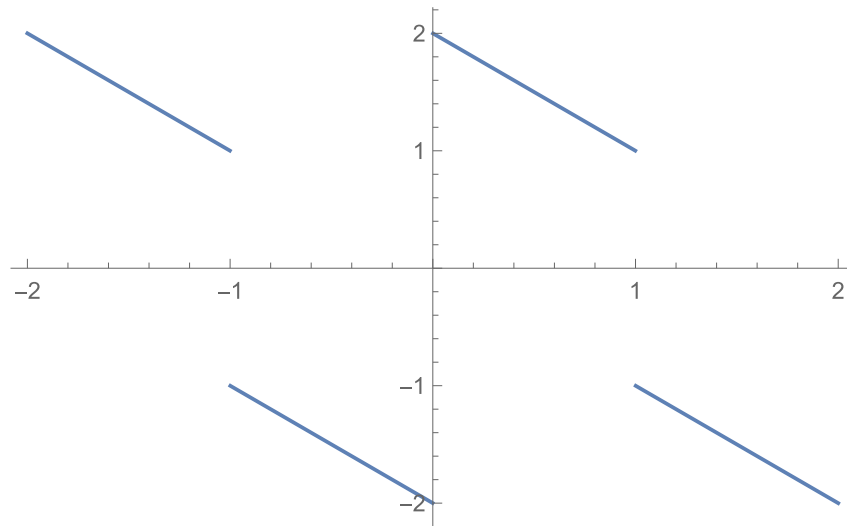


Fig 5: Serie de Fourier de $f(t)$ simétrica respecto al origen.

El periodo es 2 por lo tanto $2L = 2$ con lo que $L = 1$

La función presenta simetría impar por lo tanto la serie de Fourier tendrá la forma:

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right) \quad (14)$$

Calculamos los coeficientes b_n :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 (2-t) \sin\left(\frac{n\pi t}{1}\right) dt$$

$$b_n = 2 \int_0^1 (2-t) \sin(n\pi t) dt$$

Resolvemos la integral por partes:

$$\begin{cases} u = 2 - t & \Rightarrow du = -dt \\ dv = \sin(n\pi t) dt & \Rightarrow v = \frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi} \end{cases}$$

$$b_n = 2 \left[-(2 - t) \frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} - \int \frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} dt \right]$$

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \left[-(2 - t) \frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} - \frac{\sin(n\pi t)}{n^2\pi^2} \right]_0^1 = 2 \left[-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{\sin(n\pi)}{n^2\pi^2} - \left(-2 \frac{1}{n\pi} \right) \right] = \\ &= 2 \left[-\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} \right] = \frac{2}{n\pi} (2 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Por lo tanto sustituyendo en Ec. 14 la serie de Fourier de la función dada es:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (2 - (-1)^n) \sin(n\pi t)$$

En la siguiente gráfica se muestra la suma de los 40 primeros términos de la serie de Fourier obtenida.

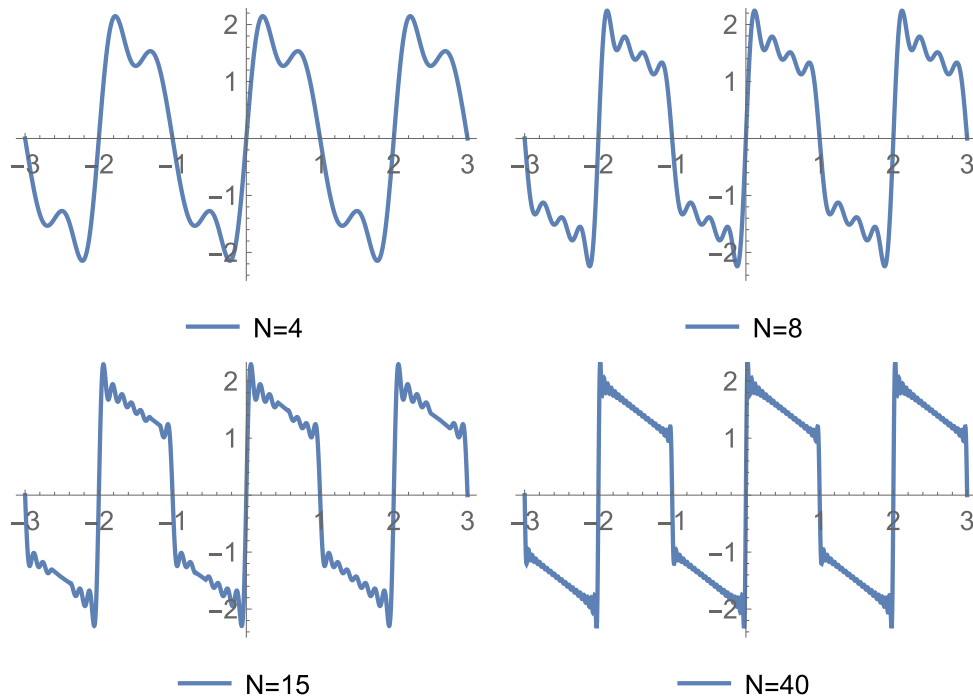


Figura 6: Serie de Fourier de $f(t)$ simétrica respecto al origen para distintos valores de N

3. Ecuación de calor homogénea

Queremos calcular la temperatura en cualquier punto de una varilla de longitud L en cualquier instante de tiempo. Para ello necesitamos conocer la constante de difusividad térmica k de la varilla. Con ello la conducción de calor en una varilla delgada de longitud L sigue el modelo:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (15)$$

Escrita en notación subindicial:

$$u_t = k u_{xx} \quad (16)$$

donde $u(x, t)$ es la temperatura en un punto x de la varilla con $0 \leq x \leq L$ en el instante de tiempo t y k es la constante de difusividad térmica de la varilla.

Usaremos el método de separación de variables consistente en buscar soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$ con lo que la Ec. 16 se convierte en:

$$kX''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad (17)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (18)$$

Como el primer miembro de Ec. 18 depende solo de x y el segundo solo de t ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \quad (19)$$

siendo λ un número real.

Por lo tanto tenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & 0 \leq x \leq L \\ T'(t) + \lambda \cdot k \cdot T(t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (20)$$

La primera es una ecuación diferencial lineal de segundo orden que se corresponde al problema Sturm-Liouville regular desarrollado en la sección 2.

Introduciendo las condiciones iniciales y las de frontera tendremos los siguientes casos:

3.1. Varilla con temperatura nula en los extremos

Si la varilla tiene temperatura nula en los extremos:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (21)$$

y la condición inicial es que en $t = 0$ el perfil de temperaturas sigue una función arbitraria $f(x)$:

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

Las condiciones de Ec. 21 nos llevan a:

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(L)T(t) = 0 \end{cases}$$

Si $X(0) \neq 0$ entonces $T(t) = 0$, que no es una solución relevante porque la función de la solución no está definida.

Si $X(L) \neq 0$ ocurriría lo mismo, así que las condiciones iniciales serán $X(0) = X(L) = 0$

Por tanto debemos resolver;

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad X(0) = X(L) = 0 \quad (22)$$

Como vemos llegamos al Caso 1 del problema regular de Sturm-Liouville cuyos autovalores son:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n \geq 1$$

y las autofunciones son:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n \geq 1$$

La solución de la segunda ecuación de Ec. 20 es:

$$T_n(t) = e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \geq 1 \quad (23)$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación de calor homogénea es:

$$u_n(x, t) = e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

En general será complicado que alguna de estas soluciones verifique además la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, por lo que parece razonable considerar una combinación lineal de las soluciones anteriores:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

y obligar a que:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (24)$$

Si $f(x)$ es una función continua se puede plantear una combinación infinita con:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (25)$$

donde b_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ suponiendo $f(x)$ impar y periódica de periodo $2L$. Por lo tanto la solución se escribe como:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

3.1.1. Ejemplo resuelto Caso 1

Se considera la EDP $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ con $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$ utilizando el método de separación de variables con las condiciones frontera $u(0, t) = u(1, t) = 0$ y condición inicial $u(x, 0) = \sin(2\pi x) - 3 \sin(6\pi x)$:

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \\0 \leq x \leq 1 &\rightarrow a = 0 \quad b = 1 \rightarrow L = 1 \\t &> 0 \\u(0, t) = u(1, t) &= 0 \rightarrow \text{Caso 1} \\f(x) = u(x, 0) &= \sin(2\pi x) - 3 \sin(6\pi x)\end{aligned}$$

Como estamos en el Caso 1 tendremos que los autovalores y las autofunciones serán según la Tabla 1

$$\lambda_n = (n\pi)^2 \quad X_n(x) = \sin(n\pi x)$$

Buscamos soluciones de la forma:

$$u(x, t) = \sum c_n(t) \sin(n\pi x) \quad (26)$$

Resolvemos la familia de EDO:

$$\begin{cases} c'_n(t) + k\lambda_n c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = f_n \end{cases}$$

siendo f_n los coeficientes de Fourier de $f(x)$ impar periódica de periodo $2L = 2 \rightarrow L = 1$.

En nuestro caso:

$$\begin{cases} c'_n(t) + (n\pi)^2 c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = f_n \end{cases}$$

Como la función $f(x) = \sin(2\pi x) - 3 \sin(6\pi x)$ ya es un desarrollo en serie de Fourier de senos correspondiente a los casos $n = 2 \Rightarrow f_2 = 1$ y $n = 6 \Rightarrow f_6 = -3$ siendo el resto de casos $n \neq 2, 6 \Rightarrow f_n = 0$.

Resolvemos por tanto los casos:

- $n = 2$

$$\begin{cases} c_2'(t) + (2\pi)^2 c_2(t) = 0 \\ c_2(0) = 1 \end{cases}$$

que es una ecuación diferencial de variables separables cuya solución es:

$$c_2'(t) = -4\pi^2 c_2(t)$$

$$\frac{c_2'(t)}{c_2(t)} = -4\pi^2$$

$$\int \frac{c_2'(t)}{c_2(t)} = \int -4\pi^2 dt$$

$$\ln(c_2(t)) - \ln(C) = -4\pi^2 t$$

$$\ln \frac{c_2(t)}{C} = -4\pi^2 t$$

$$\frac{c_2(t)}{C} = e^{-4\pi^2 t}$$

$$c_2(t) = C e^{-4\pi^2 t}$$

como $c_2(0) = 1 \Rightarrow C = 1$.

$$c_2(t) = e^{-4\pi^2 t}$$

- $n = 6$

$$\begin{cases} c_6'(t) + (6\pi)^2 c_6(t) = 0 \\ c_6(0) = -3 \end{cases}$$

que es una ecuación diferencial de variables separables cuya solución es:

$$c_6'(t) = -36\pi^2 c_6(t)$$

$$\frac{c_6'(t)}{c_6(t)} = -36\pi^2$$

$$\int \frac{c_6'(t)}{c_6(t)} dt = \int -36\pi^2 dt$$

$$\ln(c_6(t)) - \ln(C) = -36\pi^2 t$$

$$\ln \frac{c_6(t)}{C} = -36\pi^2 t$$

$$\frac{c_6(t)}{C} = e^{-36\pi^2 t}$$

$$c_6(t) = C e^{-36\pi^2 t}$$

como $c_6(0) = -3 \Rightarrow C = -3$

$$c_6(t) = -3e^{-36\pi^2 t}$$

- $n \neq 2, 6$

$$\begin{cases} c_n'(t) + (n\pi)^2 c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$c_n(t) = 0$$

Con lo que sustituyendo en Ec. 26

$$u(x, t) = c_2(t) \sin(2\pi x) + c_6(t) \sin(6\pi x)$$

$$u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin(2\pi x) - 3e^{-36\pi^2 t} \sin(6\pi x)$$

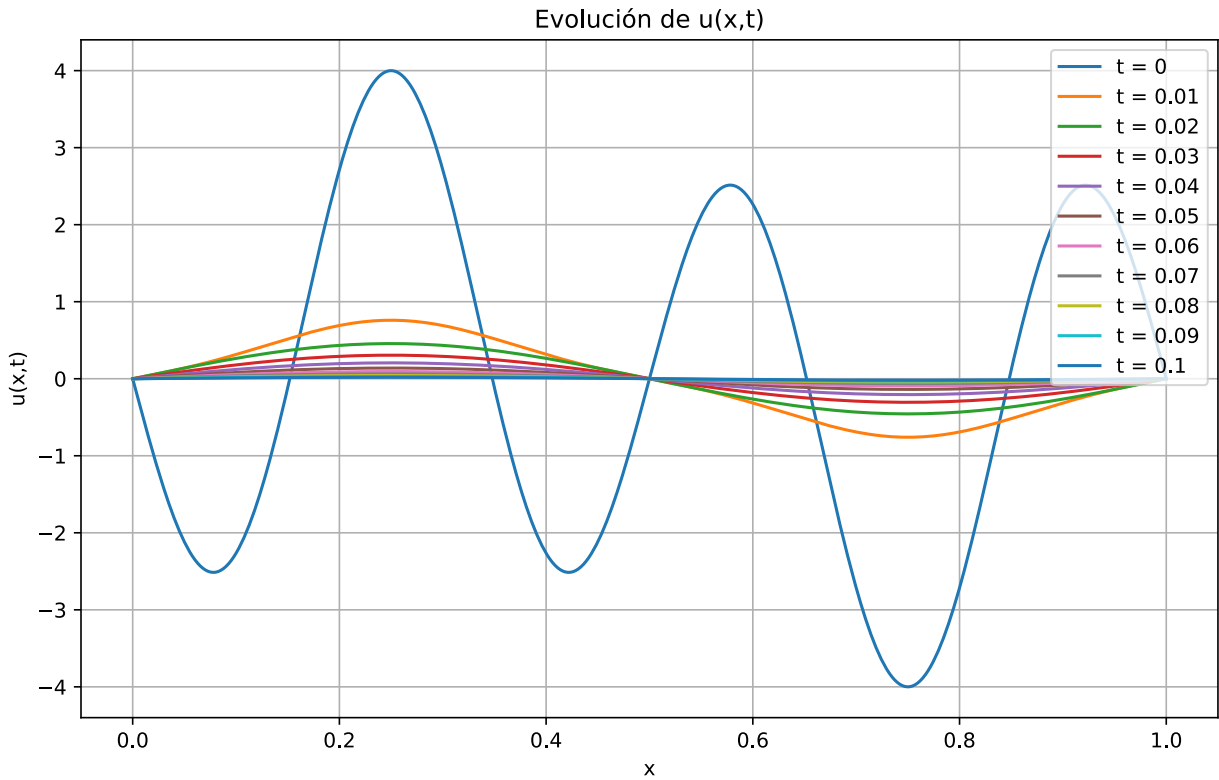


Fig 7: Evolución de $u(x, t)$: Calor caso 1

3.2. Varilla con temperatura aislada en los extremos

Si la varilla tiene temperatura aislada en los extremos eso significa que no hay flujo de calor a través de los extremos de la varilla, es decir:

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (27)$$

y la condición inicial es:

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

Las condiciones de Ec. 27 nos llevan a:

$$\begin{cases} X'(0)T(t) = 0 \\ X'(L)T(t) = 0 \end{cases}$$

Si $X'(0) \neq 0$ entonces $T(t) = 0$, que no es una solución relevante.

Si $X'(L) \neq 0$ ocurriría lo mismo, luego las condiciones iniciales serán $X'(0) = X'(L) = 0$. Por tanto debemos resolver:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad X'(0) = X'(L) = 0 \quad (28)$$

Como vemos llegamos al Caso 2 del problema regular de Sturm-Liouville cuyos autovalores son:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n \geq 0$$

y las autofunciones son:

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n \geq 0$$

La solución de la segunda ecuación de Ec. 20 es:

$$T_n(t) = e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \geq 0$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación de calor homogénea es:

$$u_n(x, t) = e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

En general será complicado que alguna de estas soluciones verifique además la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, por lo que parece razonable considerar una combinación lineal de las soluciones anteriores:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

y obligar a que:

$$f(x) = u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

donde a_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ supuesta par y periódica de periodo $2L$. Por lo tanto la solución se escribe como:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

3.2.1. Ejemplo resuelto Caso 2

Se considera la EDP $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ con $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$ utilizando el método de separación de variables con las condiciones frontera $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$ y condición inicial $u(x, 0) = 3 - 2 \cos(4\pi x)$:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

$$0 \leq x \leq 1 \rightarrow a = 0 \quad b = 1 \rightarrow L = 1$$

$$t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \rightarrow \text{Caso 2}$$

$$f(x) = u(x, 0) = 3 - 2 \cos(4\pi x)$$

Como estamos en el Caso 2 tendremos que los autovalores y las autofunciones serán según la Tabla 1:

$$\lambda_n = (n\pi)^2 \quad X_n(x) = \cos(n\pi x)$$

Buscamos soluciones de la forma:

$$u(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \cos(n\pi x) \quad (29)$$

Resolvemos la familia de EDO:

$$\begin{cases} c_n'(t) + k\lambda_n c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = f_n \end{cases}$$

siendo f_n los coeficientes de Fourier de $f(x)$ par periódica de periodo $2L = 2$

En nuestro caso:

$$\begin{cases} c_n'(t) + (n\pi)^2 c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = f_n \end{cases}$$

Como la función $f(x) = 3 - 2 \cos(4\pi x)$ ya es un desarrollo en serie de Fourier de cosenos correspondiente a los casos $n = 0 \Rightarrow f_0 = 3$ y $n = 4 \Rightarrow f_4 = -2$ siendo el resto de casos $n \neq 0, 4 \Rightarrow f_n = 0$.

Resolvemos por tanto los casos:

- $n = 0$

$$\begin{cases} c_0'(t) + (0\pi)^2 c_0(t) = 0 \\ c_0(0) = 3 \end{cases}$$

que es una ecuación diferencial de variables separables cuya solución es:

$$c_0'(t) = 0$$

$$c_0(t) = C$$

como $c_0(0) = 3 \Rightarrow C = 3 \rightarrow c_0(t) = 3$.

- $n = 4$

$$\begin{cases} c_4'(t) + (4\pi)^2 c_4(t) = 0 \\ c_4(0) = -2 \end{cases}$$

que es una ecuación diferencial de variables separables cuya solución es:

$$c_4'(t) = -16\pi^2 c_4(t)$$

$$\frac{c_4'(t)}{c_4(t)} = -16\pi^2$$

$$\int \frac{c_4'(t)}{c_4(t)} dt = \int -16\pi^2 dt$$

$$\ln(c_4(t)) - \ln(C) = -16\pi^2 t$$

$$\ln \frac{c_4(t)}{C} = -16\pi^2 t$$

$$\frac{c_4(t)}{C} = e^{-16\pi^2 t}$$

$$c_4(t) = C e^{-16\pi^2 t}$$

como $c_4(0) = -2 \Rightarrow C = -2 \rightarrow c_4(t) = -2e^{-16\pi^2 t}$

- $n \neq 0, 4$

$$\begin{cases} c'_n(t) + (n\pi)^2 c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$c_n(t) = 0$$

Con lo que sustituyendo en Ec. 29

$$u(x, t) = c_0(t) \cos(0\pi x) + c_4(t) \cos(4\pi x)$$

$$u(x, t) = 3 - 2e^{-16\pi^2 t} \cos(4\pi x)$$

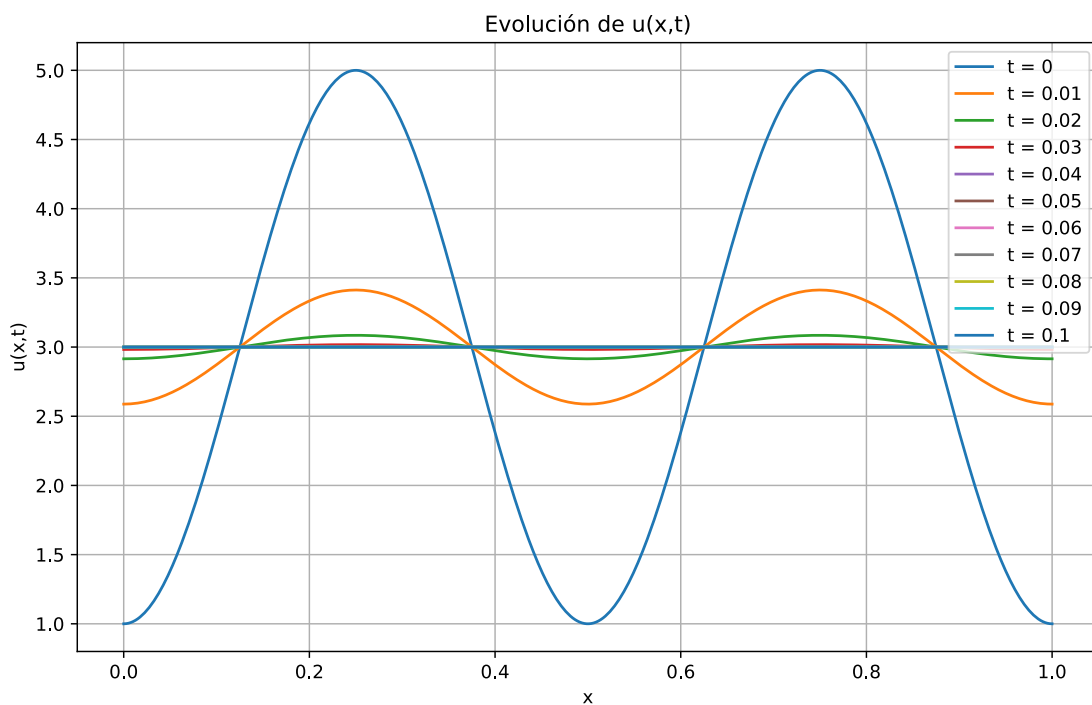


Fig 8: Evolución de $u(x, t)$: Calor caso 2

3.3. Varilla con temperatura nula en un extremo y aislada en el otro

Si la varilla tiene temperatura nula en un extremo y aislada en el otro tendremos:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (30)$$

o

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (31)$$

y la condición inicial es:

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

Las condiciones de Ec. 30 nos llevan a:

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X'(L)T(t) = 0 \end{cases}$$

y las de Ec. 31 a

$$\begin{cases} X'(0)T(t) = 0 \\ X(L)T(t) = 0 \end{cases}$$

Como vemos llegamos al Caso 3 del problema regular de Sturm-Liouville cuyos autovalores son:

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 \quad n \geq 1$$

y las autofunciones son:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right) \quad n \geq 1$$

La solución de la segunda ecuación de Ec. 20 es:

$$T_n(t) = e^{-k\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 t}, \quad n \geq 1$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación de calor homogénea es:

$$u_n(x, t) = e^{-kt\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right)$$

En general será complicado que alguna de estas soluciones verifique además la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ por lo que parece razonable considerar una combinación lineal de las soluciones anteriores:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{-kt \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$$

y obligar a que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$$

Si $f(x)$ es una función continua se puede plantear una combinación infinita con

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$$

donde b_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ suponiendo $f(x)$ impar y periódica de periodo $2L$.

Por lo tanto la solución se escribe como:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$$

3.3.1. Ejemplo resuelto Caso 3

Se considera la EDP $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ con $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$ Resolverla utilizando el método de separación de variables con las condiciones frontera $u(0, t) = u_x(1, t) = 0$ y condiciones iniciales $u(x, 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)$

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

$$0 \leq x \leq 1 \rightarrow a = 0 \quad b = 1 \rightarrow L = 1$$

$$t > 0$$

$$u(0, t) = u_x(1, t) = 0 \rightarrow \text{Caso 3}$$

$$f(x) = u(x, 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)$$

Como estamos en el Caso 3 tendremos que los autovalores y las autofunciones serán según la Tabla 1

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 \quad X_n(x) = \sin \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right)$$

Buscamos soluciones de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right) \quad (32)$$

Resolvemos la familia de EDO:

$$\begin{cases} c'_n(t) + k\lambda_n c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = f_n \end{cases}$$

siendo f_n los coeficientes de Fourier de $f(x)$ impar periódica de periodo $2L = 2 \rightarrow L = 1$

En nuestro caso:

$$\begin{cases} c'_n(t) + \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right)^2 c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = f_n \end{cases}$$

Tendremos que hacer el desarrollo en serie de Fourier de:

$$f(x) = u(x, 0) = 3 \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) - \sin \left(\frac{5\pi x}{2} \right)$$

impar de periodo $2L = 2 \Rightarrow L = 1$

En este caso ya tenemos un desarrollo en seno que se corresponde con los valores de:

$$n = 1 \Rightarrow f_1 = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow f_3 = -1$$

Tendremos que resolver la familia de EDO

$$\begin{cases} c'_n(t) + \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right)^2 c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = f_n \end{cases}$$

Para $n = 1$ y para $n = 3$ ya que para el resto de casos los coeficientes c_n son nulos.

Para $n = 1$

$$\begin{cases} c_1'(t) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 c_1(t) = 0 \\ c_1(0) = 3 \end{cases}$$

que es una ecuación diferencial de variables separables cuya solución es:

$$c_1'(t) = -\frac{\pi^2}{4} c_1(t)$$

$$\frac{c_1'(t)}{c_1(t)} = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$\int \frac{c_1'(t)}{c_1(t)} = \int -\frac{\pi^2}{4} dt$$

$$\ln(c_1(t)) - \ln(C) = -\frac{\pi^2}{4} t$$

$$\ln \frac{c_1(t)}{C} = -\frac{\pi^2}{4} t$$

$$\frac{c_1(t)}{C} = e^{-\frac{\pi^2}{4} t}$$

$$c_1(t) = C e^{-\frac{\pi^2}{4} t}$$

como $c_1(0) = 3 \Rightarrow C = 3$

$$c_1(t) = 3e^{-\frac{\pi^2}{4} t}$$

Para $n = 3$

$$\begin{cases} c_3'(t) + \left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 c_3(t) = 0 \\ c_3(0) = -1 \end{cases}$$

que es una ecuación diferencial de variables separables cuya solución es:

$$c_3'(t) = -\frac{25\pi^2}{4}c_3(t)$$

$$\frac{c_3'(t)}{c_3(t)} = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$\int \frac{c_3'(t)}{c_3(t)} = \int -\frac{25\pi^2}{4} dt$$

$$\ln(c_3(t)) - \ln(C) = -\frac{25\pi^2}{4}t$$

$$\ln \frac{c_3(t)}{C} = -\frac{25\pi^2}{4}t$$

$$\frac{c_3(t)}{C} = e^{-\frac{25\pi^2}{4}t}$$

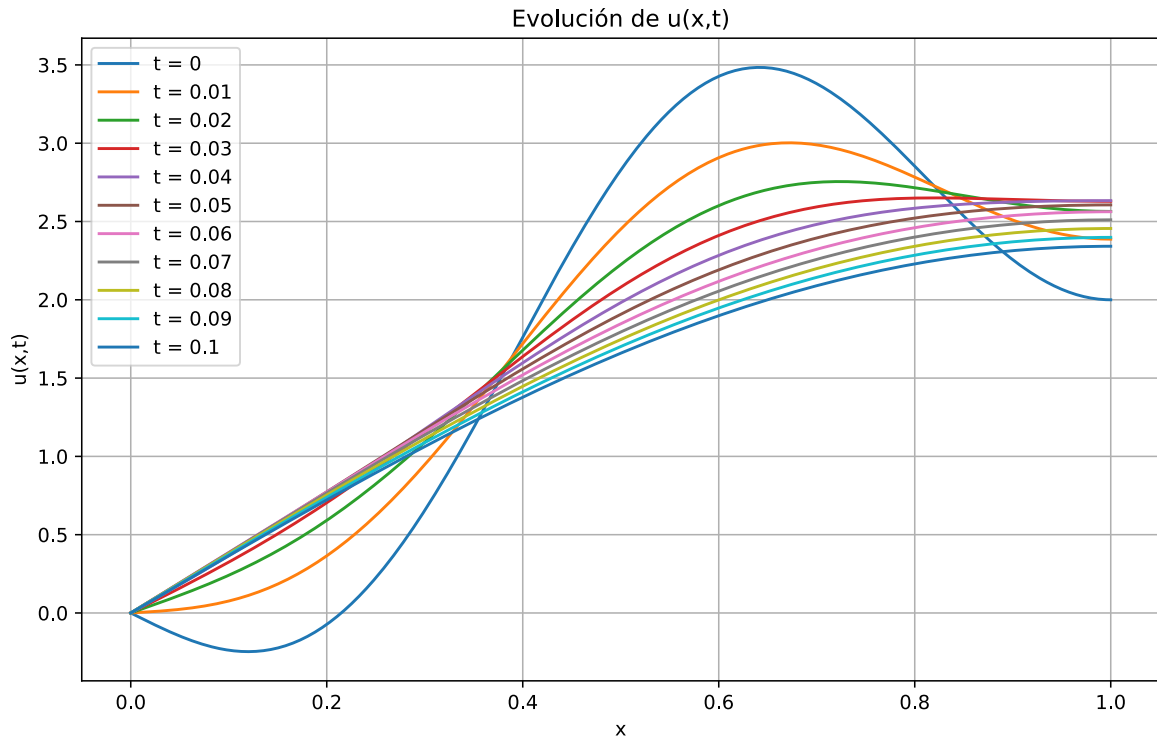
$$c_3(t) = Ce^{-\frac{25\pi^2}{4}t}$$

como $c_3(0) = 3 \Rightarrow C = -1$

$$c_3(t) = -e^{-\frac{\pi^2}{4}t}$$

con lo que sustituyendo en Ec. 32

$$u(x, t) = 3e^{-\frac{\pi^2}{4}t} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - e^{-\frac{25\pi^2}{4}t} \cdot \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)$$

Fig 9: Evolución de $u(x, t)$: Calor caso 3.

3.4. Varilla circular

Tomamos el intervalo $[-L, L]$ con condiciones frontera:

$$u(-L, t) = u(L, t), u_x(-L, t) = u_x(L, t), t > 0$$

y condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ con $-L < x < L$ Para que las soluciones no sean nulas se ha de cumplir que:

$$X(-L) = X(L) \quad y \quad X'(-L) = X'(L)$$

por lo que estamos en el Caso 4 de Sturm-Liouville con autovalores y autofunciones:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$n = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0 \Rightarrow X_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$n \geq 1 \Rightarrow X_{1n}(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad y \quad X_{2n}(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

La solución de la segunda ecuación de Ec. 20 es:

$$T_n(t) = e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \geq 1$$

y la solución se escribe como:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

siendo a_0 , a_n y b_n , $n \geq 1$ los coeficientes de Fourier de $f(x)$ periódica de periodo $2L$

3.4.1. Ejemplo resuelto caso periódico

Se considera la EDP $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ con $-1 < x < 1$, $t > 0$.

Resolverla utilizando el método de separación de variables con las condiciones frontera

$$u(-1, t) = u(1, t) \quad u_x(-1, t) = u_x(1, t)$$

y condiciones iniciales

$$f(x) = \begin{cases} 3 & -1 < x \leq 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Estamos en el Caso 4 de Sturm-Liouville con lo que:

$$L = 1$$

$$\lambda_n = (n\pi)^2$$

$$a_0(t) = \frac{1}{1} \int_{-1}^0 3 dx = [3x]_{-1}^0 = 3$$

$$X_{1n} = \cos(n\pi x)$$

$$X_{2n} = \sin(n\pi x)$$

$$a_n(t) = \int_{-1}^0 3 \cos(n\pi x) dx = \left[\frac{3}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]_{-1}^0 = 0$$

$$b_n(t) = \int_{-1}^0 3 \sin(n\pi x) dx = \left[-\frac{3}{n\pi} \cos(n\pi x) \right]_{-1}^0 = -\frac{3}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

Con lo que tenemos por solución:

$$u(x, t) = \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin(n\pi x) \right) e^{-n^2 \pi^2 t}$$

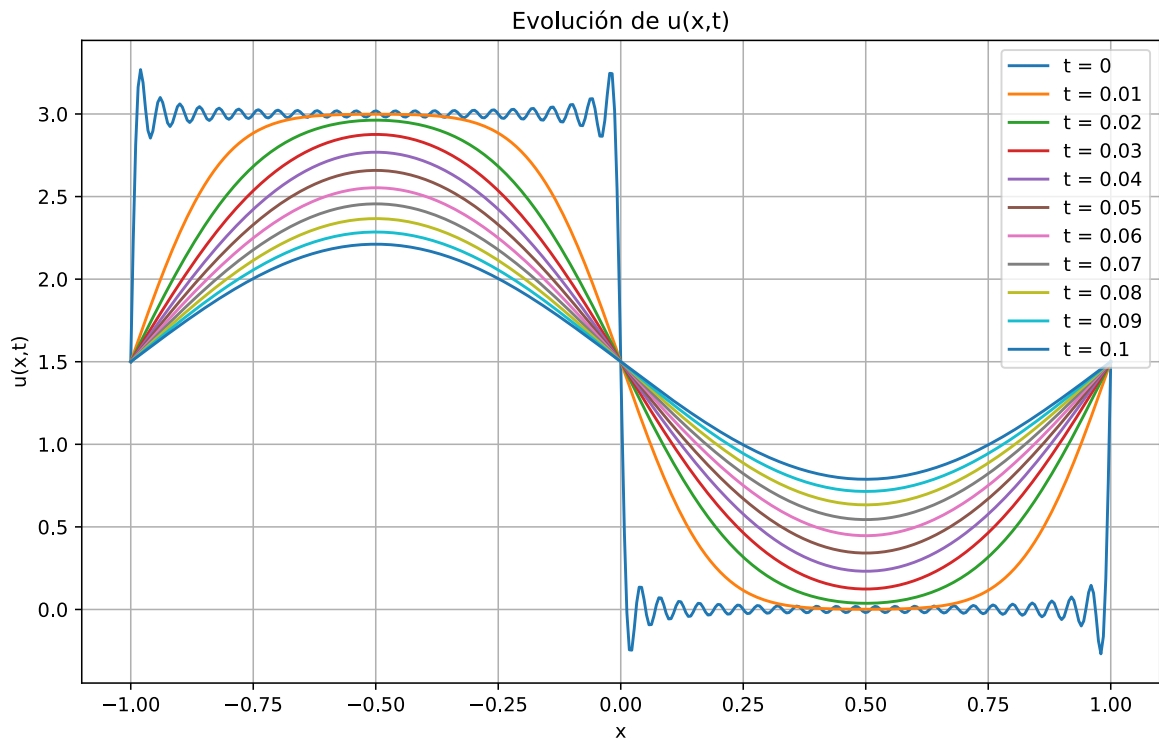


Fig 10: Evolución de $u(x, t)$: Calor caso periódico

4. Ecuación de onda

Queremos calcular la amplitud de cada punto de una cuerda vibrante de longitud L en cualquier instante de tiempo $t > 0$.

Si el desplazamiento horizontal es despreciable podemos modelarla con la EDP:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (33)$$

siendo c una constante que tiene unidades de velocidad.

Usaremos el método de separación de variables consistente en buscar soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$ con lo que la Ec. 33 se convierte en:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \quad (34)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \quad (35)$$

Como el primer miembro de Ec. 35 depende solo de x y el segundo solo de t ambos deben ser iguales a una constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \quad (36)$$

siendo λ un número real.

Por lo tanto tenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & 0 \leq x \leq L \\ T''(t) + \lambda \cdot c^2 \cdot T(t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (37)$$

Introduciendo las condiciones iniciales y las de frontera tendremos los siguientes casos:

4.1. Cuerda vibrante con extremos fijos

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

y la condición inicial es:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

Las condiciones iniciales nos llevan a:

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(L)T(t) = 0 \end{cases}$$

Como buscamos soluciones no triviales $X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0$ entonces la única posibilidad es $X(0) = X(L) = 0$ $T(t) \neq 0$ y por tanto $X(0) = X(L) = 0$.

Por lo que estamos en el Caso 1 del problema regular de Sturm-Liouville cuyos autovalores son:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n \geq 1$$

y las autofunciones son:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n \geq 1$$

La solución de la segunda ecuación de Ec. 37 es:

$$T_n(t) = b_{1n} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_{2n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

siendo b_{1n} y b_{2n} constantes que dependen de las condiciones iniciales.

En general será complicado que alguna de estas soluciones verifique además la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ y $u_t(x, 0) = g(x)$ por lo que parece razonable considerar una combinación lineal de las soluciones anteriores:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(b_{1n} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_{2n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

y obligar a que:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

y

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Así b_{1n} y b_{2n} son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente suponiendo $f(x)$ y $g(x)$ funciones periódicas impares de periodo $2L$.

4.2. Ejemplo resuelto Caso 1 cuerda vibrante con extremos fijos

Se considera la EDP $u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$ con $0 < x < 1$, $t > 0$. Resolverla utilizando el método de separación de variables con las condiciones frontera $u(0, t) = u(1, t) = 0$ y condiciones iniciales $u(x, 0) = -3 \sin(2\pi x) + 4 \sin(7\pi x)$ y $u_t(x, 0) = \sin(3\pi x)$.

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

$$0 < x < 1 \rightarrow a = 0 \quad b = 1 \rightarrow L = 1$$

$$t > 0$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \rightarrow \text{Caso 1}$$

$$f(x) = u(x, 0) = -3 \sin(2\pi x) + 4 \sin(7\pi x)$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sin(3\pi x)$$

Como estamos en el Caso 1 tendremos que los autovalores y las autofunciones serán según la Tabla 1

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Buscamos soluciones de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{1n} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_{2n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (38)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{1n} \cos(n\pi t) + b_{2n} \sin(n\pi t)) \cdot \sin(n\pi x)$$

que satisfaga las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \sin(n\pi x) = -3 \sin(2\pi x) + 4 \sin(7\pi x) & 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_{2n} \sin(n\pi x) = \sin(3\pi x) & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Luego $b_{1n} = 0$ si $n \neq 2, 7$, $b_{12} = -3$, $b_{17} = 4$ y $b_{2n} = 0$ si $n \neq 3$, $b_{23} = \frac{1}{3\pi}$

Por tanto la solución es:

$$u(x, t) = -3 \cos(2\pi t) \sin(2\pi x) + 4 \cos(7\pi t) \sin(7\pi x) + \frac{1}{3\pi} \sin(3\pi t) \sin(3\pi x)$$

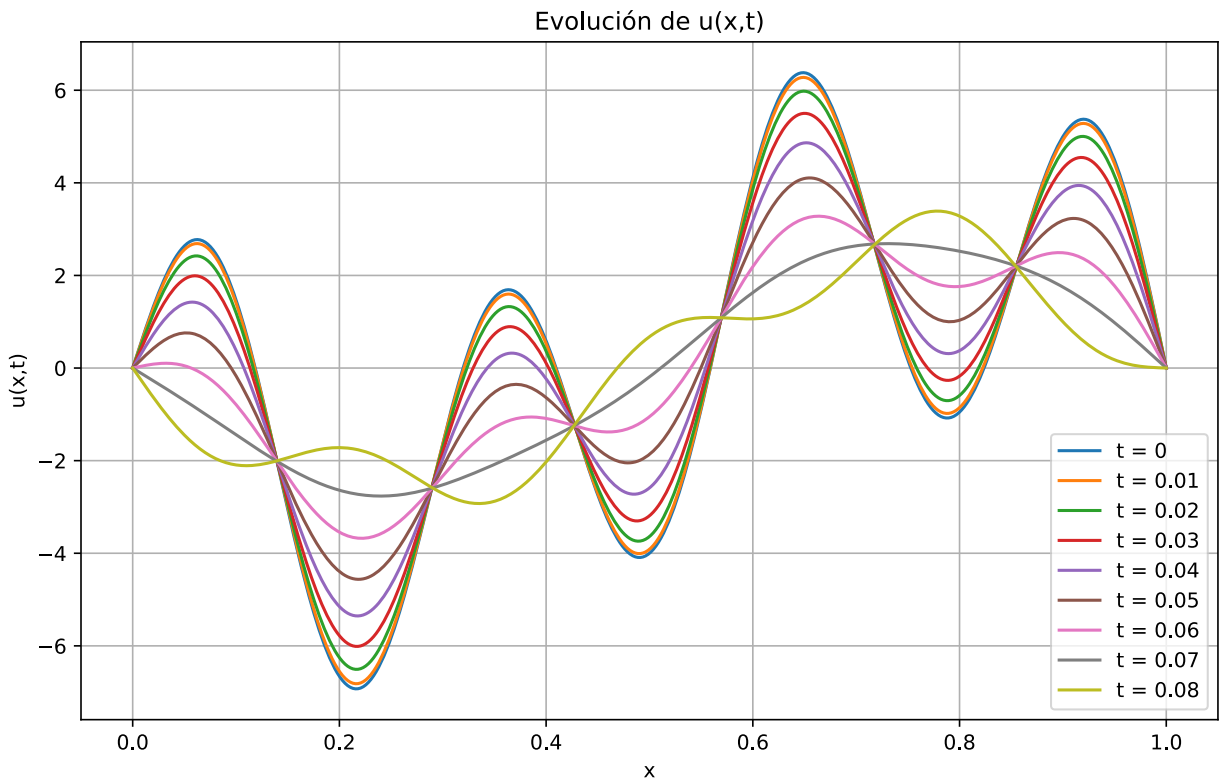


Fig 11: Evolución de $u(x, t)$: Onda caso 1 t .

4.3. Cuerda vibrante con extremos libres

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0 & t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

y las condiciones iniciales son:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

Las condiciones iniciales nos llevan a:

$$\begin{cases} X'(0)T(t) = 0 \\ X'(L)T(t) = 0 \end{cases}$$

Como buscamos soluciones no triviales $X'(0)T(t) = X'(L)T(t) = 0$ entonces la única posibilidad es $X'(0) = X'(L) = 0$ $T(t) \neq 0$ y por tanto $X'(0) = X'(L) = 0$. Por lo que estamos en el Caso 2 del problema regular de Sturm-Liouville cuyos autovalores son:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n \geq 0$$

y las autofunciones son:

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n \geq 0$$

La solución de la segunda ecuación de Ec. 37 es:

$$T_n(t) = a_{1n} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + a_{2n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

siendo a_{1n} y a_{2n} constantes que dependen de las condiciones iniciales. En general será complicado que alguna de estas soluciones verifique además la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ y $u_t(x, 0) = g(x)$ por lo que parece razonable considerar una combinación lineal de las soluciones anteriores:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{1n} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + a_{2n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

y obligar a que:

$$f(x) = u(x, 0)$$

$$g(x) = u_t(x, 0)$$

por lo que:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_{10} + \frac{1}{2}a_{20} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{1n} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + a_{2n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

siendo:

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{2}a_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = \frac{1}{2}a_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} a_{2n} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

con $a_{10}, a_{1n}, n \geq 1$ coeficientes de Fourier de $f(x)$ suponiendo $f(x)$ función periódica par de periodo $2L$ y con $a_{20}, a_{2n} \frac{n\pi c}{L}, n \geq 1$ coeficientes de Fourier de $g(x)$ suponiendo $g(x)$ función periódica par de periodo $2L$.

4.4. Ejemplo resuelto Caso 2 cuerda con extremos libres

Se considera la EDP $u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$ con $0 < x < 1$, $t > 0$. Resolverla utilizando el método de separación de variables con las condiciones frontera $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$ y condiciones iniciales $u(x, 0) = 2 - 3 \cos(4\pi x)$ y $u_t(x, 0) = 2 \cos(3\pi x)$.

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

$$0 < x < 1 \rightarrow a = 0 \quad b = 1 \rightarrow L = 1$$

$$t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \rightarrow \text{Caso 2}$$

$$f(x) = u(x, 0) = 2 - 3 \cos(4\pi x)$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = 2 \cos(3\pi x)$$

Como estamos en el Caso 2 tendremos que los autovalores y las autofunciones serán según la Tabla 1

$$\lambda_n = (n\pi)^2 \quad X_n(x) = \cos(n\pi x)$$

Buscamos soluciones de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{1n} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + a_{2n} \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (39)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_{10} + \frac{1}{2}a_{20} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{1n} \cos(n\pi t) + a_{2n} \sin(n\pi t)) \cdot \cos(n\pi x)$$

que satisfaga las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} \cos(n\pi x) = 2 - 3 \cos(4\pi x) & 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi a_{2n} \cos(n\pi x) = 2 \cos(3\pi x) & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Luego $\frac{1}{2}a_{10} = 2$, $a_{1n} = 0$ si $n \neq 4$, $a_{14} = -3$, $a_{10} = 2$ y $a_{2n} = 0$ si $n \neq 3$, $a_{23} = \frac{2}{3\pi}$

Con lo que la solución es:

$$u(x, t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \cos(n\pi t) + a_{2n} \sin(n\pi t)) \cdot \cos(n\pi x)$$

$$u(x, t) = 2 - 3 \cos(4\pi t) \cos(4\pi x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\pi t) \cos(3\pi x)$$

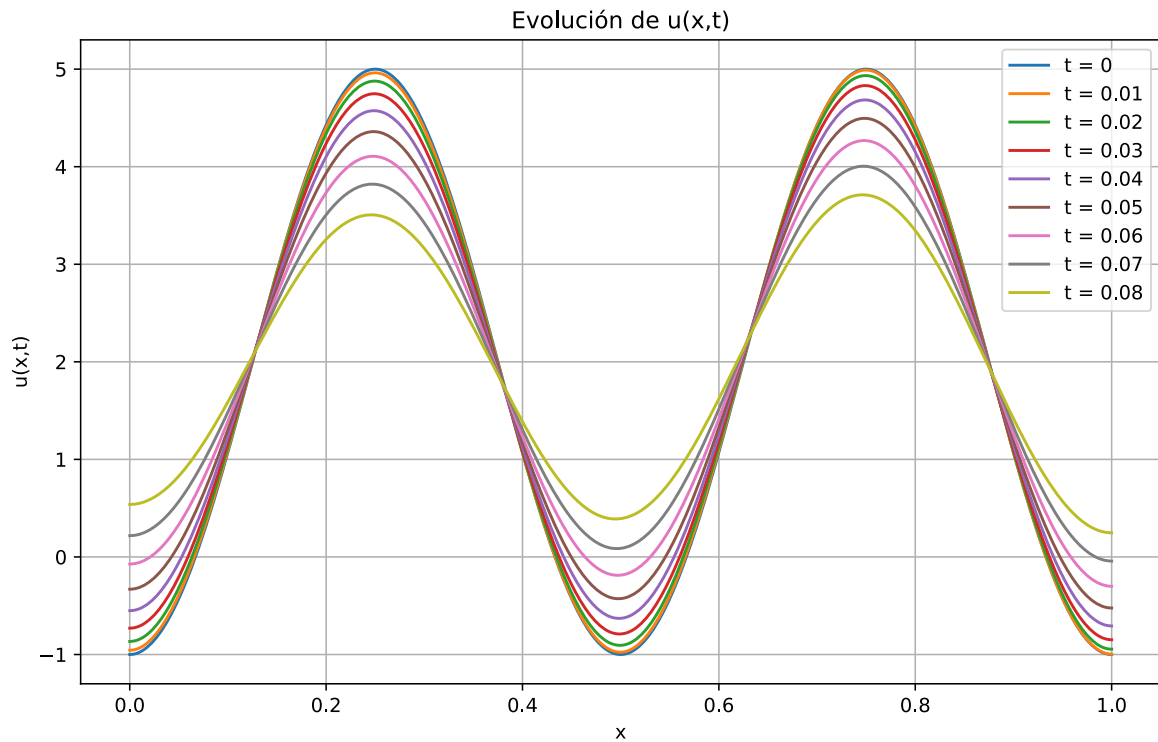


Fig 12: Evolución de $u(x, t)$: Onda caso 2

5. Resumen

A continuación vemos un resumen con las principales características tanto de la ecuación de calor como de la de onda.

5.1. Ecuación de calor

$$u_t(x, t) = k \cdot u_{xx}(x, t) + q(x, t)$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$t > 0$$

Solución general:

$$u(x, t) = \sum c_{n(t)} X_{n(t)}$$

Familia de EDO:

$$\begin{cases} c'_n(t) + k\lambda_n c_n(t) = q_n(t) \\ c_n(0) = f_n \end{cases}$$

donde λ_n es el autovalor del problema de Sturm-Liouville y $X_n(x)$ la autofunción asociada.

$q(x, t) = \sum q_{n(t)} \cdot X_{n(t)}$ y $f(x) = \sum f_{n(t)} \cdot X_{n(t)}$ coeficientes de Fourier de $q(x, t)$ y $f(x)$, respectivamente.

5.2. Ecuación de onda

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$$

$$0 < x < L$$

$$t > 0$$

Solución general:

$$u(x, t) = \sum c_{n(t)} X_{n(t)}$$

Familia de EDO:

$$\begin{cases} c'_n(t) + c^2 \lambda_n c_n(t) = q_n(t) \\ c_n(0) = f_n \\ c'_n(0) = g_n \end{cases}$$

donde λ_n es el autovalor del problema de Sturm-Liouville y $X_n(x)$ la autofunción asociada.

$q(x, t) = \sum q_{n(t)} \cdot X_{n(t)}$, $f(x) = \sum f_{n(t)} \cdot X_{n(t)}$ y $g(x) = \sum g_{n(t)} \cdot X_{n(t)}$ coeficientes de Fourier de $q(x, t)$, $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.

6. Métodos numéricos

Existen diversos métodos numéricos [6] para la resolución de EDP en función de que sean elípticas, parabólicas o hiperbólicas. En este trabajo desarrollamos dos de ellas.

6.1. Método FTCS para la ecuación de calor

Es un método progresivo en el tiempo y centrado en el espacio tal y como indica su nombre en inglés *Forward in Time, Centered in Space*.

Partimos de la ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde k es la conductividad térmica.

Discretizamos el espacio y el tiempo en una malla de puntos $u_{i,j}$ donde i es el índice espacial y j el índice temporal.

La discretización de la derivada temporal progresiva es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

La discretización de la derivada espacial de segundo orden centrada es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}$$

con lo que la ecuación de calor queda:

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = k \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}$$

usando la notación subindicial tenemos:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = k \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

donde i es el índice espacial y j el índice temporal.

Despejando $u_{i,j+1}$ nos queda:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

Se define el número de Courant como:

$$\alpha = \frac{k\Delta t}{\Delta x^2}$$

el método toma la siguiente expresión:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \alpha (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$
$$u_{i,j+1} = u_{i,j} (1 - 2\alpha) + \alpha \cdot u_{i+1,j} + \alpha \cdot u_{i-1,j}$$

Para que este método sea convergente [7] se ha de cumplir que el número de Courant sea:

$$\alpha = \frac{k\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

En caso contrario el método no converge.

La representación gráfica de la malla de puntos se denomina «Stencil» y es la siguiente:

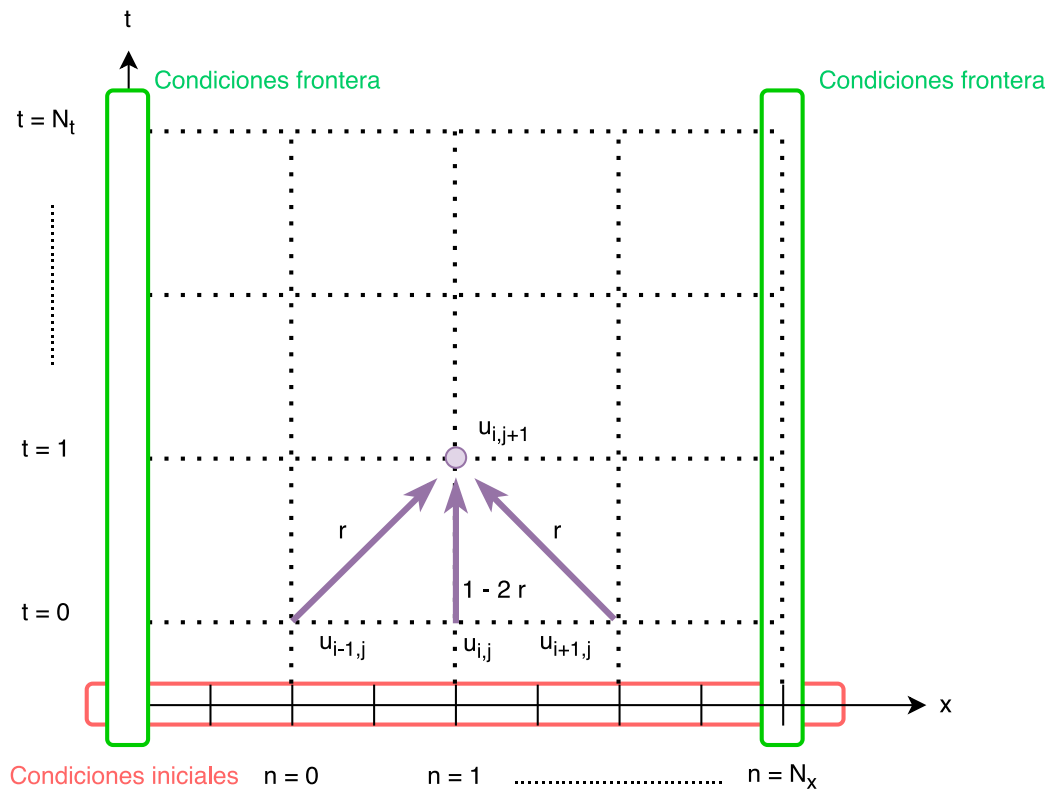


Fig 13: Stencil: Método FTCS

$$u_{i,j+1} = u_{i,j}(1 - 2\alpha) + \alpha \cdot u_{i+1,j} + \alpha \cdot u_{i-1,j}$$

6.2. Código en Python para la resolución del ejemplo de calor caso 1

Ahora implementamos el método FTCS en Python para el caso 1 de la ecuación de calor que resolvimos analíticamente y así poder comprobar si la solución numérica se aproxima a la analítica.

```
"""
ECUACION DE CALOR
CASO 1
LUIS FERNANDO RODRIGUEZ GARCIA
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Defino la función u(x, t)
def u(x, t):
    return np.exp(-4 * np.pi**2 * t) * np.sin(2 * np.pi * x) - 3 *
np.exp(-36 * np.pi**2 * t) * np.sin(6 * np.pi * x)

# Valores de x
x = np.linspace(0, 1, 400)

# Tiempos a representar
t_values = [0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08]

# Creo la figura
plt.figure(figsize=(10, 6))

# Represento u(x, t) para cada valor de t y lo exporto a svg
for t in t_values:
    plt.plot(x, u(x, t), label=f't = {t}')

plt.title("Evolución de u(x,t)")
plt.xlabel("x")
```

```
plt.ylabel("u(x,t)")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('calor1.svg', format='svg')
plt.show()

# Creo la animación y la exporto a gif

import matplotlib.animation as animation

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 5))
line, = ax.plot([], [], lw=2)
ax.set_xlim(0, 1)
ax.set_ylim(-4, 4)
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("u(x,t)")
ax.set_title("Animación de u(x,t)")

x = np.linspace(0, 1, 400)

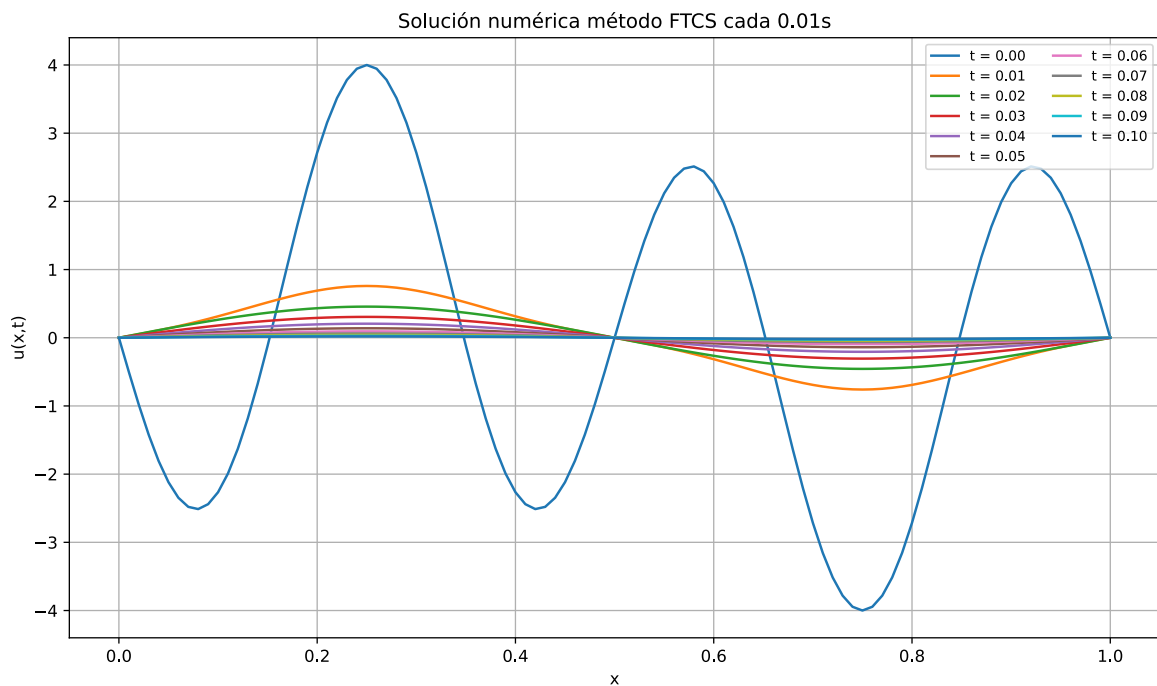
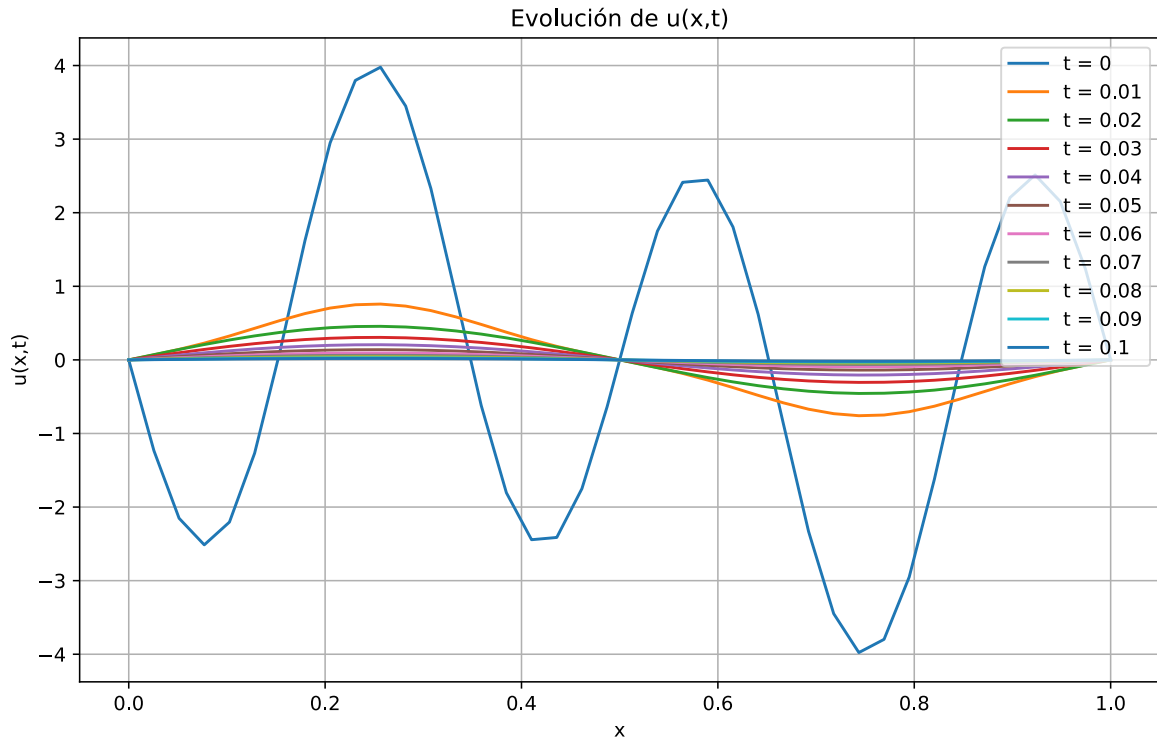
def init():
    line.set_data([], [])
    return line,

def animate(t):
    y = u(x, t)
    line.set_data(x, y)
    ax.set_title(f"u(x,t) en t = {t:.2f}")
    return line,

ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=np.linspace(0, 0.08,
100),
                             init_func=init, blit=True, interval=50)

plt.show()
ani.save("u_xt_1.gif", writer='pillow', fps=30)
```

A continuación representamos la evolución de la ecuación de calor en función del tiempo para el caso 1 con distintos pasos en x para observar como al aumentar el número de puntos en x la solución se aproxima a la analítica.



Como vemos coincide con la solución analítica obtenida en Fig 7.

6.3. Método implícito para la ecuación de onda

Este método es especialmente útil para problemas donde la estabilidad y la precisión son importantes.

La ecuación de onda unidimensional es:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 \cdot u_{xx}(x, t)$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda.

Sustituimos u_{tt} y u_{xx} por sus correspondientes derivadas centradas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - 2u(x, t + \Delta t) + u(x - \Delta x, t + \Delta t)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, t - \Delta t) - 2u(x, t - \Delta t) + u(x - \Delta x, t - \Delta t)}{\Delta x^2}$$

con lo que tendremos:

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - 2u(x, t + \Delta t) + u(x - \Delta x, t + \Delta t)}{\Delta x^2 c^{-2}}$$

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{u(x + \Delta x, t - \Delta t) - 2u(x, t - \Delta t) + u(x - \Delta x, t - \Delta t)}{\Delta x^2 c^{-2}}$$

Haciendo la media de estas dos ecuaciones nos queda:

$$\begin{aligned} & u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t) = \\ & = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{c^2}{\Delta x^2} (u(x + \Delta x, t + \Delta t) - 2u(x, t + \Delta t) + u(x - \Delta x, t + \Delta t) + \\ & \quad + u(x + \Delta x, t - \Delta t) - 2u(x, t - \Delta t) + u(x - \Delta x, t - \Delta t)) \end{aligned}$$

Denominando:

$$\alpha = \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta x^2}$$

y agrupando términos nos queda en notación subindicial:

$$(1 + \alpha^2)u_{i,j+1} - \frac{\alpha^2}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = 2u_{i,j} + \frac{\alpha^2}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - (1 + \alpha^2)u_{i,j-1}$$

Podemos llegar a una ecuación más reducida agrupando términos:

$$\frac{1 + \alpha^2}{2}(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - \frac{\alpha^2}{4}(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1}) - \frac{\alpha^2}{4}(u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) = u_{i,j}$$

Este método siempre es convergente.

A continuación representamos el «Stencil» para este método:

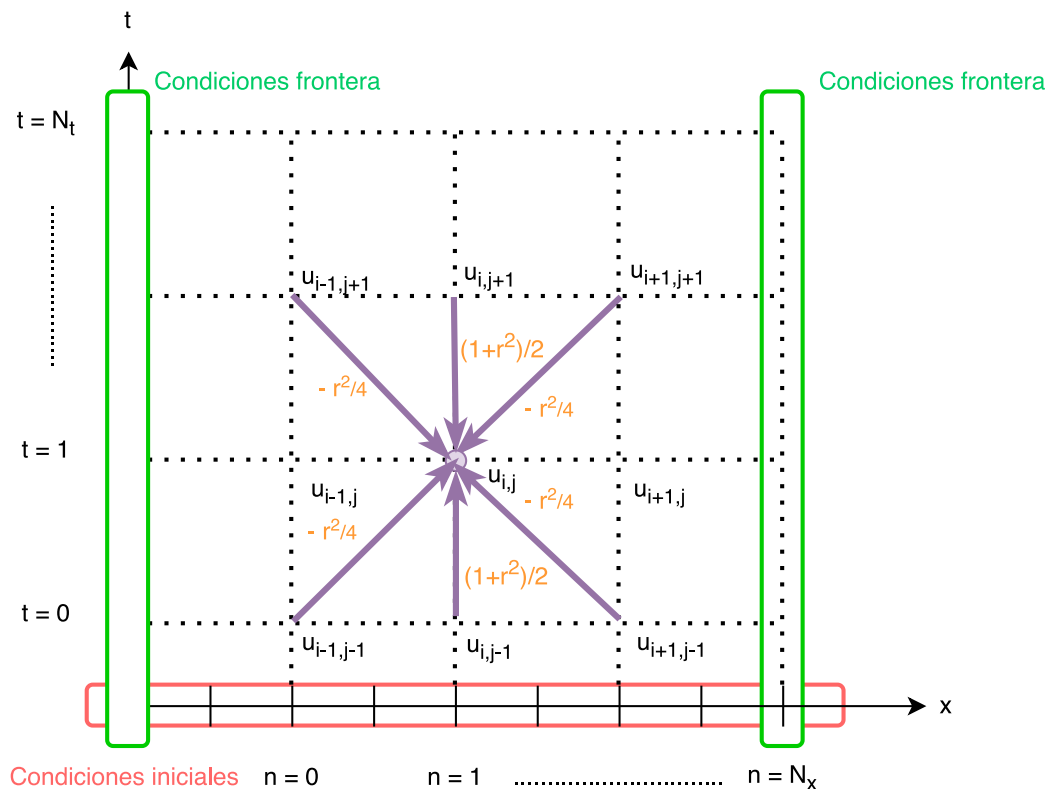


Fig 16: Stencil: Método implícito

$$\frac{1 + \alpha^2}{2}(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - \frac{\alpha^2}{4}(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1}) - \frac{\alpha^2}{4}(u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) = u_{i,j}$$

En esta ecuación agrupando términos podemos llegar a un sistema tridiagonal.

6.4. Código en Python para la resolución del ejemplo de onda caso 1

Ahora implementamos el método implícito en Python para el caso 1 de la ecuación de onda que resolvimos analíticamente y así poder comprobar si la solución numérica se aproxima a la analítica.

```
"""
ECUACION DE ONDA
CASO 1
LUIS FERNANDO RODRIGUEZ GARCIA
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation

# Defino la solución analítica u(x,t)
def u(x, t):
    term1 = -3 * np.cos(2 * np.pi * t) * np.sin(2 * np.pi * x)
    term2 = 4 * np.cos(7 * np.pi * t) * np.sin(7 * np.pi * x)
    term3 = (1 / (3 * np.pi)) * np.sin(3 * np.pi * t) * np.sin(3 * np.pi
* x)
    return term1 + term2 + term3

# Malla espacial
x = np.linspace(0, 1, 40)

# Tiempos a representar
t_values = [0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1]

plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```
for t in t_values:
    plt.plot(x, u(x, t), label=f't = {t:.2f}')

plt.title("Evolución de u(x,t) – Solución analítica de la ecuación de
onda")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("u(x,t)")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('onda_analitica.svg', format='svg')
plt.show()
# Creo la animación y la exporto a gif
# Parámetros de la animación
num_frames = 100
t_values = np.linspace(0, 0.1, num_frames)

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 5))
line, = ax.plot([], [], lw=3, color="brown")
ax.set_xlim(0, 1)
ax.set_ylim(-8, 8)
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("u(x,t)")
title = ax.set_title("")
ax.grid(True)

# Inicializo:
def init():
    line.set_data([], [])
    return line,

# Defino la función para la animación
def animate(i):
    t = t_values[i]
    y = u(x, t)
    line.set_data(x, y)
    title.set_text(f"u(x,t) en t = {t:.3f}")
```

```
    return line, title

ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=range(num_frames),
                              init_func=init, blit=True, interval=30)

plt.show()

# Guardo como GIF
ani.save("u_xt_onda1.gif", writer='pillow', fps=30)
```

A continuación representamos la evolución de la onda en función del tiempo para el caso 1 de la ecuación de onda con distintos pasos en x para observar como al aumentar el número de puntos en x la solución se aproxima a la analítica.

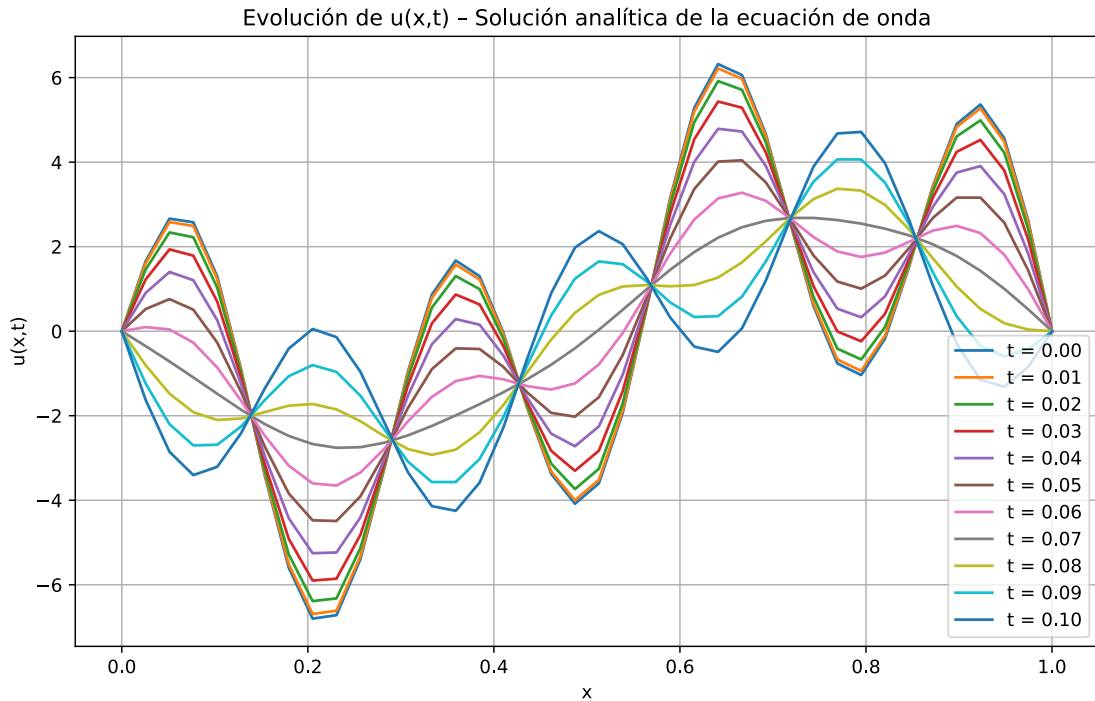


Fig 17: Evolución de $u(x,t)$: Método implícito con 40 puntos en x

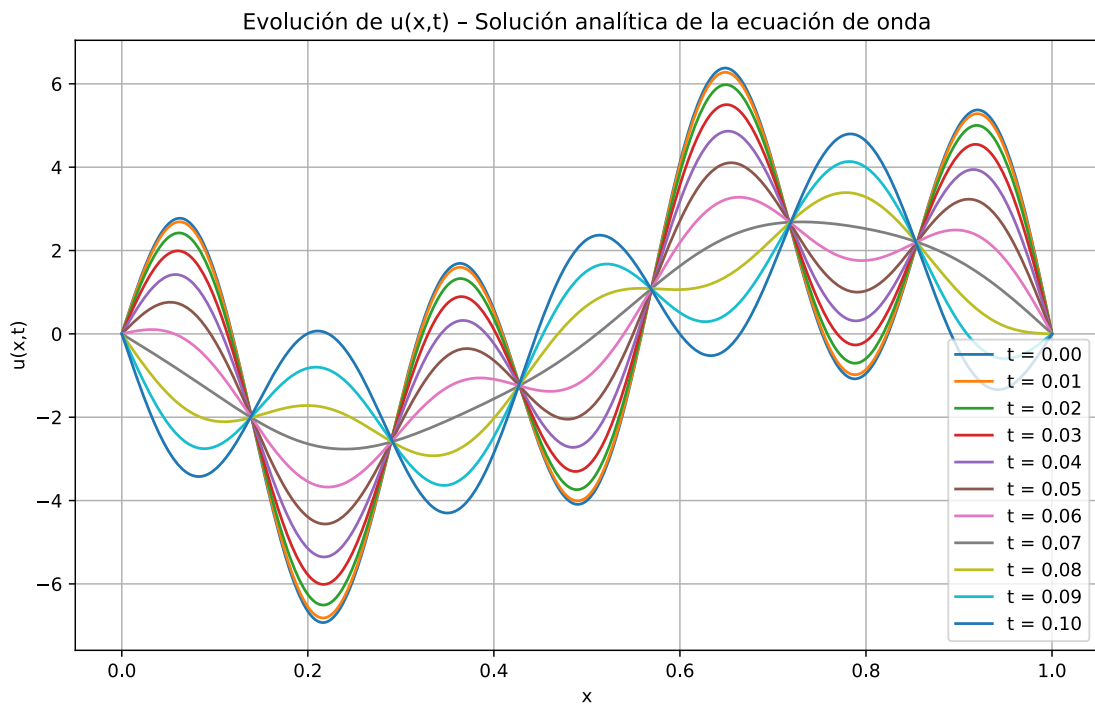


Fig 18: Evolución de $u(x,t)$: Método implícito con 400 puntos en x

Como vemos coincide con la solución analítica obtenida en Fig 11.

7. Resumen y conclusiones

El objetivo de este trabajo es que sirva para la didáctica de EDP aplicadas a la física como son la ecuación de calor y de onda tanto desde el punto de vista analítico como desde el punto de vista numérico. En su resolución analítica se ha seguido el método de separación de variables y se han obtenido las soluciones para los casos más comunes de frontera, tanto para la ecuación de calor como para la ecuación de onda.

Aunque existen diversos métodos numéricos para la resolución de EDP aquí se han aplicado dos para poderlos comparar con los resultados analíticos, obteniéndose los resultados esperados.

Se ha podido constatar que el método FTCS para la ecuación de calor y el método implícito para la ecuación de onda son métodos que convergen a las soluciones analíticas obtenidas mediante el método de separación de variables.

Se espera que con ello se tenga una visión general de la resolución de EDP y que sirva como base para el estudio de otros casos más complejos, para que algún otro alumno en un futuro pueda continuar este trabajo completando otras situaciones de interés (como por ejemplo calor y onda completa o Laplace) así como otros métodos numéricos para su resolución (explícitos, implícitos, Crank-Nicholson, Método de Elementos Finitos, etc).

Bibliografía

- [1] M. Groult, «Jean Le Rond D'Alembert: Œuvres complètes. Série I: Traités et mémoires mathématiques 1736-1756. Volume 6: Premiers textes de mécanique céleste 1747-1749., 2002», *Dix-Huitième Siècle*, vol. 36, n.º 1, pp. 594-595, 2004.
- [2] J. B. J. baron de Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, 1822.
- [3] R. Haberman, «Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equation Approach Using Maple». JSTOR, 2003.
- [4] M. A. Al-Gwaiz, *Sturm-Liouville theory and its applications*, vol. 264. Springer, 2008.
- [5] V. Serov y others, *Fourier series, Fourier transform and their applications to mathematical physics*, vol. 197. Springer, 2017.
- [6] J. D. Faires y R. L. Burden, *Numerical methods, 4th*. Cengage Learning, 2012.
- [7] V. Ruas, *Numerical methods for partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2016.