



Universidad Internacional de la Rioja (UNIR)

Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Dinámica no lineal del modelo neuronal de Rulkov memristivo

Trabajo Fin de Estudios

presentado por: Miguel Moreno Sánchez

Dirigido por: Daniel de la Rosa Gómez - UNIR, Miguel A.F. Sanjuán - Universidad Rey Juan Carlos, Alexandre R. Nieto - Universidad Rey Juan Carlos

Ciudad: España

Fecha: 23 de julio de 2025

Índice de Contenidos

Resumen	v
Abstract	vi
1. Introducción	1
2. Contexto y Estado del Arte	3
2.1. Regímenes de actividad neuronal	3
2.2. Modelos neuronales	4
2.2.1. Modelos continuos: Modelo de Hodgkin-Huxley	5
2.2.2. Modelos discretos	6
2.3. Modelo de Rulkov	8
2.3.1. Régimen de silencio	12
2.3.2. Régimen de <i>spiking</i>	14
2.3.3. Régimen de <i>bursting</i>	15
2.3.4. Regímenes sobre el plano de parámetros	16
2.3.5. Comportamiento caótico	20
2.4. Influencia de la corriente externa en el modelo de Rulkov	22
2.4.1. Efecto de la corriente sobre σ	22
2.4.2. Efecto de la corriente sobre β	26
3. Objetivos	28
3.1. Objetivo general	28
3.2. Objetivos específicos	28
4. Metodología del trabajo	29
5. Desarrollo del trabajo	30
5.1. Memristor: Introduciendo memoria en el sistema	30
5.2. Simulación de la corriente de inducción con un memristor	31
5.3. Nuevo modelo de Rulkov memristivo	36
5.3.1. Parámetro α memristivo	37
5.3.2. Parámetro σ memristivo	45

5.3.3. Memristor con memoria finita	49
5.4. Construcción de una red neuronal	51
5.4.1. Sincronización entre dos neuronas acopladas	53
5.4.2. Sincronización en una red neuronal de mundo pequeño	55
6. Conclusiones y Trabajo Futuro	65
7. Bibliografía	66
Referencias	66

Índice de Ilustraciones

2.1. Ejemplos de los tres regímenes de actividad neuronal	4
2.2. Diagrama de telaraña del mapa rápido $x_{n+1} = f(x_n, y)$	9
2.3. Isoclinas rápida y lenta para diferentes valores de α	12
2.4. Trayectoria para $\alpha = 3$ y $\sigma = -0.5$ - <i>Silencio</i>	13
2.5. Trayectoria para $\alpha = 6$ y $\sigma = -0.75$ - <i>Silencio</i>	14
2.6. Trayectoria para $\alpha = 3$ y $\sigma = 0.4$ - <i>Spiking</i>	15
2.7. Trayectoria para $\alpha = 6$ y $\sigma = -0.1$ - <i>Bursting</i>	16
2.8. Trayectoria para $\alpha = 5$ y $\sigma = 0.8$ - <i>Silencio</i>	18
2.9. Regímenes neuronales sobre el plano de parámetros (σ, α)	19
2.10. Condición para que se produzca <i>spiking</i>	20
2.11. Efecto sobre σ de un pulso cuadrado positivo de corriente	23
2.12. Efecto del aumento en σ sobre la trayectoria en el espacio de fases	24
2.13. Efecto sobre σ de un pulso cuadrado negativo de corriente	25
2.14. Efecto sobre β de un pulso cuadrado positivo de corriente	27
5.1. Comparación de la trayectoria para el mapa con y sin memristor	33
5.2. Trayectoria influenciada por el estado del memristor	34
5.3. Diagrama de telaraña del mapa rápido del modelo de Rulkov con corriente de inducción	35
5.4. Parámetro α memristivo	38
5.5. Transición entre los tres regímenes neuronales	39
5.6. Valor medio de x sobre el plano de parámetros (σ, α)	40
5.7. Transición de <i>spiking</i> a <i>bursting</i> con α memristivo y parámetro corrector h	41
5.8. División en regiones sobre el plano de parámetros en función del comporta- miento asintótico del estado del memristor	42
5.9. Ajuste de la constante de tiempo τ del memristor	43
5.10. Fases de inactividad positivas	44
5.11. Simulación para el modelo de Rulkov α -memristivo con mapa rápido modi- ficado	45
5.12. Transición de <i>bursting</i> a silencio con σ memristivo	46
5.13. Transición de <i>bursting</i> a <i>spiking</i> con σ memristivo	47

5.14. Efecto de un pulso de corriente sobre el modelo de Rulkov σ -memristivo . .	48
5.15. Resultados con parámetro α memristivo con memoria finita	50
5.16. Resultados I con parámetro σ memristivo con memoria finita	51
5.17. Trayectoria caótica del modelo de Rulkov σ -memristivo con memoria finita	52
5.18. Resultados II con parámetro σ memristivo con memoria finita	52
5.19. Acoplamiento entre dos neuronas de Rulkov no memristivas	54
5.20. Dinámica de una red de neuronas de Rulkov no memristivas	57
5.21. Dinámica de dos neuronas de la red de Rulkov no memristiva	58
5.22. Dinámica de la red neuronal de Rulkov σ -memristiva para diferentes m . .	59
5.23. Transición de sincronización en una red neuronal de Rulkov σ -memristiva .	61
5.24. Diferencia en la evolución del memristor según el grupo de sincronización .	61
5.25. Relación entre los valores de τ y del número de estados m almacenados por el memristor que producen la transición de sincronización para $\alpha = 5$. . .	62
5.26. Relación entre los valores de τ y del número de estados m almacenados por el memristor que producen la transición de sincronización para $\alpha = 5.5$. . .	63
5.27. Efecto de la relación entre τ , α y m sobre la capacidad de oscilación de $\sigma(z)$	64

Resumen

Se modifica el modelo de Rulkov, que simula el comportamiento de las neuronas biológicas, sustituyendo uno de sus parámetros de control por una función memristiva de tipo sigmoide, lo cual produce una variación del parámetro en cuestión de acuerdo con la historia del sistema durante la simulación. El nuevo modelo memristivo exhibe transiciones uniformes y caóticas entre dos o más regímenes de actividad neuronal. Se analiza el comportamiento del modelo dependiendo de la rapidez con la que cambia el estado del memristor, así como del número de estados almacenados por este. Además, se construye una red de tipo *small-world* con neuronas de Rulkov memristivas y se estudia su sincronización en función de la memoria del memristor, obteniéndose transiciones abruptas de completa sincronización a sincronización por grupos.

Palabras Clave: Modelo de Rulkov, Memristor discreto, Sincronización, Dinámica no lineal

Abstract

The Rulkov model, which simulates the behavior of biological neurons, is modified by replacing one of its control parameters with a memristive sigmoid-type function. This produces a variation in the parameter according to the system's history during the simulation. The new memristive model exhibits uniform and chaotic transitions between two or more regimes of neuronal activity. The model's behavior is analyzed depending on the speed at which the memristor's state changes, as well as on the the number of states stored by it. In addition, a small-world network with memristive Rulkov neurons is built, and its synchronization is studied based on the memristor's memory, revealing abrupt transitions from full synchronization to clustering synchronization.

Key Words: Rulkov model, Discrete memristor, Synchronization, Nonlinear Dynamics

1. Introducción

El presente trabajo de fin de Máster se enmarca en el ámbito de los modelos neuronales basados en mapas discretos memristivos. El desarrollo de modelos matemáticos que simulan el comportamiento de las neuronas biológicas tiene como objetivo fundamental dilucidar los mecanismos mediante los cuales las neuronas transmiten información. Ello permitiría el diseño de nuevas estrategias para combatir enfermedades neurológicas vinculadas a una anormal sincronización entre las neuronas, como la epilepsia o la enfermedad de Parkinson. Otro motivo de peso sobre el interés en los sistemas dinámicos que simulan la actividad neuronal es que, históricamente, muchos modelos para Inteligencia Artificial se han inspirado fuertemente en ellos.

El primer modelo matemático para una neurona individual fue propuesto en 1952 por Hodgkin y Huxley. Desde entonces, se han diseñado una gran variedad de sistemas dinámicos continuos con comportamientos similares a aquellos obtenidos con el modelo pionero, los cuales reproducen los tres regímenes en los que se clasifica toda actividad neuronal: régimen de silencio, régimen oscilante o de *spiking* y régimen de ráfagas o de *bursting*. Recientemente han empezado a recibir especial atención los modelos neuronales basados en sistemas dinámicos discretos, como el modelo de Chialvo o el modelo de Rulkov. Es el último el modelo que se estudia y modifica en este trabajo a partir de la transformación de uno de sus parámetros de control en una función memristiva de tipo sigmoide. Debido al esquema memristivo, el parámetro en cuestión se vuelve variable durante la simulación y se observan transiciones entre los tres regímenes de actividad neuronal.

La incorporación del memristor en el modelo de Rulkov se hace atendiendo a la realidad biológica que representa. De los dos parámetros de control en el modelo original, α y σ , susceptibles de transformarse en memristores, se muestra que se puede descartar el primero de ellos debido a la predictibilidad y a las inconsistencias de su comportamiento con la observaciones experimentales. Por otro lado, para el modelo con σ como parámetro memristivo se obtienen comportamientos variados que podrían emular la plasticidad sináptica de las neuronas. Las dinámicas más interesantes para el modelo de Rulkov σ -memristivo se obtienen cuando se escoge una memoria finita para el memristor.

El trabajo se estructura en las siguientes secciones: En la sección 2, se contextualiza el problema y se analiza en detalle el funcionamiento del modelo original de Rulkov. En la sección 3 se enumeran los objetivos de la investigación. En la sección 4 se explica la metodología del trabajo y, finalmente, en la sección 5 se recoge la aportación novedosa, la cual se organiza como sigue. En el apartado 5.1. se introduce el concepto de memristor y sus aplicaciones. En el apartado 5.2. se motiva la sustitución de un parámetro de control del modelo original por una función memristiva exponiendo las limitaciones y potenciales problemas de introducir el memristor de manera forzada, como se ha realizado en la mayoría de investigaciones anteriores. En el apartado 5.3. se analiza el modelo de Rulkov cuando se hacen α y σ memristivos, tanto con memoria infinita como finita. Por último, en el apartado 5.4. se construye una red neuronal de Rulkov memristiva y se estudian las transiciones de sincronización en función del número de estados almacenados por el memristor. Se obtienen transiciones abruptas de sincronización completa en la red a sincronización por *clustering*.

2. Contexto y Estado del Arte

2.1 Regímenes de actividad neuronal

En el cerebro humano hay alrededor de 10^{11} neuronas y cada una de ellas está conectada a más de otras 10000 neuronas. El proceso de transmisión de información a través de las neuronas, conocido como **sinapsis**, consiste en la producción de impulsos eléctricos que pasan de unas neuronas a otras. En el ámbito de la neurociencia, se habla de **potencial de acción** o *spike* para referirse al impulso eléctrico. A nivel molecular, el potencial de acción es una onda de descarga eléctrica que viaja a lo largo de la membrana de la neurona modificando su polaridad en cuestión de milisegundos; de polaridad negativa a polaridad positiva y, luego, de vuelta a negativa. Para información detallada acerca de los mecanismos biológicos tras la sinapsis neuronal se recomienda consultar (Izhikevich, 2007). La magnitud física medible en la sinapsis es la diferencia de potencial eléctrico a través de la membrana de la neurona, que separa el medio extracelular de su interior.

El interés de este trabajo radica en los distintos regímenes de actividad neuronal conocidos. Durante muchos años se pensó que eran tan solo dos los estados posibles para las neuronas:

- **Silencio:** La neurona no transmite ningún impulso eléctrico y la diferencia de potencial eléctrico a través de la membrana celular es el potencial de equilibrio.
- **Spiking:** La neurona produce potenciales de acción.

En la figura 2.1a se muestra una neurona, que tras producir varios potenciales de acción, se estabiliza en un régimen de silencio. En el eje de abscisas se representa el tiempo, mientras que en el eje de ordenadas se representa el potencial eléctrico a través de la membrana, ambos en unidades arbitrarias. En la figura 2.1b se muestra un ejemplo de producción de *spikes*.

Sin embargo, la postura ampliamente aceptada por la comunidad científica en la actualidad es otra. Investigaciones recientes, como (Friedenberg, Harkin, Tóth, y Naud, 2023), sostienen que el código neuronal es ternario. El tercer estado, *bursting*, consiste en la producción de forma alternante entre ráfagas de oscilaciones de potencial de acción y fases de

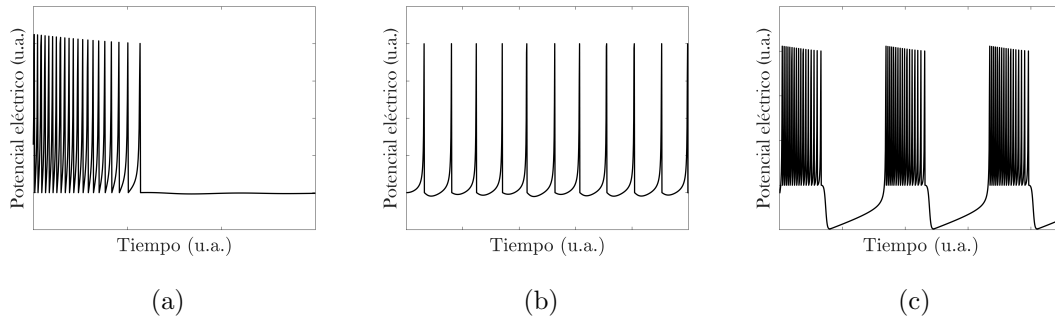


Figura 2.1: Ejemplos de los tres regímenes de actividad neuronal. (a) Régimen de silencio, en el que la neurona tiende hacia un estado de equilibrio. (b) Régimen de *spiking*, la neurona produce oscilaciones del potencial eléctrico. (c) Régimen de *bursting*, la neurona produce ráfagas de potencial de acción seguidas de fases de inactividad de forma alternante.

inactividad, representado en la figura 2.1c. Esta definición para el tercer estado no está, en absoluto, libre de ambigüedades. No se especifica cuántas oscilaciones mínimas deben constituir una ráfaga o *burst* ni cómo de elevada debe ser la frecuencia de oscilación, por ejemplo. La realidad es que no existe una definición consensuada para el *bursting*, principalmente debido a que neuronas de distintas partes del cerebro producen ráfagas de diferentes características. La idea fundamental es que un *burst* es más que la suma de varios *spikes*, por lo que se considera un régimen nuevo e independiente del *spiking*. Algunas propiedades generales observadas en el *bursting* que se enumeran en (Friedenberg y cols., 2023) son:

- 1) Alta frecuencia de oscilación frente al *spiking*.
- 2) Despolarización sostenida: La diferencia de potencial eléctrico a través de la membrana se mantiene, en promedio, más positiva que en la configuración de equilibrio.
- 3) Disminución de la amplitud y ensanchamiento del potencial de acción a medida que finaliza la ráfaga y se aproxima el comienzo de la fase de inactividad.

2.2 Modelos neuronales

Se han desarrollado múltiples modelos matemáticos que emulan el comportamiento de una neurona individual con el propósito de dilucidar los mecanismos de transmisión de información en la sinapsis. En este sentido fue revolucionario el modelo propuesto en el año

1952 por los fisiólogos y biofísicos ingleses **Alan Hodgkin** y **Andrew Huxley**, por el que recibieron el Premio Nobel de fisiología-medicina en el año 1963. Los modelos neuronales se clasifican fundamentalmente en dos categorías, continuos y discretos.

2.2.1 Modelos continuos: Modelo de Hodgkin-Huxley

El modelo neuronal continuo más importante es el modelo de Hodgkin-Huxley (Hodgkin y Huxley, 1952), que consiste en el sistema dinámico no lineal de orden cuatro

$$\begin{cases} C \frac{dV}{dt} = -g_K n^4 (V - E_K) - g_{Na} m^3 h (V - E_{Na}) - g_l (V - E_l) + I(t), \\ \frac{dn}{dt} = -\frac{n - n_0(V)}{\tau_n(V)}, \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{m - m_0(V)}{\tau_m(V)}, \\ \frac{dh}{dt} = -\frac{h - h_0(V)}{\tau_h(V)}. \end{cases} \quad (2.1)$$

En el sistema 2.1, V representa la diferencia de potencial eléctrico a través de la membrana de la neurona y es la magnitud física observable. C es la capacidad de la membrana, g_K , g_{Na} y g_l son las conductancias máximas asociadas a los canales iónicos de potasio, sodio y otras especies químicas, respectivamente, E_K , E_{Na} y E_l son los potenciales de Nernst (potenciales de equilibrio) de cada una de las especies químicas e $I(t)$ es la intensidad de corriente eléctrica que viaja a través de la neurona. Son de especial relevancia las variables n , m y h , cuyos valores están comprendidos en el intervalo $[0, 1]$ y reflejan la dependencia de la conductancia de los canales de potasio y de sodio en la diferencia de potencial eléctrico. Por ejemplo, si $n = 0$, no hay flujo de iones de potasio a través de la membrana, pues la intensidad de corriente asociada es nula, mientras que si $n = 1$, esta intensidad de corriente es la máxima posible; $g_K(V - E_K)$. Por último τ_n , τ_m y τ_h son constantes de tiempo que establecen la rapidez con la que cambian las variables n , m y h , respectivamente.

En el supuesto de que en la transmisión de impulsos nerviosos únicamente interviniese un tipo de ion, el potencial de equilibrio, aquel correspondiente a $\frac{dV}{dt} = 0$, sería trivialmente su potencial de Nernst. Por ejemplo, si se tratara del potasio, $V_{eq} = E_K$. Sin embargo, realmente son varias las especies químicas involucradas en la generación de potenciales de acción y, por este motivo, el potencial de equilibrio

$$V_{\text{eq}} = \frac{g_K n^4 E_K + g_{\text{Na}} m^3 h E_{\text{Na}} + g_l E_l}{g_K n^4 + g_{\text{Na}} m^3 h + g_l}, \quad (2.2)$$

es una media de sus potenciales de Nernst ponderada por sus conductancias. A día de hoy, muchos consideran que el modelo de Hodgkin-Huxley continúa siendo aquel que reproduce con mayor adecuación el comportamiento dinámico de las neuronas biológicas. Sin embargo, la no linealidad del sistema junto a su elevada dimensionalidad (el espacio de fases es de dimensión cuatro) dificultan ostensiblemente el análisis matemático del modelo, como se expone en (Rulkov, 2002). Mediante el desarrollo de modelos matemáticos simplificados se busca arrojar luz al funcionamiento tras la sinapsis neuronal, por lo que interesa reducir la complejidad de los modelos al mínimo posible, al mismo tiempo que se preserva la capacidad de simular de manera realista los distintos regímenes neuronales. Por supuesto, este último es el objetivo central de la modelización matemática general de cualquier problema y no es exclusivo de los modelos neuronales.

2.2.2 Modelos discretos

La mayor dificultad a la hora de desarrollar modelos continuos que simulen de manera realista los distintos regímenes de actividad neuronal reside en la capacidad de generar comportamiento caótico. El potencial de acción en una neurona puede oscilar de manera caótica y el modelo matemático desarrollado debe contemplar este posible escenario. El teorema de Poincaré-Bendixson asegura la imposibilidad de comportamiento caótico en un sistema dinámico continuo bidimensional (Strogatz, 2018), por lo que resulta necesario el uso de mínimo tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas en la construcción de modelos neuronales continuos. Por ejemplo, el modelo de Hodgkin-Huxley consiste en cuatro ecuaciones diferenciales.

No obstante, en los sistemas dinámicos discretos o **mapas**, el comportamiento caótico es posible hasta en una sola dimensión, como por ejemplo en el mapa logístico. Recientemente, han adquirido una creciente popularidad los modelos para neuronas biológicas basados en mapas. En (Ibarz, Casado, y Sanjuán, 2011) se recogen los principales modelos neuronales discretos. El primer modelo neuronal discreto ampliamente reconocido fue el **modelo de Chialvo** (Chialvo, 1995), que sirvió como inspiración para el **modelo de**

Rulkov, modelo central de este trabajo. Antes de analizar el modelo de Rulkov, es preciso exponer los principales fundamentos de la dinámica de los mapas, comenzando por el caso más sencillo, los mapas unidimensionales. Para una información más exhaustiva consúltase (Alligood, Sauer, y Yorke, 1996).

Definición 1. *Un mapa unidimensional es una aplicación $x_{n+1} = f(x_n)$, que produce una secuencia de valores sobre la recta real $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots\}$, dada una condición inicial x_0 . Esta secuencia constituye la trayectoria del mapa.*

La trayectoria puede divergir o converger a un atractor en el límite $n \rightarrow \infty$. El atractor más sencillo posible es un **punto fijo**.

Definición 2. *Un valor x^* se dice que es un punto fijo del mapa $x_{n+1} = f(x_n)$, cuando resulta invariante bajo su aplicación, es decir $x^* = f(x^*)$.*

Un punto fijo puede ser estable (en cuyo caso sería un atractor) o inestable en función del comportamiento del mapa en una vecindad de este. Cuando una condición inicial cercana a x^* genera una trayectoria que tiende al punto fijo, se dice que este es estable. En caso contrario, el punto fijo se dice que es inestable. Cuando la función del mapa $f(x)$ es derivable en un entorno de x^* , se tiene el siguiente criterio para evaluar la estabilidad de un punto fijo.

Teorema 2.2.1. *Sea x^* un punto fijo del mapa $x_{n+1} = f(x_n)$. Si f es derivable en un entorno de x^* , entonces se satisface:*

- *El punto fijo es estable si $|f'(x^*)| < 1$.*
- *El punto fijo es inestable si $|f'(x^*)| > 1$.*

Si el mapa es n-dimensional; $\vec{x}_{n+1} = \mathcal{A}(\vec{x}_n)$, con $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la definición de punto fijo es la misma que para el caso unidimensional. La estabilidad de los puntos fijos se determina, cuando es posible, a partir de los valores propios de la matriz Jacobiana de $\mathcal{A}$.

Teorema 2.2.2. *Sea $\vec{x}^*$ un punto fijo del mapa $\vec{x}_{n+1} = \mathcal{A}(\vec{x}_n)$. Si $\mathcal{A}$ es diferenciable en un entorno de $\vec{x}^*$ con matriz Jacobiana $J(\vec{x})$, entonces se satisface:*

- *El punto fijo es estable si todos los autovalores de la matriz Jacobiana evaluada en $\vec{x}^*$, $J(\vec{x}^*)$, tienen módulos inferiores a la unidad.*
- *El punto fijo es inestable si, al menos, uno de los autovalores de la matriz Jacobiana evaluada en $\vec{x}^*$, $J(\vec{x}^*)$, presenta módulo mayor que la unidad.*

2.3 Modelo de Rulkov

El modelo neuronal central en este trabajo es el modelo de Rulkov. El físico ruso **Nikolai F. Rulkov**, investigador de la Universidad de California (San Diego), propuso entre los años 2001 y 2004 tres modelos neuronales discretos (Rulkov, 2001), (Rulkov, 2002), (Shilnikov y Rulkov, 2004). Los tres modelos se describen de forma conjunta con el sistema dinámico

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n + \beta_n), \\ y_{n+1} = y_n - \mu(x_n + 1) + \mu\sigma_n. \end{cases} \quad (2.3)$$

En el mapa bidimensional 2.3, la variable de estado relevante es x , que es directamente proporcional al potencial eléctrico a través de la membrana neuronal. La variable y es una variable auxiliar sin sentido físico que se caracteriza por cambiar muy lentamente en comparación con x . Ello se consigue para valores pequeños del parámetro μ ; $0 < \mu \ll 1^1$, lo cual garantiza que $y_{n+1} \approx y_n$. Por este motivo, en lo sucesivo a x se le llamará **variable rápida**, mientras que a y se le llamará **variable lenta**. σ_n y β_n son parámetros de control del modelo que determinan el régimen de actividad neuronal. Los distintos modelos propuestos por Rulkov se diferencian en la dinámica del mapa rápido, es decir en la función $f(x_n, y_n + \beta_n)$. De los tres modelos de Rulkov, el presente trabajo busca enriquecer las capacidades del modelo de 2002 (Rulkov, 2002), para el cual el mapa rápido viene dado por la función a trozos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-x} + y & ; \ x \leq 0, \\ \alpha + y & ; \ 0 < x < \alpha + y, \\ -1 & ; \ x \geq \alpha + y, \end{cases} \quad (2.4)$$

que introduce un nuevo parámetro de control, α . A continuación, se estudian las propiedades del modelo de Rulkov de 2002 escogiendo los parámetros de control $\sigma_n = \sigma$ y $\beta_n = \beta$ constantes. Cuando β es constante, no aporta información relevante al comportamiento dinámico del sistema y se puede prescindir de ella realizando el cambio de variable $y_n^{\text{new}} = y_n + \beta$. Por lo tanto, se puede tomar $\beta = 0$, dejando como únicos parámetros

¹A lo largo de todo el trabajo se escoge $\mu = 0.001$, siempre que no se indique diferente.

de control a σ y α . El análisis se simplifica atendiendo a la enorme diferencia entre los tiempos característicos de evolución de la variable rápida y de la variable lenta, la cual permite estudiar la dinámica del mapa rápido con y congelado.

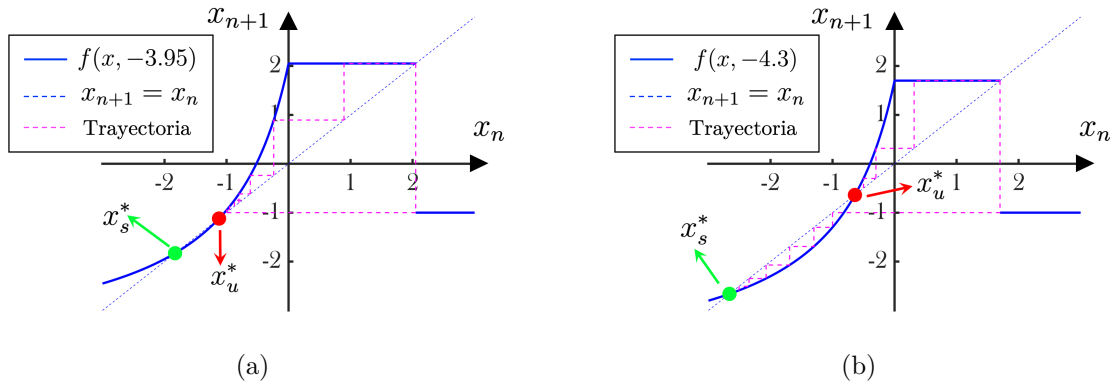


Figura 2.2: Diagrama de telaraña del mapa rápido $x_{n+1} = f(x_n, y)$ con y constante y $\alpha = 6$. Muestra la trayectoria de la variable rápida x . (a) El mapa $x_{n+1} = f(x_n, -3.95)$ forma una trayectoria periódica debido al continuo alejamiento del punto fijo inestable x_u^* , representado de color rojo, seguido del retorno a $x = -1$ inducido por el tercer tramo de la función a trozos 2.4. (b) El mapa $x_{n+1} = f(x_n, -4.3)$ tiende hacia el punto fijo estable x_s^* , representado de color verde.

En la figura 2.2 se representa el **diagrama de telaraña** del mapa rápido $x_{n+1} = f(x_n, y)$ con y constante. En particular, se escoge $y = -3.95$ para la figura 2.2a e $y = -4.3$ para la figura 2.2b. En ambas figuras, se toma $\alpha = 6$ y se muestran los puntos fijos del mapa rápido, distinguiendo de color verde el punto fijo estable, x_s^* , del punto fijo inestable, x_u^* , representado de color rojo. Los puntos fijos salen de la intersección entre la recta identidad, $x_{n+1} = x_n$, y la función del mapa, $x_{n+1} = f(x_n, y)$, es decir son solución de la ecuación de segundo grado

$$x^* = f(x^*, y) = \frac{\alpha}{1 - x^*} + y \implies (x^*)^2 - (1 + y)x^* + (\alpha + y) = 0. \quad (2.5)$$

Resulta directo probar por reducción al absurdo que los puntos fijos, en el caso de existir, solo pueden originarse en la región $x < 0$. El mapa rápido presenta cuatro escenarios posibles.

- 1) Biestabilidad del punto fijo x_s^* y un ciclo límite.
- 2) Punto fijo x_s^* estable y órbita homoclínica.
- 3) Monoestabilidad del punto fijo x_s^* .
- 4) No existen puntos fijos.

El primer escenario se representa en la figura 2.2a y ocurre cuando $x_u^* < -1$. Si se parte de una condición inicial $x_0 > x_u^*$, se tiende a un ciclo superestable debido al continuo distanciamiento de x_u^* y el sucesivo retorno a $x = -1$ ocasionado por el tercer tramo de la función a trozos $f(x, y)$. Este ciclo se utiliza para modelar el régimen de *spiking*. Por el contrario, si se parte de $x_0 < x_u^*$, se tiende hacia el punto fijo estable x_s^* , lo cual sirve para modelar el régimen de silencio.

Por otro lado, el segundo escenario se da cuando y y α son tales que el punto fijo inestable x_u^* es justamente -1 . En este caso, si $x_0 > x_u^*$, la trayectoria inicialmente se aleja del punto fijo, pero acaba llegando exactamente a $x_u^* = -1$ debido al retorno inducido artificialmente por la función a trozos. A la trayectoria que comienza arbitrariamente cerca de x_u^* , pero cumpliendo $x_0 > x_u^*$, y acaba regresando a $x_u^* = -1$ se le conoce en el lenguaje de los sistemas dinámicos como **órbita homoclínica**. Si $x_0 < x_u^*$, la trayectoria se aleja de x_u^* y tiende hacia x_s^* .

El tercer escenario se produce cuando $x_u^* > -1$ e independientemente de la condición inicial se acaba convergiendo al punto fijo estable x_s^* . Esta situación se representa en la figura 2.2b, en la que se escoge una condición inicial $x_0 > x_u^*$.

Por último, el cuarto escenario se da cuando la ecuación 2.5 de segundo grado no presenta raíces reales y no existen puntos fijos del mapa rápido.

El análisis anterior del mapa rápido se ha realizado considerando a la variable y constante. No obstante, esta, aunque lo hace en cantidades generalmente mucho menores que x , también cambia su valor entre iteraciones consecutivas. La variación paulatina de y produce transiciones entre los cuatro escenarios descritos para el mapa rápido. Interesa, por tanto, estudiar cómo varía y . Para ello se busca la variedad del espacio de fases (x, y)

sobre la cual la variable lenta se mantiene constante, que se conoce por el nombre de **isoclina**. De la segunda ecuación de 2.3, resulta inmediato comprobar que si $x_n = -1 + \sigma$, se obtiene $y_{n+1} = y_n$. Denotamos por $x_s = -1 + \sigma$ a la isoclina de la variable lenta, donde el subíndice s es por *slow*. Además, la evolución de y está completamente caracterizada por la posición de la trayectoria en el espacio de fases con respecto a la isoclina lenta.

- Si $x_n > x_s \implies y_{n+1} < y_n$
- Si $x_n < x_s \implies y_{n+1} > y_n$

Por otro lado, resolviendo la ecuación 2.5 se obtiene la isoclina rápida $x_{n+1} = x_n$, la cual denotamos por x_f , donde el subíndice f abrevia a *fast*. La isoclina rápida

$$x_f = \frac{1 + y \pm \sqrt{(1 - y)^2 - 4\alpha}}{2}, \quad (2.6)$$

consiste en la unión de dos curvas, x_{fu} y x_{fs} , correspondientes, respectivamente, a la rama positiva y a la rama negativa de la raíz cuadrada en la ecuación 2.6, solución de 2.5. La rama x_{fu} proporciona la posición del punto fijo inestable x_u^* del mapa rápido en función de y , mientras que la rama x_{fs} hace lo propio con el punto fijo estable x_s^* . Las isoclinas rápida y lenta del mapa de Rulkov se representan en la figura 2.3 para diferentes valores de α y $\sigma = -1$. La intersección entre las isoclinas x_f y x_s proporciona el punto fijo del mapa global, el cual se muestra con un asterisco azul. Para esta elección de los parámetros de control, el punto fijo se ubica sobre la curva x_{fs} , por lo que resulta razonable que este actúe como atractor estable y la neurona eventualmente se asiente en un régimen de silencio. En la figura también se representa de color magenta la recta $x = -1$. Dicha recta es de crucial importancia en el funcionamiento del modelo, puesto que, debido al tercer tramo de la función 2.4, la trayectoria pasa cada ciertas iteraciones por ella. Más adelante, se discutirá la condición necesaria, pero no suficiente, para que se origine *bursting*, que es que la recta $x = -1$ corte a la rama inestable x_{fu} de la isoclina rápida. Conviene destacar que, aunque la ecuación 2.6 produce valores de x positivos, estos no pueden representar puntos fijos del mapa rápido. Ello se ha tenido en cuenta en la elaboración de la figura 2.3, donde no se representa la rama inestable x_{fu} para $x > 0$.

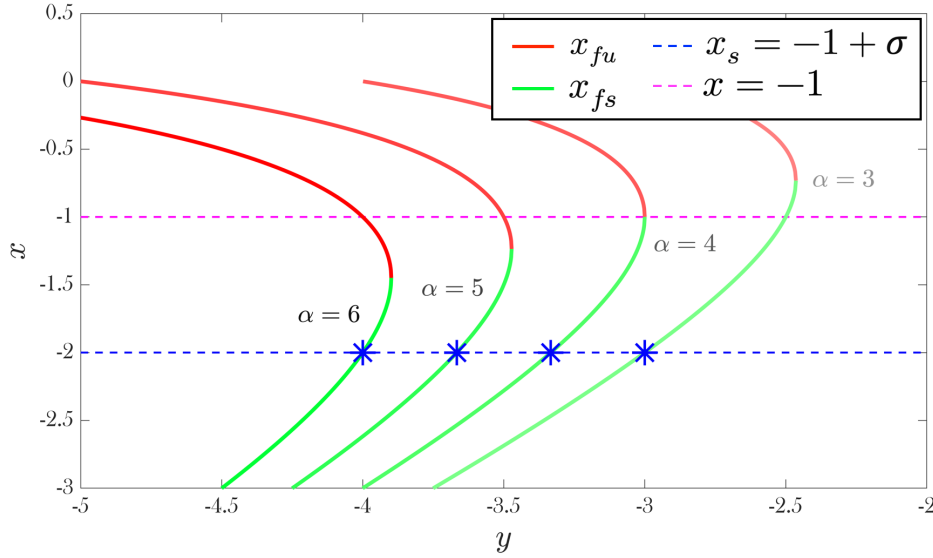


Figura 2.3: Se muestra la isoclina rápida x_f compuesta por una rama estable x_{fs} , representada de color verde, y por una rama inestable x_{fu} , representada de color rojo, y la isoclina lenta x_s del mapa de Rulkov para diferentes valores de α y $\sigma = -1$. El punto fijo (asterisco azul) se obtiene a partir de la intersección de las isoclinas.

2.3.1 Régimen de silencio

De acuerdo con el análisis anterior, el mapa de Rulkov de 2002 converge a un estado estacionario correspondiente al régimen silencioso de la neurona cuando la intersección de las isoclinas x_f y x_s se produce sobre la rama estable x_{fs} (curva verde en la figura 2.3), suficientemente lejos del punto de unión entre las ramas estable e inestable. En la figura 2.4 se muestra un transitorio de oscilaciones del potencial de acción, seguido de una fase permanente de silencio. En la figura 2.4a se representa la componente x de la trayectoria, es decir el potencial de acción, mientras que en la figura 2.4b se representa la trayectoria sobre el espacio de fases junto a las isoclinas, indicando el movimiento mediante flechas. Se parte del punto A y, como $x > x_s$, la variable y disminuye progresivamente. Se observa que se producen oscilaciones entre los puntos A y B, mientras que el valor de y es tal que no existen puntos fijos del mapa rápido. En cuanto se originan x_s^* y x_u^* (punto B), como $x = -1$ corta a la rama estable x_{fs} , la trayectoria queda atrapada sobre ella en dirección al atractor del mapa global (asterisco azul). Esto último corresponde al tramo B $\rightarrow$ C.

Para la elección anterior de valores de los parámetros, $\alpha = 3$ y $\sigma = -0.5$, la recta

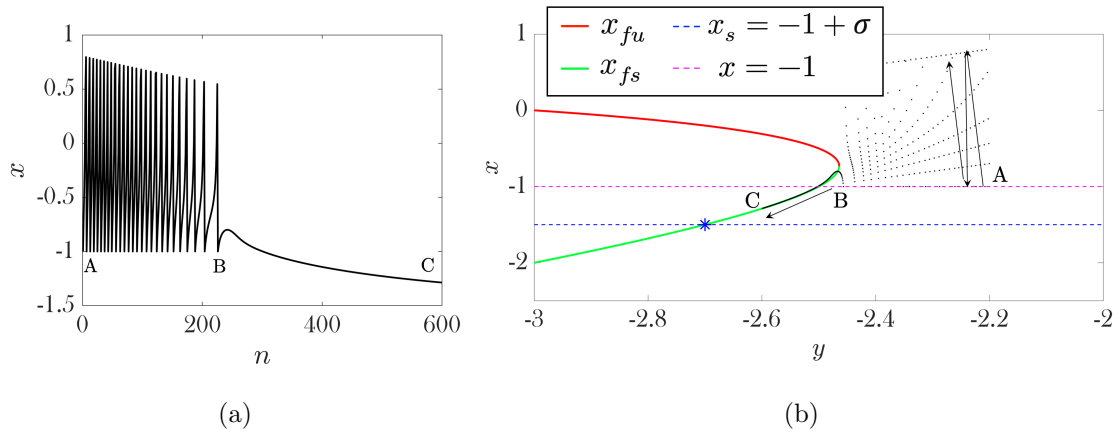


Figura 2.4: Trayectoria para $\alpha = 3$ y $\sigma = -0.5$. En (a) se muestra la componente x de la trayectoria, mientras que en (b) se muestra la trayectoria sobre el espacio de fases junto a las isoclinas x_f y x_s . La dinámica finaliza en régimen de silencio tras un transitorio de régimen de *spiking*. Se producen oscilaciones de la variable rápida x (tramo A $\rightarrow$ B) hasta que el valor de la variable lenta y es tal que se forman los puntos fijos del mapa rápido, quedando la trayectoria atrapada sobre la rama estable x_{fs} (tramo B $\rightarrow$ C) en dirección al punto fijo global (asterisco azul).

$x = -1$ corta sobre x_{fs} (figura 2.4b) y por ello las oscilaciones cesan en cuanto se originan los puntos fijos del mapa rápido, x_s^* y x_u^* . Ahora escogemos $\alpha = 6$, que tal y como se muestra en la figura 2.5, produce que $x = -1$ corte a la rama inestable x_{fu} y, como consecuencia, el régimen transitorio de *spiking* (tramo A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C) se mantenga aún cuando ya se han originado x_s^* y x_u^* (punto B). Sin embargo, como $\sigma = -0.75$, el punto fijo global continúa sobre x_{fs} , y el régimen final sigue siendo estacionario. En cuanto, $x_n = -1 < x_u^*$ o, equivalentemente, $x_n = -1$ caiga por debajo de la curva x_{fu} (punto C), la trayectoria tiende a la rama estable (tramo C $\rightarrow$ D), desembocando en una fase permanente de silencio (tramo D $\rightarrow$ E).

Conviene destacar que las oscilaciones se producen entre $x = -1$ y $x = \alpha + y$, ya que estos son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de la función $f(x, y)$ 2.4 cuando se forma el ciclo superestable del mapa rápido. Como y decrece gradualmente, los máximos del potencial de acción son cada vez menores. Ello se pone de manifiesto en las figuras 2.4a y 2.5a. El modelo de Rulkov también reproduce satisfactoriamente el aumento del periodo de oscilación del *spiking* que acompaña a la disminución progresiva de la amplitud. Esto

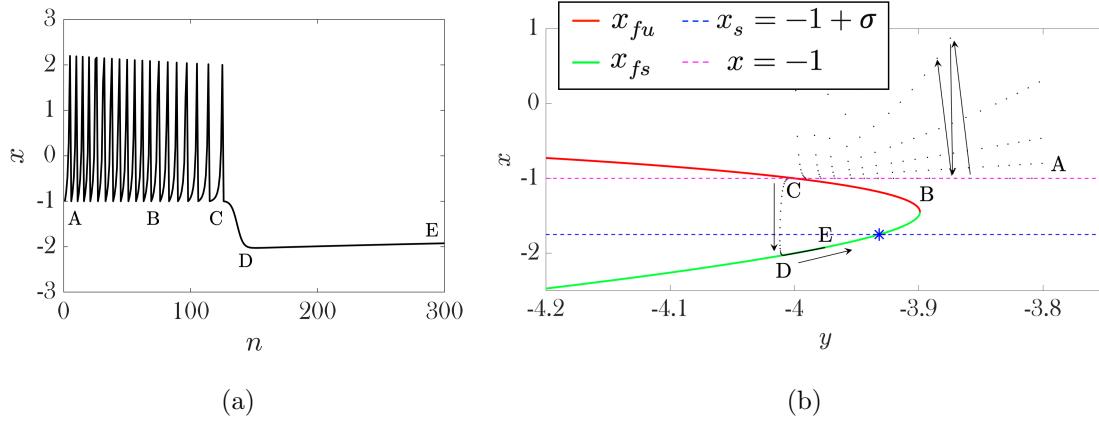
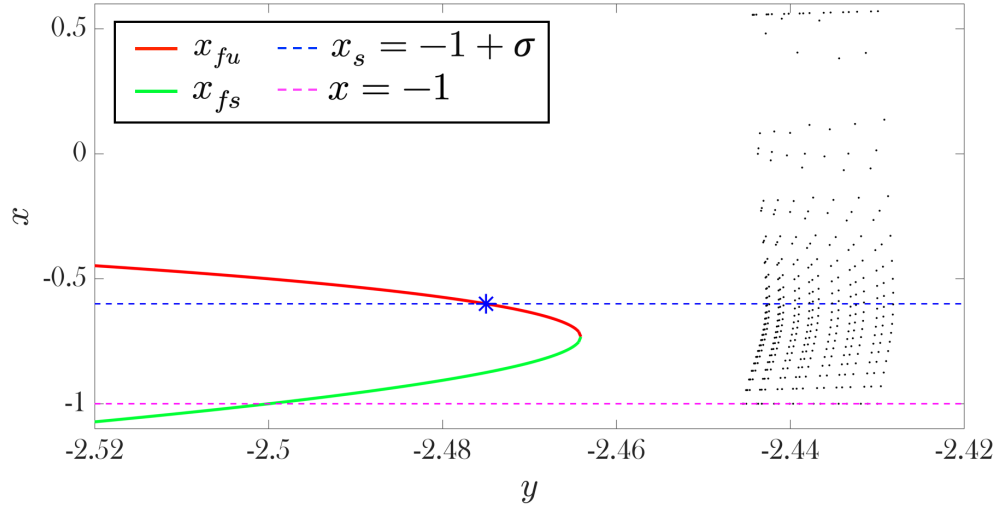


Figura 2.5: Trayectoria para $\alpha = 6$ y $\sigma = -0.75$. En (a) se muestra la componente x de la trayectoria, mientras que en (b) se muestra la trayectoria sobre el espacio de fases junto a las isoclinas x_f y x_s . Se producen oscilaciones (tramo $A \rightarrow B \rightarrow C$) hasta que $x_n = -1 < x_u^*$ y la trayectoria cae abruptamente a la rama estable x_{fs} (tramo $C \rightarrow D$), desembocando en el régimen final de silencio (tramo $D \rightarrow E$).

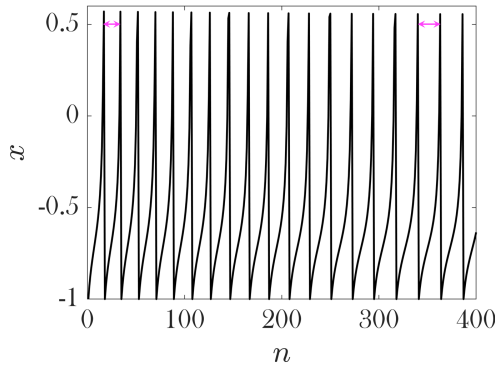
último se debe a que al disminuir y , el punto fijo inestable x_u^* se acerca a $x = -1$ y la trayectoria emplea más iteraciones alejándose de este cada vez que comienza una nueva oscilación.

2.3.2 Régimen de *spiking*

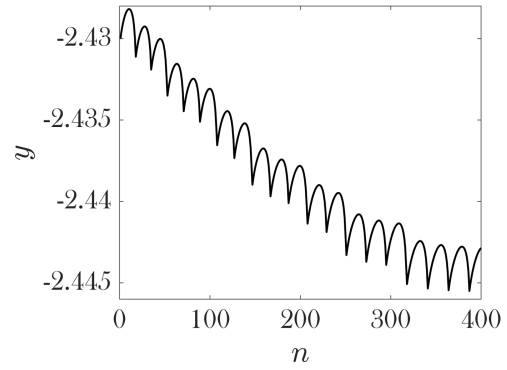
Para que el sistema no finalice en un régimen silencioso se precisa que el punto fijo del mapa global 2.3 caiga sobre la rama inestable x_{fu} de la isoclina rápida (curva roja en la figura 2.3). Si además $\alpha < 4$, el régimen final será de *spiking*, ya que el *bursting* solo es posible para valores de α mayores que 4 por motivos que se discuten en la siguiente sección. El *spiking* regular se acaba formando cuando el número de puntos $x < x_s$ durante una oscilación, compensa con el número de puntos $x > x_s$ y en consecuencia $y_{n+k} = y_n$, siendo k el periodo de la oscilación. Esta situación se muestra en la figura 2.6. En concreto, en la figura 2.6a se representa la trayectoria en el espacio de fases, mientras que en las figuras 2.6b y 2.6c se representan las componentes x e y , respectivamente, en función del número de iteración n . Se observa que el valor de y decrece progresivamente, lo cual ocasiona el aumento del periodo de las oscilaciones del potencial de acción, hasta que se alcanza el equilibrio descrito anteriormente.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.6: Trayectoria para $\alpha = 3$ y $\sigma = 0.4$. La neurona entra en régimen de *spiking* regular. En (a) se representa la trayectoria en el espacio de fases junto a la isoclinas x_f y x_s , mientras que en (b) y (c) se muestran las componentes x e y , respectivamente, de la trayectoria en función del tiempo. La situación de equilibrio se alcanza cuando los puntos $x < x_s$ compensan a los puntos $x > x_s$ de la trayectoria ocasionando la oscilación periódica de la variable lenta y . Antes de alcanzar dicho equilibrio, y decrece generando un aumento del periodo de oscilación, lo cual se indica mediante flechas de color magenta en (b).

2.3.3 Régimen de *bursting*

Cuando la intersección de las isoclinas x_s y x_f se produce sobre la rama inestable x_{fu} y, además, se obtiene $x_u^* > -1$ antes de que se alcance la situación en que la variable lenta y deja de decrecer y queda atrapada en el bucle $y_{n+k} = y_n$ ocasionando un *spiking* regular,

se producen ráfagas del potencial de acción. En la figura 2.7 se muestra un ejemplo del régimen de *bursting*. Las oscilaciones cesan en el punto A, cuando $x_n < -1$ y la trayectoria tiende hacia el punto fijo estable del mapa rápido x_s^* (tramo A $\rightarrow$ B), igual que sucedía en la figura 2.2b. Como la rama estable x_{fs} cae en todo momento por debajo de la isoclina lenta x_s , el valor de y aumenta lentamente hasta salirse de ella (tramo B $\rightarrow$ C), lo cual simula la fase de inactividad en el *bursting*. Al salirse de la rama estable, vuelven a producirse oscilaciones, siendo la primera la de mayor amplitud (punto D), ya que a partir de entonces la variable y decrece provocando la disminución y el ensanchamiento de los *spikes* hasta alcanzar nuevamente el punto A. De este modo, el sistema queda atrapado en un régimen de *bursting* cíclico.

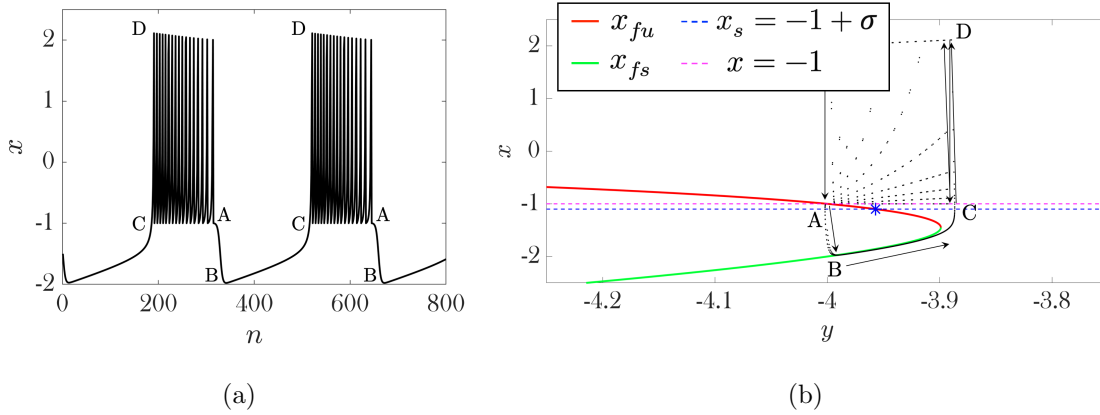


Figura 2.7: Trayectoria para $\alpha = 6$ y $\sigma = -0.1$. Se muestra el comportamiento de una neurona en régimen de *bursting* sobre el espacio de fases en (b) y la componente x de su trayectoria en (a). La fase de inactividad comienza cuando $x_n = -1 < x_u^*$ y la trayectoria tiende hacia la rama estable x_{fs} (tramo A $\rightarrow$ B). Como el punto fijo (asterico azul) no se encuentra sobre x_{fs} y sobre ella $x < x_s$, la trayectoria recorre toda la rama estable en la dirección de y creciente (tramo B $\rightarrow$ C) hasta salirse de ella y producir oscilaciones (C $\rightarrow$ D). La ráfaga de oscilaciones finaliza cuando se alcanza nuevamente el punto A.

2.3.4 Regímenes sobre el plano de parámetros

En las tres secciones anteriores se han descrito cualitativamente las condiciones que deben satisfacerse para que el modelo de Rulkov reproduzca cada uno de los tres regímenes de actividad neuronal; silencio, *spiking* y *bursting*. A continuación, se determinan las condiciones exactas sobre los parámetros de control α y σ para establecer el régimen deseado,

comenzando por el silencioso.

Para que la neurona desemboque en un estado silencioso, se requiere que la isoclina lenta $x_s = -1 + \sigma$ corte a la rama estable x_{fs} de la isoclina rápida x_f . Interesa encontrar el máximo valor de x sobre la curva x_{fs} , es decir el punto en el cual coinciden las ramas estable e inestable. Este punto corresponde a una **bifurcación de punto de silla-nodo** sobre el mapa rápido, donde los puntos fijos x_s^* y x_u^* colisionan y se aniquilan, y sucede cuando el radicando de la raíz cuadrada en 2.6 se anula, es decir

$$(1 - y)^2 = 4\alpha \quad \implies 1 - y = 2\sqrt{\alpha} \quad \implies y = 1 - 2\sqrt{\alpha}.$$

Nótese que en la solución anterior se ha considerado $y < 1$ para eliminar el valor absoluto porque para $y > 1$, la isoclina rápida se ubica en $x > 0$, donde no existen puntos fijos del mapa rápido. El resultado para y se sustituye en 2.6, obteniendo que el máximo de x_{fs} es $x = 1 - \sqrt{\alpha}$. El régimen final es de silencio si $x_s = -1 + \sigma < 1 - \sqrt{\alpha}$, pues las isoclinas se intersectarían en la rama estable. De la relación anterior se define un valor umbral (*threshold*) de excitación para el parámetro σ ,

$$\sigma_{th} = 2 - \sqrt{\alpha}. \quad (2.7)$$

Siempre que $\sigma < \sigma_{th}$, el régimen final será silencioso. Por ejemplo, la desigualdad anterior se satisface para la elección de los parámetros de las figuras 2.4 y 2.5. Por otro lado, cuando $\sigma > \sigma_{th}$ puede originarse o bien *spiking* o bien *bursting*. Una condición necesaria para que se produzca *bursting* es que $x = -1$ corte a la rama inestable x_{fu} y exista la órbita homoclínica del mapa rápido. De no ser así, no se originaría la fase de inactividad (tramo $A \rightarrow B \rightarrow C$ de la figura 2.7) característica del *bursting*. Matemáticamente, $x = -1$ intersecta a la isoclina rápida sobre la rama inestable cuando cae por encima del punto en común entre x_{fu} y x_{fs} , es decir cuando $-1 > 1 - \sqrt{\alpha}$. Por lo tanto, la condición necesaria para que se genere *bursting* es que $\alpha > 4$. Esto justifica que en la figura 2.6 se genere *spiking* porque $\alpha = 3 < 4$ y $\sigma = 0.4 > \sigma_{th}$, pero no explica por qué se genera *bursting* en la figura 2.7. Y es que la condición $\alpha > 4$ es necesaria, pero no suficiente, para que se produzca *bursting*, por lo que no garantiza que este sea el régimen final que se forme. Por ejemplo, en la figura 2.8 se muestra que para $\alpha = 5$ y $\sigma = 0.8 > \sigma_{th}$ se produce *spiking* y no *bursting*.

Ello se debe a que se alcanza el equilibrio $y_{n+k} = y_n$, en el que la variable lenta deja de decrecer, antes de que se produzca $-1 < x_u^*$, que generaría la fase de inactividad del *bursting*.

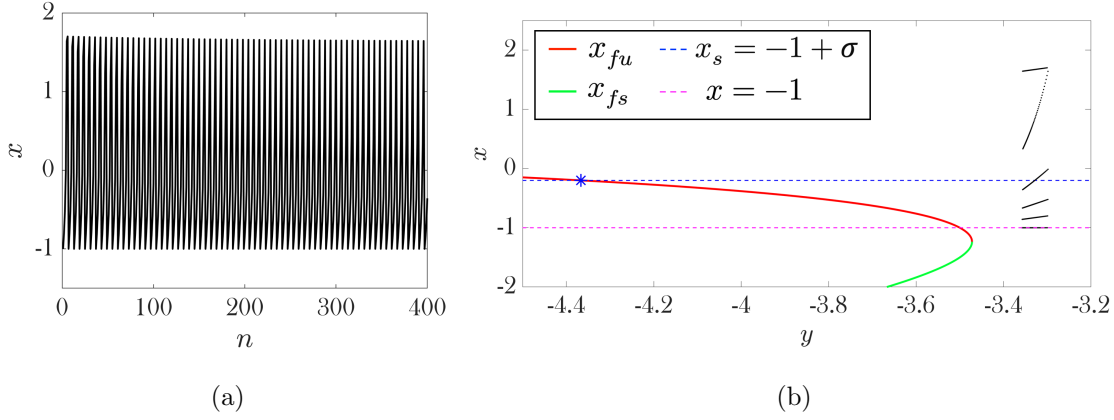


Figura 2.8: Trayectoria para $\alpha = 5$ y $\sigma = 0.8$. En (a) se muestra la componente x de la trayectoria frente al tiempo y en (b) la trayectoria completa en el espacio de fases junto a la isoclinas x_f y x_s . Aunque $\alpha > 4$, no se produce *bursting*, sino *spiking* porque se alcanza el equilibrio $y_{n+k} = y_n$ antes de que se produzca $-1 < x_u^*$, que generaría la fase de inactividad del *bursting*.

Por otro lado, en el ejemplo mostrado en la figura 2.7, con $\alpha = 6$ y $\sigma = -0.1 > \sigma_{th}$, se produce *bursting* porque $-1 > x_s = -1 + \sigma$. Entonces, las oscilaciones del potencial de acción suceden siempre para valores de x por encima de la isoclina lenta y, en consecuencia, la variable lenta y decrece poco a poco hasta alcanzar $-1 < x_u^*$, que da comienzo a la fase de inactividad del *bursting*. Sin embargo, no es necesario que $\sigma_{th} < \sigma < 0$ para que $x_s < -1$ y se genera *bursting* en lugar de *spiking*. Basta con que los valores de α y σ sean tales que no se llegue a alcanzar la situación de equilibrio dinámico en la que y queda atrapada en el ciclo $y_{n+k} = y_n$ antes de $-1 < x_u^*$. A diferencia de la frontera entre silencio y no silencio, $\sigma_{th} = 2 - \sqrt{\alpha}$, la frontera entre *bursting* y *spiking* no se puede expresar de manera analítica. Nikolai F. Rulkov en (Rulkov, 2002) determinó esta frontera, L_{ts} , de forma numérica y generó un esquema con los tres regímenes neuronales sobre el plano de parámetros (σ, α) (figura 2.9).

Aunque la curva L_{ts} no presenta expresión analítica, se puede razonar la forma que tiene. Si se desea obtener un régimen de *spiking* en lugar de *bursting* cuando $\alpha > 4$, σ debe aumentar a medida que se incrementa α . Ello se debe a que las oscilaciones del potencial

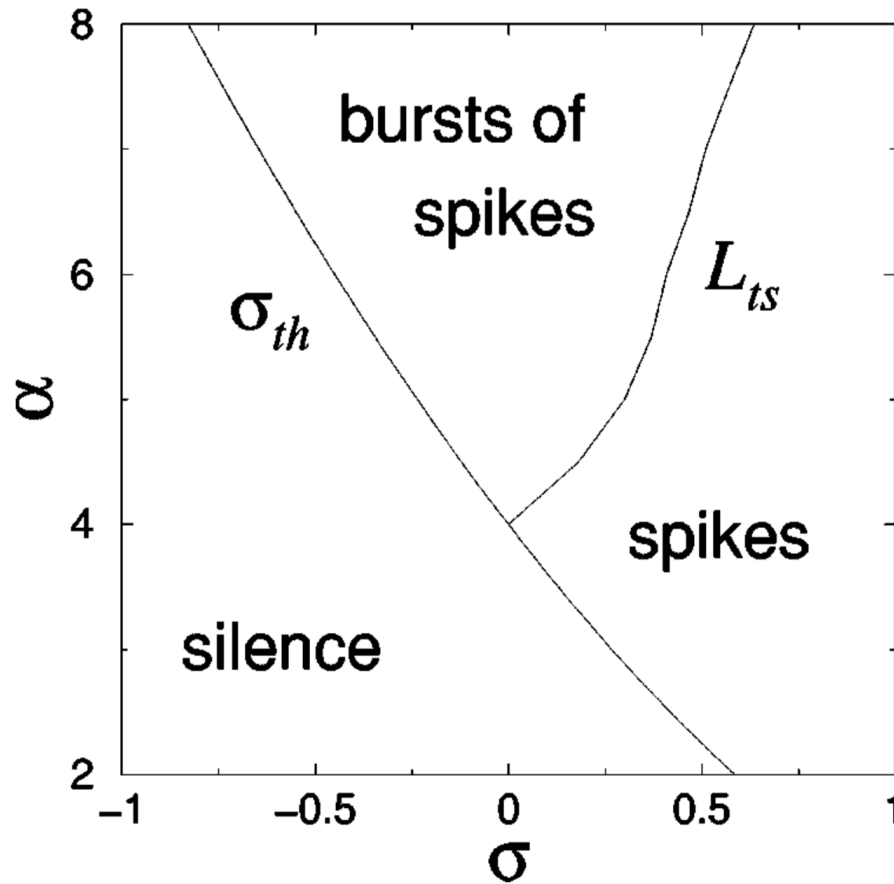


Figura 2.9: Regímenes neuronales sobre el plano de parámetros (σ, α) extraído del artículo original de Rulkov. Para $\sigma < \sigma_{th} = 2 - \sqrt{\alpha}$, el régimen es de silencio. La frontera L_{ts} entre *spiking* y *bursting* se determina numéricamente. Para valores grandes de σ se favorece el *spiking*.

de acción están comprendidas entre los valores $x = -1$ y $x = \alpha + y$, de modo que si α aumenta y σ no, habrá más puntos de la oscilación que caigan en la región $x > x_s = -1 + \sigma$. Como resultado, y continuará decreciendo sin llegar a alcanzar el ciclo $y_{n+k} = y_n$. Por el contrario, si al aumentar α , también se aumenta σ , se desplaza la isoclina lenta $x_s = -1 + \sigma$ verticalmente hacia el punto de máxima amplitud $x = \alpha + y$, consiguiendo igualar las contribuciones de los puntos $x < x_s = -1 + \sigma$, que aumentan y , con las contribuciones de los puntos $x > x_s = -1 + \sigma$, que disminuyen y . Esta situación se muestra esquemáticamente en la figura 2.10.

En la figura 2.9 se recogen los principales resultados discutidos hasta el momento.

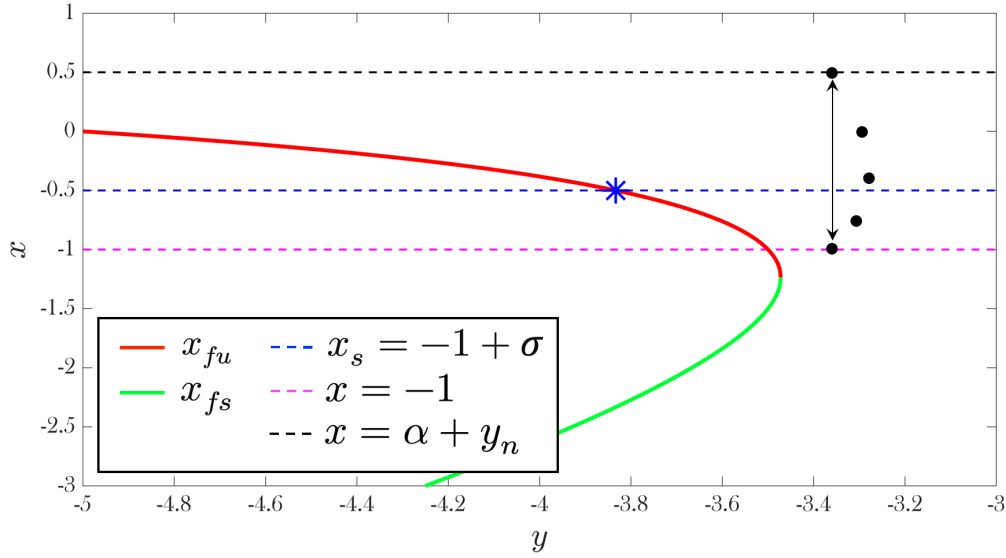


Figura 2.10: Condición para que se produzca *spiking* cuando $\alpha > 4$ sobre el espacio de fases, indicando el punto de máxima amplitud $x = \alpha + y$ (línea discontinua negra), el punto de mínima amplitud $x = -1$ (línea discontinua magenta) y la isoclina lenta x_s (línea discontinua azul). Se precisa que las contribuciones de los puntos $x < x_s = -1 + \sigma$, que aumentan y , igualen a las contribuciones de los puntos $x > x_s = -1 + \sigma$, que disminuyen y para alcanzar el ciclo $y_{n+k} = y_n$.

- El régimen de *bursting* es imposible para $\alpha < 4$.
- El régimen es de silencio si $\sigma < \sigma_{th} = 2 - \sqrt{\alpha}$.
- Cuando $\alpha > 4$, el régimen de *spiking* se favorece para valores de σ grandes.

2.3.5 Comportamiento caótico

En un artículo previo (Rulkov, 2001), Rulkov había propuesto el mismo modelo 2.3, pero con $x_{n+1} = f(x_n, y_n) = \frac{\alpha}{1+x_n^2} + y_n$ como mapa rápido, siendo este último capaz de producir dinámica caótica. Por otro lado, el modelo de Rulkov de 2002 con la función a trozos $f(x, y)$ 2.4 también es capaz de producir comportamiento caótico, pero este surge de la interacción entre los mapas rápido y lento de 2.3, ya que ninguno de los dos mapas individualmente es caótico. Por lo tanto, el comportamiento caótico del modelo de Rulkov de 2002 no se puede explicar dentro del marco de la aproximación $\mu \rightarrow 0$, que permite fijar el valor de y para analizar el mapa rápido. En (Shilnikov y Rulkov, 2003), **Andrey**

L. Shilnikov y **Nikolai F. Rulkov** demuestran y justifican el comportamiento caótico generado por el modelo propuesto por el segundo.

En todo el análisis previo del modelo, se ha clasificado la estabilidad del punto fijo del mapa global en base a la estabilidad de los puntos fijos del mapa rápido. Este análisis resulta válido cuando la variable x cambia mucho más rápidamente que la variable y . Aunque, por norma general, así sucede, existe un rango de valores de los parámetros de control para los que la aproximación $\mu \rightarrow 0$ deja de ser correcta. Estos son los valores correspondientes al punto de bifurcación del mapa global, cuando la isoclina lenta x_s intersecta a la isoclina rápida x_f muy cerca de la frontera entre las ramas estable, x_{fs} , e inestable x_{fu} . Al final, el criterio fundamental para evaluar la estabilidad de un punto fijo de un mapa bidimensional es el teorema 2.2.2. La matriz Jacobiana del mapa de Rulkov 2.3 con la función 2.4, en la región $x \leq 0$, es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{(1-x)^2} & 1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

y al, evaluarla en el punto fijo $(x^*, y^*) = (-1 + \sigma, -1 + \sigma - \frac{\alpha}{2-\sigma})$, se obtiene

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{(2-\sigma)^2} & 1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Los autovalores $\lambda_{1,2}$ de la matriz anterior son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(k + 1 \pm \sqrt{(k-1)^2 - 4\mu} \right), \quad (2.10)$$

donde se ha definido $k = \frac{\alpha}{(2-\sigma)^2}$. Cuando $4\mu \ll (k-1)^2$, es decir, lejos del punto de bifurcación, se tiene que $\lambda_1 \approx k$ y $\lambda_2 \lesssim 1$. De acuerdo con el teorema 2.2.2, el punto fijo es estable si $k < 1$, e inestable en caso contrario. Resulta inmediato comprobar que imponer $\lambda_1 \approx k = 1$ equivale a $\sigma = \sigma_{th} = 2 - \sqrt{\alpha}$, que, como se ha discutido antes, representa el umbral de excitación. Sin embargo, todo lo anterior únicamente es válido lejos de la bifurcación. Cuando $(k-1)^2 \sim \mu$, la aproximación anterior no es aplicable. Los autovalores

$$\lambda_{1,2} = \frac{k+1}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\mu - (k-1)^2}}{2} \quad (2.11)$$

son complejo conjugados con parte imaginaria pequeña. El módulo al cuadrado de los autovalores es $|\lambda_{1,2}|^2 = k + \mu$. Cuando $k + \mu = 1$, los autovalores cruzan la circunferencia unidad sobre el plano complejo y se produce una **bifurcación de Neimark-Sacker** subcrítica. Cerca del punto de bifurcación, se origina un ciclo límite inestable que encierra al punto fijo estable (x^*, y^*) . De modo que, si la condición inicial cae en el interior de la región encerrada por el punto fijo, se tiende hacia este y el régimen final es de silencio. Por el contrario, si la condición inicial se ubica fuera de la región delimitada por el ciclo límite, se produce *spiking*. Además, en (Shilnikov y Rulkov, 2003), los autores demuestran que se trata de un *spiking* caótico. Por lo tanto, en la figura 2.9, cerca (a una distancia de orden μ) de la curva $\sigma_{th} = 2 - \sqrt{\alpha}$, el modelo de Rulkov de 2002 puede exhibir comportamiento caótico. Además, en el mismo artículo, Shilnikov y Rulkov demuestran que también se origina dinámica caótica en la vecindad de L_{ts} , frontera entre el régimen de *spiking* y el régimen de *bursting*.

2.4 Influencia de la corriente externa en el modelo de Rulkov

Hasta ahora se ha analizado el modelo de Rulkov con σ y β constantes, lo cual reproduce el comportamiento de, o bien una neurona aislada que no recibe corriente proveniente del resto de la red neuronal de la que forma parte, o bien una neurona que está sometida a una intensidad de corriente constante. A continuación, se estudia el efecto que produce sobre la neurona una intensidad de corriente I no uniforme de acuerdo con lo establecido en (Rulkov, 2002).

2.4.1 Efecto de la corriente sobre σ

Primero se considera el caso $\beta = 0$ y $\sigma_n = \sigma_0 + \sigma_e I_n$, donde σ_0 es el valor del parámetro σ en ausencia de corriente, σ_e es una constante de proporcionalidad y el subíndice n refleja que la intensidad de corriente es en general variable. Por ejemplo, a través de la neurona podría pasar un pulso cuadrado positivo descrito por

$$I_n = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq n < 100, \\ 1 & ; \quad 100 \leq n \leq 200, \\ 0 & ; \quad n > 200. \end{cases} \quad (2.12)$$

Se escogen para los parámetros de control los valores $\alpha = 5$ y $\sigma_0 = 0.33$, que, en ausencia de corriente externa, fuerzan a la neurona a entrar en régimen de *spiking* y se toma la constante de proporcionalidad como $\sigma_e = 1$. En el tiempo $n = 100$ el parámetro σ aumenta instantáneamente de 0.33 a 1.33 debido a la corriente externa, provocando un aumento en la frecuencia de oscilación. Cuando la neurona deja de recibir corriente externa en el tiempo $n = 200$, se retorna al régimen de *spiking* original correspondiente a $\sigma = \sigma_0 = 0.33$. Sin embargo, este regreso al régimen inicial no ocurre de manera inmediata, sino que se mantiene una mayor frecuencia de oscilación durante un tiempo después de que cese la corriente, como se pone de manifiesto en la figura 2.11.

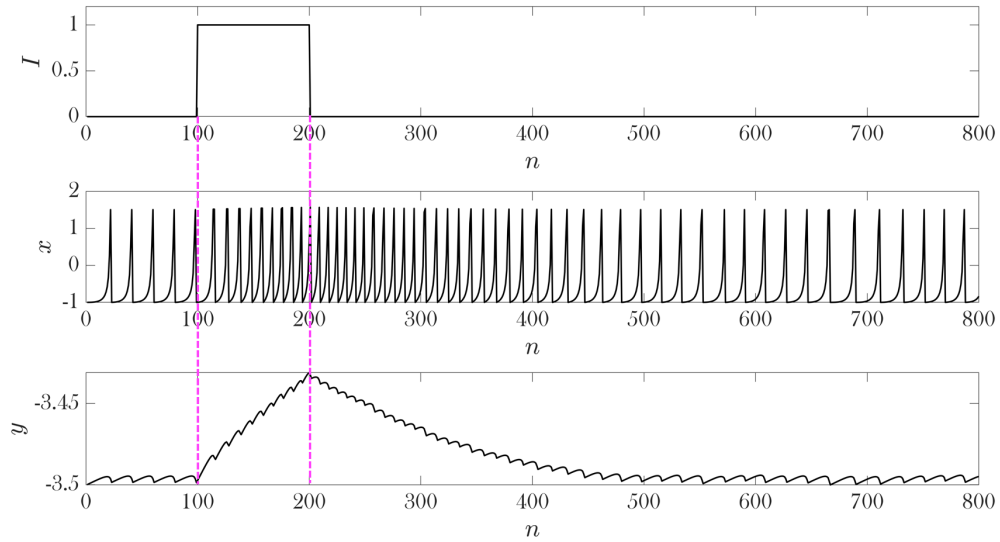


Figura 2.11: Efecto de un pulso cuadrado positivo de corriente sobre la neurona de Rulkov con $\alpha = 5$, $\sigma_0 = 0.33$, $\sigma_e = 1$ y $\beta = 0$. Debido a la corriente externa, el parámetro σ aumenta instantáneamente de 0.33 a 1.33 provocando un aumento en la frecuencia de oscilación, que se mantiene durante cierto tiempo después de que la neurona deje de recibir corriente. El incremento de la frecuencia de oscilación se debe a que aumenta la variable lenta y , lo cual está ocasionado por el aumento de σ .

Que la frecuencia de oscilación aumente cuando se intensifica la corriente externa a través de la neurona es otra evidencia experimental que reproduce satisfactoriamente el modelo de Rulkov. Matemáticamente esta propiedad es resultado de que un aumento de la intensidad de corriente o, equivalentemente un aumento del parámetro σ , provoca que la isoclina $x_s = -1 + \sigma$ se eleve en el espacio de fases. Entonces, para que se mantenga el ciclo $y_{n+k} = y_k$, responsable del régimen de *spiking*, se precisa recompensar las contribuciones de la trayectoria $x < x_s$, que ahora son más significativas, con las contribuciones de $x > x_s$, que ahora lo son menos. Esto se consigue aumentando la amplitud de oscilación $x = \alpha + y$, es decir aumentando el valor de y y, como se discutió previamente, el incremento de la variable lenta y implica un incremento en la frecuencia de oscilación. La figura 2.12 exhibe el efecto de incrementar el parámetro σ sobre la trayectoria en el espacio de fases. Se observa que el nuevo ciclo $y_{n+k} = y_k$ se forma para valores de y mayores.

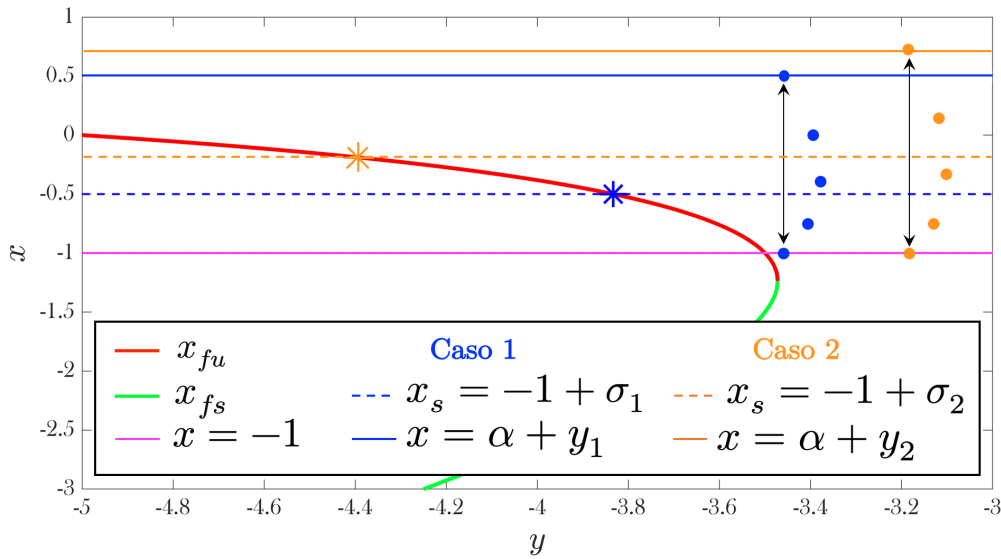


Figura 2.12: Efecto del aumento en σ sobre la trayectoria en el espacio de fases. Se consideran dos valores genéricos $\sigma_1 < \sigma_2$ y se representan las respectivas isoclinas lentas x_s junto a los puntos de máxima amplitud, $x = \alpha + y$, y mínima amplitud, $x = -1$. Al aumentar σ , se incrementa y ($y_2 > y_1$) para compensar las contribuciones de $x < x_s$ con las contribuciones de $x > x_s$ en la oscilación.

En (Rulkov, 2002) también se considera el efecto del pulso cuadrado negativo

$$I_n = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq n < 100, \\ -1 & ; 100 \leq n \leq 200, \\ 0 & ; n > 200, \end{cases} \quad (2.13)$$

sobre la misma neurona. Por negativo se entiende que la corriente circula en sentido contrario al caso anterior, produciendo una disminución en el valor del parámetro σ . En la figura 2.13 se muestran las consecuencias del pulso cuadrado negativo sobre el potencial eléctrico de la neurona. Al recibir el pulso, el parámetro σ disminuye instantáneamente de 0.33 a -0.67 , que corresponde al régimen de silencio puesto que $-0.67 < \sigma_{\text{th}} = 2 - \sqrt{5} \approx -0.24$. La fase de inactividad se mantiene incluso después de que la neurona deje de recibir corriente mientras que el sistema asciende por la rama estable x_{fs} hasta salirse de ella.

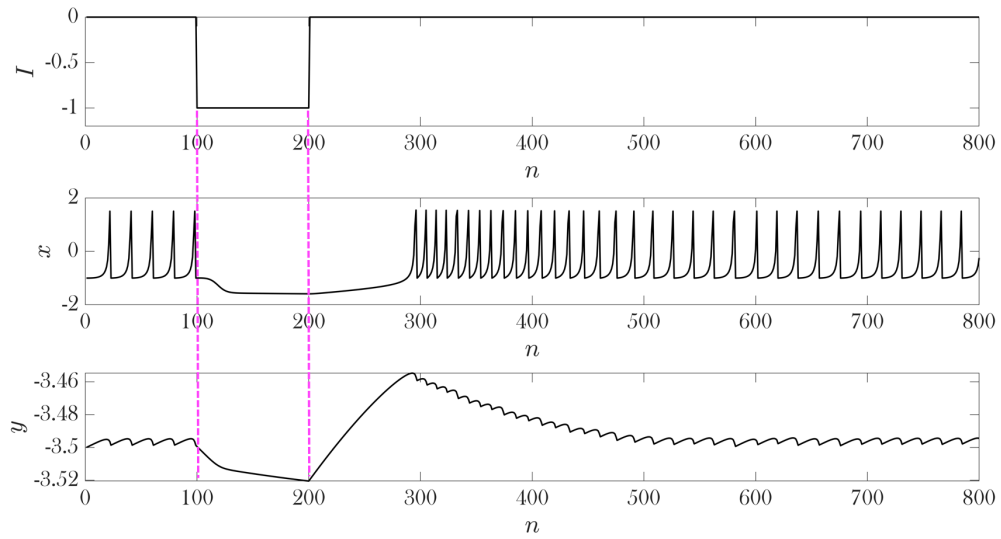
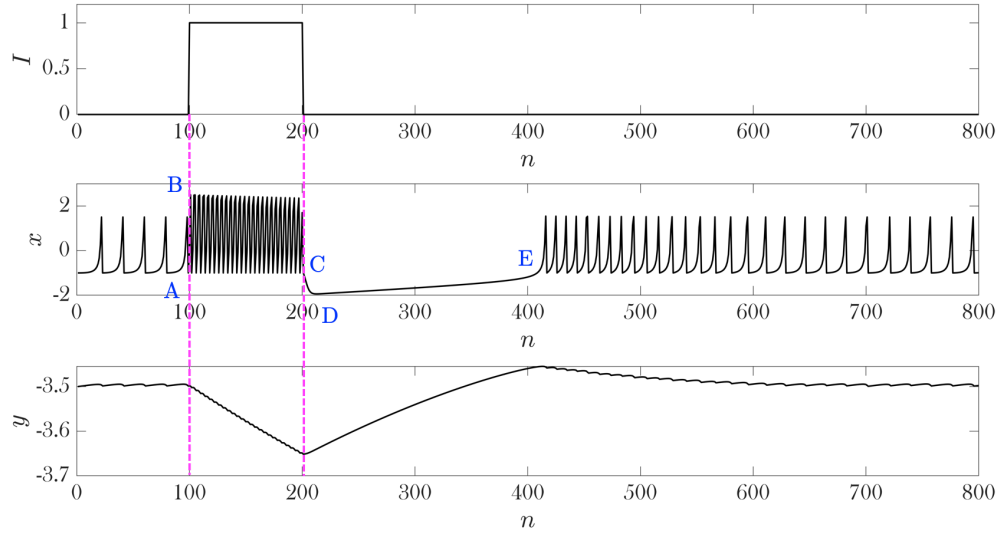


Figura 2.13: Efecto de un pulso cuadrado negativo de corriente sobre la neurona de Rulkov con $\alpha = 5$, $\sigma_0 = 0.33$, $\sigma_e = 1$ y $\beta = 0$. Debido a la corriente externa, el parámetro σ disminuye instantáneamente de 0.33 a -0.67 , provocando que la neurona se asiente en el régimen de silencio, que se mantiene durante cierto tiempo incluso después de que la neurona deje de recibir corriente mientras se recorre la rama estable x_{fs} .

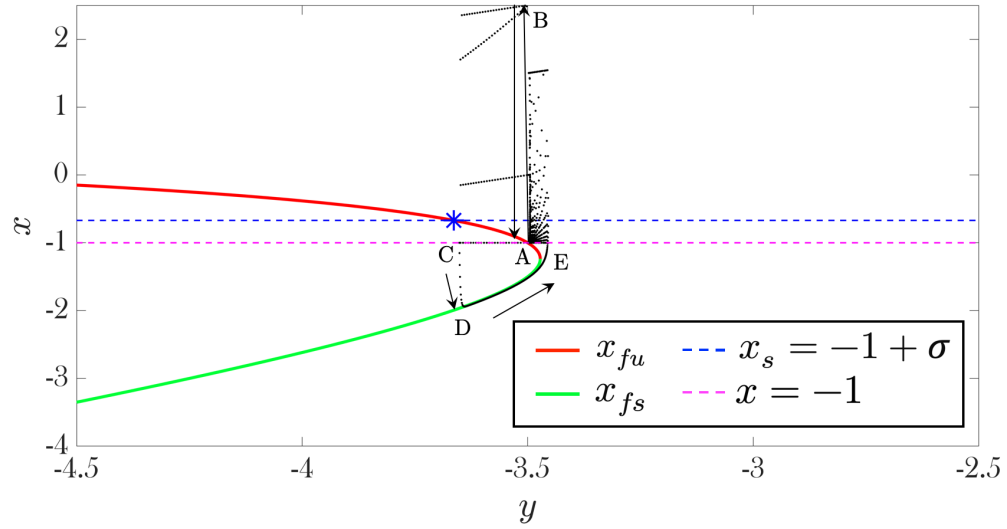
2.4.2 Efecto de la corriente sobre β

También se puede vincular el parámetro β , que hasta ahora se ha considerado nulo, con la intensidad de corriente externa según $\beta_n = \beta_e I_n$, siendo β_e una constante de proporcionalidad. β permite realizar traslaciones verticales del mapa rápido 2.4, al modificar el valor efectivo de la variable lenta; $y \rightarrow y' = y + \beta$.

En la figura 2.14 se muestran los resultados obtenidos tras circular el pulso cuadrado positivo 2.12 por la neurona de Rulkov con $\alpha = 5$ y $\sigma_0 = 0.33$. Además, se escoge $\beta_e = 1$ (y $\sigma_e = 0$) para la constante de proporcionalidad. En el gráfico intermedio de 2.14a se representa la componente x de la trayectoria señalando puntos concretos, los cuales se usan en la figura 2.14b para ilustrar el movimiento en el espacio de fases. Inicialmente la neurona se halla en régimen de *spiking*. Al pasar el pulso por la neurona, el parámetro β aumenta de forma instantánea de 0 a 1, lo cual provoca un incremento repentino de la amplitud de oscilación de $\alpha + y$ a $\alpha + y + 1$ (tramo A $\rightarrow$ B). Luego, el valor de y decrece hacia el valor de $y' = y + 1$ correspondiente al régimen original de *spiking* y así contrarestar el valor de $\beta = 1$. Por ello, cuando deja de circular corriente externa (punto C) y el valor efectivo de la variable lenta, y' , vuelve a ser ella misma, y , la trayectoria es atraída por la rama estable x_{fs} (tramo C $\rightarrow$ D), que recorre (tramo D $\rightarrow$ E), originando una fase de silencio, hasta salirse de ella y retornar al régimen oscilante original. Por supuesto, se pueden combinar los efectos producidos por la intensidad de corriente externa sobre los parámetros σ y β considerando de forma simultánea $\sigma_e \neq 0$ y $\beta_e \neq 0$.



(a)



(b)

Figura 2.14: Efecto del pulso cuadrado positivo de corriente 2.12 sobre la neurona de Rulkov con $\alpha = 5$, $\sigma_0 = 0.33$, $\beta_e = 1$ y $\sigma_e = 0$. Debido a la corriente externa, el parámetro β aumenta instantáneamente de 0 a 1, provocando el incremento repentino de la amplitud de oscilación a $\alpha + y + 1$ (tramo A $\rightarrow$ B). La variable lenta y decrece para contrarestar el valor de $\beta = 1$, quedando así por debajo de la rama inestable x_{fu} . Por ello, cuando deja de circular corriente (punto C), la trayectoria tiende hacia la rama estable x_{fs} (tramo C $\rightarrow$ D), que recorre (tramo D $\rightarrow$ E) hasta salirse de ella y retornar al régimen de *spiking* inicial.

3. Objetivos

3.1 Objetivo general

Esta investigación pretende enriquecer las capacidades del modelo de Rulkov de 2002 cambiando los parámetros de control α y σ por funciones memristivas y así producir desplazamientos sobre el plano de parámetros 2.9. Además, se asegura preservar el significado biológico al coincidir el nuevo mapa memristivo con el modelo original de forma instantánea.

Trabajos previos, como (Li y cols., 2022), (Bao y cols., 2023) o (Bashkirtseva y Ryashko, 2024), ya han introducido una función memristiva en el modelo de Rulkov. En concreto, el primer trabajo lo incorpora en el modelo de Rulkov de 2002, mientras que los dos últimos artículos se centran en el modelo de 2001. Sin embargo, todos estos trabajos anteriores introducen la función memristiva como un sumando adicional en la ecuación del mapa rápido del modelo de Rulkov 2.3, lo cual reduce la fidelidad del modelo respecto a la realidad biológica que busca simular.

3.2 Objetivos específicos

- Producir transiciones entre dos o tres regímenes neuronales en una misma simulación.
- Acoplar neuronas de Rulkov memristivas para crear una red neuronal con plasticidad sináptica.
- Analizar la dependencia de las transiciones de sincronización en la red neuronal con los parámetros del memristor.

4. Metodología del trabajo

La presente investigación se enmarca dentro de un enfoque hipotético-inductivo, propio de las ciencias formales y aplicadas, en el que se parte de la formulación de una hipótesis matemática; en este caso la incorporación de un elemento memristivo al modelo neuronal de Rulkov, y se procede a su análisis empleando herramientas lógico-deductivas y computacionales. Para llevar a cabo este análisis, se desarrollan e implementan funciones en MATLAB que permiten simular el comportamiento del sistema bajo diferentes configuraciones y parámetros del memristor. A partir de los resultados obtenidos en las simulaciones, se inducen las propiedades emergentes del nuevo modelo propuesto y se contrastan con el comportamiento del modelo original, validando así las hipótesis planteadas y explorando el potencial del componente memristivo en el modelo neuronal.

5. Desarrollo del trabajo

5.1 Memristor: Introduciendo memoria en el sistema

Una manera elegante de introducir memoria en un sistema dinámico es a partir de un **memristor** o **función memristiva**. Esta estrategia ha recibido considerable atención para sistemas continuos y, solo recientemente, se ha comenzado a adoptar también para sistemas discretos. El memristor discreto es esencialmente un elemento del sistema que depende de la suma de una de las variables de estado. Su nombre es una contracción de las palabras inglesas *memory* y *resistor* propuesta por **Leon O. Chua** en (Chua, 1971) para designar a un resistor cuya resistencia depende de la integral (o suma en el caso discreto) de la intensidad de corriente que ha circulado por él. Por este motivo, se dice que es un elemento que recuerda su historia. A la resistencia M del memristor se le llama **memristancia** y es la derivada del flujo magnético ϕ con respecto de la carga eléctrica q ,

$$M(q) = \frac{d\phi}{dq}. \quad (5.1)$$

Empleando la ley de Faraday-Lenz; $V = \frac{d\phi}{dt}$, donde V es el potencial eléctrico originado por inducción magnética, y la definición de intensidad de corriente eléctrica; $I = \frac{dq}{dt}$, se reescribe la ecuación 5.1.

$$\frac{d\phi}{dt} = M(q) \frac{dq}{dt} \implies V = M(q)I.$$

De la última igualdad, se observa que $M(q)$, en efecto, presenta dimensiones de resistencia y además depende de la carga eléctrica, es decir de la integral de la intensidad de corriente que ha circulado por el memristor. De ahí que se diga que el memristor consiste en un resistor con memoria. Para incorporar el memristor en sistemas discretos, se sustituye la derivada en la definición de intensidad de corriente eléctrica por una diferencia finita, obteniéndose

$$\frac{dq}{dt} = I \implies \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} = I_n \implies q_{n+1} = q_n + \Delta t I_n = q_0 + \Delta t \sum_{i=0}^n I_i.$$

Alternativamente, se puede caracterizar el memristor usando la **memductancia**

$$W(\phi) = \frac{dq}{d\phi}, \quad (5.2)$$

que es la magnitud inversa a la memristancia. Procediendo de forma análoga con la ecuación 5.2, se concluye que la memductancia depende del flujo magnético ϕ o, lo que es lo mismo, de la historia del potencial eléctrico, según

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t V_n = \phi_0 + \Delta t \sum_{i=0}^n V_i.$$

Por lo tanto, existen dos maneras equivalentes de especificar el estado del memristor: a partir de la carga eléctrica (suma de la intensidad de corriente) o a partir del flujo magnético (suma del potencial eléctrico). En el contexto de los modelos neuronales, como la magnitud física empleada es el potencial eléctrico, se acostumbra a escoger el flujo magnético para especificar el estado del memristor. Por ejemplo, en el modelo de Rulkov, la variable x es proporcional al potencial eléctrico, V . En (Li y cols., 2022) y trabajos similares, se introduce una tercera variable de estado z , proporcional al flujo magnético ϕ , tal que

$$z_{n+1} = z_n + x_n = z_0 + \sum_{i=0}^n x_i. \quad (5.3)$$

Nótese que en la ecuación 5.3 se ha tomado $\Delta t = 1$ por sencillez, pues al ser las variables de estado x y z proporcionales a las magnitudes físicas de interés V y ϕ , respectivamente, se puede incluir el tamaño de paso temporal Δt en la constante de proporcionalidad, siempre que no se indique de otra manera.

5.2 Simulación de la corriente de inducción con un memristor

Con el propósito de ilustrar el procedimiento habitualmente empleado para introducir un memristor en un mapa discreto, a continuación se realiza una revisión del mapa de Rulkov memristivo

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n) + W(z_n)x_n, \quad (5.4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \mu(x_n + 1 - \sigma), \quad (5.5)$$

$$z_{n+1} = z_n + \Delta t x_n, \quad (5.6)$$

propuesto en (Li y cols., 2022). Con ello se pretende destacar la novedad del procedimiento que se sigue en este trabajo diferenciándolo de estudios anteriores y exponiendo sus ventajas. La manera habitual de introducir un memristor en el modelo de Rulkov hasta el momento ha sido añadiendo un sumando adicional sobre el mapa rápido 2.4. Este sumando en la ecuación 5.4 es $W(z_n)x_n$ y los autores se refieren a él como **corriente de inducción**. El motivo del nombre se debe a la ley de Faraday-Lenz, que establece que cuando el flujo magnético ϕ , o equivalentemente z , varía en el tiempo, se induce una corriente eléctrica adicional.

Los autores escogen para la memductancia $W(z) = k \tanh z$. En la figura 5.1a se muestran los resultados que se obtienen con el modelo anterior para $\Delta t = 0.05$, $\mu = 0.05$, $k = 0.55$, $\sigma = 1$, $\alpha = 5$ y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. Los autores de la investigación clasifican estos resultados como *bursting* caótico y atribuyen equivocadamente la creciente complejidad del sistema respecto del modelo de Rulkov original a la incorporación del memristor. En la figura 5.1b se pone de manifiesto que el estado del memristor z oscila aproximadamente entre 1.5 y 4. La función $\tanh z$ sobre estos valores mínimo y máximo vale 0.905 y 0.999, respectivamente, por lo que se puede prescindir de ella y cambiar la expresión de la memductancia por el valor constante $W(z) = k$. En la figura 5.1b se muestra la trayectoria resultante de repetir exactamente la misma simulación anterior, pero eliminando la tangente hiperbólica en la memductancia, es decir eliminando el efecto del memristor. Se observa que los resultados obtenidos en ambas simulaciones son cualitativamente iguales. Por lo tanto, la complejidad adicional del nuevo modelo no se debe al memristor, ya que el efecto de z es despreciable, sino al término lineal kx_n en 5.4, que modifica el mapa rápido.

El memristor influiría apreciablemente sobre el sistema si la variable z oscilara alrededor del cero, de modo que la tangente hiperbólica no se pudiese aproximar por 1. Esto es

justamente lo que encuentran en (Li y cols., 2022) para $\Delta t = 0.05$, $\mu = 0.05$, $k = 0.5$, $\sigma = 1$, $\alpha = 5$ y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, -2)$, cuyos resultados se muestran en la figura 5.2a. La variable z oscila aproximadamente entre 0.265 y 2.006, valores para los cuales la tangente hiperbólica vale 0.256 y 0.964, respectivamente. Entonces, el efecto del memristor es cambiar paulatina y repetidamente el valor de la memductancia desde $W = 0.5 \times 0.265$ hasta $W = 0.5 \times 0.964$. Por este motivo en la figura 5.2a se observa cómo se pasa sucesivamente por los regímenes descritos en las figuras 5.2b y 5.2c, correspondientes al mapa con memductancia constante $W = 0.5 \times 0.256$ y $W = 0.5 \times 0.964$, respectivamente.

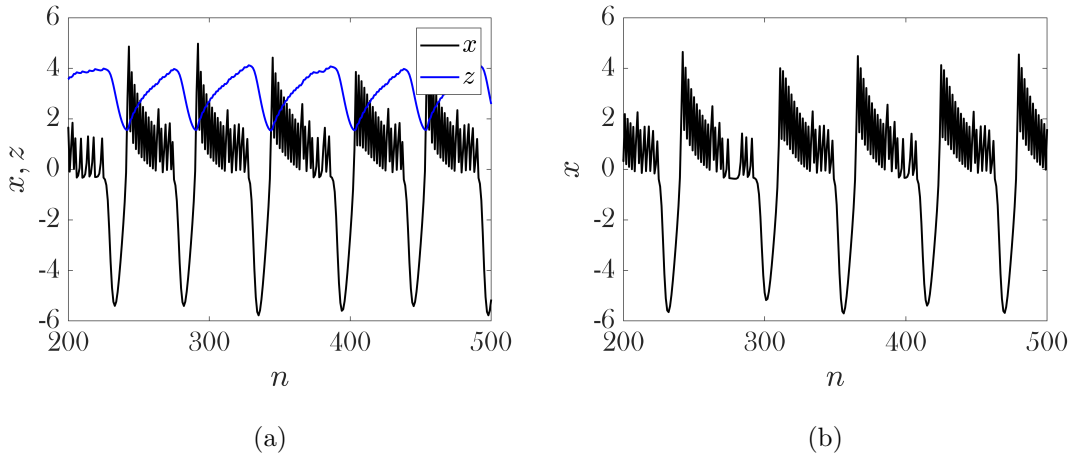


Figura 5.1: Comparación de la trayectoria para el mapa de Rulkov (ecuaciones 5.4, 5.5 y 5.6) con y sin memristor, escogiendo $\Delta t = 0.05$, $\mu = 0.05$, $k = 0.55$, $\sigma = 1$, $\alpha = 5$ y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. En (a) se representa la componente x de la trayectoria para $W(z) = 0.55 \tanh z$, mientras que en (b) se representa para $W(z) = 0.55$. Los resultados que se obtienen son muy similares, por lo que se concluye que el efecto del memristor es despreciable y la creciente complejidad del nuevo modelo no se debe a la incorporación de memoria en el sistema.

En la figura 5.3 se representa el diagrama de telaraña del mapa rápido (ecuación 5.4) con la variable lenta y congelada en -3.5 y memductancia $W = k = 0.55$. Se observa que el término lineal kx cambia ostensiblemente el funcionamiento del mapa, en particular para $x > 0$, donde se pierde el punto de retorno $x = -1$. Este último constituye uno de los rasgos fundamentales del modelo de Rulkov de 2002, puesto que sirve como referencia para definir el tiempo de una oscilación o *spike*. Por este motivo, en la figura 5.1, el punto de mínima amplitud cambia de una oscilación a la siguiente, a diferencia de, por ejemplo, en la figura 2.6b, donde solo cambia el punto de máxima amplitud y el mínimo se mantiene

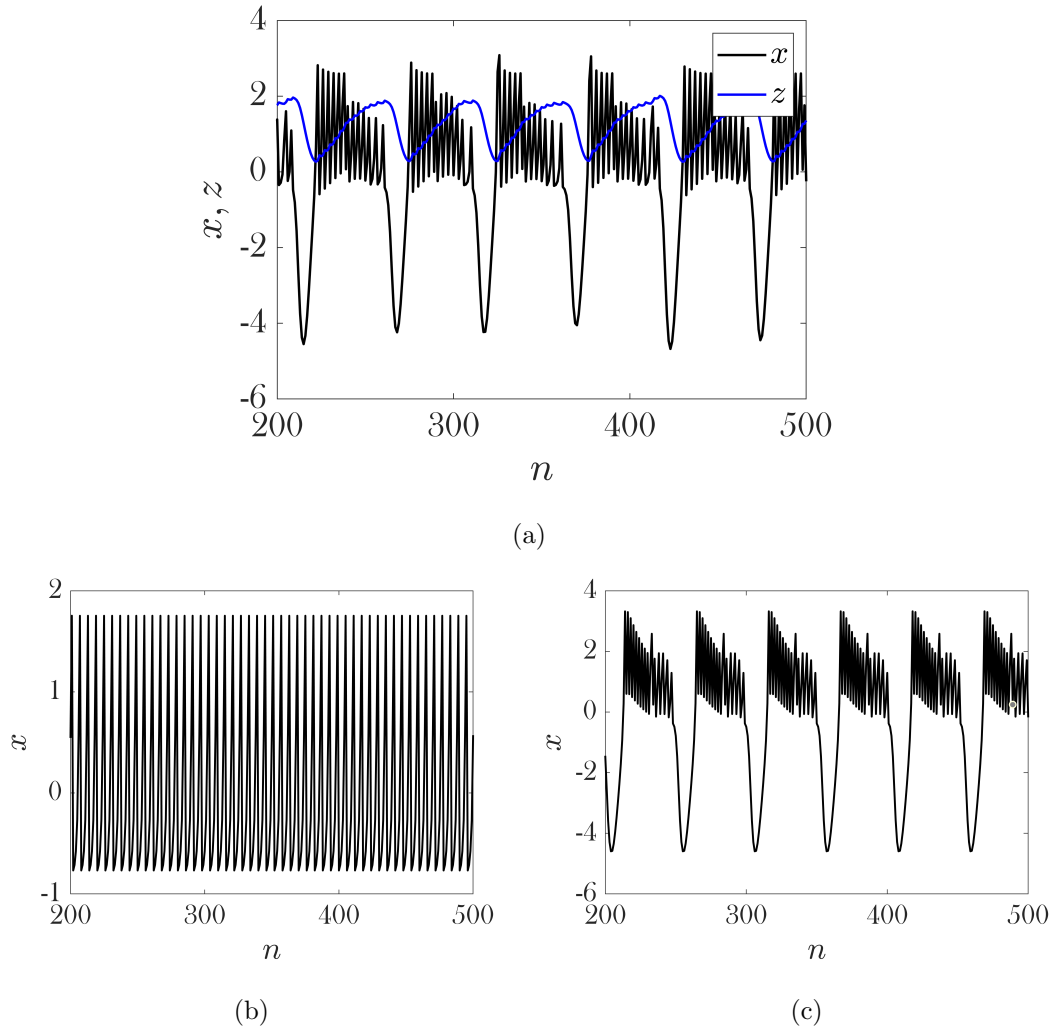


Figura 5.2: En (a) se representan las componentes x y z de la trayectoria del mapa de Rulkov memristivo (ecuaciones 5.4, 5.5 y 5.6) con $W(z) = k \tanh z$ para $\Delta t = 0.05$, $\mu = 0.05$, $k = 0.5$, $\sigma = 1$, $\alpha = 5$ y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, -2)$. Se observa que z oscila aproximadamente entre 0.265 y 2.006 y, por ello, el estado del memristor afecta claramente a la dinámica del sistema. En (b) y (c) se representan la componente x de la trayectoria del mapa sin memristor con $W = 0.5 \times 0.265$ y $W = 0.5 \times 0.964$ respectivamente, para la misma elección de los parámetros que en (a). La oscilación de z produce que la trayectoria del modelo con memristor, mostrado en (a), cambie paulatinamente desde régimen de *spiking* en el modelo sin memristor, mostrado en (b), hasta el régimen de *bursting* en el modelo sin memristor, mostrado en (c), de forma repetitiva.

en $x = -1$ para todas las oscilaciones.

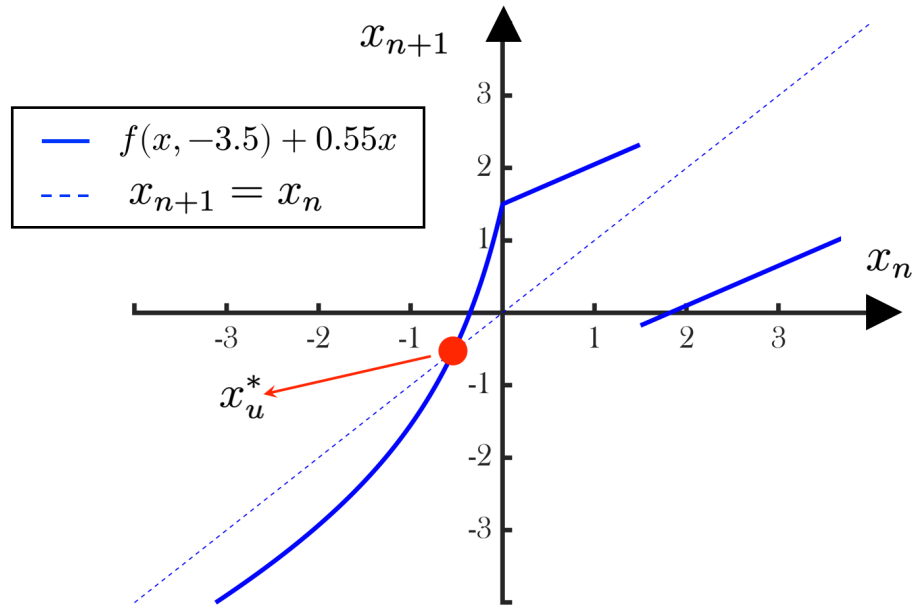


Figura 5.3: Diagrama de telaraña del mapa rápido del modelo de Rulkov con corriente de inducción (ecuaciones 5.4, 5.5 y 5.6) para $y = -3.5$ y memductancia $W = k = 0.55$. El término adicional kx cambia ostensiblemente el funcionamiento del mapa, en particular para $x > 0$, donde se pierde el punto de retorno $x = -1$, que sirve como referencia para definir el tiempo de una oscilación en el modelo de Rulkov original (comparar con la figura 2.2).

El modelo de Rulkov original está diseñado en base a argumentos puramente empíricos, ya que busca reproducir matemáticamente las curvas de potencial eléctrico que se observan experimentalmente. Por lo tanto, introducir el término adicional $W(z)x$ al modelo alegando la necesidad de representar el efecto de la corriente de inducción sobre el potencial de acción no parece estar justificado en este caso, como sí que lo está en (Wu, Xu, y Ma, 2022). En este último trabajo, se pretende mejorar el modelo de Hodgkin-Huxley (ecuacion 2.1) introduciendo un término memristivo. El modelo de Hodgkin-Huxley representa el comportamiento de una neurona individual a partir de un circuito eléctrico equivalente, por lo que, a diferencia del modelo de Rulkov, sí que está construido atendiendo a leyes físicas. Como el modelo original no contempla el efecto producido por la inducción magnética, tiene sentido introducirlo, por ejemplo, mediante un memristor.

5.3 Nuevo modelo de Rulkov memristivo

Si el comportamiento de una neurona individual se ve realmente afectado por la corriente de inducción, su efecto ya debe de estar contemplado en el modelo de Rulkov original, puesto que su principal motivación es reproducir curvas experimentales del potencial eléctrico sin atender a principios o leyes físicas. Aunque en este trabajo se introduce nuevamente un memristor en el modelo de Rulkov, se busca preservar el funcionamiento original y la fidelidad a la realidad biológica que describe el modelo, al mismo tiempo que se enriquece la variabilidad de transiciones entre regímenes neuronales. Por ello, no se añade ningún parámetro adicional al modelo, sino que se hace un parámetro de control variable siguiendo un esquema memristivo. Cabe destacar que, aunque la comunicación de las neuronas es mediante impulsos eléctricos, la incorporación de una función memristiva a un sistema discreto no está sujeta a la vinculación de este con la descripción de un fenómeno electromagnético, sino que su aplicación es completamente general. Para la motivación de este trabajo, la definición pertinente de memristor es la siguiente.

Definición 3. *Dado un mapa bidimensional $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathcal{A}(x_n, y_n; \gamma)$ con $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, siendo γ un parámetro de control, se dice que el correspondiente mapa memristivo es $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathcal{A}(x_n, y_n; \gamma(z_n))$, donde ahora γ es el memristor o función memristiva, cuyo valor depende de*

$$z_n = z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i.$$

Se puede concebir que hacer un parámetro γ memristivo aumenta en una unidad la dimensión del sistema al introducir una nueva variable de estado, z . Para la definición anterior, el mapa pasaría de ser bidimensional a ser tridimensional. Sin embargo, aumentar la dimensión de un sistema dinámico, por lo general, dificulta su análisis, por lo que, como el efecto de la nueva variable está restringido únicamente sobre γ , es conveniente seguir tratando el mapa como bidimensional. El mapa $\mathcal{A}$ es, en este caso, el mapa de Rulkov de 2002

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1 - x_n} + y_n & ; \quad x_n \leq 0, \\ \alpha + y_n & ; \quad 0 < x_n < \alpha + y_n, \\ -1 & ; \quad x_n \geq \alpha + y_n, \end{cases} \quad (5.7)$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu(x_n + 1 - \sigma). \quad (5.8)$$

Son dos los parámetros de control, α y σ , susceptibles de hacerse memristivos. La presente sección del trabajo está dividida en tres apartados. En el primer apartado se analiza el modelo cuando se convierte el parámetro α en una función memristiva, en el segundo apartado cuando se hace σ una función memristiva y en el último apartado cuando se considera un memristor con memoria finita.

5.3.1 Parámetro α memristivo

Se convierte en memristor al parámetro α , siguiendo el esquema establecido en (Nieto, Capeáns, y Sanjuán, 2025). Se usa la **función sigmoide** o **logística**, $\varphi(z)$, para imponer que el parámetro α presente un valor comprendido en el intervalo (α_-, α_+) :

$$\alpha(z) = \alpha_- + (\alpha_+ - \alpha_-)\varphi(z) = \alpha_- + (\alpha_+ - \alpha_-)\frac{1}{1 + e^{-z/\tau}}. \quad (5.9)$$

En la figura 5.4 se representa la ecuación 5.9, que especifica la relación funcional entre el estado del memristor z y el valor del parámetro α . Se observa que en el límite $z \rightarrow -\infty$ el parámetro vale α_- , mientras que en el límite $z \rightarrow \infty$, su valor es α_+ . En la expresión de la función sigmoide, $\varphi(z)$, aparece un parámetro τ , que permite controlar cuán abrupta es la transición de α_- a α_+ .

Al fijar σ y hacer el parámetro α memristivo, el movimiento es sobre una recta vertical en el plano de parámetros de la figura 2.9. Por ejemplo, considérese la recta $\sigma = 0.25$, que pasa por los tres regímenes neuronales. Para $\alpha = 6$ el régimen es de *bursting*, para $\alpha = 4$ el régimen es de *spiking* y para $\alpha = 2$ el régimen es de silencio. Conviene, entonces, escoger $\alpha_- = 2$ y $\alpha_+ = 6$ para usar la ecuación 5.9. En la figura 5.5 se muestran los resultados de la simulación con una constante de tiempo de $\tau = 3000$ para la función sigmoide. Se

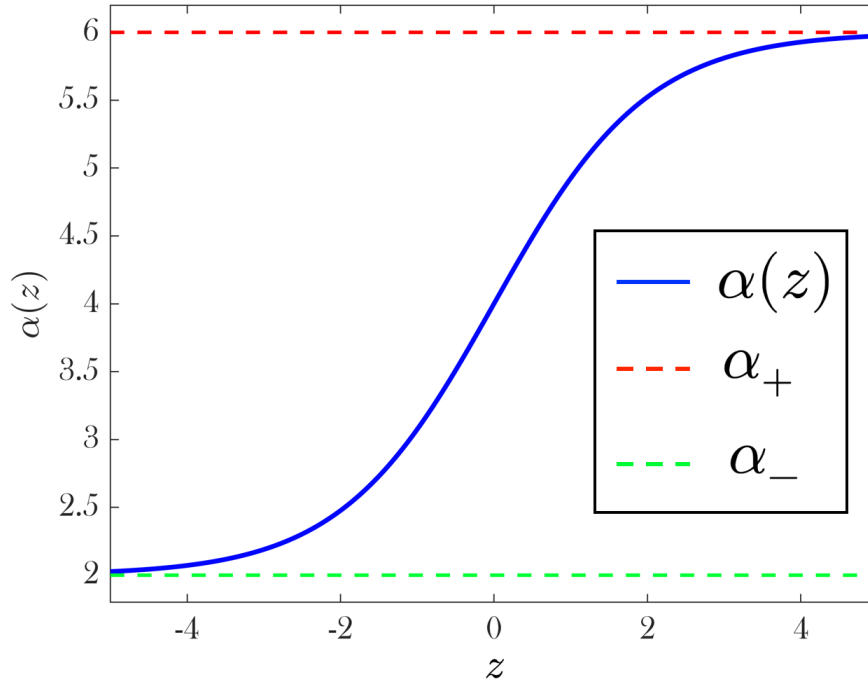


Figura 5.4: Parámetro α memristivo en función del estado z del memristor. Su valor está comprendido en el intervalo (α_-, α_+) , siendo los extremos del intervalo los valores de $\alpha(z)$ correspondientes a los límites $z \rightarrow -\infty$ y $z \rightarrow \infty$, respectivamente. Para realizar la figura se han escogido $\alpha_- = 2$ (recta discontinua verde) y $\alpha_+ = 6$ (recta discontinua roja).

observa una transición del régimen de *bursting* al régimen de silencio pasando por un régimen transitorio de *spiking*.

No obstante, los resultados de la figura 5.5 carecen completamente de interés al decrecer el parámetro α prácticamente de forma monótona durante la simulación. Esta misma transición podría haberse logrado con una simple deriva del parámetro: al principio de la simulación el valor de α sería 6 y, a medida que transcurre la simulación, disminuiría progresivamente hasta 2. Por lo tanto, en este caso, la incorporación del memristor en el modelo no es más que una manera enrevesada de conseguir una deriva del parámetro α . Ello se debe a que inicialmente $\alpha \approx 6$, al ser el estado inicial del memristor $z_0 = 10^4$, como se observa en el gráfico superior de la figura 5.5. Luego, su valor decrece porque el valor medio x , $\bar{x}$, en el mapa de Rulkov es siempre negativo. Para entender esto último basta con reparar en la forma del mapa rápido 2.4, que fuerza a la trayectoria a regresar a $x = -1$ siempre que x se hace positiva. En la figura 5.6 se representa nuevamente el plano

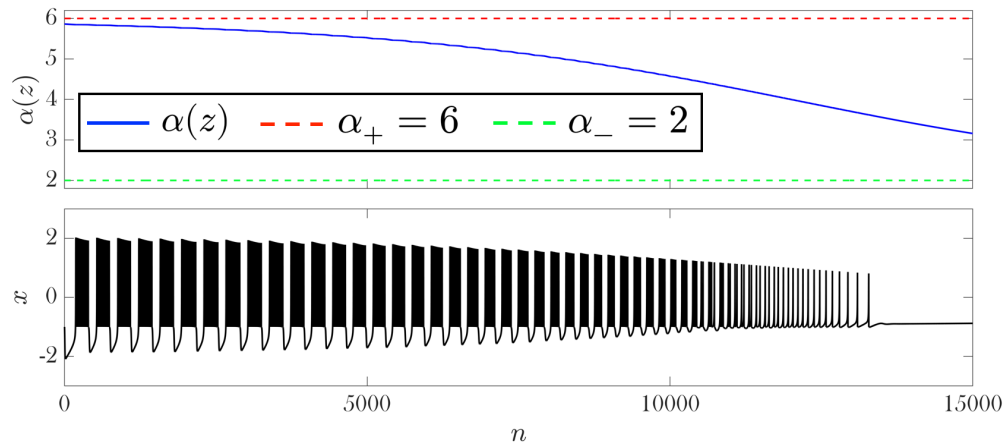


Figura 5.5: Transición de régimen de *bursting* a régimen de silencio pasando por un régimen transitorio de *spiking*. El parámetro α es memristivo (ecuación 5.9) con $\alpha_- = 2$, $\alpha_+ = 6$ y $\tau = 3000$, mientras que el parámetro σ se fija en 0.25. El estado inicial del memristor es $z_0 = 10^4$. En la imagen superior se representa $\alpha(z)$ en función del tiempo, mientras que en la imagen inferior se muestra x en función del tiempo.

de parámetros (σ, α) , al igual que en la figura 2.9, pero se colorea el fondo en función del valor medio de x para la trayectoria que se genera dada una condición inicial arbitraria. Se observa que el mapa de Rulkov de 2002 (ecuaciones 5.7 y 5.8) prácticamente siempre produce valores de $\bar{x}$ negativos y por ello se espera que la variable de estado del memristor, z , que consiste en la suma de las x , decrezca de forma cuasimonótona. La única región del plano para la que el valor medio de x no es negativo ocurre cerca de $\sigma = 1$, donde vale aproximadamente cero.

La figura 5.6 refleja que la conversión convencional de α en un memristor carece de interés. Independientemente del valor inicial de z , su valor acabará por divergir a $z \rightarrow -\infty$ y, en consecuencia, el valor final del parámetro α será α_- , excepto cuando $\sigma \approx 1$. Por lo tanto, no se puede afirmar que hacer el parámetro α memristivo, según la definición 3, introduzca memoria en el sistema, ya que el estado final es siempre el mismo sin importar su historia previa. Una primera manera lógica de solventar este problema es añadiendo un término positivo h a cada sumando en la expresión de z , es decir

$$z_n = z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + h). \quad (5.10)$$

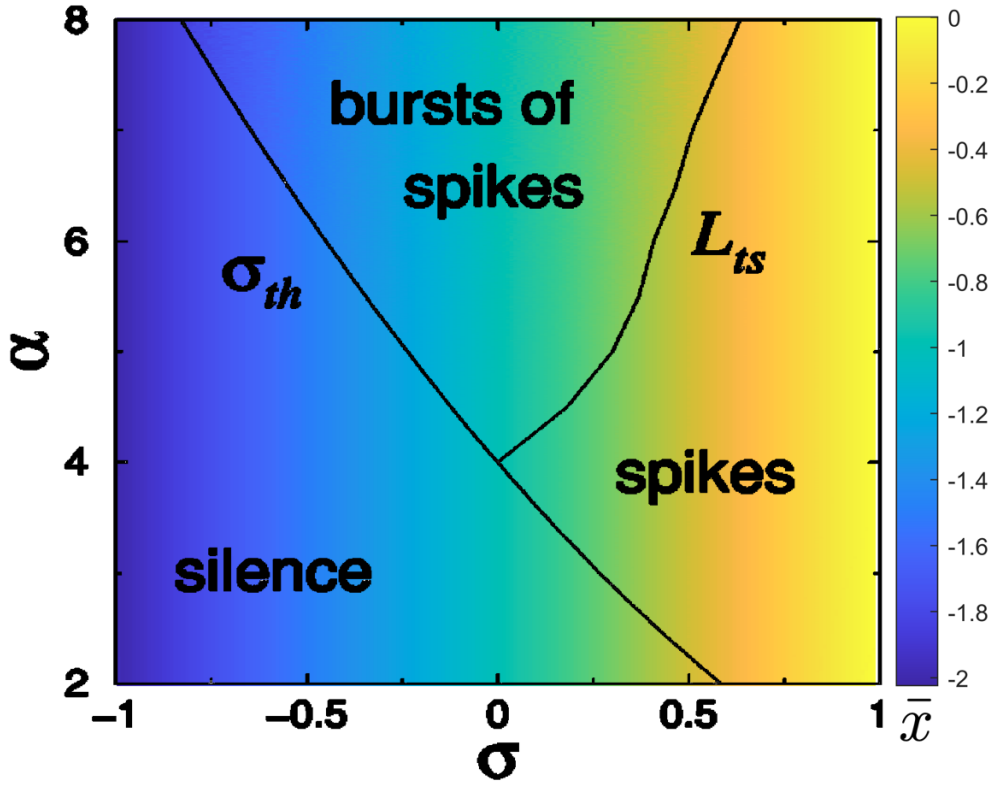


Figura 5.6: Valor medio de x , $\bar{x}$, sobre el plano de parámetros (σ, α) . El color del plano indica el valor de $\bar{x}$ para la trayectoria generada por el mapa de Rulkov (5.7 y 5.8) dada una condición inicial arbitraria. El valor medio de x es negativo para cualquier elección de los parámetros σ y α salvo para $\sigma = 1$, donde vale aproximadamente 0. $\bar{x}$ es prácticamente constante sobre las rectas $\sigma = \text{cte}$, y, por lo tanto, independiente del valor de α .

De esta forma, dependiendo de los valores de $\bar{x}$ y de h , z podría tanto aumentar como decrecer. Por ejemplo, en la figura 5.7 se muestran los resultados de realizar una simulación parecida a la correspondiente a la figura 5.5, pero introduciendo como parámetro corrector $h = 1$ en el memristor. Se mantienen los valores límite $\alpha_- = 2$ y $\alpha_+ = 6$, así como $\sigma = 0.25$, pero se escoge $\tau = 2000$ como constante de tiempo del memristor y $(x_0, y_0, z_0) = (-2, -4, 0)$ como condición inicial. En 5.7a se muestra que, inicialmente, el valor de α disminuye, pero eventualmente z acaba divergiendo a $+\infty$ ocasionando la transición del régimen de *spiking* al régimen de *bursting*, que se representa en 5.7b. Que finalmente la neurona de Rulkov memristiva tienda a $\alpha \rightarrow \alpha_+$ en el límite $n \rightarrow \infty$ es esperable atendiendo a la figura 5.6, pues sobre toda la recta vertical $\sigma = 0.25$ el valor medio de x es $\bar{x} \approx -0.8$, que es menor que $h = 1$ en valor absoluto y al final los sumandos en la

ecuación 5.10 son mayoritariamente positivos. De hecho, este no es un rasgo particular de $\sigma = 0.25$. Para todas las rectas verticales $\sigma = \text{cte}$ sobre el plano de parámetros, se aprecia en la figura 5.6, que el valor de $\bar{x}$ es prácticamente constante. Por lo tanto, cada valor de h divide el plano de parámetros en dos mitades: una mitad con $|\bar{x}| > h$ que corresponde a trayectorias que divergen a $z \rightarrow -\infty$, y otra mitad con $|\bar{x}| < h$ que corresponde a trayectorias que divergen a $z \rightarrow +\infty$. En la figura 5.8 se divide el plano de parámetros en estas dos regiones para $h = 0.75$ mediante una recta de color magenta. La región I es aquella donde el estado del memristor diverge a $z \rightarrow -\infty$, como se muestra en (a) para $\sigma = 0.20$, mientras que en la región II el estado del memristor diverge a $z \rightarrow +\infty$, lo cual se muestra en la imagen (c) para $\sigma = 0.30$. En la imagen (b) de la figura 5.8, se representa el estado del memristor para la frontera entra las regiones I y II, que sucede aproximadamente para $\sigma = 0.25$. En esta última imagen, se observa que z oscila, pero en promedio no aumenta ni tampoco disminuye. El valor medio de x para una trayectoria sobre la frontera entre las regiones I y II es $\bar{x} \approx -0.75 = -h$ y por ello el estado del memristor, en promedio, no cambia.

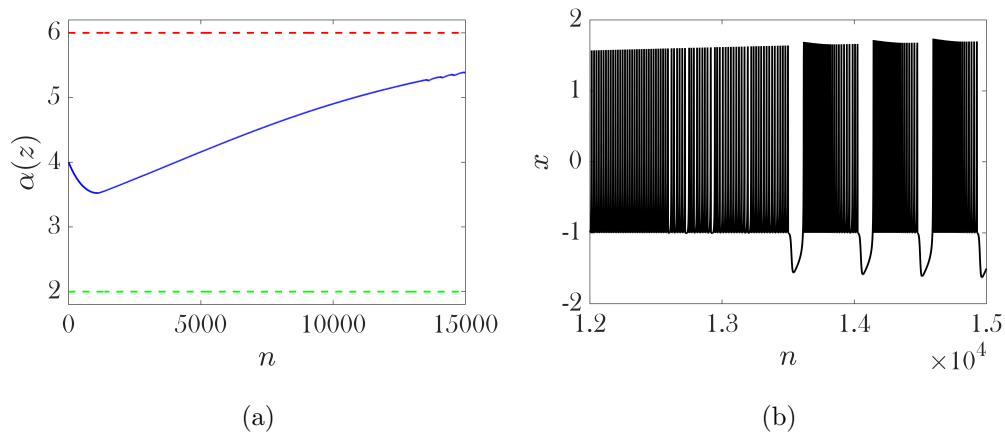


Figura 5.7: Transición de *spiking* a *bursting* con $\sigma = 0.25$, α memristivo y parámetro corrector $h = 1$. La constante de tiempo del memristor es $\tau = 2000$ y sus valores límite son $\alpha_- = 2$ y $\alpha_+ = 6$. Como condición inicial se escoge $(x_0, y_0, z_0) = (-2, -4, 0)$. En (a) se representa el parámetro memristivo α frente al tiempo n y se observa que, inicialmente, el valor del parámetro disminuye, pero eventualmente z acaba divergiendo a $+\infty$ ocasionando la transición del régimen de oscilación al régimen de ráfagas. La transición de un régimen a otro se muestra en (b), donde se representa la componente x de la trayectoria frente al tiempo.

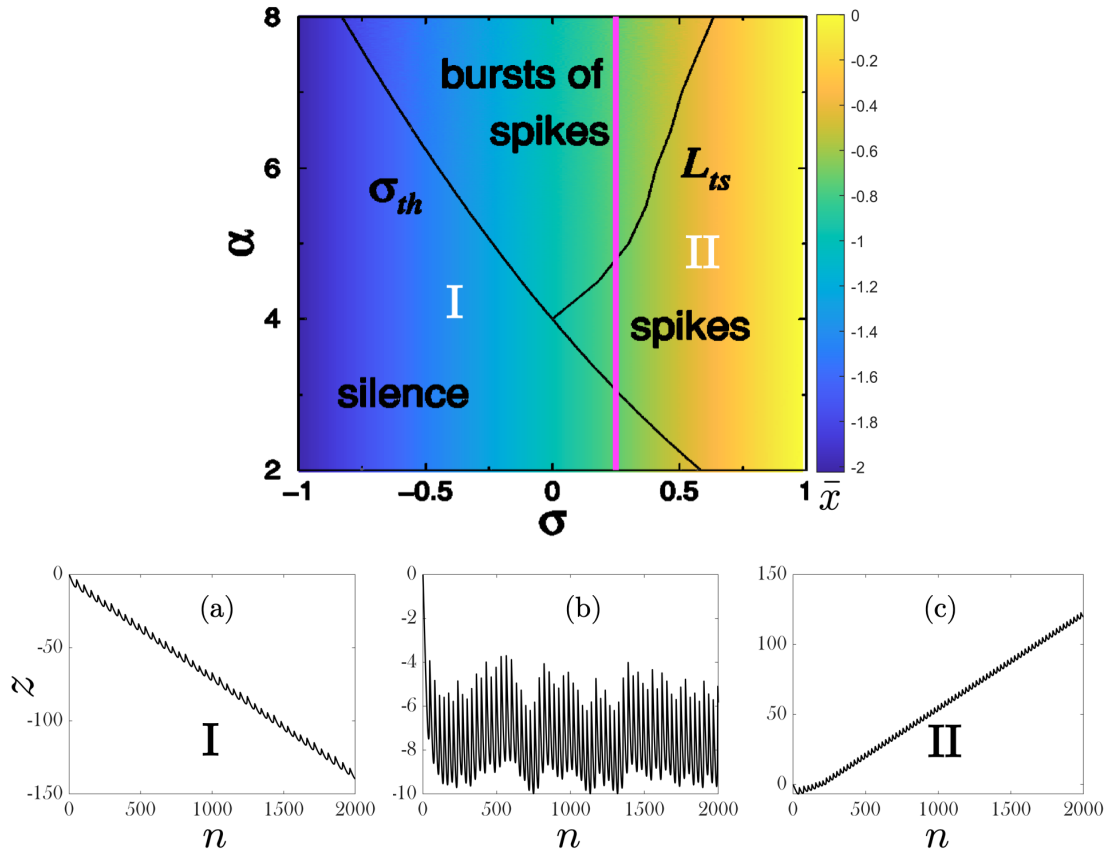


Figura 5.8: En la imagen superior se divide, mediante una recta de color magenta, el plano de parámetros (σ, α) en las regiones I y II, correspondientes a estados asintóticos del memristor $z \rightarrow -\infty$ y $z \rightarrow +\infty$, respectivamente, para $h = 0.75$. La frontera entre las regiones es $\sigma \approx 0.25$, donde $\bar{x} \approx -0.75 = -h$ y la variable z se estabiliza en un valor finito. En las imágenes inferiores se representa la dinámica de la variable z para un punto de cada región y un punto sobre la frontera. En (a) se muestran los resultados para $\sigma = 0.20$ (z decrece indefinidamente), en (b) para $\sigma = 0.25$ (aunque oscila, en promedio, z acaba manteniéndose constante) y en (c) para $\sigma = 0.30$ (z aumenta indefinidamente).

La constante de tiempo τ del memristor no es en absoluto superflua. Su valor debe ajustarse para que no se produzcan fases de inactividad con la diferencia de potencial eléctrico máxima, que no se observan experimentalmente. Por ejemplo, en la figura 5.9 se muestran los resultados de repetir exactamente la misma simulación anterior, pero con $\tau = 1000$ en lugar de $\tau = 2000$. En la imagen (b) se observan estas fases de inactividad prolongadas con x positiva, las cuales están originadas por el cambio excesivamente rápido del parámetro memristivo α . Cuando $0 < x_n < \alpha(z_n) + y_n$, en la siguiente iteración

$x_{n+1} = \alpha(z_n) + y_n$, de acuerdo con lo establecido por el tramo intermedio de la función a trozos 5.7. Luego, el tercer tramo del mapa rápido devolvería la trayectoria a $x_{n+2} = -1$. Sin embargo, si $\alpha(z_{n+1}) + y_{n+1} > \alpha(z_n) + y_n$, el tramo intermedio de la función a trozos se ensancha y $x_{n+2} = \alpha(z_{n+1}) + y_{n+1}$, manteniéndose la trayectoria sobre valores de x positivos. Para evitar este problema se requiere que $\alpha(z_{n+1}) - \alpha(z_n) < y_n - y_{n+1}$, es decir que el parámetro α cambie todavía más lentamente que la variable lenta y . El valor de τ ha de ser suficientemente grande para garantizar que se satisfaga la condición anterior.

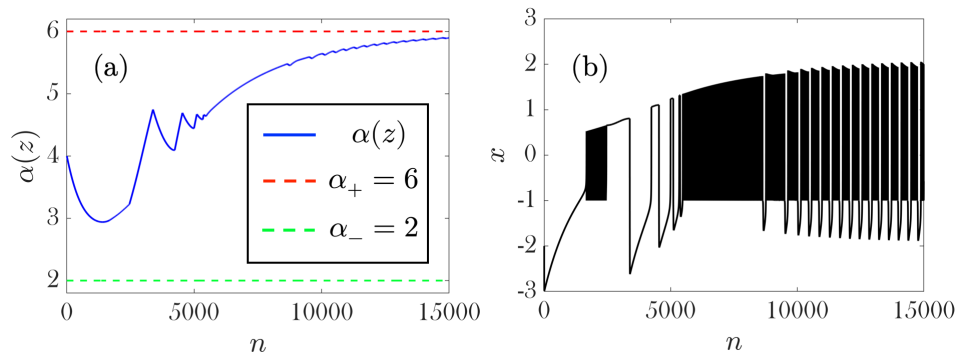


Figura 5.9: En (a) se representa el parámetro α memristivo y en (b) se representa la componente x de la trayectoria, ambas figuras, en función del tiempo para $\sigma = 0.25$, $\alpha_- = 2$, $\alpha_+ = 6$, $\tau = 1000$ y $(x_0, y_0, z_0) = (-2, -4, 0)$. Se escoge un valor de la constante de tiempo τ del memristor que es la mitad que aquel de la figura 5.7. En (a) se observa que α cambia rápidamente, lo cual origina fases de inactividad con x positivo, que se muestran en (b).

El problema del ensanchamiento del tramo intermedio de la función a trozos del mapa rápido originando fases de inactividad sobre valores positivos de x ya fue identificado por el propio Rulkov en (Rulkov, 2002) al acoplar dos neuronas. Para resolver dicho estancamiento propuso la modificación del mapa rápido

$$f(x_n, y_n) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1 - x_n} + y_n & ; \quad x_n \leq 0, \\ \alpha + y_n & ; \quad 0 < x_n < \alpha + y_n \text{ and } x_{n-1} \leq 0, \\ -1 & ; \quad (x_n > \alpha + y_n \text{ or } x_{n-1} > 0) \text{ and } x_n > 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Con la ecuación 5.11 se asegura que no se produzcan dos iteraciones seguidas sobre el tramo intermedio de la función a trozos. En la figura 5.10 se muestran los resultados del modelo de Rulkov con α memristivo para $\alpha_- = 2$ y $\alpha_+ = 6$, $\sigma = 0.25$, $\tau = 300$, $h = 1$ y $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3, 0)$. Como la constante de tiempo τ no es suficientemente grande, se produce una fase de inactividad prolongada sobre valores de x positivos señalada de color magenta en (b). Se podría aumentar el valor de la constante de tiempo τ hasta que desapareciese el estancamiento como se ha descrito previamente. Sin embargo, al incrementar el valor de τ , también se disminuye la velocidad con la que cambia el memristor α . Por ello, para visualizar la transición de un régimen neuronal a otro en la figura 5.5 se requerían 15000 iteraciones. Una alternativa que permite evitar las fases de inactividad positivas sin ralentizar en exceso el cambio de α es utilizar la modificación del mapa rápido 5.11. En la figura 5.11 se muestran los resultados para la misma elección de valores que en el caso anterior, pero considerando la modificación del mapa rápido. Se observa que no aparecen estancamientos sobre valores de x positivos y que la transición de *spiking* a *bursting* se obtiene en menos de 2000 iteraciones. Para seleccionar la constante τ atendiendo exclusivamente a la velocidad de transición entre regímenes, de ahora en adelante se usará la modificación 5.11 para el mapa rápido.

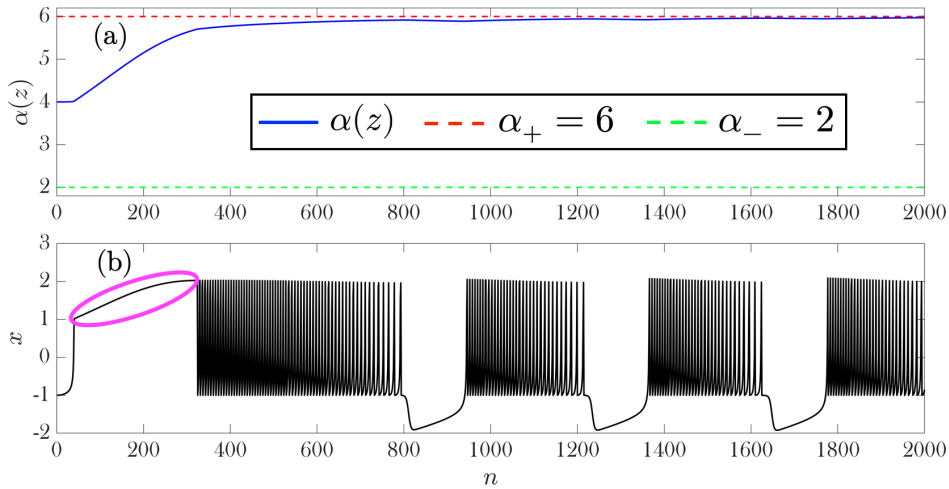


Figura 5.10: Simulación del modelo de Rulkov con α memristivo y $\alpha_- = 2$ y $\alpha_+ = 6$, $\sigma = 0.25$, $\tau = 300$, $h = 1$ y $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3, 0)$. En (a) se representa la evolución del parámetro memristivo α frente al tiempo y en (b) se representa la componente x de la trayectoria en función del tiempo. La constante de tiempo τ no es suficientemente grande y se genera una fase de inactividad sobre valores de x positivos señalada de color magenta.

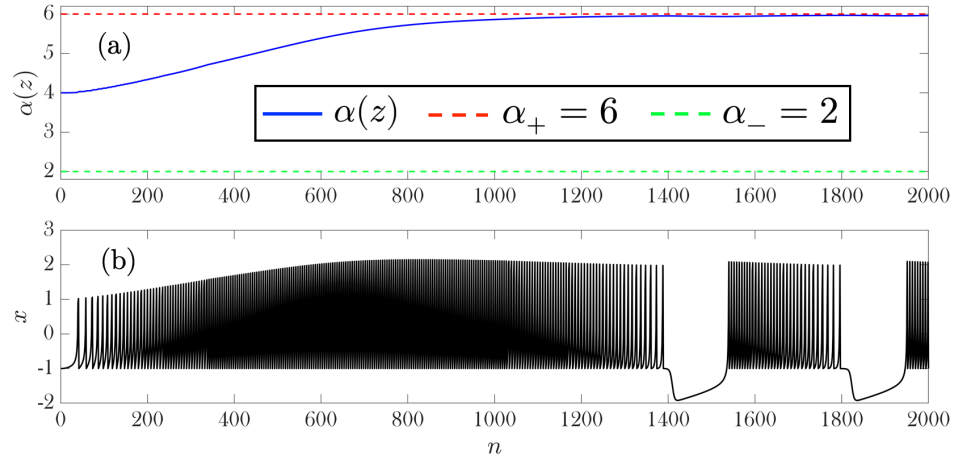


Figura 5.11: Simulación para el modelo de Rulkov memristivo con mapa rápido modificado según la ecuación 5.11 y α memristivo para $\alpha_- = 2$ y $\alpha_+ = 6$, $\sigma = 0.25$, $\tau = 300$, $h = 1$ y $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3, 0)$. En (a) se representa la evolución del parámetro memristivo α frente al tiempo y en (b) se representa la componente x de la trayectoria en función del tiempo. Aunque la constante de tiempo τ es pequeña y α cambia rápidamente, no se producen fases de inactividad sobre valores de x positivos debido a la modificación del mapa rápido.

5.3.2 Parámetro σ memristivo

A pesar de haber introducido el parámetro corrector h , resulta legítimo cuestionarse la aportación novedosa de convertir el parámetro α en memristor. La figura 5.6 refleja que el valor de $\bar{x}$ no cambia para un mismo valor de σ independientemente del valor de α . Por lo tanto, el estado final para el modelo de Rulkov con α memristivo está completamente caracterizado por el valor del parámetro σ , el cual determina si el sistema o bien se halla en la región I y $\alpha \rightarrow \alpha_-$, o bien se halla en la región II y $\alpha \rightarrow \alpha_+$. Sin embargo, el valor de $\bar{x}$ sí que cambia al desplazarse horizontalmente por el plano de parámetros (σ, α) , lo cual motiva a explorar el comportamiento del modelo cuando se fija α y se convierte a σ en memristor. A continuación, se sigue el mismo esquema que en el apartado anterior, pero cambiando α por σ :

$$\sigma(z) = \sigma_- + (\sigma_+ - \sigma_-)\varphi(z) = \sigma_- + (\sigma_+ - \sigma_-)\frac{1}{1 + e^{-z/\tau}}. \quad (5.12)$$

En la figura 5.12 se muestran los resultados de la simulación realizada con el modelo de Rulkov dado por las ecuaciones 5.7 y 5.8 y σ como parámetro memristivo según la ecuación 5.12 para $\alpha = 5$, $\sigma_- = -1$, $\sigma_+ = 1$, constante de tiempo $\tau = 500$, condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.52, 0)$ y parámetro corrector $h = 1$. Se observa que inicialmente el parámetro σ oscila alrededor de $\sigma = 0$ y se mantiene el régimen de *bursting*, pero finalmente acaba decreciendo ocasionando que σ cruce la curva σ_{th} sobre el plano de parámetros 2.9 y la neurona se estabilice en el régimen de silencio.

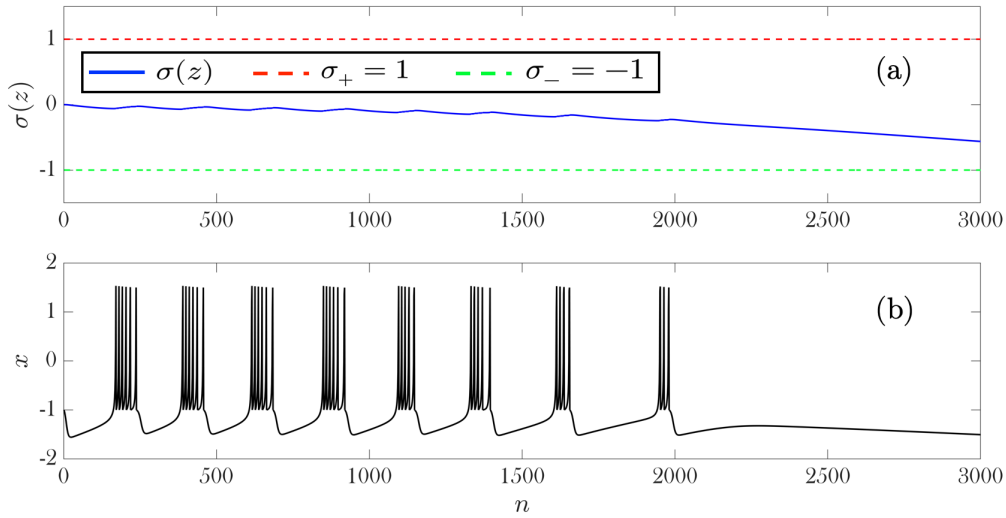


Figura 5.12: Transición de *bursting* a silencio en el modelo de Rulkov con σ memristivo para $\alpha = 5$, $\sigma_- = -1$, $\sigma_+ = 1$, $\tau = 500$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.52, 0)$ y $h = 1$. En (a) se representa el parámetro σ en función del tiempo y en (b) se representa la componente x de la trayectoria frente al tiempo. Inicialmente el estado del memristor oscila, pero finalmente acaba decreciendo provocando la disminución de σ y el asentamiento sobre el régimen de silencio.

A diferencia de lo que ocurría para α memristivo, el valor de z_0 , que define el estado inicial del memristor, condiciona que el estado final sea $\sigma \rightarrow \sigma_+$ o $\sigma \rightarrow \sigma_-$. Por ejemplo, en la figura 5.13 se repite la misma simulación anterior pero con $z_0 = 50$ en lugar de $z_0 = 0$. Se observa que finalmente σ acaba convergiendo a $\sigma_+ = 1$ y el régimen final es de *spiking*.

Resulta interesante analizar el comportamiento del modelo de Rulkov con σ memristivo cuando se hace pasar un pulso cuadrado de corriente externa del estilo de la ecuación 2.12, ya que el parámetro σ está estrechamente vinculado a la corriente externa. Por ejemplo, considérese una neurona de Rulkov memristiva idéntica a la de la figura 5.12. Ya se ha

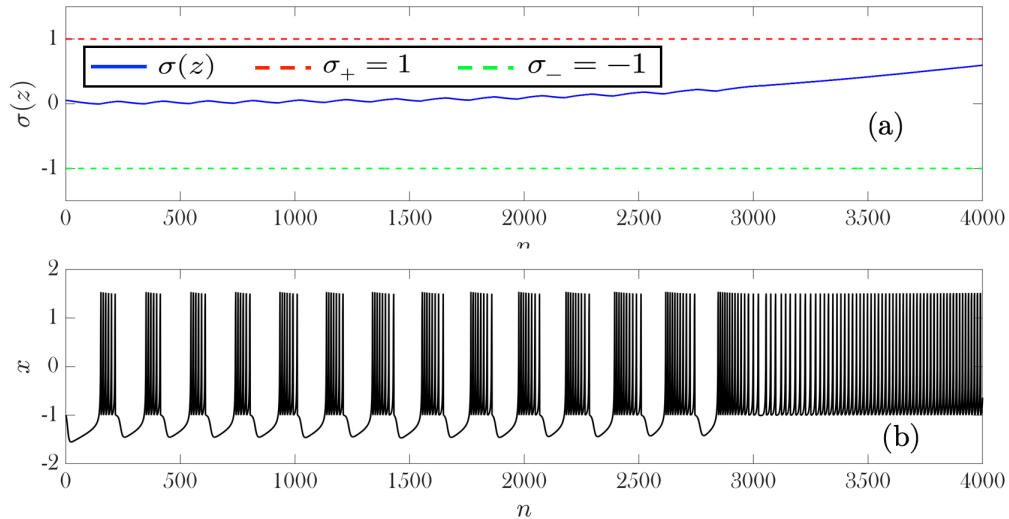


Figura 5.13: Transición de *bursting* a *spiking* en el modelo de Rulkov con σ memristivo para $\alpha = 5$, $\sigma_- = -1$, $\sigma_+ = 1$, $\tau = 500$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.52, 50)$ y $h = 1$. En (a) se representa el parámetro σ en función del tiempo y en (b) se representa la componente x de la trayectoria frente al tiempo. Inicialmente el estado del memristor oscila, pero finalmente acaba aumentando provocando el asentamiento sobre el régimen de *spiking*.

visto que dicha neurona, finalmente, se asienta en el régimen silencioso. Sin embargo, en la figura 5.13 se ha visto que, al cambiar el estado inicial del memristor de $z_0 = 0$ a $z_0 = 50$, el régimen final de esa misma neurona es de *spiking*. Como se discutió en la sección 2.4, el parámetro σ está relacionado con la intensidad de corriente externa según $\sigma_n = \sigma_0 + \sigma_e I_n$. Se considera ahora a $\sigma_0(z)$ como el parámetro memristivo y, por sencillez, se escoge para la constante de proporcionalidad $\sigma_e = 1$. Entonces, un pulso cuadrado positivo, dependiendo de su extensión en el tiempo, podría cambiar el estado final de la neurona de silencio a *spiking*, aún cuando $z_0 = 0$. Esto es justamente lo que se observa en la figura 5.14 para el pulso cuadrado positivo

$$I_n = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq n < 500, \\ 1 & ; \quad 500 \leq n \leq 600, \\ 0 & ; \quad n > 600. \end{cases} \quad (5.13)$$

Inicialmente el valor de σ disminuye porque no pasa corriente externa y el valor de $x_n + h$ en 5.10 es, en general, negativo. En el instante, $n = 500$, comienza el pulso cuadra-

do positivo y el valor de σ aumenta abruptamente en una unidad, lo cual ocasiona que en el sumatorio 5.10 domine $x_n + h$ positivo y el estado z del memristor aumente. Cuando finaliza el pulso de corriente en $n = 600$, el estado del memristor es superior a $z = 50$, por lo que la neurona, en lugar de tender al régimen de silencio, acaba convergiendo a $\sigma \rightarrow \sigma_+$ y el régimen final es oscilante. El comportamiento observado en la figura 5.14 refleja una diferencia notoria del modelo de Rulkov σ -memristivo con respecto del modelo original: en el modelo de Rulkov original, una vez que cesa la circulación de corriente externa a través de la neurona, se regresa al régimen que había inicialmente. Por otro lado, en el nuevo modelo σ -memristivo, dependiendo del estímulo, en este caso un pulso cuadrado positivo de corriente eléctrica, la neurona puede acabar en diferentes regímenes. Esta capacidad del nuevo modelo podría emular la plasticidad sináptica observada en las neuronas biológicas.

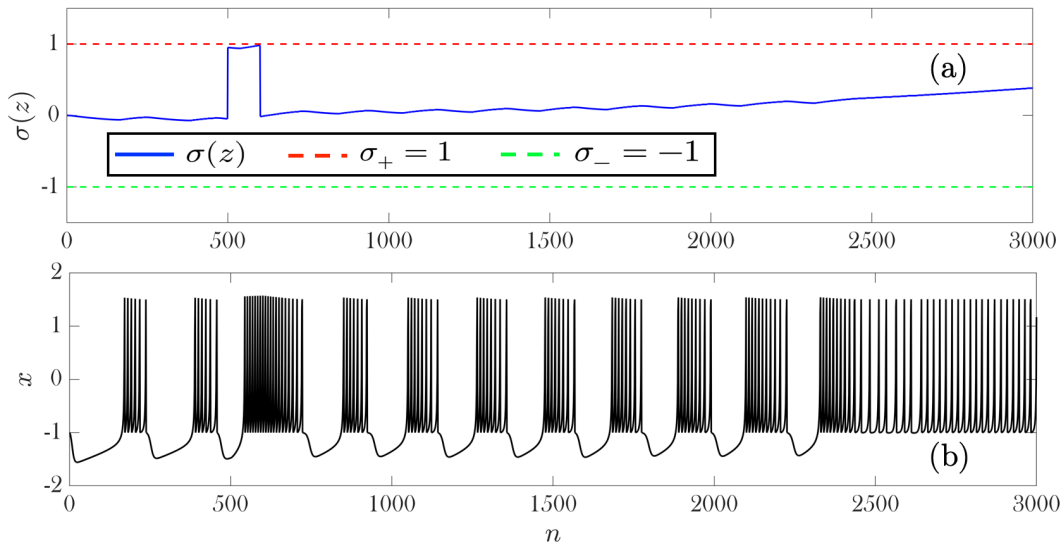


Figura 5.14: Efecto del pulso de corriente 5.13 sobre el modelo de Rulkov con σ_0 memristivo para $\alpha = 5$, $\sigma_- = -1$, $\sigma_+ = 1$, $\tau = 500$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.52, 0)$ y $h = 1$. En (a) se representa $\sigma(z) = \sigma_0(z) + I$ en función del tiempo, mientras que en (b) se representa x en función del tiempo. El principio y final del pulso cuadrado de corriente en $n = 500$ y $n = 600$, respectivamente, se identifican a partir de la subida y posterior caída súbitas de $\sigma(z)$ en (a). Si no pasase corriente externa por la neurona, el régimen final sería de silencio, como en la figura 5.12, pero el pulso cuadrado provoca que finalmente $\sigma \rightarrow \sigma_+$ y el régimen sea de *spiking*.

5.3.3 Memristor con memoria finita

El memristor considerado hasta el momento, cuyo estado viene determinado por la ecuación 5.10, almacena todos los estados desde el estado inicial y, por ello, acostumbra a presentar problemas de divergencia. Una modificación plausible es limitar la suma en 5.10 a un máximo de m sumandos. Es decir, que el sistema recuerde únicamente los últimos m estados. Se propone la ecuación

$$z_n = \begin{cases} z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + h) & ; \quad 0 \leq n \leq m, \\ \sum_{i=n-m}^{n-1} (x_i + h) & ; \quad n > m, \end{cases} \quad (5.14)$$

para definir el estado del memristor, inspirada en (Peng, Sun, y He, 2020) para el mapa de Hénon. Se analiza nuevamente el modelo de Rulkov α -memristivo de acuerdo la ecuación 5.9, pero esta vez considerando una memoria finita dada por la ecuación 5.14. En la figura 5.15 se muestran los resultados para α memristivo con memoria finita de $m = 500$ estados para $\alpha_+ = 5$, $\alpha_- = 3$, $\sigma = 0$, $\tau = 500$, $h = 1$ y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.1, 0)$. En la subfigura (a) se observa que $\alpha(z)$ oscila cada vez con menor amplitud hasta que se estabiliza en una oscilación periódica que origina un régimen de *bursting* regular, mostrado en la subfigura (b). En general, al hacer la memoria finita, los resultados que se obtienen para α memristivo son siempre del estilo de los de la figura 5.15, el parámetro acaba oscilando entre dos valores. Nótese, sin embargo, que el régimen de *bursting* finalmente alcanzado en 5.15 es atípico, puesto que la amplitud de las oscilaciones de las ráfagas aumentan a medida que se aproxima el comienzo de la fase de inactividad, lo cual es incoherente con las observaciones experimentales.

Al igual que sucedía con el memristor de memoria infinita, los comportamientos dinámicos más interesantes para el modelo de Rulkov memristivo con memoria finita se han encontrado para σ como memristor en lugar de α . Esto puede deberse a que, como se avanzó con la figura 5.6, el movimiento vertical sobre el plano de parámetros (σ, α) no modifica el valor medio de x . En la figura 5.16 se muestran los resultados del modelo de Rulkov σ -memristivo (ecuaciones 5.7, 5.8 y 5.12) con memoria finita (ecuación 5.14) de $m = 100$ estados para $\sigma_+ = 1$, $\sigma_- = -1$, $\alpha = 5$, $\tau = 50$, $h = 1$ y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.44, 0)$. Se aprecia que el memristor permite la transición entre los

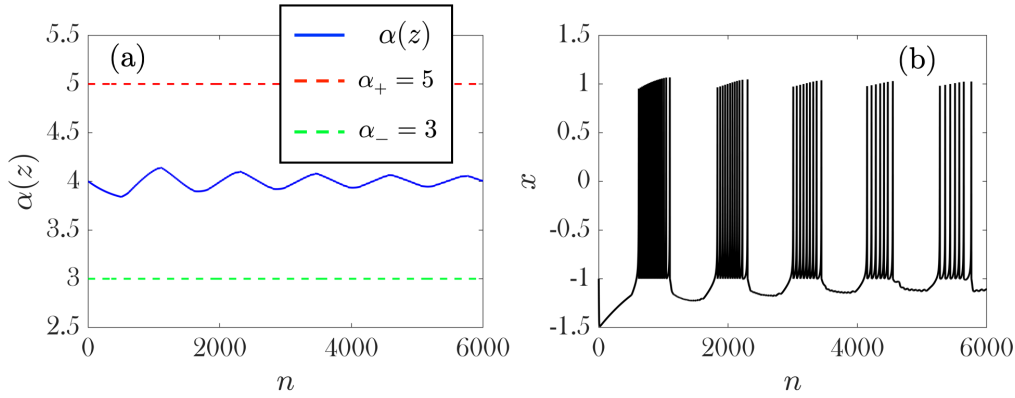


Figura 5.15: Resultados del modelo α -memristivo con memoria finita de $m = 500$ estados para $\alpha_+ = 5$, $\alpha_- = 3$, $\sigma = 0$, $\tau = 500$, $h = 1$ y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.1, 0)$. En (a) se representa α y en (b) se representa x , ambas figuras, en función del tiempo n . α oscila cada vez con menor amplitud hasta estabilizarse en un régimen de *bursting* atípico en el que la elongación de los *spikes* aumenta a medida que se aproximan a la fase de silencio.

tres regímenes neuronales. Al comienzo de la simulación $\sigma = 0$ y $\alpha = 5$, que, de acuerdo con la figura 5.6, corresponde al régimen de *bursting*. Sin embargo, se produce un aumento muy rápido de σ hasta superar el valor de 0.5. Ello se debe a que domina $h = 1$ sobre x_n en 5.14 inicialmente. Al ser la memoria finita, ahora no solo influye si $x_n + h$ es positivo o negativo, sino también si el nuevo $x_n + h$ es mayor o menor que el sumando que se “olvida”, $x_{n-100} + h$, ya que ello producirá que z aumente o disminuya, respectivamente. Por este motivo, aunque para $\sigma = 0.5$, los sumandos $x_n + h$ son generalmente positivos, el estado del memristor z disminuye. La fase de *spiking* finaliza dando paso a un régimen transitorio de silencio cuando σ cruza el umbral $\sigma_{th} \approx -0.236$. Atendiendo únicamente al valor medio de x sobre esta región del plano de parámetros, se esperaría que σ se mantuviera en un valor constante negativo. Sin embargo, como consecuencia de la **fase refractaria**¹, σ vuelve a aumentar. Cuando cruza nuevamente el umbral de excitación, pero en sentido contrario, se entra en el régimen de *bursting*. La neurona no se asienta en el régimen de *bursting*, sino que continúa cambiando de un régimen a otro de forma caótica, como se pone de manifiesto en la figura 5.17, en la que se muestra la componente x de la trayectoria tras

¹En neurociencia se conoce como fase refractaria a la curva con forma de U resultante de la tendencia muy lenta del potencial eléctrico hacia su valor de equilibrio tras adoptar valores más negativos. Por ejemplo, las partes crecientes de x en las fases de inactividad del *bursting* corresponden a fases refractarias.

varias iteraciones.

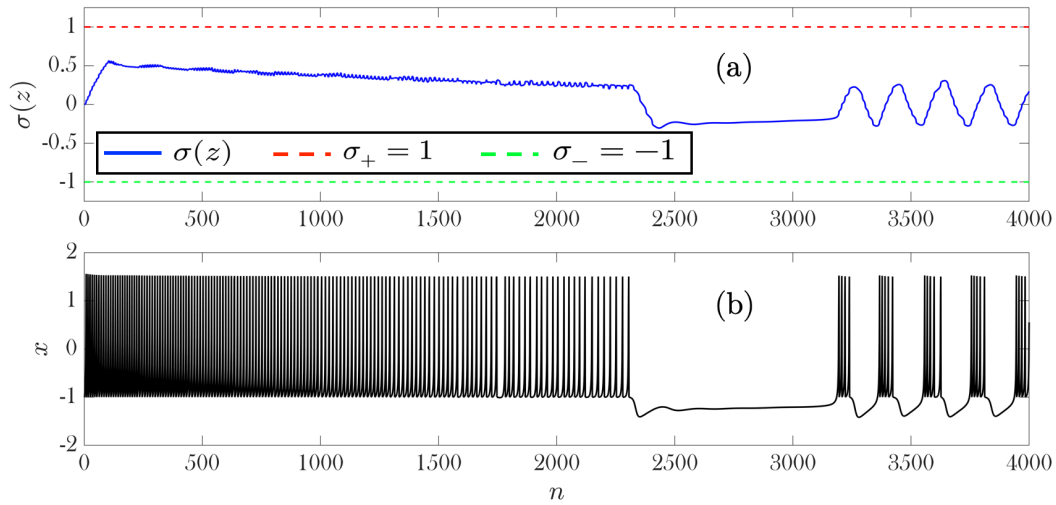


Figura 5.16: Resultados del modelo σ -memristivo con memoria finita de $m = 100$ estados para $\sigma_+ = 1$, $\sigma_- = -1$, $\alpha = 5$, $\tau = 50$, $h = 1$ y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.44, 0)$. En (a) se muestra el parámetro memristivo $\sigma(z)$ en función del tiempo, mientras que en (b) se representa la componente x de la trayectoria frente al tiempo. Primero, σ aumenta de forma abrupta originando un régimen transitorio de *spiking*. Debido a la memoria finita del memristor, σ disminuye y se pasa al régimen de silencio. La fase refractaria de la neurona provoca que σ vuelva a aumentar y se adentre en el régimen de *bursting*.

A pesar del interesante comportamiento observado en la figuras 5.16 y 5.17, el modelo de Rulkov con σ como memristor de memoria finita generalmente exhibe comportamientos como aquel que se muestra en la figura 5.18 para $m = 100$, $\sigma_+ = 1$, $\sigma_- = -1$, $\alpha = 4.5$, $\tau = 55$, $h = 1$ y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.2, 0)$. En este último caso, tras una fase transitoria de *spiking*, la neurona acaba estabilizándose en un régimen estable de *bursting* en el que el parámetro memristivo σ realiza oscilaciones periódicas.

5.4 Construcción de una red neuronal

Una vez analizado el modelo de Rulkov, con y sin memristor, para una neurona individual, el siguiente paso es la construcción de una red neuronal. El acoplamiento entre neuronas se lleva a cabo mediante el parámetro β . Se parte de la red neuronal más sencilla, dos neuronas acopladas.

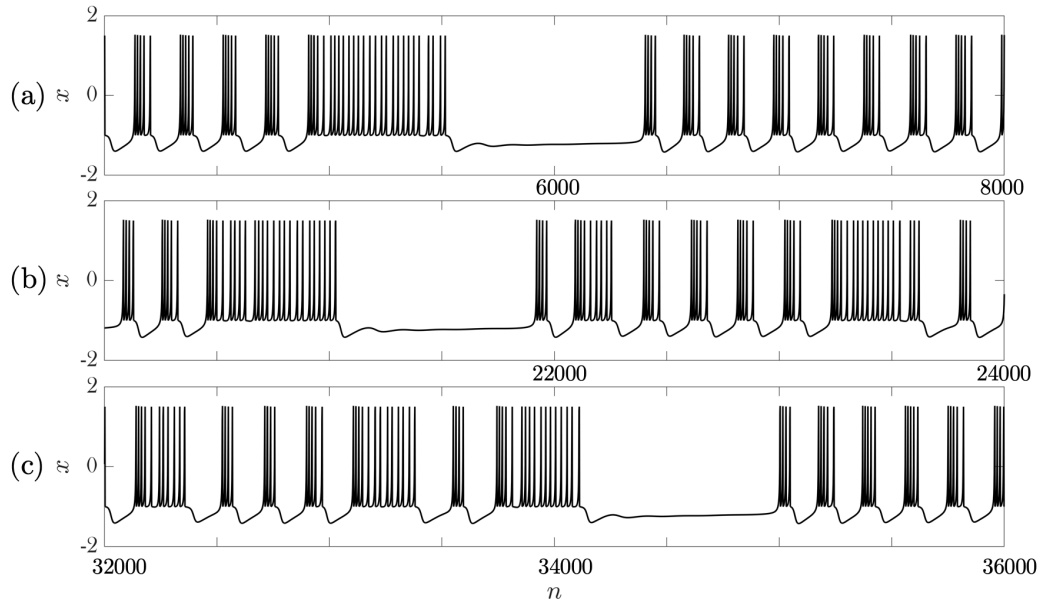


Figura 5.17: Se muestra la continuación de la trayectoria de la figura 5.16 del modelo de Rulkov σ -memristivo con memoria finita. En (a) se representan las iteraciones 4000-8000, en (b) 20000-24000 y en (c) 32000-36000. Se observa que la neurona transita caóticamente de un régimen a otro sin asentarse de forma definitiva en ninguno de ellos.

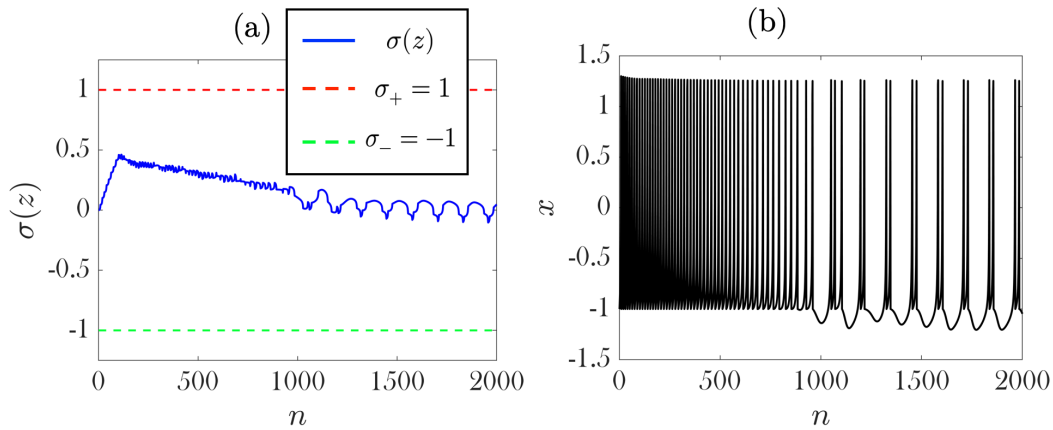


Figura 5.18: Resultados del modelo σ -memristivo con memoria finita de $m = 100$ estados para $\sigma_+ = 1$, $\sigma_- = -1$, $\alpha = 4.5$, $\tau = 55$, $h = 1$ y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.2, 0)$. En (a) se muestra el parámetro memristivo $\sigma(z)$ en función del tiempo, mientras que en (b) se representa la componente x de la trayectoria frente al tiempo. El memristor σ , tras una fase transitoria correspondiente al régimen de *spiking*, acaba realizando oscilaciones periódicas que corresponden a un régimen de *bursting*.

5.4.1 Sincronización entre dos neuronas acopladas

Considérense dos neuronas cuya dinámica individual viene determinada por las ecuaciones 5.7 y 5.8. Se establece un *acoplamiento difusivo lineal* entre ellas a partir del parámetro $\beta_n = \beta_e(x_n^{(2)} - x_n^{(1)})$, obteniéndose el sistema dinámico discreto

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} &= f(x_n^{(1)}, y_n^{(1)} + \beta_n), \\ y_{n+1}^{(1)} &= y_n^{(1)} - \mu(x_n^{(1)} + 1 - \sigma), \\ x_{n+1}^{(2)} &= f(x_n^{(2)}, y_n^{(2)} - \beta_n), \\ y_{n+1}^{(2)} &= y_n^{(2)} - \mu(x_n^{(2)} + 1 - \sigma). \end{cases} \quad (5.15)$$

Comparando con $\beta_n = \beta_e I_n$, se puede interpretar la diferencia $x_n^{(2)} - x_n^{(1)}$ como la intensidad de corriente que circula de la segunda neurona a la primera. De forma que, si las neuronas se sincronizan completamente, la intensidad de corriente es nula. Aunque $f(x, y)$ es una función a trozos y, por lo tanto el acoplamiento no es en general lineal, la dinámica del mapa rápido se concentra en el primer tramo de la función, para el cual $f(x, y) = \frac{\alpha}{1-x} + y$, y el acoplamiento sí que es lineal, ya que $f(x, y + \beta) = f(x, y) + \beta$. El parámetro β actúa como si de una fuerza elástica se tratara:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} &= f(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) + \beta_n = f(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) + \beta_e(x_n^{(2)} - x_n^{(1)}), \\ x_{n+1}^{(2)} &= f(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}) + \beta_n = f(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}) + \beta_e(x_n^{(1)} - x_n^{(2)}). \end{aligned}$$

Si $x_n^{(2)} > x_n^{(1)}$ y $\beta_e > 0$, el término de acoplamiento contribuye a aumentar a $x_{n+1}^{(1)}$ y disminuir a $x_{n+1}^{(2)}$, produciendo así un acercamiento de sus valores y favoreciendo la sincronización. Si $\beta_e < 0$ se produciría el efecto contrario y se favorecería la antisincronización. Los parámetros α y σ se podrían escoger diferentes para cada neurona. En ese caso, se emplearía la notación $\sigma^{(i)}$ y $\alpha^{(i)}$ con $i = 1, 2$ para referirse al parámetro correspondiente a cada neurona. Nótese que este procedimiento para el acoplamiento sería igualmente válido con σ y α como parámetros memristivos.

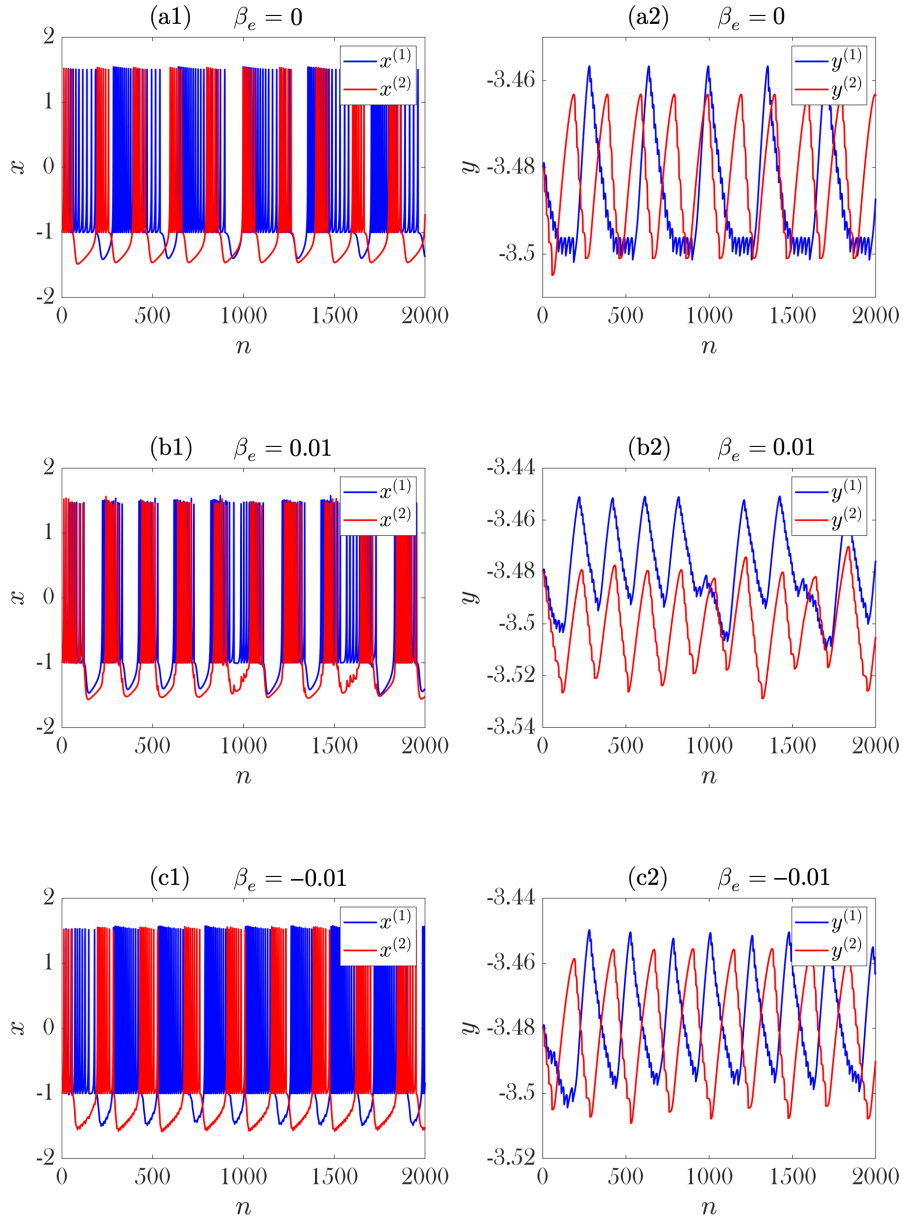


Figura 5.19: Acoplamiento entre dos neuronas de Rulkov no memristivas, ambas con el mismo $\alpha = 5$ y la misma condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3.48, 0)$, pero con $\sigma^{(1)} = 0.25$ para la primera y $\sigma^{(2)} = 0$ para la segunda. En los gráficos de la izquierda; (a1), (b1) y (c1), se representa la componente x de la trayectoria y en los de la derecha; (a2), (b2) y (c2), la componente y , utilizando el color azul para la primera neurona y el rojo para la segunda, para diferentes intensidades de acoplamiento β_e . En (a) $\beta_e = 0$ y las neuronas no están acopladas, en (b) $\beta_e = 0.03$ y las neuronas se sincronizan y en (c) $\beta_e = -0.01$ se antisincronizan.

En la figura 5.19 se muestran las dinámicas de dos neuronas de Rulkov no memristivas con $\alpha = 5$ y la misma condición inicial $(x_0, y_0) = (-1, -3.48)$, pero con $\sigma^{(1)} = 0.25$ para la primera y $\sigma^{(2)} = 0$ para la segunda. En (a1) y (a2) se representan la componente x y la componente y , respectivamente, de las trayectorias de cada neurona, utilizando el color azul para la primera y el rojo para la segunda, cuando la intensidad de acoplamiento es nula, $\beta_e = 0$. En este caso, sus mapas de Rulkov no interaccionan y las neuronas evolucionan de forma independiente. En (b1) y (b2) se representa la trayectoria de las dos neuronas cuando se aumenta la intensidad de acoplamiento a $\beta_e = 0.03$ logrando un estado de sincronización. Por último, en (c1) y en (c2) se muestra el régimen de antisincronización, para $\beta_e = -0.01$, en el que las neuronas se comportan de forma opuesta: cuando una se asienta en una fase de inactividad, la otra oscila y viceversa.

5.4.2 Sincronización en una red neuronal de mundo pequeño

A continuación se analiza la sincronización en una red neuronal de tipo *small world* o mundo pequeño, que, como se justifica en (Watts y Strogatz, 1998), representa adecuadamente la topología de conexión de una red de neuronas biológicas. El sistema

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= f(x_n^{(i)}, y_n^{(i)} + \beta_n), \\ \beta_n &= \beta_e \sum_{j=1}^N G_{i,j} (x_n^{(j)} - x_n^{(i)}), \\ y_{n+1}^{(i)} &= y_n^{(i)} - \mu(x_n^{(i)} + 1 - \sigma), \end{aligned} \quad (5.16)$$

determina la dinámica de cada neurona de la red, donde el índice $i = 1, 2, \dots, N$, siendo N el número de neuronas en la red. En el término de acoplamiento, β , aparece la matriz de adyacencia de la red, G , cuyos elementos son 0 o 1 según: $G_{i,j} = 1$ cuando las neuronas i y j están conectadas y $G_{i,j} = 0$ en caso contrario. El sistema 5.16 sería igualmente válido para una red de neuronas con parámetro σ memristivo añadiendo las ecuaciones 5.12 y 5.14. No se analiza la red con α memristivo porque, como se ha mostrado previamente, los resultados más interesantes en la dinámica neuronal individual se han encontrado para σ como memristor. Para la construcción de la red de tipo mundo pequeño se utiliza el algoritmo de Watts-Strogatz explicado en (Watts y Strogatz, 1998). Se parte de una red completamente regular de N neuronas en la que cada cada neurona está conectada a sus

k vecinos más cercanos. Luego, se cambia cada conexión por otra diferente con una probabilidad $p \in [0, 1]$, de modo que al finalizar el algoritmo, el número total de conexiones es el mismo que al comienzo, pero estas conexiones son diferentes. La red de tipo mundo pequeño se alcanza para valores de p pequeños que producen una reducción considerable de la distancia media entre dos neuronas respecto de su valor en la red uniforme, pero que mantiene el coeficiente de *clustering* en valores próximos a la unidad.

Para medir el grado de sincronización entre las neuronas de la red se usan dos coeficientes, P y V , definidos por las ecuaciones

$$P = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N H(\varepsilon - \|\vec{S}^{(i)} - \vec{S}^{(j)}\|), \quad (5.17)$$

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x^{(i)})^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^{(i)} \right)^2, \quad (5.18)$$

e introducidos en (Rahjerdi, Ramamoorthy, Nazarimehr, Rajagopal, y Jafari, 2022) y (Wang, Duan, Perc, y Chen, 2008), respectivamente. En la ecuación 5.17, $H(x)$ es la función escalón de Heaviside, $\vec{S}^{(i)} = (x^{(i)}, y^{(i)})$ (o $\vec{S}^{(i)} = (x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})$ en el caso de ser neuronas memristivas) es el vector de estado de la neurona i -ésima y $\|\cdot\|$ representa la norma euclidiana. El coeficiente P es un número real comprendido en el intervalo $[0, 1]$, que alcanza su máximo $P = 1$ cuando la sincronización en la red es total. La función escalón vale 1 cuando $\|\vec{S}^{(i)} - \vec{S}^{(j)}\| < \varepsilon$ y cero en caso contrario. Se escoge $\varepsilon = 0.01$ en lo sucesivo. Por otro lado, el coeficiente V mide la varianza de las componentes x de las N neuronas de la red y vale $V = 0$ cuando se alcanza una sincronización total.

Considérese una red de $N = 300$ neuronas de Rulkov no memristivas de tipo mundo pequeño construida utilizando el algoritmo de Watts-Strogatz con $k = 4$ conexiones por neurona y una probabilidad de reconexión de $p = 0.1$. Se escogen los mismos valores de los parámetros de control para todas las neuronas, $\alpha = 5$ y $\sigma = 0$, y únicamente se varía la condición inicial. Se establece que todas las neuronas comiencen en $x_0 = -1$ y se utiliza una distribución normal centrada en -3.5 y con desviación típica 0.5 para generar el valor inicial y_0 . La intensidad de acoplamiento entre las neuronas es de $\beta_e = 0.03$.

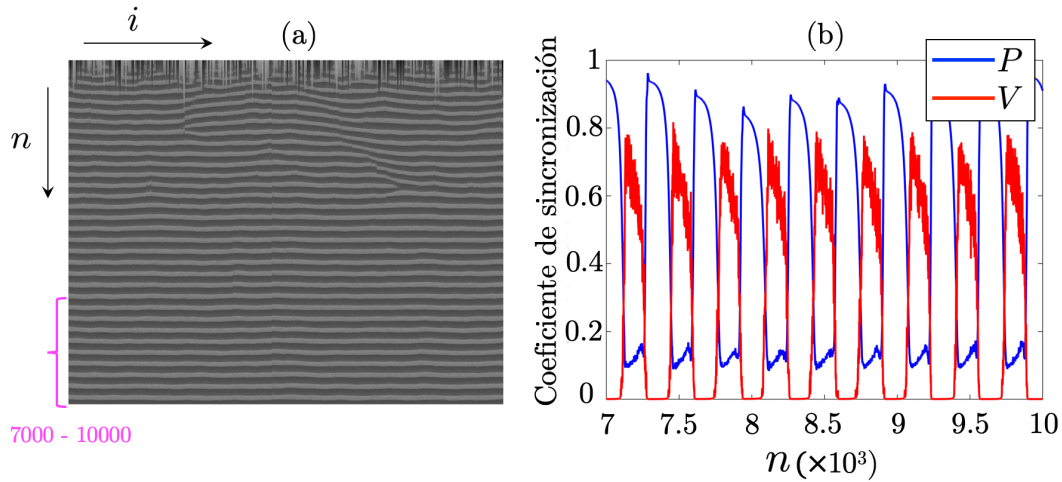


Figura 5.20: Dinámica de una red de 300 neuronas de Rulkov no memristivas de tipo *small-world* construida usando el algoritmo de Watts-Strogatz con $k = 4$ y $p = 0.1$. Se escogen los mismos parámetros de control para todas las neuronas, $\alpha = 5$ y $\sigma = 0$, y solo se cambia la condición inicial $(x_0, y_0) = (-1, \mathcal{N}(-3.5, 0.5^2))$, donde $\mathcal{N}(-3.5, 0.5^2)$ indica una distribución normal de media -3.5 y desviación típica 0.5. La intensidad de acoplamiento entre neuronas es $\beta_e = 0.03$. En (a) se representa la dinámica de la red empleando una rejilla espacio-temporal, sobre la cual el eje horizontal indica el número de neurona y el eje vertical el número de iteración o tiempo. El color de cada cuadro de la rejilla se escoge de acuerdo con el valor $x_n^{(i)}$, con tonalidades más oscuras indicando valores más pequeños. En (b) se representan los coeficientes de sincronización P y V en función del tiempo. La sincronización es total, $P = 1$ y $V = 0$, en las fases de inactividad del *bursting*, pero no en las oscilaciones de las ráfagas, para las cuales $P \neq 1$ y $V \neq 0$. Los coeficientes de sincronización alternan entre estos valores extremos de forma periódica.

En la figura 5.20a se muestra la dinámica de la red neuronal mediante una rejilla espacio-temporal al igual que se realiza en (Wang y cols., 2008). Cada cuadro de la rejilla se colorea de acuerdo con el estado $x_n^{(i)}$. Tonalidades oscuras indican menores valores de x y tonalidades claras mayores valores de x . Al moverse horizontalmente por la rejilla se recorre la red desde la primera neurona, $i = 1$, hasta la última, $i = 300$. Por otro lado, al desplazarse verticalmente, se visualiza la dinámica de una misma neurona a lo largo del tiempo. Se observa que las neuronas de la red sincronizan sus dinámicas. Sin embargo, los coeficientes de sincronización, calculados realizando la media de las expresiones 5.17 y 5.18 para las últimas 3000 iteraciones, no indican una sincronización total, pues valen

$\bar{P} = 0.4989$ y $\bar{V} = 0.2700$. Ello se debe a que se produce sincronización completa en las fases de inactividad del *bursting*, correspondientes a las zonas oscuras en (a), pero no en las oscilaciones que componen las ráfagas, correspondientes a las zonas claras en (a), donde solo se sincroniza la variable lenta y . Esto último se pone de manifiesto en el gráfico (b) de la figura 5.20, en el que se representan los coeficientes de sincronización P y V en función del tiempo para las últimas 3000 iteraciones, y en la figura 5.21, en la que se representan las componentes x e y de las trayectorias de dos neuronas de la red. En la imagen (b) de figura 5.20 se observa que $P = 1$ y $V = 0$, que indican sincronización total durante las fases de inactividad del *bursting*, se alternan con $P \neq 1$ y $V \neq 0$, correspondientes a las fases de ráfagas del *bursting*, de manera periódica.

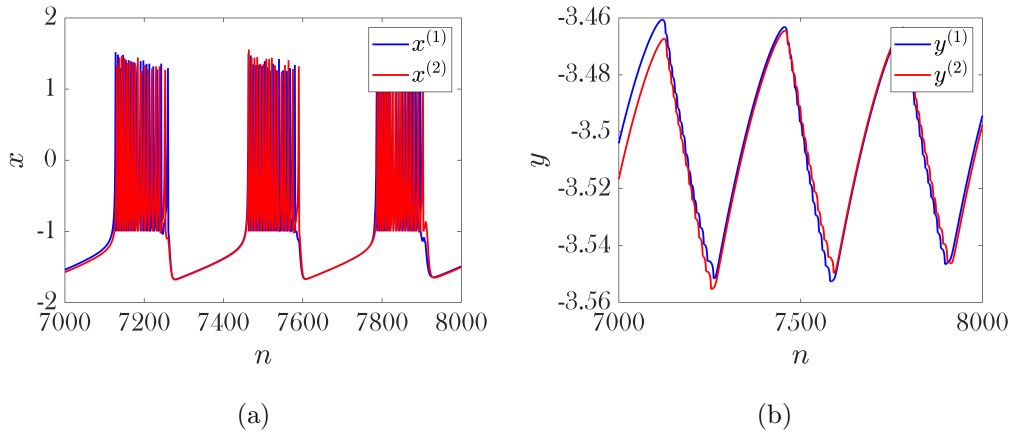


Figura 5.21: En (a) se representa la componente x de la primera y la segunda neurona de la red de Rulkov no memristiva mostrada en la figura 5.20 para las iteraciones 7000-8000. En (b) se hace lo propio con la componente y de la trayectoria. Se observa que la sincronización es prácticamente completa, tanto en x como en y en los tramos de inactividad, mientras que en las ráfagas solo las componentes lentas $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ se sincronizan.

Conviene comparar estos últimos resultados con aquellos que se obtienen para una red neuronal idéntica pero con el parámetro σ memristivo. Sobre la misma red neuronal que aquella de la figura 5.20, se establece $\alpha = 5$ para todas las neuronas y condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, \mathcal{N}(-3.5, 0.5^2), 0)$, donde $\mathcal{N}(-3.5, 0.5^2)$ indica una distribución normal de media -3.5 y desviación típica 0.5. El parámetro σ se hace memristivo con memoria finita según las ecuaciones 5.12 y 5.14 con constante de tiempo $\tau = 50$, parámetro corrector $h = 1$, $\sigma_+ = 1$, y $\sigma_- = 1$. La intensidad de acoplamiento se mantiene en $\beta_e = 0.03$.

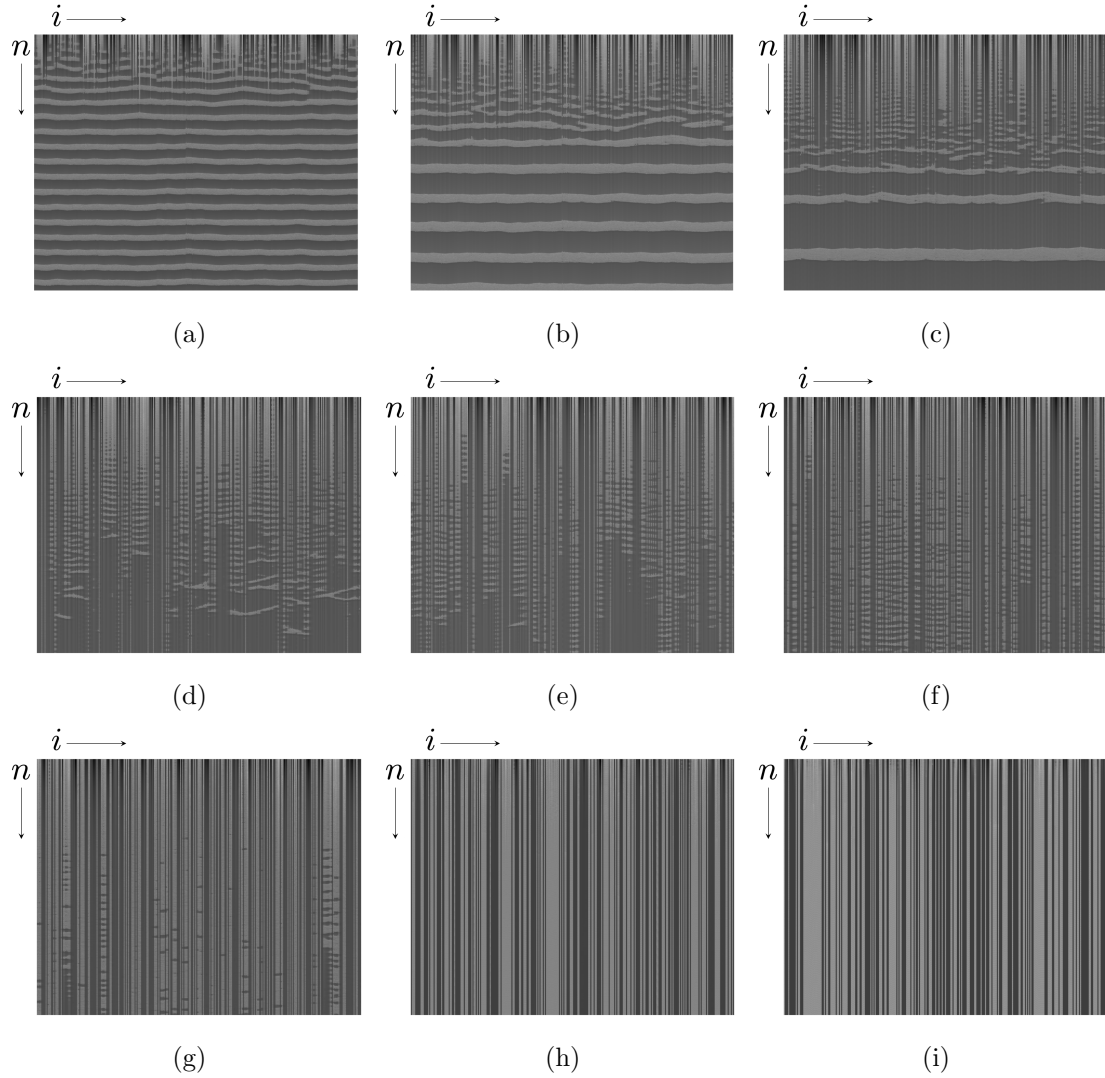


Figura 5.22: Dinámica de la red neuronal de Rulkov σ -memristiva para diferentes m , número de estados almacenados por el memristor. La red es de tipo *small-world* con 300 neuronas y 4 conexiones por neurona. Todas las neuronas presentan $\alpha = 5$, condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, \mathcal{N}(-3.5, 0.5^2), 0)$, intensidad de acoplamiento $\beta_e = 0.03$ y σ memristor con constante de tiempo $\tau = 50$, parámetro corrector $h = 1$, $\sigma_+ = 1$, y $\sigma_- = 1$. Se muestran los resultados para $m = 60$ (a), $m = 90$ (b), $m = 100$ (c), $m = 104$ (d), $m = 105$ (e), $m = 106$ (f), $m = 110$ (g), $m = 150$ (h) y $m = \infty$ (m igual al tiempo de simulación) (i). A medida que se aumenta m se incrementa la duración de las fases de inactividad del *bursting*, hasta $m = 104$, valor para el que se comienza a originar sincronización por *clustering*.

En la figura 5.22 se muestra la dinámica de la red para diferentes valores de m , el número de estados que almacena el memristor. Se observa que primero, a medida que se incrementa m , aumenta la duración de la fase de inactividad del *bursting*, representadas con tonalidades oscuras. La máxima duración para la fase de inactividad se alcanza para $m = 100$ (subfigura 5.22c). Luego, a partir de $m = 104$, se comienza a originar sincronización por *clustering*, que se consolida al aumentar m hasta hacer la memoria infinita.

Se puede identificar la transición de sincronización completa de la red a sincronización por *clustering* a partir de la variación de los coeficientes P y V con el número de estados m . Poco antes de que se produzca la transición, el período de las fases de inactividad del *bursting* es máximo, lo cual se manifiesta con el ensanchamiento de las zonas oscuras en 5.22c para $m = 100$. Como es sobre las fases de inactividad cuando la sincronización es más eficiente, esto supone un aumento del valor medio $\bar{P}$ y una disminución del valor medio $\bar{V}$. Tras el punto de transición, se genera sincronización por *clustering*, es decir las neuronas se sincronizan por grupos, de forma que las neuronas de un mismo grupo están sincronizadas entre sí, pero no necesariamente con las neuronas de otro grupo. Ello produce que el valor medio de $\bar{P}$ se reduzca, mientras que $\bar{V}$ aumente. El repentino descenso de $\bar{P}$ tras alcanzar su máximo o, equivalentemente, el repentino aumento de $\bar{V}$ tras alcanzar su mínimo, permiten determinar el punto de transición. Esto último se muestra en la figura 5.23 para la red considerada, en la que se representan $\bar{P}$ y $\bar{V}$ en función del número de estados m . Se observa que la transición ocurre alrededor de $m = 100$.

En la sincronización por *clustering*, generalmente en cada grupo de neuronas se tiende hacia los alrededores de uno de los extremos del memristor, σ_+ o σ_- . Por ejemplo, en la figura 5.24 se muestra $\sigma(z)$ frente al tiempo para dos neuronas de la red anterior pertenecientes a grupos de sincronización distintos cuando el número de estados del memristor es de $m = 150$.

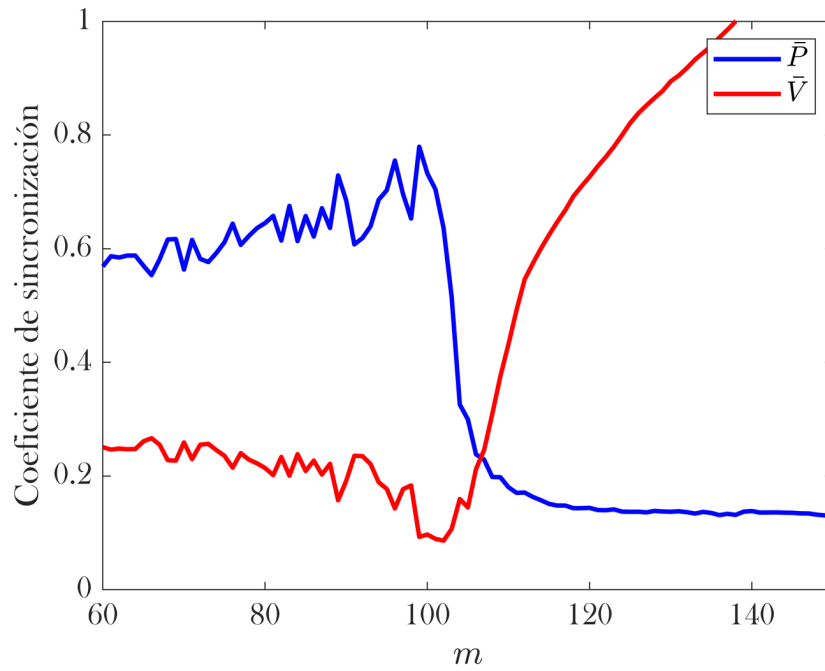


Figura 5.23: Transición de sincronización en la red neuronal de Rulkov σ -memristiva y de tipo mundo pequeño de la figura 5.22. Se representan los valores medios de los coeficientes de sincronización 5.17 y 5.18 para las últimas 3000 iteraciones, $\bar{P}$ y $\bar{V}$, frente al número de estados m almacenados por el memristor. El punto de transición tiene lugar en $m = 100$.

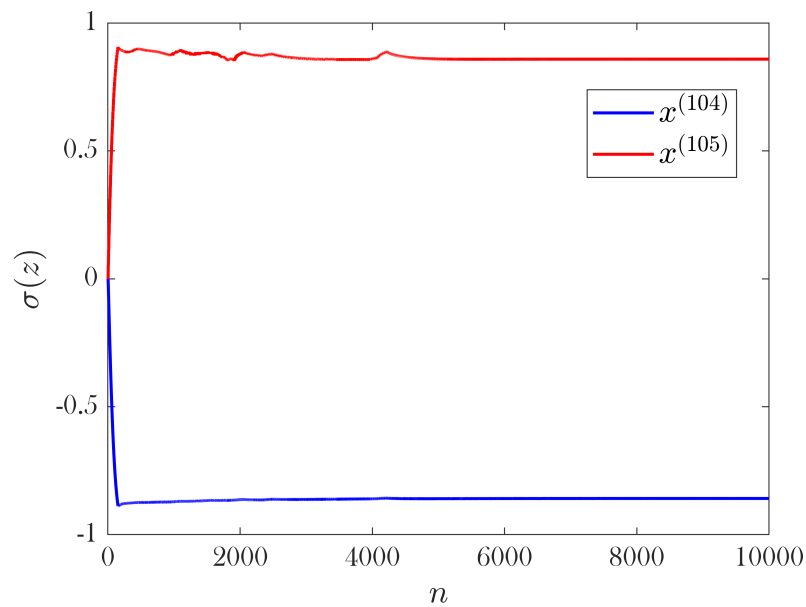


Figura 5.24: Diferencia en la evolución del memristor según el grupo de sincronización para dos neuronas de la red memristiva 5.22h. Unas neuronas se asientan en $\sigma \approx \sigma_+ = 1$, mientras que otras se asientan cerca del extremo contrario, $\sigma \approx \sigma_- = -1$.

También se ha analizado el punto de transición de sincronización cuando la constante de tiempo τ del memristor en la red neuronal anterior es diferente de 50. Para ello se sigue el mismo procedimiento, se representan los valores medios de los coeficientes de sincronización frente al número de estados m almacenados por el memristor y se busca el cambio abrupto en su tendencia. Se muestran los resultados en la figura 5.25 para $\tau = 20, 25, 30, 35, 40, 45$. Se observa que en el punto de transición se satisface $m \approx 2\tau$.

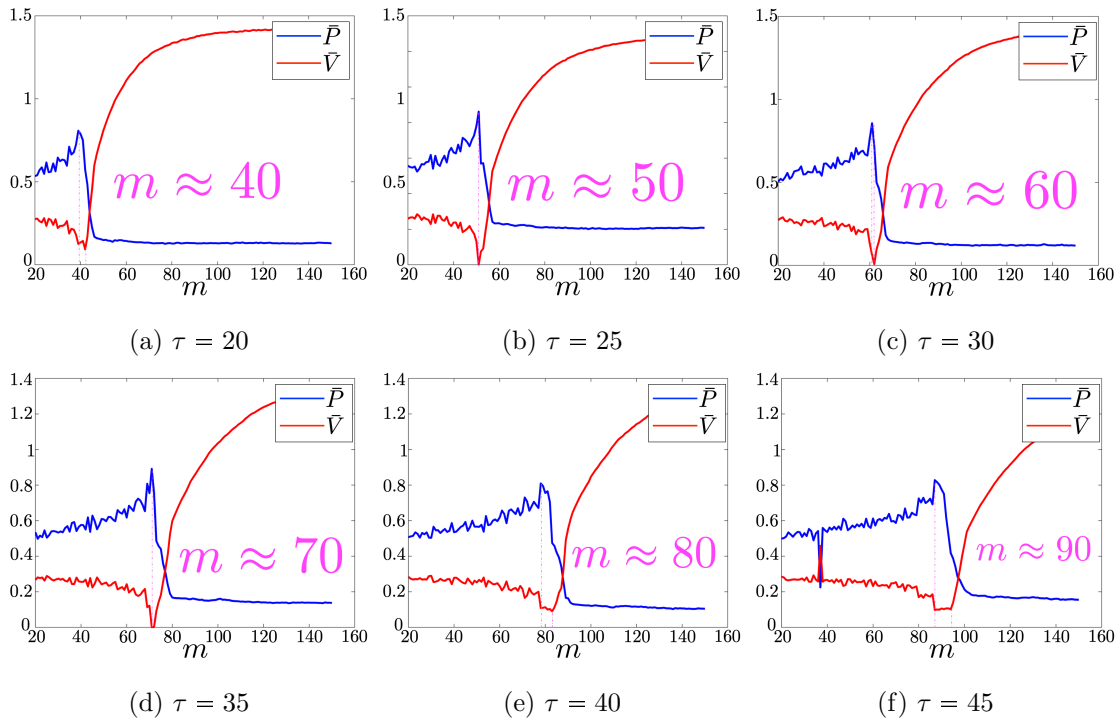


Figura 5.25: Relación entre los valores de τ y del número de estados m almacenados por el memristor que producen la transición de sincronización. Se construye una red neuronal de tipo *small-world* de $N = 300$ neuronas de Rulkov memristivas con $\alpha = 5$, condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, \mathcal{N}(-3.5, 0.5^2), 0)$, intensidad de acoplamiento $\beta_e = 0.03$ y σ memristor con parámetro corrector $h = 1$, $\sigma_+ = 1$, y $\sigma_- = 1$. Se consideran diferentes constantes de tiempo τ para el memristor; $\tau = 20$ (a), $\tau = 25$ (b), $\tau = 30$ (c), $\tau = 35$ (d), $\tau = 40$ (e) y $\tau = 45$ (f), y se busca para cada una de ellas el valor de m para el cual se produce la transición de sincronización completa a sincronización por grupos. Se observa que aproximadamente se cumple $m = 2\tau$ en el punto de transición.

Es preciso explorar si el parámetro α influencia también la transición de sincronización. Con este propósito se repite la misma simulación anterior pero con $\alpha = 5.5$, en lugar de $\alpha = 5$, y los resultados se muestran en la figura 5.26. Únicamente se modifica la condición

inicial a $(x_0, y_0, z_0) = (-1, \mathcal{N}(-3.7, 0.5^2), 0)$ con respecto a la elección de parámetros en la figura 5.25 y se aumenta el tiempo de simulación a 20000 iteraciones, en lugar de 10000. A la luz de los resultados obtenidos, se sospecha que el valor del parámetro α influye sobre el punto de transición. Ahora ya no se satisface $m \approx 2\tau$, sino que $m > 2\tau$. Podría resultar interesante como posible trabajo futuro obtener numéricamente la relación entre m , τ y α en el punto de transición.

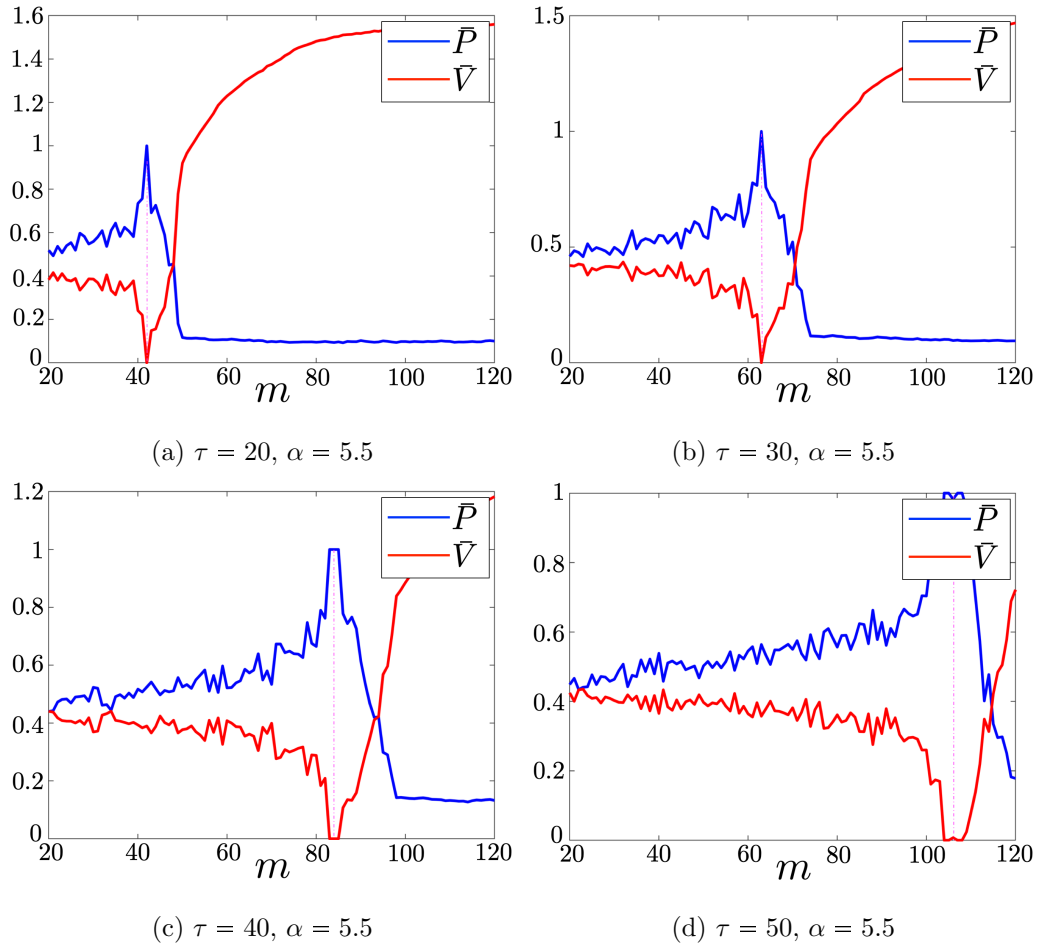


Figura 5.26: Relación entre los valores de τ y del número de estados m almacenados por el memristor que producen la transición de sincronización para $\alpha = 5.5$. Se considera la misma red neuronal que en la figura 5.25 pero con condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (-1, \mathcal{N}(-3.7, 0.5^2), 0)$. Para identificar el punto de transición se calculan los valores medios $\bar{P}$ y $\bar{V}$ de los coeficientes de sincronización entre las iteraciones 17000 y 20000 para cada valor de m y $\tau = 20$ (a), $\tau = 30$ (b), $\tau = 40$ (c) y $\tau = 50$ (d). Se observa que, al cambiar $\alpha = 5$ por $\alpha = 5.5$, en el punto de transición $m > 2\tau$.

La transición de sincronización es una consecuencia directa de la disminución en la

amplitud de oscilación del parámetro memristivo $\sigma(z)$ como se refleja en la figura 5.27. En esta se muestra la variación del memristor para una neurona aislada de Rulkov con $\alpha = 5$ para $m < 2\tau$ y $m > 2\tau$, pues, como se ha visto antes, la transición en la red neuronal se produce para $m \approx 2\tau$. Se observa que para $m < 2\tau$ el parámetro memristivo exhibe una amplitud de oscilación mucho mayor que para $m > 2\tau$, lo cual aumenta la capacidad de adaptabilidad de σ y facilita la sincronización de la red.

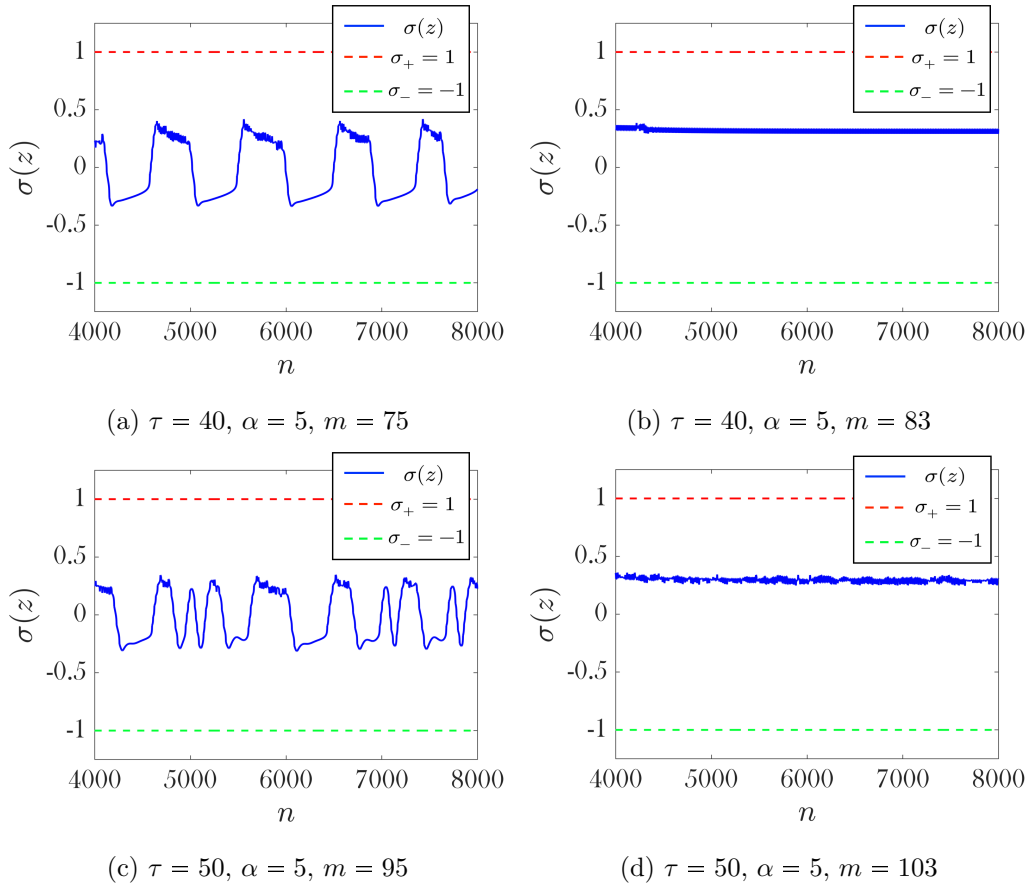


Figura 5.27: Se muestra la dinámica individual de una neurona aislada de Rulkov σ -memristiva antes y después de los valores de m que producen la transición de sincronización en la red para τ y α dados. La transición en la red neuronal está ocasionada por la pérdida de la capacidad de oscilación del parámetro memristivo $\sigma(z)$. Para $\alpha = 5$, se ha visto en la figura 5.25 que la transición ocurre para $m \approx 2\tau$. Para $m < 2\tau$ el memristor oscila considerablemente en (a) y (c), mientras que para $m > 2\tau$ el memristor oscila con una amplitud mucho menor en (b) y (d).

6. Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo de fin de Máster se ha modificado el modelo de Rulkov convirtiendo sus dos parámetros de control en funciones memristivas. Se ha mostrado que el primer parámetro de control del modelo original, α , no es un buen candidato para sustituirse por una función memristiva debido a la previsibilidad y, en ocasiones, baja fidelidad a la realidad biológica del nuevo modelo de Rulkov α -memristivo. Por otro lado, se han obtenido comportamientos neuronales con transiciones entre dos o más regímenes de actividad cuando se ha convertido al segundo parámetro del modelo, σ , en un memristor. En particular, los resultados más interesantes se han obtenido para el modelo de Rulkov σ -memristivo con memoria finita, para el cual se observan tanto oscilaciones periódicas como caóticas del parámetro memristivo $\sigma(z)$.

Una vez exploradas las posibilidades del modelo memristivo para una neurona individual, se han acoplado varias neuronas para formar una red de tipo *small-world*. Se ha estudiado la sincronización entre las neuronas de la red en función del número de estados, m , almacenados por el memristor, obteniéndose transiciones de completa sincronización a sincronización por grupos o *clustering* a partir de un valor crítico de m . Resulta interesante, como posible trabajo futuro, analizar la relación entre dicho valor crítico de m , la constante de tiempo, τ , que controla la rapidez con la que cambia el parámetro memristivo, y el valor del parámetro α , que controla el régimen neuronal.

7. Bibliografía

Referencias

- Alligood, K. T., Sauer, T. D., y Yorke, J. A. (1996). Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. En (Corrected third printing, 2000 ed., pp. 205–212). Springer-Verlag.
- Bao, H., Li, K., Ma, J., Hua, Z., Xu, Q., y Bao, B. (2023). Memristive effects on an improved discrete Rulkov neuron model. *Science China Technological Sciences*, 66(11), 3153–3163. doi: 10.1007/s11431-023-2432-1
- Bashkirtseva, I., y Ryashko, L. (2024). Dynamical variability, order-chaos transitions, and bursting Canards in the memristive Rulkov neuron model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 186, 114847. doi: 10.1016/j.chaos.2024.114847
- Chialvo, D. R. (1995). Generic Excitable Dynamics on a Two-Dimensional Map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(3–4), 461–479. doi: 10.1016/0960-0779(93)E0056-H
- Chua, L. O. (1971). Memristor—The Missing Circuit Element. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 18(5), 507–519. doi: 10.1109/TCT.1971.1083337
- Friedenberg, Z., Harkin, E., Tóth, K., y Naud, R. (2023). Silences, spikes and bursts: Three-part knot of the neural code. *The Journal of Physiology*, 601(23), 5165–5193. doi: 10.1113/JP284414
- Hodgkin, A. L., y Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, 117(4), 500–544. doi: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764
- Ibarz, B., Casado, J., y Sanjuán, M. A. F. (2011). Map-based models in neuronal dynamics. *Physics Reports*, 501, 1–74. doi: 10.1016/j.physrep.2010.12.003
- Izhikevich, E. M. (2007). Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. MIT Press.
- Li, K., Bao, H., Li, H., Ma, J., Hua, Z., y B, B. (2022). Memristive Rulkov Neuron Model With Magnetic Induction Effects. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 18(3), 1726–1736. doi: 10.1109/TII.2021.3088258
- Nieto, A. R., Capeáns, R., y Sanjuán, M. A. F. (2025). A simple method to enlarge a basin of attraction using a memristive function. *Journal of Difference Equations and Applications*. doi: 10.1080/10236198.2025.2510551

- Peng, Y., Sun, K., y He, S. (2020). A discrete memristor model and its application in hénnon map. *Chaos, Solitons and Fractals*, 137, 109873. doi: 10.1016/j.chaos.2020.109873
- Rahjerdi, B. K., Ramamoorthy, R., Nazarimehr, F., Rajagopal, K., y Jafari, S. (2022). Indicating the synchronization bifurcation points using the early warning signals in two studies: Continuous and explosive synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, 164(6684), 112656. doi: 10.1016/j.chaos.2022.112656
- Rulkov, N. F. (2001). Regularization of Synchronized Chaotic Bursts. *Physical Review Letters*, 86(1), 183. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.183
- Rulkov, N. F. (2002). Modelling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E*, 65(4), 041922. doi: 10.1103/PhysRevE.65.041922
- Shilnikov, A. L., y Rulkov, N. F. (2003). Origin of Chaos in a Two-Dimensional Map Modeling Spiking-Bursting Neural Activity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(11), 3325-3340. doi: 10.1142/S0218127403008521
- Shilnikov, A. L., y Rulkov, N. F. (2004). Subthreshold oscillations in a map-based neuron model. *Physics Letters A*, 328(2-3), 177-184. doi: 10.1016/j.physleta.2002.05.062
- Strogatz, S. H. (2018). Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. En (2.^a ed., pp. 205-212). CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Wang, Q., Duan, Z., Perc, M., y Chen, G. (2008). Synchronization transitions on small-world neuronal networks: Effects on information transmission delay rewiring probability. *Europhysics Letters*, 83, 50008. doi: 10.1209/0295-5075/83/50008
- Watts, D. J., y Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393(6684), 440-442. doi: 10.1038/30918
- Wu, F., Xu, X., y Ma, J. (2022). Estimation of the effect of magnetic field on a memristive neuron. *Applied Mathematics and Computation*, 432(5), 127366. doi: 10.1016/j.amc.2022.127366