



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

Adaptación del modelo de Miguel de Guzmán para la resolución cooperativa de problemas para alumnos de 1º de la ESO

Presentado por: Cristina Asensio Piñero
Línea de investigación: Métodos pedagógicos (Matemáticas)
Director/a: Pedro Viñuela

Ciudad: Bilbao
Fecha: 26 de abril de 2013

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN	7
1.1. Presentación	7
1.2. Justificación	8
2. PLANTEAMIENTO	11
2.1. Problema	11
2.2. Objetivos	13
2.3. Metodología	14
2.4. Justificación de la bibliografía utilizada	15
3. MARCO TEÓRICO	17
3.1 Análisis de la educación en España	17
3.1.1. El informe PISA	17
3.1.2. La LOE (Ley Orgánica de Educación)	18
3.1.3. El Real Decreto 1631/2006 (ESO)	18
3.2. Aprendizaje mediante la resolución de problemas	21
3.2.1. La importancia de la resolución de problemas	21
3.2.2. El papel del profesor en la resolución de problemas	22
3.2.3. Modelos para la resolución de problemas	23
3.3. Método propuesto por Miguel de Guzmán	24
3.3.1. ¿Quién es Miguel de Guzmán?	25
3.3.2. Modelo para la resolución de problemas de Miguel de Guzmán ...	25
3.4. Trabajo cooperativo	34
3.4.1. Trabajo cooperativo y trabajo individualista	34
3.4.2. Componentes del trabajo cooperativo	35
3.4.3. Objetivos obtenidos en el trabajo cooperativo	36
3.4.4. Técnicas para el aprendizaje cooperativo	37
3.4.5. Técnica para el aprendizaje cooperativo para la resolución de problemas	39
4. ESTUDIO DE CAMPO	41
4.1. Marco Contextual	41
4.2. Metodología	41
4.2.1. Encuesta 1	42
4.2.2. Implementación parcial de la metodología	44
4.2.3. Encuesta 2	48

4.3. Conclusiones generales	50
5. PROPUESTA PRÁCTICA DE INTERVENCIÓN	51
5.1. Propuesta para la enseñanza del contenido de álgebra de 1º de ESO	51
5.1.1. Preparación	51
5.1.2. Propuesta de la aplicación de la metodología	53
6. APORTACIONES DEL TRABAJO	56
7. DISCUSION	57
8. CONCLUSIONES	58
9. LIMITACIONES DEL TRABAJO	60
10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA	61
11. BIBLIOGRAFIA	62
11.1. REFERENCIAS	62
11.2. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA	64

ÍNDICE DE GRÁFICOS

<i>Gráfico N° 1.</i> El esquema del protocolo de resolución de un problema difícil por un experto.....	32
<i>Gráfico N° 2.</i> El esquema del protocolo de resolución de un problema difícil por un novicio.....	32
<i>Gráfico N°3.</i> Esquema del protocolo para la resolución del problema propuesta.....	47
<i>Gráfico N°4.</i> Plantilla de esquema del protocolo para la resolución de problemas.....	55

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura N°1.</i> Esquema para resolver el problema.....	45
<i>Figura N° 2.</i> Agrupamientos para el trabajo cooperativo en el aula.....	52

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla N° 1.</i> Evolución de los resultados globales en las tres competencias.....	17
<i>Tabla N° 2.</i> División de los contenidos de la asignatura de matemáticas por el Real Decreto 1631/2006 y el Decreto 175/2007.....	20
<i>Tabla N° 3.</i> Contenidos Bloque 3. Álgebra (RD 1631/2006) y Bloque 2. Números y Álgebra (Decreto 175/2007).....	21
<i>Tabla N° 4.</i> El rol del profesor en el ABP.....	22
<i>Tabla N° 5.</i> Primera encuesta para antes de realizar la implementación parcial de la metodología.....	42
<i>Tabla N° 6.</i> Segunda encuesta para después de realizar la implementación parcial de la metodología.....	48

RESUMEN

Los alumnos de 1º de ESO se enfrentan a serias dificultades en la asignatura de matemáticas cuando comienzan el aprendizaje de álgebra, así lo reflejan varios informes. Por ello, el presente trabajo está orientado a la presentación de una metodología de enseñanza que ayude a los alumnos a superar parte de estos obstáculos. Para conseguirlo, se propone adaptar el modelo de Miguel de Guzmán para la resolución de problemas de manera cooperativa en el aula.

En la primera parte del trabajo se expone la situación actual de los alumnos respecto a la asignatura de matemáticas, se justifica la elección de esta propuesta y se muestran los objetivos a conseguir con el presente trabajo.

En la segunda parte del trabajo, se presentan los principios teóricos sobre los que se fundamenta la metodología. Comienza con un análisis de las competencias matemáticas necesarias que han de adquirir los alumnos, y los problemas a la hora de conseguirlos, concretamente en el contenido de álgebra. Posteriormente, se analizan las características del método de de Guzmán para la resolución de problemas y, por último, se indican las características y ventajas del aprendizaje cooperativo.

La tercera parte del trabajo consiste en un estudio de campo, basado en dos encuestas y una implementación parcial de la metodología. Aun así, este estudio permite conocer la percepción y comprensión actual de los alumnos respecto al álgebra tras su aplicación.

Por último, se lleva a cabo la propuesta práctica de la metodología dirigida a alumnos de 1º de ESO. Para ello, se han considerado las conclusiones obtenidas del estudio de campo y los fundamentos teóricos expuestos en el marco teórico.

Podemos concluir que el modelo de de Guzmán para la resolución de problemas de manera cooperativa aporta grandes beneficios en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Palabras clave: álgebra, 1ºESO, Miguel de Guzmán, trabajo cooperativo, resolución de problemas.

ABSTRACT

The students of 1st of ESO, face serious difficulties in the subject of mathematics when dealing with the subject of algebra. This is reflected in various reports which we will see throughout this work. For this reason, the current work is orientated towards which help students overcome part of these obstacles.

In order to achieve this objective, the model of a solution to problems by Miguel de Guzmán, by carrying it out in a cooperative manner has been proposed.

In the first part of this work, there is an introduction, in which the actual situation of the students towards the subject of mathematics is shown. The choice of this proposal is also justified in a brief way and shows the objectives that should be achieved with this current work.

The second part of this work is a presentation of the principles of theory on which this proposed methodology is based. It begins with an analysis of the needed competence the student's require and existing problems when trying to achieve this competence, above all with algebra content. Later, the characteristics of the model of solutions to problems by Miguel de Guzmán are analyzed. Finally, the advantages offered by the cooperative work are shown.

The third part of the work, is a field study, based on questionnaires and through a partial implementation of the methodology. The aim is to analyze the current perception and comprehension of the students towards algebra, and their opinion after the application of this methodology.

Finally, a concrete proposal of the application of the methodology is shown, which has been carried out involving students of 1st of ESO. For this, the conclusions obtained from the fieldwork and the fundamental theory explained in the theoretical framework have been considered.

This led us to conclude that the model of Miguel de Guzmán for solving problems, developing it in a cooperative way. This is especially beneficial to the process of education and learning.

Key words: algebra, 1st of ESO, Miguel de Guzmán, cooperative work, solutions to problems.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Presentación

Hasta mediados del siglo XX la educación formal no era necesaria para desenvolverse con éxito en la sociedad, ni para conseguir un buen trabajo y mucho menos para sobrevivir con dignidad. Por aquellos tiempos, era mínima la cantidad de niños que asistían a la escuela, además, cuando estos niños escolarizados tenían problemas para aprender a leer, escribir u operar, no encontraban ningún impedimento ni problema en abandonar la escuela para encontrar trabajo, en fábricas o en el campo (Ortiz, 2004, p.29). De esta manera, las condiciones sociales, económicas y políticas hacían posible que no fuera necesario el estudio de las diferentes áreas matemáticas entre las que podemos destacar: la geometría, el álgebra, etc. En consecuencia, tampoco fue necesario reconocer la existencia de diferentes problemas en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

No obstante, esta situación cambió desde la promulgación de la LOGSE en 1990, ya que se consiguió un consenso social basado en cambios legales a través del cual todos los alumnos debían permanecer escolarizados hasta los 16 años de edad. Es esta nueva situación la que permite introducir las diferentes áreas de las matemáticas en el aprendizaje. Igualmente, comienzan a aparecer también otro tipo de problemas relacionados con el aprendizaje en temas concretos de las matemáticas que han perdurado en el tiempo hasta el día de hoy. De hecho, son notorias las dificultades a las que se enfrenta el alumno de educación secundaria, al introducirse el álgebra en la asignatura de matemáticas. Para comprender mejor la situación, a continuación el maestro y filósofo Bertrand Russell muestra el problema que supone el álgebra en los estudiantes:

Hasta el niño más inteligente se encuentra con serias dificultades muy grandes, por regla general, al iniciarse en el álgebra. La utilización de las letras es un misterio cuyo único propósito parece la mistificación. Es casi imposible, al principio, no pensar que cada letra representa un número; si por lo menos el profesor quisiera revelar qué número representa...El hecho es que en el álgebra se enseña primero el espíritu a considerar verdades generales, verdades de las que no se afirma que lo sean para esta o aquella cosa en particular, sino para cualquiera de las de todo un conjunto de cosas...Normalmente se continúa con el método adoptado en aritmética: se anuncian las reglas sin una explicación adecuada de sus bases; el alumno aprende a usarlas ciegamente, y al poco tiempo cuando es capaz de obtener la respuesta que espera el profesor, cree que ha dominado las dificultades de la materia. Pero probablemente no ha comprendido profundamente casi nada de los procedimientos utilizados. (Hersh y Steiner, 2011, p. 94).

Como se puede apreciar en el texto anterior, los alumnos carecen de razonamiento matemático, lo que impide entender y resolver problemas de álgebra con facilidad. Surgen además, otros problemas y factores influyentes en el proceso de aprendizaje que se expondrán a lo largo del trabajo.

Para facilitar el aprendizaje y de esta manera superar el bloqueo existente de los alumnos ante este temario, se desarrolla una metodología basada en un marco teórico y un estudio de campo. Mediante esta investigación, se propone un método de enseñanza eficaz de álgebra en 1º de ESO. En dicho proceso, se combina el modelo de aprendizaje del matemático y humanista español Miguel de Guzmán para la resolución de problemas y el modelo del aprendizaje cooperativo. Es en esta última modalidad donde todos los estudiantes tienen algo que aportar y donde todos aprenden de todos. Sin embargo, ambos modelos de aprendizaje proporcionan ventajas en comparación con los métodos usados habitualmente. Estas ventajas se estudian a lo largo del marco teórico del presente trabajo, en la sección 3.

1.2. Justificación

La vida diaria exige un grado de competencia matemática y la ciencia y la tecnología exige un grado de competencia aún más elevado, ya que la sociedad en la que vivimos está totalmente informatizada y son necesarios trabajadores con una formación matemática avanzada. Por ello, al comenzar la educación secundaria esta asignatura comienza a crear frustración y falta de interés entre la gran mayoría de alumnos de edades comprendidas entre los 12 y 14 años, con lo cual hay que evitar que lleguen al punto de odiarla.

Esta situación ha promovido la realización de investigaciones con el fin de encontrar la razón que justifique esa falta de interés ante los estudios científicos. Entre dichas investigaciones, cabe destacar el informe Rocard (European Commission, 2007), propuesto por la comisión Europea y realizado por un grupo de expertos. Como resultado de su investigación, el grupo realizó varias observaciones y se concluyó que una de las causas era el método de enseñanza de las asignaturas de ciencias en la escuela.

Esta falta de interés y la sensación de frustración se agravan aún más con la introducción de álgebra en el temario de la asignatura, en gran parte porque los estudiantes ven absurda la necesidad de adquirir este conocimiento. Este pensamiento general de los alumnos consta en un artículo escrito por el fundador del *Center for Teaching Peace*, Colman McCarthy:

A demasiados de nosotros nos obligaron a ir a las clases de álgebra cuando hubiéramos podido dedicar nuestro tiempo y energía a asignaturas que fueran realmente beneficiosas a nivel individual y nacional. El álgebra no es esencial para casi nada. Una vez que dominamos el arte de sumar, restar, multiplicar y dividir, en general cuando llegamos al octavo curso, ¿Por qué insistir en más? El álgebra...es un lenguaje, un medio de comunicación simbólica que a poca gente le parece fascinante y práctico, a la mayor parte no se lo parece. ¿Acaso millones de estudiantes de instituto acudirían a sus clases de álgebra y las soportarían si no fueran una puerta que se ven obligados a cruzar para acceder a la universidad? (Hersh y John-Steiner, 2011, p. 314).

Los alumnos deben entender la necesidad del aprendizaje de álgebra, se debe cambiar la visión que se contempla anteriormente, ya que es la base de casi todas las matemáticas y una herramienta elemental para el pensamiento analítico. El álgebra no es útil sólo para los estudiantes que quieran acceder a estudios superiores; el álgebra es para todos. Como afirma el fundador del Proyecto Álgebra Robert Moses, el álgebra es el umbral de la ciudadanía y del acceso económico. Además, el razonamiento y la resolución de problemas para los que los conocimientos de álgebra son indispensables, cada vez son más en más trabajos (Hersh y John-Steiner, 2011, pp. 321-324).

La solución ante esta situación para muchos investigadores matemáticos como James Kaput, investigador de la Universidad de Massachussets, es introducir la enseñanza de álgebra en el plan de estudios desde preescolar. De esta manera, se conseguiría adquirir las competencias necesarias eliminando los prejuicios que crea y entendiéndolo como algo integrado en el currículo matemático y no, como un conocimiento aislado y superficial. Para otros investigadores en la materia como Levi, Carpenter y Franke (2003), lo más apropiado sería que los docentes incitaran a participar a los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas. Así, y a medida que asimilaban el contenido aritmético, serían capaces de relacionarlo con otras ideas matemáticas afines. De esta manera, se consigue que los alumnos relacionen la resolución de ecuaciones y la simplificación de expresiones algebraicas como algo basado en cálculos aritméticos. Este enfoque es el que se tiene en cuenta en la metodología propuesta.

Con el presente trabajo se pretende facilitar la introducción de álgebra en 1º ESO y, además, se quiere disminuir en la medida de lo posible los problemas que se exponen en la sección 3, entre los que cabe mencionar: el problema causado por la propia naturaleza del álgebra, que combina números y letras; la dificultad que tienen los alumnos en la abstracción y la generalización y las dificultades producidas por el método de enseñanza y aprendizaje utilizado. Así, mediante la metodología propuesta se espera conseguir dar un paso en la mejora de la asignatura de matemáticas y al mismo tiempo se pretende tomarla como punto de partida para futuras líneas de investigación.

Para poder llevar a cabo este trabajo, se han conocido las características del modelo de Miguel de Guzmán para la resolución de problemas y las características del aprendizaje cooperativo, las cuales se mostrarán y explicarán a lo largo del trabajo.

No obstante, de manera breve se debe saber que el modelo cooperativo propone enfatizar y dar prioridad a la libertad. En este sistema destaca la pasión, la ilusión y la motivación de los alumnos dejando a un lado la intención que ha perdurado en el tiempo de crear alumnos totalmente idénticos y donde lo diferente se penaliza. Como dice el autor John Taylor Gatto “otra escuela es posible si nos dedicáramos a escucharnos activamente” (UNIR, 2012a, p.9).

El modelo de aprendizaje cooperativo se centra en la comunicación entre los alumnos, ya que cuando comienza el intercambio de ideas se crea un ambiente que propicia dicha situación. Es decir “la comunicación de nuestras ideas a otros es una parte esencial de las matemáticas y, por tanto, de su estudio. Por medio de la formulación, sea esta oral o escrita, y la comunicación, las ideas pasan a ser objetos de reflexión, discusión, revisión y perfeccionamiento.” (Godino, Batanero, y Font, 2003, p.40).

Respecto a la propuesta de Miguel de Guzmán para la resolución de problemas en la asignatura de matemáticas, el matemático propone un método que se divide en diferentes pautas y fases para poder trabajar los diferentes aspectos de un problema. Este desarrollo consta de las siguientes etapas:

1. Familiarizarse con el problema
2. Búsqueda de estrategias
3. Llevar adelante la estrategia
4. Revisar el proceso y sacar conclusiones

Cada fase se encuentra explicada con detalle en la sección 3 denominada *marco teórico*.

2. PLANTEAMIENTO

2.1. Problema

Todas las comunidades de profesores e investigadores reconocen la dificultad del aprendizaje del álgebra para la mayoría de los estudiantes. Esta situación ha motivado a muchos investigadores a trabajar en el problema para encontrar posibles soluciones, entre los cuales podemos destacar: Booth (1984), Cerdán (2010), Espinosa (2004), Fernández (1997), Herscovics (1989), Kieran (1989), Martínez (2011), Molina (2007), Nortes y Nortes (2010), Socas (2007), etc.

Varios expertos en la materia clasifican las dificultades en el aprendizaje del álgebra en 1º de ESO en tres tipos:

- a) Dificultades inherentes al álgebra.
- b) Dificultades intrínsecas al alumno.
- c) Dificultades provocadas por las técnicas de enseñanza.

A continuación se explica con más detalle cada una de estas dificultades.

A) Problemas inherentes al álgebra

Respecto a los obstáculos inherentes a la materia, se puede decir que son causados por la propia naturaleza del álgebra, la cual combina números y letras. El principal de estos obstáculos radica en que el alumno asocia la materia en cuestión con un lenguaje únicamente matemático, no asimilando la naturaleza intrínseca de las reglas establecidas en álgebra.

B) Problemas intrínsecos al alumno

Otro problema principal en la materia suele ser la dificultad que tienen los alumnos en la abstracción y la generalización, algo necesario en el aprendizaje de álgebra, ya que la misma consta de componente abstracto. Respecto a la generalización, tiene como objetivo la propia álgebra, ya que utilizamos el lenguaje algebraico para realizar demostraciones.

C) Dificultades que son consecuencia de las técnicas de enseñanza

Respecto a las técnicas de enseñanza utilizadas, no siempre son las más adecuadas. Hasta 1º de ESO los estudiantes no tienen conocimiento alguno de la existencia de álgebra. Así, teniendo en cuenta que el álgebra requiere un proceso

psicológico cognitivo para el cual es necesaria la reflexión, ha de tenerse presente que esto requiera un esfuerzo elevado que acaba frustrando al alumno, ya que es necesario tiempo y esfuerzo, además de buenas técnicas y métodos de enseñanza y aprendizaje.

Todo ello hace que el alumno opte por aprender álgebra memorizando y aprendiendo procesos mecánicos a los que no le encuentran utilidad ni sentido alguno. De hecho, es casi imposible desarrollar un razonamiento matemático si hasta el momento no se conocía en absoluto la materia. Por ello, estas técnicas han hecho que los alumnos consideren el álgebra como algo relacionado con la resolución de ecuaciones, funciones gráficas, utilización de letras de x y de y , etc. Esto se aleja del objetivo general de la enseñanza del álgebra. Por todo ello, destaca la importancia que tienen en la percepción de esta asignatura tanto el diseño del currículo como los métodos de enseñanza de los profesores. De esta manera se consigue que todos los alumnos obtengan las competencias necesarias en el área matemática y no perciban el álgebra como algo aislado y sin sentido.

La importancia de los modelos de enseñanza utilizados los confirma el primer informe de TALIS, un estudio Internacional sobre Enseñanza y Aprendizaje llevado a cabo por la OCDE, realizado a partir de encuestas dirigidas a profesores de educación secundaria de 200 centros diferentes de cada uno de los 23 países participantes. El objeto de éste es examinar aspectos importantes de los procesos educativos.

Respecto a las prácticas docentes, como queda manifestado en este informe, existen dos versiones:

Dos visiones alternativas de la enseñanza destacan, por un lado, el papel del profesor en la transmisión de conocimientos y la aportación de soluciones correctas y, por otro lado, el papel de profesor como agente facilitador del aprendizaje activo de los estudiantes que buscan las soluciones por sí mismos. Esta última visión «constructivista» de la enseñanza generalmente cuenta hoy día con más apoyo entre los profesores encuestados que la visión más antigua de la «transmisión directa» (OECD, 2009, p.13).

Respecto a los métodos de aprendizaje utilizados habitualmente, es patente en el informe que los resultados en esta materia mejoran con la participación activa de los alumnos, aunque no son muchos docentes los que la ponen en práctica:

Los profesores de todos los países comunicaron el uso en la clase de prácticas dirigidas a garantizar el aprendizaje como opción bien estructurada («prácticas estructuradas») con mayor frecuencia que el empleo de prácticas orientadas al alumno, tales como adaptar la enseñanza a las necesidades individuales. Estos dos tipos de prácticas educativas se utilizan con mayor frecuencia que actividades como el trabajo de proyectos («actividades reforzadas»), que exigen una participación más activa del alumno. Este modelo se verifica en todos los países dado que cada una de estas prácticas puede incrementar el rendimiento de los estudiantes, los países que utilizan en menor medida las actividades orientadas al alumno y las actividades reforzadas tienen la

posibilidad de mejorar sus resultados aplicándolas en mayor medida (OECD, 2009, p.13).

Además, independientemente del modelo o método de enseñanza utilizado, existen otros factores que ayudan a que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea más efectivo y eficaz, a saber: ambiente positivo, ideas de los profesores, cooperación entre profesores, satisfacción del profesor en su trabajo y desarrollo profesional (OECD, 2009, p.6).

Con la metodología propuesta se quieren superar unos objetivos que se formulan a continuación, y al mismo tiempo se quiere conseguir eliminar en la medida de lo posible los prejuicios que se tienen sobre el álgebra, entre los que destacan: eliminación del rechazo a esta asignatura intentando que los alumnos entiendan su utilidad real y haciendo que la encuentren como algo divertido. La razón de este rechazo se debe enfoques educativos equivocados, así lo afirma Raquel Mallavibarrena, presidenta de la Comisión de Educación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y profesora de Álgebra y Geometría en la Universidad Complutense de Madrid (UCM):

Es indudable que un conocimiento profundo de las matemáticas requiere capacidad de abstracción y hay que familiarizarse con el lenguaje formal pero, en buena parte debido a enfoques educativos equivocados, no siempre se ha conseguido mostrar a los estudiantes unas matemáticas creativas y no rutinarias, cercanas a la realidad de la vida cotidiana y en los niveles básicos, accesibles para todos (Guerrero, 2013, abril 14, p. 4).

2.2. Objetivos

El objetivo principal que se quiere conseguir con este trabajo es:

Proponer y exponer una metodología de enseñanza de álgebra en 1º de ESO consistente en la adaptación del modelo de Miguel de Guzmán para la resolución cooperativa de problemas.

Para ello es necesario conseguir los objetivos secundarios que se formulan a continuación y que se plantean posteriormente con más detalle:

1. Investigar las principales características y la importancia del aprendizaje basado en la resolución de problemas.
2. Conocer las principales características de la metodología propuesta por Miguel de Guzmán para la resolución de problemas en la asignatura de matemáticas.

3. Estudiar las características y ventajas que ofrece el aprendizaje cooperativo frente al aprendizaje individualista.
4. Realizar un estudio de campo para conocer la percepción de los alumnos de 1º de ESO acerca de la enseñanza del álgebra antes y después de utilizar la metodología planteada.

2.3. Metodología

La metodología utilizada para el desarrollo del trabajo y el cumplimiento de los objetivos consiste en la combinación de una investigación bibliográfica y un estudio de campo. Respecto al estudio bibliográfico, éste se ha llevado a cabo en las bibliotecas públicas de Bilbao ya que han sido las únicas que disponían del material necesario: biblioteca Alhóndiga Bilbao y la biblioteca central de Bidebarrieta. Además, la investigación bibliográfica se ha complementado con la búsqueda de información por internet. Esta documentación se ha obtenido de diferentes direcciones web, como por ejemplo: la página web del Ministerio de Educación, donde se encuentra información referente a los diferentes decretos; las páginas web de matemáticos, la web del Servicio de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid, etc.

Respecto al estudio de campo se han realizado dos encuestas y una actividad. En esta última, se lleva a cabo una implementación parcial de la metodología propuesta. La primera encuesta se ha realizado antes de la actividad y la segunda después, para obtener información del cambio que supone.

Las encuestas han sido de tipo cerrado para poder obtener información real de los alumnos respecto al problema y los resultados obtenidos con la metodología.

Para la consecución de los objetivos fijados la elaboración del trabajo ha pasado por diferentes fases que se explican a continuación:

Fase 1: Análisis del marco legal y el aprendizaje mediante la resolución de problemas

La primera fase se basa en el análisis de la situación de la educación en España, mediante la información que proporciona el informe PISA, así como en el estudio del marco legal que se ha realizado con la documentación extraída de la LOE, el Real Decreto 1631/2006 y el Decreto de la Comunidad Autónoma Vasca 175/2007.

Fase 2: Estudio del aprendizaje basado en la resolución de problemas y características del modelo propuesto por Miguel de Guzmán

La segunda fase ha consistido en la recopilación de información sobre el aprendizaje basado en la resolución de problemas. Para ello, se han analizado distintos

modelos para la resolución de problemas: modelo de *George Polya*, modelo de *El Grupo Cero*, etc. La fase ha finalizado con el estudio de las características del aprendizaje del modelo propuesto por Miguel de Guzmán para la resolución de problemas.

Fase 3: Análisis de las características y ventajas del trabajo cooperativo

La tercera fase ha consistido en analizar las características del trabajo cooperativo. Para ello ha sido de gran interés comparar las propiedades de éste con las del aprendizaje individual, pudiendo contemplar las ventajas de un modelo frente al otro. Además, se estudian diferentes técnicas para el aprendizaje cooperativo.

Fase 4: Estudio de campo

En la cuarta fase se realiza un estudio de campo donde se puede comprobar la mejora que supone la implementación parcial de la metodología en lo referente a la percepción y comprensión del álgebra. Esta mejora se analiza a través de dos encuestas; la primera de ellas se realiza antes de proponer la actividad y en ella se pone de manifiesto la visión y los problemas de los alumnos. La segunda, se lleva a cabo tras la realización de la actividad. Ambas encuestas están dirigidas al mismo grupo de alumnos, concretamente, 15 estudiantes de diferentes centros de Portugalete, Bizkaia.

Fase 5: Propuesta práctica de intervención

Esta fase ha consistido en la realización de una propuesta práctica de intervención mediante la adaptación del modelo de Miguel de Guzmán para la resolución de problemas de manera cooperativa. En esta propuesta se tendrán en cuenta todos los aspectos a mejorar obtenidos del análisis del estudio de campo, los relacionados con la actividad y con los resultados obtenidos de la segunda encuesta.

2.4. Justificación de la bibliografía utilizada

Para realizar este trabajo se ha utilizado soporte bibliográfico de libros y de información a través de la red, donde se han encontrado revistas de carácter matemático, documentos, ejercicios e informes.

Para el análisis de los problemas de aprendizaje que tienen los estudiantes en la asignatura de matemáticas se han consultado informes de diferentes organismos, dada su validez oficial. Entre los cuales se pueden destacar: TALIS, la OECD, el informe Rocard, etc. Además, se ha recopilado información bibliográfica que pone de manifiesto que las matemáticas y, más aún el álgebra, suponen y siguen suponiendo un problema

para los alumnos que lo estudian por primera vez. Para ello se ha tomado como referencia el libro de Reuben Hersh y Vera John-Steiner (2011), que lleva por título *Matemáticas: Una historia de amor y odio*. En él los autores comentan y analizan la opinión de grandes matemáticos respecto al problema que supone el aprendizaje de álgebra. Entre estos matemáticos e investigadores podemos mencionar: Robert Moses, fundador de *Algebra Project*; Colman McCarthy, fundador del *Center for Teaching Peace*; el investigador James Kaput de la Universidad de Massachussets, etc.

Para la investigación de la metodología en primer lugar, y a gracias al informe PISA, se ha podido comparar la situación de la educación en España respecto a la media. Igualmente, se han analizado las normas vigentes para realizar un estudio del marco legal: la LOE y el Real Decreto 1631/2006. Posteriormente, y a la hora de fundamentar la información en la que se basa el trabajo, se han mencionado las conclusiones obtenidas de diferentes estudios que centran el aprendizaje matemático en la resolución de problemas, como son: NCTM, el informe Cockcroft, etc.

Entre los libros principales utilizados en el presente trabajo cabe destacar: *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*, escrito por Miguel de Guzmán (1995). Este libro ha sido de gran ayuda a la hora de formular con mayor precisión el marco teórico referente al modelo de Miguel de Guzmán. Otro libro que ha sido de gran ayuda es *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar* (2ª edición), escrito por César Coll, Jesús Palacios y Álvaro Marchesi (2001), el cual trata sobre los diferentes aspectos del trabajo cooperativo, sus características y las ventajas de éste frente al trabajo individual. Esta información se ha complementado con el informe de la Comisión Internacional de la UNESCO, presidida por Jacques Delors, sobre la educación para el siglo XXI.

3. MARCO TEÓRICO

El marco teórico se ha abordado teniendo en cuenta diferentes aspectos. En primer lugar, se realiza un análisis de la actual situación educacional en la asignatura de matemáticas y de la legislación española, siempre siguiendo una correlación con los aspectos del presente trabajo. A continuación, se realiza un estudio sobre el aprendizaje mediante la resolución de problemas y se analizan diferentes modelos de aprendizaje matemático mediante este método, profundizando en el estudio del modelo propuesto por Miguel de Guzmán. Por último, se examinan las características del trabajo cooperativo y se contrastan éstas con las del trabajo individual, se analizan diferentes técnicas de aprendizaje cooperativo, con el fin de poder apreciar sus principales ventajas y aplicaciones a la enseñanza de las matemáticas.

3.1 Análisis de la educación en España

3.1.1. El informe PISA

Para la realización del análisis de la situación educacional en España, se han recogido algunos datos del informe PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los alumnos), del año 2009, puesto que este informe, entre otras cosas, ofrece una muy valiosa información sobre el funcionamiento de los sistemas educativos de diferentes países.

Respecto a los resultados españoles en competencia matemática de 2009, son muy similares a los de años anteriores: 2000 (476), 2003 (485), 2006 (480) y 2009 (483). Estos resultados colocan a España por debajo de la media de la OCDE y la diferencia con respecto al resto de los países participantes es mayor en competencia matemática, como se puede apreciar en la siguiente tabla:

Tabla Nº 1. Evolución de los resultados globales en las tres competencias.

		2000	2003	2006	2009	Diferencia promedio OCDE/España
Lectura	Promedio OCDE	500	494	492	493	
	España	493	481	461	481	10
Matemáticas	Promedio OCDE		500	498	496	
	España		485	480	483	15
Ciencias	Promedio OCDE			500	501	
	España			488	488	12

Nota: Evolución de los resultados globales en las tres competencias. Fuente: OCDE/PISA (2010, p.154).

En lo que corresponde al resultado por niveles de rendimiento, el informe señala lo siguiente:

El porcentaje de alumnos en los niveles 5 y 6, los que corresponden a los rendimientos más elevados, es en España del 8%, frente al 13% del Promedio OCDE. Al igual que en la comprensión lectora, en matemáticas vuelve a ser en los niveles más altos donde se produce la mayor diferencia con la OCDE. (OCDE/PISA, 2010, p.77).

Por último, respecto al informe PISA, cabe destacar la relevancia en cuanto a la participación activa de los alumnos, que se tiene en consideración en la propuesta de la metodología planteada a lo largo del presente trabajo:

El proceso educativo debe implicar a los alumnos como participantes activos en su propio aprendizaje, construyendo nuevos significados imbricados en sus conocimientos previos. Los alumnos que son capaces de dirigir su propio aprendizaje eligen sus objetivos, emplean sus conocimientos de dentro y fuera de la escuela y saben seleccionar las estrategias apropiadas para salir adelante con las tareas a las que se enfrentan. Éstas son actitudes y destrezas que se consideran cada vez más importantes a lo largo de la propia formación individual (OCDE/PISA, 2010, p.98).

3.1.2. La LOE (Ley Orgánica de Educación)

En cuanto a lo dispuesto por la LOE cabe decir que entre los objetivos formulados que han de adquirir los alumnos de educación secundaria, se hace mención a la importancia del trabajo cooperativo para un adecuado aprendizaje: “Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal” (BOE núm. 106, 2006, p. 17169).

Además, otro de los objetivos de la ESO hace hincapié en la concepción del conocimiento científico como un saber integrado y no como algo aislado y superficial: “Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia” (BOE núm. 106, 2006, p. 17169).

3.1.3. El Real Decreto 1631/2006 (ESO)

El Real Decreto 1631/2006 establece las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO que incluyen: los objetivos, los contenidos y los criterios de evaluación. En primer lugar, respecto a las competencias básicas, ha sido de gran interés la información que se muestra en dos de ellas: *Competencia matemática* y la

Competencia para aprender a aprender. En segundo lugar, se han analizado los contenidos del bloque de álgebra para la asignatura de matemáticas de 1º de ESO.

3.1.3.1. Competencia matemática y competencia para aprender a aprender

En lo referente a la competencia matemática, se puede apreciar la importancia de mostrar su utilidad para interpretar la realidad. Asimismo, se considera indispensable la aplicación de estrategias de resolución de problemas para conseguir un aprendizaje eficaz:

Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella. En definitiva, la posibilidad real de utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Por ello, su desarrollo en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana (BOE núm. 5, 2007, p. 17169).

Por otro lado, adquirir la competencia para aprender a aprender supone: “[...] disponer de habilidades para iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma de acuerdo a los propios objetivos y necesidades.” (BOE núm. 5, 2007, p. 689). Esto se consigue con ayuda de distintas técnicas y estrategias:

[...] de estudio, de observación y registro sistemático de hechos y relaciones, de trabajo cooperativo y por proyectos, de resolución de problemas, de planificación y organización de actividades y tiempos de forma efectiva, o del conocimiento sobre los diferentes recursos y fuentes para la recogida, selección y tratamiento de la información, incluidos los recursos tecnológicos (BOE núm. 5, 2007, p. 690).

Igualmente, se enfatiza la importancia de obtener información, relacionando los conocimientos previos y la propia experiencia personal.

3.1.3.2. Contenidos del bloque de Álgebra en 1º de ESO

Los contenidos de la asignatura de matemáticas de 1º de ESO se detallan en el Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre. En él se fijan las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Concretamente, el presente trabajo se ha realizado en el País Vasco, donde el estatuto de autonomía atribuye la competencia propia sobre la enseñanza en toda su extensión, niveles y grados, modalidades y

especialidades. En uso de dicha competencia se aprobó el currículo correspondiente a la Educación primaria y secundaria y se publicó el Decreto 175/2007, de 16 de octubre. Este Decreto se implementó el 13 de noviembre de 2007.

A continuación, se muestra una tabla en la que se aprecia la diferencia entre el Real Decreto 1631/2006 y el Decreto 175/2007, respecto a la división de los contenidos matemáticos en bloques.

Tabla Nº 2. División de los contenidos de la asignatura de matemáticas por el Real Decreto 1631/2006 y el Decreto 175/2007.

	Primer curso Contenidos	
	Real Decreto 1631/2006	Decreto 175/2007
Bloque 1	Contenidos comunes	Contenidos comunes
Bloque 2	Números	Números y álgebra
Bloque 3	Álgebra	Geometría y medida
Bloque 4	Geometría	Funciones y gráficas
Bloque 5	Funciones y gráficas	Estadística y probabilidad
Bloque 6	Estadística y probabilidad	

Nota: División de los contenidos de la asignatura de matemáticas por el Real Decreto 1631/2006 y el Decreto 175/2007. Fuente: Elaboración propia.

Como se aprecia en la tabla anterior el segundo bloque del Decreto 175/2007 incluye números y álgebra. No obstante, a continuación únicamente se hace referencia al contenido de álgebra puesto que es el área a tratar en el presente trabajo.

Tabla Nº 3. Contenidos Bloque 3. Álgebra (RD 1631/2006) y Bloque 2. Números y Álgebra (Decreto 175/2007).

Real Decreto 1631/2006	Decreto 175/2007
Bloque 3. Álgebra	Bloque 2. Números y Álgebra
Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar.	Lenguaje algebraico: Significado y uso de las letras para representar magnitudes desconocidas.
Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.	Pautas para traducir expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa.
Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa.	Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.
Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.	Cálculo de valores numéricos en formulas sencillas.

Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.	
Valorar la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.	

Nota: Contenidos Bloque 3. Álgebra (RD 1631/2006) y Bloque 2. Números y Álgebra (Decreto 175/2007). Fuente: Elaboración propia.

En ambos documentos se hace referencia principalmente a los mismos contenidos, aunque es en el Real Decreto donde se detallan con mayor precisión.

3.2. Aprendizaje mediante la resolución de problemas

Tras bosquejar la situación de la educación en España y examinar algunos aspectos de la legislación educativa española, es patente la importancia que tiene tanto el trabajo cooperativo como las estrategias de aprendizaje basadas en la resolución de problemas, para conseguir así un rendimiento máximo en el aprendizaje. Por esa razón, ambas ideas se tienen en cuenta para la metodología propuesta dirigida a los estudiantes de 1º de ESO. A continuación se estudia la relevancia de la resolución de problemas, el papel del profesor en el proceso de resolución y algunos de los diferentes modelos para la resolución de problemas.

3.2.1. La importancia de la resolución de problemas

En cuanto a la enseñanza basada en la resolución de problemas cada vez son más los que reconocen su importancia, ya que como se ha aprecia a continuación, este método propicia la iniciativa del alumno en la consecución de los objetivos.

Entre los profesores que hacen uso de este método destaca el asiático Yeap Ban Har que desde 2010 dirige el Instituto Marshall Cavendish de Singapur. Su método ha conquistado a miles de alumnos y profesores, además de obtener los mejores resultados en matemáticas en los informes internacionales. El matemático realiza la siguiente afirmación sobre su método: "Mi método se centra en resolver problemas y en facilitar a los estudiantes experiencias concretas y representaciones visuales. No se trata de memorizar o realizar cálculos tediosos sin entenderlos" (Guerrero, 2013, abril 14).

También hay estudios que basan la enseñanza de las matemáticas en la resolución de problemas. Según Serra et al. (2002, p. 112), "el NCTM de Estados Unidos, declaraba hace más de diez años que el objetivo fundamental de la enseñanza

de las matemáticas no debería de ser otro que el de la resolución de problemas”. Estos autores destacan también que el informe Cockcroft, en su párrafo 243, “señala en su punto quinto que la enseñanza de las matemáticas debe considerar la “Resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas a situaciones de la vida diaria”” (ibídem). Finalmente, indican:

En el libro de Hofstadter *Godel, Escher y Bach*, se dice que las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando los problemas no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones (Serra et al., 2002, p.112).

3.2.2. El papel del profesor en la resolución de problemas

En el proceso de resolución de problemas es necesario que los profesores intenten que los alumnos tengan confianza en sí mismos. Para ello, es imprescindible no interrumpir el proceso de resolución, además de no indicar de qué manera se puede obtener la solución más rápidamente, puesto que las indicaciones no facilitan la autonomía de los alumnos. Sin embargo, se debe ser consciente del nivel de dificultad del problema propuesto, ya que si el problema no es del nivel adecuado los alumnos pueden acabar frustrándose y abandonando el problema.

El profesor debe servir de apoyo en la adquisición y consolidación de los métodos y estrategias para la resolución de problemas. Muchos estudios confirman que es más eficaz para el aprendizaje enseñar a los estudiantes pautas y estrategias que dejarles ante un problema para resolverlo sin estos conocimientos previos. A continuación, se plantean las actitudes ejemplares del profesor para la resolución de problemas.

Tabla Nº 4. El rol del profesor en el ABP.

PROFESOR
Da un papel protagonista el alumno en la construcción de su aprendizaje.
Tiene que ser consciente de los logros que consiguen sus alumnos.
Es un guía, un tutor, un facilitador del aprendizaje que acude a los alumnos cuando le necesitan y que les ofrece información cuando la necesitan.
El papel principal es ofrecer a los alumnos diversas oportunidades de aprendizaje.
Ayuda a sus alumnos a que piensen críticamente orientando sus reflexiones y

formulando cuestiones importantes.
Realizar sesiones de tutoría con los alumnos.

Nota: El rol del profesor en el ABP. Fuente: Servicio de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid (2008).

3.2.3. Modelos para la resolución de problemas

Como se puede observar en el primer apartado de esta misma sección, cada vez es mayor la importancia de la resolución de problemas para enseñar y aprender matemáticas. Han sido muchos los que han planteado modelos para que los estudiantes aprendan cómo resolver un problema. A continuación, se muestra un breve resumen de cuatro modelos.

A) Modelo de George Polya

George Polya estuvo interesado en el proceso de descubrimiento y anunció que era necesario conocer cómo es descubierta una teoría para poder entenderla.

Su enseñanza prioriza el proceso de descubrimiento ante el simple desarrollo de ejercicios apropiados. Todo ello, para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas.

Estructuró su método en los siguientes cuatro pasos:

1. *Entender el problema:* Se resume la información dada y la que se desea determinar.
2. *Configurar un plan:* Se expresa la relación entre los elementos que intervienen en el problema mediante una fórmula o ecuación.
3. *Ejecutar el plan:* Se resuelve y evalúa la ecuación y se identifica el término constante del patrón.
4. *Mirar hacia atrás:* Se analiza la solución obtenida.

B) Modelo de Mason-Burton-Stacey

Este modelo analiza el pensamiento y la experiencia en general, que engloba como un caso particular la resolución de problemas. En este modelo se consideran elementos indispensables los siguientes: las emociones de quien resuelve el problema, el enfoque positivo que se concede al hecho de estar atascado y el dejar todo el proceso de resolución por escrito.

El método se estructura en las siguientes fases:

1. *Abordaje*: Se debe de comprender, interiorizar y familiarizar con el problema.
2. *Ataque*: Se debe de asociar y combinar toda la información de la fase anterior.
3. *Revisión*: Se revisa la solución y se intenta generalizar en un contexto más amplio.

C) Modelo de El Grupo Cero

El Grupo Cero para la resolución de problemas propone tres fases. En la tercera fase de resolución se distinguen dos categorías de comportamiento: Las *estrategias heurísticas* que son maneras de actuar que favorecen el éxito en la resolución y las *decisiones ejecutivas* que toma el sujeto respecto a cómo utilizar los algoritmos, los conceptos y las estrategias de que dispone para resolver el problema

Entre las decisiones ejecutivas caben destacar las siguientes: hacer un plan, seleccionar objetivos, buscar estrategias heurísticas, etc.

A continuación, se muestran las tres fases que constituyen el modelo (UNIR, 2012b, p.6):

- 1) Fase introductoria
- 2) Fase exploratoria
- 3) Fase de resolución

D) Modelo de Miguel de Guzmán

El modelo que desarrolla el matemático y humanista Miguel de Guzmán está constituido por cuatro fases que se mencionan a continuación y que se estudian con detalle en el próximo apartado:

1. Familiarización con el problema
2. Búsqueda de estrategias
3. Llevar adelante la estrategia
4. Revisar el proceso y sacar consecuencias

3.3. Método propuesto por Miguel de Guzmán

Tras la mención de los cuatro modelos para la resolución de problemas que se plantean en el apartado anterior, como se ha mencionado en reiteradas ocasiones el modelo elegido para adaptarlo a la propuesta que se presenta en este trabajo es el de Miguel de Guzmán. Esto es debido a su preocupación por la educación matemática en

la educación secundaria y por haber sido el primer español que ocupe un cargo de alto relieve en el ámbito de las matemáticas.

3.3.1. ¿Quién es Miguel de Guzmán?

Miguel de Guzmán nació en Cartagena, Murcia, el día 12 de enero de 1936 y murió en Madrid el día 14 de abril de 2004. Reconocido matemático y escritor, han sido muchas las áreas en las que ha desarrollado su labor investigadora.

Comenzó sus estudios superiores en la Compañía de Jesús y estudió Literatura y Humanidades en Orduña y Filosofía en Azpeitia. Aún así, en esos años mostró un gran interés por las matemáticas, y fueron los dos hermanos mayores, ingenieros ambos, sus primeros profesores en esta materia. A partir de ese momento comenzó a formarse en lo que realmente le interesaba, las matemáticas. Para ello, llevó a cabo su formación en diferentes universidades de distintos países. Todo ello le permitió ocupar puestos notorios como el de catedrático de Análisis Matemático en la Universidad Autónoma de Madrid y después en la Complutense. Destacó también como uno de los miembros más activos de la Real Academia de Ciencias (Facultad de Ciencias Matemáticas-Universidad Complutense de Madrid, 2013).

3.3.2. Modelo para la resolución de problemas de Miguel de Guzmán

Para poder definir las cuatro fases que componen el modelo de Miguel de Guzmán y que se han mencionado en apartados anteriores, el matemático ha desarrollado un trabajo extenso cuyo resultado se aprecia en el libro *Para pensar mejor* (1995). En él se explican los diferentes bloqueos de los alumnos cuando se enfrentan a los problemas, se dan a conocer las características del método propuesto para la resolución de problemas, y se dan pautas de cómo llevarlo a cabo con un trabajo en grupo. Además, para una mejor comprensión de la información expuesta utiliza ejemplos reiteradamente. A continuación, se explica con detalle cada apartado de su trabajo.

3.3.2.1. Procesos de pensamiento

Desde un principio el autor deja claro que “en el aprendizaje del pensar sólo la práctica del pensar es verdaderamente útil” (de Guzmán, 1995, p. 17). Además, menciona que la mejor manera de perfeccionar los procesos de pensamiento consiste en tener un experto junto a la persona que está resolviendo el problema, ya que ésta promueve un mayor conocimiento de todos los movimientos de su propio pensamiento.

No obstante, esta propuesta resulta utópica, ya que no podemos disponer de un experto que nos ayude en todo momento. Por esa razón se ha diseñado un programa de acción alternativo y para poderlo llevar a cabo se ha de tener la siguiente actitud inicial: “La observación de nuestro propio modo de proceder en cada uno de los problemas con que nos enfrentamos y la comparación con los de los expertos suplirán las correcciones que nuestro experto habría de hacernos si estuviera presente en nuestro entrenamiento” (de Guzmán, 1995, p. 19).

Por lo tanto, el objetivo de Miguel de Guzmán es mejorar los procesos de pensamiento en el enfrentamiento con problemas de tipo general, por lo que no se trata de proporcionar una preparación específica.

3.3.2.2. Actitud adecuada ante un problema

Se pretende mediante el método propuesto que la actividad de resolución de problemas al que tanto pánico le tiene la mayoría de los estudiantes sea una tarea interesante, divertida y estimulante; para conseguirlo es necesaria una buena actitud. Por ello, el primer paso para resolver un problema es tener una actitud adecuada, ya que un problema es un reto en el que sabemos lo que queremos conseguir pero no sabemos cómo conseguirlo. Para conseguir esa buena actitud es necesario superar las actitudes negativas que se indican a continuación:

- Miedo a lo desconocido y el consiguiente retraimiento
- Nerviosismo al comenzar y prisa por acabar lo antes posible
- Cierta desazón ante la prueba se apodera de nosotros

Toda esta variedad de actitudes negativas puede minar seriamente nuestra intervención:

- Impide la utilización al máximo de nuestra capacidad.
- Impulsándonos a tomar por bueno inmediatamente cualquier indicio de solución.
- Eliminando el placer que en el ejercicio sano de nuestras facultades podemos ciertamente encontrar.
- Creando en nosotros un hábito de amedrentamiento y un complejo de inutilidad cada vez más acusado. (de Guzmán, 1995, pp. 31-32).

Una vez superadas las malas actitudes se han de adquirir las siguientes:

- Confianza
- Paz
- Tranquilidad y sin prisas
- Disposición de aprender y curiosidad
- Gusto en actividad mental y por el reto
- Atención a los posibles bloqueos (de Guzmán, 1995, pp. 31-32).

Estos bloqueos se explican de manera breve en el siguiente apartado.

3.3.2.3. Bloqueos

De Guzmán le dedica tres capítulos al análisis de los bloqueos producidos en el enfrentamiento con los problemas y divide los bloqueos en tres tipos que a su vez se desglosan en más tipos. Se nombran y explican a continuación:

A) Bloqueos de origen afectivo

De Guzmán menciona que este bloqueo no ha recibido la atención merecida, puesto que muchos autores le han dedicado más tiempo a explorar las formas adecuadas de funcionamiento de la mente. Sin embargo, con el paso del tiempo, está más extendida esta necesidad de buscar la raíz de los fracasos en los aspectos emocionales. Dentro de este tipo de bloqueos se encuentran los siguientes: *Apatía, abulia, pereza ante el comienzo; Miedos, Ansiedades y Repugnancias* (de Guzmán, 1995, pp. 44-63)

B) Bloqueos de tipo cognoscitivo

Son bloqueos que afectan más específicamente al funcionamiento cognoscitivo. Son muchos más fáciles de detectar y de tratar que los de origen afectivo, puesto que en estos últimos se ven implicadas zonas más profundas de nuestra personalidad. Dentro de este tipo de bloqueos se encuentran los siguientes: *Incapacidad de desglosar el problema, Bloqueos en el ataque al problema, Visión estereotipada, Tendencia al juicio crítico y Rigidez mental*. Todos los bloqueos mencionados se refieren a las dos fases distintas de nuestro tratamiento del problema: *la percepción del problema y el ataque al problema* (de Guzmán, 1995, pp. 64-75).

C) Bloqueos culturales y ambientales

Hacen referencia a los bloqueos que se derivan de las formas de pensar que se transmiten de unos a otros a través del tiempo y mediante la comunicación. Son formas específicas de pensar que entran a formar parte de la estructura mental, de manera que hacen actuar a la persona con esquemas poco efectivos que no se hubieran elegido si se hubiera intervenido por uno mismo. A continuación, se muestran las maneras en las que se puede ser negativamente influenciado, es decir, los tipos de bloqueos: *La sabiduría popular y Las ideas inertes* (de Guzmán, 1995, pp. 75-82).

3.3.2.4. Estrategias de pensamiento

Las estrategias de pensamiento eficaces para abordar y resolver un problema reflejan la manera que tienen los expertos de resolver los problemas. Esta actuación de los expertos se caracteriza por las siguientes características:

- a) Una actitud inicial sana
- b) Una preparación adecuada para afrontar el problema
- c) La disponibilidad de estrategias variadas de entre las que se pueda decidir
- d) Una cierta capacidad de incubación
- e) Una constante atención a la posible iluminación, inspiración o intuición
- f) Una juiciosa evaluación de la situación del proceso
- g) Una perseverancia tenaz hacia la resolución del objetivo

Además de las características que se han mencionado, se ha de realizar un protocolo del proceso. En él se han de reflejar los fenómenos interesantes que han ocurrido a lo largo del proceso de resolución del problema. En el protocolo se debe dejar anotado todo lo que parezca útil para posteriormente realizar un análisis del proceso. Este análisis consiste en distinguir las etapas por las que ha transcurrido el proceso, es decir, consiste en señalar las motivaciones que explican la razón por la cual se ha realizado el paso siguiente.

Teniendo en cuenta todo lo mencionado, a continuación se explicarán las características de cada etapa del proceso de resolución de problemas propuesto por de Guzmán.

1) Familiarizarse con el problema

Esta fase consiste en adquirir información sobre el problema, es decir, sobre los elementos que intervienen y sobre las conexiones que existen entre esos elementos. Además, se debe adquirir una posición de partida y tener clara la posición de llegada, pero siempre sin apresurarse ya que las prisas acarrearán malas consecuencias.

Para conseguir el objetivo de esta primera fase es necesario indagar con el problema. Para ello, de Guzmán menciona una serie de pautas, a saber: mirar el problema pausadamente, imaginarse los elementos que intervienen, considerar las conexiones que hay entre los elementos, asegurarse de cuál es la situación de partida y la de llegada, manipular el problema, etc.

Cuando se habla de manipular el problema, se puede hablar sobre diferentes formas de explorar y analizar el mismo. Podemos indicar las siguientes: esquemas, procesos de ensayo y error, utilizar un lenguaje adecuado, etc. Todas ellas se analizan en la fase de búsqueda de estrategias.

En esta fase de familiarización suele ser normal que el problema absorba y ocupe la mente del que lo intente solucionar. Esto ocurre sobre todo cuando se ha dedicado un tiempo a discurrir para hallar la solución. Para finalizar, en esta fase debe quedar claro el enmarque del problema adecuadamente.

2) Búsqueda de estrategias diversas

Cuando se enuncia un problema, normalmente nos viene a la cabeza una primera idea para solucionar el mismo, pero no debemos conformarnos con esa primera idea para buscar la solución. Por eso, se debe procurar diseñar varias estrategias posibles pero sin llevarlas a cabo, puesto que cuando se tengan todas definidas se decidirá la más adecuada. Este paso es de gran relevancia, por lo que aún teniendo una idea muy clara para solucionar el problema y uno esté seguro de que esa es la adecuada, no se debe olvidar que la fase consiste en buscar varias estrategias posibles.

A continuación, se muestran algunas normas generales para construir posteriormente las estrategias necesarias (de Guzmán, 1995, pp. 148-151).

-Empieza por lo fácil

En muchas ocasiones resulta difícil hacer frente a un problema por varias razones, por ejemplo, porque el problema tiene muchos elementos o porque el enunciado es extenso y complicado de entender. En estos casos de Guzmán propone realizar un problema semejante pero con menor dificultad, partiendo de eso se va complicando el ejercicio hasta conseguir el propuesto inicialmente. Otra opción en estos casos es abordar la parte del problema que más fácil resulte, ya que en su conjunto puede resultar muy complicado.

Además, es muy importante simplificar el problema para lograr solucionarlo a pesar de que en ocasiones resulte demasiado drástico. Para realizar simplificaciones se tienen varias opciones, entre las que puede destacar: añadir alguna condicional adicional o reducir el tamaño del problema. De esta manera se consigue que el problema propuesto sea asequible (de Guzmán, 1995, pp. 152-154).

-Experimenta

Las propiedades generales de un conjunto de números, figuras u objetos en general, se aprecian en casos particulares. Por esa razón, para saber si una propiedad es común a muchos elementos se ha de experimentar con muchos de ellos. Esta experimentación es una técnica para descubrir y resolver problemas, los cuales pueden tomar formas muy diferentes (de Guzmán, 1995, pp. 161-168).

-Hazte un esquema, una figura, un diagrama

Cuando se consigue encontrar una representación adecuada de los elementos que intervienen en un problema, el proceso de resolución se facilita. Esto ocurre porque pensamos mucho mejor con imágenes que con palabras, símbolos, números y formulas. Por todo ello es muy útil esquematizar, dibujar y pintar cuando se quiere resolver un problema.

Todas las imágenes que se realicen de apoyo deben contener los datos más importantes del problema. De esta manera, se consiguen resaltar de manera visual las relaciones existentes y en consecuencia clarificar la situación (de Guzmán, 1995, pp. 169-178).

-Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada

En ocasiones el ser capaz de resolver un problema depende del estilo de pensamiento que se aplique. En ocasiones es el adecuado pero muchas veces no lo es. Para que el pensamiento sea el adecuado, es muy importante utilizar un lenguaje correcto, entre los cuales destacan: lenguaje imaginativo, pictórico, esquemas, diagrama, etc. En matemáticas se puede utilizar lenguaje geométrico, algebraico, analítico, probabilístico, etc.

Siempre se debe tener claro que un mismo problema se puede abordar con diferentes herramientas mentales, y algunas siempre son más efectivas que otras. Por ello, se debe pensar bien antes de comenzar a trabajar en las diferentes posibilidades que existen. Una vez decidido el estilo de pensamiento que se va a utilizar es recomendable pensar en cómo se va a aplicar concretamente (de Guzmán, 1995, pp. 179-195).

-Busca un problema semejante

Cuantos más problemas se resuelvan, más experiencia se adquiere en la resolución y más tipos de problemas se conocen. Esto permite que sea habitual para las personas que más actividades de este tipo realizan, que asemejen dichos problemas a algunos realizados anteriormente. Así, se evita la sensación de bloqueo que podría sentir la persona.

Por lo tanto, buscar un problema similar es una muy buena idea, ya que conseguimos confianza en nosotros mismos. De esta manera, la resolución de los problemas permite al alumno que, instintivamente, emplee los procedimientos de ataque de ese tipo de problemas. Así se conseguirán estrategias válidas para el problema que se pretende resolver. Mediante esta estrategia se experimenta el beneficio que produce el recuerdo de un antiguo problema ante un nuevo problema (de Guzmán, 1995, pp. 196-198).

-Inducción

El método de inducción se utiliza con frecuencia en algunos campos de las matemáticas. Dicho método permite realizar demostraciones para proposiciones en las que aparece como variable un número natural.

Este razonamiento permite demostrar una infinidad de proposiciones, o una proposición que varía en función de un parámetro n que toma una infinidad de valores enteros (de Guzmán, 1995, pp. 199-203).

-Supongamos que el problema está resuelto

Esta técnica de suponer el que el problema está resuelto es muy común y útil, puesto que los datos que ofrece el problema nos permiten conocer detalles del mismo pero no nos dejan comprender y conocer el problema en su conjunto. Por lo tanto, si nos imaginamos el problema resuelto desde un principio, aparecerán los datos más similares a los que buscamos. De esta manera, se hallará más fácilmente el recorrido desde la situación de partida hasta donde queremos llegar.

Este método suele ser muy común utilizarlo tanto en álgebra como en geometría. Los ejercicios de álgebra nos piden hallar, en muchas ocasiones, un número. Además, se dan las condiciones que ese número debe cumplir. A pesar de no conocer el número que se busca, podemos suponer que si llamamos a ese número x y posteriormente se le imponen las condiciones que ha de cumplir, se consiga una ecuación. Esta ecuación se resuelve con fórmulas y métodos comunes y conocidos (de Guzmán, 1995, pp. 204-209).

3) Lleva adelante tu estrategia

Tras haberse familiarizado con el problema y haber seleccionado la o las estrategias que se utilizarán para la resolución de éste, el siguiente paso consiste en poner a funcionar alguna de las estrategias.

En ocasiones ocurre que el problema al que nos enfrentamos nos resulta sencillo. En esos casos, es clara la estrategia que nos conduce directamente a la solución del problema. Sin embargo, cuando se tiene que resolver un problema difícil, tras realizar la fase de familiarización y buscar estrategias, el estudiante siente que ninguna de las estrategias posibles va a conducirle a la solución. En estos momentos lo más apropiado es dejar jugar a la incubación.

Para entender qué es la incubación, se debe saber que tradicionalmente el proceso de resolución de problemas también llamado proceso creativo, se analiza en cuatro etapas: preparación, incubación, iluminación y verificación. La etapa de preparación y verificación admite una estructura sistemática, pero la fase de preparación no. La incubación y la iluminación son el resultado de una intensa actividad subconsciente que siempre nos acompaña, son procesos que no se pueden estructurar con reglas. Además, se puede hablar sobre la iluminación repentina, que según Guzmán es muy frecuente ya que todas las personas tienen constantemente acceso a esta experiencia.

Finalmente, cuando se decide una estrategia para atacar se debe de llevar a cabo el plan de acción que esta estrategia exige hasta el final. En esta etapa, es muy importante no abandonar el problema ante cualquier dificultad que se presente, siempre sin obcecarnos en seguir por una misma línea si cada vez el proceso se vuelve más complejo. En ese momento uno aprecia con más claridad quién es experto en la resolución de problemas y quién no, puesto que el experto ante un problema difícil intuye con mayor rapidez cuáles son los caminos sin final. A continuación, se muestran dos esquemas gráficos del protocolo de resolución de un problema difícil. El primero, realizado por un experto y el segundo, por un novicio:

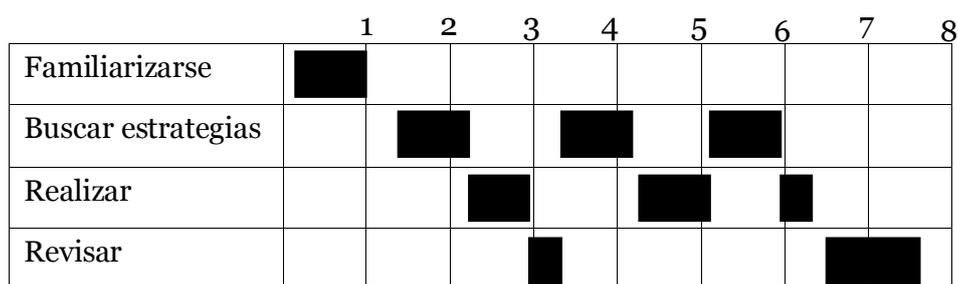
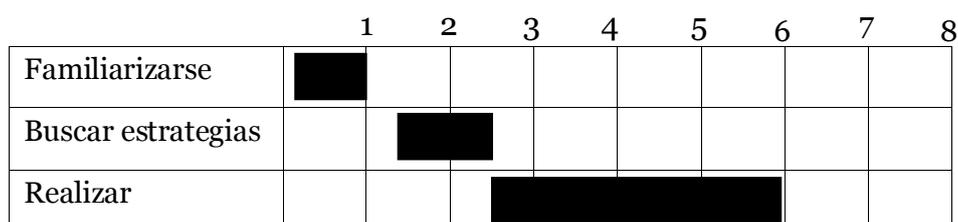


Gráfico N° 1. El esquema del protocolo de resolución de un problema difícil por un experto.
Fuente: de Guzmán (1995, p. 215).



Revisar								
---------	--	--	--	--	--	--	--	--

Gráfico N° 2. El esquema del protocolo de resolución de un problema difícil por un novicio.
Fuente: de Guzmán (1995, p. 216).

Se aprecia claramente que el novicio se ha enfrentado a la resolución del problema, y sin embargo, no le ha servido ninguna de las estrategias que ha puesto en práctica. En esos casos lo más recomendable es volver a la fase anterior para buscar nuevas ideas o modificaciones, teniendo en cuenta las que ya se han practicado.

4) Revisa el proceso y saca consecuencias

Una vez finalizada la fase anterior, podemos encontrarnos en cualquiera de estas dos situaciones; haber conseguido resolver el problema o no, a pesar del esfuerzo realizado para ello. No obstante, esto no significa que no se hayan mejorado los procesos de pensamiento. Lo verdaderamente importante para conseguir el objetivo, es reflexionar sobre las acciones y el proceso realizado, para lo cual se realiza el protocolo.

La reflexión sobre el proceso se debe realizar desde dos perspectivas diferentes; una de ellas se refiere solo al problema en concreto que se ha solucionado o intentado solucionar. La otra, se debe de realizar desde una perspectiva general que profundice; examinando los bloqueos, las aptitudes, tendencias, etc. Dicha reflexión se puede concentrar en dos actividades: “Examinar el camino seguido” o “Extraer más provecho de este problema”.

La actividad de “Examinar el camino seguido” consiste en responder a preguntas como las siguientes: ¿Cuáles han sido los cambios en el proceso de resolución del problema?, ¿Qué es lo que te ha motivado para seguir?, ¿Has acertado con las estrategias utilizadas?, ¿Por qué no acertaste con las estrategias seleccionadas?, ¿Cómo te surgieron las nuevas ideas?, etc.

La actividad de “Extraer más provecho de este problema” trata de entender por qué los elementos que actúan en el problema son válidos y se entrelazan hasta obtener la solución. También es aconsejable analizar si se podría realizar todo de una manera más simple. Es decir, consiste en explorar hasta dónde alcanzan las ideas que han surgido.

3.4. Trabajo cooperativo

El trabajo cooperativo se basa en la teoría constructivista desde la que se concede un papel principal a los alumnos, ya que son los protagonistas de su proceso de aprendizaje. Antes de analizar sus características, se debe entender su significado:

El AC es un método de aprendizaje basado en el trabajo en equipo de los estudiantes. Incluye diversas y numerosas técnicas en las que los alumnos trabajan conjuntamente para lograr determinados objetivos comunes de los que son responsables todos los miembros del equipo (Servicio de Innovación Educativa (UPM), 2008, p. 4).

Asimismo, el informe realizado por la UNESCO, de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI, insiste en la importancia del aprendizaje cooperativo:

Se trata de aprender a vivir juntos conociendo mejor a los demás, su historia, sus tradiciones y su espiritualidad y, a partir de ahí, crear un espíritu nuevo que impulse la realización de proyectos comunes o la solución inteligente y pacífica de los inevitables conflictos, gracias justamente a esta comprensión de que las relaciones de interdependencia son cada vez mayores y a un análisis compartido de los riesgos y retos del futuro. Una utopía, pensarán, pero una utopía necesaria, una utopía esencial para salir del peligroso ciclo alimentado por el cinismo o la resignación (UNESCO, 1996, p. 16).

A pesar de que los aspectos positivos de este aprendizaje cooperativo sean muchos, como se estudia en las siguientes secciones, se debe saber que la superioridad de las situaciones cooperativas no se produce de manera uniforme:

La potencialidad de las situaciones cooperativas para mejorar el aprendizaje de los alumnos no se actualiza de manera automática por el hecho de plantear un trabajo en grupo; por el contrario, se concreta realmente solo en determinadas ocasiones. La identificación de los mecanismos y factores susceptibles de dar cuenta de esta variabilidad no puede obtenerse, sin embargo, mediante la mera comparación entre situaciones cooperativas y no cooperativas (Colomina y Onrubia, 2001, pp. 417-418).

Además, son pocos los profesores que lo ponen en práctica por la complejidad que esto supone; mayor distracción de los alumnos, diferencias en la comprensión de los alumnos, necesidad de más tiempo del disponible, etc.

3.4.1. Trabajo cooperativo y trabajo individualista

Hoy en día existe un creciente número de investigaciones que muestran que una organización cooperativa para las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula resulta más efectiva que una organización competitiva e individualista. Este cambio se

debe en gran parte a la aceptación de los procesos de enseñanza y aprendizaje apoyados en las teorías y modelos de inspiración cognitiva y constructivista. Esto quiere decir que el aprendizaje escolar es un proceso constructivo que tiene un carácter social, interpersonal y comunicativo, y que la enseñanza se entiende como un proceso complejo de estructuración y guía, mediante apoyos y soportes diversos de esa construcción (Colomina y Onrubia, 2001, p. 415).

A lo largo de los años se han intentado comparar ambas estructuras: la organización social de las actividades de tipo cooperativo y las de tipo individualista. De ahí que en situaciones cooperativas los objetivos de los participantes estén vinculados entre sí. De esta manera, cada miembro del grupo alcanza sus objetivos solo si el resto de miembros del grupo los alcanzan. Por lo tanto, el resultado que persigue cada miembro del grupo es beneficioso para los demás (Colomina y Onrubia, 2001, p. 415).

En las organizaciones individualistas, en cambio, cada alumno obtiene sus propios resultados sin que estos tengan ninguna relación con los que obtengan otros alumnos. En estos casos, el alumno se centra únicamente en realizar su tarea y en conseguir de manera individual los resultados. Por lo tanto, el hecho de que un alumno consiga o no los objetivos previstos, no influye de ninguna manera al resto de los compañeros. De esta manera, cada estudiante persigue su propio beneficio sin tener en cuenta el de sus compañeros (Servicio de Innovación Educativa (UPM), 2008, p. 5).

A pesar de las ventajas mencionadas del trabajo cooperativo frente al individualista, no siempre es más eficaz su uso. La elección de usar cualquiera de los dos tipos de aprendizajes depende de las habilidades y competencias que se pretendan favorecer en cada actividad.

3.4.2. Componentes del trabajo cooperativo

A continuación se muestran los cinco elementos básicos del aprendizaje cooperativo, que, de acuerdo a Johnson, Johnson y Holubec (1999), son los siguientes:

1. *La interdependencia positiva*: sentimiento de necesidad hacia el trabajo del resto de estudiantes. Esto ocurre cuando los miembros de un grupo se sienten vinculados entre sí para realizar una tarea y sienten que el éxito solo es posible si todos lo logran. Así, si todos consiguen sus objetivos, se logra el objetivo final de la tarea. En cambio, si uno de ellos fracasa, nunca se conseguirá el objetivo deseado. Así, todos necesitan de los todos y cada uno de ellos se siente útil para la tarea.
2. *La interacción “cara a cara” o simultánea*: en el aprendizaje cooperativo todos los participantes trabajan juntos y de esta manera comparten

conocimientos, recursos y ayuda. Además, para lograr los objetivos, discuten sobre los diferentes puntos de vista de cada uno sobre la manera de enfocar el problema, etc.

3. *La responsabilidad individual:* cada miembro del grupo de manera individual, debe conseguir los objetivos que se le asignen. Por lo tanto, cada persona es responsable de que se consiga el objetivo final. De esta manera cada persona es responsable de alguna manera de poder contribuir al aprendizaje y al éxito del grupo.
4. *Las habilidades sociales:* son necesarias para conseguir un clima adecuado en el grupo y para un buen funcionamiento en lo que se refiere al aprendizaje y a las relaciones entre los miembros. Se quiere que cada miembro sea capaz de demostrar su competencia al resto de miembros del grupo.
5. *La autoevaluación del grupo:* implica que a los alumnos se les permita y sean capaces de evaluar el proceso de aprendizaje que ha seguido su grupo. Esta evaluación debe ir guiada por el profesor, y es muy importante ya que se tomarán decisiones para futuros trabajos. Además, cada miembro puede llevar a cabo el análisis de la función realizada en el grupo (Servicio de Innovación Educativa (UPM), 2008, pp. 8-9).

3.4.3. Objetivos obtenidos en el trabajo cooperativo

Tras analizar los componentes del trabajo en grupo, a continuación, se muestran los objetivos que se obtienen con el AC según Miguel de Guzmán (de Guzmán, 1995, pp. 128-129):

-*Posibilidad de enriquecerse.* Se puede aprender mucho mediante el diálogo y la comunicación entre unos y otros. De esta manera, se aprecian las diferentes maneras en que puede actuar ante un mismo problema, puesto que cada persona puede proceder de una manera diferente ante una misma situación.

- *Posibilidad de aplicar un método.* Desde diferentes perspectivas, el mismo modelo o manera de actuación puede enriquecerse y variar al realizar el trabajo en grupo. Así, cada uno lo ve desde una perspectiva.

- *Apoyo y estímulo.* En una labor que en otras circunstancias suele ser dura y árida, la estructura del trabajo en grupo aporta firmeza para conseguir el progreso hacia el objetivo común de obtener la solución correcta del problema. Sin tener el objetivo común en muchas ocasiones se abandona el problema.

- Posibilidad de contrastar los progresos que se van produciendo tanto en uno mismo como en los otros, ya que se realizan críticas entre los miembros del grupo cuando los resultados o procesos no coinciden. De esta manera, el proceso erróneo se rectifica a tiempo para encontrar entre todos el camino adecuado.

- Posibilidad para ayudar con mayor eficacia a los compañeros en la obtención de unos mismos objetivos. Es decir, el apreciar las dificultades de otros compañeros del grupo y sus diferentes maneras de afrontarlas, proporciona una experiencia de gran valor para quienes ayudan a otros en el establecimiento de patrones de comportamiento mental.

3.4.4. Técnicas para el aprendizaje cooperativo

Para poder realizar un trabajo cooperativo en el que todos tengan algo que aportar y donde prime la comunicación y ayuda entre los estudiantes, existen diferentes técnicas. Se pueden destacar las siguientes:

A) La técnica del Rompecabezas o Puzzle

Los objetivos de esta técnica son: estructurar las interacciones entre los alumnos mediante equipos de trabajo y lograr que unos alumnos dependan de otros para conseguir los objetivos. Los pasos que conforman esta técnica son los siguientes (García, Traver y Candela, 2001, p. 59, citado en Servicio de Innovación Educativa (UPM), 2008, pp. 10-11):

1. El docente divide el tema a tratar en cinco o seis documentos, que se reparten a los alumnos siguiendo un orden. Cada uno de ellos será necesario para aprender la totalidad del tema.
2. Se hacen grupos de entre cinco o seis personas. Dentro de cada grupo un miembro recibirá un número de 1 a 5 (o 6). Cada alumno individualmente preparará su documento.
3. Una vez que ya ha finalizado el tiempo estimado para la preparación individual del documento, todos los alumnos con el mismo número de documento se reunirán para debatir y comentar su documento.
4. Cada alumno regresa al grupo original y explicará al resto de sus compañeros el documento que ha estado preparando.
5. Por último, se evalúa el aprendizaje logrado y la eficacia de la técnica individualmente. Para ello, el docente prepara un test sobre todo el material

que han trabajado con el fin de demostrar el dominio del material que han adquirido.

B) Divisiones de Rendimiento por Equipos

El objetivo principal de esta técnica es lograr que los alumnos se ayuden entre sí para dominar el tema que se estudia. A continuación, se muestra la técnica en unos sencillos pasos (Urzúa, 2008, citado en Servicio de Innovación Educativa (UPM), 2008, pp. 11-12):

1. Se realizan equipos de 4 o 5 estudiantes.
2. Los equipos son heterogéneos (rendimiento, sexo, etnia, etc.).
3. El profesor presenta el tema y los alumnos trabajan en equipo para aprender la lección.
4. Finalmente, cada alumno resuelve una prueba, sin ayuda de los miembros del grupo.
5. Se compara la puntuación de cada estudiante con las puntuaciones obtenidas anteriormente. Se suman todas las puntuaciones de los miembros de cada grupo para obtener la del grupo. Si cumplen con determinados criterios los estudiantes pueden obtener la “recompensa” establecida.

C) Grupo de Investigación

En esta técnica de trabajo en grupo se permite que los grupos de trabajo sean de entre 3 y 6 miembros, guiándose por los intereses hacia los temas presentados. Los objetivos principales son: Discutir, valorar e interpretar el contenido que reciben los alumnos en el aula y conseguir una participación activa en la selección de los métodos o procedimientos para el aprendizaje. A continuación se muestran los pasos a seguir (García, Traver y Candela, 2008, p. 69, citado en Servicio de Innovación Educativa (UPM), 2008, pp. 12-13):

1. Presentar los temas a investigar para que cada alumno seleccione la temática que más le interesaría estudiar.
2. Elaborar cada grupo según los intereses de cada uno.
3. El profesor puede presentar bibliografía u otro tipo de recursos para que los alumnos puedan realizar la investigación.
4. Cada equipo de investigación debe: Dividir tareas, buscar la información, organizar los datos que se van encontrando, informar a los compañeros,

discutir y analizar los hallazgos, determinar la necesidad de más información e interpretar e integrar sus descubrimientos.

5. Elaborar el informe final, el cual recoge: la investigación realizada, los hallazgos. Dicho informe debe de presentar una autoevaluación del trabajo en equipo.
6. Presentación oral al resto de compañeros de cada investigación.

3.4.5. Técnica para el aprendizaje cooperativo para la resolución de problemas

Tras las tres técnicas diferentes expuestas para el trabajo cooperativo, a continuación se explica la técnica que se lleva a cabo para el ejercicio de resolución de problemas en grupos, adaptado al modelo de Miguel de Guzmán:

Cada grupo de trabajo está integrado por 5 miembros y cada sesión para la resolución de problemas tendrá la duración de una hora de clase, que variará entre 55 y 60 minutos. La sesión para la resolución de problemas se divide en dos partes: la primera, consta de un enriquecimiento teórico. La segunda, es la puesta en práctica de la resolución del problema que consta de las cuatro fases establecidas por Miguel de Guzmán.

La primera etapa de enriquecimiento teórico, se realiza mediante un repaso de la teoría expuesta y aprendida en el tema de álgebra correspondiente a primero de ESO. Todos los miembros del grupo realizan aportaciones en voz alta sobre lo aprendido en el tema. En estas exposiciones se van añadiendo ideas, aclaraciones y rectificaciones cuando sea necesario. El objetivo de esta primera etapa es recordar las normas y criterios de álgebra y de esta manera involucra más a los alumnos en el tema. El tiempo destinado a esta primera parte es de unos 10 minutos aproximadamente.

En la segunda parte, se le asignará el papel de *secretario* a uno de los miembros del grupo, cuya función consiste en recopilar la información más relevante en cada fase de resolución del problema. Finalmente, él debe complementar los resultados alcanzados por el grupo. Por lo general, el secretario permanece en silencio, pero interviene en alguna ocasión para realizar alguna aclaración o para explicar el origen de alguna idea. Su intervención primordial se centra en la cuarta fase de resolución del problema, donde se lleva a cabo una reflexión sobre el proceso seguido.

También se determina quién es el *moderador* del grupo. Esta persona intenta mantener un ambiente adecuado en el grupo, cediendo la palabra a cada persona en el momento correcto y creando un clima de discusión y diálogo distendido. La importancia de dicha persona en el grupo se aprecia a continuación:

Lo verdaderamente importante es que se cree una atmósfera en el grupo libre de inhibiciones, libre de competitividad, en que cada uno esté deseoso de aportar sin imponer, abierto a aceptar incluso lo que a primera vista pueda parecer más estrafalario, colaborando gustosamente para mejorar las ideas iniciadas por los otros y viendo con gusto cómo los otros van perfeccionando las ideas propuestas por él. La tarea esencial del moderador es precisamente mantener permanentemente este clima, estimulando, si hace falta, la aportación del que tiende a callar demasiado e inhibiendo con suavidad la del que tiende a hablar en exceso, animando cuando el grupo parece quedarse apagado, tratando de abrir nuevas vías cuando todo parece cerrado, etc. (de Guzmán, 1995, p.131).

Ambos papeles, tanto el de *secretario* como el de *moderador*, no siempre son asignados a las mismas personas dentro del grupo si no que se utiliza un sistema rotativo, en el que todos los miembros pueden ser en alguna ocasión tanto secretario como moderador.

Los problemas a solucionar se eligen por el docente, y es muy conveniente desde el punto de vista de la motivación que los problemas se puedan aplicar a un contexto real. Al mismo tiempo es importante que sean posibles de solucionar por el grupo, es decir, que estén adaptados a las capacidades de los alumnos con el nivel educativo al que corresponden.

La forma de proceder del grupo para lograr la resolución del problema es muy variada y, por lo tanto, es recomendable realizar diferentes esquemas o procesos de resolución dentro de las cuatro fases establecidas. De esta manera cada grupo elige el que mejor se le adapte.

4. ESTUDIO DE CAMPO

A continuación se realiza un estudio de campo con el fin de valorar las ventajas que proporciona la metodología para la resolución de problemas de manera cooperativa. El objetivo del estudio de campo es valorar la percepción y capacidad de asimilar de los alumnos antes y después de la aplicación de la metodología propuesta.

4.1. Marco Contextual

El estudio de campo está dirigido a alumnos de diferentes centros escolares de Portugalete, un pueblo de la provincia de Bizkaia que cuenta con 70.000 habitantes. El estudio se basa en 2 tipos de encuestas que se explican en la siguiente sección y a las que han contestado 15 estudiantes de 1º de ESO, de edades comprendidas entre 12 y 13 años. La realización de este estudio ha sido posible gracias a que a todos ellos se les imparten clases de apoyo de matemáticas fuera del horario escolar.

El mismo grupo de alumnos encuestados ha sido objeto de una implementación parcial de la metodología propuesta. Este ejercicio se ha realizado en el *Aula Joven*, un recinto que nace con la vocación de dar respuesta a las necesidades de las personas jóvenes de Portugalete.

Una de las encuestas debe ser contestada antes de realizar la actividad, y la segunda encuesta posteriormente. Este sistema es una buena manera de apreciar el progreso sustancial en la percepción de la materia de álgebra.

4.2. Metodología

Las dos encuestas realizadas constan de 6 preguntas cada una y son de tipo cerrado. El alumno debe valorar en una escala del 1 al 5 cada pregunta en función del grado de satisfacción de la respuesta; significando muy de acuerdo el 5 y en total desacuerdo el 1. Se ha elegido este método de investigación por la facilidad a la hora de analizar las respuestas.

En primer lugar, se plantean las preguntas de la primera encuesta y los resultados obtenidos en esta. Posteriormente, se muestra mediante diferentes fases cómo se ha llevado a cabo la implementación parcial de la metodología. Por último, se formulan las preguntas de la segunda encuesta en base a la actividad realizada y se analizan los resultados obtenidos. De esta manera, se pueden aplicar mejoras en la propuesta de intervención práctica.

4.2.1. Encuesta 1

Antes de proceder a la realización de las encuestas, se les explicó a los estudiantes que el estudio de campo formaba parte de las tareas a realizar en el máster para obtener el título de profesor de educación secundaria. Posteriormente, procedieron a completar la encuesta y una vez finalizadas, se comentaron las respuestas con cada uno de los estudiantes.

La encuesta está constituida por seis preguntas: las primeras cinco hacen referencia al contenido de la materia de álgebra, y la última, al trabajo cooperativo. A continuación, se analiza lo que se pretende evaluar con cada pregunta:

Tabla N° 5. Primera encuesta para antes de realizar la implementación parcial de la metodología.

	1	2	3	4	5
1. ¿Tenías algún conocimiento previo de álgebra antes de haberlo aprendido este año por primera vez?					
2. ¿Crees que el álgebra tiene alguna utilidad para la vida real?					
3. ¿Te has enfrentado a muchos obstáculos para superar este contenido matemático?					
4. ¿En qué medida te han parecido difíciles los ejercicios de resolución de problemas de este tema?					
5. ¿Has utilizado métodos o estrategias para la resolución de problemas?					
6. ¿Crees que el trabajo en grupo ayuda a una mejor comprensión y a evitar los bloqueos ante la resolución de problemas?					

Nota: Primera encuesta para antes de realizar la implementación parcial de la metodología. Fuente: Elaboración propia.

Mediante las dos primeras preguntas se analiza la visión general y la utilidad que los alumnos le otorgan al álgebra. De esta manera, se puede comprobar si las respuestas concuerdan con los resultados de varios informes mencionados anteriormente. Estos informes demuestran que los alumnos no entienden el álgebra como algo útil y aplicable en la vida real.

Las siguientes dos preguntas tratan de recopilar información sobre la experiencia personal de cada alumno al tratar de aprender el contenido de la materia. De esta manera, se pretende evaluar el nivel de dificultad a la hora de aprobar el tema y a la hora de resolver el problema.

Las dos preguntas restantes hacen referencia a los procesos de aprendizaje que utilizan los alumnos. Se pretende evaluar el uso de estrategias para la resolución de problemas y la opinión que tienen sobre el trabajo cooperativo.

4.2.1.1. Resultados obtenidos de la Encuesta 1

Percepción de álgebra

1. ¿Tenías algún conocimiento de álgebra antes de haberla aprendido este año?

Entre los 15 estudiantes: 9 han marcado el nivel 2, ya que lo relacionan con un lenguaje que combina números y letras. El resto, 6 estudiantes, no tenían ningún conocimiento, por lo que han marcado el nivel 1. Se aprecia la ausencia de álgebra en cursos anteriores.

2. ¿Crees que el álgebra tiene alguna utilidad para la vida real?

Entre los 15 estudiantes: 8 estudiantes han marcado el nivel 1, 4 estudiantes han marcado el nivel 2 y el resto el nivel 3. Por lo que se corroboran los resultados de informes mencionados con anterioridad que afirman que los estudiantes no entienden la utilidad de esta materia.

Experiencia personal con el aprendizaje de álgebra

3. ¿Te has enfrentado a muchos obstáculos para superar este contenido matemático?

Entre los 15 estudiantes: 9 estudiantes han marcado el nivel 5, 3 estudiantes han marcado el nivel 4 y otros 3 estudiantes han marcado el nivel 3. Todos ellos, coinciden en que ha sido el tema más difícil del curso, junto con las operaciones de números enteros.

4. ¿En qué medida te han parecido difíciles los problemas de álgebra?

Entre los 15 estudiantes: 12 estudiantes han marcado el nivel 5, 2 estudiantes han marcado el nivel 4 y 1 de ellos ha marcado el nivel 3. La mayoría coincide en que esta materia es la que más les cuesta entender de la asignatura de matemáticas.

Proceso de enseñanza y aprendizaje de álgebra

5. ¿Has utilizado métodos o estrategias para la resolución de problemas?

Entre los 15 estudiantes: 11 han marcado el nivel 1 puesto que reconocen que para resolver un problema no saben hacer uso de estrategias. Del resto de estudiantes, 2 de ellos han marcado el nivel 2 y otros dos el nivel 3, ya que hacen uso de pautas heurísticas.

6. ¿Crees que el trabajo en grupo ayuda a una mejor comprensión y a evitar los bloqueos ante la resolución de problemas?

Entre los 15 estudiantes: 10 han marcado el nivel 5, ya que afirman que en momentos de bloqueo siempre hay alguien en el grupo que aporta alguna idea. De los restantes, 1 ha marcado el nivel 3, y 4 han marcado el nivel 2. Estos últimos, coinciden en que el trabajo en grupo no les ayuda a comprender mejor el problema ya que cuando uno de ellos tiene la solución es suficiente para entregar el trabajo. Sin embargo, nunca han llevado a cabo ningún trabajo en equipo en la asignatura de matemáticas.

4.2.2. Implementación parcial de la metodología

La actividad basada en la metodología está dirigida a 15 estudiantes. Como se ha mencionado anteriormente, es relevante que los alumnos que realicen la actividad sean los mismos que han respondido a las encuestas. El método y los aspectos a mejorar únicamente serán reales si las mismas personas los han llevado a cabo.

A continuación, se explica la preparación para la realización de la actividad. Asimismo, se muestra el ejemplo real de 5 alumnos llevando a cabo la resolución de un problema con la metodología propuesta.

4.2.2.1. Preparación

Para la preparación de la puesta en práctica de la metodología, se han tenido en cuenta las técnicas para el aprendizaje cooperativo y las fases de las que consta el modelo de Miguel de Guzmán para la resolución de problemas, las cuales se muestran a continuación:

1. El grupo se familiariza con el problema.
2. El grupo busca estrategias posibles.
3. El grupo selecciona y lleva adelante las estrategias que parecen más adecuadas.
4. El grupo reflexiona sobre el proceso que ha seguido.

Respecto al aprendizaje cooperativo, se realizan tres grupos de 5 personas para la resolución de un problema por grupo. El problema seleccionado está adaptado a las capacidades de los alumnos y se considera de dificultad media.

4.2.2.2. Propuesta de la actividad basada en la metodología

Enunciado

Un agricultor siembra en un tercio de su tierra pimientos, en un cuarto cebollas y el resto de superficie de la tierra de 140m² de tomates. ¿Cuánto es la superficie total de la tierra? ¿Cuánta superficie se sembrará de pimientos? ¿Y de cebollas?

A) Familiarización con el problema

El grupo lee el problema atentamente y la primera reacción que tiene es negativa. Todos coinciden en que el problema es difícil. Comienzan a intentar extraer los elementos que en él intervienen y llegan a la siguiente conclusión:

Pimientos \longrightarrow $1/3$
Cebollas \longrightarrow $1/4$
Tomates \longrightarrow 140 m^2
Superficie total \longrightarrow X

B) Búsqueda de estrategias

En esta ocasión, a ninguno de los miembros del grupo le ha surgido una idea para solucionar el problema. Por ello, han empezado a estudiar las diferentes estrategias posibles.

Han decidido hacer frente al problema mediante la estrategia de *Hacer un esquema, una figura, un diagrama*. Tratándose de una superficie que se divide en partes, creen que visualmente podrán encontrar con mayor facilidad la ecuación o ecuaciones correctas.

C) Lleva adelante tu estrategia

Realizan una figura con los elementos que intervienen en él, los cuales se han extraído en la fase de familiarización.

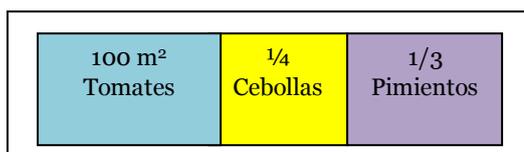


Figura N^o1. Esquema para resolver el problema. Fuente: Elaboración propia.

$$\text{Ecuaciones: } 140 + 1/4 + 1/3 = 140,58$$

$x = 140,58 \text{ m}^2$ es el total de la superficie

Cebollas = $0,25 \text{ m}^2$

Pimientos = $0,33 \text{ m}^2$

D) Revisa el proceso y saca conclusiones

En un principio, los miembros del grupo quedan satisfechos con el resultado obtenido. Sin embargo, cuando comienzan a analizar los pasos realizados y vuelven a

leer el problema para ver si concuerda con el proceso empleado, hay dos ideas que le llaman la atención a uno de los miembros del grupo:

1. En el problema no es necesaria la incógnita, es decir, no se ha tenido que resolver ninguna ecuación, simplemente se ha realizado una suma.
2. Si la superficie de la tierra que contiene cebollas es de $0,25 \text{ m}^2$, siendo al mismo tiempo un cuarto del total y la de pimientos es $0,33 \text{ m}^2$, siendo un tercio del total; se concluye lo siguiente:

$$1-(1/2)-(1/3)= 5/12 \text{ del total debería ser la superficie de tomates.}$$

Si esto son 140 m^2 , es imposible que $1/4$ del total sea $0,25$ y un tercio del total sea $0,33$.

Todos afirman que la solución no es correcta, por lo que vuelve a la fase de *Búsqueda de estrategias*.

E) Búsqueda de estrategias

Se lleva a cabo la estrategia de *buscar un problema semejante*. Recuerdan uno que realizaron en clase similar a éste, donde se pedía realizar una repartición de superficie. El problema decía así:

En una superficie de tierra de 3000 m^2 , se quiere sembrar $1/3$. ¿Cuánta superficie se ha sembrado de tomates? ¿Y de pimientos?

En este problema claramente todos los estudiantes sabían cómo encontrar la solución:

$$1/3 \text{ de } 3000 = 3000/3 = 1000 \text{ m}^2 \text{ de superficie de tomates}$$

$$3000 - 1000 = 2000 \text{ m}^2 \text{ de superficie de pimientos}$$

Han intentado plantear el problema de la misma manera:

$$1/3 \text{ de } x = x/3$$

$$1/4 \text{ de } x = x/4$$

El resto 100 m^2 de tomates

Por lo tanto:

$$x - (x/3) - (x/4) = 140$$

$$x = 1680/5 = 336 \text{ m}^2 \text{ tiene la superficie total}$$

$$\text{Cebollas: } 1/3 \text{ de } 336 = 336/3 = 112 \text{ m}^2$$

$$\text{Pimientos: } 1/4 \text{ de } 336 = 336/4 = 84 \text{ m}^2$$

F) Revisa el proceso y saca consecuencias

Se ha conseguido resolver el problema, se comprueba la solución:

$$112 + 84 + 140 = 336 \text{ m}^2$$

De ésta se deriva:

84 es un cuarto del total, $336/4=84m^2$

112 es un tercio del total, $336/3=112m^2$

Para la reflexión del proceso de resolución, se analiza el protocolo realizado y se reflexiona sobre el camino seguido. Esta información la ha recopilado el secretario del grupo:

	1	2	3	4	5	6	7	8
Familiarizarse	■							
Buscar estrategias		■			■	■		
Realizar			■				■	
Revisar				■	■			■

Gráfico N°3. Esquema del protocolo para la resolución del problema propuesto. Fuente: Elaboración propia.

G) Reflexión sobre el camino seguido

a) Aspectos concretos del problema

Se han realizado cambios a lo largo del proceso. En un primer momento, se consideró que con una figura que representara el problema sería suficiente para solucionar el mismo. Se tardó poco tiempo en llevar a cabo la estrategia. Sin embargo, una persona del grupo en la fase de revisión, comprobó que el problema no estaba bien planteado. Esta fase de revisión duró más tiempo del estimado para ello.

Cuando se estaba a punto de abandonar el problema porque no se encontraba la estrategia adecuada, se comenzaron a recordar antiguos problemas. De esta manera, recordaron uno similar que decidieron realizar para comprobar si se podía aplicar la misma metodología.

Todos coinciden en que no se encontró la estrategia adecuada desde un principio, puesto que no se reflexionó en profundidad sobre la estrategia seleccionada. Se precipitaron a realizar un dibujo sin saber si esto les iba a conducir a la solución.

b) Aspectos generales de la actividad

Muchos de los estudiantes no recordaban el contenido aprendido a lo largo de este tema, por lo que les ha resultado difícil llevar a cabo las estrategias seleccionadas. Además, es notoria la diferencia para solucionar el problema de uno de los grupos en comparación con los otros dos, en lo que a rapidez respecta. Esto se debe a que no se ha tenido en cuenta la heterogeneidad de los grupos. Asimismo, muchos de los alumnos se han quejado por el nivel de dificultad del problema.

4.2.3. Encuesta 2

Con el análisis de los resultados de la primera encuesta, y tras la aplicación real de la metodología elaborada en el presente trabajo, se ha evaluado la eficacia de ésta mediante la segunda encuesta. Posteriormente, se muestra en resumen el propósito de cada pregunta.

Tabla N° 6. Segunda encuesta para después de realizar la implementación parcial de la metodología.

	1	2	3	4	5
1. ¿Crees que has comprendido mejor la utilidad del álgebra en la vida real?					
2. ¿En qué grado has comprendido el contenido de este tema?					
3. ¿Has superado los obstáculos que han ido surgiendo con mayor facilidad con la combinación que ofrece el método?					
4. ¿En qué medida te ha facilitado el uso de estrategias la resolución del problema?					
5. ¿Crees que es necesaria la realización de un protocolo?					
6. ¿Crees que sería útil utilizar este método en más temas de matemáticas?					

Nota: Segunda encuesta para después de realizar la implementación parcial de la metodología. Fuente: Elaboración propia.

Con las dos primeras preguntas se pretende evaluar el nivel de percepción general de álgebra tras la aplicación de la metodología, es decir, el grado de comprensión y utilidad.

Las siguientes dos preguntas evalúan la experiencia personal de cada alumno tras la aplicación de la metodología y el uso de diferentes estrategias para la resolución de problemas.

Con las últimas dos preguntas se pretende evaluar si ha sido necesaria la realización de un protocolo y si sería interesante la utilización de la metodología para aprender el contenido de otras áreas matemáticas.

4.2.3.1. Resultados obtenidos de la Encuesta 2

Percepción de álgebra

1. ¿Crees que has comprendido mejor la utilidad del álgebra en vida real?

Entre los 15 estudiantes: 9 han marcado el nivel 2, 3 han marcado el nivel 3, 2 han marcado el nivel 4 y 1 ha marcado el nivel 5. Los que han marcado el nivel 2 y 3, justifican su respuesta razonando que a pesar de obtener información respecto a cosas reales, no es algo necesario para vivir el día a día, como el saber sumar o restar.

2. ¿En qué grado has comprendido el contenido de este tema tras la aplicación de la metodología?

Entre los 15 estudiantes: 8 han marcado el nivel 5, 5 han marcado el nivel 4 y 2 han marcado el nivel 3. Todos reconocen que el hecho de tener que buscar estrategias e intentar solucionar el problema con ellas, les ha hecho reflexionar y comprender mejor el contenido de la materia.

Experiencia personal con el aprendizaje de álgebra

3. ¿Con la combinación que ofrece el método, has superado los obstáculos con mayor facilidad?

Entre los 15 encuestados: 4 han marcado el nivel 5, 8 han marcado el nivel 4, 3 han marcado el nivel 3. Comentan que el método resulta al principio, pesado, ya que hay que superar los momentos de bloqueo intentando en todo momento no abandonar el problema. Sin embargo, afirman que el trabajo en grupo además de ayudarles a comprender mejor los problemas les ha amenizado el proceso.

4. ¿En qué medida te ha facilitado el uso de estrategias la resolución del problema?

Entre los 15 encuestados: 13 han marcado el nivel 5 y 2 han marcado el nivel 4. A pesar de reconocer que es difícil encontrar la estrategia adecuada, coinciden en que finalmente se consigue el resultado.

Proceso de enseñanza y aprendizaje de álgebra

5. ¿Crees que es necesaria la realización de un protocolo?

Entre todos los estudiantes: 8 han marcado el nivel 5, 2 han marcado el nivel 4, 2 han marcado el nivel 3 y 3 han marcado el nivel 2. Algunos de los estudiantes piensan que la realización del protocolo hace reflexionar sobre la estrategia utilizada. De esta manera, se analiza si existe alguna otra alternativa para poder llegar a la solución con más rapidez. Tres alumnos no le han encontrado utilidad al protocolo puesto que no están familiarizados con la metodología.

6. ¿Crees que sería útil llevar a cabo este método en más temas de matemáticas?

Entre los 15 estudiantes: 8 han marcado el nivel 5, 5 han marcado el nivel 4 y 2 han marcado el nivel 3. La mayoría de ellos coinciden en lo siguiente: ha sido posible

resolver los problemas gracias a la ayuda que se han prestado unos a otros y el modelo de aprendizaje les ha resultado más ameno que el utilizado habitualmente.

4.3. Conclusiones generales

Mediante los resultados obtenidos de la primera encuesta, se ha podido comprobar que no se hace ningún tipo de referencia al temario de álgebra en cursos anteriores. Asimismo, se afirma la poca utilidad que le dan los estudiantes a este contenido en la vida real. Por todo ello, no lo perciben con interés y se enfrentan a muchos obstáculos para poder aprobarlo. Antes de realizar la implementación parcial de la metodología, algunos de los estudiantes concluyen que el trabajo cooperativo ayuda a realizar un ejercicio con mayor rapidez pero no mejora la comprensión, puesto que el objetivo es que alguien del grupo lo sepa realizar, no todos.

Tras la resolución del problema mediante la adaptación del Modelo de de Guzmán de manera cooperativa, la mayoría de ellos coinciden en que les ha servido de ayuda para comprender su utilidad en la vida, puesto que el problema representa una situación real. Igualmente, todos reconocen que la búsqueda de estrategias conduce a una mayor reflexión que conlleva al estudiante a comprender mejor el problema, a pesar de que sea difícil encontrar la estrategia adecuada a la primera. La mayoría de los alumnos, coinciden en la necesidad de realizar un protocolo y en lo interesante de adaptar el método a otras áreas matemáticas.

Por último, para la propuesta de la intervención práctica que se muestra a continuación, se han tenido en cuenta los aspectos a mejorar tras la realización de la actividad, entre los que destacan: heterogeneidad, enriquecimiento teórico, ejercicios de niveles de diferentes niveles de dificultad, papel de moderador y secretario en el grupo, etc.

5. PROPUESTA PRÁCTICA DE INTERVENCIÓN

5.1. Propuesta para la enseñanza del contenido de álgebra de 1º de ESO

Una vez analizados los resultados obtenidos en la segunda encuesta, que se ha llevado a cabo tras la implementación parcial de la propuesta, se realiza una propuesta práctica de intervención. En ella, se quieren incluir algunas mejoras identificadas tras la realización de la actividad que se muestra en la sección anterior y el análisis de la segunda encuesta.

Para la elaboración de la propuesta práctica se ha seleccionado la unidad didáctica de álgebra, por los motivos que se explican en la sección 2. Con ello, se pretende conseguir que los estudiantes aprendan el contenido de la misma mediante la resolución de problemas. Como se ha mencionado a lo largo del trabajo, el proceso que se lleva a cabo para la intervención práctica combina el modelo de Miguel de Guzmán y el trabajo cooperativo.

En primer lugar, se muestra la preparación de la intervención práctica y, posteriormente, se plantea cómo llevar a cabo dicha intervención.

5.1.1. Preparación

La propuesta de intervención se ha diseñado para la aplicación en una clase de entre 20 y 25 estudiantes. A continuación, se describen los agrupamientos y los documentos a utilizar.

a) Agrupamientos

En cuanto a la técnica a utilizar, como se ha explicado en la sección del *Marco teórico*, se realizan grupos de 5 alumnos, y a cada grupo se le proporciona el mismo documento que se define en el siguiente apartado.

Además, a uno de los miembros del grupo se le otorga el papel de secretario, cuya función es ir anotando en todos los pasos lo siguiente: decisiones, problemas, estrategias utilizadas, etc. A otro de los miembros del grupo, se le otorga el papel de moderador, cuya función es mantener un clima adecuado entre los miembros del grupo.

A la hora de realizar las agrupaciones el docente deberá conseguir que cada equipo de trabajo sea heterogéneo, es decir, cada estudiante, respecto a la asignatura de matemáticas, debe de tener distintos grados de interés, nivel de comprensión, resultados, etc.

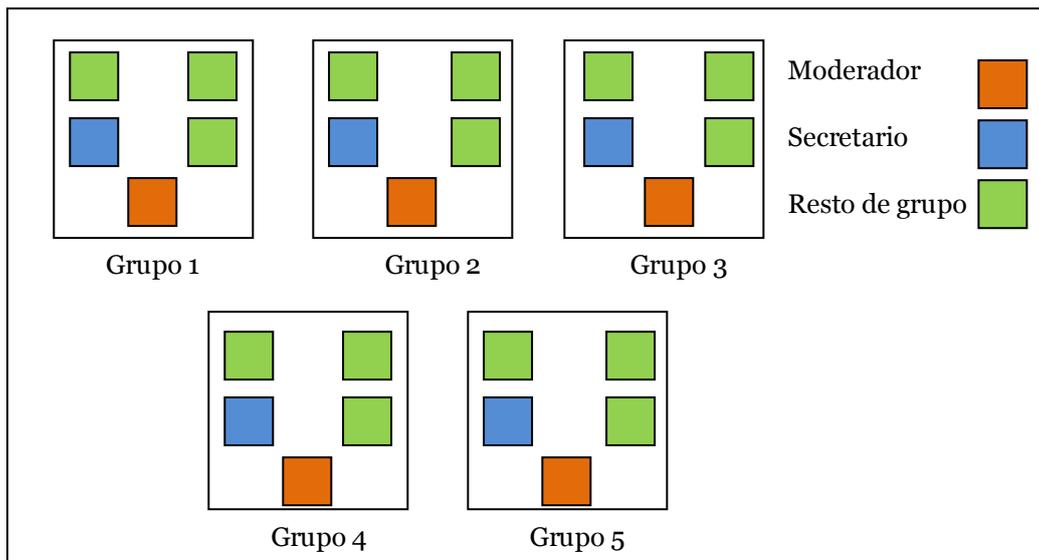


Figura N° 2. Agrupamientos para el trabajo cooperativo en el aula. Fuente: Elaboración propia.

a) *Documento*

Como se ha mencionado anteriormente a cada grupo se le da un documento. El mismo consta de tres problemas, cuyo nivel de dificultad se divide de la siguiente manera: el primer problema es de un nivel de dificultad mínimo, el segundo problema es de nivel de dificultad medio y el tercer problema es de un nivel de dificultad elevado. De manera que el primer problema les sirva de entrenamiento para poder solucionar los otros dos.

A continuación se muestran tres problemas que hacen referencia cada nivel de dificultad.

1) Nivel de dificultad mínimo

Problema 1:

El doble de un número más cuatro es igual que el cuádruple de ese mismo número menos doce. ¿De qué número se trata?

Problema 2:

El doble de la edad de María es igual al triple de su edad hace 5 años. ¿Qué edad tiene María?

Problema 3:

Sabiendo que se tiene un cuadrado cuyo área es 25 cm^2 , ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado?

2) Nivel de dificultad intermedio

Problema 1:

La base de un rectángulo es el doble que su altura. Sabiendo que el perímetro es de 20 cm. ¿Cuánto mide cada lado del rectángulo?

Problema 2:

Tenemos 30 canicas que se quieren repartir en tres bolsas, de manera que en la primera haya el doble que en la segunda y, en la tercera, el triple que en la primera. ¿Cuántas canicas hay en cada bolsa?

Problema 3:

Se quiere vallar un prado de forma rectangular, sabiendo que es el triple de largo que de ancho y que su perímetro es de 640m. ¿Cuántas vallas de un metro tendré que poner en el lado más largo? ¿Y en el ancho?

3) Nivel de dificultad elevado

Problema 1:

Se quiere embaldosar una piscina cuyas medidas son las siguientes: 3m de ancho, 15m de largo y 2,5 metros de profundidad. ¿Cuántos metros cuadrados de baldosa se necesitarán?

Problema 2:

El doble de un número impar más seis unidades es igual al triple de dicho número menos uno. ¿De qué número se trata?

Problema 3:

Sabemos que uno de los ángulos de un triángulo mide x , el otro 40° más que el anterior, y el tercero, otros 40° más. ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo?

5.1.2. Propuesta de la aplicación de la metodología

La sesión completa se divide en dos partes: la primera parte consta de un enriquecimiento teórico mientras que la segunda parte se centra en la práctica. Es

decir, se centra en la puesta en práctica de la resolución del problema que consta de las cuatro fases establecidas por Miguel de Guzmán.

5.1.2.1. Enriquecimiento teórico

En esta primera etapa de enriquecimiento teórico, se repasa la teoría expuesta y aprendida en el tema de álgebra que corresponde a 1º de ESO. Todos los miembros del grupo realizan aportaciones en voz alta de lo aprendido en el tema. En estas exposiciones se van añadiendo ideas, realizando aclaraciones y rectificando cuando sea necesario. El objetivo de esta primera etapa es recordar las normas y criterios del álgebra y de esta manera introducirnos más en el tema.

Entre la información que se puede aportar en voz alta destaca la siguiente:

- a) El álgebra es el lenguaje que combina números y letras.
- b) Para hacer referencia a un número cuyo valor se desconoce se utiliza una letra, que suele ser: x, y o z ; a, b o c .
- c) Las letras son las incógnitas.
- d) Cuando se desconocen dos valores diferentes en un mismo ejercicio, cada valor se representa con una letra diferente.
- e) Se recuerdan las normas para resolver una ecuación, donde se despeja x .
- f) Para saber si el valor de la incógnita x es el correcto, se sustituye en la ecuación principal para comprobar si se cumple.
- g) En una ecuación solo podemos obtener el valor de la incógnita, si únicamente hay una incógnita. En caso de que hubieran dos incógnitas, se necesitarían dos ecuaciones para resolver (No se aprende hasta 2º de ESO).

5.1.2.2. La práctica para la resolución de problemas

Como se ha mencionado en reiteradas ocasiones, cada problema se ha de resolver mediante las fases definidas por de Guzmán.

5. El grupo se familiariza con el problema.
6. El grupo busca estrategias posibles.
7. El grupo selecciona y lleva adelante las estrategias que parecen más adecuadas.
8. El grupo reflexiona sobre el proceso que ha seguido.

Cada una de estas fases es explicada a los estudiantes, incluyendo el contenido expuesto en el marco teórico. Se les aconseja que en caso de no dar con la estrategia apropiada, vuelvan a la fase de búsqueda de estrategias.

Además, el secretario del grupo debe de recopilar la información relevante de cada fase. Esta persona, al mismo tiempo debe de completar el protocolo que refleje el camino seguido para la resolución.

5.1.2.3. Análisis del problema resuelto

Tras la intervención todos los alumnos deben de reflexionar sobre el proceso seguido. Por un lado, como se ha podido apreciar en la actividad propuesta en la sección anterior se analiza el protocolo realizado y se analiza el camino realizado. A continuación se muestra la plantilla para el protocolo.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Familiarizarse								
Buscar estrategias								
Realizar								
Revisar								

Gráfico N°4. Plantilla de esquema del protocolo para la resolución de problemas. Fuente: Elaboración propia

Como se aprecia en el gráfico cada una de las filas representa una fase del proceso de resolución. En ellas, se dibujan barras de diferente largura proporcionalmente al tiempo que se le haya dedicado a cada fase. Igualmente, la cantidad de barras dibujadas en una misma fila harán referencia a las veces que se ha pasado por esa fase para resolver el problema.

La reflexión del camino seguido para solucionar el problema se basa en que los alumnos den respuesta a una serie de preguntas, por ejemplo: ¿Qué problemas han surgido?, ¿Se podrían haber solucionado de alguna otra manera?, ¿Habría alguna otra estrategia que nos hubiera llevado más rápidamente a la solución?, ¿Se podría resolver el problema de alguna otra manera?, etc.

6. APORTACIONES DEL TRABAJO

La principal aportación del trabajo es que trata de evidenciar el beneficio que supone para enseñar y aprender matemáticas, y más concretamente álgebra, un aprendizaje cooperativo además de la adaptación del modelo de Miguel de Guzmán para la resolución de problemas.

Igualmente, a través del análisis del marco legal y diferentes informes y estudios que se han presentado, se comprueba que con el aprendizaje cooperativo aumenta el rendimiento de los alumnos y se favorecen las relaciones interpersonales entre ellos. Asimismo, se prestan ayuda unos a otros para conseguir un objetivo final que es satisfactorio para todos.

Respecto al modelo de de Guzmán, éste encaja con los objetivos que se pretenden conseguir en el modelo de enseñanza actual. Igualmente, la resolución de problemas favorece la comprensión de la necesidad del álgebra para la vida real y se consigue evitar los modelos de aprendizaje basados exclusivamente la memorización.

7. DISCUSION

Como se ha podido comprobar en el apartado anterior, la metodología propuesta se adapta totalmente a los objetivos de la educación. Entre los aspectos analizados cabe destacar: aprendizaje mediante la resolución de problemas, aprendizaje cooperativo y modelo de Miguel de Guzmán. Todos ellos permiten que el proceso educativo implique a los alumnos como participantes activos de su propio aprendizaje (OECD/PISA, 2010). Igualmente, todo ello concuerda con la condición necesaria para una eficaz realización de las tareas de aprendizaje, además de propiciar un medio de desarrollo personal, puesto que incluye el aprendizaje en equipo, como promueve la LOE, y basa la enseñanza en la resolución de problemas.

Sin embargo, esta propuesta dista mucho de la realidad. Son muchos los docentes que no aplican actividades que promuevan el aprendizaje cooperativo a pesar de sus ventajas. El motivo principal es el cambio que supone en la reestructuración de las clases y la falta de tiempo para realizar este tipo de actividades. Así lo confirman profesores del centro donde se cursaron las prácticas *Nuestra Señora de Begoña*.

Además, como se ha podido comprobar en el presente trabajo, los profesores de todos los países hacen uso de prácticas estructuradas con mayor frecuencia que el empleo de prácticas orientadas al alumno. Asimismo, se utilizan con poca frecuencia las actividades relacionadas con el trabajo en equipo (OECD, 2009, p.13).

Respecto a la resolución de problemas, y a pesar de que numerosos estudios como el NCTM de Estados Unidos basen la enseñanza en este método, el mismo no se lleva a la práctica habitualmente. Hoy en día destaca el papel del profesor como transmisor de conocimientos y portador de soluciones correctas y no como agente facilitador del aprendizaje activo de los estudiantes. Estos últimos buscan las soluciones por sí mismos mediante la resolución de problemas (OECD, 2009, p.13).

Mediante la impartición de conocimientos teóricos, no se consigue mostrar a los estudiantes unas matemáticas cercanas a la realidad de la vida cotidiana y en los niveles básicos, accesibles para todos (Guerrero, 2013, abril 14). En cambio, con el método propuesto esta percepción cambia y la aplicación en contextos reales se aprecia mejor.

En conclusión, el papel del profesor es fundamental para la promover el uso de propuestas como la que se presenta. Son muchos los esfuerzos que deben de realizar los docentes para poder llevar a cabo actividades que promuevan la resolución de problemas mediante el aprendizaje cooperativo. No obstante, dichos esfuerzos serán de gran repercusión debido a los grandes beneficios que pueden reportar en el futuro educacional.

8. CONCLUSIONES

A continuación, se enumeran las principales conclusiones del presente trabajo:

1. En relación al objetivo específico *investigar la importancia del aprendizaje basado en la resolución de problemas* se puede afirmar que, este método aporta importantes beneficios en el modelo de enseñanza y aprendizaje. Así lo confirman diferentes estudios mencionados a lo largo del trabajo. Las investigaciones reflejan que esta metodología permite conseguir un rendimiento máximo en el aprendizaje y propicia la iniciativa del alumno en la consecución de los objetivos.
2. Respecto al objetivo específico *analizar las características de la metodología propuesta por Miguel de Guzmán* se puede concluir que éste método aporta aspectos positivos al proceso de enseñanza, así se refleja tanto en el marco teórico como en el estudio de campo. Su objetivo, como se ha podido apreciar en el presente trabajo, es mejorar los procesos de pensamiento a la hora de enfrentarse con problemas de tipo general y esto se consigue con la propuesta de intervención práctica. Puesto que en ella los alumnos analizan, reflexionan y debaten sobre sus ideas.
3. En relación al objetivo específico *estudiar las características principales y ventajas del aprendizaje cooperativo*, se concluye en que la metodología propuesta posibilita que el alumno se beneficie de todos los aspectos positivos de esta: enriquecerse, aplicar un método desde diferentes perspectivas, apoyo y estímulo, contrastar los progresos que se van produciendo tanto en uno mismo como en los otros y ayudar con mayor eficacia a los compañeros en la obtención de unos mismos objetivos. Asimismo, se consigue que los estudiantes se comuniquen y perciban a través de distintos puntos de vista un mismo ejercicio. Sin embargo, actualmente los profesores siguen encontrando dificultades para ponerlo en práctica a pesar de reconocer los aspectos positivos que proporciona.
4. En relación al objetivo específico *analizar los resultados obtenidos tras el estudio de campo, el reducido número de la muestra* no permite extraer datos concluyentes. A pesar de ello, esta pequeña actividad ha permitido constatar en general las ventajas que proporciona la metodología para la resolución de problemas de manera cooperativa. Asimismo, gracias a esta se han podido identificar aspectos a mejorar en la implantación parcial de la metodología, los cuales se han tenido en cuenta en la propuesta práctica de intervención.

5. Sobre la base de la consecución de los objetivos anteriores, se puede asegurar que la propuesta de intervención desarrollada en el presente trabajo aporta beneficios importantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, el profesor debe de ponerlo en práctica a pesar del esfuerzo que esto supone, ya que de esta manera el aprendizaje se enfoca desde visión «constructivista» y se favorece el razonamiento matemático.

9. LIMITACIONES DEL TRABAJO

Entre las limitaciones cabe destacar las referentes al estudio de campo, puesto que en un principio iba dirigido a todos los alumnos de 1º de ESO del centro donde se cursaron las prácticas *Nuestra Señora de Begoña*. Sin embargo no se pudo realizar por falta de tiempo, ya que la metodología propuesta les atrasaría la programación establecida dos días.

Otra de las limitaciones ha sido no poder comprobar la efectividad de la metodología con un mayor número de ejercicios debido a la falta de tiempo. Asimismo, el número de preguntas del cuestionario ha sido reducido y la muestra ha quedado limitada a 15 estudiantes. Por lo tanto, no ha sido posible obtener resultados concluyentes aunque se han podido observar ciertos aspectos que se han tenido en cuenta en la propuesta de intervención.

Por otra parte, una limitación importante es la que hace referencia a la propia naturaleza de la propuesta, ya que exige un cambio notable en el método de enseñanza habitual, donde el profesor tiene que cambiar su rol y hacer de guía en el aprendizaje del alumno.

Cabe destacar que la propuesta que se desarrolla a lo largo del trabajo solamente se limita al bloque de álgebra, por varias razones que se han explicado en la sección 2. Por lo que sería interesante ponerla en práctica en diferentes áreas matemáticas.

10. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA

Una línea a investigar está enfocada al análisis de las posibles dificultades provenientes de la metodología propuesta, puesto que como se ha mencionado en el apartado anterior, se han realizado pocos ejercicios y ha participado un número reducido de estudiantes. Sería correcta la realización de una batería de ejercicios que permita conseguir conclusiones y datos de más generales y de mayor fiabilidad.

Como se ha podido comprobar mediante diferentes estudios, son muchos los profesores que no llevan a cabo actividades cooperativas a pesar de reconocer los aspectos positivos de estas. Sería interesante investigar los motivos que les impulsan a no propiciar el aprendizaje cooperativo, realizando entrevistas en las que den sus opiniones al respecto y se les informe de los aspectos positivos que proporciona. De esta manera, se podrían buscar alternativas que les permitan utilizar este tipo de aprendizaje cooperativo.

La aplicación de la metodología presente en este trabajo para la resolución de problemas en álgebra se podrá aplicar a otras áreas matemáticas que también supongan dificultades, como por ejemplo: geometría. Igualmente, sería interesante aplicar la metodología a otros niveles educativos. Es decir, se podría poner en práctica en todos los niveles de educación secundaria, puesto que las ventajas que proporciona la metodología desarrollada no se limitan a alumnos de una edad y curso determinado. El presente trabajo refleja que tanto el aprendizaje cooperativo como el aprendizaje matemático a través de la resolución de problemas proporcionan múltiples ventajas.

11. BIBLIOGRAFIA

11.1. REFERENCIAS

Chacel, R. *George Polya: Estrategias para la solución de problemas*. Dpto. de Matemática. Recuperado el 18 de Abril de 2013. Disponible en: http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf

Colomina, Rosa y Onrubia, Javier (2001). Interacción educativa y aprendizaje escolar: la interacción entre alumnos. En Coll, César, Palacios, Jesús y Marchesi, Álvaro (Compiladores). *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar* (2ª edición) (pp. 415-435). Madrid: Alianza Editorial.

Decreto 175/2007, de 16 de octubre de la Comunidad Autónoma Vasca, por el que se establece el currículo de la Educación básica. Consultado el 23 de Abril de 2013. Disponible en: http://noticias.juridicas.com/base_datos/CCAA/pv-d175-2007.html#anexo5

European Commission (2007). *Science Education NOW: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. Bruselas: Autor.

Facultad de Ciencias Matemáticas-Universidad Complutense de Madrid (2013). *Cátedra UCM de Miguel de Guzmán*. [Sitio de Internet]. Recuperado el 27 de Marzo de 2013. Disponible en: <http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/>

Godino, J.D, Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. En Godino, J. D. (Dir.), *Matemáticas y su didáctica para maestros* (pp. 7-154). Recuperado el 25 de Marzo de 2013. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Guerrero, T. (2013, abril 14). La fórmula para ser un crack de las matemáticas. *El Mundo* [En línea]. Español. Recuperado el 14 de Abril de 2013. Disponible en: <http://www.elmundo.es/elmundo/2013/04/10/ciencia/1365598895.html>

Hersh, Reuben y John-Steiner, Vera (2011). *Matemáticas: Una historia de amor y odio*. Traducción de Rosa María Salleras Puig. Barcelona: Editorial Crítica.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado (4 de mayo de 2006), núm. 106, pp. 17158-17207. Recuperado el 15 de Abril de 2013. Disponible en:

<http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>

OCDE (2009). *Informe TALIS. La creación de entornos eficaces de enseñanza y aprendizaje. Síntesis de los primeros resultados*. Recuperado el 12 de Abril de 2013. Disponible en:

http://168.255.201.80/TALIS2009/Sintesis_TALIS_Internacional.pdf

OCDE/PISA (2010). *PISA 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Recuperado el 12 de Abril de 2013. Disponible en:

<http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa-2009-con-escudo.pdf?documentId=0901e72b808ee4fd>

Ortiz González, María del Rosario (2004). *Manual de dificultades de aprendizaje*. Madrid: Pirámide.

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (5 enero 2007), núm. 5, pp. 677-773. Disponible en:

<http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf>

Serra, T., Torra, M., Abrantes, P., Ramos, N., Barba, C., García, J.A, García, J.E, Segarra, N., Batlle, I., Colomer, T., Recarens, E., Bofarull, M. T., Martí, E., Fuertes, M. T., (2002). *La resolución de problemas en matemáticas*. Barcelona: Editorial Graó. Disponible en: <http://books.google.es>

Servicio de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid (2008). *Aprendizaje Cooperativo*. Disponible en:

http://innovacioneducativa.upm.es/guias/Aprendizaje_coop.pdf

UNESCO (1996). *La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI, presidida por Jacques Delors* (Compendio). Madrid: Santillana/Ediciones UNESCO. Consultado el 29 de Marzo de 2013. Disponible en:

http://www.unesco.org/education/pdf/DELORS_S.PDF?utm_source=twitterfeed&utm_medium=twitter

Universidad Internacional de La Rioja (2012a). *Innovación e investigación para la mejora de la práctica docente (Tema 4)*. Documento inédito de la asignatura de “Innovación e investigación para la mejora de la práctica docente” del Máster en formación del profesorado de Educación Secundaria. Logroño: Autor.

Universidad Internacional de La Rioja (2012b). *Metodología de las matemáticas (Tema 3)*. Documento inédito de la asignatura de “Metodología de las matemáticas” del Máster en formación del profesorado de Educación Secundaria. Logroño: Autor.

11.2. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Molina, M. (2012). *Proyecto investigador. Plaza de Profesor Titular de Universidad*. Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 24 de Abril de 2013. Disponible en:
<http://funes.uniandes.edu.co/2057/1/ProyectoInvestigador2012.pdf>

Servicio de Innovación Educativa de la Universidad Politécnica de Madrid (2008). *Aprendizaje Basado en Problemas*. Recuperado el 10 de Abril de 2013. Disponible en:
http://innovacioneducativa.upm.es/guias/Aprendizaje_basado_en_problemas.pdf