



Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

Los Juegos Educativos como Mejora en la Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra en 3ºE.S.O

Presentado por: Concepción Solano Lorente
Línea de investigación: Recursos educativos (Utilización
Educativa de otros recursos)
Director/a: Ana Isabel Leal García

Ciudad: Cartagena, Murcia
Fecha: 4 de Abril de 2013

Resumen

El presente trabajo Fin de Máster pretende informar de los resultados obtenidos en un trabajo de investigación consistente en la introducción de mejoras educativas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra, a través de la introducción de los Juegos Educativos como nueva metodología innovadora.

Para ello, se ha realizado un estudio acerca de las dificultades que los alumnos tienen en el estudio del Álgebra y en la resolución de problemas y actividades algebraicos durante toda la Etapa de la Educación Secundaria, analizando sus causas y describiéndolas a través de ejemplos concretos.

A continuación, se ha realizado otro estudio acerca del uso de los juegos en el aula como recurso educativo que ayuda a abordar las dificultades en el aprendizaje del Álgebra, mejorar destrezas de cálculo y fomentar la creatividad y motivación por aprender matemáticas.

Para ello se ha realizado un estudio de campo en el colegio San Vicente de Paul, en Cartagena, Murcia. Este estudio ha consistido en la realización de dos cuestionarios, y la introducción de una innovación educativa empleando un juego educativo llamado "Yo tengo...¿Quién tiene...?". El primer cuestionario, que investiga sobre el empleo y conocimiento de los juegos como recurso educativo en el aula, ha sido realizado a los profesores de matemáticas, mientras que el segundo cuestionario, que investiga sobre los beneficios de utilizar actividades lúdicas en el aula, ha sido realizado a los alumnos de 3ºE.S.O E.

Finalmente se ha realizado una propuesta práctica que ha consistido en la elaboración de un Taller de Álgebra, en el que se presentan varios juegos educativos relacionados con temas algebraicos. Este taller sirve para que los profesores de matemáticas del colegio San Vicente de Paul, puedan introducir de manera habitual el uso de juegos educativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de cualquier unidad didáctica del bloque algebraico.

Palabras clave

Recursos educativos, Álgebra, juegos educativos, dificultad de aprendizaje, motivación.

Abstract

This article Final Master report the results of a research project involving the educational improvements in the teaching and learning of algebra through the introduction of educational games, such as new innovative methodology.

For this article, has been studied of the difficulties that students have in the study of algebra and solving algebraic problems and activities throughout the stage of secondary education, describing and analyzing its causes through concrete examples.

Then, another study has been conducted on the use of games in the classroom, as an educational resource to help address difficulties in learning algebra, improve computational skills and encourage creativity and motivation to learn mathematics.

After, has made a field study at the School San Vicente de Paul, in Cartagena, Murcia. This study involved the completion of two questionnaires, and the introduction of an educational innovation using an educational game called "I have ... Who has ...". The first questionnaire, inquiring about the use and knowledge of the game as an educational resource in the classroom, has been made to mathematics teachers, while the second questionnaire, inquiring about the benefits of using recreational activities in the classroom, has been made to students in the 3rd E.S.O E.

Finally there has been a practical proposal that involved the development of an Algebra Workshop, in which are several educational games related to algebraic topics. This workshop is for teachers of mathematics at St. Vincent de Paul School, can routinely introduce the use of educational games in teaching and learning process of any algebraic block teaching unit.

Key Words

Educational resources, Algebra, educational games, learning difficulties, motivation.

Índice

Resumen/Abstract	1
Introducción	3
1.1. Justificación del trabajo y su título	3
1.2. Planteamiento del problema	4
1.3. Objetivos	5
1.4. Fundamentación de la metodología	5
1.5. Justificación de la bibliografía utilizada	6
2. Desarrollo	8
2.1. Fundamentación teórica	8
2.1.1. Dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de las Matemáticas ...	8
2.1.1.1. Dificultades en el aprendizaje del álgebra	11
2.1.1.2. Estrategias para abordar las dificultades en el álgebra	16
2.1.2. Los juegos educativos para la enseñanza de las Matemáticas	18
2.1.2.1. Uso y conocimiento de los juegos educativos en los docentes	21
2.1.2.2. Álgebra a través de juegos educativos. Ventajas/Desventajas	23
2.2. Materiales y métodos	29
2.3. Resultados y análisis	33
3. Propuesta práctica	41
4. Conclusiones	44
5. Líneas de investigación futuras	46
6. Bibliografías	47
6.1. Referencias	47
6.2. Bibliografía complementaria	50
Anexos	51
Anexo 1: Cuestionario 1	51
Anexo 2: Cuestionario 2	55

1. Introducción

1.1. *Justificación del trabajo y su título*

El objeto del presente trabajo es abordar la problemática que los docentes tienen en la enseñanza de las matemáticas, específicamente el álgebra, introduciendo los juegos educativos como un recurso nuevo e innovador.

El problema del aprendizaje de las matemáticas es uno de los mayores retos para la didáctica y la enseñanza de dicha materia. Tradicionalmente las matemáticas es de las materias que menos entusiasmo a los alumnos y es vista como una de las asignaturas huesos de la enseñanza.

Se genera además una controversia en su aplicación a la vida cotidiana, y es que a pesar de que se le conoce su utilidad en el área de las ciencias y la tecnología, no se le termina de ver su implicación en la resolución de problemas de la vida diaria, consecuencia pues, de que existe poca vinculación de su contenido con la realidad. Por ello y otros factores, las dificultades y problemas en su aprendizaje son numerosos y muy complejos.

Para el profesor de matemáticas, la actitud más difícil, es guiar y orientar a los alumnos en la comprensión de los conceptos y conocimientos matemáticos. Cuando se trabaja en matemáticas casi siempre se hace de manera tradicional y autoritaria, sin emplear metodología y recursos didácticos que verdaderamente ayuden los alumnos a comprender y mostrar interés por la materia. Esa limitación en la metodología de enseñanza se refleja en el resultado académico de los alumnos.

Según Anglin (1994), "Las matemáticas no son un recorrido prudente por una autopista despejada, sino un viaje a un terreno salvaje y extraño, en el cual los exploradores se pierden a menudo." Por ello es necesario que los docentes, analicen con actitud reflexiva su práctica docente, a fin de buscar alternativas metodológicas para que los estudiantes constructores de su propio aprendizaje se apropien de esos saberes matemáticos. Se necesita pues, de un docente mediador del aprendizaje que a través de nuevos recursos didácticos estimule en los alumnos, el interés, la creatividad y el gusto por aprender matemáticas.

Dentro de este recurso didáctico innovador, surge el juego para la enseñanza de la matemática. Se ha comprobado, en efecto, que un material presentado en forma de juego es un impulso hacia la diversión de los adolescentes. Con él, se consigue tanto agilidad en los procesos mentales, como un aprendizaje más eficaz.

Existen números juegos para emplear en la enseñanza de las matemáticas, pero la estrategia de su empleo en el estudio del álgebra cobra gran importancia, ya que

agudiza el razonamiento lógico, presenta actividades matemáticas relacionadas con la vida, y sobre todo sirve tanto para abordar y aclarar las dificultades de los conceptos algebraicos, como para mejorar destrezas en los cálculos algebraicos, adquiriendo una buena competencia de la disciplina.

1.2. Planteamiento del problema

Durante la realización de las prácticas correspondientes a la asignatura prácticum del Máster en Educación al Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, se ha observado la gran dificultad que tienen los profesores de matemáticas para abordar la enseñanza de la materia. A su vez, los problemas y dificultades matemáticos han sido investigados para el álgebra, temática sobre la que se ha realizado la práctica docente y detectado la dificultad.

El álgebra, es un área matemática que se introduce por primera vez en la Educación Secundaria, y que supone un cambio brusco en la concepción que los alumnos poseen acerca de las matemáticas. Se podría decir pues, que el álgebra representa la transición entre el estudio de las matemáticas elementales de primaria, y las matemáticas de grados superiores. Es pues la temática óptima para reflexionar, analizar e investigar a cerca de las dificultades de los alumnos en la comprensión de conceptos matemáticos.

Como el proceso global del aula, es un proceso de enseñanza y aprendizaje, las grandes dificultades que surgen en el aprendizaje, nacen por las grandes dificultades que surgen para enseñar y educar a los alumnos en la comprensión y razonamiento de los conocimientos adquiridos.

Es por ello, que en este trabajo se introducen los juegos educativos como un recurso didáctico innovador, que sirva a los docentes para mejorar su metodología de enseñanza y motivar al alumnado en el aprendizaje y adquisición de nuevas destrezas matemáticas. En especial, mejorar el aprendizaje del álgebra, área matemática muy importante y sobre la que se cometen muchos errores de concepto y cálculo. El objetivo de la mejora e innovación introducida, es por lo tanto, conseguir que un mayor número de alumnos, en una etapa educativa tan difícil, alcancen los objetivos y competencias matemáticas necesarias, con el menor grado de dificultad, con interés por aprender y realizando su creativamente.

En la realización del prácticum, se ha observado, asimismo, que los profesores apenas utilizan este tipo de recursos educativos, por lo que los alumnos no se encuentran motivados con estrategias lúdicas, sino con estrategias tradicionales que crean rutina y sistematizan los aprendizajes.

Partiendo de una reflexión de la metodología matemática seguida en el aula y las dificultades encontradas, se ha estudiado la introducción de actividades lúdicas que generan un ambiente propicio para que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea ameno y al mismo tiempo efectivo.

1.3. Objetivos

Los objetivos generales propuestos para este trabajo Fin de Máster fueron, por una parte, analizar las dificultades, problemas y errores en el aprendizaje del álgebra, y por otra parte, evaluar la mejora tras la introducción de los juegos educativos como recurso innovador en el aula de 3º E.S.O en el centro concertado San Vicente de Paul en Cartagena.

Dentro de estos objetivos generales, los objetivos específicos planteados en este trabajo Fin de Máster, fueron los siguientes:

- Estudiar las principales dificultades en el aprendizaje del álgebra y cómo el uso de estrategias adecuadas, influye en el tratamiento de dichas dificultades.
- Investigar las mejoras producidas en el aprendizaje del álgebra con la introducción de los juegos como recurso educativo innovador.
- Examinar la utilización y conocimiento de este tipo de recurso educativo y cómo influye en el estudio del Álgebra, en los docentes de Matemáticas del colegio San Vicente de Paul.
- Evaluar la valoración y satisfacción de introducir los juegos educativos para la resolución de problemas algebraicos, en los alumnos de 3ºE.S.O del Colegio San Vicente de Paul

1.4. Fundamentación de la metodología

Para llevar a cabo este Trabajo Fin de Máster, se han utilizado varios métodos.

El primer método utilizado, ha sido realizar una investigación bibliográfica acerca de las dificultades, errores y obstáculos que los alumnos tienen en el aprendizaje de las matemáticas.

A continuación, se ha investigado acerca de la importancia que tiene la introducción de los juegos educativos como recursos innovadores que facilitan la motivación, agilizan el razonamiento y abordan la resolución de problemas matemáticos. Se han analizado las ventajas y desventajas de su utilización, y se ha investigado particularmente su empleo en la resolución de problemas algebraicos. Para todo ello, se han utilizado fuentes bibliográficas recientes, realizando una lectura detenida y minuciosa de la documentación seleccionada.

El segundo método, ha consistido en una investigación de campo. Por un lado, se ha realizado un estudio acerca del conocimiento que tienen los profesores de matemáticas del centro San Vicente de Paul de los juegos educativos, con la finalidad de medir el grado relación de los profesores con los juegos educativos y su valoración de éstos como mejora en la enseñanza del Álgebra. Para la realización de este estudio, se ha optado por el cuestionario, ya que permite concretar mediante preguntas el objeto y la finalidad de estudio y permite a los profesores responder sin prisas y en cualquier momento.

Por otro lado, el segundo estudio de campo se ha llevado a cabo con los alumnos de 3ºE.S.O E. Dicho estudio ha consistido en la realización de una sesión práctica empleando un juego educativo para la resolución de problemas algebraicos relacionados con las unidades didácticas 5 y 6 de su bloque de contenidos, polinomios y división de polinomios. El juego utilizado ha sido, “*Yo tengo...¿Quién tiene?*”, juego que sigue una cadena de cálculo mental en la que participan todos los alumnos del aula.

Finalmente, y sobre los alumnos de este curso, se ha realizado otro estudio de campo mediante un segundo cuestionario. El objetivo, ha sido evaluar el grado de valoración y satisfacción de los alumnos con la introducción del juego en la resolución de problemas algebraicos.

1.5. Justificación de la bibliografía utilizada

Para realizar el presente trabajo y llevar a cabo la búsqueda bibliográfica con la que fundamentar de forma teórica la investigación, se han utilizado diversos buscadores y bibliotecas webs, filtrando aquella información de actualidad que se centraba en el estudio de la temática que aquí se aborda. Para ello, se han seguido fundamentalmente dos líneas bibliográficas.

En la primera línea, se ha hecho un estudio bibliográfico basado en el análisis de las dificultades, errores y obstáculos que se encuentran los profesores de matemáticas a la hora de abordar la enseñanza de la materia. Puesto que este estudio de dificultades matemáticas parte de conceptos muy generales, se ha acotado el estudio final, a la investigación en las dificultades y problemas en el álgebra. A continuación se ha indagado acerca de estrategias metodológicas que ayuden a abordar dichas dificultades y mejorar la enseñanza del álgebra.

En la segunda línea bibliográfica, se ha investigado acerca de la introducción de los juegos educativos como recursos lúdicos e innovadores en el aula. Para ello, en primer lugar, se ha investigado la importancia que tiene su introducción en la mejora del aprendizaje, de la motivación, y el desarrollo de habilidades y destrezas

matemáticas en los alumnos. A continuación se han buscado estudios, para medir el nivel de conocimiento que tienen los profesores sobre los juegos educativos, y qué nivel de utilización tienen en el día a día de las matemáticas. Para terminar, se han analizado estudios previos desarrollados por otros investigadores sobre la utilización de los juegos en el álgebra y la resolución de problemas algebraicos, haciendo hincapié en el tipo de juegos, las destrezas y habilidades que desarrollan en los alumnos y las ventajas y desventajas que implica su uso.

De este modo, a través de la consulta de las diferentes líneas bibliográficas, se ha partido de un estudio basado en las dificultades en el aprendizaje del álgebra, para finalmente concretar en el análisis de mejora, que supone haber introducido los juegos educativos como recursos innovadores en su enseñanza.

2. Desarrollo

2.1. Fundamentación teórica

2.1.1. DIFICULTADES, ERRORES Y OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Las teorías sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas tienen como objetivo el establecimiento de un correcto aprendizaje de la materia, así como el cumplimiento de los objetivos y competencias establecidos en el currículum. Pero en todo proceso de enseñanza y aprendizaje, los errores, las deficiencias e incluso el fracaso en los objetivos, son un elemento que surge de manera inevitable en dicho proceso. Es notable constatar, que la mayoría de recomendaciones metodológicas acerca de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas coinciden en la importancia y necesidad de identificar los errores, dificultades y obstáculos de los alumnos en dicho proceso, determinando no sólo sus causas, sino estableciendo un conjunto de estrategias de enseñanza que aborden dichas informaciones y que permitan el adecuado progreso de los alumnos en el aprendizaje.

Como bien destacan Del Puerto, Minnaard y Seminara (2005), el estudio de los errores matemáticos, no sólo forma parte del día a día de la enseñanza, sino que ha sido una constante de estudio a lo largo de toda la Historia de las Matemáticas, ya que hay infinitud de proposiciones verdaderas que con el tiempo fueron corroboradas como falsas. Por tanto, los errores en el aprendizaje de las Matemáticas, considerando error como una práctica que no es válida desde el punto de vista de la matemática escolar, son analizados y estudiados no como algo que no tendría que haber aparecido, sino como elementos útiles que permiten la adquisición de un mejor conocimiento, deben ser aceptados, y pueden superarse.

Cuando ese error ocasione que el contenido o tarea de estudio resulte demasiado difícil de resolver, hablaremos de una dificultad matemática; o de un obstáculo, si el error se produce por la aplicación equivocada de un concepto. Pero los errores no aparecen por azar, sino que están basados sobre conocimientos adquiridos previamente, y sobre el entorno en el que son presentados. La investigación didáctica, se trata de caracterizar estas regularidades y considerar el análisis de errores como una “estrategia de investigación prometedora para clarificar cuestiones fundamentales de aprendizaje matemático” (Radatz, 1980, p.16).

Asimismo, Borassi (1987), presenta el análisis de errores en educación matemática “como un recurso motivacional y como un puente de partida para la exploración matemática creativa, implicando valiosas actividades de planteamiento y resolución de problemas” (p.7). En resumen, considera que la superación de los

errores está agrupada en base a dos objetivos fundamentales: para ser eliminarlos, como es el caso de los errores en la comprensión y naturaleza de conceptos matemáticos, o para explorar sus potencialidades, en el caso de los errores en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas y metodología de enseñanza.

Brousseau, Davis y Werner (1986), señalan en el mismo sentido, cuatro vías mediante las cuales puede presentarse el error. Resultado de:

- Concepciones inadecuadas sobre aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Incorrecta aplicación y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.
- Creencias inadecuadas de los alumnos que no son reconocidas por el profesor.
- Inventiva de los alumnos de propios métodos, no formales pero altamente originales para la realización de tareas y resolución de problemas.

Por tanto, el estudio en los errores, dificultades y obstáculos en Matemáticas, es un proceso complejo que no se puede aislar ni delimitar, porque al igual que el fenómeno educativo, son la manifestación exterior de un proceso en el que intervienen diferentes factores; alumno, profesor, currículo y entorno.

No obstante, debemos tener en cuenta que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, nos encontramos con una gran variedad de dificultades que son potencialmente generadores de errores. Un análisis referencial de Socas (1997), Skemp (1980), Baroody (1988) y Godino, Batanero y Font (2003) identifica las principales causas de errores y dificultades en las Matemáticas en las siguientes tres grandes categorías.

1. Dificultades con la propia naturaleza de la Matemática.

- **Complejidad de los contenidos Matemáticos.** Para abordar este tipo de dificultad hay que en primer lugar, realizar un análisis del contenido y posteriormente identificar las variables a estudiar y las dificultades asociadas a ellas. Si el conocimiento se aplica mal, tendremos un obstáculo, y la superación de éste requerirá que el alumno construya un significado personal del objeto. Si por el contrario el error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente, el error no está en los alumnos sino en los conocimientos requeridos.

- **Estructura jerárquica de los conocimientos Matemáticos.** Los aprendizajes matemáticos, constituyen una cadena en la que cada conocimiento va enlazado con los anteriores. Esto ha de quedar reflejado en la selección y organización de los contenidos y reflejado en la presentación de los mismos.

- **Proceso de Pensamiento matemático.** Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de la Matemática que no se definen de forma inductiva sino deductiva. Este aspecto

lógico (deductivo formal) se ha considerado como una de las principales dificultades. También repercute el lenguaje formal que se utiliza en matemáticas muy distinto al lenguaje natural que se usa habitualmente. Las dificultades más frecuentes relacionadas con el lenguaje y la lectura son las siguientes:

- Dificultades por incapacidad de relacionar las matemáticas con el contexto.
- Dificultades causadas por la utilización de notación matemática.
- Dificultades debidas a la utilización de vocabulario técnico.
- Dificultades debidas a la complejidad sintáctica del lenguaje utilizado.

2. Dificultad asociada a los procesos de enseñanza.

- **Profesorado.** Un buen profesor debe ayudar a cada alumno para que desarrolle su capacidad matemática, y realice una buena comprensión de conceptos y procedimientos. Debe así saber relacionar todas las ramas matemáticas (álgebra, geometría, funciones, probabilidad, etc.), y aplicar los conceptos aprendidos a la resolución de una amplia variedad de problemas.

- **Metodología.** En el currículum de las matemáticas, los contenidos deben estar relacionados con la realidad, porque han de tener sentido para el alumno. Dentro de este planteamiento se identifican las siguientes dificultades:

- Ausencia de conocimientos previos y dominio de los nuevos. Se debe generar una enseñanza en la que la distancia entre lo nuevo y lo que se sabe sea la adecuada.
- Dificultad en la propia metodología empleada. Estas dificultades surgen, cuando el profesor no estructura bien los contenidos, y la presentación del tema no es clara, porque no está bien organizada, no utiliza bien la pizarra, no pone énfasis en los conceptos, los materiales empleados no son representativos, porque el ritmo de aprendizaje no se adapta al grupo clase o por ausencia de recursos.

- **Organización.** Para ello el docente debe procurar que el número de alumnos no sea demasiado grande, que el horario del curso no sea inapropiado y que se dispongan de los materiales y recursos didácticos necesarios.

3. Dificultad del alumno en sí.

- **Actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.**
Motivación. Uno de los mayores obstáculos que se encuentran los profesores a la hora de enseñar matemáticas son las actitudes y creencias de los alumnos, describiéndolas como fijas, inmutables, externas, abstractas y que no están relacionadas con la realidad. Por ello hay que establecer una metodología adecuada, con actividades propuestas por el profesor a los alumnos, variadas y significativas. Cuando el alumno no está motivado, no está en condiciones de hacerlas suyas. Por tanto, hay que fomentar su autoestima, la cooperación, la participación y la selección de contenidos y tareas adecuadas a la edad y circunstancias de los alumnos.

2.1.1.1. Dificultades en el aprendizaje del álgebra

Álgebra es al área matemática que emplea números, letras y signos y que se ocupa de estudiar las propiedades generales de las operaciones aritméticas desde un punto de vista abstracto y genérico. A pesar de tener gran presencia en las distintas ramas que engloban el estudio matemático, el Álgebra no se introduce en el Sistema Educativo hasta la Educación Secundaria Obligatoria, considerándose el aprendizaje matemático transición entre el estudio de las matemáticas elementales de primaria, y las matemáticas de grados superiores. Es por lo tanto en primero y segundo de la E.S.O, donde se introducen esos primeros conocimientos algebraicos en los alumnos, y donde se produce ese cambio brusco en la concepción que los alumnos poseen acerca de las matemáticas.

El estudio de los errores cometidos en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra, se apoya por un lado en algunas teorías de la psicología cognitiva, dónde el error no es consecuencia de falta de conocimiento o despiste, sino debido a un esquema cognitivo inadecuado, y por otro lado, en el análisis de errores y dificultades teniendo en cuenta el marco teórico descrito por Socas (1997), en el que se consideran tres grandes categorías de dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje Matemático; dificultades asociadas a la propia naturaleza matemática, la asociada a los procesos de enseñanza y al alumno en sí.

Así pues, de igual forma, se puede describir los errores que cometen los alumnos en el proceso de aprendizaje del Álgebra, en torno a tres orígenes distintos.

1. Obstáculos.

Un obstáculo se produce, cuando se utiliza un conocimiento adquirido fuera de su contexto teórico y origina respuestas inadecuadas. Por tanto, atiende a los errores que se producen en la aplicación inadecuada de conocimientos matemáticos y algebraicos previamente adquiridos.

Estos tipos de errores están asociados a un pensamiento lineal, lo cual obstaculiza implícitamente a otros modelos no lineales. En este sentido, diversas investigaciones entre las que destacan Filloy (1993), Kieran y Filloy (1989), y García (2010), describen una serie de creencias a cerca del Álgebra que poseen los alumnos de primero y segundo de la E.S.O., y que de ser aplicados en los problemas algebraicos generarían diversos errores.

- Una ecuación se identifica con el procedimiento que se debe realizar para resolverla.

- Averiguar si un número dado es solución de una ecuación dada, consiste en comparar el valor dado con el obtenido al resolver la ecuación, en lugar de reemplazar dicho valor en la ecuación.
- El significado que le atribuyen a las letras. Las letras se emplean en matemáticas no con un uso específico, sino simplemente para dotarlas de una mayor complejidad, haciéndolas más incomprensibles. Esta consideración obstaculiza el significado de los términos variable en las ecuaciones algebraicas.
- Aplicación de propiedades. Los alumnos estiman posible la aplicación de la propiedad distributiva en los casos de la raíz, la potencia, el cociente, respecto de la suma, etc. Por ejemplo, identifican que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

Se constata pues, la importancia de los primeros aprendizajes de las herramientas algebraicas, ya que es en éstos, donde se produce una ausencia muy grande del sentido difícil de remontar a posterior, cuando el trabajo se encuentra inmerso en una mayor dificultad operatoria. Se debe presentar el lenguaje algebraico no como una formalización de lo que ya se sabe, sino como una herramienta que permita saber cosas nuevas.

2. Ausencia de Sentido.

Los errores de ausencia de sentido se clasifican a su vez en los siguientes errores:

a. Errores del álgebra que tienen su sentido en la Aritmética.

Un gran número de investigadores Cortés, Vergnaud y Kavafian (1990), afirman que el aprendizaje del Álgebra supone un cambio brusco en su concepción de la matemática. De hecho, cuando a un alumno sin una transición previa, se le introduce en el Álgebra, el uso de las letras como variables e incógnitas, para él carecerá de sentido. Por tanto, se debe buscar una ruptura con la aritmética para que tenga sentido poner en funcionamiento el Álgebra.

Se destacan principalmente dos tipos de ruptura, ruptura en el funcionamiento del álgebra, y en cuanto a las diferencias con la aritmética, siendo ésta última la que verdaderamente hay que trasladar a las aulas.

La primera diferencia es que mientras que la aritmética no es capaz de generalizar las operaciones matemáticas, el Álgebra puede dar una generalización que cumple las condiciones exigidas. Además, Vergnaud, Cortés y Favre (1987), señalan que mientras que la resolución aritmética consiste en buscar las incógnitas intermedias en un orden conveniente y elegir los datos y las operaciones adecuadas para calcular estas incógnitas, la resolución algebraica no necesita preocuparse por la significación de los pasos intermedios ni el cálculo de incógnitas auxiliares, sino escribir relaciones explícitas entre incógnitas y datos para llegar a la solución.

Por ejemplo una resolución aritmética es del tipo $8-4 = ()+5$, dónde hay que buscar el número adecuado para obtener dicha igualdad, primero resolviendo $8-4$, (incógnita intermedia) y luego ese número haciéndolo igual a $()+5$. Sin embargo, una resolución algebraica es del tipo $3x-2=2x$, no hay necesidad de realizar cálculos intermedios, sino simplemente operar empleando las propiedades aritméticas, $3x-2x = 2$ y por tanto $x = 2$.

De hecho, según Herscovics y Kieran (1980), Küchemann (1981), Booth (1984), Filloy y Rojano (1985) y Kieran (1989), un marco de referencia aritmético origina los siguientes errores:

- a) Error en la forma de ver el signo igual. Los alumnos visualizan al signo igual como un simple separador de las secuencias de operaciones que realizan para llegar al resultado. Además lo conciben como la señal de hacer algo, por ejemplo creen que la ecuación que tenga como solución el número 4, es una expresión del tipo $(ax + b=4)$, cuando en realidad la correcta solución sería que $x=4$. Esta dificultad es un obstáculo a la hora de trabajar algebraicamente, es una violación de las propiedades de simetría y transitividad de la igualdad.
- b) Concepciones erróneas de los alumnos sobre el significado de las letras utilizadas como variables.
- c) El rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema.
- d) La no aceptación de la falta de clausura o la operatividad con las incógnitas.
- e) Dificultades con la concatenación y con algunas de las convenciones de notación del álgebra.
- f) La falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y los procedimientos que usan para resolver problemas.

b. Errores de procedimiento

La resolución de problemas en los estudios de primaria, se realiza sin ser muy específicos en el uso de los procedimientos, y las justificaciones obtenidas. De hecho, ello conlleva a que los alumnos cuando entran en la Educación Secundaria, generen confianza en realizar métodos intuitivos no enseñados y que se centren en conseguir la respuesta final, sin atender a los cálculos intermedios y al empleo del método adecuado. Sin embargo, el estudio del álgebra, les fuerza a formalizar procedimientos por los que antes nunca se habían preocupado, y saber que tras una expresión algebraica puede o no haber una solución numérica.

Estos errores operatorios y técnicos, se identifican como “errores al operar algebraicamente”, “empleo incorrecto de propiedades y definiciones”, “el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos”, etc.

Un ejemplo de ello es la consideración que los alumnos tienen en cuanto al orden de cálculo en las operaciones. Piensan, que se debe realizar de la misma forma que se presentan los términos en la expresión algebraica, de izquierda a derecha.

Pero los mayores errores se producen en la resolución de problemas mediante ecuaciones. El objetivo es establecer un método de presentación de resolución de problemas, que haga a los alumnos considerar que la resolución mediante expresiones algebraicas es más operativa que a través de la aritmética. Un estudio realizado por Cortés et al. (1990), plantea que el álgebra toma una significación más clara en la resolución de problemas, cuando éstos son difícilmente resolubles por la aritmética. Señalan como ejemplo, la presentación de problemas con dos incógnitas, indicando que la mejor manera de abordar su dificultad de resolución es la presentación previa de problemas con una incógnita donde aparece la incógnita en ambos miembros, es decir, ecuaciones del tipo $ax+b=cx+d$. Este tipo de ecuaciones permite resolver problemas que no se podrían resolver por la aritmética, y al mismo tiempo, exige un dominio de las herramientas algebraicas que hace que se entienda y constate de mejor manera la operatividad de los métodos y expresiones algebraicas.

Finalmente, cabe mencionar el error por “falta de verificación en la solución”, ya que muchos alumnos, una vez realizado el cálculo y la solución numérica obtenida, no tienden a realizar el uso de la sustitución para la verificación.

c. Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Las actividades y problemas matemáticos, son asimismo pruebas de lectura, que de no ser bien interpretadas, generan errores y confusión en los contenidos a desarrollar. Este error, se conoce como, “*interpretación incorrecta del lenguaje*”, (Rico, 1995).

Un ejemplo de ello, se observa en la malinterpretación del lenguaje algebraico con respecto al lenguaje aritmético. En aritmética, la concatenación denota adición, por ejemplo 43 es $40+3$. Sin embargo, en álgebra, la concatenación significa multiplicación, por ejemplo, $5x$ significa 5 por x . Extender la generalización sobre la base de lo que era correcto en aritmética puede conducir a los alumnos que empiezan con el álgebra a malinterpretar el sentido de los términos algebraicos.

De igual forma, sucede con el concepto de ecuación, error ocasionado porque el término ecuación se introduce definiendo una ecuación de primer grado con una incógnita. Como consecuencia, aparecen dos conceptos de ecuación diferentes, el de ecuación, y el de ecuación de primer grado con una variable. La definición que se da para ambos conceptos, es la de igualdad con incógnita, (Kieran y Filloy, 1989). Los errores que se generan con dicha confusión y obstáculo son:

- Los alumnos identifican igualdad con igualdad numérica, e incógnita con número a despejar. Por tanto, todas las ecuaciones han de tener solución y la ecuación es entonces una proposición (la afirmación de una igualdad) y no una función proposicional. Si por ejemplo se encuentran una expresión del tipo $2x-2x=3$, que es una ecuación sin solución, directamente la rechazan como ecuación porque su incógnita carece de valor numérico.

- Todas las expresiones algebraicas que posean letras, serán ecuaciones.
- Bloqueo a la comprensión de la naturaleza de las ecuaciones con dos variables.

Pero no sólo son las convenciones numéricas lo que crea dificultades en Álgebra, sino también la notación que ha de usarse para expresar respuestas algebraicas. Según Booth (1983), se ha demostrado que la habilidad para describir verbalmente un método no trae consigo necesariamente la habilidad para simbolizar ese método matemáticamente. Señala que los estudiantes pueden responder correctamente a ítems que requieren el uso de notación característica, y ser a su vez incapaces de discriminar entre representaciones incorrectas. Un ejemplo de ello, se ve por ejemplo en la interpretación que hacen los alumnos cuando se les pide calcular, el área de un rectángulo cuyos datos son los que se muestran en la figura 1. Ante ello, observamos contestaciones como el área es igual a $(5 \cdot 15 \cdot x)$, $(75x)$, $(x \cdot 75)$, ó $(x+75)$, cuando sin embargo ellos saben que un lado mide $(x+15)$ y el otro 5, y que el área del rectángulo se calcula como base por altura.

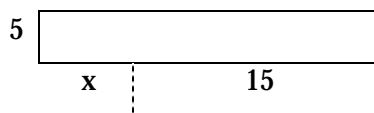


Figura 1. Datos del rectángulo (Elaboración propia)

3. Actitudes afectivas y emocionales.

Según destacan Abrate, Pochulu y Vargas (2006), las dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen como naturaleza razones muy diversas como pueden ser, faltas de concentración, excesiva confianza, bloqueos y olvidos entre los principales.

Nacen, por tanto como consecuencia de los sentimientos de tensión y miedo de los alumnos hacia las matemáticas, sus convicciones y su bloqueo psicológico para enfrentarse a una asignatura que les cuesta y les es difícil comprender. También generan tales dificultades otros factores como son, la jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores hacia sus alumnos, la metodología y estilos de enseñanza, los recursos educativos empleados, el establecimiento de un adecuado ritmo de aprendizaje, la desmotivación, etc.

Por lo tanto, el único objetivo para abordar dichas dificultades emocionales y afectivas en el aprendizaje del Álgebra, es la identificación de las dificultades anteriormente estudiadas, estableciendo una organización didáctica y el diseño de una propuesta educativa, que permita analizar los distintos significados que los estudiantes dan al objeto algebraico, eliminando miedos, obstáculos y errores, con el fin de adaptar la enseñanza a las necesidades y particularidades de cada alumno.

Finalmente, para abordar dichas dificultades y errores, Filloy (1993), describe un conjunto de reglas que han de ser consideradas por el docente como método de enseñanza en la presentación de aspectos algebraicos:

- Tener en cuenta el conocimiento previo de los alumnos tanto a nivel de conceptos como de símbolos y formas de representación.
- Señalar las relaciones entre conceptos ya aprendidos y los que está planteando, a nivel del sujeto que aprende y a nivel del objeto matemático.
- Referirse a la letra como un número desconocido, variable o incógnita, consiguiendo que la letra herede automáticamente el manipuleo aritmético.
- No emplear frases como conserva la igualdad, no varía la igualdad, etc., reemplazándolas por “conserva el resultado” o “no varía la solución”.
- Explicitar el sentido del signo igual como símbolo de la equivalencia entre ambos miembros de la ecuación y no como el anuncio de un resultado.
- Los problemas algebraicos y las letras se emplean como herramienta para resolver problemas de la vida real.
- Verificar la ecuación a posteriori de la resolución.

Desarrollando este conjunto de reglas y hábitos de estudio en los alumnos, se conseguirán abordar o al menos mejorar las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje del Álgebra.

2.1.1.2. Estrategias para abordar las dificultades en el álgebra

En torno a los años noventa, el panorama investigador descrito por Booth (1988) y Kaput (1995), reflejaba una insatisfacción sobre las formas tradicionales de enseñar Álgebra. Esta crítica, estaba centrada en el gran fracaso de los estudiantes que les hace abandonar sus estudios matemáticos, así como la escasa conexión que existe entre el Álgebra y los otros bloques de contenidos matemáticos. El objetivo de las investigaciones se centró pues, en hacer del Álgebra un estudio accesible, y en buscar formas más efectivas que las tradicionales para abordar con éxito el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Según Booth (1984) un docente debe afrontar las siguientes cuestiones: ¿cuál es la mejor manera de que los alumnos se familiaricen con las letras, con su

comprensión y su utilización?, ¿en qué momento comienzan las dificultades de los alumnos en el uso de las letras?, ¿cómo se hacen patentes esas dificultades?, ¿por errores de cálculo?, ¿por el rechazo consciente o, a veces, inconsciente de ellas?

Analizar las dificultades del aprendizaje del Álgebra, supone combinar estrategias generales y específicas a largo plazo con estrategias particulares e inmediatas adecuadas al ritmo de aprendizaje y a los conocimientos previos de los alumnos. Como se ha comentado en puntos anteriores, el análisis de los errores sirve para ayudar al docente a organizar estrategias que mejoran el aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades.

La mejor metodología de enseñanza, es aquella que utiliza estrategias, formas de trabajo, materiales, y contextos de estudio variados, de forma que se pueda conectar en un momento u otro con el mayor número de alumnos. Hay que tener en cuenta fundamentalmente tres aspectos: lo que el alumno experimenta por sí mismo, que los contenidos deben mostrar funcionalidad y que deben relacionar nuevos conceptos con los anteriormente adquiridos.

El constructivismo de acuerdo con Ausubel, considera que una de las mayores condiciones para que sea posible el aprendizaje significativo, es que el alumno manifieste una clara y profunda disposición para aprender. Una de las cuestiones más importantes, es saber qué tipo de organización, qué tipo de contenidos, de metodología y de recursos se deben aplicar para que los alumnos manifiesten dicha disposición. Esa intención con que el alumno se enfrenta a la tarea propuesta, se llama motivación, y depende tanto de la personalidad del alumno, como de la forma en la que los hace suyos, participa en su planificación, y los considera útiles para su vida.

El objetivo es por lo tanto, que desde el Álgebra se puedan potenciar habilidades, valores y destrezas matemáticas, haciendo que los alumnos sean más reflexivos, colaborativos, motivados y constructores de su propio aprendizaje. Construir una propuesta educativa que ayude a movilizar en el estudiante destrezas mentales como interpretar, analizar, inferir, plantear y resolver problemas tanto disciplinares como un contexto real dado. En definitiva, hay que crear contextos de enseñanza-aprendizaje en los que el trabajo académico esté íntimamente ligado a la vida real y al contexto social de la escuela. Por ello, el docente puede valerse para la enseñanza del Álgebra de estrategias innovadoras.

Estas estrategias, surgen ante la necesidad de encontrar un camino apropiado para que los alumnos comprendan el lenguaje matemático, atendiendo a los elementos generales de significado, símbolos y sintaxis, dado que el problema fundamental de la enseñanza de esta asignatura es la construcción del significado.

Con ellas se pretende ofrecer a los docentes un material didáctico lúdico para que los alumnos puedan comprender el lenguaje formal de una forma agradable e interactiva donde participen y construyan su propio conocimiento.

Dentro de las estrategias de innovación se destacan en el ámbito del Álgebra las siguientes:

- **Estrategias a partir de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC)**, basadas en la introducción en el aula de programas y software matemáticos. Los programas más utilizados en la actualidad para la enseñanza del Álgebra, se encuadran dentro de los denominados sistemas de cálculo algebraico, SCA. Los principales y más utilizados son: “DERIVE”, “MATLAB”, “MATHEMATICA”, “MAPLE” y MAXIMA”. Las posibilidades simbólicas, numéricas y gráficas que ofrecen este tipo de programas están provocando numerosos cambios en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

- **Estrategias usando los juegos educativos.** Para Guzmán (1984), el juego y la matemática, tienen tantos rasgos comunes que lo hace ser una estrategia muy importante para transmitir a los alumnos interés y entusiasmo por aprender matemática. Existen numerosos juegos, en los que se utilizan herramientas algebraicas como base teórica para su construcción. Con ellos, el estudio del álgebra no solo se hace más interactivo y de fácil asimilación, sino, que el juego genera que el aprendizaje sea significativo, referido a la vida cotidiana. Entre juegos algebraicos a emplear en el aula destacan, juegos de adivinar números, juegos con tarjetas, dominós algebraicos, pasatiempos algebraicos, el cuadrado mágico algebraico, la rueda algebraica, etc.

2.1.2. LOS JUEGOS EDUCATIVOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Actualmente, son muchos los teóricos que no dudan en afirmar la importancia y conveniencia de utilizar los juegos y actividades lúdicas en el aula como mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

El concepto más formal de juego, queda definido como aquel recurso que cumple las siguientes reglas (Inbar y Stoll, 1970):

- Algo que se realiza libremente.
- Es un desafío contra una tarea o un oponente.
- Se controla por un conjunto definido de reglas que abarcan todas las maneras.
- Representa una situación arbitraria delimitada en el tiempo y en el espacio desde la actividad de la vida real.

- El juego tiene una clara delimitación en el espacio y el tiempo. El estado exacto alcanzado durante el juego no es conocido a priori al comienzo del juego.
- Un juego termina tras un número finito de movimientos en el espacio-tiempo.

De entre todos los juegos que se enmarcan en la definición anterior, se van a tratar aquellos que tienen objetivos educativos y pretenden fomentar propósitos de la educación matemática. A estos se les llama, juegos educativos matemáticos.

La matemática y los juegos intelectuales poseen muchas semejanzas, como la curiosidad, creatividad, búsqueda de estrategias o la resolución de problemas. Por eso no es de extrañar que algunos de los grandes matemáticos de la historia hayan sido observadores de juegos, participando en ellos de forma activa, y dando lugar a nuevos campos, modos de pensar y de establecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática (Guzmán, 1998).

Ello hace que el juego, debido en parte a su carácter motivador, sea uno de los recursos didácticos más interesantes para introducir en el aula, ya que además de facilitar el aprendizaje de la matemática, y fomentar la creatividad, rompe el miedo, y la aversión que los alumnos tienen hacia la asignatura.

A la hora de implantar los juegos como mejora educativa, existen infinitud de juegos educativos, pero a nivel de juegos matemáticos según Olfos y Villagrán (2001) distinguimos fundamentalmente dos tipos:

1. Juegos de conocimiento.

Son juegos cuya práctica exige a los jugadores que utilicen conceptos o algoritmos incluidos en los programas de matemáticas, según las diferentes etapas de aprendizaje. Favorecen el aprendizaje de conocimientos específicos, el desarrollo de la atención y otras habilidades cognitivas básicas. Proveen de una enseñanza más rica, activa y creativa que la tradicional. Distinguimos tres niveles de aplicación de este tipo de juegos (Gairin, 1990):

- Pre-instruccional, cuando el juego es el único vehículo para el aprendizaje, ya que el alumno puede llegar a descubrir un concepto o establecer justificación de un algoritmo.
- Co-instruccional, cuando el juego acompaña a otros recursos del aprendizaje.
- Post-instruccional, cuando el juego sirve para consolidar el aprendizaje, ya que los alumnos ya han recibido enseñanza sobre un tema, y mediante el juego se hacen actividades para reforzar lo que han aprendido.

2. Juegos de estrategia.

Son juegos que exigen poner en práctica habilidades, razonamientos o destrezas directamente relacionadas con las matemáticas, que favorecen la actitud para abordar e intentar resolver los problemas. A su vez, éstos pueden ser (Gairin, 1990):

- Personales o solitarios, donde el jugador tiene que encontrar la forma de resolverlo. Ejemplo, el juego de la Bastilla.
- Multipersonales, en los que la tarea consiste en descubrir la existencia de una estrategia que le permita ganar siempre a sus oponentes. Ejemplo, el tres en raya, el Nim, las Torres de Hanoi, etc.

Asimismo, en el enfrentamiento a un juego de estrategias, se distinguen cuatro fases típicas, orientadas por la heurística de Polya para afrontar la resolución de problemas:

- Comprensión del juego o familiarización, en la que hay una exploración inicial.
- Elaboración de un plan para ganar; a saber: resolver parcialidades, relacionar con otros juegos, estudiar jugadas.
- Poner a prueba las estrategias.
- Comprobar si la estrategia es general: reflexionar sobre el proceso, formulación de hipótesis y comprobación.

En definitiva, hay una estrecha relación entre el juego y las matemáticas. De hecho, de la búsqueda de soluciones de juegos, han surgido ramas de la matemática actual, como es la teoría de grafos o la probabilidad y la denominada Teoría de Juegos. Tanto se asemejan, que podemos describir la correspondencia entre ambos pensamientos a través de los siguientes puntos (Winter y Ziegler, 1983):

- Cuando en juegos hablamos de reglas de juego, en el pensamiento matemático, se utilizan reglas de construcciones, reglas lógicas, instrucciones y operaciones.
- Los juegos se basan en situaciones iniciales, y el pensamiento matemático en axiomas y definiciones.
- Lo que en juego se llama “jugada”, en matemáticas son deducciones.
- A las estrategias de juego, se le llama en matemáticas utilización hábil de las reglas, reducción de ejercicios conocidos a fórmulas.

Así pues, según el CENAMEC (1998), el estudiante no juega para aprender matemática, pero por medio del juego desarrolla una serie de habilidades y destrezas matemáticas que con otro tipo de recursos o empleando la metodología de enseñanza tradicional no serían alcanzados. En definitiva, la incorporación del juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, sirve para alcanzar los siguientes objetivos:

- Es un elemento de motivación, estimulación y exploración que potencia la creatividad y la imaginación. Aumento del rendimiento a causa del mayor interés.
- Afianzar conceptos y facilitar el contenido de las matemáticas, permitiendo una enseñanza más efectiva y homogénea entre alumnos de diferentes capacidades.

- Jugar con números, figuras e ideas puede llegar a ser la mejor manera de empezar a interesar por las matemáticas y de mejorar nuestra capacidad de pensar con lógica y creatividad.
- Constituye una forma de relación y comunicación entre el alumnado, por lo que favorece las relaciones sociales entre los alumnos. Ayuda a desarrollar habilidades como la observación y la comunicación.
- La información es aprendida más deprisa que en otras metodologías, aunque la cantidad aprendida no es significativamente mayor que con otros métodos.
- Fomenta la participación activa, permite investigar, descubrir y reflexionar rompiendo el bloqueo emocional y fomentando la desinhibición y la implicación del alumnado.
- Utilizar técnicas heurísticas, que ayudarán a la resolución de problemas.
- Potenciar actitudes como las de auto-confianza, auto-disciplina o perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Producen en los estudiantes una tendencia a asistir regularmente a la escuela.
- Incrementar la atención y mejorar la colaboración entre los alumnos.
- Favorece el pensamiento lógico y numérico.
- Conectar lo matemático con una posible realidad extraescolar.
- Apreciar la potencia y belleza de la argumentación matemática.

...el mejor camino para hacer las Matemáticas interesantes a alumnos y profanos es acercarse a ellas en son de juego....una chanza, una paradoja, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades (Gadner, 1975, p.8).

La matemática ha sido y es arte y juego y esta componente artística y lúdica es tan consubstancia a la actividad matemática misma que cualquier campo del desarrollo matemático que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable (Guzmán, 1989, p.61).

2.1.2.1. Uso y conocimiento de los juegos educativos en los docentes

El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y han disfrutado tanto contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprender la matemática a través del juego y de la belleza? (Guzmán, 1984).

Desafortunadamente y pese a tantas investigaciones y estudios a cerca de los juegos, éstos son un recurso educativo que ni han sido tenidos en cuenta como parte del proceso educativo, ni son empleados por los docentes para mejorar y facilitar el aprendizaje. Generalmente las tareas escolares y la metodología de enseñanza que se

emplea actualmente, es tradicional y limitada, obligando al alumno a realizar un sin fin de actividades que ni son interesantes, ni le producen aprendizaje significativo.

Como bien desarrolla Iztúriz et al. (2006) no sólo los docentes deben promover esta nueva metodología de enseñanza, sino el sistema educativo debe fomentar e incitar a ello, poniendo en las escuelas todos aquellos recursos necesarios para su implementación, invertir en medios tecnológicos, clases reducidas, profesores realmente motivados, formación a docentes, etc. Sólo así, la notoria idea de que los docentes opten por un cambio metodológico que involucre a los estudiantes en las actividades desarrolladas en el aula podrá llevarse a la práctica, introduciendo el juego como estrategia rompedora de la enseñanza tradicional.

Asimismo, está claro que un educador no puede basar su enseñanza exclusivamente en la utilización de juegos, sino que ha de mantener un equilibrio entre la matemática lúdica y la matemática seria, interés y base científica. El uso de los juegos educativos en el aula se ha de producir en un contexto comunicativo multidireccional, en el que el docente y el alumno actúen tanto de receptores como de emisores.

A continuación se muestran una serie de consideraciones sobre el modo en que hay que proceder para la utilización de juegos educativos en el aula (Gairin, 1990).

- Es necesario que el profesor practique el juego antes de presentarlo a sus alumnos. Ello se debe realizar por varios motivos:

- La eficacia de una actividad depende, en buena medida, del entusiasmo con que la realice el profesor. Si el está motivado y disfruta, también lo harán los alumnos.
- El profesor podrá observar y corregir si fuese necesario errores en las reglas, dificultades en las jugadas, si el juego puede llevar a situaciones monótonas, duración excesiva, etc.
- De su propia experiencia sacará la información sobre los procesos que llevan a la solución, sobre los bloqueos que se puedan producir, prestando ayuda a sus alumnos en el momento oportuno y de la forma más efectiva posible.

- El juego hay que proponerlo a los alumnos en el momento preciso, y con los contenidos adecuados.

- El juego ha de utilizarse para el fin adecuado, para potenciar el aprendizaje de los alumnos y no para cubrir tiempos muertos. Además, el docente debe distinguir entre emplear un juego de conocimiento o de estrategia, buscando, en cada caso, que se adapte a los objetivos educativos previstos.

- Antes de iniciar el juego hay que dedicar alguna sesión para que los alumnos conozcan el material y su utilidad.

- Todos los alumnos han de participar en el juego, independientemente de su nivel en la materia y sus éxitos o fracasos educativos.
- Arbitrar medidas para que la solución de juegos de estrategia lo puedan alcanzar todos, que no se haga pública la solución para que a ningún alumno se le quite el privilegio de descubrir el resultado con sus propios medios.
- Al finalizar el profesor debe valorar la utilidad del juego con preguntas y cuestiones a los alumnos, para valorar así la utilidad práctica del juego.
- Si el docente decide elaborar un juego para que lo practiquen sus alumnos es conveniente recordar que hay muchos juegos educativos, que ya han sido inventados y son conocidos por los alumnos. Por ello, es bueno buscar un juego entre los existentes, y modificarlo a nuestros intereses pedagógicos.

Así pues, conociendo la utilidad de los juegos educativos, y sus consideraciones de empleo en el aula, los docentes podrán aportar al proceso de enseñanza y aprendizaje de los alumnos un valor motivacional, creativo, variado y fresco, en el que los alumnos disfrutaran de su aprendizaje y los docentes ven enriquecida su labor educativa.

2.1.2.2. Álgebra a través de juegos educativos. Ventajas/Desventajas

Como describe Contreras (1993), los juegos educativos de matemáticas, sirven tanto para aclarar conceptos y mejorar destrezas cognitivas, como para motivar en el estudio de una materia que presentada de otra forma, genera serias dificultades y errores conceptuales y puede ser aburrida y repetitiva para los alumnos. Los juegos educativos que se van a abordar en adelante, son juegos de Álgebra que van a permitir establecer una nueva metodología de enseñanza para abordar las dificultades y errores algebraicos analizados anteriormente.

Con los juegos algebraicos se pretende que el alumno trabaje personal y cooperativamente con problemas algebraicos interesantes, no rutinarios, adaptados a su edad y a su entorno, realizando investigaciones sobre propiedades algebraicas y resolviendo problemas que requieren habilidades y destrezas de alto nivel educativo.

El Álgebra y los juegos tienen muchos rasgos en común en cuanto a la finalidad educativa, ya que ambos desarrollan en los alumnos la capacidad de comprensión y representación de las letras en matemáticas, enseñando a los alumnos a desarrollar técnicas intelectuales, potenciar el pensamiento lógico, desarrollar hábitos de razonamiento y pensar con espíritu crítico.

Las ventajas que se obtienen al desarrollar juegos como mejora educativa en la enseñanza del Álgebra, según Salvador (2012) se describen a continuación:

- Un juego bien elegido sirve para introducir el Álgebra, ayudar a comprender mejor los conceptos, afianzar los ya adquiridos, adquirir destrezas en algún algoritmo o descubrir la importancia de una propiedad consolidando un contenido.
 - Adquirir altos niveles de destreza en el desarrollo del pensamiento algebraico.
 - Enseñar contenidos y estrategias de la resolución de problemas.
 - Motivar desde el comienzo hasta el final de la clase, produciendo en los alumnos entusiasmo, diversión, interés, desbloqueo y gusto por estudiar Álgebra. Es un elemento de motivación, estimulación y exploración.
 - Desarrollo en los alumnos diversión, personalidad y estado anímico.
 - Un juego algebraico conduce al alumno a la conquista de su autonomía y a la adquisición de una conducta que le ayudará en sus actividades.
 - Según Piaget (1985, p.20), los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla.
 - El juego algebraico ayuda en el desarrollo intelectual del alumno fomentando la creatividad, la imaginación y el ingenio.

A pesar de todas sus ventajas, nuestro sistema educativo lo considera una actividad poco seria para los procesos de aprendizaje del Álgebra. Sin embargo, mientras más estrategias lúdicas se apliquen en la enseñanza, mejor podrá relacionar el alumno los conocimientos aprendidos con la vida cotidiana, y mayor será la comprensión de los contenidos de la materia.

A continuación Contreras (1993), describe una serie de juegos educativos algebraicos que forman el eslabón ideal para fomentar y abordar las dificultades encontradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra en Educación Secundaria. Los juegos presentados reúnen a su vez las siguientes características:

- Tener una finalidad específica.
- Ser atractivos y motivadores.
- Ser adecuados y sencillos según el nivel de los alumnos.
- Ser asequibles, dedicando especial atención a los juegos que el profesor y los alumnos sean capaces de construir.

1. La competencia algebraica

Este juego pretende reforzar las destrezas algebraicas, el cálculo de valores numéricos para incógnitas y las operaciones con expresiones algebraicas. Es un juego colectivo realizado por parejas y adecuado para las aulas de segundo, tercero y

cuarto de la E.S.O. Es un juego de cartas dónde las cartas de la baraja están compuestas por expresiones algebraicas.

En primer lugar, el docente deberá elegir el valor de una incógnita “x”, y sacar cinco cartas de la baraja con expresiones algebraicas. Una vez elegidas, cada pareja de jugadores debe intentar obtener sustituyendo el valor de “x”, el máximo valor numérico con una expresión algebraica que cumpla las siguientes condiciones:

- Deben aparecer una vez y sólo una vez las expresiones de las cinco cartas.
- Estas 5 expresiones pueden estar entre sí sumadas, restadas, multiplicadas o elevadas al cuadrado.
- Cada operación sólo puede ser usada una vez y se puede usar un par de paréntesis.

Ganará el juego, la pareja que consiga obtener el mayor resultado en su expresión algebraica final habiendo realizado todos los cálculos correctos (García, 2013A, <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/category/algebra/>).

2. Pasatiempos de Balanzas

Se trata de resolver los siguientes problemas:

Problema 1. Mirando la figura 2 resuelve: “Si un ladrillo está en equilibrio con las $\frac{3}{4}$ partes del mismo ladrillo y $\frac{3}{4}$ partes de una libra, ¿cuánto pesa el ladrillo?”

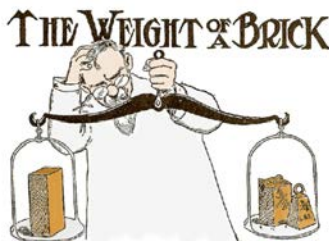


Figura 2. Representación problema del ladrillo en equilibrio (García, 2013B, <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2013/02/20/lecciones-elementales-de-algebra-de-sam-loyd-los-pasatiempos-de-balanzas-de-de-tirar-la-cuerda/>)

Problema 2. “Si cuatro gatos y tres gatitos pesan 37 libras mientras que tres gatos y cuatro gatitos pesan 33 libras, se nos plantea, ¿cuál es el peso de los gatos y los gatitos?”

Problema 3. Mirando la figura 3: “Si las tres primeras balanzas están en equilibrio, ¿cuántos vasos harán falta para equilibrar la botella?”



Figura 3. Representación problema de la botella en la balanza (García, 2013B, <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2013/02/20/lecciones-elementales-de-algebra-de-sam-loyd-los-pasatiempos-de-balanzas-de-de-tirar-la-cuerda/>)

3. La clave de la caja fuerte

El juego persigue traducir igualdades entre números en forma de ecuaciones, abordando la técnica de sistemas de ecuaciones. El fundamento del juego es averiguar la clave secreta de una caja fuerte, teniendo en cuenta operaciones algebraicas. A continuación se presenta un ejemplo:

“Mi clave tiene cinco cifras llamadas, intenta averiguarlas sabiendo que, la primera y la segunda cifra suman 17, la segunda y tercera 15, la tercera y cuarta, 15, la cuarta y quinta 9 y la primera y última 8”.

Los alumnos deben desarrollar el conjunto de 5 ecuaciones y 5 incógnitas que se obtienen con las pistas del enunciado, para determinar los cinco números de la caja fuerte. Es un juego individual y adecuado para 1º y 2º E.S.O (García, 2013C, <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2013/01/05/la-clave-de-la-caja-fuerte-sistemas-de-ecuaciones-en-forma-de-pasatiempos/>).

4. El puzle suko

Se trata de resolver el puzle que se plantea, trabajando con ecuaciones y sistemas de ecuaciones y operaciones algebraicas sencillas (García, 2013D, <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2012/12/25/otro-puzzle-numeric-el-suko-nivel-i/>).

Un ejemplo se muestra a continuación: *completa el puzle de la figura4 sabiendo en cada casilla tienes que colocar un número del 1 al 9, de modo que el número en cada círculo sea equivalente a la suma de los cuatro recuadros adyacentes, y la suma de los cuadrados del mismo color encaje con el resultado facilitado en los otros tres círculos inferiores.*

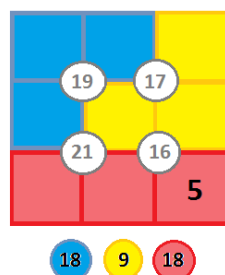


Figura 4. Representación del puzle suko (Elaboración propia)

5. El panel algebraico

Es un crucigrama numérico formado por celdas hexagonales en el que hay que rellenar las casillas con números mediante expresiones algebraicas. Por lo tanto, permite reforzar el manejo de expresiones algebraicas y buscar estrategias para resolver situaciones no usuales.

Resolvamos el ejemplo que se presenta a continuación. *Resuelve numéricamente el siguiente panel sabiendo que las expresiones algebraicas de las líneas del panel son las siguientes y que sólo cuentas con el dato que $A_6=5$.*

Líneas A

A1. 1ºExpresión: f^2+e ; 2ºExp: $a \cdot b^2$

A2. 1ºExp: d^2+3b^2+2 ; 2ºExp: $bf-cd$

A3. 1ªExp: $d-2b$; 2ºExp: $f \cdot j$

A4. $2(x+4)^2+8$

A5. $c \cdot (d-e)^2$

A6. $d-b$

Líneas B

B1. 1ªExp: $11(h-b)$; 2ªExp: $11b$

B2. 1ªExp: e^2+4e ; 2ªExp: d^2-4y

B3. 1ªExp: $6d+e$; 2ªExp: d^0-1

B4. $(j+2)/2$

B5. $7d+b$

B6. $\frac{1}{2}(g+1)$

Nota: si la 2ªexpresión de B1 es "11b", y el número de dos letras ha de acabar en 5, se sabe que la solución buscada es 55. Por tanto, si $11b = 55$, $b = 5$. Sustituyendo ahora b, en la expresión A6, obtendríamos d ($d-b=5$, $d=10$), y con ella la expresión B5. Si $B5 = 7d+b = 7 \cdot 10+5 = 75$. Ahora continúa resolviendo el panel.

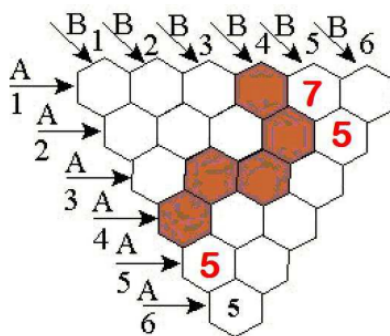


Figura 5. Representación del panel algebraico del ejemplo (García, 2013E),

<http://anagarciaazcarate.files.wordpress.com/2012/08/panalgebraicoprofe.pdf>

6. TIC-Talgebra

Este juego presentado por Contreras (1993), tiene como objetivo practicar la factorización de polinomios, el cálculo mental y resolver ecuaciones.

El desarrollo del juego realizado por parejas es el siguiente: cada jugador pone su ficha y la de su compañero, en las casillas del tablero de factores de la figura 6. Una vez colocadas, ese mismo jugador calcula el resultado de multiplicar los dos factores que están bajo las fichas y coloca una ficha de su color en el resultado de la operación en el tablero del juego presentado en la figura 7. Posteriormente, el otro jugador mueve su ficha del tablero de factores a otra casilla y multiplica el factor por la casilla en la que está la ficha de su compañero, calcula el resultado y lo coloca en el tablero del juego de la figura 7. Así cada jugador sucesivamente tiene que ir moviendo sus fichas en el tablero de factores y según las soluciones obtenidas al multiplicar su factor y el del compañero marcarlo en el tablero de juego. El juego finaliza cuando uno de los dos jugadores obtenga una fila de cuatro fichas seguidas en vertical, horizontal o diagonalmente en el tablero de juego.

A continuación se presenta un ejemplo. Imaginamos que un jugador, jugador 1 tiene su ficha en el factor en $(x-1)$ del tablero de factores y otro jugador, jugador 2 en el factor "x" de dicho tablero. La operación que tiene el jugador 1 tiene que realizar es $x(x-1)$, obteniendo $(x^2 - x)$. Por lo tanto, coloca una ficha de color rojo en la casilla $(x^2 - x)$, del tablero de juego presentado en la figura 7. Posteriormente, el jugador 2 mueve su ficha del tablero de factores y la cambia a $(x+1)$. La operación que tiene que realizar es por lo tanto la resultante de multiplicar su factor por el del compañero, $(x+1) \cdot (x-1)$, obteniendo $(x^2 - 1)$. Por tanto, coloca una ficha de color verde, en la casilla del tablero de juego de la figura 7 que indica dicho resultado. A continuación sigue jugando el jugador 1. Puesto que había obtenido $(x^2 - x)$, y tiene que conseguir enlazar cuatro fichas seguidas vertical, horizontal o diagonalmente, mirando la figura 7 ha de intentar conseguir como resultado, $(x^2 + x)$, $(x^2 + 8x + 16)$ ó $(x^2 + 1)$. Como la ficha de su compañero está en $(x+1)$ para obtener alguno de los resultados anteriores basta con que cambie su ficha a la casilla "x" del tablero de factores. En ese caso obtendría $(x^2 + x)$, y así ya tendría dos fichas seguidas de su mismo color. Su próximo objetivo será obtener $(x^2 - 4x + 4)$. Pero antes ha de jugar el jugador 2, que debe intentar conseguir su objetivo de la misma forma.

El jugador que realice mal una operación no podrá volver atrás y perderá su turno de jugada. Ganará el que antes consiga enlazar seguidamente cuatro fichas.

$x-4$	$x-3$	$x-2$
$x-1$	x	$x+1$
$x+2$	$x+3$	$x+4$

Figura 6. Tablero de factores del TIC-Talgebra (Contreras, 1993, p.167)

$x^2 - 7x + 12$	$x^2 - 3x + 2$	$x^2 - 16$	$x^2 + 8x + 16$	$x^2 - x$
$x^2 + 5x + 4$	$x^2 - 4x$	$x^2 + 2x - 3$	$x^2 + x$	$x^2 + 1$
$x^2 - 8x + 16$	$x^2 - 5x + 6$	$x^2 - 4x + 4$	$x^2 + 7x + 12$	$x^2 - 2x - 8$
$x^2 - 4$	$x^2 + 2x$	$x^2 - 6x + 9$	$x^2 - 9$	$x^2 + 3x - 4$
$x^2 - 2x + 1$	$x^2 - 2x - 3$	$x^2 - 2x$	x^2	$x^2 + 5x + 6$
$x^2 - 6x + 8$	$x^2 + 4x + 4$	$x^2 + 2x - 8$	$x^2 + 3x$	$x^2 - 4x + 3$
$x^2 + 6x + 9$	$x^2 + x - 2$	$x^2 + 4x + 3$	$x^2 - x - 2$	$x^2 - 3x$
$x^2 - 3x - 4$	$x^2 + x - 12$	$x^2 - x - 6$	$x^2 + 4x$	$x^2 + 6x + 8$
$x^2 + 3x + 2$	$x^2 + 2x + 1$	$x^2 - 5x + 4$	$x^2 - x - 12$	$x^2 + x - 6$

Figura 7. Tablero de juego del TIC-Talgebra (Contreras, 1993, p.167)

7. El cuadrado mágico algebraico

Se dice que un cuadrado es mágico, si todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo. Este juego pretende realizar un cuadrado mágico en donde en lugar de números, cada casilla posee una expresión algebraica. La suma de todas las filas, columnas y diagonales dará un conjunto de expresiones algebraicas. El objetivo es hallar un valor de "x", en el que se consiga que dicho cuadrado algebraico sea un cuadrado mágico (Contreras, 1993). Un ejemplo de cuadrado mágico algebraico es el que se presenta a continuación.

$3(1+2X)$	$3-X$	$4(X+1)-1$
$3+X$	$3(X+1)$	$5(1+X)-2$
$2+(1+2X)$	$3+7X$	3

Figura 8. Ejemplo de cuadrado mágico algebraico (Contreras, 1993, p.169)

2.2. Materiales y Métodos

El presente trabajo, está destinado a abordar las dificultades en el aprendizaje del Álgebra a través de la introducción de los Juegos Educativos como refuerzo y mejora educativa. Para ello, el estudio de campo ha consistido en la realización de cuestionarios a alumnos y profesores del centro educativo San Vicente de Paul, en Cartagena.

Se ha realizado un primer cuestionario a los profesores de matemáticas del centro educativo, con el objetivo de valorar por un lado, los distintos recursos educativos y metodología que emplean para el aprendizaje de las Matemáticas, y en particular del Álgebra, y por otro lado, analizar exactamente su conocimiento y uso de los juegos educativos para el refuerzo y abordaje de las dificultades y errores en el aprendizaje del Álgebra.

El cuestionario titulado “*Investigación sobre los Juegos Educativos en la Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra*”, es de elaboración propia y expresamente diseñado para esta investigación. Cada una de las cuestiones ha sido realizada, considerando los puntos de desarrollo teórico, los objetivos del cuestionario y el tercer objetivo específico propuesto del trabajo.

El cuestionario ha sido realizado a cinco profesores, 4 mujeres y un hombre, que son los que imparten clases de Matemáticas en los cursos que engloban la Educación Secundaria. Dicho cuestionario se muestra en el Anexo 1.

Seguidamente se ha introducido una innovación metodológica en el aula de 3º E.S.O E, del mismo centro educativo. Dicha innovación ha consistido en la realización en clase de un Juego Educativo como mejora para abordar las dificultades del Álgebra. El objetivo general del juego, es por un lado, aclarar y reforzar los contenidos algebraicos introducidos en las unidades didácticas 5 y 6, correspondientes a polinomios y división de polinomios, y por otro, generar diversión, cooperación entre compañeros y el desarrollo de habilidades de cálculo y agilidad mental. Se ha realizado únicamente sobre los alumnos presentes en clase el día de la introducción de dicha innovación, una veintena de alumnos con edades comprendidas entre los catorce y los quince años.

El juego, aunque de elaboración propia, ya que cada uno de los problemas planteados, han sido diseñados específicamente para la innovación, ha sido encontrado a través de búsquedas bibliográficas acerca de juegos educativos para aplicar a los estudios algebraicos. De entre todas las fuentes bibliográficas encontradas, finalmente se ha decidido coger la fuente bibliográfica que introduce “Juegos y Pasatiempos en clase de Matemáticas”, y en la que se encuentra dicho juego educativo. Aunque se han introducido algunas modificaciones en la metodología de uso en el aula, básicamente el juego se ha aplicado teniendo en cuenta la idea original. El juego se ha obtenido de García, 2012A, <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/juegos-quien-tiene-yo-tengo/>.

Se trata pues, de un juego para toda la clase, en el que se ha de repartir a cada alumno una carta o tarjeta. Las tarjetas están escritas por ambas caras. En una cara,

está la formulación de una pregunta que siempre comienza por “¿Quién tiene...?”, mientras que en el reverso se encuentra una solución del tipo “Yo tengo...”.

La metodología del juego es la que se explica a continuación.

Cada pregunta de una tarjeta tiene sólo una respuesta que aparece en el reverso de otra tarjeta. De este modo, cuando un alumno formule la pregunta de su tarjeta, todos los demás compañeros deben tener su tarjeta por el reverso (*Yo tengo*) y resolver la cuestión para ver si son ellos los que tienen la solución a la pregunta. El alumno que tenga en su tarjeta la solución, le dará la vuelta y formulará su pregunta, para que sucesivamente el resto de compañeros comprueben si son ellos o no, los que tienen dicha solución. La cadena se cierra cuando todos los alumnos hayan encontrado en sus tarjetas las soluciones a las preguntas que poseen en sus tarjetas, el resto de compañeros.

Es por lo tanto un juego que a pesar de ser aquí introducido con cuestiones algebraicas, puede ser utilizado para trabajar diversas cuestiones matemáticas. Asimismo, por su rapidez y efectividad puede introducirse en el aula como un recurso habitual.

En la tabla 1, se muestra los contenidos y actividades algebraicas que han sido formuladas en las tarjetas del juego. En la tabla, cada pregunta tiene a continuación en “Yo tengo...”, su respuesta. Sin embargo a la hora de diseñar las tarjetas, en cada una aparecerá una pregunta y una respuesta aleatoria, de forma que ninguna respuesta tenga en el reverso su solución, sino la solución que tiene otro compañero.

Asimismo, en las figuras 9 y 10, se muestran el diseño que tenían las tarjetas.

A continuación, se ha realizado otro cuestionario a los mismos alumnos de 3ºE.S.O E, para evaluar su grado de satisfacción tras la aplicación del juego educativo “Yo tengo...¿Quién tiene...?”. Dicho cuestionario, de elaboración propia, ha sido diseñado explícitamente para estudiar la valoración que los alumnos tienen del uso de juegos educativos para resolver y aclarar contenidos y problemas algebraicos. El cuestionario titulado “*El empleo de los Juegos Educativos en la resolución de problemas algebraicos*” ha tenido pues como ámbito de aplicación, los 20 alumnos del curso de 3ºE.S.O E que han jugado a dicho juego.

Es necesario destacar, que por el hecho de realizar un cuestionario sobre alumnos de 14 y 15 años de edad, ha sido elaborado para ser un cuestionario rápido e interactivo, donde el alumno debe valorar en una escala del 1 al 5, cuestiones que abordan el grado de satisfacción, la dificultad encontrada en el álgebra y su opinión sobre los juegos educativos como recurso educativo, entre otras.

El cuestionario realizado a los alumnos se muestra en el Anexo 2.

Tabla 1. Contenidos de las tarjetas del juego educativo “Yo tengo...¿Quién tiene...?”

¿Quién tiene...? (Pregunta)	Yo tengo... (Solución)
La fracción $\frac{x^2-1}{2x^2-4x+2}$ simplificada	$\frac{x+1}{2(x-1)}$
($18x^3-2x$) factorizado	$2x(9x^2-1)$
El MCD de (x^2-36) y $(x+6)$	$x+6$
El mcm de (x^2-2x+1) y (x^2-1)	$(x-1)^2(x+1)$
La fracción $\frac{x^2-4}{x+2}$ simplificada	$(x-2)$
El producto $(x+5)^2$	$(x^2+10x+25)$
El producto $(3x-2y) \cdot (3-2x+y)$	$9x-6x^2-6y-2y^2+7xy$
El mcm de $2(x-1)^2 \cdot (x+3)$ y $(x-1)$	$2(x-1)^2 \cdot (x+3)$
El cociente $(2x^2y+3y^2x):(xy)$	$2x+3y$
El resto de $(6x^4+5x^3-7x^2+2):(2x^2+3x-1)$	$-5x+3$
El cociente de $(2x^3-5x^2-30x+11):(x+3)$	$2x^2-11x+3$
El valor de k para que el resto de $(x^3-x^2+kx+1):(x-1)$ sea cero	-1
($2x^3+6x^2-26x-30$) factorizado	$2(x+1)(x-3)(x+5)$
El valor de “a” para que el polinomio (x^3+ax^2-x-a) se factorice como $x \cdot (x+1)(x-1)$	0
El valor de k para que el resto de $(x^3-4x+k):(x+3)$ sea cero	15
El resto de $(4x^3-7x^2-6):(x-2)$	-2
El producto $(3x+2)(3x-2)$	$(9x^2-4)$
El cociente de $(x^3+2x^2+x+3):(x-1)$	(x^2+3x+4)
El otro factor de (x^2+x-6) sabiendo que un factor es $(x-2)$	$(x+3)$
El valor de k para que el resto de $(2x^3+7x^2+kx+6):(x-1)$ sea 20	5
El valor de “a” sabiendo que el resto de dividir $(x^2-ax-2):(x-1)$ es 6 unidades inferior al obtenido de dividir $(x^2-ax-2):(x+5)$	-5
El valor de k para que $(2x^2+kx-15)$ sea divisible por $(x+5)$	7
(x^3+7x^2-x-7) factorizado	$(x-1)(x+1)(x+7)$
El producto $(x^5-3x^2+x-3) \cdot (x+2)$	$(x^6+2x^5-3x^3-5x^2-x-6)$

Elaboración propia

¿Quién tiene...?	Yo tengo...
El MCD de (x^2-36) y $(x+6)$	$(x+3)$
¿Quién tiene...?	Yo tengo...
El cociente de $(x^3+2x^2+x+3):(x-1)$	$(x-1)(x+1)(x+7)$
¿Quién tiene...?	Yo tengo...
El valor de k para que $(2x^2+kx-15)$ sea divisible por $(x+5)$	$2(x-1)^2 \cdot (x+3)$

Figura 9. Ejemplo de la forma de las tarjetas del juego “Yo tengo...¿Quién tiene...?”

(Elaboración propia)

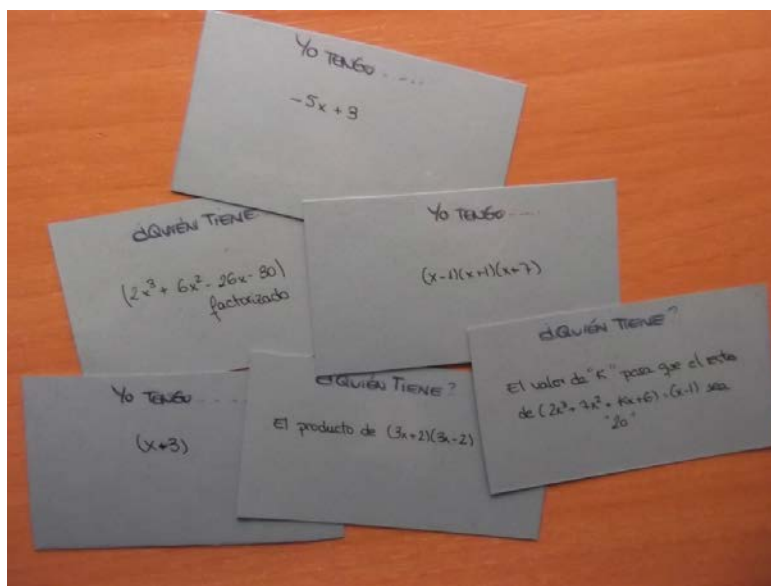


Figura 10. Segundo ejemplo de las tarjetas del juego “Yo tengo...¿Quién tiene..?”, obtenido mediante una fotografía de las tarjetas reales (Elaboración propia)

Contexto del estudio

El colegio San Vicente de Paul, sobre el que se ha realizado el estudio de campo, está situado en la Rambla de San Antón, en Cartagena, Murcia. Está dirigido por Hijas de la Caridad y es un centro cristiano de tipo concertado, que imparte enseñanza desde el 2º ciclo de Educación Infantil, (3 años), hasta Bachillerato. Como consecuencia, sus instalaciones se dividen en dos edificios fundamentales, el edificio de Educación Infantil y Primaria, y el de Educación Secundaria y Bachillerato.

Ningún aula del centro, tiene pizarra digital ni proyector, por lo que la forma de impartir clase es la tradicional, sobre libro y cuadernillo. Si se quiere introducir presentaciones power point, vídeos, las TIC o cualquier otro recurso educativo innovador, ha de trasladar a los alumnos al aula de informática, u otra aula con proyección y ubicación para ellos.

Para la introducción del juego educativo, no ha sido necesario trasladar a los alumnos de aula, únicamente se modificó la distribución de su clase, colocando a los alumnos con su pupitre y silla respectivamente, en el centro y formando un círculo.

2.3. Resultados y Análisis

Los resultados que se analizan a continuación son los obtenidos tras la realización de los cuestionarios descritos en los Anexos 1 y 2 del presente trabajo.

Según se ha descrito a lo largo de la fundamentación teórica, a pesar del conocimiento sobre la importancia histórica que tiene el juego en el proceso de

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y los beneficios y ventajas que tiene su empleo como mejora para reforzar contenidos teóricos, motivar y abordar dificultades en la resolución de problemas, los docentes no promueven su aplicación en el aula. Ni ellos, ni el propio sistema educativo se preocupa por formar a los docentes en el conocimiento de juegos educativos y establecer una sistemática para que éstos puedan poco a poco adentrarse como un recurso formador e innovador con el que trabajar.

Asimismo, el cuestionario 1, que investiga sobre los juegos educativos en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra, nos ha permitido corroborar y justificar las investigaciones descritas y realizadas. Los resultados obtenidos del cuestionario se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Resultados del cuestionario “Investigación sobre los Juegos Educativos en la Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra” realizado a 5 profesores de matemáticas del Colegio San Vicente de Paul

		DOCENTES				
		1	2	3	4	5
CUESTIONES	1	c	b	b	a	a
	2	c	a	a	c	c
	3	a	c	c	c	a
	4	a	a	b	a	a
	5	c	c	a	c	c
	6	a	b	c	b	a
	7	a	b	b	a	b
	8	c	b	a	a	c
	9	b	a	b	a	a
	10	b	a	b	a	a
	11	a	b	a	b	b
	12	b	b	a	c	c
	13	a	a	a	b	b
	14	b	b	c	b	b
	15	a	a	a	c	c
	16	c	c	c	d	c
	17	b	c	b	a	a

Elaboración propia

A continuación se analizan los resultados obtenidos en dicho cuestionario.

Con respecto a la pregunta 1 ¿Cuántos años lleva impartiendo Matemáticas en Educación Secundaria?, dos profesores tienen menos de cinco años de experiencia, dos tienen entre 5 y 10 años de experiencia y uno tiene más de 10 años de experiencia. En la pregunta 2, ¿Con qué cree que se mejorarían las dificultades en el estudio de las Matemáticas?, el 60% de los docentes piensan que hay que centrarse

en la realización de actividades y resolución de problemas, un 40% que se podrían abordar introduciendo mejoras educativas a través de recursos motivadores, y sin embargo ninguno cree que sea adecuado seguir introduciendo y reforzando contenidos teóricos.

En cuanto a la pregunta 3 ¿Qué estrategias emplean normalmente para su enseñanza en el aula?, dos profesores utilizan estrategias cooperativas y participativas en clase, ninguno hace uso de estrategias individuales únicamente y tres expresan que utilizan ambas estrategias grupales e individuales por igual. En la pregunta 4, ¿Qué estrategias emplea para realizar repasos de los conceptos aprendidos?, sólo un docente dice que utiliza autoevaluaciones por tema, mientras que el resto se sirve de resúmenes, esquemas, mapas conceptuales, etc.

Con respecto a la cuestión 5, ¿Qué recursos suele aplicar para realizar actividades y problemas?, el 80% de los docentes contestaron que emplean estrategias tradicionales, pizarra y/o cuaderno, frente al 20% que emplea otro tipo de recursos educativos a través de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

La cuestión 6, pregunta sobre ¿A qué cree que pueden ser debidas las dificultades en el Álgebra? Las opiniones acerca de sus causas son variadas, piensan que pueden ser debidas o a fallos en los conocimientos previos, a falta de reforzar contenidos teóricos o por desmotivación debido a la incomprensión de los contenidos, dos, dos y una persona respectivamente han sido las respuestas obtenidas. Los resultados se muestran en la figura 11.

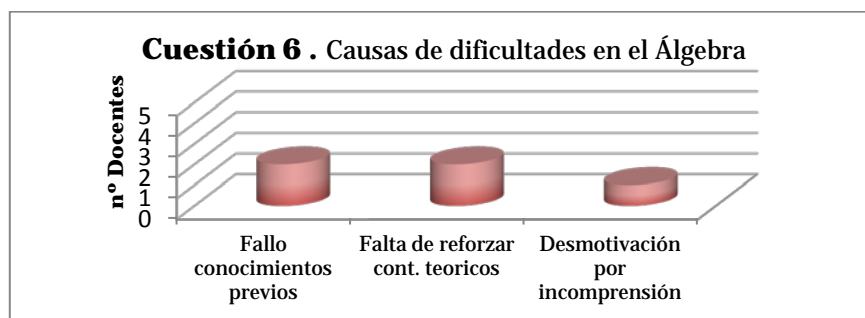


Figura 11. Gráfico de barras que muestra los resultados de la cuestiones 6.
 Cuestionario 1. (Elaboración propia)

Sin embargo, en la cuestión 7, ¿Qué estrategias y recursos emplearía para abordar las dificultades del Álgebra en 3º E.S.O?, el 60% piensa que es mejor enfrentarlas con refuerzos de actividades en clase y el 40% recordando conocimientos previos. Nadie cree que el obstáculo haya que enfrentarlo mediante aprendizajes individuales.

A vista de los resultados obtenidos, se observa que los docentes piensan que para abordar los obstáculos y errores en los estudios algebraicos y en general matemáticos, hay que enfatizar en la mayor resolución de problemas y actividades en clase, reforzando los contenidos teóricos según las necesidades y el ritmo de aprendizaje del aula. Sin embargo, frente al uso de recursos educativos innovadores y motivadores, creen que la mejor forma de hacerlo es a través de recursos tradicionales, libro, pizarra y cuadernillo, sin percatarse que dicha enseñanza puede no sólo originar la pérdida de interés por el estudio algebraico, sino no conseguir mejorar el aprendizaje ni abordar las dificultades originadas.

Centrando el estudio en el conocimiento y uso propiamente de los juegos educativos, los resultados obtenidos del cuestionario han sido los siguientes:

Con respecto a la pregunta 8 ¿Sabe qué son los Juegos Educativos, y fundamentalmente cuál es su función en el aula?, el resultado obtenido es que sólo un profesor lo desconoce, dos si sabe que son los juegos educativos, y otros dos conocen aproximadamente cuál es su función en el aula.

La pregunta 9 ¿Ha empleado un Juego Educativo para resolver actividades matemáticas?, ha arrojado los siguientes resultados: más de la mitad, no ha empleado nunca juegos educativos en clase de matemáticas. De hecho el 60% no conoce ningún juego educativo, tal y como demuestran los resultados obtenidos en la pregunta 10 ¿Cuántos juegos educativos conoce para emplear en la enseñanza del Álgebra? El 40% restante, ha empleado alguna vez los juegos para resolver actividades, pero su conocimiento ante este tipo de recursos es muy bajo, ya que conocen menos de cinco juegos educativos.

A pesar de ello, con respecto a la pregunta 11, ¿Cree qué el empleo de juegos educativos en matemáticas motivaría a los alumnos a estudiarlas?, el 40% piensa que sí, frente a un 60% que piensan que depende del tipo de juego y del alumno. Se debe al concepto que tienen de que los juegos educativos más que reforzar contenidos son un recurso de entretenimiento. De igual forma, sucede con la cuestión 12, ¿Cree qué el empleo de juegos educativos reforzaría y ayudaría a mejorar los aprendizajes del Álgebra?, el 40% opina que depende del alumno, otro 40% que sucede a veces y sólo el 20% está totalmente de acuerdo en que el empleo de los juegos ayuda a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra.

Con la cuestión 13, ¿Piensa que los juegos educativos son un recurso educativo e innovador para abordar y reforzar contenidos, o son únicamente un recurso de entretenimiento?, se ha obtenido que tres de los cinco profesores piensan que los juegos educativos sirven como recurso de refuerzo de contenidos, frente a dos, que creen que constituye un recurso para el entretenimiento.

La pregunta 14 requería información sobre si los docentes conocían el juego “Yo tengo..., ¿Quién tiene...? Ningún docente conoce el juego introducido en el presente trabajo como mejora educativa.

A continuación en la cuestión 15, se explica el objetivo y funcionamiento del juego “Yo tengo...¿Quién tiene...?”, y se pregunta si una vez conocido, ¿Piensa qué es un buen recurso para repasar actividades algebraicas? Tres docentes opinan que sí, mientras dos prefieren contestar una vez que lo realicen y comprueben sus resultados.

En la pregunta 16, ¿Piensa qué los juegos educativos son empleados en el aula?, la respuesta es rotunda, un 80% cree que casi nunca, y un 20% que nunca.

Finalmente, la cuestión 17 pregunta, ¿A qué cree que puede ser debido?, refiriéndose a ese poco uso de los juegos educativos en la vida diaria en el aula. Según los docentes encuestados, las causas de su falta de empleo, son muy variadas, por desconocimiento (según el 40% de los encuestados), por un erróneo concepto de su uso y aplicación, (según otro 40%), o porque hay otros recursos más formadores, (según el 20%). Estos resultados se pueden ver en la figura 12.

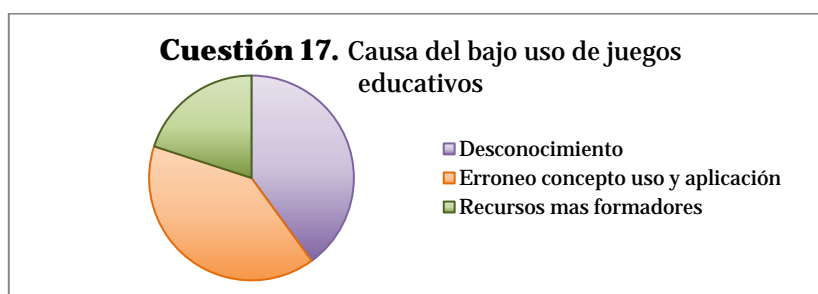


Figura 12. Gráfico de sectores que analiza los resultados de la cuestión 17 del cuestionario 1 (Elaboración propia)

A vista de los resultados obtenidos, se constata como el desconocimiento de los juegos educativos por los docentes es muy grande, además de ser un recurso no empleado en el aula. Los profesores, están acostumbrados a una metodología de enseñanza tradicional, y de cambiar su estrategia emplearían antes cualquier otro recurso educativo con el que piensan que no sólo están motivando y divirtiendo a los alumnos, sino reforzando y aprendiendo conocimientos.

Por lo tanto, la necesidad de cambiar la metodología de enseñanza y formar a los profesores en la importancia que tienen los juegos educativos en la mejora educativa, es una necesidad inmediata que los centros y el sistema educativo deben comenzar a promover.

Como medida para abordar este desconocimiento educativo de los juegos, se llevó a cabo la introducción de un juego algebraico en el aula de 3ºE.S.O, del Centro educativo San Vicente de Paul.

El juego educativo diseñado ha sido “Yo tengo..., ¿Quién tiene...?”, presentado en el apartado de materiales y métodos del presente trabajo.

Cuando se introdujo dicho juego en el aula, el primer impacto de los alumnos, fue reírse y manifestar su alegría por cambiar la forma de trabajar y desarrollar los problemas de los temas de polinomios y división de polinomios, mostrando un gran interés por realizar el juego, participar, ver su metodología y si éste les iba a servir para reforzar los conceptos aprendidos.






Una vez que comenzó a desarrollarse el juego, hubo algunos alumnos que mostraron su desagrado debido a las dificultades encontradas en la resolución de los problemas algebraicos planteados en las cartas. Sin embargo, debido a que las cuestiones iban siendo resueltas en la pizarra, cada vez los alumnos se encontraban más motivados y participativos para ver quién resolvía antes el ejercicio y verificaba en sus cartas la solución.

El resultado a nivel de enseñanza ha sido exitoso y ha ayudado a comprender la importancia de cambiar la metodología tradicional por nuevas estrategias de enseñanza que englobe el siguiente conjunto de beneficios.

- Desarrollar destrezas y habilidades en la resolución de problemas algebraicos.
- Motivar, y fomentar el interés por las matemáticas y el estudio del Álgebra.
- Abordar dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de los contenidos teóricos presentados en el tema, reforzando y recordando conocimientos.
- Trabajar las relaciones en el aula, cooperando en grupo y estableciendo una ayuda y enriquecimiento mutuo entre docentes y alumnos.

A nivel de alumnado, los resultados obtenidos tras la presentación de esta innovación educativa con el empleo del juego “Yo tengo...¿Quién tiene..?”, son los que se muestran sobre la tabla 3.

Tabla 3. Resultados del cuestionario 2

Nº respuestas	Muy Poco 	Poco 	Regular 	Mucho 	Demasiado 
¿El tema de polinomios y división de polinomios ha sido difícil de comprender?	3	10	8	3	
En general, ¿el álgebra te resulta difícil?		3	15	4	2
¿Crees que el juego te ha permitido aclarar y reforzar problemas del tema?		2	4	16	2
¿Crees que el juego se adapta a los contenidos del tema?	1	3	8	10	2
¿Te has divertido jugando y aprendiendo?			2	18	4
¿Ha sido difícil jugar?		8	13	3	
¿Crees que es cosa de niños jugar a este tipo de juegos educativos en 3º E.S.O?		1	14	5	4
¿Te ha motivado para estudiar álgebra?		2	5	17	

¿Te gustaría realizar un juego a la finalización de cada unidad?				14	10
Valora cuánto te ha gustado el juego		5	16	3	

Elaboración propia

Si se analizan gráficamente dichos resultados se obtienen la figura 13.

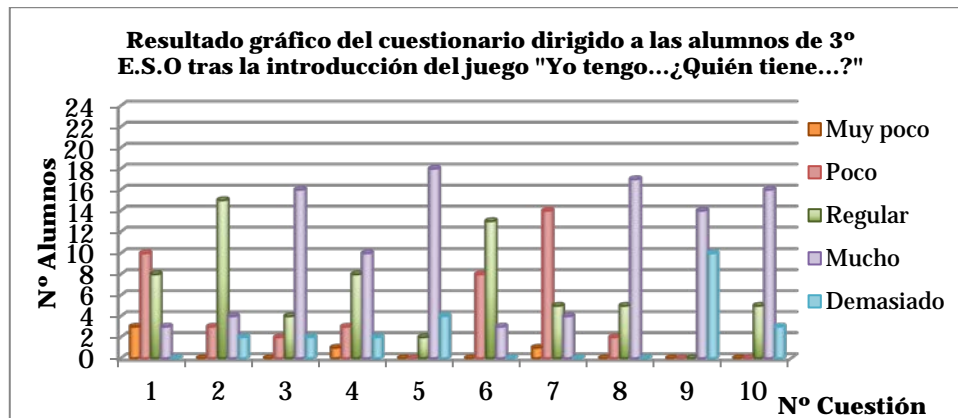


Figura 13. Gráfico de barras que muestra los resultados globales del cuestionario 2 (Elaboración propia)

Con respecto a la pregunta 1, ¿El tema de polinomios y división de polinomios ha sido difícil de comprender?, el 42% de los alumnos piensa que no es difícil, frente a un 33% que piensa que tiene un grado medio de dificultad según los contenidos que se aborden. El resto de alumnos, un 12,5% cree que es muy fácil, mientras que en la misma proporción el resto de compañeros lo han visto muy difícil. De igual forma se analizan los resultados de la pregunta 2, ¿El Álgebra te resulta difícil? Ante dicha cuestión, un 63% de los alumnos piensan que es un tema complicado de comprender, un 17% lo ven difícil y un 8% muy difícil. Por lo tanto, es un contenido sobre el que se debe fomentar el refuerzo y desarrollo de actividades complementarias y de ampliación, independientemente del recurso educativo que se emplee para ello.

Con respecto a la pregunta 3, ¿crees que el juego te ha permitido aclarar y reforzar problemas del tema?, el 66% piensa que mucho, el 17% que regular, y sólo el 8% que poco.

La pregunta 4, ¿Crees que el juego se adapta a los contenidos del tema?, ha obtenido como resultados, que solo 10 alumnos opinan que se adapta a los contenidos del tema, frente a 8 que opinan que más o menos, y sólo un alumno piensa que se adapta muy poco.

Posteriormente, la pregunta 5, ¿Te has divertido jugando y aprendiendo?, obtiene que aproximadamente el 75% de los alumnos se ha divertido jugando. Ello es debido a que más de la mitad de la clase piensa que jugar ha sido fácil, (pregunta 6 ¿Ha sido difícil jugar?).

La pregunta 7 ¿Crees que es cosa de niños jugar a este tipo de juegos educativos en 3º E.S.O?), muestra que el 21 % de los alumnos cree que es aconsejable usarlo en 3º E.S.O dependiendo del tipo de juego que se utilice, mientras que un 58% piensa que sí que es bastante aconsejable.

A partir de las siguientes cuestiones, comienzan las preguntas de motivación y valoración personal del juego.

Con respecto a la pregunta 8, ¿Jugar te ha motivado para estudiar Álgebra?, las respuestas han sido que el 70% de los alumnos si se encuentran motivados frente a un 8% que no lo está. La pregunta 9, analiza si les gustaría a los alumnos realizar un juego a la finalización de cada unidad. Los resultados corroboran que el empleo del juego ha sido bastante efectivo, ya que toda la clase está de acuerdo en la realización de un juego educativo a la finalización de cada unidad didáctica.

Finalmente la pregunta 10, analiza la valoración final del empleo del juego. Los resultados demuestran que al 80% de los alumnos les ha gustado mucho o demasiado haber jugado a “Yo tengo...¿Quién tiene...?”, frente a un pequeño número de cinco alumnos que les ha gustado de manera regular.

Los resultados de esta valoración final del juego educativo introducido se representan en la figura 14.

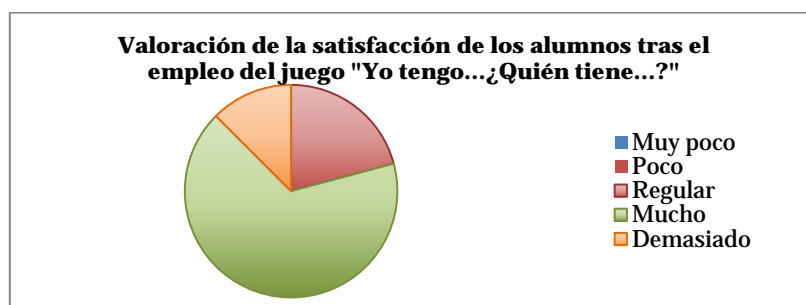


Figura 14. Gráfico de sectores que analiza los resultados de la cuestión 10 del cuestionario 2 (Elaboración propia)

Estos resultados indican que tanto desde el punto de vista docente como del alumnado, hay una gran necesidad de cambiar la metodología de enseñanza en el aula de matemáticas, de manera que a través de nuevos recursos educativos se consiga motivar al alumnado, fomentar su interés, sus habilidades, razonamientos y destrezas en la resolución de problemas, y se consigan abordar las dificultades y errores que ocasionan los conceptos algebraicos.

Los objetivos que se persiguen educativamente, se encuentran introduciendo los juegos educativos en el aula. Sólo falta que el docente abra el campo formativo y utilice este tipo de estrategias innovadoras para mejorar el proceso de aprendizaje y enseñanza del Álgebra.

3. Propuesta práctica

La propuesta que se plantea en el presente trabajo, conlleva la realización de un Taller de Álgebra, que le proporcione a los docentes un conjunto de juegos algebraicos para hacer en el aula de vez en cuando. Asimismo se pretende animar a los docentes a que lo realicen, ya que se ha corroborado que hoy por hoy es necesario cambiar la metodología de enseñanza, fomentando el interés por el estudio matemático, el trabajo cooperativo, y los juegos educativos como mejora educativa en la enseñanza del Álgebra.

El Taller de Álgebra se presenta para 3º E.S.O., y engloba cada una de las unidades didácticas que se presentan dentro del contenido algebraico.

Con dicho taller se pretenden conseguir los siguientes objetivos:

- Fomentar la motivación, interés, experimentación y reflexión para que los alumnos construyan sus propias ideas algebraicas.
- Estimular el aprendizaje basado en la investigación, selección y organización de las informaciones.
- Planificación de estrategias que creen un clima de clase activo, participativo y adaptado tanto a la realidad del aula, como a las necesidades individuales de cada uno de los alumnos.
- Que el alumno sea protagonista de su propio aprendizaje.
- Desarrollar destrezas y habilidades propias de los conceptos algebraicos.
- Hacer prácticos los conocimientos algebraicos aprendidos.
- Introducir el trabajo con materiales como un elemento habitual en clase.

Para lograr dichos objetivos, se divide el bloque de Álgebra en sus unidades didácticas correspondientes e ir estableciendo un taller para cada unidad, cada uno de ellos compuesto por una actividad lúdica empleando juegos educativos.

Todos los juegos desarrollados en los talleres son aconsejables realizarlos en la última sesión de dicha unidad o en medio de ella, para motivar a los alumnos y reforzar la asimilación de los conceptos aprendidos. Mediante la práctica de los siguientes juegos se pretende conseguir que los alumnos practiquen, de manera cooperativa, los conceptos matemáticos presentados en sus correspondientes unidades, así como contribuir al logro de las competencias básicas:

- Competencia matemática: potenciando el cálculo mental y desarrollando habilidad y destreza para solucionar ecuaciones de manera rápida y ágil.
- Social y ciudadana: interacción y cooperación entre alumnos, con un adecuado comportamiento en el contexto del juego y responsabilizándose del material facilitado para desarrollar el juego.

- Aprender a aprender: los juegos les permiten ser conscientes de los conocimientos adquiridos y estar motivados para afrontar nuevos aprendizajes.
- Autonomía e iniciativa personal: se les incita a ser responsables, perseverantes, a conocerse a sí mismos, aprender de forma autónoma, ser autocríticos, fomentar su autoestima, aprender de los errores, vencer obstáculos y asumir riesgos.

Los talleres desarrollados se presentan a continuación.

1. Taller de Álgebra bloque I. Tema Polinomios.

Para empezar se puede intentar este sencillo juego, que pretende reforzar el cálculo del valor numérico de un polinomio insistiendo en los casos que más les cuesta a los alumnos, la sustitución de valores negativos o fraccionarios en una incógnita. El objetivo del juego es que los alumnos averigüen y hallen la solución del misterioso dibujo que se esconde en la figura 15 y que determina que es lo que está soñando el niño.

El juego consiste en la presentación de varios polinomios, de distinto grado, dónde los alumnos han de sustituir sus valores numéricos para $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=-1$, $x=-2$; $x=1/2$. Según el resultado de sustituir y fijándose en el dibujo de los globos de la figura 16, donde cada resultado tiene un color distinto, han de elegir el adecuado color a su solución. Cada uno de los colores y resultados obtenidos han de pintarse sobre el dibujo de la figura 15, de forma que al final, si todos los cálculos realizados han sido correctos, los alumnos podrán descubrir de que se trata el dibujo misterioso que tenían que resolver.

Los polinomios presentados son los siguientes: $P1(x) = -x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$, $P2(x) = 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x + 3$, $P3(x) = -3x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x - 4$.

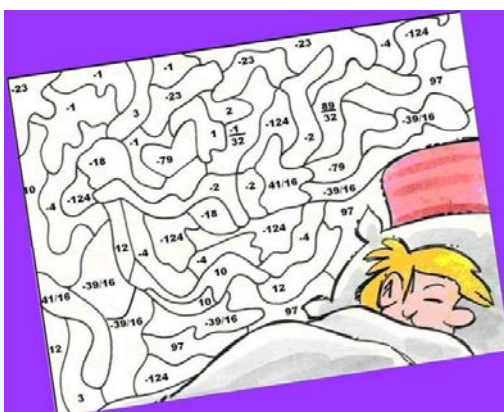


Figura 15. Sueño a descubrir tras la resolución polinómica del Taller de Álgebra 1. (García, 2012B, <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2012/10/30/el-dibujo-misterioso-valor-numerico-de-un-polinomio/>)

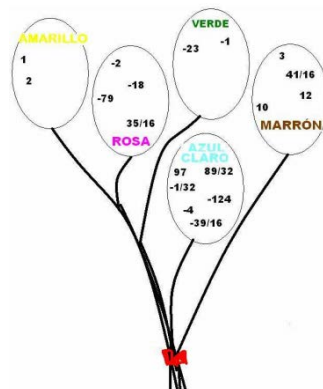


Figura 16. Globos que marcan los colores en las soluciones de sustitución polinómica (García, 2012B,

<http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2012/10/30/el-dibujo-misterioso-valor-numeric-de-un-polinomio/>)

2. Taller de Álgebra bloque II. Tema División de polinomios, raíces.

Como juego para el bloque de división de polinomios y raíces se va a emplear el juego educativo “Yo tengo...¿Quién tiene...?” diseñado y explicado en el apartado de materiales y métodos del presente trabajo. Con dicha actividad se consiguen abordar todos los contenidos desarrollados en dicha unidad, multiplicación de polinomios, división, factorización, el teorema del resto, el teorema del factor y la regla de ruffini. Es la mejor actividad lúdica que se puede presentar y establecer como refuerzo, motivación y asimilación de los conocimientos estudiados en este tema.

3. Taller de Álgebra bloque III. Tema Ecuaciones, sistemas de ecuaciones.

Este juego persigue conseguir que los alumnos practiquen de manera cooperativa los objetos matemáticos estudiados en la unidad; resolución de ecuaciones de primer grado, de segundo grado y sistemas de ecuaciones.

Es un dominó algebraico, que se van a encargar de construir los propios alumnos con las indicaciones del docente.

En primer lugar el aula se divide en grupo de cinco. Para el diseño de las fichas de dominó el docente presentará ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones. Algunas de ellas deben ser análogas para que las fichas de dominó puedan unirse unas con otras. A continuación se entregan dichas ecuaciones a los alumnos para que estos las resuelvan. Una vez resueltas, comienzan a construir sus fichas, colocando en una lado de la ficha la ecuación y en otro la solución obtenida. Cuando terminen de construir sus fichas podrán comenzar a jugar.

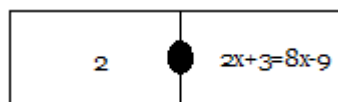


Figura 17. Forma de las fichas del dominó (Elaboración propia)

4. Conclusiones

Las conclusiones obtenidas en el presente trabajo con respecto a los objetivos específicos planteados son:

1. Se han estudiado las dificultades en el aprendizaje del Álgebra, y se ha corroborado que sus causas son variadas, desde la dificultad en los conceptos y contenidos algebraicos, las características personales del alumno, así como la metodología y organización de estrategias educativas que el docente plantea. A la vista de ello, se ha analizado como la mejor metodología de enseñanza es aquella que utiliza estrategias, formas de trabajo, materiales, y contextos de estudio variados, de forma que se pueda conectar en un momento u otro con el mayor número de alumnos.

2. Se ha constatado que tres son los aspectos fundamentales a considerar: lo que el alumno experimenta por sí mismo, que los contenidos deben mostrar funcionalidad y que deben relacionar nuevos conceptos con los anteriormente adquiridos. Se consigue introduciendo en el estudio del Álgebra, estrategias de motivación, autoestima o valoración personal y estrategias innovadores mediante el empleo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación y los juegos educativos.

3. Se ha justificado a continuación como los juegos educativos, son el recurso adecuado para abordar las dificultades en el estudio del Álgebra, reforzar contenidos aprendidos y motivar al alumno en la enseñanza de una asignatura que les cuesta y les produce en ocasiones rechazo.

4. Para ello se ha introducido una mejora educativa con la introducción de un juego educativo llamado “Yo tengo...¿Quién tiene...?” estudiando cuál es la valoración de aplicar un juego de este tipo en un aula de 3ºE.S.O. Los resultados obtenidos han podido constatar una satisfacción y opinión positiva en más del 80% de la clase. No sólo les ha gustado jugar, sino que piensan que es un buen método para reforzar contenidos, les ha motivado a continuar aprendiendo temas algebraicos y les gustaría que a la finalización de cada tema se realizase una actividad de este tipo.

5. De igual forma, tras el cuestionario realizado a los profesores que imparten matemáticas en Educación Secundaria se ha justificado el poco o ningún conocimiento que tienen los docentes sobre el empleo de juegos educativos. No sólo no conocen juegos a emplear, sino que no saben cuáles son sus beneficios y ventajas educativas. Sin embargo, sí que se ha confirmado cómo todos piensan que la mejor forma de abordar las dificultades y errores en los contenidos algebraicos es a través

de la mayor realización de actividades y resolución de problemas, sea cuáles sean las estrategias y recursos a emplear para realizarlas.

En resumen, los resultados determinan que el uso de juegos en el aula es un tema tabú, conocido a nivel general, pero totalmente desconocido como recurso educativo. Hay por lo tanto una necesidad innata que tanto el sistema educativo como los docentes cambien su concepto de enseñanza y comiencen a promover otro tipo de metodología distinta a la tradicional, dónde el alumno entienda que el estudio que realiza tiene una aplicación real, que sirve para desarrollar estrategias y habilidades prácticas y que él es el objetivo principal del cambio educativo que se ha de promover, estableciendo nuevas metodologías de enseñanza que aborden las dificultades educativas, fomenten el interés en el aprendizaje y en definitiva mejoren la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

5. Líneas de Investigación Futuras

El presente trabajo propone como futura línea de investigación la introducción de los juegos educativos como mejora en la enseñanza de la Probabilidad en Educación Secundaria. La Probabilidad, aspecto inherente en multitud de situaciones cotidianas (Bennet, 1998), es la ciencia que determina cuantitativamente la posibilidad que un determinado suceso o experimento tiene de suceder. Es por lo tanto, una ciencia incierta, y posiblemente la rama de las matemáticas que más aplicaciones reales y uso diario en la sociedad tiene.

Sin embargo, no es ningún secreto que el último bloque de matemáticas en casi todos los cursos de Educación Secundaria es Estadística y Probabilidad y que, desgraciadamente, en la mayoría de los casos no se llega a esta última parte de estudio en casi ningún curso. Ello provoca, que los alumnos acaben la etapa de educación obligatoria con unos conceptos y contenidos muy básicos en estas aplicaciones matemáticas.

Asimismo, si esos conocimientos probabilísticos van a ser por cuestión de tiempo, mínimos y básicos, se ha de procurar que al menos sean introducidos de forma más experimental y útil, proporcionando a los alumnos un instrumento de orientación ante una situación real de incertidumbre. Se defiende así, la necesidad de reforzar la formación y razonamiento probabilístico mediante juegos de azar, que hagan a los alumnos ver su utilidad práctica a la vez que se divierten y “enganchan” por este tipo de juegos. Todo ello, puede ser introducido con preguntas tipo, ¿quién no se ha preguntado alguna vez qué juego ofrece más oportunidad de ganar dinero, la lotería o las quinielas?, ¿por qué para ganar al Monopoly es mejor hacerse con las casillas de color naranja?, y otras preguntas que hagan a los alumnos comprender, que jugar con la probabilidad es a la vez, entretenido y útil para la vida, ya que como decía Haigh (2003) , “*una escasa comprensión de la probabilidad puede ser el obstáculo principal para la cultura científica*”.

6. Bibliografías

6.1. Referencias

- Abrate, R.D., Pochulu, M.D. y Vargas, J.M. (2006). Errores y dificultades en Matemáticas. *Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Internacional de Villa María.
- Anglin, W.S. (1994). *Mathematics: A concise History and Philosophy*. Undergraduate Text in Mathematics. New York: Sprienger.
- Baroody, A.J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor/Mec.
- Bennet, D.J. (1998). *Randomness*. New York: Cambridge University Press.
- Borassi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Leaming of Mathematics*, 7(3), 2-8.
- Booth, L.R. (1983). *A diagnostic teaching programme in elementary algebra: Results and implications en Hershkowitz*, 307-312.
- Booth, L.R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: Nfer-Nelson.
- Booth, L.R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En Coxford A.F. (eds.), *The Ideas of Algebra* (pp. 20-32). Reston:VA- NCTM.
- Brousseau, G., Davis, R. y Werner, T. (1986). Observing students at work. En Christiansen B., Howson A.G. y Otte M. *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- CENAMEEC. (1998). *Carpeta de matemática para docentes de Educación Básica*, 1 (2). Caracas.
- Contreras, M. (1993). Capítulo 8: Las matemáticas de E.S.O y Bachillerato a través de los juegos. Juegos algebraicos. En Azarquiel, G. (33ªEd.), *Ideas y actividades para enseñar álgebra* (pp. 151-198). Madrid: Síntesis.
- Cortes, A., Vergnaud, G. y Kavafian, N. (1990). *From Arithmetic to Algebra: negociating a jump in the learning process*, 2, 27-34. Proceedings of de 14th PME Conference.
- Del Puerto, S.M., Minnaard, C.L. y Seminara S.A. (2005). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*. Argentina.
- Filloy, E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 11 (2), 160-166.

- Filloy, E. y Rojano, T. (1985). Obstructions to the acquisition of elementary algebraic concepts and teaching strategies. En Streefland (pp. 154-158).
- Gardner, M. (1975). *Carnaval Matemático*. Madrid: Alianza Editorial.
- Gairin, J.M. (1990). *Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas*, 17, 105-118. Zaragoza: Educar.
- García, A. (2012A). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*. Recuperado de <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/juegos-quien-tiene-yo-tengo/>
- García, A. (2012B). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*. Recuperado de <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2012/10/30/el-dibujo-misterioso-valor-numerico-de-un-polinomio/>
- García, A. (2013A). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*. Recuperado de <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/category/algebra/>
- García A. (2013B). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*. Recuperado de <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2013/02/20/lecciones-elementales-de-algebra-de-sam-loyd-los-pasatiempos-de-balanzas-de-de-tirar-la-cuerda/>
- García, A. (2013C). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*. Recuperado de <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2013/01/05/la-clave-de-la-caja-fuerte-sistemas-de-ecuaciones-en-forma-de-pasatiempos/>.
- García, A. (2013D). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*. Recuperado de <http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2012/12/25/otro-puzzle-numerico-el-suko-nivel-i/>.
- García, A. (2013E). *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*. Recuperado de <http://anagarciaazcarate.files.wordpress.com/2012/08/panalalgebraicoprofe.pdf>
- García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura*. (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Proyecto Edumat-Maestros.
- Guzmán, M. (1984). *Juegos Matemáticos en la enseñanza*. Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.
- Guzmán, M. (1989). Juegos y Matemáticas. *Revista SUMA*, n.4, 61-64.
- Guzmán, M. (1998). *Polivalencia de la Matemática: ciencia, técnica, arte, juego, filosofía...* (pp. 235-245). Real Academia de las Ciencias.
- Haigh, J. (2003). *Matemáticas y juegos de azar: jugar con la probabilidad*. Barcelona: Tusquets.

- Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*, 73, 572-580.
- Inbar, M. y Stoll, C.S. (1970). Games and learning. *Interchange*, 1, 53-61.
- Iztúriz, A., Tineo, A., Barrientos, Y., Ruiz, S., Pinzón, R., Montilla, J., Rojas, M., Leardi, M. y Barreto, J. (2006). *El juego instruccional como estrategia de aprendizaje sobre riesgos socio-culturales*. Caracas.
- Kaput, J. (1995). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers Mathematics. Boston.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229-240.
- Kieran, C. (1989). *The early learning of algebra: a structural perspective*, 33-56.
- Küchemann, D. (1981). *Álgebra*, 102-119.
- Olfos, R. y Villagrán, E. (2001). *Actividades lúdicas y juegos en la iniciación al álgebra*. Universidad de la Serena, Chile.
- Piaget, J. (1985). Seis estudios de psicología. *Obras Maestras Del Pensamiento Contemporáneo*. México: Artemisa, S.A.
- Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, 1 (1).
- Rico, L. (1995). Capítulo 3: Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas (pp. 69-108). *Educación Matemática*. Méjico: Editorial Iberoamérica.
- Salvador, A. (2012). *El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas*. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.
- Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.
- Socas, M. (1997). Capítulo 5: Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Vergnaud, G., Cortes, A. y Favre, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles: problèmes épistémologiques et didactiques. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 259-279. Actes du colloque de Sèvres.
- Winter, S. y Ziegler, P. (1983). *Introducción al juego de los conjuntos*. Madrid: Interduc-Schroedel.

6.2. Bibliografía complementaria

- Bravo, C., Márquez, H. y Villarroel, F. (2009). Los juegos como estrategia metodológica en la enseñanza de la geometría, en estudiantes de séptimo grado de educación básica. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 13 (1). Recuperado de <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>.
- Caillois, R. (1986). *Clasificación de juegos, en los juegos y los hombres*. México.
- CENAMEC. (2001). *Encuentro compartiendo experiencias en las áreas de matemáticas y ciencias de la naturaleza*. Ministerio de Educación. Caracas.
- Font, V. (1994). *Motivación y Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas*, 17, 10-6. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=148073>
- Gadner, M. (1979). *Circo Matemático*. Madrid: Alianza Editorial.
- Ivan, J. (2012). Ventajas e Inconvenientes del uso de juegos en Educación. *Juegos en Educación*. Recuperado de <http://masqueclases.com/blog/ventajas-e-inconvenientes-del-uso-de-juegos-en-educacion/>
- Nevado, C. (2008). El componente lúdico en las clases de ELE. *Revista de Didáctica ELE*, 7.
- Palencia, A. y Talavera, R. (2004). Estrategias innovadoras para la comprensión del lenguaje matemático. *Revista Ciencias de la Educación*, 1 (23) 47-60.
- Rico, L. y Castro, E. (1994). *Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico*. Recuperado de http://ddm.ugr.es/gpnumerico/numerico_es.html.
- Santos, Ch. (2007). *La aplicación de los juegos didácticos en la práctica docente del aula*. Recuperado de <http://chiarasantos.galeon.com/index.html>
- Seminara, S.A. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*.
- Socas, M. (2011). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria*, 7, 5-34. Recuperado de <http://www.sinewton.org/numeros>.
- Vygotsky, L. S. (1997). El papel del juego en el desarrollo del niño. *Revista de educación física: Renovar la teoría y práctica* (pp. 5-11).

Anexos

Anexo 1. Cuestionario 1: Investigación sobre los Juegos Educativos en la Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra

INVESTIGACIÓN SOBRE LOS JUEGOS EDUCATIVOS EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

“Cuestionario dirigido a profesores de Matemáticas que imparten clase en los cursos de Educación Secundaria”.

Autor: Concepción Solano Lorente

Lugar: Colegio San Vicente de Paul, Cartagena, Murcia.

Fecha: 20 de Marzo de 2013

El cuestionario consta de 17 preguntas, a elegir una sola opción. Para cumplimentarlo cuenta con una duración de 15 a 20 minutos y debe marcar con una cruz encima del cuadro de cada opción.

1. ¿Cuántos años lleva impartiendo Matemáticas en Educación Secundaria?

- a) < 5 años
- b) Entre 5 y 10 años
- c) > 10 años

2. ¿Con qué cree que se mejorarían las dificultades en el estudio de las Matemáticas? Con....

- a) Recursos Educativos motivadores
- b) Estudio a fondo de conocimientos y contenidos teóricos
- c) Mayor resolución de problemas y actividades

3. ¿Qué estrategias emplea normalmente para su enseñanza en el aula?

- a) Cooperativas y participación del grupo clase
- b) Individuales y/o de aprendizaje autónomo
- c) Ambas por igual

4. ¿Qué estrategias emplea para realizar repasos de los conceptos aprendidos?

- a) Esquemas, resúmenes, etc.
- b) Autoevaluaciones continuas
- c) Tic's y Juegos Educativos

5. ¿Qué recursos suele aplicar para realizar actividades y problemas?

- a) Tic's
- b) Juegos Educativos
- c) Pizarra y/o cuaderno

6. ¿A qué cree que pueden ser debidas las dificultades en el Álgebra?

- a) Fallo en los conocimientos previos
- b) Falta de reforzar contenidos teóricos
- c) Desmotivación de los alumnos debido a incomprensión de los contenidos

7. ¿Qué estrategias y recursos emplearía para abordar las dificultades del Álgebra en 3º E.S.O?

- a) Recordatorio de conocimientos previos
- b) Refuerzo de actividades al conjunto clase
- c) Separar el aula en alumnos con dificultades, alumnos sin dificultades y realizar aprendizajes individuales

8. ¿Sabe que son los Juegos Educativos, y fundamentalmente cuál es su función en el aula?

- a) Sí
- b) No
- c) Aproximadamente

9. ¿Ha empleado alguna vez un Juego Educativo para resolver actividades matemáticas?

- a) No, nunca
- b) Alguna vez
- c) Frecuentemente

10. ¿Cuántos Juegos Educativos conoce para emplear en la enseñanza del Álgebra?

- a) Ninguno
- b) < de 5
- c) > de 5

11. ¿Cree que el empleo de Juegos Educativos en Matemáticas motivaría a

los alumnos a estudiarlas?

- a) Siempre
- b) Según el tipo de juego
- c) Nunca

12. ¿Cree que el empleo de Juegos Educativos reforzaría y ayudaría a mejorar los aprendizajes del Álgebra?

- a) Sí, totalmente
- b) A veces
- c) Depende del Alumno
- d) No

13. ¿Piensa que los Juegos Educativos son un recurso educativo e innovador para abordar y reforzar contenidos, o son únicamente un recurso de entretenimiento?

- a) Reforzar contenidos
- b) Entretenimiento

14. Conoce el Juego “Yo tengo...¿Quién tiene...?”

- a) Sí
- b) No
- c) Sólo he oído hablar de él

(Contesta esta pregunta si has contestado en la pregunta 15 la opción “b” o “c”)

15. El juego “Yo tengo...¿Quién tiene...?” es un juego de cartas encadenadas dónde cada alumno en su carta tiene en un reverso un problema matemático y en el otro la solución a otro problema. El juego comienza con la pregunta de un alumno para ver quién tiene la solución a su problema, todo el grupo ha de resolverlo y decir si tiene la solución. A su vez este formulará su pregunta, etc., hasta terminar la cadena con la participación de todos los alumnos. Sabiendo ahora su metodología, ¿piensa que es un buen recurso para repasar actividades algebraicas?

- a) Sí
- b) No
- c) Puede ser, tendría que comprobarlo

16. A nivel general, ¿piensa que los Juegos Educativos son empleados en el aula?

- a) A menudo
- b) Alguna vez

- c) Casi nunca
- d) Nunca

(Contesta esta pregunta si has contestado en la pregunta 17 la opción “c” o “d”)

17. ¿A qué cree que puede ser debido?

- a) Desconocimiento
- b) Erróneo concepto de uso y aplicación
- c) Porque hay otros recursos más formadores

** Gracias por participar el en estudio para establecer mejoras educativas en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en Educación Secundaria*

Anexo 2. Cuestionario 2: El empleo de los Juegos Educativos en la Resolución de Problemas Algebraicos

EL EMPLEO DE LOS JUEGOS EDUCATIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS






“Cuestionario dirigido a alumnos de 3ºE.S.O”.

Autor: Concepción Solano Lorente

Lugar: Curso 3ºE.S.O. E. Colegio San Vicente de Paul, Cartagena, Murcia.

Fecha: 20 de Marzo de 2013

El cuestionario consta de 10 preguntas que miden el grado satisfacción tras realización del juego realizado. Para cumplimentarlo cuenta con una duración de 10 minutos y debe marcar con una cruz en el cuadro de cada opción.

	Muy Poco 	Poco 	Regular 	Mucho 	Demasiado 
¿El tema de polinomios y división de polinomios ha sido difícil de comprender?					
En general, ¿el álgebra te resulta difícil?					
¿Crees que el juego te ha permitido aclarar y reforzar problemas del tema?					
¿Crees que el juego se adapta a los contenidos del tema?					
¿Te has divertido jugando y aprendiendo?					
¿Ha sido difícil jugar?					
¿Crees que es cosa de niños jugar a este tipo de juegos educativos en 3º E.S.O?					
¿Te ha motivado para estudiar álgebra?					
¿Te gustaría realizar un juego a la finalización de cada unidad?					
Valora cuánto te ha gustado el juego					