UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA unir

Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Trabajo fin de máster

Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas en ESO y Bachillerato. Análisis de un caso práctico.

Presentado por: Ángel Fernández Lázaro
Línea de investigación: Métodos pedagógicos
Director/a: Javier Fondevila Gómez

Ciudad: Madrid
Fecha: 4 de abril de 2013

ÍNDICE

1. Resumen/abstract

La asignatura de matemáticas ha sido tradicionalmente una de las materias más complicadas para los estudiantes españoles, como demuestran tanto los resultados obtenidos en pruebas internacionales de nivel a lo largo de los años como la propia percepción de profesores y alumnos. Parece lógico y necesario, por tanto, preguntarse por las razones que explican la resistencia que esta materia ofrece a su comprensión y aprendizaje por parte de nuestro alumnado. En este trabajo se identifican y clasifican las dificultades y errores más habituales que los alumnos encuentran en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato y se proponen algunas actividades que pueden servir para minimizarlas en un caso concreto. Para ello, en primer lugar se ha realizado una investigación bibliográfica a partir de la cual se ha redactado un breve estado del arte sobre la cuestión que ha llevado a una primera clasificación de las dificultades más frecuentes. En segundo lugar, se ha recogido la experiencia del profesorado mediante la realización de un cuestionario en tres centros educativos de la Comunidad de Madrid, comparando los resultados con los extraídos de la investigación bibliográfica. Posteriormente se han analizado y clasificado las dificultades detectadas durante el trabajo de una unidad didáctica de introducción al cálculo diferencial en un aula concreta de 1º de Bachillerato en un instituto de Madrid y se han comparado los resultados con los obtenidos en las fases anteriores descritas. Finalmente se han propuesto algunas actividades y metodologías novedosas con el objeto de mejorar el tratamiento de las dificultades en el contexto concreto del aula mencionada.

Palabras clave: *dificultades, errores, matemáticas, secundaria, bachillerato, estado del arte, profesores, alumnos, cuestionario, actividades de mejora.*

Mathematics has traditionally been one of the most complex subjects to Spanish students, according to the results of several international level tests through the years, as well as the perception of students and teachers. Therefore, enquiring into the reasons of the resistance this subject presents to the understanding and learning of our students seems to be reasonable and necessary. In this essay difficulties and common errors that students of Secondary School encounter in learning mathematics are identified and classified, and improvement activities that can help to minimize them are proposed in a particular case. To do this, first a literature review has been carried out, from which a brief state of the art has been written up leading to a first classification of the most frequent difficulties. Second, the teacher's experiences have been collected by conducting a questionnaire in three schools in the Madrid region, comparing the results with those drawn from the literature review. Subsequently, the most common difficulties identified during the teaching of a topic on the introduction to differential calculus in a specific course in a secondary school in Madrid have been analyzed and classified, and the results have been compared with those obtained in the previous phases. Finally some original activities and methodologies have been proposed in order to improve the treatment of the difficulties in the particular context of this course.

Keywords: *difficulties, errors, mathematics, secondary school, state of the art, teachers, students, questionnaire, improvement activities.*

2. Introducción

No es ningún secreto que las matemáticas han tenido y tienen fama de ser una de las asignaturas más difíciles del currículo, cuando no la más complicada. Esta imagen de "asignatura hueso" se alimenta de los malos resultados tradicionalmente obtenidos por los estudiantes en la materia, tanto en las pruebas de evaluación corrientes como en los estudios comparativos que en los últimos tiempos se vienen haciendo en el marco del sistema educativo de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). El informe PISA 2009, que evalúa el rendimiento educativo de los alumnos de 15 años de un modo comparativo, sitúa a España por debajo de los resultados de la media de la OCDE en competencia matemática (Instituto de Evaluación del Ministerio de Educación, 2010). Más recientemente, el estudio realizado en 2011 por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA) con alumnos de 4º curso de Primaria confirma estos resultados, situando a España por debajo de la media de la OCDE en matemáticas con una puntuación de 482 puntos, que supera por muy poco los 475 puntos que el mismo estudio establece como frontera entre los niveles bajo e intermedio (Instituto Nacional de Evaluación Educativa del Ministerio de Educación, 2012). Una conclusión inquietante de este último estudio es la precocidad con la que aparecen las dificultades en matemáticas en los alumnos españoles.

Por otro lado, esta situación no es nueva ni reciente, y no parece adecuado asociarla a un modelo educativo concreto de entre los muchos que han propiciado los constantes cambios en las leyes educativas españolas. Si echamos un vistazo algunos años atrás y siguiendo a Ángel Riviére, que recoge un estudio de 1989 elaborado por Lapointe, Mead y Phillips y adaptado por el Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE), el 43% de los alumnos de 13 años no superaban el umbral mínimo de conocimientos y habilidades matemáticas que se consideraban necesarias al finalizar el periodo de escolarización obligatoria (Rivière, 1990).

A la vista de estos resultados es necesario preguntarse por las razones de tales actitudes negativas, frustraciones, problemas y malos sentimientos ante una asignatura que, para aquellos que se sienten atraídos por ella, está llena de belleza y exactitud, de retos y motivaciones, de aplicaciones prácticas y de futuro. ¿Por qué ofrecen tanta resistencia las matemáticas a su comprensión y aprendizaje por parte de nuestros alumnos? ¿Qué estamos haciendo mal? ¿Es una cuestión inherente a la naturaleza particular de la materia o más bien se debe a errores estructurales, metodológicos o curriculares? ¿Es tal vez un problema de capacidad del alumnado o de preparación del profesorado? ¿Cuáles son las dificultades más comunes que los estudiantes encuentran en las matemáticas y cómo respondemos a ellas? ¿Cómo podemos mejorar la enseñanza de las matemáticas en Secundaria y Bachillerato para que la actitud hacia la asignatura cambie, los resultados mejoren y el aprendizaje se produzca de forma efectiva?

Responder a todas estas preguntas de forma satisfactoria es una ardua tarea que excede el objeto de este trabajo. Si pudiéramos hacerlo, de hecho, tendríamos resuelto el problema de la asignatura de matemáticas, cuestión que otras personas más sabias y con más experiencia no han logrado aún. Sin embargo, es posible reflexionar sobre las dificultades más habituales en el aprendizaje de las matemáticas en Secundaria y Bachillerato a partir de la experiencia de estudiosos y educadores, contrastar este saber acumulado con experiencias de campo concretas e imaginar posibles soluciones y mejoras sobre un caso determinado que lleven a los alumnos a un mayor aprovechamiento de la asignatura y a un mejor y más completo aprendizaje.

3. Objetivos, fuentes y metodología de la investigación

A continuación se expone el objetivo general de este trabajo, que a su vez se concreta en otros objetivos más específicos, y se enumeran las fuentes de las que se nutre la investigación realizada justificando su utilidad y validez.

3.1 Objetivos

Siguiendo con lo expuesto en la introducción, el objetivo general de este trabajo es identificar algunas de las dificultades y los errores que los alumnos de Educación Secundaria y Bachillerato encuentran más frecuentemente en el aprendizaje de las matemáticas, tratando de clarificar sus causas y motivaciones y de proponer, en último término, algunas líneas de mejora que ayuden a evitar o paliar en la medida de lo posible dichas dificultades.

Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- Realizar una revisión bibliográfica que permita conocer cuál es el tratamiento y qué línea ha seguido en los últimos años la reflexión sobre las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas en el ámbito educativo. Mediante esta revisión del estado de la cuestión se pretende construir un marco teórico en el que situar el resto de elementos de la investigación.

- Recoger, sintetizar y analizar las opiniones de los docentes sobre las dificultades más habituales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, extrayendo conclusiones sobre ellas y relacionándolas con el marco teórico anteriormente descrito.

- Analizar las dificultades y errores detectados en un grupo de alumnos determinado durante el aprendizaje de un tema concreto (la introducción al cálculo diferencial y a las derivadas) durante mi experiencia de intervención en un centro como parte de las prácticas necesarias para realizar este máster. Ponerlas en relación con las conclusiones extraídas del marco teórico y de las opiniones de los profesores de matemáticas.

- Proponer algunas mejoras a través de actividades concretas aplicadas al caso que ha sido objeto de mi intervención.

3.2 Fuentes

Para desarrollar el trabajo y conseguir los objetivos específicos enumerados arriba se ha recurrido a diversas fuentes como son la investigación bibliográfica y los trabajos de campo a través de cuestionarios, pruebas de evaluación y observación directa.

En primer lugar se ha realizado una **investigación bibliográfica** para situar la cuestión y crear un marco de referencia dentro del que fuera posible reflexionar, comparar, tomar decisiones, analizar y sacar conclusiones. La importancia de la revisión bibliográfica es fundamental en cualquier trabajo de investigación, ya que antes de empezar a desarrollar cualquier idea nueva es necesario conocer el estado de la cuestión en ese momento, quién lo ha estudiado anteriormente, desde qué enfoques, aplicado a qué casos, con qué conclusiones, etc. La investigación bibliográfica ayuda a situar la investigación, a definir el punto de partida y a concretar sus objetivos.

Posteriormente, y con el fin de contrastar las conclusiones extraídas de ese marco teórico, se ha recurrido a recabar la **opinión de los profesores de matemáticas** utilizando para ello un cuestionario diseñado a tal efecto. Si las referencias bibliográficas son importantes para situar la investigación, no lo es menos el trabajo de campo para contrastar la teoría con lo que sucede en la práctica diaria en la que se mueve el docente.

Por último, la presente investigación bebe de una tercera fuente más concreta si cabe: **mi propia experiencia en el centro** en el que, durante algo más de dos meses, he desarrollado mis prácticas como docente. Si algo se puede concluir del marco teórico y de las experiencias de los profesores de matemáticas es que muchos de los problemas que los alumnos encuentran en la asignatura, y por tanto también sus posibles soluciones, dependen en gran medida del contexto en el que el proceso de enseñanza y aprendizaje tiene lugar. Por tanto, se ha considerado que para que el desarrollo de este trabajo fuera completo y las propuestas de mejora cobrasen mayor sentido, era necesario situarlas en una realidad lo más concreta posible, en este caso, el centro en el que he realizado el prácticum, el grupo con el que he trabajado y el temario impartido.

3.3 Metodología específica

La **investigación bibliográfica** se ha sintetizado en un breve estado del arte que sirve de marco teórico a la investigación y que se recoge en el apartado 4.1 del trabajo. Es conveniente señalar que dicho estado del arte ha sido sometido a una revisión crítica, expuesta en el apartado 4.2 en la que se extraen algunas conclusiones sobre la cuestión de estudio y que sirve para justificar los objetivos en los que se centra la investigación.

La experiencia de los profesionales de la docencia se ha recabado mediante un **cuestionario semicerrado** diseñado a tal efecto. El cuestionario se ha pasado a profesores de matemáticas de ESO y Bachillerato de tres centros de la comunidad de Madrid. Con el fin de que la muestra fuera representativa se ha seleccionado un centro público (IES Mariano José de Larra), un centro concertado (Maristas Chamberí) y un centro privado (San José del Parque).

Un cuestionario semicerrado es aquel que se encuentra a medio camino entre las preguntas abiertas, en las que el entrevistado puede expresarse con libertad, y las preguntas cerradas, en las que hay que elegir entre una serie de alternativas dadas. Entre las ventajas del cuestionario cerrado está el hecho de que permite acotar más las respuestas de modo que no se desvíen del objetivo de la investigación y que su cuantificación y posterior análisis es mucho más sencillo que uno abierto. Sin embargo, con el cuestionario cerrado se pierde parte de la riqueza que podría aportar la persona entrevistada si se le dejase algo más de libertad para responder. Por esta razón se ha diseñado un cuestionario semicerrado que mantiene la sencillez y objetividad mencionadas al tiempo que permite explayarse al entrevistado cuando este lo considera oportuno. En el diseño de las cuestiones han influido tanto la bibliografía consultada como mi propia experiencia dentro del aula.

El cuestionario está compuesto por doce preguntas relativas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en ESO y Bachillerato. En cada cuestión se ofrecen cuatro opciones a calificar de mayor a menor importancia según el punto de vista del entrevistado, y una quinta opción para matizar alguna respuesta o para ofrecer una alternativa si aquél lo considera oportuno. Se ha entrevistado a un total de 21 profesores de matemáticas de ESO y Bachillerato. En el anexo 10.1 se reproduce el cuestionario realizado.

Por último, durante la **intervención en el aula** se ha recogido información relativa no sólo a los errores y dificultades más habituales que los alumnos han encontrado en el aprendizaje de la unidad didáctica trabajada, sino también a otros aspectos como el clima del aula, los conocimientos previos de los alumnos, sus diferentes ritmos de aprendizaje, su motivación y predisposición, los procesos cognitivos y estrategias de aprendizaje puestas en juego y los resultados objetivos en la resolución de ejercicios. Dos técnicas se han utilizado para reunir información sobre estos aspectos. Primero, la observación y evaluación subjetiva de todo cuanto ha acontecido en el aula que a mi juicio ha sido digno de atención y que ha cristalizado en los dos informes de prácticas de observación e intervención. Segundo, la elaboración de una prueba escrita objetiva que ha sido realizada por los alumnos y que permite tanto analizar y clasificar las dificultades y errores como reflexionar sobre los posibles motivos y causas en relación con lo expuesto en el marco teórico.

La intervención en el aula ha tenido lugar en un 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales del turno nocturno del IES Mariano José de Larra de Madrid, en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, desde el 26 de noviembre de 2012 hasta el 1 de febrero de 2013. Durante las últimas cuatro semanas de este periodo he impartido en este grupo la unidad didáctica correspondiente a la introducción del cálculo diferencial y el cálculo de derivadas de algunas funciones, sobre la que he realizado la observación y sobre la que propongo las consiguientes actividades de mejora, descritas en el apartado 5.3.

4. Investigación bibliográfica: el marco teórico

A continuación se presenta un breve estado del arte que refleja cuál ha sido en los últimos años el tratamiento de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas desde diversos enfoques. En un segundo apartado se realiza un análisis crítico de la investigación bibliográfica, sintetizando los puntos más relevantes y diseñando las líneas por las que transcurrirán los trabajos de campo y su posterior análisis.

4.1 Estado del arte: tratamiento de las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas

La investigación sobre las dificultades y errores en el aprendizaje, también en las matemáticas, ha originado en las últimas décadas numerosos estudios que si algo tienen de característico es la pluralidad, que se puede explicar tanto desde la diversidad de enfoques y puntos de vista de las investigaciones como desde los diferentes objetos de estudio.

En el primer caso, es posible encontrar trabajos que abordan el problema desde perspectivas psicológicas o neurológicas que emparentan fácilmente con el estudio de las necesidades educativas especiales y la educación especial, pero también hay otros enfoques más generalistas desde perspectivas lógicas y cognitivas que centran su atención en el modo en que los estudiantes razonan, dado que sabiendo cómo piensan es más sencillo comprender mejor los fallos y dificultades. Por último, es posible encontrar numerosos estudios referidos a los errores, más empíricos si se quiere, clasificándolos en diferentes grupos y tratando de conocer sus causas.

En el segundo caso es posible distinguir, siguiendo a Rico (1995), cuatro grandes líneas de investigación. La primera sería la que se dedica a la identificación, clasificación y análisis de las dificultades y errores y las causas que los producen. La segunda línea se dedicaría más bien al tratamiento curricular de los errores. La tercera gran línea de investigaciones tendría como objeto la formación del profesorado en relación con las dificultades que encuentran los alumnos. Por último, la cuarta línea tendría como protagonista el análisis técnico de errores, la innovación mediante software informático y las modernas técnicas de análisis.

En lo que sigue voy a centrarme únicamente en la primera variedad de investigaciones, que difieren entre ellas en cuanto al enfoque o la perspectiva del estudio. Por lo demás, el objetivo de este trabajo tiene más que ver con la primera de las líneas de investigación recién mencionadas (identificación y tratamiento de errores y dificultades) que con ninguna otra, por lo tanto, en general se dejarán a un lado los trabajos relativos a los aspectos curriculares y de formación del profesorado.

Enfoque neurológico de las dificultades de aprendizaje

Un primer gran grupo dentro de las diversas investigaciones sobre las dificultades del aprendizaje en general, y de las matemáticas en particular, es el que adopta lo que he dado en llamar un enfoque neurológico. La característica particular de estas investigaciones es que tratan la dificultad en el aprendizaje como si fuese "algo" que el alumno "tuviera", igual que se tiene una gripe o una cojera, por ejemplo. Se entiende la dificultad de aprendizaje como algo causado probablemente por una alteración neurológica, lo que no tiene por qué llevarnos a pensar necesariamente en un retraso importante o en una necesidad educativa específica, sino que puede ser también una mínima disfunción cerebral. Desde este enfoque, se clasifican las dificultades de los alumnos principalmente en función de las puntuaciones obtenidas en tests, pruebas de rendimiento y calificaciones escolares.

Según Castro Migal (2009), el término "dificultades de aprendizaje" suele aplicarse con cierta frecuencia para referirse a los alumnos que, por razones diversas, tienen un retraso o dificultad en alguno de los aprendizajes instrumentales como la lectura, la escritura o el cálculo, sin que esto implique necesariamente que su inteligencia sea inferior a la media. La misma autora clasifica estas dificultades en dos grandes grupos: las dificultades primarias y las secundarias.

- **Dificultades primarias** son aquellas que presentan niños inteligentes, sin trastornos motores ni sensoriales, que asisten a la escuela con asiduidad y aprenden con una metodología adecuada.

- **Dificultades secundarias** son aquellas en las que los niños no aprenden porque se lo impide un factor conocido: una metodología inadecuada, un profesor sin la formación necesaria, un ambiente hostil, un estado depresivo o una falta de atención... En estos casos, si la causa conocida desaparece, el aprendizaje se produce sin mayor inconveniente.

Otra clasificación de las dificultades de aprendizaje que conviene tener en cuenta por lo extendido de su uso, es la que se basa en los resultados de los test habituales de lectura, escritura y cálculo. Pérez Vallejo (2010) se refiere a ellas como "dificultades específicas", clasificándolas en los siguientes grupos:

- **Dificultades por alteraciones en la memoria:** distingue las alteraciones en la memoria visual como la revisualización (proceso que incluye la memoria visual para reproducir letras o palabras) y la memoria visual secuencial (capacidad para recordar y reproducir secuencias de imágenes vistas previamente) y las alteraciones en la memoria auditiva, es decir, para retener, recordar y reproducir algo que previamente se ha oído.

- **Dificultades en el aprendizaje de la lectura o dislexias:** el término "dislexia" se ha aplicado a un amplio abanico de problemas con la lectura. La escasa habilidad lectora debe ir acompañada de otros aspectos como la existencia de una inteligencia normal, la ausencia de trastornos sensoriales, afectivos o de personalidad y un medio social y cultural así como una metodología de aprendizaje adecuados.

- **Dificultades en el aprendizaje de la escritura o disgrafías:** como las anteriores, presupone una inteligencia normal en el alumno y un ambiente adecuado, y se manifiesta mediante síntomas como la confusión de letras con sonidos parecidos, la omisión de letras, palabras, sílabas o la inversión del orden de las letras o las sílabas dentro de una palabra.

Como parece lógico, dada la estrecha relación entre lectura y escritura, existe un fuerte vínculo entre dislexias y disgrafías.

- **Dificultades en el aprendizaje del cálculo o discalculias:** se emplea este término para referirse a cualquier problema relacionado con el manejo de los números, la capacidad para calcular y la aritmética. Algunos síntomas son la incapacidad de relacionar los números con lo que representan, la dificultad para comprender relaciones en series, la omisión o transposición de cifras en un número o la dificultad en la comprensión y realización de operaciones aritméticas.

Enfoque cognitivo de las dificultades de aprendizaje

Las críticas que reciben los estudios que vinculan las dificultades en matemáticas con la posible existencia de alteraciones neurológicas (por pequeñas que sean) se centran sobre todo en la fundamentación científica de algunos conceptos como el de discalculia. Allardice y Ginsburg (1983), citados por Rivière (1990), destacan el hecho de que estas dificultades específicas se atribuyen a los alumnos a partir de resultados bajos en pruebas de rendimiento que pueden no ser adecuadas por basarse en concepciones superficiales de las actividades matemáticas, por dar demasiada importancia a lo que llaman "signos neurológicos menores" y por no haber sido sometidas a suficientes controles experimentales. Como alternativa Riviére (1990) defiende la necesidad de aproximarse al problema desde un enfoque cognitivo que no etiqueta al alumno sino que analiza los procesos mentales que realiza, categoriza los errores que comete y lo relaciona con los procesos normales de aprendizaje. Desde esta perspectiva, propone los siguientes factores que intervienen en la estructura cognitiva del alumno como algunos de los que influyen en el hecho de que aprender las matemáticas resulte difícil:

- **Insuficientes conocimientos previos**: el aprendizaje de las matemáticas se realiza de tal manera que los nuevos conceptos dependen de la adquisición previa de conceptos anteriores sobre los que se asientan. En palabras del autor, "implica un diálogo entre los conocimientos previos del alumno y los nuevos que trata de enseñarle el profesor". Esta necesidad de base llega incluso a etapas anteriores a la escolarización, donde el alumno desarrolla y asume ciertos conceptos informales que serán fundamento para la comprensión de la matemática que le expliquen en la escuela. En efecto, el alumno no es un folio en blanco, sino que cuando comienza su escolarización ya tiene conocimientos sobre lo que son los números, lo que es contar, la idea de cantidad, etc.

- **Memoria y atención**: una memoria insuficiente o mal gestionada influye de manera negativa en el aprendizaje matemático, tanto a largo como a corto plazo. Si hablamos de la memoria a largo plazo, la dificultad para recordar una fórmula, un teorema o un algoritmo imposibilitará prácticamente cualquier tarea matemática, ya sea resolver una ecuación de segundo grado, hallar la superficie de un triángulo o resolver una derivada. A corto plazo, la incapacidad de retener información numérica en la memoria puede dificultar hasta realizar una simple suma. Por otro lado, el conocimiento matemático está construido de una manera muy lógica y jerárquica, de modo que el rigor en los procesos mentales y en la organización de tareas es fundamental. Las dificultades para prestar atención a una tarea, para concentrarse o seguir un esquema de forma metódica provocan numerosos problemas en el aprendizaje de las matemáticas.

Estos factores no pueden ser imputados solamente al niño, como si este fuera el único culpable de su dificultad con la materia. Al contrario, no es posible desvincularlos de otros propios de las matemáticas como conocimiento y asignatura en la escuela, que es una materia difícil de enseñar ya que:

- Exige al alumno, desde una edad muy temprana, un pensamiento desvinculado de su realidad, ajeno por completo a sus necesidades e intereses.
- Exige un pensamiento abstracto y una capacidad de generalización que el niño no desarrolla sino progresivamente a edades a menudo más tardías.
- Exige la capacidad de comprender y manejar un lenguaje simbólico diferente del natural, así como saber traducir del lenguaje natural al simbólico.

En una investigación más reciente, Socas (2007) enumera cinco grandes causas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas asociadas a la propia disciplina, a los procesos de enseñanza y aprendizaje, al proceso cognitivo de los alumnos y a las actitudes que estos desarrollan hacia la asignatura:

- Dificultades asociadas a la **complejidad de los objetos matemáticos**: estos son de tipo operacional o conceptual.
- Dificultades asociadas a los **modos del pensamiento matemático**: el autor pone como ejemplo algunos aspectos del pensamiento numérico como la transición de lo natural a lo entero o de lo racional a lo irracional.

- Dificultades asociadas a los **procesos de enseñanza**: aspectos como el currículo, la institución escolar, las metodologías habituales…

- Dificultades asociadas al **desarrollo cognitivo de los alumnos**: el desarrollo intelectual, la capacidad de razonar, de procesar información…

- Dificultades asociadas a **actitudes afectivas hacia las matemáticas**: sobre todo sentimientos de tensión, ansiedad y miedo, que generan bloqueos y repercuten negativamente en el aprendizaje.

Estudios sobre clasificación de errores

En Rico (1995) se recoge una revisión de los más destacados estudios de los errores en el aprendizaje de las matemáticas hasta principios de los años noventa que no sólo pone de manifiesto la importancia de la cuestión en la investigación educativa, sino que sirve también para mostrar la diversidad de aproximaciones y puntos de vista desde los que se aborda. Más concretamente, se refiere a los trabajos llevados a cabo por Davis (1984), Radatz (1979) y Movshovitz-Hardar, Zaslavsky e Inbar (1987).

Davis (1984) elaboró una teoría que le permitió tipificar e interpretar algunos de los errores más habituales, como pueden ser las reversiones binarias (por ejemplo, 4x4=8), los errores provocados por el lenguaje o la notación (por ejemplo, 2x-x=2) y los producidos por la recuperación de un esquema previo, por representaciones inadecuadas o por reglas mal deducidas.

Por su parte, Radatz (1979) clasificó los errores más frecuentes a partir del procesamiento de la información, estableciendo las siguientes cinco categorías:

- Errores debidos a **dificultades del lenguaje**: el lenguaje matemático tiene sus propios conceptos, símbolos, vocabulario, expresiones y convenciones, los cuales suponen una dificultad para muchos estudiantes. La traducción del lenguaje natural al matemático necesaria en la resolución de problemas es una fuente inagotable de errores.

- Errores debidos a dificultades para obtener **información espacial**: la incapacidad para pensar en imágenes espaciales o visuales dificulta la realización de ciertas tareas matemáticas.

- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de **hechos, destrezas y conocimientos previos**: incluyen las deficiencias de conocimiento sobre conocimientos y procedimientos específicos de las tareas matemáticas (algoritmos, conocimientos básicos, técnicas, símbolos, conceptos…).

- Errores debidos a **asociaciones incorrectas** o a r**igidez del pensamiento**: la aplicación incorrecta de reglas basada en experiencias anteriores o la falta de flexibilidad para codificar y descodificar la información.

- Errores debidos a la aplicación de **reglas o estrategias irrelevantes**: frecuentes en situaciones en las que se aplican reglas correctas en áreas de contenidos diferentes.

Por último, Movshovitz-Hardar, Zaslavsky e Inbar (1987) realizaronn una clasificación empírica que asigna los errores a una de estas seis categorías: datos mal utilizados, interpretación incorrecta del lenguaje, inferencias no válidas lógicamente, teoremas o definiciones deformados, falta de verificación de la solución y errores técnicos (de cálculo, de sintaxis, de manipulación de símbolos y otros). Esta clasificación es únicamente descriptiva y se basa solamente en el conocimiento matemático y no en el procesamiento de la información.

Sin embargo, al margen de estas clasificaciones, tal vez lo más interesante del trabajo de Rico (1995) sean algunos aspectos comunes a los errores que pone de relevancia y que tienen una importante repercusión a la hora enfocar la reflexión sobre cómo tratar los errores que se dan en el aprendizaje de las matemáticas. Algunas de estas características de los errores que cometen los alumnos son las siguientes:

- Los errores son sorprendentes, en el sentido de que el profesor no siempre los espera y, con frecuencia, le pasan desapercibidos durante bastante tiempo.

- Los errores son persistentes y el alumno desarrolla cierta resistencia a dejar de cometerlos, lo que nos lleva directamente al siguiente punto.

- Los errores, aunque pueden ser fruto del azar, son en la mayoría sistemáticos. Esto significa que responden estructuras asumidas por el alumno que, si bien son incorrectas, presuponen ya de entrada una cierta competencia matemática.

- Los errores ignoran el significado. Cuando algo no es significativo para el alumno, le pasa por alto, por eso a veces ciertos fallos que pueden parecer clamorosos no interpelan al alumno de ninguna manera, ya que para él carece de sentido.

- Por último, pero no menos importante, los errores son parte habitual de cualquier proceso de aprendizaje, y pueden contribuir positivamente a este.

4.2 Análisis crítico del estado del arte

En lo que al enfoque neurológico respecta, cabe hacer dos consideraciones particulares a cada uno de los estudios mencionados y una más general sobre esta perspectiva y su relación con esta investigación.

En cuanto a la clasificación en dificultades primarias y secundarias de Castro Migal (2009), parece evidente que ambos tipos de dificultades pueden estar presentes en el aprendizaje de las matemáticas por parte de cualquier alumno. Sin embargo, aunque las secundarias pueden ser más frecuentes, su carácter puntual y el hecho de que desaparezcan si se trata la causa que las produce hacen que deba considerar principalmente las primeras. Dicho de otra forma, lo que me interesa en este trabajo es por qué razón alumnos normalmente inteligentes, sometidos a los estímulos correctos, encuentran reiteradamente ciertas dificultades a la hora de aprender las matemáticas, cuáles son esos obstáculos y cómo podemos salvarlos.

Por otro lado, de la clasificación por dificultades específicas que recoge Pérez Vallejo (2010) es inmediato relacionar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas con las discalculias. Sin embargo, sería simplista reducir el problema a este tipo de dificultades. En el aprendizaje de las matemáticas intervienen procesos más complejos que implican manejar conceptos relativamente abstractos como son el número, la cantidad, las operaciones, el lenguaje simbólico, la idealización y modelización de la realidad… Muchos de estos aspectos están presentes en el cálculo más simple o en la resolución del más sencillo de los problemas. Es más lógico pensar que las dificultades con las matemáticas se deberán en igual o mayor proporción si cabe a dificultades en la lectura (comprensión de un enunciado, traducción del lenguaje natural al matemático…) o en la memoria (por ejemplo, la capacidad para recordar una fórmula o un teorema, o para retener un valor numérico y relacionarlo con otros).

En general, sin negar el valor de las aportaciones psicológicas y neurológicas, que con toda seguridad son muy necesarias y han cumplido y cumplen un papel muy importante en el marco de las necesidades educativas y de la atención a la diversidad, no parece lógico pensar que todo alumno que tenga dificultades con las matemáticas presente una discalculia, una dislexia o un problema similar a los enumerados. Dicho llanamente, lo que este trabajo busca aclarar es por qué en general las matemáticas nos cuestan más y la respuesta no puede ser (no parece razonable que sea) que el 43% de los alumnos de 13 años, refiriéndonos a las cifras que manejábamos en la introducción, tenga un trastorno neurológico.

Por esta razón el enfoque cognitivo que adoptan autores como Rivière (1990) o Socas (2007) me parece un punto de partida más adecuado para el propósito de este trabajo. Al abordar el problema desde el análisis del funcionamiento mental del alumno de matemáticas permite relacionar errores y dificultades con los factores que se ponen en juego en un proceso normal de aprendizaje y con las particularidades de las matemáticas como materia de estudio. Lo que no nos dice el modelo cognitivo es por qué un estudiante determinado no utiliza bien su memoria a corto plazo, se distrae o le cuesta comprender cierto significado simbólico.

Por otro lado, una limitación a tener en cuenta es que la perspectiva cognitiva no sirve para considerar factores externos o ambientales como los motivacionales, emocionales, afectivos... que tanta importancia juegan en cualquier aprendizaje. Tal vez un ejemplo puede ilustrar esto último: tómese el caso de un alumno que se equivoca en una suma o el de otro que falla al resolver una ecuación de segundo grado. Desde el enfoque cognitivo es posible entender que el primero se equivoca porque no almacena en la memoria a corto plazo la cifra que "se lleva", o que el segundo tiene un problema de atención que le lleva a cambiar los signos de ciertos términos. Sin embargo, nada se puede saber sobre las causas del problema de la memoria o de la deficiencia de atención. Si estos se deben a una causa neurológica, o a que la noche anterior el alumno descansó mal, o si responden a una mala experiencia con la asignatura el curso anterior o a que durante el recreo discutió con su mejor amigo, son aspectos que no podemos determinar sin una investigación más profunda. No parece posible controlar, por tanto, todos los aspectos que intervienen en el proceso de aprendizaje de una persona. Sin embargo, a este respecto la idea de Socas (2007) de contar entre las dificultades para el aprendizaje de las matemáticas aquellas que se derivan de las actitudes afectivas hacia la asignatura me parece una aportación a tener muy en cuenta.

De todo lo anterior, termino esta investigación bibliográfica sintetizando las siguientes conclusiones, que sirven de **marco teórico** para el posterior desarrollo y análisis del trabajo de campo.

- La enorme diversidad de enfoques y casos revela la práctica imposibilidad de generalizar una teoría o clasificación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que responda a todos los casos y determine las causas y las posibles soluciones. La pluralidad de factores que influyen en ello (el contenido y la naturaleza de la asignatura, el currículo, la cualificación y los conocimientos del profesor, la metodología, la dinámica del centro, la capacidad del alumno, su ritmo de aprendizaje, su desarrollo cognitivo, sus sentimientos, el entorno y los condicionantes ambientales…) lleva a concluir que la mejor manera de acercarse al estudio de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas es abordar cada situación concreta como si fuera una excepción en sí misma. Por esta razón, tanto la visión del profesorado entrevistado que se analiza en el apartado 5.1 como las observaciones realizadas durante mi experiencia en el aula del apartado 5.2, así como las propuestas de mejora para esa situación concreta, deben tomarse en ese preciso contexto y no más allá, dado que otros profesores en otras situaciones pueden llegar a conclusiones diferentes. Igualmente, propuestas que en el grupo de mi intervención podrían funcionar, en otros centros y en otras aulas bien podrían no hacerlo.

- Las dificultades que los alumnos encuentran y los errores que cometen no son, en la mayoría de los casos, ilógicos, sino que responden a estructuras lógicas adquiridas por ellos mismos que, aunque puedan resultar equivocadas o mal utilizadas, indican ya por sí mismas la existencia de cierta competencia matemática y de esquemas mentales que han sido interiorizados. Der hecho, la mayoría de las veces el alumno no permanece estancado cuando no sabe resolver un problema, sino que trata de actuar aplicando reglas conocidas que tal vez en otras situaciones funcionaron. En este sentido y si se permite la expresión, el alumno “construye conocimiento”, aunque sea un conocimiento equivocado.

- Precisamente por esto es posible redefinir el papel que las dificultades y errores tienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de manera que se conviertan en una herramienta que sirva a ese aprendizaje y no como un mero indicador de una carencia que lleva a una mala calificación. El error puede convertirse en el punto de partida del correcto aprendizaje si se asume como algo del todo normal en cualquier proceso.

- Para terminar**, es posible sintetizar las dificultades más habituales presentes en el aprendizaje de las matemáticas en los siguientes grandes grupos,** mostrados en la Tabla 1:

Dificultades que tienen que ver **con el alumno**:	Conocimientos previos insuficientes Dificultades relacionadas con la memoria y la capacidad de atención Dificultades relacionadas con el desarrollo cognitivo, la capacidad de razonamiento, interpretación, el desarrollo intelectual… Actitudes afectivas hacia las matemáticas
Dificultades que tienen que ver **con la asignatura**:	La doble naturaleza de los objetos matemáticos: conceptual y procesual u operativa: hay que conocer las definiciones, saber los teoremas, comprender los conceptos… pero también hay que saber operar, resolver algoritmos, solucionar problemas. La naturaleza del pensamiento matemático: la necesidad de abstracción, generalización, idealización, modelización de la realidad. El lenguaje simbólico matemático: necesidad de traducir del lenguaje natural al matemático y viceversa, manejar los símbolos y la sintaxis, conocer su significado.
Otras dificultades relacionadas con:	El clima del aula y del centro. El currículo de la asignatura, la metodología, los recursos. La capacidad y los conocimientos del profesor. El ambiente que rodea al alumno: contexto familiar, cultural y social, relaciones de amistad, conflictividad, motivación e intereses…

Tabla 1. Síntesis de las dificultades más habituales en el aprendizaje de las matemáticas (elaboración propia)

5. Aportaciones del trabajo y justificación de su utilidad

En este apartado se recogen las aportaciones propias y originales de este trabajo, es decir, el análisis de los resultados de los cuestionarios pasados a los profesores de tres centros de la Comunidad de Madrid y las conclusiones sobre los errores y dificultades observados en la experiencia concreta de trabajo en el aula durante mi prácticum. Finalmente se proponen algunas actividades que pueden servir para mejorar el aprendizaje de la unidad didáctica que se ha trabajado en clase.

5.1 Dificultades detectadas por el profesorado. Análisis de los cuestionarios

La metodología correspondiente a la realización de los cuestionarios se ha explicado en el apartado 3.3. A lo escrito allí cabe añadir la siguiente consideración.

No todos los profesores han contestado correctamente al cuestionario. Algunos, en lugar de priorizar calificando las opciones de 1 a 5 o de 1 a 4 (de manera que la suma total de puntos en cada cuestión, repartidos entre las opciones dadas, sean 15 o 10) han repetido puntuaciones, de modo que han repartido más puntos de los posibles. La razón de esto puede ser bien que no hayan entendido la encuesta o bien que consideraban que algunas opciones tenían la misma importancia y no podían sino asignarles la misma puntuación. Ante este hecho, cabían dos opciones: la primera, desestimar las encuestas así realizadas y no tenerlas en cuenta para la realización del estudio. La segunda, introducir una corrección en las respuestas de estos profesores de manera que, respetando sus asignaciones en cuanto a prioridad, los puntos repartidos fueran los mismos que los profesores que sí contestaron correctamente. Para no reducir el tamaño de la muestra (y con ello su representatividad), se ha optado por esta segunda opción.

A continuación se detallan los resultados numéricos de las encuestas en cada centro y la suma global de los tres centros (también se pueden observar las puntuaciones otorgadas por cada profesor a cada opción de cada pregunta y las correcciones recién comentadas cuando han sido necesarias).

Resultados del centro público IES Mariano José de Larra

PREGUNTAS	IES MJ Larra																
	1	c1	2	c2	3	c3	4	c4	5	6,0	c6	7	c7	∑	∑'	%
1 *Las dificultades que **los profesores** encuentran en la enseñanza de las matemáticas son las que tienen que ver con:*																
El clima y la disciplina del aula	5	3,3	5	3,8	4	2,9	4	2,9	2	5	3,3	5	3,3	**21,6**	**18,5**	**30,8**
La diversidad y las distintas capacidades y ritmos de aprendizaje de los alumnos	4	2,7	1	0,8	5	3,6	5	3,6	4	4	2,7	4	2,7	**19,9**	**17,1**	**28,4**
El currículo, la estructura de la asignatura y el tiempo	3	2,0	4	3,1	3	2,1	3	2,1	1	3	2,0	3	2,0	**14,4**	**12,3**	**20,5**
Las particularidades de la disciplina matemática: abstracción, lenguaje simbólico, modelización de la realidad, comprensión de conceptos, resolución de algoritmos y procesos de cálculo...	3	2,0	3	2,3	2	1,4	2	1,4	3	3	2,0	3	2,0	**14,2**	**12,1**	**20,2**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																**100,0**
falta de autoridad del profesor																
falta de atención y constancia del alumnado																
idea preconcebida de que las matemáticas son imposibles																
motivación y conocimiento de la ley educativa																
ver las matemáticas como algo global, no dividido en temas																
2 *Las dificultades que **los alumnos** encuentran en el aprendizaje de las matemáticas son las que tienen que ver con:*																
El clima y la disciplina del aula	4	2,9	4	2,8	2	1,4	2	1,4	2	4	2,9	4	2,9	**16,2**	**13,9**	**23,2**
Las capacidades y estilos de aprendizaje de los alumnos	3	2,1	2	1,6	3	2,1	3	2,1	3	3	2,1	3	2,1	**15,3**	**13,1**	**21,9**
El currículo y la estructura de la asignatura	4	2,9	4	3,2	4	2,9	4	2,9	1	4	2,9	4	2,9	**18,5**	**15,8**	**26,4**
Las particularidades de la disciplina matemática: abstracción, lenguaje simbólico, modelización de la realidad, comprensión de conceptos, resolución de algoritmos y procesos de cálculo...	3	2,1	3	2,4	5	3,6	5	3,6	4	3	2,1	3	2,1	**20,0**	**17,1**	**28,5**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																**100,0**
escasa capacidad de esfuerzo																
capacidad para transmitir conocimientos y mantener la atención																
relacionar conceptos																

3 *Los **contenidos** que presentan mayor dificultad para los alumnos son:*																
Los conceptuales (comprensión de conceptos, "saber lo que están haciendo")	4	2,9	3	2,1	5	3,6	5	3,6	4	4	2,9	4	2,9	**21,9**	18,7	**31,2**
Los procedimentales (algoritmos, reglas de cálculo, operaciones...)	3	2,1	3	2,1	2	1,4	2	1,4	1	3	2,1	3	2,1	**12,4**	10,7	**17,8**
Los actitudinales (gusto por las matemáticas, motivación, utilidad...)	4	2,9	4	2,9	3	2,1	3	2,1	2	4	2,9	4	2,9	**17,7**	15,2	**25,3**
El planteamiento y resolución de problemas (traducción del lenguaje natural al matemático, interpretación de enunciados y de resultados...)	3	2,1	4	2,9	4	2,9	4	2,9	3	3	2,1	3	2,1	**18,0**	15,4	**25,7**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																**100,0**
relacionar conceptos																
4 *Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en la **aritmética** son:*																
La comprensión del concepto de fracción y su tratamiento	5	2,9	2	1,7	3	2,1	3	2,1	1	5	2,9	5	2,9	**15,8**	13,5	**22,5**
La introducción del número negativo y las operaciones con ellos	4	2,4	4	3,3	2	1,4	2	1,4	3	4	2,4	4	2,4	**16,2**	13,9	**23,2**
El salto conceptual de los números racionales a los números irracionales	4	2,4	3	2,5	4	2,9	4	2,9	4	4	2,4	4	2,4	**19,3**	16,5	**27,5**
El manejo de símbolos y algoritmos sin haber desarrollado antes un esquema conceptual propio de comprensión	4	2,4	3	2,5	5	3,6	5	3,6	2	4	2,4	4	2,4	**18,7**	16,0	**26,7**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																**100,0**
falta de concentración al operar, despistes																
5 *Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en el **álgebra y el análisis** son:*																
El nuevo sentido de la igualdad como equivalencia de dos expresiones	3	2,5	2	1,5	2	1,4	2	1,4	3	3	2,5	3	2,5	**14,9**	12,8	**21,3**
La introducción de incógnitas	3	2,5	4	3,1	3	2,1	3	2,1	2	3	2,5	3	2,5	**16,9**	14,5	**24,1**
La comprensión de los conceptos, por ejemplo: **qué es** una ecuación, el límite la derivada de una función...	4	3,3	4	3,1	5	3,6	5	3,6	4	4	3,3	4	3,3	**24,2**	20,8	**34,6**
El desarrollo de algoritmos y procesos de cálculo, por ejemplo: **cómo resolver** una ecuación 2º grado, resolver un límite, derivar una función trignométrica...	2	1,7	3	2,3	4	2,9	4	2,9	1	2	1,7	2	1,7	**14,0**	12,0	**20,0**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																**100,0**
dominar las propiedades que rigen las operaciones confundir ecuaciones con operaciones con polinomios resolución de problemas																

6	*Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en la* ***geometría*** *son:*																
	La interpretación y modelización del espacio físico real mediante objetos geométricos ideales	3	2,1	3	4,3	2	1,4	3	2,1	4	3	2,3	4	2,9	**19,2**	**16,4**	**27,4**
	El aprendizaje de los teoremas clásicos de la geometría plana	3	2,1	x	x	4	2,9	5	3,6	2	3	2,3	2	1,4	**14,3**	**12,3**	**20,4**
	El aprendizaje de las propiedades matemáticas de los objetos geométricos	4	2,9	3	4,3	3	2,1	2	1,4	1	3	2,3	4	2,9	**16,9**	**14,5**	**24,1**
	El lenguaje simbólico propio de la geometría (fórmulas, expresiones, códigos y convenciones...)	4	2,9	1	1,4	5	3,6	4	2,9	3	4	3,1	4	2,9	**19,6**	**16,8**	**28,1**
	Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																**100,0**
	capacidad para resolver 1º mentalmente el p. y después buscar recursos matemáticos nec.																
	acompañar el planteamiento del problema con dibujos para aclarar el ejercicio																
	no estudiar fórmulas de memoria sino deducirlas																
7	*La metodología y las actividades que* ***prefieren los alumnos*** *en clase de matemáticas son:*																
	La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	5	3,3	2	2,0	5	3,6	3	2,1	2	5	4,2	5	3,6	**20,8**	**17,8**	**29,7**
	La realización de ejercicios por parte de los alumnos	3	2,0	2	2,0	2	1,4	5	3,6	1	2	1,7	3	2,1	**13,8**	**11,8**	**19,7**
	La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	4	2,7	4	4,0	4	2,9	4	2,9	4	2	1,7	3	2,1	**20,2**	**17,3**	**28,8**
	El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	3	2,0	2	2,0	3	2,1	2	1,4	3	3	2,5	3	2,1	**15,2**	**13,0**	**21,7**
	Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																**100,0**
	resolución de dudas																
8	*La metodología y las actividades que* ***optimizan el aprendizaje*** *y los resultados académicos son:*																
	La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	5	3,3	4	3,3	2	1,4	2	1,4	3	5	3,3	5	3,3	**19,2**	**16,4**	**27,4**
	La realización de ejercicios por parte de los alumnos	4	2,7	2	1,7	5	3,6	5	3,6	4	4	2,7	4	2,7	**20,8**	**17,8**	**29,7**
	La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	3	2,0	4	3,3	4	2,9	4	2,9	2	3	2,0	3	2,0	**17,0**	**14,6**	**24,4**
	El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	3	2,0	2	1,7	3	2,1	3	2,1	1	3	2,0	3	2,0	**13,0**	**11,1**	**18,5**
	Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																**100,0**
	una vez resuelto el ejercicio, tener recursos para saber si es correcto o no (sentido)																
	SJP2 en general prefiere el trabajo individual al grupal																
	exámenes y lo que conllevan de estudio más profundo																

9 *La metodología y las actividades que* ***más se utilizan*** *en el aula son:*																	
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	5	3,8	4	3,6	5	3,6	5	3,6	4		5	3,8	5	3,8	**26,3**	**22,6**	**37,6**
La realización de ejercicios por parte de los alumnos	3	2,3	1	0,9	4	2,9	4	2,9	3		3	2,3	3	2,3	**16,5**	**14,2**	**23,6**
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	2	1,5	4	3,6	2	1,4	2	1,4	2		2	1,5	2	1,5	**13,1**	**11,2**	**18,7**
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	3	2,3	2	1,8	3	2,1	3	2,1	1		3	2,3	3	2,3	**14,0**	**12,0**	**20,0**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																	**100,0**
SJP2: el trabajo en grupo se usa, a ciertas edades, para hablar más que para trabajar ejercicios voluntarios y de ampliación																	
10 *El* ***tratamiento de los errores*** *cometidos por los alumnos es, generalmente:*																	
Un diagnóstico objetivo de conocimientos para asignar una calificación a cada alumno	2	2,0	2	1,7	4	2,9	4	2,9	3		4	3,1	3	2,1	**17,6**	**15,1**	**25,1**
Un punto de partida para corregir deficiencias en el aprendizaje	2	2,0	3	2,5	5	3,6	5	3,6	4		4	3,1	3	2,1	**20,9**	**17,9**	**29,8**
Un punto de partida para modificar y mejorar la programación de la asignatura	3	3,0	4	3,3	2	1,4	2	1,4	1		2	1,5	4	2,9	**14,6**	**12,5**	**20,8**
Un factor necesario e inevitable en el proceso de aprendizaje	3	3,0	3	2,5	3	2,1	3	2,1	2		3	2,3	4	2,9	**17,0**	**14,5**	**24,2**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																	**100,0**
Cuesta que un alumno aprenda de sus errores fundamentales para que un alumno avance en el aprendizaje																	
11 *Las cualidades necesarias para ser un* ***buen alumno de matemáticas*** *son:*																	
La motivación y el gusto por la matemática	4	2,7	4	2,5	3	2,1	3	2,1	4		5	2,9	4	2,9	**19,3**	**16,5**	**27,5**
El esfuerzo y el trabajo personal	4	2,7	4	2,5	5	3,6	5	3,6	2		5	2,9	4	2,9	**20,1**	**17,2**	**28,7**
Las buenas capacidades intelectuales, cierta predisposición natural	4	2,7	4	2,5	2	1,4	2	1,4	3		4	2,4	3	2,1	**15,5**	**13,3**	**22,2**
La responsabilidad, solidaridad, participación…	3	2,0	4	2,5	4	2,9	4	2,9	1		3	1,8	3	2,1	**15,1**	**13,0**	**21,6**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																	**100,0**
trabajar de manera constante y metódica																	

12	*La* ***imagen de las matemáticas*** *que más motiva a los estudiantes de cara a su aprendizaje es:*																
	Las matemáticas como cálculo, razonamiento y resolución de problemas	2	1,8	4	2,9	3	2,1	3	2,1	1	3	2,1	4	2,9	**15,0**	**12,8**	**21,4**
	Las matemáticas como forma de conocimiento racional, riguroso, exacto	3	2,7	3	2,1	2	1,4	2	1,4	3	4	2,9	3	2,1	**15,7**	**13,5**	**22,5**
	Las matemáticas como medio para la creatividad, la curiosidad, las ideas poco frecuentes, su dimensión lúdica	3	2,7	3	2,1	5	3,6	5	3,6	4	2	1,4	4	2,9	**20,3**	**17,4**	**29,0**
	Las matemáticas como aplicación en física, ingeniería, economía, tecnología, medicina, sociología, deportes...	3	2,7	4	2,9	4	2,9	4	2,9	2	5	3,6	3	2,1	**19,0**	**16,3**	**27,2**
	Otros (explicar) / matizar alguna respuesta																**100,0**

∑': suma ponderada para comparar por colegios

Resultados del centro privado San José del Parque

PREGUNTAS	San José del Parque														
	1	2	c2	3	c3	4	5	c5	6	7	c7	8	∑	∑'	%
1 *Las dificultades que **los profesores** encuentran en la enseñanza de las matemáticas son las que tienen que ver con:*															
El clima y la disciplina del aula	2	3	2,4	1	0,7	1	5	3,6	1	1	1,4	1	**13,0**	**9,8**	**13,0**
La diversidad y las distintas capacidades y ritmos de aprendizaje de los alumnos	3	5	3,9	4	2,7	5	3	2,1	3	2	2,9	4	**26,6**	**20,0**	**26,6**
El currículo, la estructura de la asignatura y el tiempo	1	3	2,4	5	3,3	2	2	1,4	5	1	1,4	3	**19,6**	**14,7**	**19,6**
Las particularidades de la disciplina matemática: abstracción, lenguaje simbólico, modelización de la realidad, comprensión de conceptos, resolución de algoritmos y procesos de cálculo...	4	4	3,2	5	3,3	4	4	2,9	2	3	4,3	2	**25,6**	**19,2**	**25,6**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
falta de autoridad del profesor															
falta de atención y constancia del alumnado	5												**5,0**	**3,8**	**5,0**
idea preconcebida de que las matemáticas son imposibles		4	3,2										**3,2**	**2,4**	**3,2**
motivación y conocimiento de la ley educativa						3							**3,0**	**2,3**	**3,0**
ver las matemáticas como algo global, no dividido en temas									4				**4,0**	**3,0**	**4,0**
															100,0
2 *Las dificultades que **los alumnos** encuentran en el aprendizaje de las matemáticas son las que tienen que ver con:*															
El clima y la disciplina del aula	2	3	1,8	1	0,9	1	4	2,9	1	1	1,0	1	**11,5**	**8,6**	**12,8**
Las capacidades y estilos de aprendizaje de los alumnos	3	5	2,9	3	2,7	3	3	2,1	3	3	3,0	4	**23,8**	**17,9**	**26,5**
El currículo y la estructura de la asignatura	1	4	2,4	2	1,8	2	2	1,4	2	3	3,0	3	**16,6**	**12,4**	**18,4**
Las particularidades de la disciplina matemática: abstracción, lenguaje simbólico, modelización de la realidad, comprensión de conceptos, resolución de algoritmos y procesos de cálculo...	4	5	2,9	5	4,5	4	5	3,6	5	3	3,0	2	**29,1**	**21,8**	**32,3**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
escasa capacidad de esfuerzo															
capacidad para transmitir conocimientos y mantener la atención	5												**5,0**	**3,8**	**5,6**
relacionar conceptos									4				**4,0**	**3,0**	**4,4**
															100,0

3 *Los **contenidos** que presentan mayor dificultad para los alumnos son:*															
Los conceptuales (comprensión de conceptos, "saber lo que están haciendo")	3	2	1,5	2	1,3	4	4	2,9	3	4	3,1	2	**20,7**	**15,5**	**24,4**
Los procedimentales (algoritmos, reglas de cálculo, operaciones...)	2	3	2,3	5	3,1	1	3	2,1	1	2	1,5	1	**14,1**	**10,6**	**16,6**
Los actitudinales (gusto por las matemáticas, motivación, utilidad...)	1	3	2,3	4	2,5	2	3	2,1	2	3	2,3	3	**17,3**	**12,9**	**20,3**
El planteamiento y resolución de problemas (traducción del lenguaje natural al matemático, interpretación de enunciados y de resultados...)	4	5	3,8	5	3,1	3	4	2,9	5	4	3,1	4	**28,9**	**21,7**	**34,0**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
relacionar conceptos									4				**4,0**	**3,0**	**4,7**
															100,0
4 *Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en la **aritmética** son:*															
La comprensión del concepto de fracción y su tratamiento	2	4	2,7	2	1,8	2	2	2,0	1	2	1,8	4	**17,3**	**13,0**	**20,4**
La introducción del número negativo y las operaciones con ellos	1	3	2,0	3	2,7	1	3	3,0	5	3	2,7	1	**18,5**	**13,8**	**21,7**
El salto conceptual de los números racionales a los números irracionales	3	4	2,7	2	1,8	3	2	2,0	2	3	2,7	3	**20,2**	**15,2**	**23,8**
El manejo de símbolos y algoritmos sin haber desarrollado antes un esquema conceptual propio de comprensión	4	4	2,7	4	3,6	4	3	3,0	3	3	2,7	2	**25,0**	**18,8**	**29,4**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
falta de concentración al operar, despistes									4				**4,0**	**3,0**	**4,7**
															100,0
5 *Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en el **álgebra y el análisis** son:*															
El nuevo sentido de la igualdad como equivalencia de dos expresiones	1	4	3,2	3	2,3	1	4	2,9	2	2	2,0	1	**15,3**	**11,5**	**16,1**
La introducción de incógnitas	2	5	3,9	2	1,5	2	4	2,9	1	2	2,0	2	**17,3**	**13,0**	**18,3**
La comprensión de los conceptos, por ejemplo: **qué es** una ecuación, el límite la derivada de una función...	4	4	3,2	3	2,3	3	4	2,9	5	4	4,0	4	**28,3**	**21,2**	**29,8**
El desarrollo de algoritmos y procesos de cálculo, por ejemplo: **cómo resolver** una ecuación 2º grado, resolver un límite, derivar una función trignométrica...	3	2	1,6	5	3,8	4	2	1,4	3	2	2,0	3	**21,9**	**16,4**	**23,0**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
dominar las propiedades que rigen las operaciones	5												**5,0**	**3,8**	**5,3**
confundir ecuaciones con operaciones con polinomios		4	3,2										**3,2**	**2,4**	**3,3**
resolución de problemas									4				**4,0**	**3,0**	**4,2**
															100,0

6 *Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en la* ***geometría*** *son:*															
La interpretación y modelización del espacio físico real mediante objetos geométricos ideales	4	4	3,8	2	2,5	2	4	3,3	5	3	2,5	4	**27,1**	**20,3**	**28,5**
El aprendizaje de los teoremas clásicos de la geometría plana	1	2	1,9	2	2,5	1	2	1,7	1	3	2,5	3	**14,5**	**10,9**	**15,3**
El aprendizaje de las propiedades matemáticas de los objetos geométricos	3	3	2,8	2	2,5	3	3	2,5	2	4	3,3	1	**20,1**	**15,1**	**21,2**
El lenguaje simbólico propio de la geometría (fórmulas, expresiones, códigos y convenciones…)	2	3	2,8	2	2,5	4	3	2,5	3	2	1,7	2	**20,5**	**15,4**	**21,6**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
capacidad para resolver 1º mentalmente el p. y después buscar recursos matemáticos nec.	5												**5,0**	**3,8**	**5,3**
acompañar el planteamiento del problema con dibujos para aclarar el ejercicio		4	3,8										**3,8**	**2,8**	**3,9**
no estudiar fórmulas de memoria sino deducirlas									4				**4,0**	**3,0**	**4,2**
															100,0
7 *La metodología y las actividades que* ***prefieren los alumnos*** *en clase de matemáticas son:*															
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	2	4	2,2	3	2,5	2	3	2,0	5	4	3,3	3	**22,1**	**16,5**	**25,9**
La realización de ejercicios por parte de los alumnos	1	5	2,8	4	3,3	1	5	3,3	3	3	2,5	1	**17,9**	**13,5**	**21,1**
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	4	5	2,8	3	2,5	4	4	2,7	1	4	3,3	2	**22,3**	**16,7**	**26,2**
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	3	4	2,2	2	1,7	3	3	2,0	2	1	0,8	4	**18,7**	**14,0**	**22,0**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
resolución de dudas									4				**4,0**	**3,0**	**4,7**
															100,0
8 *La metodología y las actividades que* ***optimizan el aprendizaje*** *y los resultados académicos son:*															
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	2	4	2,5	3	2,3	4	4	2,7	4	4	3,3	3	**23,8**	**17,9**	**26,5**
La realización de ejercicios por parte de los alumnos	4	5	3,1	5	3,8	2	5	3,3	5	4	3,3	4	**28,6**	**21,5**	**31,8**
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	3	5	3,1	3	2,3	3	3	2,0	2	3	2,5	2	**19,9**	**14,9**	**22,1**
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	1	2	1,3	2	1,5	1	3	2,0	1	1	0,8	1	**9,6**	**7,2**	**10,7**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
una vez resuelto el ejercicio, tener recursos para saber si es correcto o no (sentido)	5												**5,0**	**3,8**	**5,6**
SJP2 en general prefiere el trabajo individual al grupal															
exámenes y lo que conllevan de estudio más profundo									3				**3,0**	**2,3**	**3,3**
															100,0

9 *La metodología y las actividades que **más se utilizan** en el aula son:*															
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	4	5	3,1	5	3,6	4	5	3,6	5	5	3,8	3	**30,1**	**22,6**	**35,4**
La realización de ejercicios por parte de los alumnos	1	5	3,1	5	3,6	2	5	3,6	4	4	3,1	4	**24,3**	**18,3**	**28,6**
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	2	4	2,5	3	2,1	3	2	1,4	3	3	2,3	2	**18,4**	**13,8**	**21,6**
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	3	2	1,3	1	0,7	1	2	1,4	1	1	0,8	1	**10,2**	**7,6**	**12,0**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
SJP2: el trabajo en grupo se usa, a ciertas edades, para hablar más que para trabajar ejercicios voluntarios y de ampliación									2				**2,0**	**1,5**	**2,4**
															100,0
10 *El **tratamiento de los errores** cometidos por los alumnos es, generalmente:*															
Un diagnóstico objetivo de conocimientos para asignar una calificación a cada alumno	1	3	1,8	5	3,6	x	3	2,3	2	3	2,1	2	**14,8**	**11,1**	**19,7**
Un punto de partida para corregir deficiencias en el aprendizaje	3	5	2,9	5	3,6	x	4	3,1	3	3	2,1	3	**20,7**	**15,5**	**27,6**
Un punto de partida para modificar y mejorar la programación de la asignatura	2	5	2,9	3	2,1	x	4	3,1	4	4	2,9	4	**21,0**	**15,8**	**28,0**
Un factor necesario e inevitable en el proceso de aprendizaje	4	4	2,4	1	0,7	x	2	1,5	1	4	2,9	1	**13,5**	**10,1**	**18,0**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
Cuesta que un alumno aprenda de sus errores fundamentales para que un alumno avance en el aprendizaje									5				**5,0**	**3,8**	**6,7**
															100,0
11 *Las cualidades necesarias para ser un **buen alumno de matemáticas** son:*															
La motivación y el gusto por la matemática	1	5	2,9	5	3,6	4	4	2,7	2	5	3,1	2	**21,3**	**16,0**	**25,1**
El esfuerzo y el trabajo personal	4	5	2,9	5	3,6	3	5	3,3	5	5	3,1	4	**29,0**	**21,7**	**34,1**
Las buenas capacidades intelectuales, cierta predisposición natural	3	4	2,4	2	1,4	2	4	2,7	1	2	1,3	1	**14,7**	**11,0**	**17,3**
La responsabilidad, solidaridad, participación...	2	3	1,8	2	1,4	1	2	1,3	3	4	2,5	3	**16,0**	**12,0**	**18,9**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															
trabajar de manera constante y metódica									4				**4,0**	**3,0**	**4,7**
															100,0

12	*La* ***imagen de las matemáticas*** *que más motiva a los estudiantes de cara a su aprendizaje es:*																
	Las matemáticas como cálculo, razonamiento y resolución de problemas	2	4	2,4	5	2,8	2	4	2,7	4	2	2,0	2	**19,8**	**14,8**	**25,1**
	Las matemáticas como forma de conocimiento racional, riguroso, exacto	1	4	2,4	3	1,7	1	3	2,0	1	2	2,0	1	**12,0**	**9,0**	**15,2**
	Las matemáticas como medio para la creatividad, la curiosidad, las ideas poco frecuentes, su dimensión lúdica	4	4	2,4	5	2,8	4	4	2,7	2	3	3,0	4	**24,8**	**18,6**	**31,4**
	Las matemáticas como aplicación en física, ingeniería, economía, tecnología, medicina, sociología, deportes...	3	5	2,9	5	2,8	3	4	2,7	3	3	3,0	2	**22,4**	**16,8**	**28,3**
	Otros (explicar) / matizar alguna respuesta															**100,0**

∑': suma ponderada para comparar por colegios

Resultados del centro concertado Chamberí y resultados globales

PREGUNTAS	Chamberí								total	
	1	2	3	4	5	6	∑=∑'	%	∑	%
1 *Las dificultades que* ***los profesores*** *encuentran en la enseñanza de las matemáticas son las que tienen que ver con:*										
El clima y la disciplina del aula	1	5	1	2	2	4	15	22,1	49,6	20,8
La diversidad y las distintas capacidades y ritmos de aprendizaje de los alumnos	4	4	4	4	4	3	23	33,8	69,5	29,2
El currículo, la estructura de la asignatura y el tiempo	3	2	3	3	1	2	14	20,6	47,9	20,1
Las particularidades de la disciplina matemática: abstracción, lenguaje simbólico, modelización de la realidad, comprensión de conceptos, resolución de algoritmos y procesos de cálculo...	2	3	2	1	3	1	12	17,6	51,8	21,8
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta										
falta de autoridad del profesor		4					4	5,9	4,0	1,7
falta de atención y constancia del alumnado									5,0	2,1
idea preconcebida de que las matemáticas son imposibles									3,2	1,3
motivación y conocimiento de la ley educativa									3,0	1,3
ver las matemáticas como algo global, no dividido en temas									4,0	1,7
								100,0		
2 *Las dificultades que* ***los alumnos*** *encuentran en el aprendizaje de las matemáticas son las que tienen que ver con:*										
El clima y la disciplina del aula	1	4	1	1	2	2	11	16,9	38,8	17,2
Las capacidades y estilos de aprendizaje de los alumnos	2	2	2	4	3	4	17	26,2	56,1	24,9
El currículo y la estructura de la asignatura	4	1	3	2	1	1	12	18,5	47,1	20,9
Las particularidades de la disciplina matemática: abstracción, lenguaje simbólico, modelización de la realidad, comprensión de conceptos, resolución de algoritmos y procesos de cálculo...	3	3	4	3	5	3	21	32,3	70,0	31,1
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta										
escasa capacidad de esfuerzo					4		4	6,2	4,0	1,8
capacidad para transmitir conocimientos y mantener la atención								100,0	5,0	2,2
relacionar conceptos									4,0	1,8

3 *Los **contenidos** que presentan mayor dificultad para los alumnos son:*										
Los conceptuales (comprensión de conceptos, "saber lo que están haciendo")	4	4	4	2	1	3	18	30,0	60,6	28,2
Los procedimentales (algoritmos, reglas de cálculo, operaciones...)	1	2	1	1	2	1	8	13,3	34,5	16,1
Los actitudinales (gusto por las matemáticas, motivación, utilidad...)	2	3	2	3	3	2	15	25,0	50,0	23,2
El planteamiento y resolución de problemas (traducción del lenguaje natural al matemático, interpretación de enunciados y de resultados...)	3	1	3	4	4	4	19	31,7	65,9	30,7
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta								100,0		
relacionar conceptos									4,0	1,9
4 *Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en la **aritmética** son:*										
La comprensión del concepto de fracción y su tratamiento	1	2	1	2	1	3	10	16,7	43,1	20,0
La introducción del número negativo y las operaciones con ellos	2	1	4	3	4	4	18	30,0	52,7	24,5
El salto conceptual de los números racionales a los números irracionales	3	4	3	4	2	1	17	28,3	56,5	26,3
El manejo de símbolos y algoritmos sin haber desarrollado antes un esquema conceptual propio de comprensión	4	3	2	1	3	2	15	25,0	58,7	27,3
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta								100,0		
falta de concentración al operar, despistes									4,0	1,9
5 *Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en el **álgebra y el análisis** son:*										
El nuevo sentido de la igualdad como equivalencia de dos expresiones	2	2	2	3	1	2	12	20,0	42,2	18,8
La introducción de incógnitas	3	1	3	4	2	3	16	26,7	50,2	22,3
La comprensión de los conceptos, por ejemplo: **qué es** una ecuación, el límite la derivada de una función...	4	4	4	2	4	4	22	36,7	74,5	33,1
El desarrollo de algoritmos y procesos de cálculo, por ejemplo: **cómo resolver** una ecuación 2º grado, resolver un límite, derivar una función trignométrica...	1	3	1	1	3	1	10	16,7	45,9	20,4
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta								100,0		
dominar las propiedades que rigen las operaciones									5,0	2,2
confundir ecuaciones con operaciones con polinomios									3,2	1,4
resolución de problemas									4,0	1,8

6 *Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en la* ***geometría*** *son:*										
La interpretación y modelización del espacio físico real mediante objetos geométricos ideales	4	4	1	4	3	4	20	33,3	66,2	29,4
El aprendizaje de los teoremas clásicos de la geometría plana	1	3	3	2	2	1	12	20,0	40,8	18,2
El aprendizaje de las propiedades matemáticas de los objetos geométricos	2	2	2	3	4	2	15	25,0	52,0	23,1
El lenguaje simbólico propio de la geometría (fórmulas, expresiones, códigos y convenciones...)	3	1	4	1	1	3	13	21,7	53,1	23,6
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta								100,0		
capacidad para resolver 1º mentalmente el p. y después buscar recursos matemáticos nec.									5,0	2,2
acompañar el planteamiento del problema con dibujos para aclarar el ejercicio									3,8	1,7
no estudiar fórmulas de memoria sino deducirlas									4,0	1,8
7 *La metodología y las actividades que* ***prefieren los alumnos*** *en clase de matemáticas son:*										
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	4	4	1	1	1	1	12	20,0	54,8	25,5
La realización de ejercicios por parte de los alumnos	1	2	3	2	2	2	12	20,0	43,8	20,4
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	2	3	2	3	3	4	17	28,3	59,5	27,7
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	3	1	4	4	4	3	19	31,7	52,9	24,6
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta								100,0		
resolución de dudas									4,0	1,9
8 *La metodología y las actividades que* ***optimizan el aprendizaje*** *y los resultados académicos son:*										
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	1	4	1	1	1	1	9	15,0	52,0	23,6
La realización de ejercicios por parte de los alumnos	2	3	3	3	3	3	17	28,3	66,4	30,2
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	3	2	4	4	4	4	21	35,0	58,0	26,4
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	4	1	2	2	2	2	13	21,7	35,6	16,2
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta								100,0		
una vez resuelto el ejercicio, tener recursos para saber si es correcto o no (sentido)									5,0	2,3
SJP2 en general prefiere el trabajo individual al grupal										
exámenes y lo que conllevan de estudio más profundo									3,0	1,4

9 *La metodología y las actividades que **más se utilizan** en el aula son:*										
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	4	3	4	3	2	4	20	33,3	76,4	35,5
La realización de ejercicios por parte de los alumnos	3	4	2	4	4	3	20	33,3	60,9	28,3
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	1	2	3	2	3	2	13	21,7	44,5	20,7
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	2	1	1	1	1	1	7	11,7	31,2	14,5
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta								100,0		
SJP2: el trabajo en grupo se usa, a ciertas edades, para hablar más que para trabajar ejercicios voluntarios y de ampliación									2,0	0,9
10 *El **tratamiento de los errores** cometidos por los alumnos es, generalmente:*										
Un diagnóstico objetivo de conocimientos para asignar una calificación a cada alumno	3	1	x	2	2	3	11	22,0	43,4	22,2
Un punto de partida para corregir deficiencias en el aprendizaje	4	4	x	4	4	4	20	40,0	61,6	31,6
Un punto de partida para modificar y mejorar la programación de la asignatura	1	3	x	3	1	1	9	18,0	44,6	22,9
Un factor necesario e inevitable en el proceso de aprendizaje	2	2	x	1	3	2	10	20,0	40,4	20,7
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta								100,0		
Cuesta que un alumno aprenda de sus errores fundamentales para que un alumno avance en el aprendizaje									5,0	2,6
11 *Las cualidades necesarias para ser un **buen alumno de matemáticas** son:*										
La motivación y el gusto por la matemática	2	4	3	3	4	3	19	31,7	59,6	27,7
El esfuerzo y el trabajo personal	4	3	4	2	3	4	20	33,3	69,1	32,1
Las buenas capacidades intelectuales, cierta predisposición natural	1	2	2	4	1	1	11	18,3	41,2	19,2
La responsabilidad, solidaridad, participación...	3	1	1	1	2	2	10	16,7	41,1	19,1
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta								100,0		
trabajar de manera constante y metódica									4,0	1,9

12 *La **imagen de las matemáticas** que más motiva a los estudiantes de cara a su aprendizaje es:*											
Las matemáticas como cálculo, razonamiento y resolución de problemas	1	4	3	3	1	1	**13**	**21,7**	**47,8**	**22,9**
Las matemáticas como forma de conocimiento racional, riguroso, exacto	3	2	2	2	2	3	**14**	**23,3**	**41,7**	**20,0**
Las matemáticas como medio para la creatividad, la curiosidad, las ideas poco frecuentes, su dimensión lúdica	2	1	1	1	4	2	**11**	**18,3**	**56,1**	**26,8**
Las matemáticas como aplicación en física, ingeniería, economía, tecnología, medicina, sociología, deportes…	4	3	4	4	3	4	**22**	**36,7**	**63,4**	**30,3**
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta								**100,0**		

∑': suma ponderada para comparar por colegios

En el anexo 10.2 se recogen los resultados gráficos de las elecciones que cada opción de cada pregunta ha recibido, representadas en forma porcentual, centro por centro y de manera global. Estos resultados surgen del tratamiento de los resultados numéricos expresados más arriba y para una comprensión más completa e intuitiva de ellos, razón por la cual se han dispuesto en los anexos. En lo que sigue, se han reproducido algunas figuras contenidas en dicho anexo para una lectura más ágil de cuanto se expone.

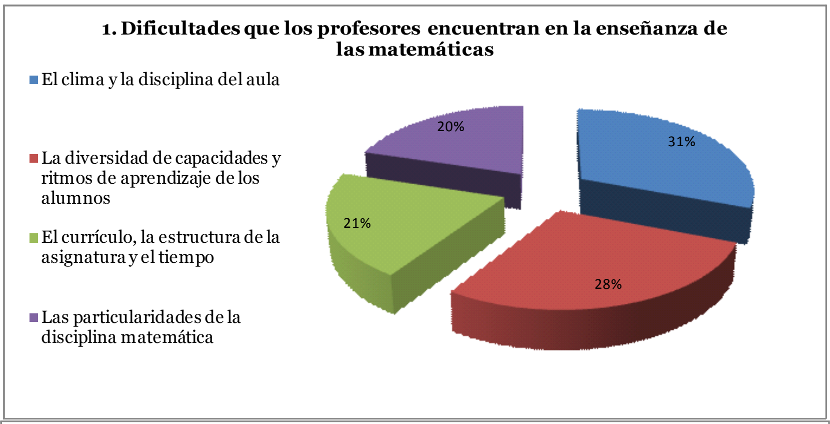
A la luz de estos resultados, es posible hacer las siguientes consideraciones.

- *Dificultades que profesores y alumnos encuentran en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (preguntas 1 y 2).*

Si analizamos los resultados globales, los profesores consideran que la diversidad de capacidades y ritmos de los alumnos es la principal dificultad que encuentran en la enseñanza de las matemáticas, con bastante distancia sobre otros factores como el clima del aula, el currículo de la asignatura o las particularidades de la disciplina matemática. Sin embargo, si lo analizamos centro por centro, vemos que mientras que el concertado y el privado confirman esa tendencia, el centro público presenta resultados bastante diferentes, como se observa en la Figura 1.

En el centro público la principal dificultad está en el clima y la disciplina del aula, seguida de la diversidad de capacidades y ritmos de los alumnos. Aquello que para el centro concertado es el segundo problema y para el centro privado es el último, para el instituto público es la mayor dificultad para enseñar las matemáticas, antes que cualquier consideración que tenga que ver con la propia asignatura.

En cuanto a las dificultades que encuentran los alumnos, parece unánime la opinión de que la mayor de ellas tiene que ver con las particularidades de la disciplina matemática (nivel de abstracción, generalización, lenguaje simbólico, comprensión de conceptos y resolución de algoritmos...). Curiosamente, los centros concertado y privado señalan la diversidad de ritmos y capacidades como la segunda dificultad para los alumnos, mientras que los profesores del centro público no entienden que esto sea un problema para los alumnos (sí lo es para los docentes) y señalan al currículo y la estructura de la asignatura por delante.



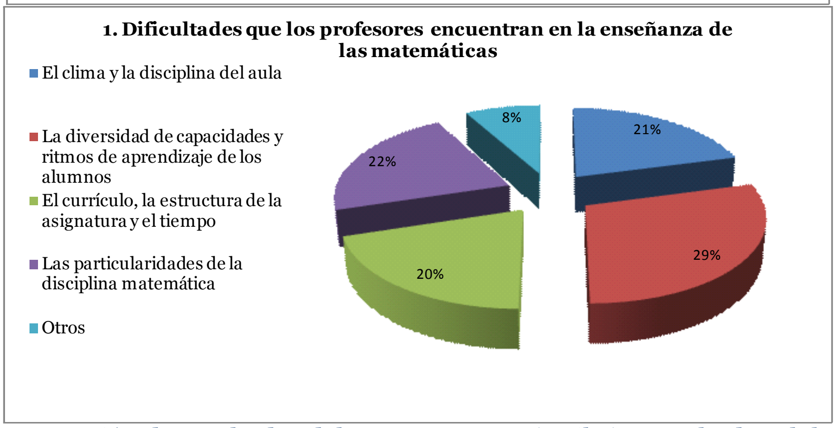


Figura 1. Comparación de resultados del IES M.J. Larra (arriba) y resultados globales (abajo)

Otras dificultades que no se proponían explícitamente en las opciones del cuestionario y que han sido mencionadas por los profesores encuestados son la falta de autoridad del profesor, la falta de atención y de constancia en el trabajo por parte del alumnado, las ideas preconcebidas sobre la dificultad inabordable de las matemáticas, la motivación del profesorado y su conocimiento de la ley educativa y la visión de las matemáticas como algo fragmentado y no como un conocimiento global.

Entre las dificultades de los alumnos aportadas por los profesores entrevistados se encuentran la escasa capacidad de esfuerzo, la dificultad para mantener la atención y para relacionar conceptos.

- *Dificultades relacionadas con los contenidos de la materia (preguntas 3, 4, 5 y 6).*

En este caso hay un claro consenso a la hora de señalar el planteamiento y resolución de problemas y los contenidos conceptuales como los que presentan mayores dificultades para los alumnos, como se ve en la Figura 2. Esto apunta directamente a dos de las particularidades de las matemáticas que las hacen especialmente complicadas: por un lado, su papel de modelización y representación de la realidad y la necesidad de traducir constantemente del lenguaje simbólico matemático al lenguaje natural, y por otro, su doble naturaleza concepto-proceso. Curiosamente, los contenidos procedimentales (es decir, *cómo* resolver las cosas), son considerados globalmente como el menor de los problemas, por lo que se puede concluir en una frase sencilla que los alumnos *saben hacer las cosas* pero *les cuesta mucho saber qué están haciendo*.

Esta línea se confirma en las preguntas consecutivas que atienden a los contenidos por bloques. En la aritmética, el manejo de símbolos y algoritmos sin tener un esquema propio de comprensión y los saltos conceptuales, en el álgebra y el análisis la comprensión de conceptos (*qué* es una ecuación, un límite, una derivada...) y en la geometría la modelización del espacio físico mediante objetos ideales y el lenguaje simbólico son siempre los principales problemas que encuentran los alumnos.

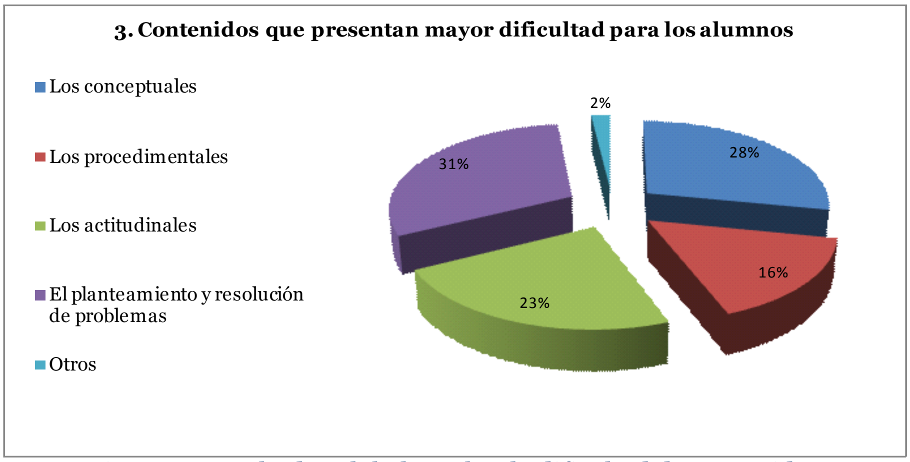


Figura 2. Resultados globales sobre la dificultad de contenidos

Otras dificultades relacionadas con los contenidos que han propuesto los docentes encuestados han sido la dificultad para relacionar conceptos, la falta de concentración y los despistes al operar, el escaso dominio de las propiedades de las operaciones, la dificultad para deducir fórmulas geométricas y la necesidad de memorizarlas, la dificultad para resolver mentalmente un problema y después buscar los recursos necesarios para realizarlo y la dificultad para recurrir a croquis o dibujos que, en geometría, aclaren el enunciado del problema.

- *Dificultades relacionadas con la metodología empleada (preguntas 7, 8 y 9).*

En cuanto a las preferencias de los alumnos, no hay un consenso claro sobre qué metodología les resulta más atractiva: trabajo en grupo, exposición magistral y trabajo del profesor, aplicación de lo estudiado a problemas reales… Los resultados son dispares según el centro. Lo que sí está claro es lo que no les gusta a los alumnos, sobre lo que hay consenso en todos los centros: la metodología que menos atrae a los alumnos es la realización de ejercicios de manera individual por su parte.

Este punto contrasta con la opinión de los profesores sobre la metodología que optimiza el aprendizaje de las matemáticas, que viene a ser precisamente la realización de ejercicios por parte de los alumnos. En segundo lugar en cuanto a efectividad, los profesores sitúan, con apoyos muy parecidos, la exposición magistral y la aplicación de conceptos a la vida real, si bien globalmente esta última tiene una ligera ventaja. En cuanto a la metodología más aplicada en el aula destacan sin lugar a dudas dos opciones, que son la explicación magistral del profesor y la realización de ejercicios por parte de los alumnos.

De todo ello es posible concluir que hay dos incongruencias sobre la metodología en el aprendizaje de las matemáticas. La primera de ellas, muy importante, entre lo que optimiza el aprendizaje (que los alumnos hagan ejercicios) y lo que prefieren los alumnos (casi cualquier opción excepto esa). La segunda, menor pero muy interesante, entre lo que optimiza el aprendizaje (que los alumnos hagan ejercicios y la aplicación de lo estudiado a problemas reales) y lo que se hace en el aula (exposición magistral y trabajo del profesor más resolución de ejercicios por parte de los alumnos). La Figura 3 muestra gráficamente las diferencias explicadas obtenidas para los resultados globales.

Como comentario adicional expresado por un profesor de entre los encuestados, resaltaba la importancia de las clases en las que se resuelven dudas de los alumnos como una metodología a tener en cuenta.

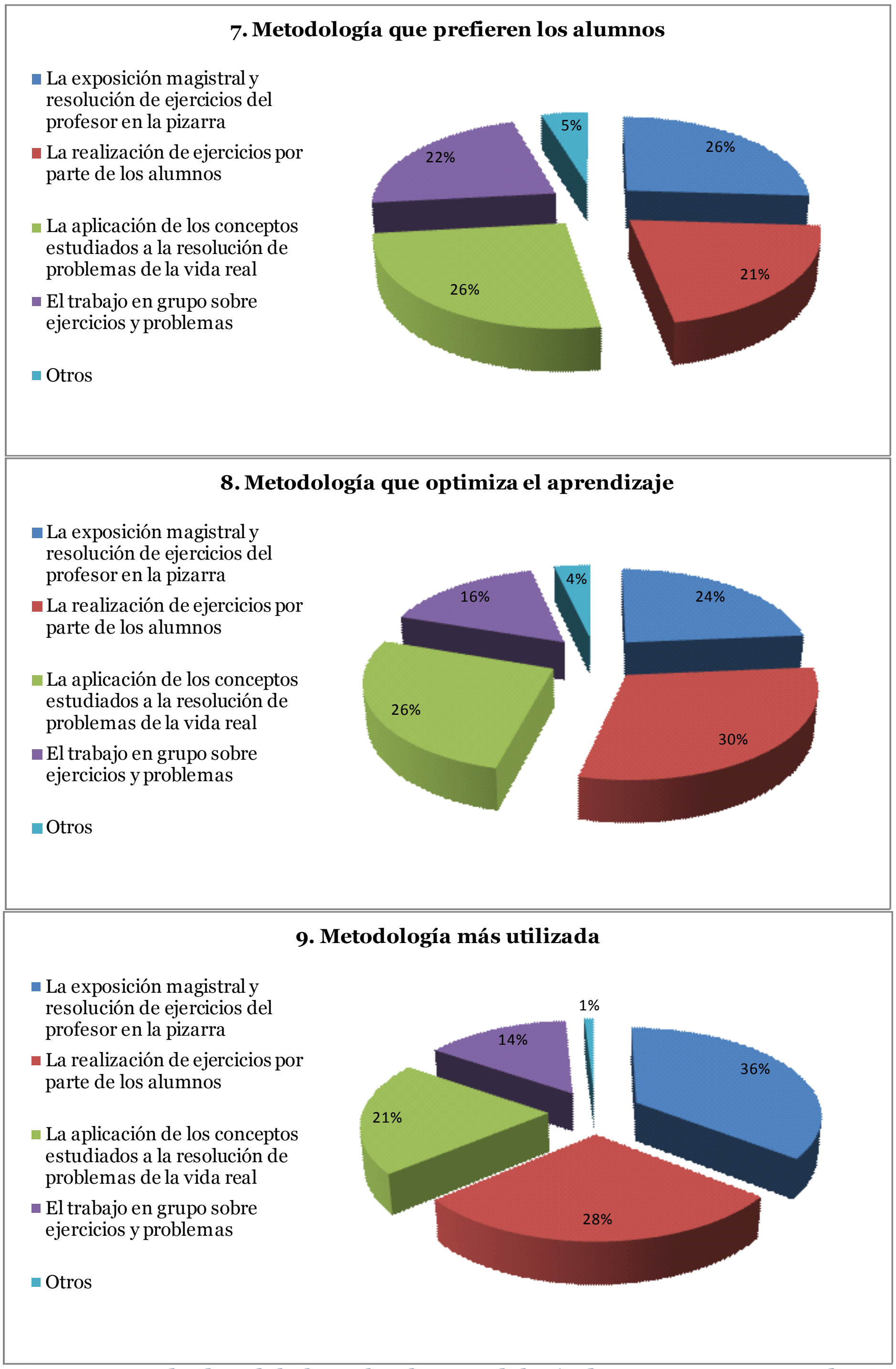


Figura 3. Resultados globales sobre la metodología de enseñanza y aprendizaje

- *Otras consideraciones (preguntas 10, 11 y 12).*

Finalmente, tomamos en consideración las preguntas relativas al tratamiento de los errores, las cualidades del buen alumno de matemáticas y la imagen de las matemáticas que más motiva a los estudiantes.

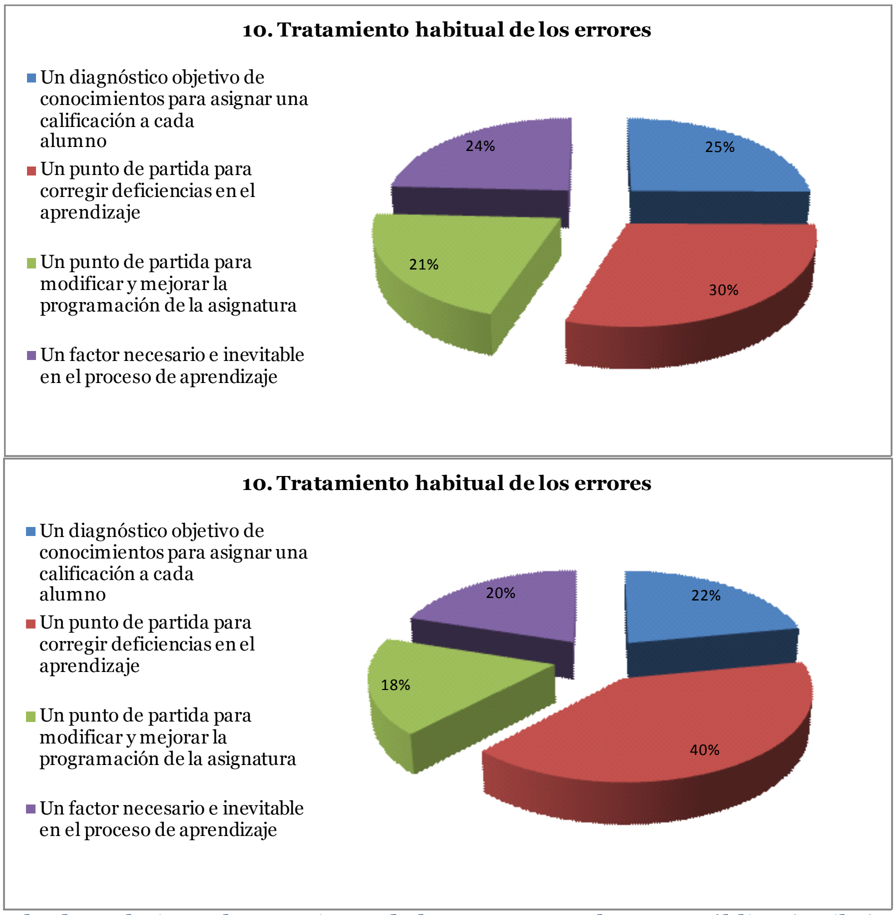
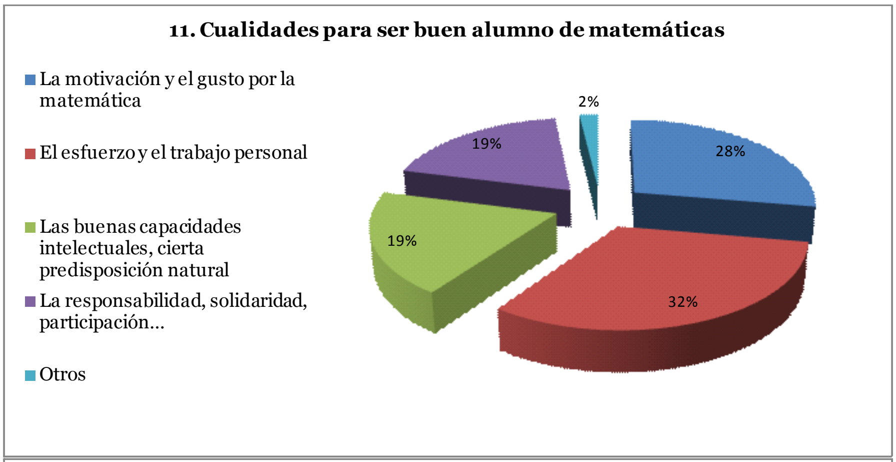


Figura 4. Resultados relativos al tratamiento de los errores en el centro público (arriba) y en el centro concertado (abajo)

Parece haber cierto grado de consenso en que la primera función de los errores cometidos por los alumnos es la de punto de partida para corregir deficiencias en el aprendizaje. Esto significaría que el error se aborda de una manera constructiva y, siendo como es una parte inevitable de cualquier proceso de aprendizaje, se utiliza positivamente para contribuir a él. Llama la atención, sin embargo, el resultado obtenido en el instituto público según el cual la segunda opción más elegida es la del error como diagnóstico objetivo para asignar una calificación a cada alumno. Como se aprecia en la Figura 4, esta es también la segunda opción en el colegio concertado (si bien mucho más alejada de la primera). En el colegio privado es la tercera opción. Se puede concluir que hay una relación directa entre errores y calificaciones y que estas dependen fuertemente de los errores cometidos por los alumnos.

Para terminar, existe consenso en cuanto a las cualidades necesarias para ser un buen alumno de matemáticas: con diferencia, lo más importante para los profesores de todos los centros es el esfuerzo y el trabajo personal, seguido de la motivación y el gusto por la matemática. Además, las matemáticas como aplicación en otras ramas como la física, la ingeniería, la economía... y la cara lúdica, creativa, dada a ideas poco frecuentes, originales y novedosas, son las imágenes de las matemáticas que más atractivas resultan a los estudiantes. Ambos resultados se recogen en la Figura 5.



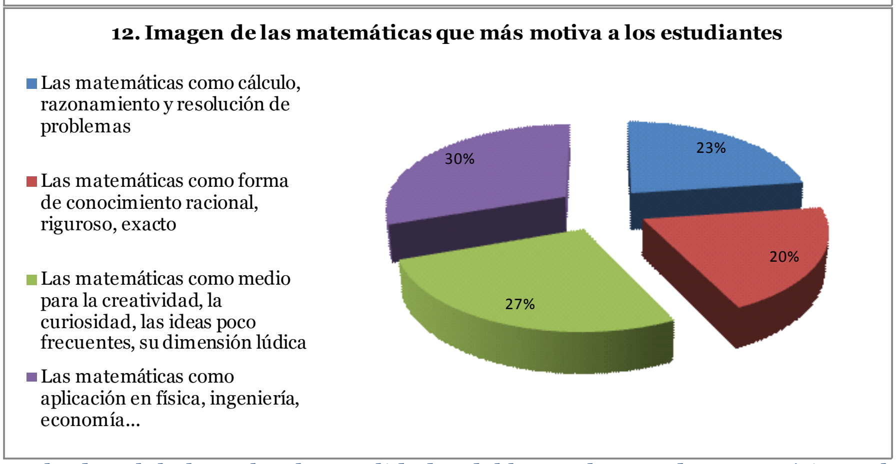


Figura 5. Resultados globales sobre las cualidades del buen alumno de matemáticas y la imágenes motivadoras de las matemáticas

5.2 Mi experiencia en el aula: dificultades en el aprendizaje de las derivadas

La observación llevada a cabo durante el prácticum ha sido realizada en el IES Mariano José de Larra de Madrid en el que he asistido durante cuatro semanas a diferentes clases de matemáticas e informática de 1º y 2º de Bachillerato en el horario nocturno.

La intervención la he realizado durante otras cuatro semanas, impartiendo clase de matemáticas en el aula de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales en el horario nocturno.

Contexto del centro de estudio y características de los alumnos

El IES Mariano José de Larra está situado en Aluche, un barrio del suroeste de Madrid. Como centro diurno sirve específicamente a la realidad concreta de este barrio. Como centro nocturno, da servicio a alumnos procedentes de todo el distrito de La Latina, siendo el único instituto que ofrece esta posibilidad en el distrito.

Según recoge el Proyecto Educativo de Centro del IES Mariano José de Larra (2009), en torno a un 30% de la población del barrio es de origen extranjero, con una media de edad muy baja que contrasta con la alta media de edad de la población de origen español. El instituto cuenta con casi 800 alumnos repartidos en dos turnos, diurno y nocturno. De ellos, aproximadamente un 20% son inmigrantes, casi todos ellos escolarizados en la ESO y la gran mayoría latinoamericanos (principalmente ecuatorianos, peruanos y dominicanos) aunque también hay una reducida presencia de rumanos, polacos y chinos. La suma del fenómeno inmigratorio unida a otros factores de tipo legislativo (como puede ser la escolarización obligatoria), económicos (como la profunda crisis económica en la que el país se encuentra sumido y las insostenibles cifras de paro que manejamos) o sociales, llevan a la aparición de nuevos problemas para la comunidad educativa, el principal de los cuales parece ser el del clima en el aula y en el centro.

En el caso concreto del bachillerato nocturno, estos factores sociales y económicos tienen una consecuencia clara en el aumento del número de alumnos que deciden intentar obtener el título de Bachillerato. Muchos de ellos son alumnos que al terminar la ESO empezaron a trabajar en puestos poco cualificados y que ahora están en paro o que teniendo trabajo, buscan mejorar o aumentar sus posibilidades de acceso o promoción en el mundo laboral.

En el curso 2012/2013 hay matriculados en el centro 799 alumnos, prácticamente repartidos al 50% por sexos, de los cuales 252 cursan el bachillerato nocturno. De estos, 137 son hombres y 115 son mujeres, y están repartidos en cuatro grupos. La clase en la que tiene lugar esta intervención es un 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales del turno nocturno que ofrece el IES Mariano José de Larra. Hay en clase 23 alumnos, todos ellos adultos entre los 19 y los 28 años, de los que 13 son mujeres y 10 son hombres.

Es posible hacer algunas consideraciones sobre las características del alumnado como grupo. En general se trata de personas que teniendo el título en ESO no trabajan o lo hacen en puestos de baja cualificación y poca estabilidad, por lo que desean mejorar laboralmente. Muchos de ellos necesitan el bachillerato para acceder a oposiciones a distintos grupos de la Administración.

Otros lo precisan para otro tipo de trabajos, sin tener que pasar necesariamente por la universidad. Algunos sí se plantean la posibilidad de acceder a estudios universitarios. Por último, cabe destacar la existencia de un cuarto grupo dentro del aula, que son los militares. Estos proceden de los cercanos cuarteles de Campamento, entraron en el ejército sin haber estudiado el bachillerato y ahora se plantean la necesidad de obtenerlo para optar a hacer carrera dentro del ejército.

Sin embargo, más allá de estos comentarios generales es necesario hacer notar que en el horario nocturno, y en concreto dentro de este aula, la característica más importante del alumnado como grupo, que determina todas las demás acciones educativas, es la **heterogeneidad**, referida tanto a edades como a situaciones vitales muy particulares. En concreto, dentro del grupo para el que se diseña esta unidad didáctica se encuentra una amplia gama de casos y situaciones: algunos alumnos trabajan por las mañanas, aunque una parte importante de ellos no tiene trabajo ni otra ocupación. Hay padres y madres de familia muy jóvenes, que pueden trabajar o no, y que se dedican también al cuidado de sus hijos. Hay personas muy interesadas en su formación, con una gran motivación, y también hay otras que acuden a clase por obligación de sus padres. Hay alumnos españoles que han vivido siempre en el barrio y también una muy importante proporción de alumnos inmigrantes. Todo ello redunda en los siguientes aspectos que componen la realidad educativa del aula:

- Puntos de partida y nivel de conocimientos previos distintos.
- Ritmos de aprendizaje muy diversos.
- Disponibilidad para trabajar en casa muy distinta.
- Motivación y predisposiciones diferentes.
- Gran variabilidad en la asistencia a clase.

Es necesario tener en cuenta todos estos aspectos a la hora de diseñar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En concreto, revisten una importancia especial la variabilidad en la asistencia y el alto nivel de absentismo, factores fundamentales que hay que considerar antes de programar cualquier actividad en el aula.

Unidad didáctica de la intervención

La materia explicada, trabajada, estudiada y evaluada durante mi intervención corresponde a las primeras nociones de cálculo diferencial: conocer y comprender el concepto de derivada, familiarizarse con las tablas de derivadas de las diversas funciones y aprender a utilizar las fórmulas de derivación para derivar cualquier función. El alumnado destinatario de esta unidad es el descrito anteriormente: un 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales del turno nocturno que ofrece el IES Mariano José de Larra. En la Tabla 2 se resume la unidad didáctica de la intervención.

<table>
<tr><th colspan="5">Título de la UD: Introducción al Cálculo de Derivadas</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Aspectos generales</th><th colspan="2">Objetivos</th><th rowspan="2">Contenidos</th><th rowspan="2">Criterios de evaluación</th></tr>
<tr><th>Generales</th><th>Específicos</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Curso: 1º bachillerato

Temporalización: del 8 de enero al 31 de febrero de 2013

Sesiones: 15 sesiones de 50 min cada una

Alumnos: 23 alumnos (13 son mujeres, 10 hombres). Todos mayores de edad. Gran heterogeneidad en cuanto a procedencia, edad, motivación, conocimientos previos...</td><td rowspan="6">1. Comprender los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que les permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas y adquirir una formación científica general.</td><td rowspan="2">1. Comprender el concepto de derivada de una función como expresión de la variación de la propia función.</td><td>1. Concepto de derivada de una función</td><td>Explica con sus propias palabras que la derivada de una función indica cómo varía la función</td></tr>
<tr><td>2. Tabla de derivadas de algunas funciones</td><td>Conoce las reglas de derivación de las funciones habituales</td></tr>
<tr><td>2. Comprender la interpretación geométrica de la derivada y saber relacionarla con la definición matemática de derivada.</td><td>3. Interpretación geométrica de la derivada de una función en el vídeo "universo mecánico"</td><td>Comprende el significado geométrico de la derivada y puede poner ejemplos concretos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3. Utilizar las reglas de derivación para calcular derivadas de funciones polinómicas, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.</td><td>4. Derivadas de polinomios y de las operaciones habituales</td><td>Sabe derivar correctamente polinomios, sumas, restas, multiplicaciones y cocientes</td></tr>
<tr><td>5. Derivadas de potencias y raíces</td><td>Sabe derivar correctamente potencias y raíces cuadradas de funciones</td></tr>
<tr><td>6. Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas</td><td>Sabe derivar correctamente funciones exponenciales y logarítmicas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos en la interpretación de las ciencias, en la actividad tecnológica y en las actividades cotidianas.</td><td>4. Citar algunas aplicaciones de las derivadas a problemas de la vida normal en diversos ámbitos como la ingeniería, la física, la economía, la medicina...</td><td>7. Aplicaciones del cálculo diferencial en el vídeo "universo mecánico"</td><td>Cita algunas de las aplicaciones de las derivadas mencionadas en el vídeo y en su comentario posterior</td></tr>
<tr><td>5. Conocer el funcionamiento de un software adecuado para el cálculo de derivadas de funciones y su representación.</td><td>8. Derivación y representación de funciones con Wiris</td><td>Resuelve derivadas de funciones y las representa gráficamente con Wiris</td></tr>
</table>

Tabla 2. Resumen de la unidad didáctica de la intervención

Título de la UD: Introducción al Cálculo de Derivadas				
Sesiones	**Tiempo**	**Actividad**	**Recursos**	**Contenidos**
8 de enero de 2013 "presentación y concepto de derivada"	5 min 30 min 15 min	Presentación Concepto de derivada Tabla de derivadas	Profesor y profesor tutor Pizarra y tiza, papel y bolígrafos	Concepto de derivada de una función Tabla de derivadas de algunas funciones
9 de enero de 2013 "polinomios y operaciones"	20 min 30 min	Ejercicios en pizarra Ejercicios individual	Pizarra y tiza, papel y bolígrafos	Derivadas de polinomios y de las operaciones habituales
10 de enero de 2013 "por ti mismo"	50 min	Ejercicios individual	Pizarra y tiza, papel y bolígrafos	
14 de enero de 2013 "potencias y raíces"	20 min 30 min	Ejercicios en pizarra Ejercicios individual	Pizarra y tiza, papel y bolígrafos	Derivadas de potencias y raíces
15 de enero de 2013 "por ti mismo"	50 min	Ejercicios individual	Pizarra y tiza, papel y bolígrafos	
16 de enero de 2013 "dos velocidades"	50 min	Ejercicios individual o en grupos	Pizarra y tiza, papel y bolígrafos	Repaso de lo visto hasta aquí
17 de enero de 2013 "universo mecánico"	35 min 15 min	Presentación y visonado de video Comentario posterior en grupo	Pizarra y tiza, proyector,pantalla, archivo con el video, pc	Interpretación geométrica de la derivada de una función en el vídeo "universo mecánico" Aplicaciones del cálculo diferencial en el vídeo "universo mecánico"
21 de enero de 2013 "logaritmos y exponenciales"	20 min 30 min	Ejercicios en pizarra Ejercicios individual	Pizarra y tiza, papel y bolígrafos	Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas
22 de enero de 2013 "por ti mismo"	50 min	Ejercicios individual	Pizarra y tiza, papel y bolígrafos	
23 de enero de 2013 "dos velocidades"	50 min	Ejercicios individual o en grupos	Pizarra y tiza, papel y bolígrafos	Repaso de lo visto hasta aquí
24 de enero de 2013 "Wiris"	50 min	Resolver ejercicios de clase con Wiris en el aula de informática	Ordenadores aula informática, software Wiris	Derivación y representación de funciones con Wiris
28 de enero de 2013 "¿Tienes dudas?"	50 min	Resolver las dudas antes del examen	Pizarra y tiza, papel y bolígrafos	Resolución de dudas antes del examen. Repaso general
29 de enero de 2013 "Examen"	1 h y 20 min	Examen	Pizarra y tiza, papel y bolígrafos, enunciados y hojas borrador	Evaluación objetiva
30 de enero de 2013 "Corregimos en clase y notas"	25 min 25 min	Repartir exámenes corregidos y resolver en pizarra Atender reclamaciones y dudas	Pizarra y tiza, exámenes corregidos y criterios de corrección	Corrección del examen
31 de enero de 2013 "Se ha escrito un crimen"	50 min	Resolver un crimen mediante las derivadas	Enunciado, pizarra y tiza, papel y bolígrafos	Otras aplicaciones del cálculo diferencial

Tabla 2. Resumen de la unidad didáctica de la intervención (secuenciación de actividades)

Prueba objetiva de evaluación

Al final de la unidad didáctica, se ha realizado una sencilla prueba escrita para evaluar la destreza de los alumnos para derivar algunas funciones. La prueba se recoge en el anexo 10.3 de este trabajo.

Esta prueba final, tal y como está pensada, sólo evalúa la capacidad del alumno para recordar las fórmulas para derivar y para calcular dichas derivadas (es decir, su capacidad para resolver algoritmos), y no evalúa tanto la comprensión del concepto derivada de una función ni de su utilidad, aspectos que han sido objeto de una evaluación subjetiva y continua mediante un sistema de observación y registro durante toda la intervención.

Dificultades detectadas durante la intervención en el aula

Los errores y dificultades más habituales detectados en este trabajo de campo se corresponden con aquellos que con mayor frecuencia han cometido o encontrado los alumnos tanto en el trabajo diario de clase sobre los ejercicios que se han ido realizando, los conceptos explicados, las dudas preguntadas... como en la prueba objetiva final. Se trata así de analizar las posibles dificultades en el marco completo de la unidad didáctica y del trabajo del alumno, y no solamente en el caso puntual de una prueba evaluable que puede implicar mayor presión y nerviosismo para el alumno, lo que lleva también a multiplicar la probabilidad de cometer errores. A continuación se recogen las dificultades y errores más representativos que se han detectado, clasificándolas dentro de tres grandes grupos: dificultades que tienen que ver con el alumno, con la asignatura y con otros aspectos.

- *Dificultades que tienen que ver con el alumno.*

Se incluyen aquí las dificultades detectadas a lo largo de la intervención que se consideran relacionadas con el alumno. Incluso aunque alguna de ellas puedan verse como más propias de la materia (como los paréntesis, las operaciones con polinomios o el manejo de fracciones), en el nivel en el que están (1º de bachillerato) se considera que estos aspectos deberían ser ya "conocimientos previos" del alumno.

  - **Conocimientos previos insuficientes:**

La falta de base se ha revelado como una de las dificultades más importantes que presenta este grupo de alumnos. La gravedad de este problema radica en su persistencia y profundidad, ya que se relaciona con conocimientos que debieron asimilarse hace mucho tiempo y cuya carencia sale a la superficie constantemente, sin que sea abordable una revisión completa de todas las cosas que los alumnos "tendrían que saber y no saben", para empezar, porque desconocemos el alcance de su desconocimiento.

Ejemplos de estos problemas son los siguientes: múltiples equivocaciones a la hora de operar con polinomios, confusión al utilizar paréntesis y corchetes, inexactitud al escribir las operaciones (errores de puntuación, signos...) incluso aunque el resultado termine siendo correcto, desconocimiento sobre cómo operar con quebrados... Un ejemplo claro de esta falta de base se observa en la Figura 6:

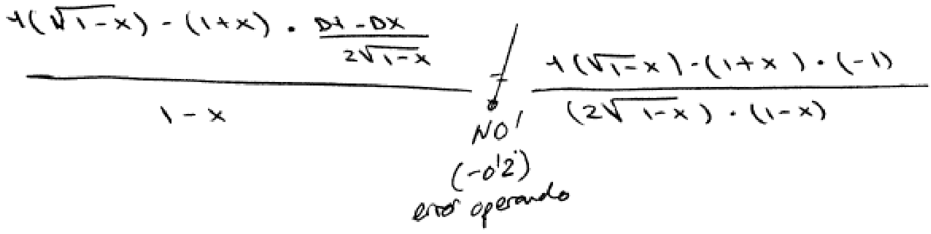


Figura 6. Ejemplo de error producido por falta de conocimientos previos

El error fue cometido por una alumna en el ejercicio 2a) de la prueba objetiva. Como se puede apreciar, la alumna obvia que en el numerador de la fracción más general hay una resta y multiplica los dos denominadores evidenciando falta de conocimiento al operar quebrados. Cabe señalar como curiosidad que el error se produce una vez que ha resuelto todas las derivadas que había que resolver. El error es, por tanto, un fallo al operar, producido por una deficiencia en los conocimientos previos.

- **Dificultades por fallos de la atención y la memoria:**

Algunos de estas dificultades son la incapacidad para recordar fórmulas y expresiones, los olvidos de signos, cambios de signos de un paso a otro... El problema de la falta de atención es que produce errores que son atribuibles tanto al desconocimiento como al despiste.

En la Figura 7 tenemos dos ejemplos de este extremo. En el primero de ellos una alumna olvida, al derivar el cuadrado de un polinomio, multiplicar por la derivada del polinomio. ¿Lo sabe pero se le ha olvidado, o desconoce cómo se deriva un polinomio? En el segundo ejemplo, otra alumna transforma un "-x" en simplemente "x" justo en el último paso del problema. ¿Se le ha olvidado el signo o no sabe que 0-x = -x? La experiencia en el aula y el conocimiento del trabajo continuo de la alumna es básico aquí para situarse en uno u otro juicio.

$$3)\ D\left[(x^2-x+1)^2\cdot\sqrt{1-x^2}\right] =$$

$$D(x^2-x+1)^2\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)+(x^2-x+1)^2\cdot D\left(\sqrt{1-x^2}\right) =$$

$$2(x^2-x+1)\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)+(x^2-x+1)^2\cdot\frac{D(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 1\cdot\sqrt{1-x} - (1+x)\cdot\frac{0-x}{2\sqrt{1-x}} =$$

$$\left|= 1\cdot\sqrt{1-x} - (1+x)\cdot\frac{x}{2\sqrt{1-x}}\right|$$

¿te dividas el menos o lo tachas? → Prefiero pensar que te lo "olvidas"

+0'8

Figura 7. Ejemplos de errores producidos por fallos de memoria o falta de atención

- **Dificultades relacionadas con actitudes afectivas hacia las matemáticas:**

Es complicado objetivar de qué manera la desmotivación, las experiencias previas, las ideas preconcebidas... afectan al aprendizaje en las matemáticas, pero parece evidente que hay una relación directa entre motivación y rendimiento no sólo en esta asignatura, sino en cualquier aprendizaje. En el caso concreto de este grupo, aunque la actitud mayoritaria hacia la asignatura ha sido bastante buena, también se ha dado el caso de algunos alumnos con una clara desmotivación para los que el trabajo se ha hecho muy cuesta arriba y no han alcanzado los objetivos marcados para el grupo. Sirva como ejemplo el siguiente diálogo mantenido con uno de estos alumnos, que miraba por la ventana mientras el resto de la clase trabajaba individualmente sobre unos ejercicios:

PROFESOR: Jaime, ¿qué te pasa? ¿No haces los ejercicios?

JAIME: Es que no me he traído las tablas. De todas formas... Esto, ¿para qué sirve?

P: Para qué sirve qué, ¿las derivadas?

J: Sí.

P: Pues aunque no lo parezca, para muchas cosas. Una derivada nos dice cómo varía una función, y con una función se puede expresar todo. Imagínate que eres un comerciante y tienes un negocio: sabiendo derivar puedes saber cuántas unidades de lo que sea puedes comprar y almacenar para maximizar tu beneficio.

J: ¿Y?

P: Otros ejemplos: si tienes que construir un depósito, puedes optimizarlo para que quepa el máximo de lo que sea y gastarte el menor dinero posible, si eres médico puedes conocer cómo varía el contagio de un virus, si eres físico puedes conocer la velocidad o aceleración de cualquier móvil... Y más cosas... Hasta para resolver crímenes, sirven las derivadas.

J: Ya, pero para qué le sirve esto a alguien como yo, digo...

P: Bueno Jaime, es que yo no sé cómo eres, ni por qué estudias esto, ni qué esperas de la vida...

J: ¿Yo? Pues verlas venir...

P: ...Bueno... Entonces sólo se me ocurre decirte que te lo tomes como un juego, como si hicieras un sudoku. Un pasatiempo que te ayuda a pensar, a estructurar la mente, a desarrollar tu cabeza.

Este desinterés, esta sensación de que "esto no sirve para nada", no es nueva ni mucho menos y constituye un escollo prácticamente insalvable para el aprendizaje. Si algo se necesita para que el alumno aprenda es, precisamente, que quiera aprender. Sin esta condición indispensable es imposible que el proceso de enseñanza y aprendizaje llegue a buen puerto.

- *Dificultades que tienen que ver con los contenidos trabajados:*

Se incluyen aquí dificultades relacionadas directamente con el cálculo diferencial o con la metodología empleada en el aula.

  - **Falta de sentido e incomprensión de conceptos**:

Esta es la mayor dificultad que se ha encontrado, en general, en este grupo. Aunque se trabajó al principio de la unidad, al terminar ésta pocos alumnos podían explicar, con sus propias palabras, qué es la derivada de una función o para qué sirve. Esta falta de sentido tiene dos consecuencias fundamentales: en primer lugar, que el estudiante no sabe lo que está haciendo.

En matemáticas se da la paradoja de que un alumno puede saber hacer algo pero no saber lo que hace o para qué, por tanto, es complicado decir que se ha completado el aprendizaje de forma satisfactoria. En segundo lugar, que el alumno es indiferente ante errores que pueden ser de bulto, simplemente porque no los detecta, porque el resultado al que llega no tiene un sentido claro para él. Dos ejemplos de esta falta de sentido se ilustran en la Figura 8.

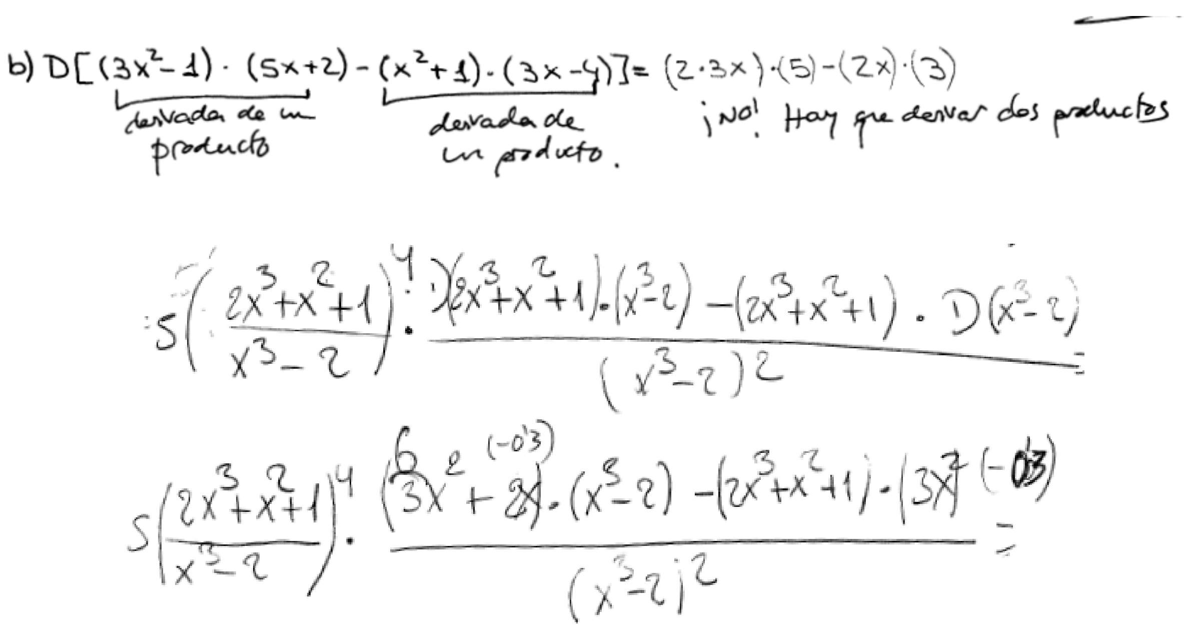


Figura 8. Ejemplos de errores producidos por falta de sentido e incomprensión de conceptos

En el primer ejemplo, una alumna resuelve la derivada de un producto derivando ambos factores. Es posible pensar que, en primer lugar, hay un desconocimiento del algoritmo utilizado para derivar un producto, bien porque lo desconoce o bien porque no lo recuerda. Ante este obstáculo la alumna no se queda parada, sino que, como sujeto activo, aplica un procedimiento que, aunque erróneo, posee una lógica interna: "derivo el primero, derivo el segundo y los multiplico". En la base de este error, que por cierto ha sido relativamente frecuente, hay un problema más de fondo: los alumnos, probablemente también aquellos que recuerdan el algoritmo y lo resuelven correctamente, no comprenden qué significa derivar un producto, y por eso cuando tienen que "deducirlo" lo hacen mal.

En el segundo ejemplo, otra alumna deriva incorrectamente dos simples polinomios. Este error se cometió en el ejercicio 1.a) de la prueba final, en el que hay que derivar la potencia de un cociente. Es curioso observar cómo la alumna sabe derivar una potencia, sabe derivar un cociente, pero cuando tiene que derivar un polinomio, lo hace mal. Aunque está corregido por el profesor, lo que la alumna hizo fue derivar $(2x^3+x^2+1)$ como $(3x^2+2)$ y (x^3-2) como (3). Este es un error que se repite a lo largo de todo su examen: la alumna puede derivar cualquier función (logarítmica, exponencial, raíces...), pero cuando llega a los términos de los polinomios, comete errores en los que casi siempre equivoca el grado de la función derivada. Es posible concluir que esta alumna no ha interiorizado que la derivada de un polinomio de grado n será un polinomio de grado n-1.

- **Dificultad para aplicar algoritmos y resolver procesos de cálculo**:

Aunque esta parte es la que menos dificultades ha ofrecido en general, conviene tener en cuenta un problema que ha tenido cierta presencia a lo largo de toda la intervención y es que, a medida que el aprendizaje iba avanzando y las funciones a derivar se iban complicando, algunos alumnos tenían problemas para reconocer cuál era la función principal y cuál era el orden de derivación en ejercicios en los que se combinaban distintas funciones. Por ejemplo, en un ejercicio similar al 1.a), en el que hay que derivar la quinta potencia de un cociente, algunos alumnos preguntan "si la derivada es de una potencia o de un cociente". En un ejercicio como el 4 de la misma prueba objetiva, algunos preguntan "si primero se hace el logaritmo o el cociente", y en otros similares vistos en clase, como puede ser la raíz cuadrada de un cociente, la pregunta es parecida: "¿se deriva primero el cociente o la raíz?"

Estas cuestiones que parecen elementales para quien pueda leer este trabajo, son un quebradero de cabeza para el alumno. Uno puede pensar que cualquier alternativa de resolución que no sea la correcta conduce inmediatamente a una situación absurda de la que el alumno se dará cuenta y le conducirá a rectificar, pero en la práctica no es así. Ante dudas como estas, algunos alumnos pasan de la duda y perplejidad iniciales a la elección de una alternativa que, aunque sea incorrecta, intentan desarrollar hasta el final con resultados cuanto menos sorprendentes.

- **El lenguaje simbólico matemático**:

La necesidad de traducir del lenguaje natural al matemático y viceversa, manejar los símbolos y la sintaxis y conocer su significado, está presente en cualquier aspecto de la asignatura que se quiera tratar. En este grupo ha habido importantes dificultades en este sentido a diferentes niveles, que van desde el uso incorrecto de paréntesis, corchetes, signos de igualdad (en general les cuesta mucho utilizar correctamente los paréntesis, saber cuándo tienen que ponerlos y cuándo no, quitarlos correctamente y respetar las reglas de los signos...) hasta la incapacidad de aplicar los algoritmos que han aprendido a desarrollar a la resolución de un problema. La conclusión es que, aunque la mayor parte de los alumnos aprende a derivar de forma correcta distintas funciones, saber cuándo y cómo puede aplicar esto a la resolución de problemas de la vida real es algo que queda, al menos por ahora, fuera de su alcance.

- *Otras dificultades relacionadas con:*

    - **El clima del aula y del centro**:

En este caso particular, dada la edad de los alumnos, sus situaciones vitales y las motivaciones que les llevan al aula, la disciplina no ha sido en ningún caso un problema. La gran dificultad en este sentido viene de la enorme diversidad, en todos los sentidos, que existe dentro del aula, como ya se explicaba cuando se hablaba del alumnado, sobre todo en cuanto a conocimientos previos, ritmos de aprendizaje y motivación. Esto ha supuesto un escollo a la hora de diseñar las actividades a realizar en el aula.

    - **El ambiente que rodea al alumno**:

El contexto familiar, cultural y social, la situación laboral y familiar con sus distintas obligaciones y responsabilidades y las diferentes motivaciones e intereses de los alumnos ha constituido otra importante dificultad, reflejada sobre todo en el alto grado de absentismo y la irregularidad del grupo que asistía a las clases. Algunos alumnos faltaban mucho, otros faltaban de vez en cuando y otros asistían siempre, de modo que, pasadas dos semanas, algunos estaban completamente desconectados de la unidad, otros venían un día pero no estaban el día anterior y al revés, y otros iban a buen ritmo y se aburrían si el profesor se detenía a explicar cosas ya vistas anteriormente.

5.3 Propuesta de actividades de mejora

En este apartado se proponen algunas actividades y líneas de actuación pensadas para tratar con las dificultades que se han detectado en el aula y que se exponen en el punto anterior. Es importante, por tanto, contextualizar desde el principio el ámbito de aplicación e insistir en que aunque algunas de las propuestas pudieran ser trasladadas con éxito a otros casos, en general se trata de medidas y actividades pensadas para un centro, un grupo de alumnos y una unidad didáctica concretos, los descritos en 5.2.

Propuestas para tratar dificultades de sentido, comprensión de conceptos y lenguaje simbólico

Como explicaba más arriba, la falta de sentido, la incapacidad de entender los conceptos y de manejar el lenguaje simbólico matemático han sido las dificultades más importantes detectadas en el aula. Además, como se explica con mayor detalle en el capítulo 6, parece evidente que existe un alto consenso en este punto entre todas las fuentes que nutren este trabajo.

Por esta razón, se proponen una serie de actividades y líneas de trabajo que sirvan para mejorar esta situación.

- *Actividad para comprender la derivación desde el lenguaje natural*

Se ha hecho ya referencia a la doble naturaleza que presentan las matemáticas como ciencia y asignatura en la escuela: por un lado, las matemáticas están llenas de conceptos abstractos que hay que comprender. Por otro lado, la resolución de problemas y la aplicación práctica de dichos conceptos implica resolver correctamente algoritmos y procesos de cálculo. Generalmente, esta segunda dimensión es la que recibe mayor tratamiento en el aprendizaje de las matemáticas, quedando la primera en cierto modo soslayada.

El problema es que muchas veces el concepto y el algoritmo que lo resuelve se presentan sin la menor relación entre ellos. Aplicado a este tema, podría decirse que se pone menos empeño en transmitir a los alumnos ideas o ejemplos que les ayuden a entender lo que es una derivada que en que sepan aplicar las reglas de derivación aunque no sepan muy bien lo que están haciendo. Es más, los libros de texto suelen empezar esta unidad con la definición de derivadas como el cálculo de un límite, lo que puede resultar inoportuno si los alumnos tampoco saben lo que es un límite. Evidentemente, se puede aprender a derivar de este modo, pero seguramente la motivación sería mayor si se tuviera conciencia de lo que se está haciendo, aunque sea de forma vaga y poco concreta, como suele ser al principio.

En el caso del grupo de mi intervención esta tesis tiene bastante significado, dado que el profesor tutor de la asignatura organiza el currículo de modo que, cuando se explican derivadas, aún no se han estudiado límites de funciones, ni su significado ni su cálculo.

Este ejercicio, sencillo y seguramente poco riguroso desde un punto de vista matemático, pretende ligar el concepto de derivada al lenguaje normal de todos los días, de manera que más adelante, cuando el alumno esté derivando y piense “realmente, ¿qué estoy haciendo? ¿Para qué sirve?", tenga herramientas para situarse y encontrar una respuesta intuitiva. El objetivo es aproximarse de una manera intuitiva al concepto de derivada y familiarizarse con él mediante su relación con el lenguaje cotidiano, y sentar las bases para entender el concepto de derivada de una función como expresión de la variación de la propia función. A continuación se explica la dinámica de la actividad.

Una función es algo que varía. Cuando escribimos f(x)=... cualquier expresión, lo que significa es que existe algo, a lo que llamamos función, que varía dependiendo de los valores que vaya tomando x, a la que llamamos variable independiente. A veces, f(x) se llama con la letra "y", que es la variable dependiente.

Una función puede ser el beneficio de un comerciante que venda discos, o patatas. El beneficio del vendedor dependerá directamente de cuántos discos o patatas venda. En este caso, lo que varía, es decir, la función f(x), será el beneficio del comerciante. La variable independiente (la x) sería aquello que hace que el beneficio aumente o disminuya, es decir, los discos o las patatas.

A veces no nos interesa saber cuánto vale una función en un punto concreto, sino que nos es más útil conocer de qué forma varía la función. En el ejemplo anterior, el comerciante que vende discos los tiene que comprar antes a un precio menor a una distribuidora. Es posible que no le interese comprar pocos discos, porque si hace grandes pedidos le salgan más baratos. Pero también es posible que no le compense pedir muchos discos, porque los que no venda suponen una pérdida de dinero. Es decir, que al comerciante no le interesa tanto saber cuánto va a ganar si vende 20 discos *como saber qué tiene que hacer para que su beneficio crezca más rápidamente.*

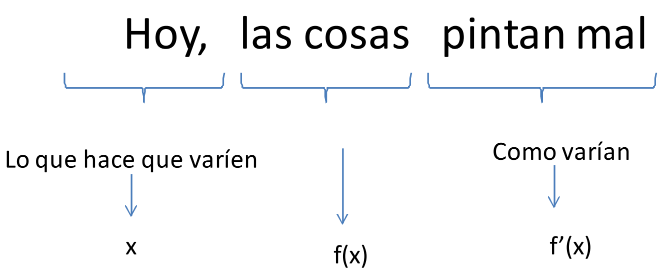
Pues bien, las matemáticas nos brindan una herramienta muy útil para conocer la forma en que varía una función: las derivadas. La derivada de una función es otra función que nos explica cómo varía la primera. Veamos otros ejemplos a través de frases que escuchamos todos los días:

Ejemplo 1: "Hoy, las cosas pintan peor que hace unos años".

En esta frase hay algo que varía, que son "las cosas". Las cosas hace años estaban mejor, y ahora parecen estar peor... Por tanto, lo que varía, la f(x), son las cosas.

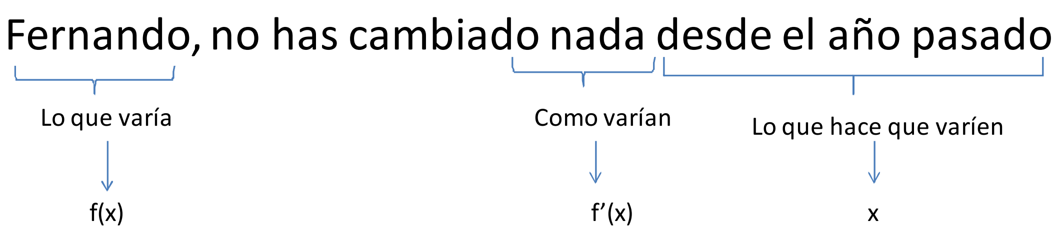
Pero, ¿en función de qué varían las cosas? Claramente se ve que varían en función del tiempo: ayer estaban mejor, hoy están peor. Es cuestión de tiempo que hayan empeorado o que vuelvan a mejorar... Por tanto, la variable independiente, lo que hace que varíen, es el tiempo, en esta frase, el valor que toma el tiempo es “hoy”.

Por último, habría que preguntarse cómo varían: la respuesta es que mal, las cosas “pintan mal”. La manera en que varía una función es la derivada de la función, por lo que f’(x) en este caso es “pintan mal”.



Ejemplo 2: Fernando regresó a casa por Navidad, y su abuela le dijo: “Fernando, no has cambiado nada desde el año pasado”.

En este caso, el que cambia o no cambia es Fernando. Lo que hace que cambie o deje de cambiar es, de nuevo, el tiempo y la manera en la que cambia es, de hecho, “no cambiando”, dado que no ha cambiado nada en el último año. Es decir, que la función Fernando no ha cambiado, por tanto, su derivada será cero.



Trabajo de los alumnos: buscar tres ejemplos similares de variaciones en el lenguaje coloquial, e identificar los elementos matemáticos presentes en ellos: función que varía, en función de qué varía y derivada, es decir, cómo varía. Terminado el trabajo se ponen en común y se corrigen posibles errores o malentendidos.

Esta actividad se ha llevado a cabo dentro del aula de intervención. Resulta curioso comprobar cómo al final de la unidad didáctica algunos alumnos de esta clase tienen, al menos, la noción de la derivada como "algo que nos dice cómo varían las cosas", es decir, la derivada como razón de cambio entre variables, mientras que a los alumnos de 2º de bachillerato, con los que se trabaja desde el comienzo con la definición de derivada como límite, les cuesta bastante más explicarlo de esta manera.

- *Actividad para mejorar la comprensión de la función derivada*

Veíamos anteriormente el caso de una alumna que, sabiendo derivar las funciones generales, fallaba sistemáticamente cuando tenía que derivar monomios sencillos. Este error se ha repetido en ciertos alumnos del grupo y lleva a concluir que muchos de ellos no han asumido la derivada de una función polinómica como otra función de un grado inferior. Esto tiene repercusiones particularmente graves cuando pensamos en la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a una curva en un punto o en aplicaciones físicas como la velocidad y la aceleración como derivadas de una trayectoria.

Por ello, se propone realizar actividades en clase (en el aula de informática) que consistan en resolver ejercicios con el software Wiris, que es un programa de cálculo especialmente indicado para su uso escolar. Wiris sirve para trabajar en el aula prácticamente todos los bloques de contenidos de las matemáticas, además de permitir el trabajo on line, accediendo por ejemplo desde la web de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid (EducaMadrid, 2013). Algunas editoriales también aportan el software con sus libros, así como actividades específicas para trabajar con él, como es el caso del libro de 1º de Bachillerato de Matemáticas de Bruño (Arias Cabezas, 2008). En este caso, se propone resolver con su ayuda algunas derivadas para posteriormente dibujar las funciones primitiva y derivada, observar su apariencia y relación y deducir las características de una en función de la otra. A continuación se recogen algunos casos que pueden servir como ejemplo ilustrativo.

Utilizando Wiris:

- Derivar la función $y = x^2$. Representar gráficamente, en el mismo marco, la función y su derivada. ¿Qué conclusiones sacas?

- Derivar la función $y = 1/5\ (x^2)$. Representar gráficamente, en el mismo marco, la función y su derivada. ¿Qué conclusiones sacas?

- Hallar las derivadas consecutivas de $0.25\ x^3 - x^2 + 3x - 4$. Representar gráficamente, en el mismo marco, la función y sus derivadas. ¿Qué conclusiones sacas?

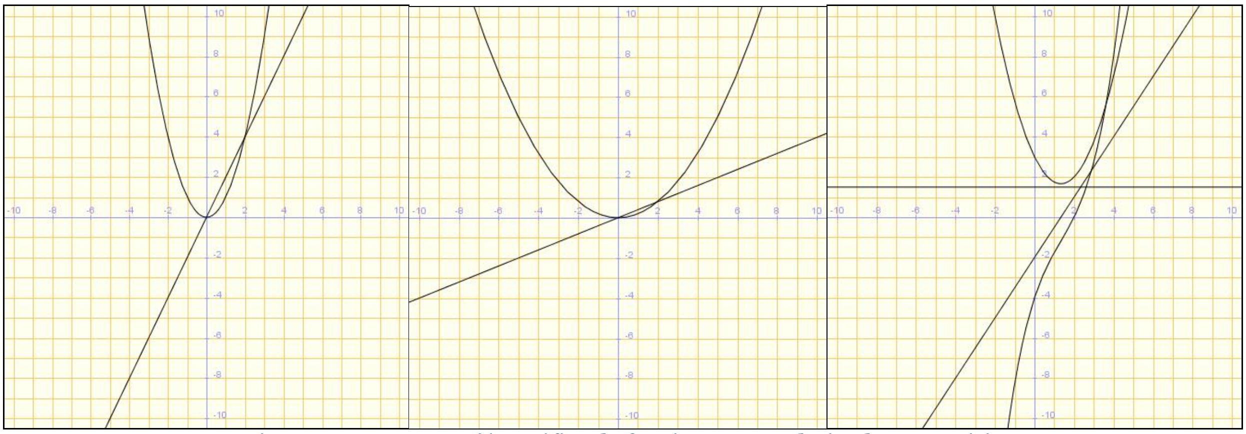


Figura 9. Representación gráfica de funciones y sus derivadas con Wiris

En la Figura 9 se representan gráficamente las funciones propuestas en la actividad y sus derivadas. El hecho de que el alumno tenga delante la representación gráfica de las funciones con las que normalmente trabaja de forma analítica facilita la comprensión de su significado. Así, se puede comparar la apariencia de las funciones parabólicas del primer y segundo ejercicio, ver a qué se deben las diferencias entre ambas (una más cerrada y otra más abierta), analizar también las diferencias entre sus derivadas (una de mayor pendiente, la correspondiente a la parábola más cerrada, y otra de pendiente menor) y razonar sobre por qué se dan, estudiar la función derivada en relación a la función original y razonar sobre el grado y apariencia de una y otra (la parábola cuadrática es una curva y su derivada, una función lineal, es una recta). En el último gráfico se observa fácilmente cómo la derivada de una función siempre va dando como resultado una función de un grado inferior, y cómo representadas estas gráficamente tenemos la clásica forma de una función de tercer grado, que derivada da una parábola cuadrática, que derivada da una recta inclinada, que derivada da una constante.

Este ejercicio se hizo en el aula con los alumnos de la intervención, pero en su momento se limitó a resolver con el programa algunos de los ejercicios hechos en clase. Seguramente repetir la experiencia desde este enfoque didáctico repercuta en la mejor comprensión de los conceptos por parte de los alumnos.

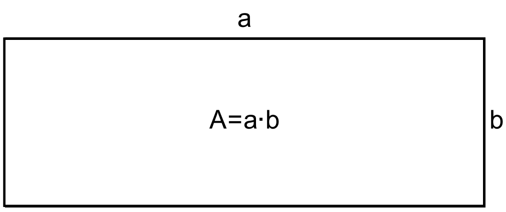
- *Actividad para mejorar la aplicación de algoritmos de cálculo de derivadas*

A medio camino entre la falta de comprensión de sentido y el error por dificultades de la memoria o la falta de atención se encuentran las aplicaciones erróneas de los algoritmos de derivación. Uno de ellos, relativamente frecuente, es el ejemplo ya comentado en 5.2 en el que para derivar un producto una alumna derivaba los factores y realizaba la multiplicación. Cabe pensar, por un lado, que los alumnos que han cometido el mismo error lo han hecho porque no recordaban el algoritmo para derivar un producto y han actuado con cierta lógica (si bien errónea) de este modo. Pero también es necesario pensar que este modo de resolver no sólo implica un error memorístico, sino una falta de comprensión última de lo que es derivar y, en concreto, de lo que es derivar un producto.

Por esta razón se propone como actividad de mejora la demostración de algunas de las fórmulas de derivación (no todas serán posibles, tal vez sólo las más sencillas) que los alumnos suelen aprender de memoria, de un modo alternativo que resulte intuitivo y fácilmente comprensible para el alumno. Es importante resaltar esto: la demostración formal a partir de la definición de derivada como límite no sirve a este propósito. El objetivo es poner a disposición de los estudiantes una explicación de la fórmula que tenga sentido y de la que puedan echar mano en un momento de duda. A este respecto, la demostración formal basada en el límite no sólo no aclara nada al alumno, sino que puede añadir aún más confusión.

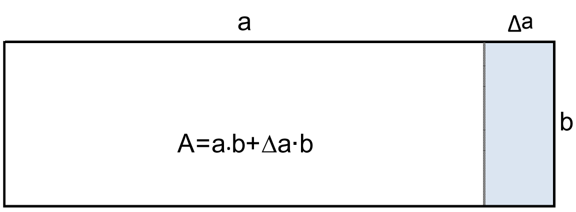
En concreto, se propone la demostración de la regla de derivación de un producto, por ser un error común en un alto número de alumnos y porque su demostración partiendo del cálculo de la superficie de un rectángulo resulta bastante didáctica y ayuda a memorizar el algoritmo. La actividad se expone a continuación.

Fíjate en el rectángulo de la figura, de dimensiones a y b:

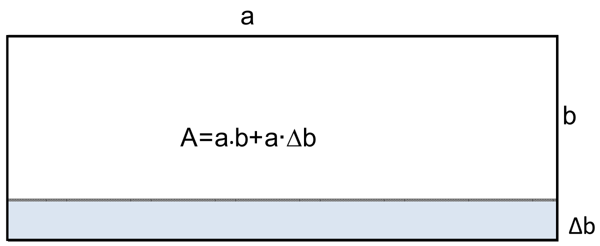


¿Cuál es su superficie?

Imagina que el rectángulo es el tablero de una mesa, que se queda pequeña para una comida familiar que queremos organizar. Para resolver el problema, añadimos otro tablero más pequeño, de dimensiones Δa y b. ¿Cuál será la nueva superficie?



Imagina ahora que hubiéramos ampliado la mesa añadiendo un tablero de dimensiones a y Δb. ¿Cuál sería el área del nuevo tablero?



Relaciona esto con la derivada de un producto. Si la derivada nos dice cómo varían las cosas, ¿cómo varía el área del tablero? ¿Cómo varía, por tanto, un producto?

Lo que varía el área es en este caso lo que aumenta, es decir, el área nueva que añadimos a la ya existente. Por eso “lo que varía el área” es siempre una dimensión por lo que se añade de la otra. La derivada de un producto, es decir, la manera en que varía un producto, por tanto, es la suma de lo que varía un factor por el segundo sin variar más el primero sin variar por lo que varía el segundo.

Es posible también el razonamiento a la inversa, partiendo del algoritmo de la derivada del producto: en la primera ampliación, lo que varía es a (la variación es Δa) y b no varía, por lo que la derivada de b es 0 (Δb=0), por eso por eso hay un solo sumando al aplicar el algoritmo: A=a·b+Δa·b+a·Δb= a·b+Δa·b. En la segunda ampliación, sólo varía b, por lo que Δa=0 y A=a·b+a·Δb. En total lo que varía el tablero es A=a·b+Δa·b+a·Δb, es decir, la manera en que varía un producto es el primer factor por lo que varía el segundo más el segundo factor por lo que varía el primero.

Propuestas para tratar dificultades relacionadas con el clima del aula

Ya se ha explicado al hablar del alumnado y de las dificultades relacionadas con el contexto en el que se mueven y el clima del aula que el principal problema en este caso no ha sido disciplinario, sino que ha tenido que ver con las enormes diferencias detectadas en cuanto a conocimientos previos, ritmos de aprendizaje, situaciones personales, asistencia a clase y motivación hacia la asignatura. El resultado de todos estos elementos mezclados era una clase extremadamente heterogénea en la que coexistían una buena proporción de alumnos que seguían sin problema las explicaciones al mismo tiempo que un buen número de estudiantes que habían faltado en días anteriores y estaban perdidos en la materia.

Para solucionar este problema se propone una mejora en la metodología que consiste en lo que he dado en llamar clases de “*dos velocidades*”.

En estas clases los alumnos trabajan en grupos pequeños, de dos o tres personas a lo sumo. La agrupación es libre, aunque si el profesor percibe que dos alumnos de los que van más atrasados están juntos les propondrá cambiar de compañeros. La dinámica de la clase es la siguiente: el profesor propone dos listas de tareas en la pizarra. La primera lista contiene ejercicios más básicos, muy similares a los realizados en las 2 o 3 sesiones anteriores. La segunda lista contiene ejercicios más avanzados que serían la evolución natural de las clases si todos los alumnos las estuvieran siguiendo al mismo ritmo. Los alumnos tienen libertad para hacer aquellos ejercicios que les atraigan más.

De este modo, se dan las siguientes situaciones: hay alumnos que van bien en la asignatura y optan por hacer los ejercicios difíciles, o los fáciles y los difíciles si les da tiempo, cosa que suele suceder. Hay alumnos que tienen menos soltura y hacen los fáciles para asegurar, y después pasan a los difíciles hasta donde les da tiempo. Por último, hay alumnos que se enfrentan por primera vez a los ejercicios fáciles porque en clases anteriores no estuvieron presentes.

Aunque cada alumno resuelve sus propios ejercicios, el hecho de estar sentados juntos hace que la interacción se dé de manera natural: en momento dado, el alumno aventajado puede estar resolviendo su ejercicio y ayudando al que sabe menos a hacer el suyo, explicándole los conceptos y los razonamientos.

Es necesario hablar, para terminar, del papel del profesor en esta metodología. La posibilidad de contar con **dos profesores dentro del aula** (mi profesor tutor y yo) facilita muchísimo marcar dos ritmos diferentes en la clase. El alumno no queda abandonado a lo que él y su compañero puedan saber, sino que ambos profesores pasean por el aula observando el trabajo y atendiendo de forma personalizada cuantas dudas y dificultades puedan surgir. Se trata de un recurso muy ventajoso de cara a la atención a la diversidad dentro del aula, que lamentablemente no parece disponible en la actualidad en la mayoría de los centros.

Durante mi intervención en el aula recurrí a esta metodología en dos ocasiones, al finalizar bloques de contenidos en clases que servían como repaso general. Con ello se consiguió que prácticamente ningún alumno quedara descolgado de la asignatura, como se comprobó al final de la unidad.

Propuestas para tratar los errores cometidos por los alumnos

Una de las conclusiones que se obtiene de las encuestas realizadas por los profesores es que, si bien el error del alumno supone necesariamente el punto de partida para un aprendizaje correcto, al mismo tiempo estamos acostumbrados a que sean también la representación de una evaluación objetiva de los conocimientos de nuestros estudiantes. "Tanto te equivocas, tanta nota tienes" sería una frase adecuada para describir una manera de evaluar muy frecuente en los centros escolares. Mi propia forma de hacerlo a través de una prueba final objetiva que acaparaba casi todo el peso de la nota del alumno también lo atestigua.

Parece claro que debemos mejorar en el tratamiento del error. Esto no quiere decir que se dejen de hacer exámenes, dado que el conocimiento hay que evaluarlo y la capacidad del alumno para exponer conocimientos y resolver ejercicios, problemas y situaciones de forma correcta y exacta forma parte de lo que hay que calificar. Sin embargo, una vez realizada y corregida la prueba, se puede tratar de una manera más cuidadosa buscando que el alumno aprenda de su error. A ello se encaminan estas dos propuestas.

- *Rehacer el examen en casa*

Se trata de que, una vez corregido el ejercicio, explicados los errores y la calificación obtenida según los criterios de evaluación al alumno, este se lleve su propio examen a casa para, con calma y fijándose en las indicaciones del profesor, lo vuelva a resolver. De este modo tendrá claro lo que hizo y lo que tenía que haber hecho, siendo más probable que aprenda de los errores cometidos y que evite otros similares en la siguiente ocasión.

- *Corregir exámenes de otros alumnos*

A veces es necesario descentrar al alumno de sí mismo, de modo que poniéndole delante el trabajo de un **compañero anónimo** pueda ser más objetivo sobre aspectos como el planteamiento, la limpieza, la corrección en el razonamiento y en la expresión escrita y los errores cometidos en la resolución de un problema.

Para esta actividad es necesario fotocopiar los exámenes de los alumnos, habiendo previamente ocultado los datos personales de cada uno de ellos. Si se puede hacer cruzando los alumnos de clases distintas, mejor que mejor, pues será tanto más impersonal para el estudiante qué examen le ha tocado. El examen, que no debe haber sido señalado por el profesor aún (es decir, debe estar limpio de correcciones), lo tendrá que trabajar en casa cada alumno corrigiendo los errores que detecte y proponiendo a su vez la solución que él estime correcta. Una vez en clase, se pondrá en común con el profesor que dará y quitará razones y aclarará las dudas. Por supuesto, la corrección y calificación real del examen es responsabilidad del profesor, lo que aquí se hace es usar exámenes reales y anónimos como un instrumento más al servicio del aprendizaje.

Con esta actividad el alumno no sólo se enfrenta a la tarea de revisar el error, que siempre resulta didáctica, sino que debe reflexionar sobre su propia forma de razonar y sobre su propio aprendizaje, detectando dónde está más seguro y dónde tiene más lagunas, qué sabe y qué duda. Además, se pone en la piel del profesor por un día, teniendo que corregir algo que no ha escrito él y que puede resultar fácil de entender… o todo lo contrario.

Propuestas para tratar dificultades de motivación del alumno

Ya en el punto 5.1 se evidenciaba cierto desajuste entre las metodologías empleadas habitualmente en el aula y aquellas que optimizaban el aprendizaje, apareciendo un cierto déficit de aplicaciones de los conocimientos aprendidos en clase al mundo real o, al menos, a una realidad un poco más cercana a los alumnos.

En este sentido, parece más sencillo motivar a los alumnos planteando ejercicios que tengan que ver con cosas que conocen o con aplicaciones prácticas de los conceptos estudiados, aplicaciones que el alumno entienda claramente y vea que pueden serle de utilidad bien en un futuro inmediato, bien en uno a medio plazo en el ejercicio profesional o en el desarrollo de estudios superiores.

Las actividades que aquí se proponen no tienen cabida estrictamente en esta unidad didáctica, dado que son aplicaciones de las derivadas que habrían de verse en unidades didácticas posteriores. Se han introducido aquí para ofrecer cierta continuidad al trabajo y con la finalidad de no dejar de explorar una dificultad tan importante como la motivación del alumnado.

Por tanto, es razonable pensar que el interés del alumno por las derivadas aumentará si ve que es algo útil para su vida, bien porque puede aplicarlo directamente a sus necesidades, bien porque aprecia que aunque para él no sean necesarias sí lo son para muchas otras personas, bien porque le ayuden a interpretar y comprender hechos físicos, acontecimientos, razonamientos y tomas de decisiones, etc. Por eso, las propuestas para trabajar la motivación del alumnado pasan por el planteamiento de actividades que suponen aplicar la derivación de funciones a campos concretos que pueden resultar de su interés. Se proponen como ejemplos los siguientes problemas.

- *Actividad de aplicación del cálculo de derivadas a la física*

Durante los primeros compases de una carrera del mundial, un fórmula uno presenta la siguiente trayectoria en función del tiempo:

$$s(t) = 3t^2 + t$$

Donde s es el espacio en metros y t el tiempo en segundos. Calcular:

- La velocidad alcanzada por el fórmula uno a los 5 segundos de arrancar
- La aceleración del coche
- La velocidad media entre los segundos 2 y 4

- *Actividad de aplicación del cálculo de derivadas a la economía*

Los ingresos y los costes de un fabricante de empanadas al final de un año vienen representados por las siguientes funciones, donde x es la cantidad de empanadas:

$$I(x) = -0.05x^2 + 1500x$$

$$C(x) = 0.001x^2 + 150x + 700000$$

¿Qué función expresa el beneficio del fabricante? ¿Cuántas empanadas debe fabricar para que el beneficio sea máximo?

- *Actividad de aplicación del cálculo de derivadas a la biología*

Un investigador del CSIC que estudia la reproducción de un determinado tipo de bacterias trabaja con una muestra inicial de 500000 ($5 \cdot 10^5$) bacterias. Por un error en la temperatura del laboratorio, la muestra no empezó a crecer hasta pasadas 4 semanas. La función que representa el tamaño de la muestra a lo largo del tiempo en semanas es la siguiente:

$$f(t)\begin{cases} 5 \cdot 10^5 \; si\; 0 \leq t \leq 4 \\ 5 \cdot 10^5 \cdot e^{t-1} \; \text{si } t > 4 \end{cases}$$

¿Cuál es la tasa de variación media en los intervalos de tiempo de 0 a 4 [0, 4] y de 0 a 8 [0, 8] semanas? ¿Cuál es la tasa de variación instantánea de la muestra en t = 8?

Otras líneas de trabajo con este grupo concreto relacionadas con la motivación que merece la pena destacar se centran en los dos siguientes aspectos:

- *Tratar de que los alumnos no pierdan el ritmo del grupo.* Aunque ya se ha tratado esto anteriormente, se aborda ahora desde el enfoque de la motivación. Si un alumno falta a una clase, puede ponerse al día con relativa facilidad. Si falta una semana, el sexto día de clase habrá desconectado y su motivación no será adecuada para realizar el esfuerzo extra de aprender lo atrasado y lo corriente.

  Interesarse por cada alumno, poner a su disposición los contenidos y ejercicios realizados en clase y ofrecerse para resolver dudas son cosas que el profesor puede hacer a este respecto. En el caso particular de este grupo, una medida que tomé fue la de entregar a todos los alumnos, cuatro días antes del examen, una fotocopia con todos los ejercicios que habíamos hecho en clase resueltos y explicados. Así, el que había asistido siempre podía contrastarlos y aquellos que habían faltado más tenían el material mínimo y suficiente para ponerse al día. Otra medida en relación con esto es implicar a los alumnos en la marcha de la clase como conjunto, de modo que se responsabilicen unos de otros y se fomenten actitudes solidarias y de colaboración.

- *Potenciar la idea de la clase como grupo.* Esta idea viene a completar la anterior: la sensación de formar parte de un grupo en el que somos importantes y en el que tenemos un papel ayuda a que el alumno se esfuerce por seguir aprendiendo y participando en el mismo grado que lo hacen los demás. La metodología del trabajo por grupos ayuda en este sentido. En mi intervención en el aula he recurrido a ella en momentos puntuales en clases de repaso, como ya he explicado anteriormente. Al trabajar por parejas o grupos, los alumnos más aventajados ayudaban a los más retrasados explicándoles cosas que ellos ya habían trabajado anteriormente o entendían mejor.

6. Discusión de los resultados

Si establecemos una comparación entre el marco teórico construido mediante la investigación bibliográfica (que podemos sintetizar en la clasificación de las dificultades habituales expuesta al final del apartado 4.2) y los resultados obtenidos en la investigación desarrollada en el capítulo 5, es necesario comenzar haciendo notar que ésta se ha centrado fundamentalmente en las dificultades que dependen de la propia asignatura de matemáticas como entorno sobre el que se puede influir directamente desde la propuesta de actividades o metodologías alternativas. Esto no significa que a través de la metodología no se pueda influir en aspectos propios del alumno, pero parece lógico pensar que el impacto será más reducido. Por ejemplo, podemos diseñar una actividad que ayude a los alumnos a comprender el significado de la derivada de una función, con lo que estamos intentando solucionar una dificultad propia de la asignatura (la comprensión de un concepto). Al mismo tiempo, posiblemente esta actividad ayudará a atraer y mantener la atención del alumno durante esa clase, pero es enormemente complejo tener en cuenta en su diseño otros aspectos ya mencionados como el desarrollo cognitivo del alumno, su capacidad de razonamiento y abstracción o su nivel de conocimientos previos, que no se pueden solucionar de la noche a la mañana.

Por lo demás y como conclusión global, hay que destacar la coherencia general entre las tres fuentes manejadas. Aunque los problemas concretos pueden ser diferentes en otros contextos y y las soluciones o mejoras propuestas en este caso podrían no funcionar en otros, las líneas generales y los grandes grupos en los que se han clasificado las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas muestran una buena correlación. Parece lógico que el caso particular de mi intervención (en un centro concreto, con un grupo de estudiantes y una unidad didáctica concreta) ofrezca un catálogo más limitado que el que se deduce de la investigación bibliográfica, y también que las opiniones expresadas por los profesores ahonden más en algunas de ellas, porque las preguntas han sido diseñadas para ello. Es necesario mencionar una limitación a cerca de los cuestionarios y las diferencias entre centros privados, concertados y públicos, y es que las conclusiones se han extraído tras encuestar a profesores de tres centros, uno de cada tipo. Para poder generalizar estos resultados con garantías la muestra y el estudio deberían ser más amplios.

Sobre las dificultades que tienen que ver con el alumno, las líneas de relación se han encontrado en lo relativo al uso de la memoria y el déficit de atención, pero sobre todo en los insuficientes conocimientos previos y la relación afectiva con la asignatura. Estos dos problemas no son menores, sobre todo por las importantes limitaciones que el docente encuentra para abordarlos.

La **falta de conocimientos previos** de un alumno en 1º de bachillerato (por poner el caso de mi intervención) no puede solucionarse por arte de magia en unos pocos días, menos aún cuando se tiene unos contenidos que cumplir, un calendario al que ajustarse y otros treinta alumnos a los que atender. Es este un problema de difícil solución, como se expresaba en el capítulo anterior.

En la misma línea, hay poco que se pueda hacer cuando un alumno llega al grado de **desmotivación** reflejado en el diálogo reproducido en el apartado 5.2, que por otro lado es verídico y casi literal. Seguramente la solución pasa por hacer lo posible para no llegar a esa situación, es decir, intentar interesar a los alumnos desde el principio, engancharles antes de que sea tarde. Algunas condiciones que se creen necesarias para que esto suceda se daban en el apartado 5.3.

Por otro lado el **lenguaje simbólico**, la traducción de éste al lenguaje natural, la modelización y **representación de la realidad** y la comprensión de **conceptos abstractos** son las dificultades más importantes que los alumnos encuentran en los contenidos de la asignatura de matemáticas. Paradójicamente, la resolución de algoritmos y procesos de cálculo es lo que menos les cuesta. Por un lado, estos resultados confirman la doble naturaleza concepto-proceso de la disciplina matemática, y por otro queda claro que esa dualidad no es simétrica sino desigual: en efecto, la matemática exige comprender los conceptos, las ideas, el lenguaje... y saber resolver los procesos de cálculo, los algoritmos, pero de ambas cosas la que más cuesta a nuestros alumnos es la primera: comprender qué son las cosas, saber lo que están haciendo. Curiosamente, muchas veces en los procesos de evaluación (la prueba objetiva realizada en la intervención en el aula así lo confirma) el énfasis se pone en lo segundo, que por otro lado no sirve para confirmar que el alumno esté comprendiendo lo que hace. Por poner un ejemplo, un alumno puede derivar perfectamente un polinomio pero no comprender que la velocidad se calcula como la derivada del espacio con respecto al tiempo porque indica cómo varía la posición de un móvil en función del tiempo.

Es interesante comparar la concepción de la función del **error** para los profesores encuestados en este trabajo y las posturas propias de algunas de las líneas de investigación recopiladas en el estado del arte. Así, mientras que Rico (1995) propone integrar de forma positiva el error como algo normal que contribuya en el aprendizaje de la asignatura, los resultados de los cuestionarios indican que, aunque la mayoría del profesorado está de acuerdo con esta idea, en la práctica una de las funciones principales del error sigue siendo la de determinar la calificación del alumno. Mi experiencia concreta en el aula confirma este aspecto: aunque el trabajo continuo durante toda la unidad didáctica y tenía repercusión en la calificación final, esta influencia era mínima comparada con el peso de la prueba objetiva, que se evaluaba atendiendo a los errores cometidos por los alumnos. Si el error debe ser el punto de partida para mejorar y afianzar el aprendizaje, se debe superar este reduccionismo.

¿Significa esto que hay que dejar de hacer y corregir exámenes tal y como estamos acostumbrados? No necesariamente. De alguna manera hay que evaluar el aprendizaje y no cabe duda que ser capaz de resolver un problema, una ecuación, una figura geométrica... de forma correcta forma parte de ese aprendizaje. Dicho de otro modo, la exactitud, el rigor, el resultado, en definitiva la capacidad de hacer las cosas bien y no cometer errores, son cosas que hay que evaluar en matemáticas. Lo que sí parece que se puede mejorar es la forma de tratar esos errores una vez se han cometido. Como expresaba uno de los profesores encuestados, "cuesta que un alumno aprenda de sus errores". Y sin embargo, hay que trabajar en esa dirección. A ese objetivo se dirigen algunas de la mejoras propuestas en el apartado 5.3 que tocan el tema de la evaluación.

En cuanto a otro tipo de dificultades, parece confirmado por las tres fuentes de que se nutre este trabajo que **el clima del aula** juega un papel capital en la función docente. Su impacto es desigual dependiendo del tipo de centro, ya que parece que en un colegio privado la disciplina es el menor de los problemas, mientras que en uno concertado su importancia aumenta y en uno público es la mayor de las dificultades. Es curioso ver cómo se aprecia la influencia de la diversidad en los centros: mientras que en los centros concertado y privado (donde hay una menor diversidad social, étnica y religiosa), la diversidad de ritmos de aprendizaje es la mayor dificultad, mientras que en el centro público (donde hay una enorme diversidad sociocultural debido a la elevada proporción de alumnos inmigrantes) la diversidad no se considera un problema, pero sí su más que probable efecto, es decir, un clima en el aula más difícil de gestionar. En el caso de mi intervención, el problema de la diversidad no lo producía la disciplina, sino la variedad de situaciones vitales, puntos de partida, ritmos de aprendizaje, disponibilidades y motivaciones que había en el aula.

Las dificultades relacionadas con la **metodología** nos llevan directamente a tratar con la pregunta por aquello que resulta atractivo a ojos de los alumnos, lo que considero muy relacionado con lo que en el estudio bibliográfico se denominaba como "actitudes afectivas" de los alumnos hacia las matemáticas. Es difícil no relacionar la aversión de muchos estudiantes por las matemáticas con el hecho de que no les guste aquello que más contribuye a su aprendizaje: la realización de tareas de manera autónoma. El gran desafío será hacer este trabajo atractivo para ellos. Por otro lado, parece que hay en la enseñanza tradicional de las matemáticas cierto déficit de relación con la realidad. Si en el estudio bibliográfico se manifestaba que las matemáticas se ocupan de aspectos t ajenos al mundo de los niños, los resultados parecen darle la razón a esta teoría. Es necesario relacionar lo que se estudia con la vida real y buscar aplicaciones en ámbitos de interés para los estudiantes. Esta tarea no es sencilla, pero exige ser abordada. Algunas de las propuestas del apartado 5.3 intentan apuntar en esta dirección.

Para terminar, cabe reflexionar brevemente sobre las actividades de mejora propuestas en el apartado 5.3. De todas las que he recogido, sólo he podido llevar a cabo dentro del aula algunas de ellas: la actividad para comprender la derivación ligada al lenguaje natural, el uso de Wiris para mejorar la comprensión del concepto de función derivada, las clases de "dos velocidades" con dos ritmos distintos y dos profesores y el trabajo en grupo para potenciar actitudes de responsabilidad y solidaridad entre los alumnos que reviertan en el bien de todos. En general creo que estas actividades y estrategias han funcionado bien y han mejorado la marcha de la clase, aunque la que hice con Wiris no tenía el enfoque didáctico que aquí le he querido dar y que creo que sería más provechoso en una futura ocasión.

De las propuestas que hago y no he podido llevar a cabo en el aula, además de este matiz en el uso de Wiris, considero de especial relevancia las dos actividades que propongo relacionadas con la evaluación de los alumnos y el aprendizaje de sus propios errores. Creo que ambas son interesantes, aunque la segunda tal vez lo sea más. Como contrapartida, también necesitaría una mayor cantidad de recursos y de tiempo para poder realizarla. El hecho de que mi intervención terminara con la evaluación y la entrega de calificaciones me imposibilitó poder hacer algo en este sentido, pero no conviene olvidar que el error cometido por el alumno es un suceso inevitable y necesario en el proceso de aprendizaje, que debe suponer un punto de partida para la correcta asunción de conceptos y destrezas, por lo que una vez corregidos ejercicios o exámenes considero necesario que el alumno trabaje sobre dichas correcciones.

7. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han identificado algunas de las dificultades y errores más frecuentes en el aprendizaje de la asignatura de Matemáticas en ESO y Bachillerato. Para ello se ha recurrido al análisis de tres fuentes que alimentan la investigación, de lo más general a lo más concreto: una búsqueda bibliográfica que se ha resumido en la redacción y posterior crítica de un breve estado del arte de la cuestión, una investigación de campo que recoge la opinión de una muestra de profesores de Secundaria y Bachillerato al respecto y la observación e intervención en el aula realizadas durante mi experiencia de prácticas en un centro educativo.

La investigación bibliográfica ha permitido sintetizar las dificultades más habituales en el aprendizaje de las matemáticas en los siguientes tres grandes grupos: **dificultades relacionadas con el alumno** (insuficientes conocimientos previos, dificultades relacionadas con la memoria y la capacidad de atención, dificultades relacionadas con el desarrollo cognitivo e intelectual y aspectos afectivos hacia la asignatura), **dificultades relacionadas con la asignatura** (la doble naturaleza conceptual y procesual de los objetos matemáticos, la naturaleza del pensamiento matemático que exige abstracción, generalización, rigor, idealización... y las dificultades propias del lenguaje simbólico matemático) y **dificultades relacionadas con otros aspectos** como el clima del aula y del centro, el currículo de la asignatura, la competencia del profesorado y el contexto propio del alumno.

Los cuestionarios pasados a los profesores de tres centros de la Comunidad de Madrid (uno público, uno concertado y otro privado) confirman en general la clasificación destilada del estudio del estado del arte, a la vez que ha servido para profundizar en algunos aspectos. En lo tocante a los **alumnos**, la opinión generalizada es que la cualidad más necesaria para el aprendizaje de las matemáticas es el esfuerzo y el trabajo personal y la mejor manera de motivarlos es potenciar la cara lúdica de las matemáticas y sus aplicaciones en la vida real en ramas como la ingeniería, la economía, la medicina... En relación con los **contenidos de la asignatura**, aquellos que ofrecen mayor dificultad a los alumnos son los conceptuales y el planteamiento y resolución de problemas, seguidos por las actitudes de aprecio y gusto por la materia. Los resultados obtenidos por bloques de contenidos parecen confirmar esa tendencia. En cuanto a la **metodología de las asignatura,** parece que hay cierta incongruencia en cuanto a cuál es la que optimiza el aprendizaje (el trabajo individual sobre ejercicios por parte de los alumnos y la aplicación de conceptos a la vida real), cuál la que más se utiliza (exposición magistral del profesor y trabajo individual del alumno) y cuál la que prefieren los alumnos (cualquier opción excepto la resolución de ejercicios individualmente). Por último, en relación con **otros aspectos como el clima del aula y el currículo**, no hay un consenso claro entre el profesorado de los distintos centros. Así, mientras que el clima del aula es la principal dificultad para la enseñanza de las matemáticas en el centro público, en el centro privado apenas supone un problema. La diversidad de ritmos de aprendizaje y capacidades de los alumnos es la primera preocupación en los centros concertado y privado y las particularidades de las matemáticas como asignatura es la tercera preocupación en general para los profesores. El currículo de la asignatura, su estructura y su distribución temporal, se sitúan por detrás de todas las anteriores.

La experiencia de observación e intervención en el aula se ha realizado en un 1º de Bachillerato nocturno de Ciencias Sociales de un centro público de Madrid sobre una unidad didáctica de introducción al cálculo diferencial y derivadas. Las dificultades más importantes que se han detectado en relación con **el alumnado** han tenido que ver con la escasez de conocimientos previos, los problemas de atención y memoria y la actitud hacia la asignatura. En relación con los **contenidos impartidos**, la dificultad más importante se ha detectado en la comprensión de conceptos y el manejo de lenguaje simbólico, más que en la resolución de cálculos y algoritmos. En cuanto a las dificultades relacionadas con el **clima del aula**, estas han tenido que ver con la diversidad de conocimientos previos, ritmos de aprendizaje, motivaciones y disponibilidad para el estudio y la asistencia. En general, estas conclusiones son congruentes con las líneas marcadas por la investigación bibliográfica y la opinión del profesorado.

Para terminar, se han propuesto algunas **actividades de mejora** destinadas a superar o paliar las dificultades detectadas y mejorar el aprendizaje en el marco del grupo y la unidad didáctica que han sido objeto de mi observación e intervención.

A la luz de todo lo expuesto se considera que el grado de consecución de los objetivos planteados en el apartado 3.1 es satisfactorio, siendo posible plantear algunas líneas de investigación futuras que completen y mejoren las conclusiones alcanzadas en el presente trabajo.

8. Futuras líneas de investigación

Como si de una muñeca rusa se tratara, este trabajo va de lo más general (la investigación bibliográfica y la opinión del profesorado) a lo más concreto (la observación e intervención en un aula determinada), por lo que las líneas de investigación que se abren abarcarán también algunos aspectos generales y otros más particulares.

En general, el trabajo se ha centrado en la investigación de las dificultades y errores más frecuentes en el aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque más cercano al cognitivo y centrándose sobre todo en una clasificación de dificultades y errores y el análisis de las causas. Otros enfoques como el neurológico pueden tener mucho que decir y otras líneas de investigación deben ser recorridas. En concreto mencionaré dos que me parecen especialmente relevantes.

La primera sería la que tiene que ver con **el currículo de la asignatura**: su estructura y temporalización, los objetivos, los contenidos y la evaluación. Algunas de las dificultades detectadas y expuestas a lo largo de este trabajo (como las que tienen que ver con la motivación del alumno, los conocimientos previos, la metodología óptima y el tratamiento de los errores y la evaluación de los conocimientos) si no apuntan claramente en esta dirección, al menos es preciso reconocer que deben ser miradas también desde esta perspectiva.

La segunda línea que considero importante destacar es la relacionada con la **formación del profesorado**. La manera en que el profesor percibe la dificultad y la trata, la capacidad para detectar el error, comprenderlo como parte necesaria del proceso de aprendizaje y utilizarlo de manera constructiva en él y la distribución de pesos entre formación técnica (en cuanto al conocimiento profundo de su asignatura y su necesidad y relación con la vida real) y pedagógica (en cuanto a capacidad de transmitir dichos conocimientos, tratar la diversidad presente en sus grupos de alumnos, preocuparse activamente por su bien, trabajar colaborativamente con sus compañeros, desenvolverse en el aula y en el centro…) son aspectos cuya influencia hay que considerar.

En un nivel más concreto, creo que después de la realización de este trabajo queda abierta la opción de realizar un estudio más amplio y significativo sobre la **opinión del profesorado de diferentes centros y contextos**. Es preciso reconocer la limitación del estudio de campo aquí presentado, una limitación marcada por el tiempo y las posibilidades materiales reales. Dicho estudio podría ser más provechoso tanto aumentando el número (y por tanto la representatividad) de la muestra seleccionada como recurriendo a técnicas más enriquecedoras como podría ser la formación de grupos de discusión de profesores y alumnos o el uso combinado de cuestionarios cerrados (más objetivos) y grupos de discusión.

En el estrato más particular, aparece como una clara línea para el futuro la posibilidad de **aplicar las propuestas de mejora** incluidas en este trabajo en el apartado 5.3 que no pude llevar a cabo en el aula por falta de tiempo o porque la planificación consensuada con mi profesor tutor no lo permitió. En concreto creo que es de especial interés el tratamiento de los errores cometidos por los alumnos después de su evaluación y la realización de actividades sobre ellos que faciliten el tratamiento del error como algo normal inherente al proceso de aprendizaje y como base sobre la que rectificar y construir un aprendizaje correcto.

Para terminar, y de nuevo en relación con las propuestas de mejora expuestas, sería interesante su aplicación en otros grupos de otros centros para confirmar su viabilidad y eficacia más allá del contexto particular en el que fueron concebidas.

9. Referencias bibliográficas

9.1 Referencias utilizadas

Arias Cabezas, J.M., Maza Sáez, I. (2008). *Matemáticas I Bachillerato*. Madrid: Grupo Editorial Bruño, S.L.

Castro Migal, A. J. (2009). Dificultades de aprendizaje. *Revista Digital Enfoques Educativos*, nº 42, 21-33. Recuperado de *http://www.enfoqueseducativos.es/enfoques/enfoques_42.pdf#page=21.*

Gil Cuadra, F., Rico Romero, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (1), 27-47.

IES Mariano José de Larra (2009). *Proyecto Educativo de Centro del Instituto de Secundaria "Mariano José de Larra"*. Material no publicado.

Instituto de Evaluación del Ministerio de Educación (2010). *Pisa 2009. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. OCDE. Informe español.*

Instituto Nacional de Evaluación Educativa del Ministerio de Educación (2012). *PIRLS – TIMS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. IEA. Volumen I: informe español.*

Pérez Vallejo, M. (2010). Dificultades de aprendizaje. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas*, nº 35. Recuperado de *http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_35/MARIA_PEREZ_1.pdf*

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez P. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rivière, A. (1990). Capítulo 9. Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En Marchesi, A., Coll, C. y Palacios, J. (compiladores), *Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar* (pp. 155-182). Madrid: Alianza.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática*, XI, 19-52.

9.2 Bibliografía recomendada

Allardice, B. S. y Ginsburg, H. P. (1983). Children's psychological difficulties in mathematics. En Ginsburg, H. P. (Ed.)*The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid (2013). Wiris on line. Recuperado de http://www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/index.html

Davis, R. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics*, Vol. 10, nº 3, 163-172.

10. Anexos

10.1 Cuestionario semicerrado

Ordena calificando de 1 a 5 por orden de importancia (1 menos importante, 5 más importante) los siguientes ítems sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáicas en ESO y Bachillerato. En caso de no rellenar la opción "otros", calificar de 1 a 4.

1 Las dificultades que **los profesores** encuentran en la enseñanza de las matemáticas son las que tienen que ver con:

El clima y la disciplina del aula	
La diversidad y las distintas capacidades y ritmos de aprendizaje de los alumnos	
El currículo, la estructura de la asignatura y el tiempo	
Las particularidades de la disciplina matemática: abstracción, lenguaje simbólico, modelización de la realidad, comprensión de conceptos, resolución de algoritmos y procesos de cálculo…	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

2 Las dificultades que **los alumnos** encuentran en el aprendizaje de las matemáticas son las que tienen que ver con:

El clima y la disciplina del aula	
Las capacidades y estilos de aprendizaje de los alumnos	
El currículo y la estructura de la asignatura	
Las particularidades de la disciplina matemática: abstracción, lenguaje simbólico, modelización de la realidad, comprensión de conceptos, resolución de algoritmos y procesos de cálculo…	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

3 Los **contenidos** que presentan mayor dificultad para los alumnos son:

Los conceptuales (comprensión de conceptos, "saber lo que están haciendo")	
Los procedimentales (algoritmos, reglas de cálculo, operaciones…)	
Los actitudinales (gusto por las matemáticas, motivación, utilidad…)	
El planteamiento y resolución de problemas (traducción del lenguaje natural al matemático, interpretación de enunciados y de resultados…)	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

4 Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en la **aritmética** son:

La comprensión del concepto de fracción y su tratamiento	
La introducción del número negativo y las operaciones con ellos	
El salto conceptual de los números racionales a los números irracionales	
El manejo de símbolos y algoritmos sin haber desarrollado antes un esquema conceptual propio de comprensión	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

5 Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en el **álgebra y el análisis** son:

El nuevo sentido de la igualdad como equivalencia de dos expresiones	
La introducción de incógnitas	
La comprensión de los conceptos, por ejemplo: **qué es** una ecuación, el límite la derivada de una función...	
El desarrollo de algoritmos y procesos de cálculo, por ejemplo: **cómo resolver** una ecuación 2º grado, resolver un límite, derivar una función trigonométrica...	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

6 Las dificultades más comunes que los alumnos encuentran en la **geometría** son:

La interpretación y modelización del espacio físico real mediante objetos geométricos ideales	
El aprendizaje de los teoremas clásicos de la geometría plana	
El aprendizaje de las propiedades matemáticas de los objetos geométricos	
El lenguaje simbólico propio de la geometría (fórmulas, expresiones, códigos y convenciones...)	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

7 La metodología y las actividades que **prefieren los alumnos** en clase de matemáticas son:

La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	
La realización de ejercicios por parte de los alumnos	
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

8 La metodología y las actividades que **optimizan el aprendizaje** y los resultados académicos son:

La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	
La realización de ejercicios por parte de los alumnos	
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

9 La metodología y las actividades que **más se utilizan** en el aula son:

La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra	
La realización de ejercicios por parte de los alumnos	
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real	
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

10 El **tratamiento de los errores** cometidos por los alumnos es, generalmente:

Un diagnóstico objetivo de conocimientos para asignar una calificación a cada alumno	
Un punto de partida para corregir deficiencias en el aprendizaje	
Un punto de partida para modificar y mejorar la programación de la asignatura	
Un factor necesario e inevitable en el proceso de aprendizaje	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

11 Las cualidades necesarias para ser un **buen alumno de matemáticas** son:

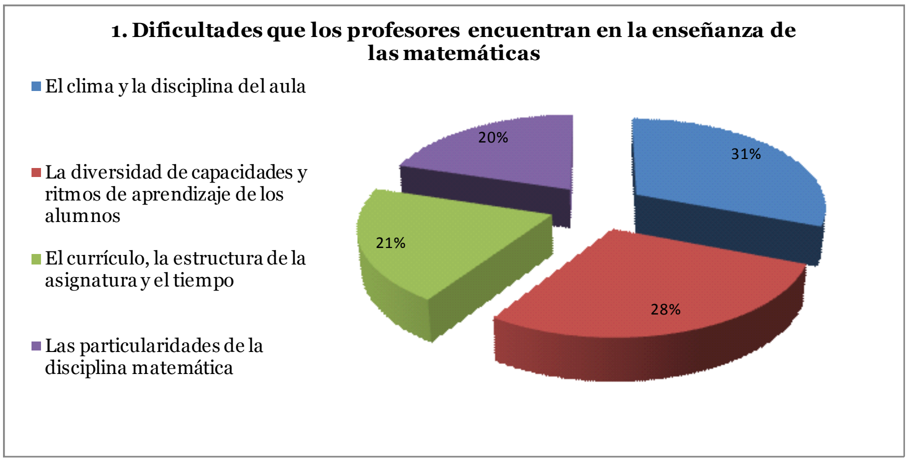
La motivación y el gusto por la matemática	
El esfuerzo y el trabajo personal	
Las buenas capacidades intelectuales, cierta predisposición natural	
La responsabilidad, solidaridad, participación...	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

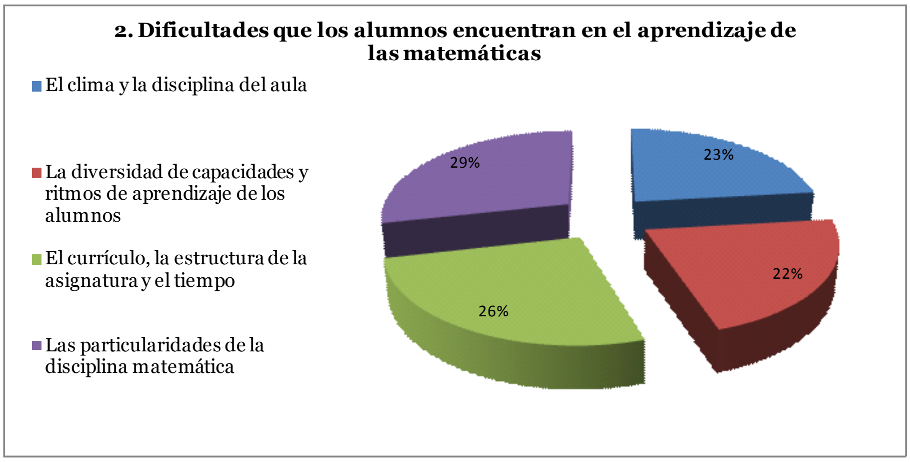
12 La **imagen de las matemáticas** que más motiva a los estudiantes de cara a su aprendizaje es:

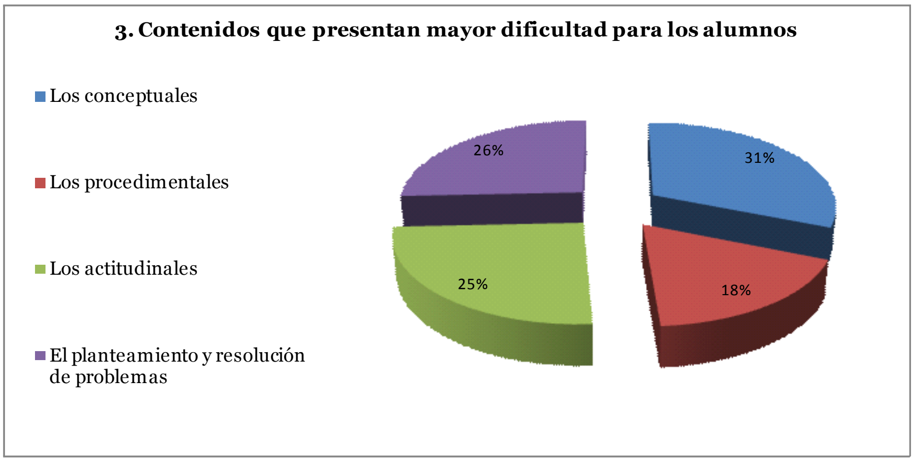
Las matemáticas como cálculo, razonamiento y resolución de problemas	
Las matemáticas como forma de conocimiento racional, riguroso, exacto	
Las matemáticas como medio para la creatividad, la curiosidad, las ideas poco frecuentes, su dimensión lúdica	
Las matemáticas como aplicación en física, ingeniería, economía, tecnología, medicina, sociología, deportes...	
Otros (explicar) / matizar alguna respuesta	

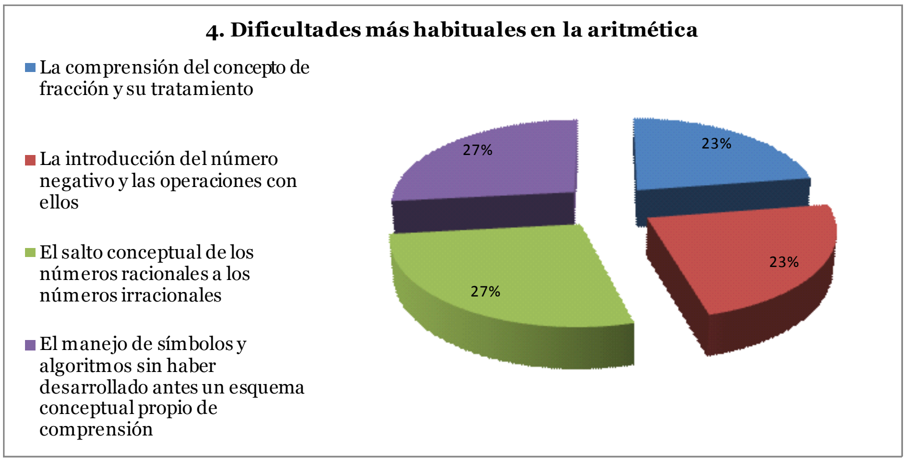
10.2 Resultados gráficos de las encuestas

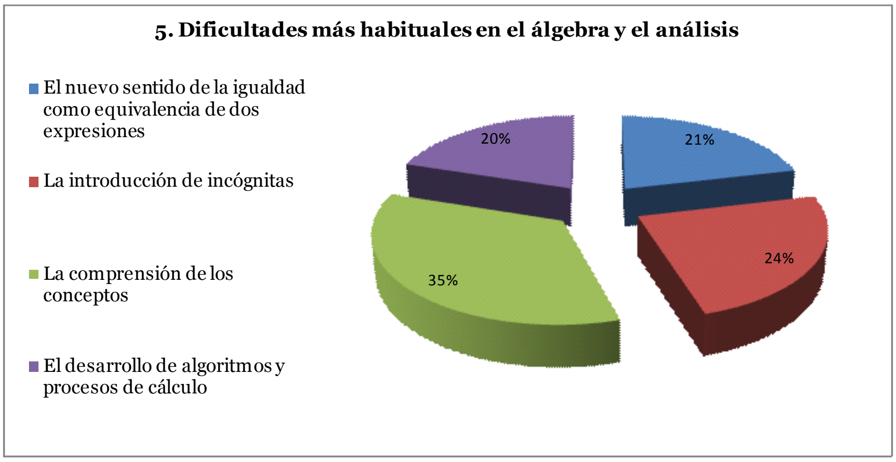
Resultados del IES Mariano José de Larra (centro público):

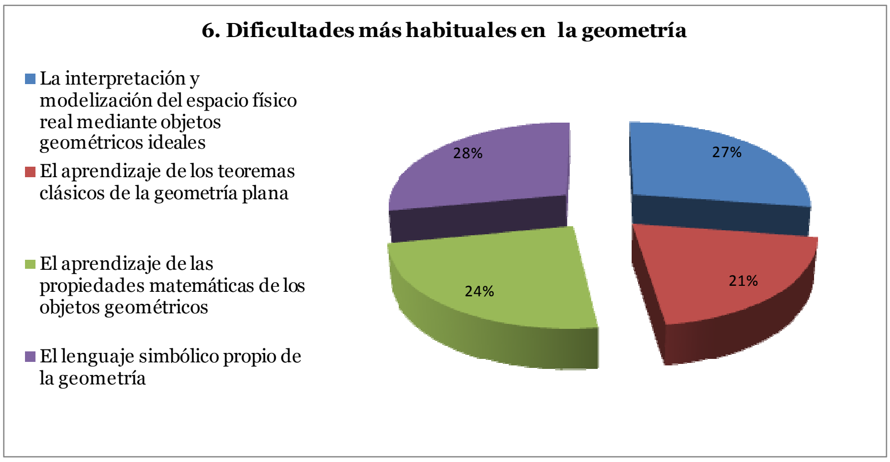


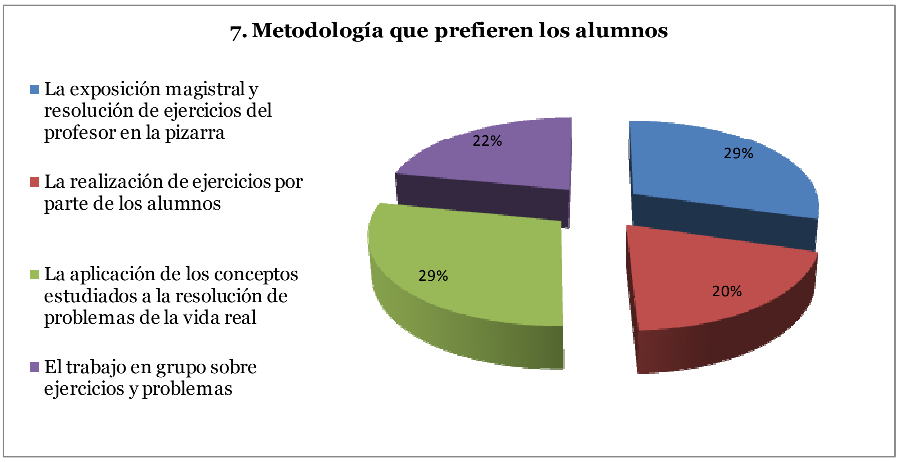


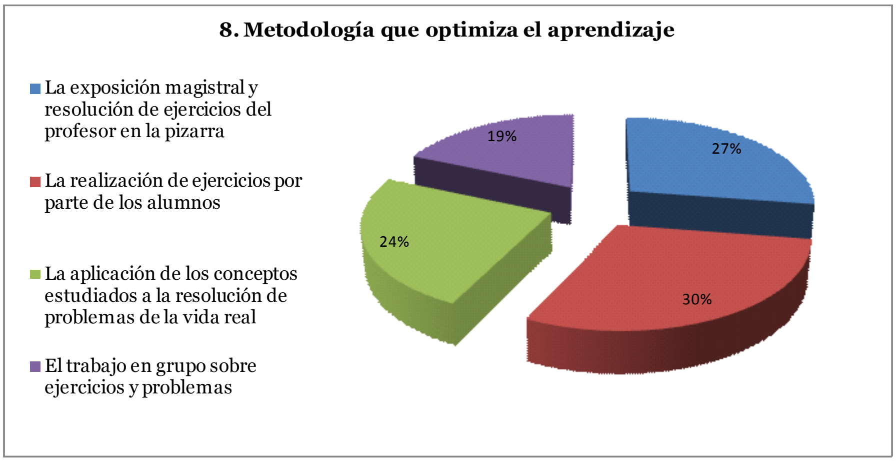


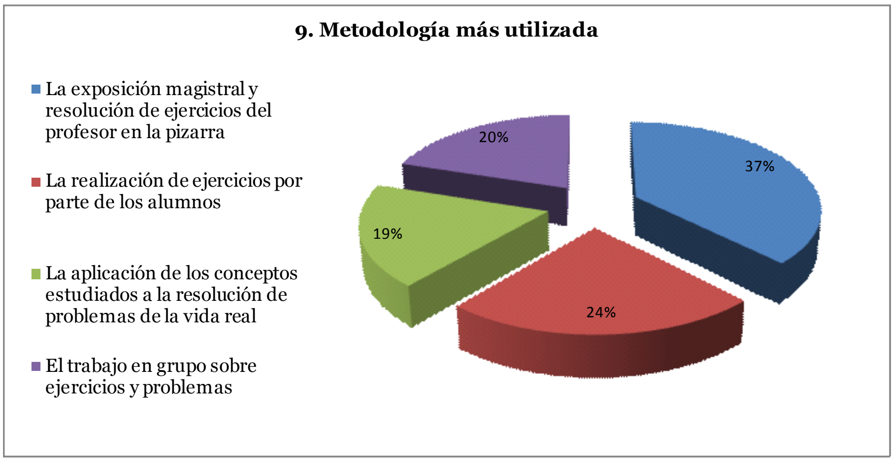

4. Dificultades más habituales en la aritmética
La comprensión del concepto de fracción y su tratamiento
La introducción del número negativo y las operaciones con ellos
El salto conceptual de los números racionales a los números irracionales
El manejo de símbolos y algoritmos sin haber desarrollado antes un esquema conceptual propio de comprensión
27%
23%
23%
27%

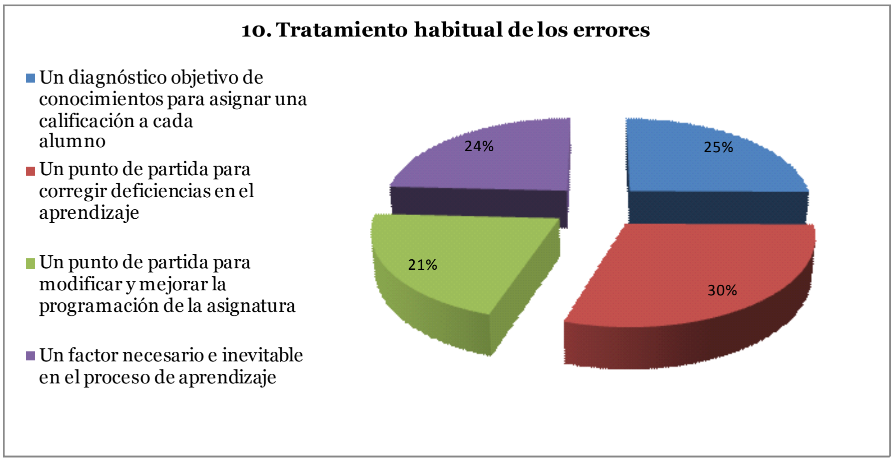

5. Dificultades más habituales en el álgebra y el análisis
El nuevo sentido de la igualdad como equivalencia de dos expresiones
La introducción de incógnitas
La comprensión de los conceptos
El desarrollo de algoritmos y procesos de cálculo
20%
21%
24%
35%

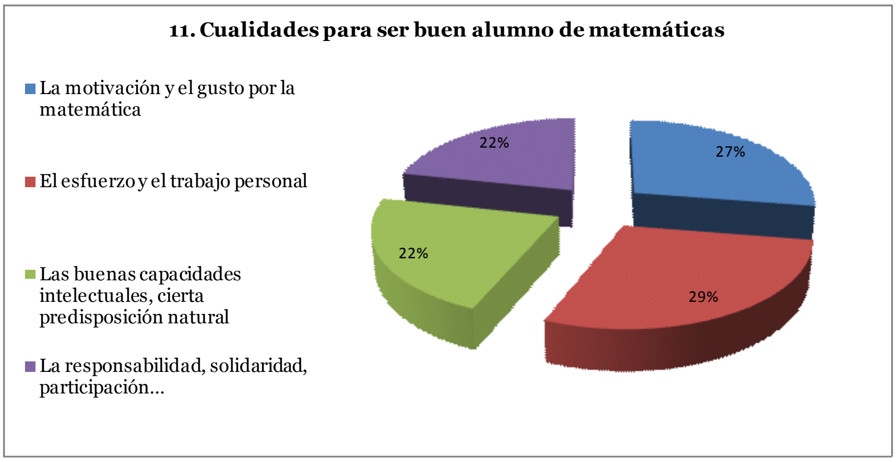

6. Dificultades más habituales en la geometría
La interpretación y modelización del espacio físico real mediante objetos geométricos ideales
El aprendizaje de los teoremas clásicos de la geometría plana
El aprendizaje de las propiedades matemáticas de los objetos geométricos
El lenguaje simbólico propio de la geometría
28%
27%
21%
24%

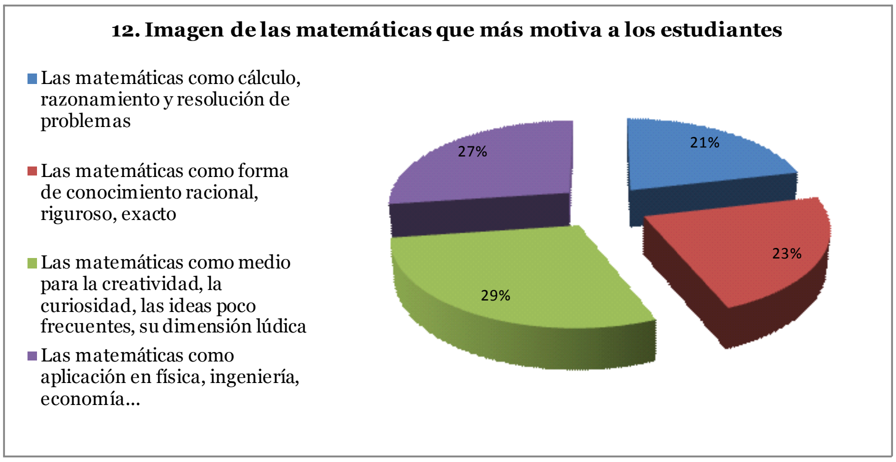

7. Metodología que prefieren los alumnos
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
22%
29%
29%
20%


8. Metodología que optimiza el aprendizaje
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
19%
27%
24%
30%

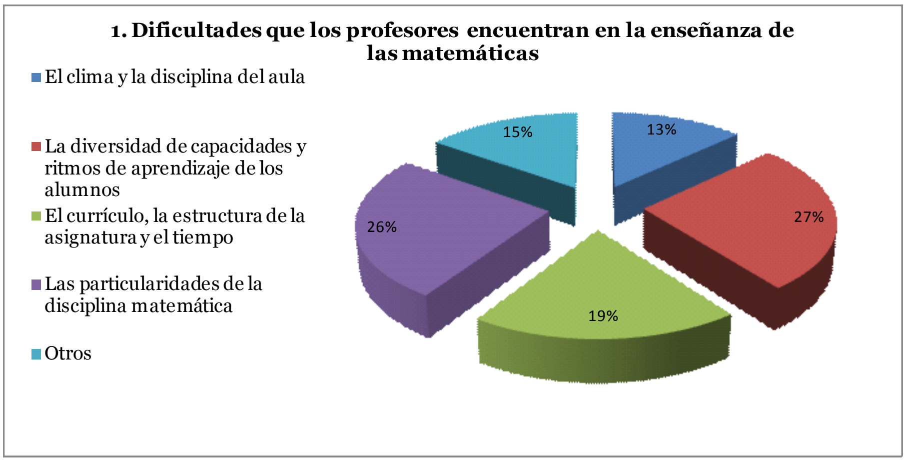

9. Metodología más utilizada
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
20%
37%
19%
24%

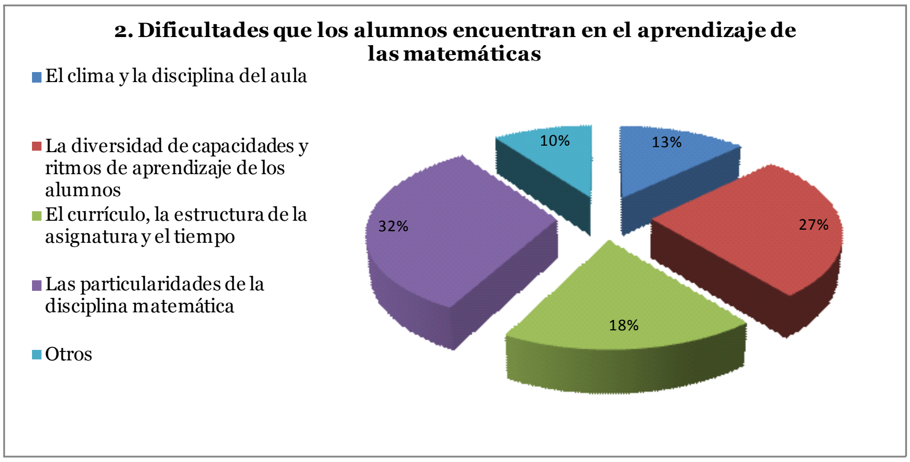

10. Tratamiento habitual de los errores
Un diagnóstico objetivo de conocimientos para asignar una calificación a cada alumno
Un punto de partida para corregir deficiencias en el aprendizaje
Un punto de partida para modificar y mejorar la programación de la asignatura
Un factor necesario e inevitable en el proceso de aprendizaje
25%
30%
21%
24%

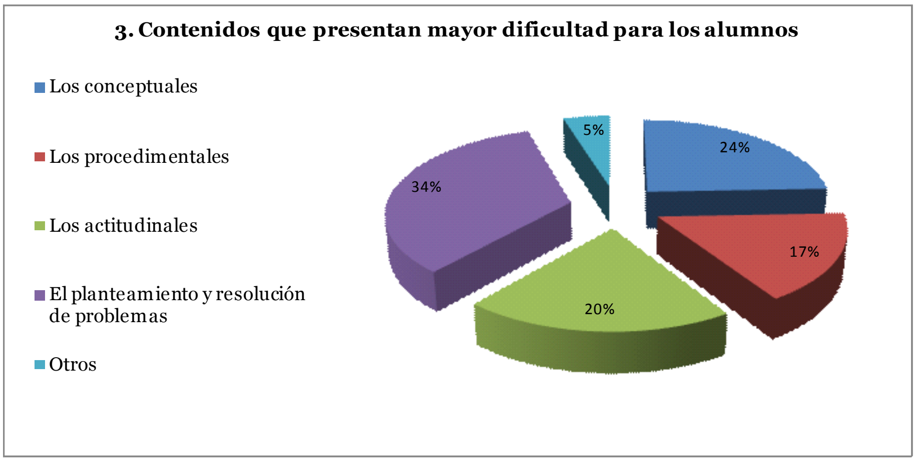

11. Cualidades para ser buen alumno de matemáticas
La motivación y el gusto por la matemática
El esfuerzo y el trabajo personal
Las buenas capacidades intelectuales, cierta predisposición natural
La responsabilidad, solidaridad, participación...
27%
29%
22%
22%

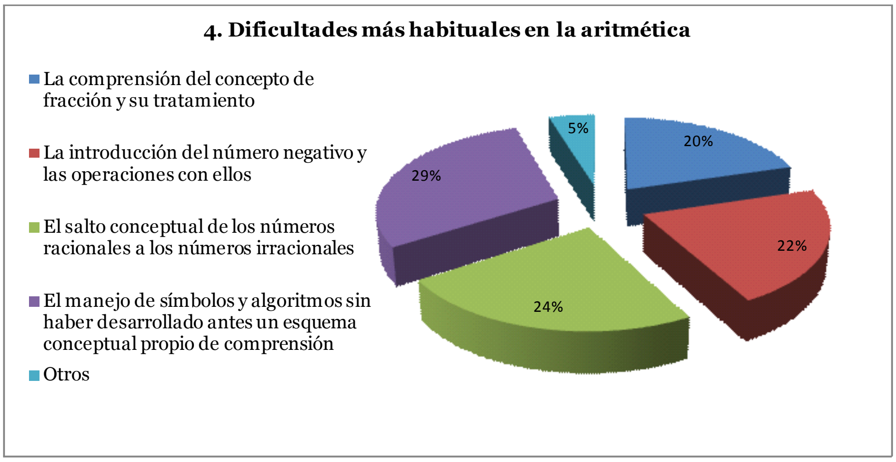

12. Imagen de las matemáticas que más motiva a los estudiantes
Las matemáticas como cálculo, razonamiento y resolución de problemas
Las matemáticas como forma de conocimiento racional, riguroso, exacto
Las matemáticas como medio para la creatividad, la curiosidad, las ideas poco frecuentes, su dimensión lúdica
Las matemáticas como aplicación en física, ingeniería, economía...
21%
23%
29%
27%

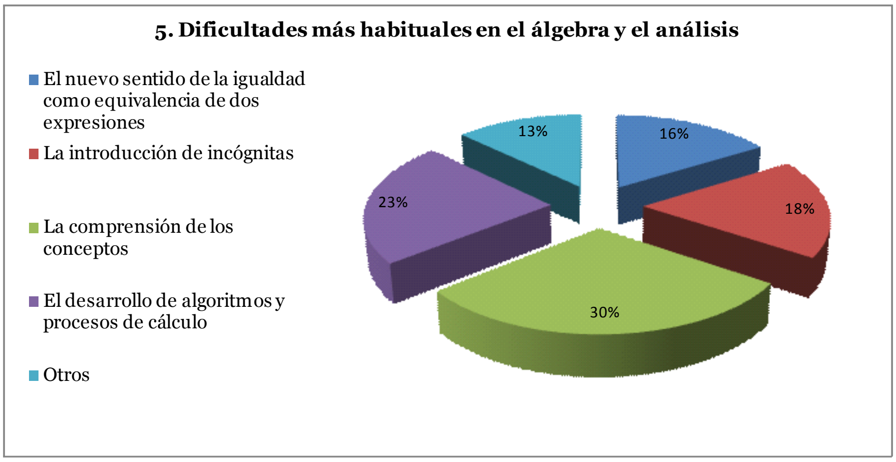
Resultados de San José del Parque (centro privado):

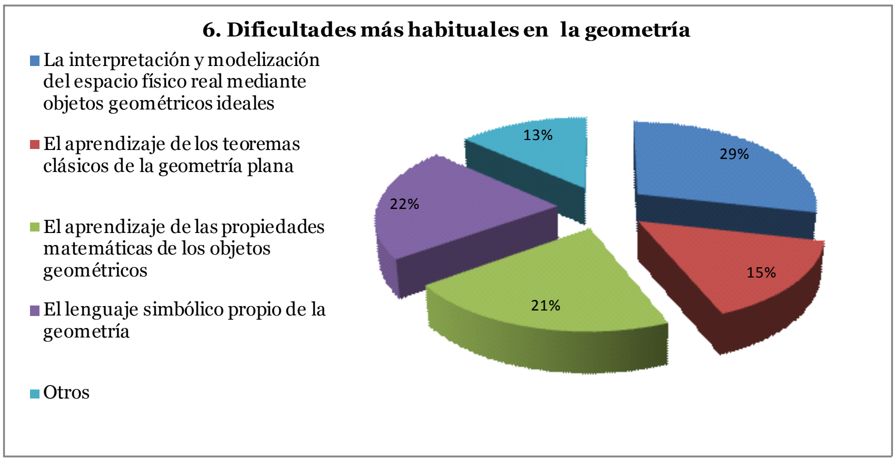


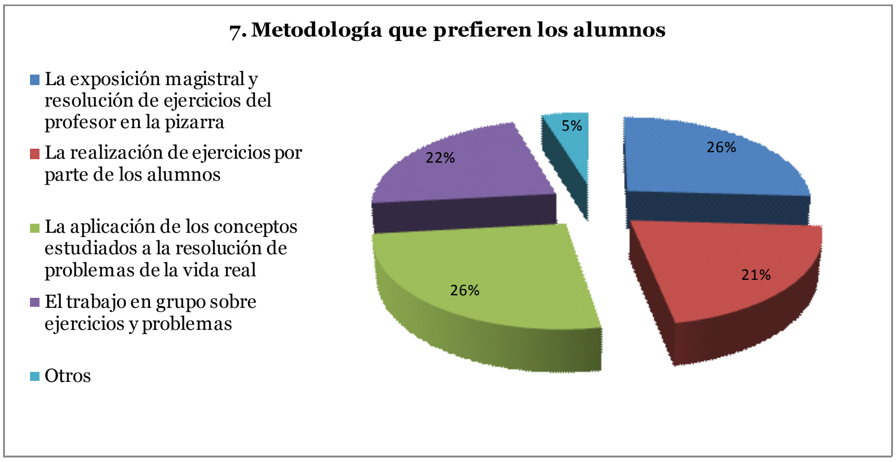


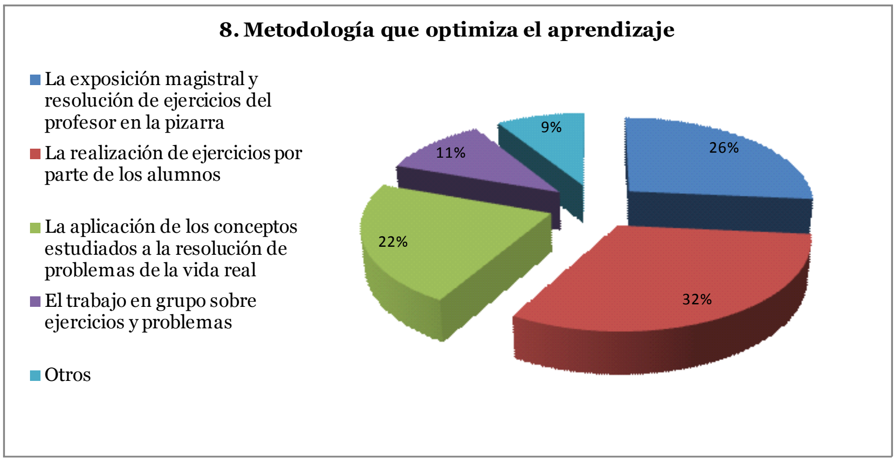


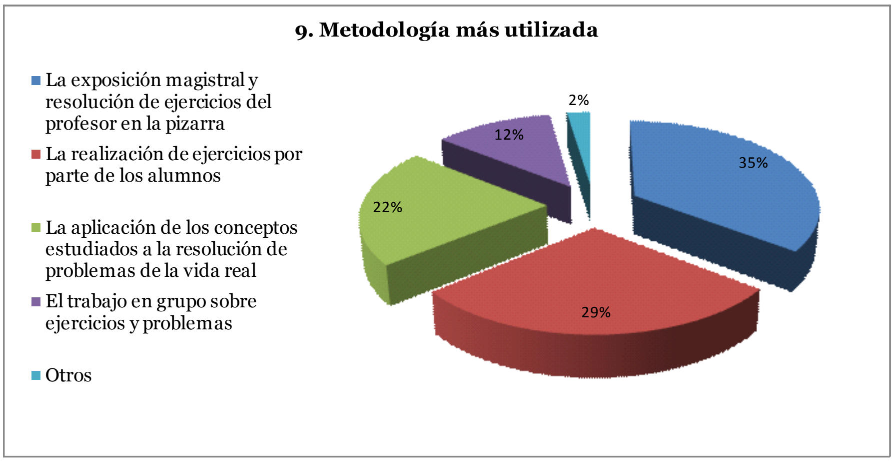

4. Dificultades más habituales en la aritmética
La comprensión del concepto de fracción y su tratamiento
La introducción del número negativo y las operaciones con ellos
El salto conceptual de los números racionales a los números irracionales
El manejo de símbolos y algoritmos sin haber desarrollado antes un esquema conceptual propio de comprensión
Otros
5%
20%
29%
22%
24%

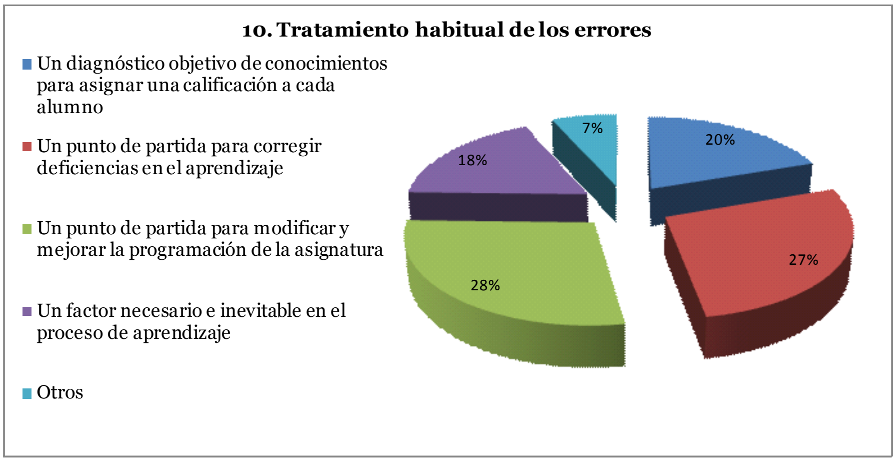

5. Dificultades más habituales en el álgebra y el análisis
El nuevo sentido de la igualdad como equivalencia de dos expresiones
La introducción de incógnitas
La comprensión de los conceptos
El desarrollo de algoritmos y procesos de cálculo
Otros
13%
16%
23%
18%
30%

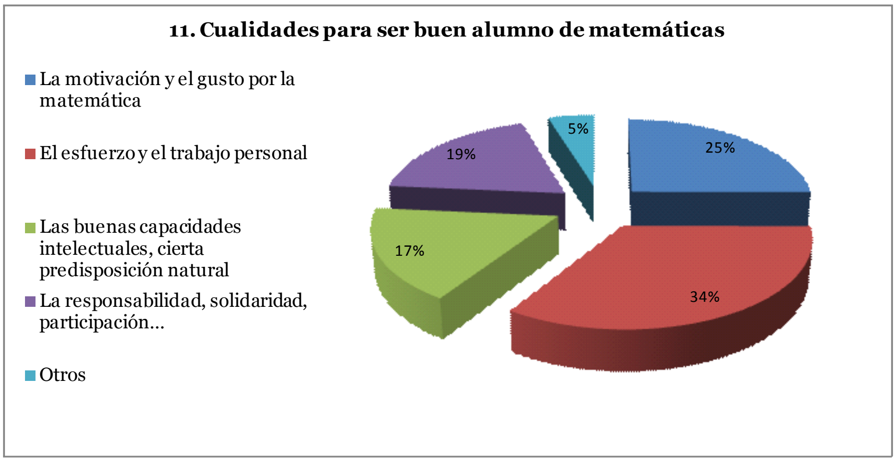

6. Dificultades más habituales en la geometría
La interpretación y modelización del espacio físico real mediante objetos geométricos ideales
El aprendizaje de los teoremas clásicos de la geometría plana
El aprendizaje de las propiedades matemáticas de los objetos geométricos
El lenguaje simbólico propio de la geometría
Otros
13%
29%
22%
15%
21%

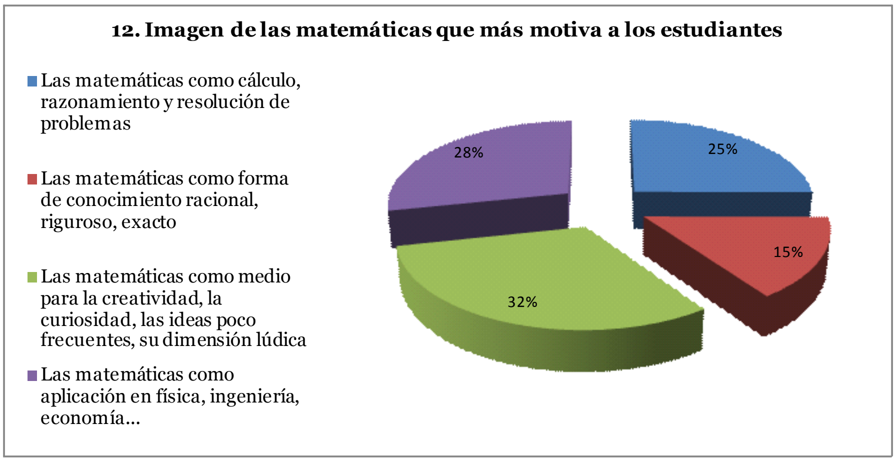

7. Metodología que prefieren los alumnos
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
Otros
5%
26%
22%
21%
26%


8. Metodología que optimiza el aprendizaje
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
Otros
9%
26%
11%
22%
32%

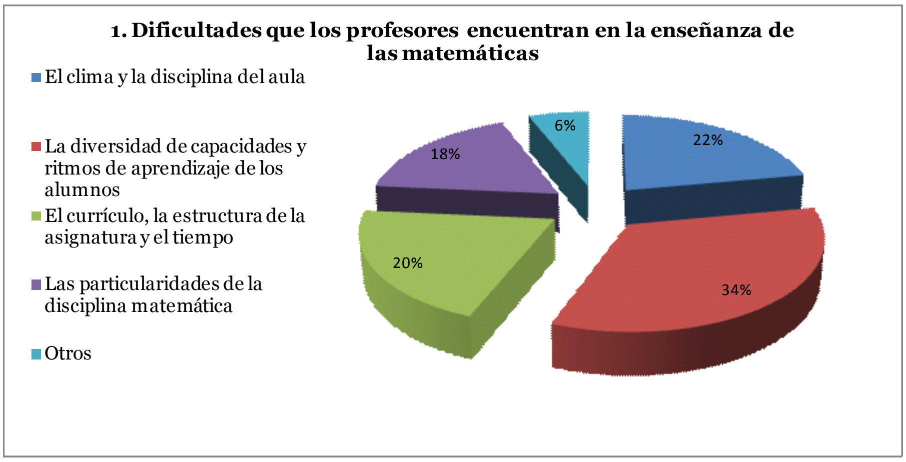

9. Metodología más utilizada
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
Otros
2%
12%
35%
22%
29%

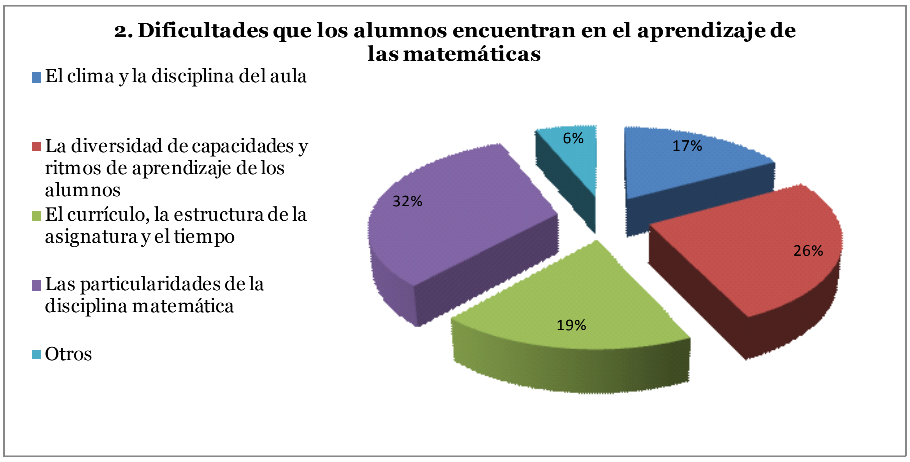

10. Tratamiento habitual de los errores
Un diagnóstico objetivo de conocimientos para asignar una calificación a cada alumno
Un punto de partida para corregir deficiencias en el aprendizaje
Un punto de partida para modificar y mejorar la programación de la asignatura
Un factor necesario e inevitable en el proceso de aprendizaje
Otros
20%
27%
28%
18%
7%

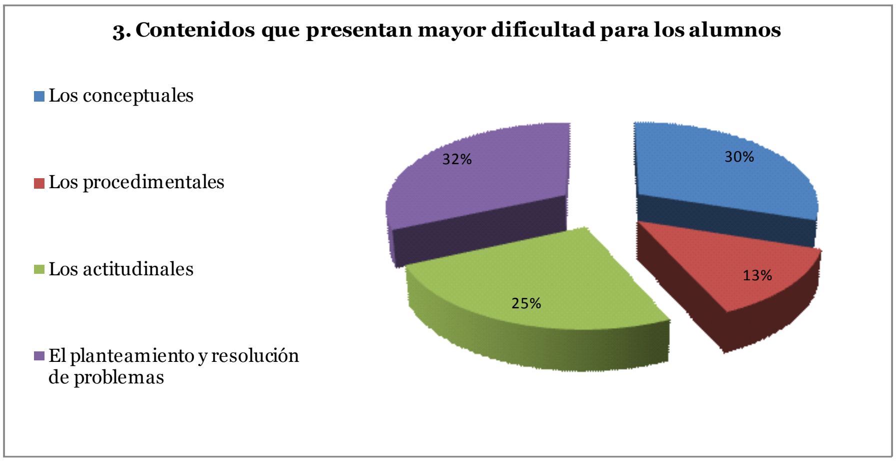

11. Cualidades para ser buen alumno de matemáticas
La motivación y el gusto por la matemática
El esfuerzo y el trabajo personal
Las buenas capacidades intelectuales, cierta predisposición natural
La responsabilidad, solidaridad, participación...
Otros
25%
34%
17%
19%
5%

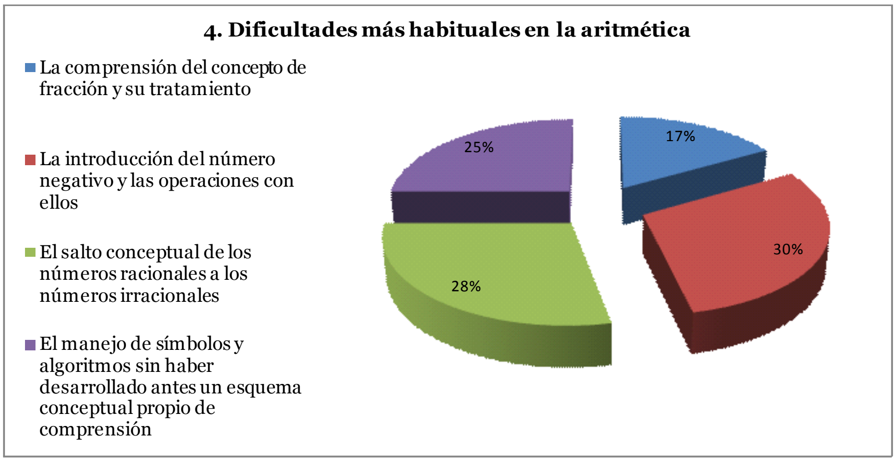

12. Imagen de las matemáticas que más motiva a los estudiantes
Las matemáticas como cálculo, razonamiento y resolución de problemas
Las matemáticas como forma de conocimiento racional, riguroso, exacto
Las matemáticas como medio para la creatividad, la curiosidad, las ideas poco frecuentes, su dimensión lúdica
Las matemáticas como aplicación en física, ingeniería, economía...
25%
15%
32%
28%

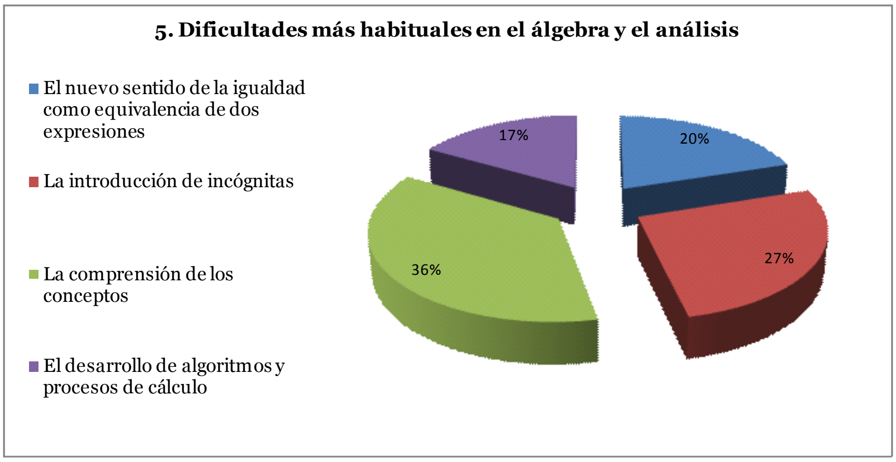
Resultados del colegio Chamberí (centro concertado):

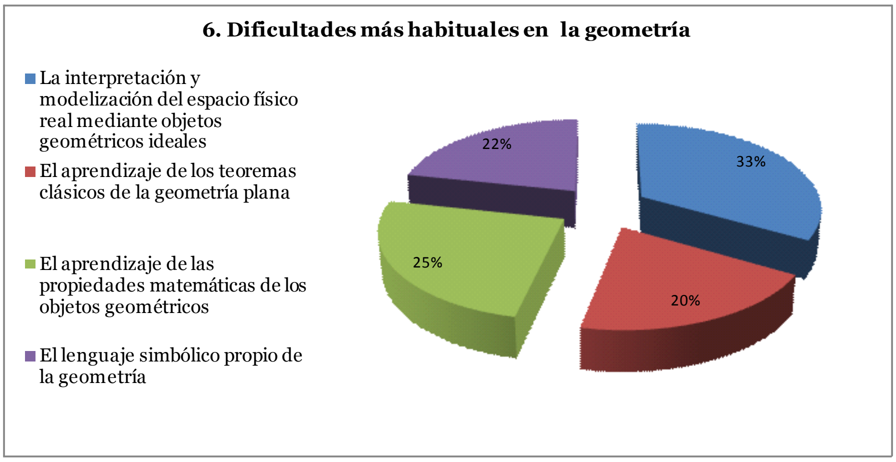


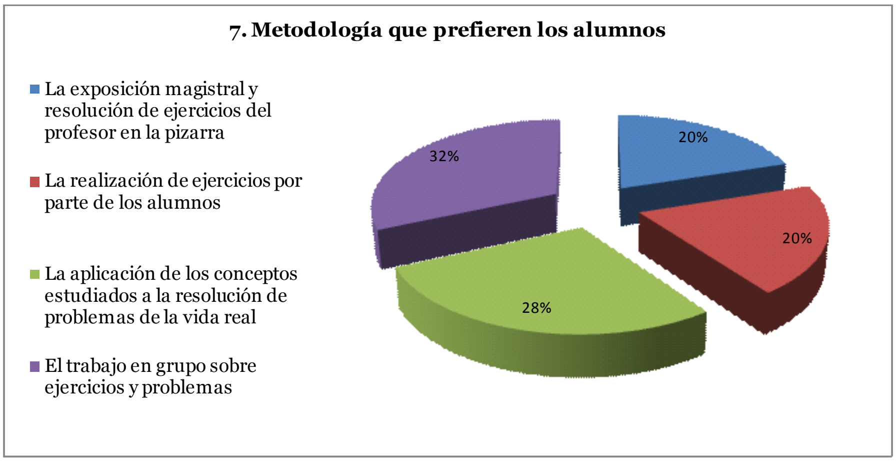


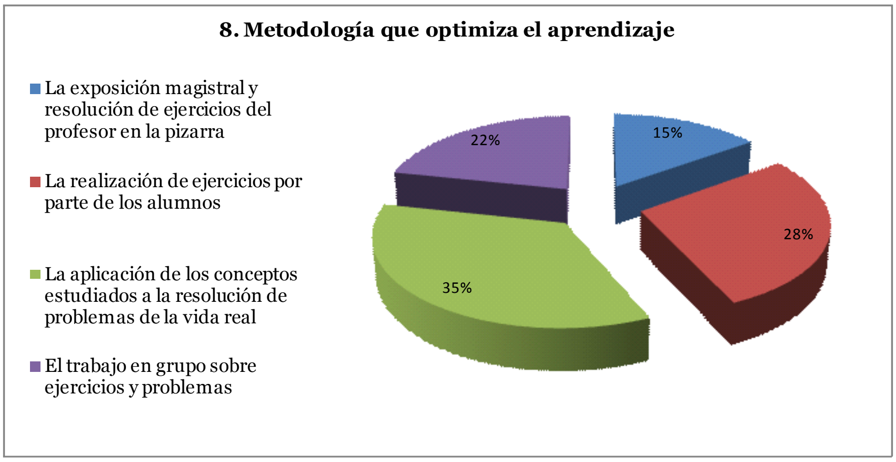


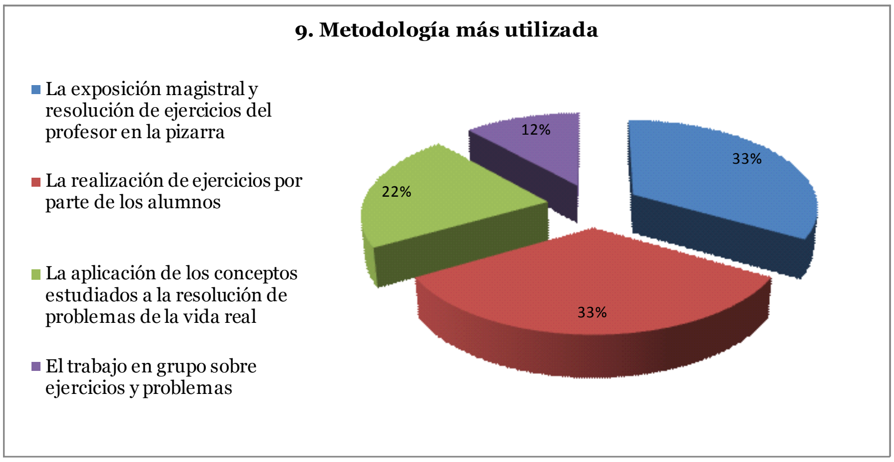

4. Dificultades más habituales en la aritmética
La comprensión del concepto de fracción y su tratamiento
La introducción del número negativo y las operaciones con ellos
El salto conceptual de los números racionales a los números irracionales
El manejo de símbolos y algoritmos sin haber desarrollado antes un esquema conceptual propio de comprensión
17%
30%
28%
25%

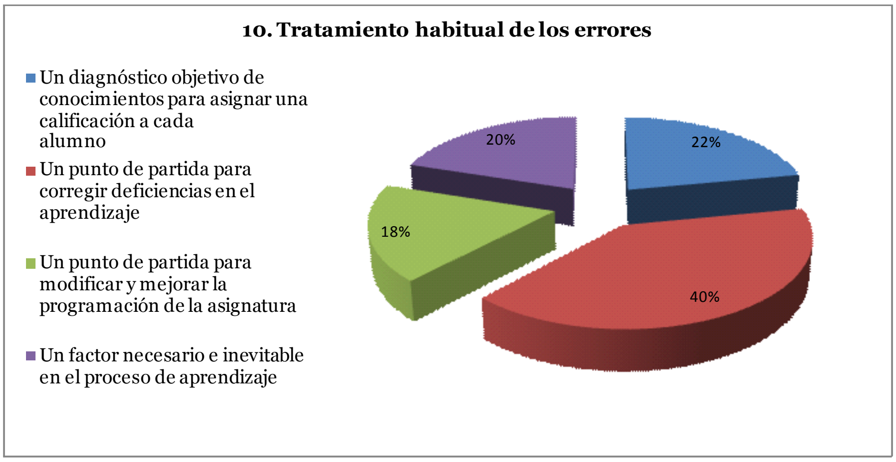

5. Dificultades más habituales en el álgebra y el análisis
El nuevo sentido de la igualdad como equivalencia de dos expresiones
La introducción de incógnitas
La comprensión de los conceptos
El desarrollo de algoritmos y procesos de cálculo
20%
27%
36%
17%

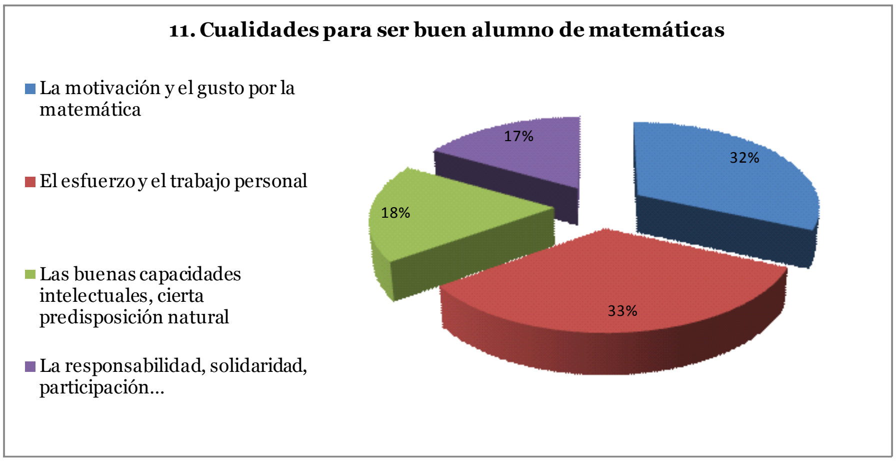

6. Dificultades más habituales en la geometría
La interpretación y modelización del espacio físico real mediante objetos geométricos ideales
El aprendizaje de los teoremas clásicos de la geometría plana
El aprendizaje de las propiedades matemáticas de los objetos geométricos
El lenguaje simbólico propio de la geometría
33%
20%
25%
22%

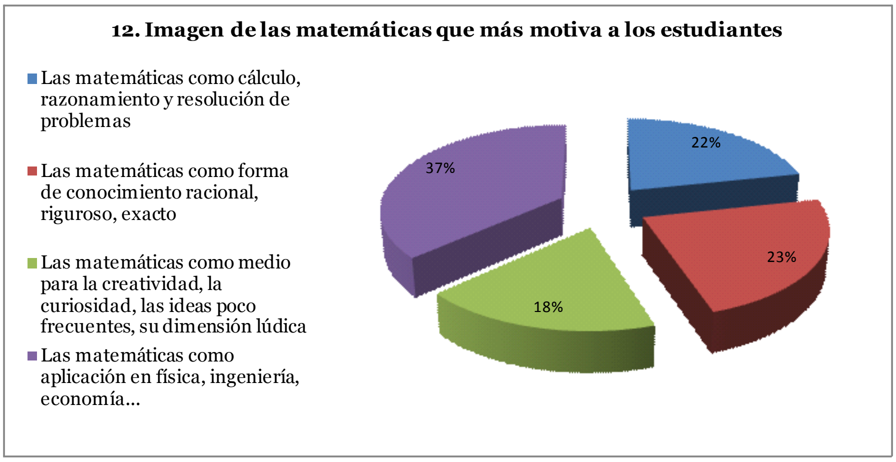

7. Metodología que prefieren los alumnos
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
20%
20%
28%
32%


8. Metodología que optimiza el aprendizaje
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
15%
28%
35%
22%

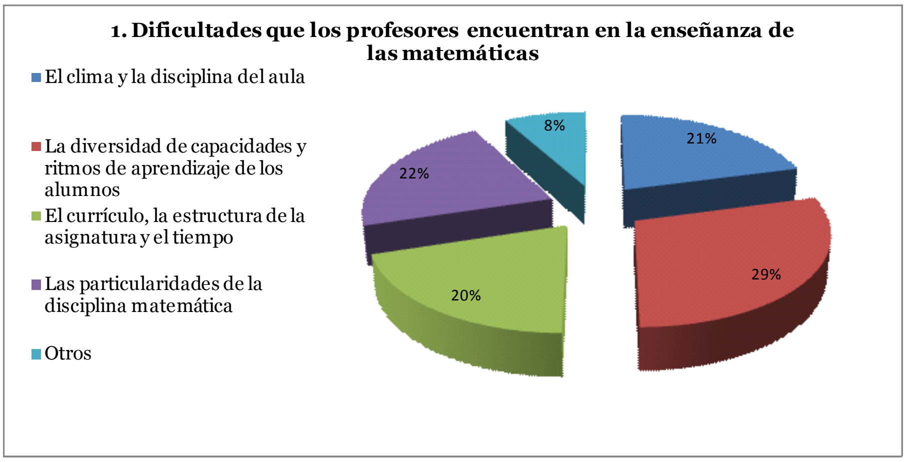

9. Metodología más utilizada
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
33%
33%
22%
12%

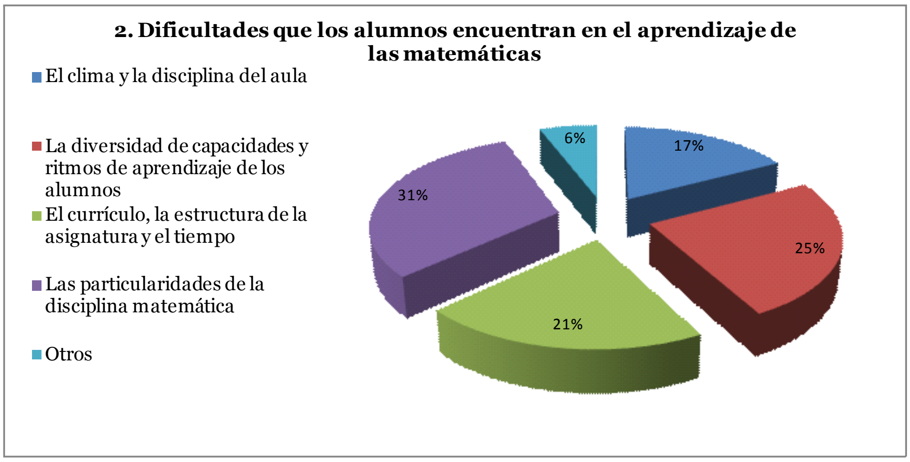

10. Tratamiento habitual de los errores
Un diagnóstico objetivo de conocimientos para asignar una calificación a cada alumno
Un punto de partida para corregir deficiencias en el aprendizaje
Un punto de partida para modificar y mejorar la programación de la asignatura
Un factor necesario e inevitable en el proceso de aprendizaje
20%
22%
18%
40%

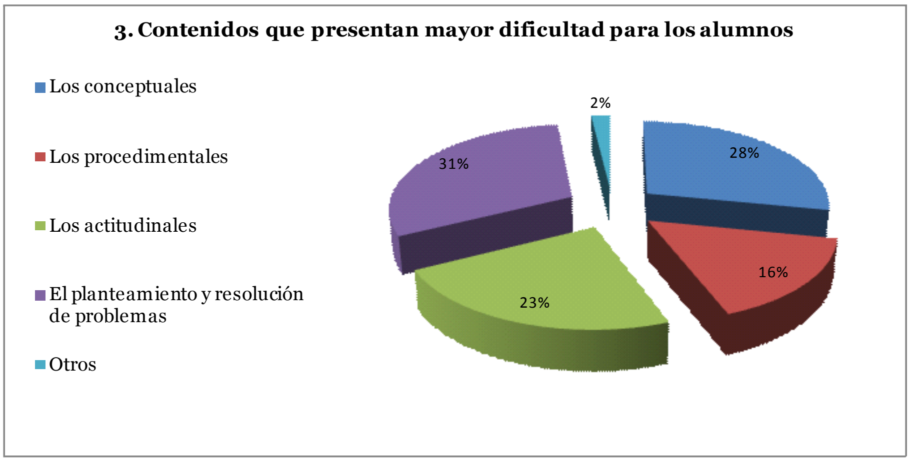

11. Cualidades para ser buen alumno de matemáticas
La motivación y el gusto por la matemática
El esfuerzo y el trabajo personal
Las buenas capacidades intelectuales, cierta predisposición natural
La responsabilidad, solidaridad, participación…
17%
32%
18%
33%

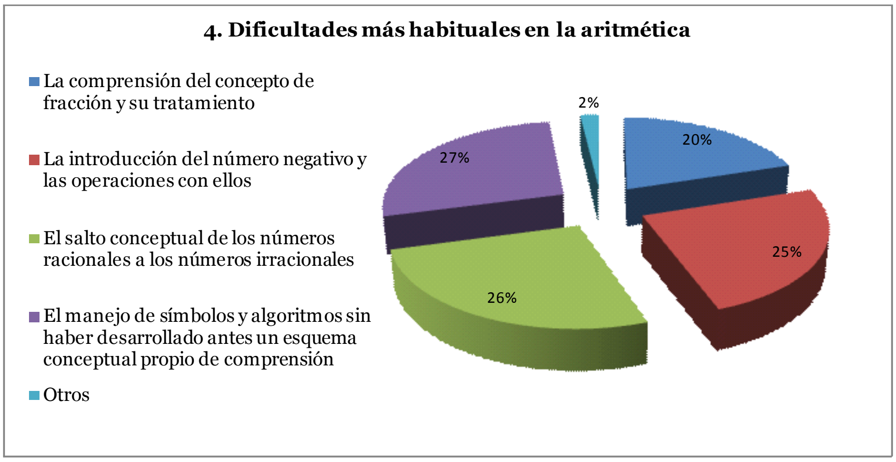

12. Imagen de las matemáticas que más motiva a los estudiantes
Las matemáticas como cálculo, razonamiento y resolución de problemas
Las matemáticas como forma de conocimiento racional, riguroso, exacto
Las matemáticas como medio para la creatividad, la curiosidad, las ideas poco frecuentes, su dimensión lúdica
Las matemáticas como aplicación en física, ingeniería, economía…
22%
37%
23%
18%

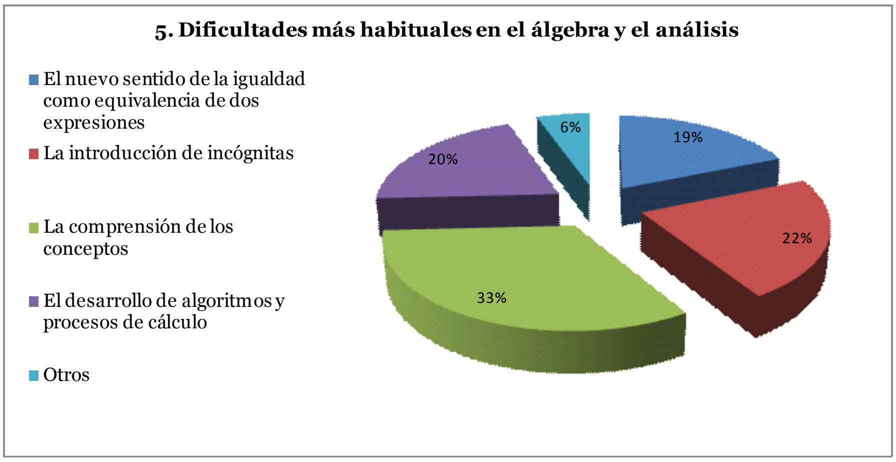
Resultados globales:

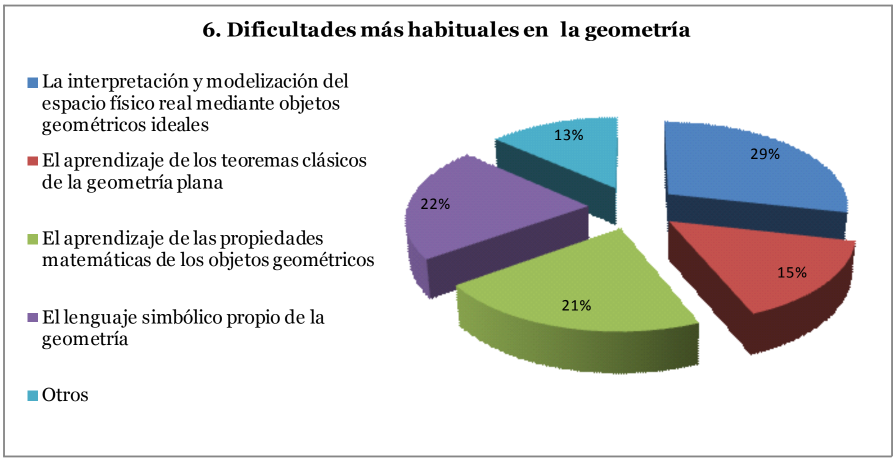


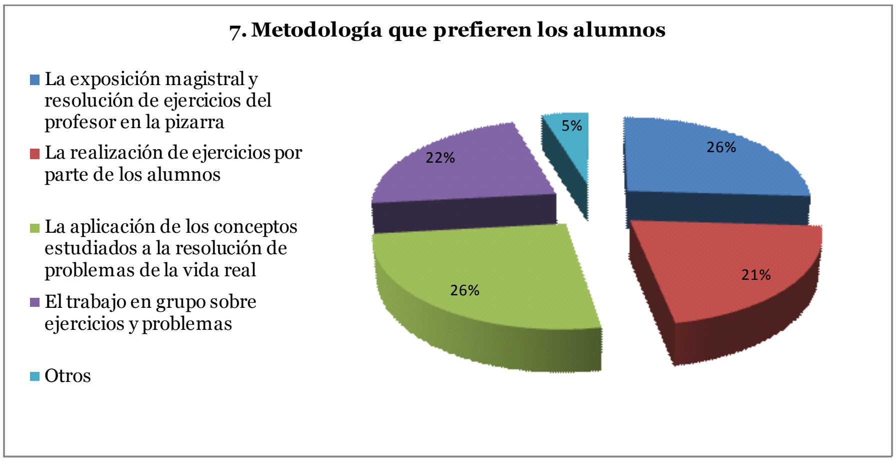


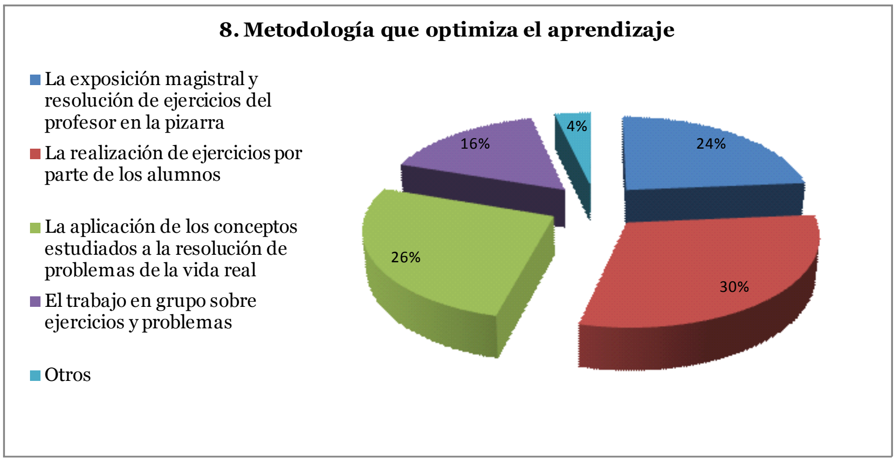


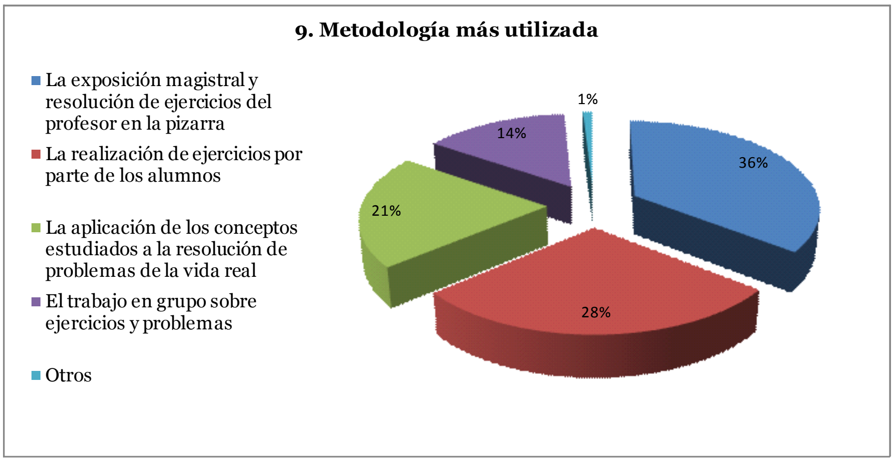

4. Dificultades más habituales en la aritmética
La comprensión del concepto de fracción y su tratamiento
La introducción del número negativo y las operaciones con ellos
El salto conceptual de los números racionales a los números irracionales
El manejo de símbolos y algoritmos sin haber desarrollado antes un esquema conceptual propio de comprensión
Otros
2%
20%
25%
26%
27%

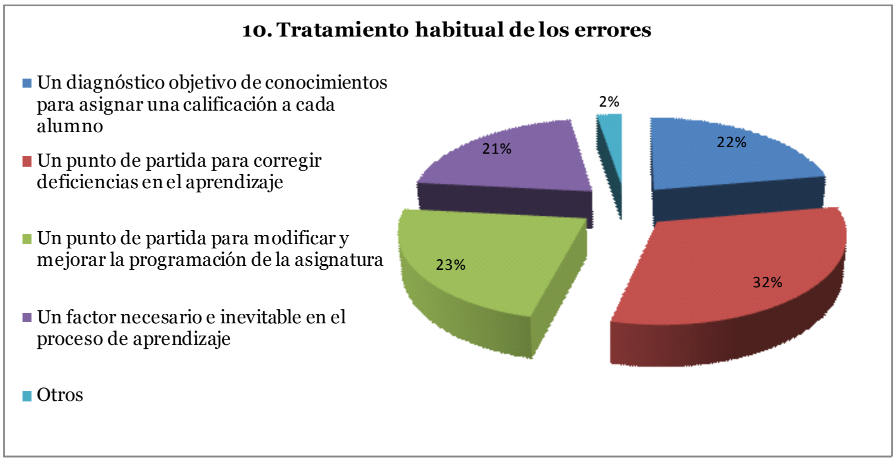

5. Dificultades más habituales en el álgebra y el análisis
El nuevo sentido de la igualdad como equivalencia de dos expresiones
La introducción de incógnitas
La comprensión de los conceptos
El desarrollo de algoritmos y procesos de cálculo
Otros
6%
19%
22%
33%
20%

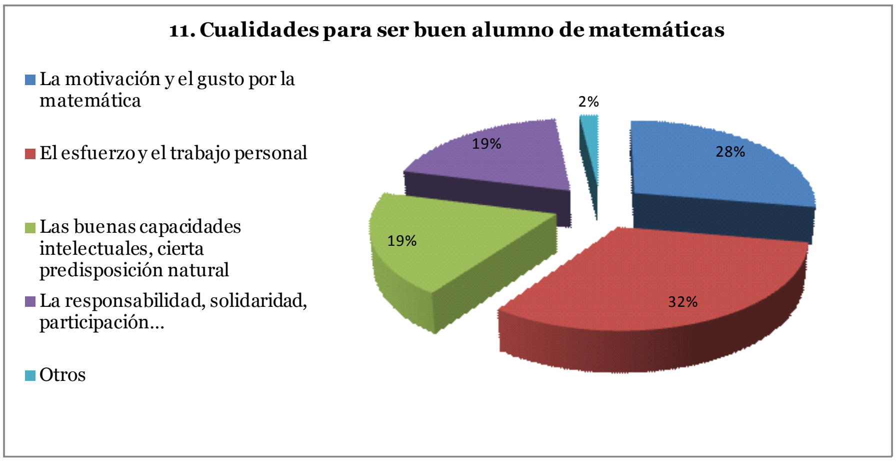

6. Dificultades más habituales en la geometría
La interpretación y modelización del espacio físico real mediante objetos geométricos ideales
El aprendizaje de los teoremas clásicos de la geometría plana
El aprendizaje de las propiedades matemáticas de los objetos geométricos
El lenguaje simbólico propio de la geometría
Otros
13%
29%
15%
21%
22%

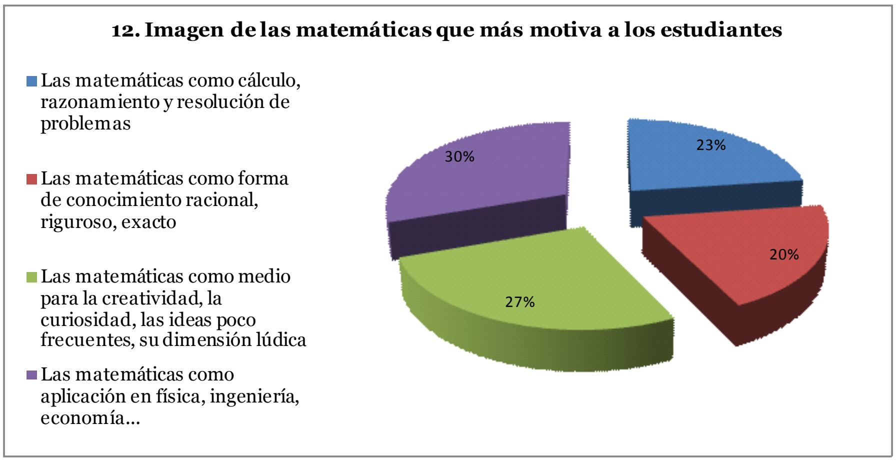

7. Metodología que prefieren los alumnos
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
Otros
5%
26%
22%
21%
26%


8. Metodología que optimiza el aprendizaje
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
Otros
4%
16%
24%
26%
30%


9. Metodología más utilizada
La exposición magistral y resolución de ejercicios del profesor en la pizarra
La realización de ejercicios por parte de los alumnos
La aplicación de los conceptos estudiados a la resolución de problemas de la vida real
El trabajo en grupo sobre ejercicios y problemas
Otros
1%
14%
36%
21%
28%


10. Tratamiento habitual de los errores
Un diagnóstico objetivo de conocimientos para asignar una calificación a cada alumno
Un punto de partida para corregir deficiencias en el aprendizaje
Un punto de partida para modificar y mejorar la programación de la asignatura
Un factor necesario e inevitable en el proceso de aprendizaje
Otros
2%
21%
22%
23%
32%


11. Cualidades para ser buen alumno de matemáticas
La motivación y el gusto por la matemática
El esfuerzo y el trabajo personal
Las buenas capacidades intelectuales, cierta predisposición natural
La responsabilidad, solidaridad, participación...
Otros
2%
19%
28%
19%
32%


12. Imagen de las matemáticas que más motiva a los estudiantes
Las matemáticas como cálculo, razonamiento y resolución de problemas
Las matemáticas como forma de conocimiento racional, riguroso, exacto
Las matemáticas como medio para la creatividad, la curiosidad, las ideas poco frecuentes, su dimensión lúdica
Las matemáticas como aplicación en física, ingeniería, economía...
30%
23%
20%
27%

10.3 Prueba objetiva al final de la intervención en el aula

1.

a) $D\left[\left(\frac{2x^3+x^2+1}{x^3-2}\right)^5\right]$ (1 punto)

b) $D[(3x^2-1)\cdot(5x+2)-(x^2+1)\cdot(3x-4)]$ (1 punto)

2.

a) $D\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)$ (1 punto)

b) $D\left[x^2 \cdot e^{\ln(x^2-1)}\right]$ (1 punto)

3.

$D\left[(x^2-x+1)^2\cdot\sqrt{1-x^2}\right]$ (2 puntos)

4.

$D\left[\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{e^{2x}-2}\right)\right]$ (2 puntos)

5.

$D\left[\ln\left(\frac{e^{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-3}\right)\right]$ (2 puntos)

10.4 Actividades de mejora propuestas

Se solucionan aquí los ejercicios propuestos en el apartado 5.3.

- *Actividad de aplicación del cálculo de derivadas a la física*

Durante los primeros compases de una carrera del mundial, un fórmula uno presenta la siguiente trayectoria en función del tiempo:

$$s(t) = 3t^2 + t$$

Donde s es el espacio en metros y t el tiempo en segundos. Calcular:

- La velocidad alcanzada por el fórmula uno a los 5 segundos de arrancar
- La aceleración del coche
- La velocidad media entre los segundos 2 y 4

La velocidad indica cómo varía la posición del coche con el tiempo, por lo que será la derivada de la trayectoria en función del tiempo:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 6t + 1$$

En el instante 5s, la velocidad será:

$$v(5) = 6 \cdot 5 + 1 = 31 \text{ m/s}$$

La aceleración es la variación de la velocidad con el tiempo, por tanto, la derivada de la velocidad nos da la aceleración:

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = 6 \text{ m/s}^2$$

Se trata de una aceleración constante.

Para calcular la velocidad media entre 2s y 4s, debemos ver cómo varía la posición entre esos dos instantes. Tendremos que calcular, por tanto, la tasa de variación media entre 2s y 4s del móvil:

$$v_m = \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{(3 \cdot 16 + 4) - (3 \cdot 4 + 2)}{4 - 2} = \frac{52 - 14}{4 - 2} = 19 \text{ m/s}$$

- *Actividad de aplicación del cálculo de derivadas a la economía*

Los ingresos y los costes de un fabricante de empanadas al final de un año vienen representados por las siguientes funciones, donde x es la cantidad de empanadas:

$$I(x) = -0.05x^2 + 1500x$$

$$C(x) = 0.001x^2 + 150x + 700000$$

¿Qué función expresa el beneficio del fabricante? ¿Cuántas empanadas debe fabricar para que el beneficio sea máximo?

El beneficio será la diferencia entre lo que el fabricante ingresa y lo que le cuesta fabricar las empanadas, por tanto:

$$B = I - C = -0.05x^2 + 1500x - 0.001x^2 - 150x - 700000 \rightarrow$$

$$\rightarrow B = -0.051x^2 + 1350x - 700000$$

La función del beneficio tendrá un máximo donde la primera derivada se anule, por tanto:

$$\frac{dB}{dx} = 0 \rightarrow -0.102x + 1350 = 0 \rightarrow x = 132535.3 \approx 13236 \text{ empanadas}$$

- *Actividad de aplicación del cálculo de derivadas a la biología*

Un investigador del CSIC que estudia la reproducción de un determinado tipo de bacterias trabaja con una muestra inicial de 500000 ($5 \cdot 10^5$) bacterias. Por un error en la temperatura del laboratorio, la muestra no empezó a crecer hasta pasadas 4 semanas. La función que representa el tamaño de la muestra a lo largo del tiempo en semanas es la siguiente:

$$f(t)\begin{cases} 5 \cdot 10^5 \; si \; 0 \le t \le 4 \\ 5 \cdot 10^5 \cdot e^{t-1} \; \text{si } t > 4 \end{cases}$$

¿Cuál es la tasa de variación media en los intervalos de tiempo de 0 a 4 [0, 4] y de 0 a 8 [0, 8] semanas? ¿Cuál es la tasa de variación instantánea de la muestra en t = 8?

La tasa de variación media entre las 0 y las 4 semanas es nula, dado que en ese tiempo la muestra de bacterias permanece estable. Matemáticamente, se expresaría así:

$$tvm = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{5 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5}{4} = 0$$

Entre las 0 y las 8 semanas, la muestra sí ha cambiado porque en la cuarta semana empieza por fin a crecer. En el tiempo 0 la muestra es la inicial, $5 \cdot 10^5$, pero en a partir de la cuarta semana la muestra ya se rige por la ecuación segunda. Por tanto:

$$\text{tvm} = \frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot e^{8-1} - 5 \cdot 10^5}{8} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot (1096.6 - 1)}{8} = 68.5 \cdot 10^6$$

La variación instantánea de la muestra en la octava semana será la derivada de la función de la muestra en t=8:

$$f'(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq t \leq 4 \\ 5 \cdot 10^5 \cdot e^{t-1} \text{ si } t > 4 \end{cases}$$

$$f'(8) = 5 \cdot 10^5 \cdot e^7 = 548 \cdot 10^6$$