Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas

Aprendizaje Basado en Proyectos y enfoque STEAM para trabajar la Geometría a través del Arte en el Museo del Prado en 1º de Educación Secundaria

Trabajo fin de estudio presentado por:	María Eladia Soler Garcie
Tipo de trabajo:	Propuesta de intervención
Especialidad:	Matemáticas
Director/a:	Edgar Torres Romero
Fecha:	18/01/2024

Resumen

Las Matemáticas han estado correlacionadas con el Arte desde la antigüedad, aunque el sistema educativo ha parcelado los campos de conocimiento, presentándolos de forma aislada y descontextualizada. Los modelos educativos tradicionales y la complejidad matemática, conducen a una falta de interés del alumnado por la materia. La presente propuesta retoma la correlación de las matemáticas con las humanidades bajo el enfoque STEAM y apuesta por el constructivismo, las metodologías activas e innovación teniendo como objetivo diseñar una propuesta de intervención didáctica para la enseñanza de la Geometría a través del Arte en primero de ESO con Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y enfoque STEAM.

La propuesta didáctica recurre al ABP para su estructuración, así como el Aprendizaje Cooperativo como sistema de trabajo principal. Las actividades elaboradas trabajan la Geometría contextualizada sobre cuadros del Museo del Prado, combinadas con anécdotas históricas. De este modo, se fomentan todas las competencias, se desarrolla la creatividad y la visualización. También se acercan las matemáticas al entorno por medio del Paseo Matemático por el Museo del Prado.

Como conclusión, los contenidos presentados de modo diferente y atractivo, favorecen profundizar en conceptos matemáticos, interconectar contenidos y trabajar en equipo. Desarrollando un aprendizaje práctico, enriquecido y significativo.

Palabras clave: Matemáticas y Arte, Aprendizaje Basado en Proyectos, STEAM, Aprendizaje Cooperativo, Paseo Matemático.

Abstract

Mathematics has been correlated with Art since ancient times, both fields were united in the past but not anymore. The evolution of the educational system has divided the fields of knowledge and the contents are presented in a decontextualized way. The traditional model systems and the complexity of Mathematics have produced a certain lack of students' interest in its study. This proposal takes up the idea and historical conception that correlates mathematics with humanities, using the STEAM approach, active methodologies and innovation. With the objective to design a didactic intervention proposal for the teaching of Geometry through Art in first ESO with Project Based Learning (ABP) and STEAM approach.

This didactic proposal has been structured with Project Based Learning, using Cooperative Learning as the main work format. The designed and elaborated activities work mainly on geometry, contextualized on paintings of the Prado Museum and introducing historical anecdotes. All this in order to work all the competences, develop creativity and visualization. Furthermore, mathematics is approached to the environment with a mathematic route around the Prado Museum.

In conclusion, the attractive and different contents, allow to develop mathematical concepts, interconnect contents and teamwork. The learning is a practical, enriched, and meaningful experience.

Keywords: Mathematics and Art, Project Based Learning, STEAM, Cooperative Learning, mathematical route.

Índice de contenidos

Índice de figuras

Índice de tablas

1. Introducción

La presente propuesta didáctica de intervención relaciona las Matemáticas y el Arte. Con objeto de potenciar la creatividad del alumnado, permitir estudiarlas de un modo atractivo, fomentar su interés y atraerlo hacia ambos campos. La idea de combinar ambas disciplinas, surge de la reflexión sobre la situación actual del sistema educativo. Al respecto, se considera necesario acercar la materia al entorno, dejando de lado las convencionales técnicas de estudio, para dar paso a aprendizajes profundos que apliquen y conecten contenidos. El estudio se ha centrado en impartir los contenidos matemáticos con una perspectiva diferente, pero cercana al sistema de trabajo de los antiguos artistas y estudiosos; que combinaban en paralelo su creatividad en el mundo del arte, la ciencia y las humanidades.

En consecuencia, ha sido diseñada una propuesta para el curso de primero de Educación Secundaria Obligatoria (1º ESO). Donde los contenidos principalmente de Geometría se estudian a partir de cuadros, contextualizando actividades y contenidos. Como hilo conductor, se propone acercar las matemáticas al entorno cultural a través de un Paseo Matemático por el Museo del Prado en Madrid, combinado con trabajo en el aula. En los siguientes apartados se desarrollan la justificación, el planteamiento del problema y los objetivos del trabajo.

1.1. Justificación

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas resulta complejo dentro del sistema educativo (Mora, 2003). Las creencias y experiencias del alumnado, condicionan su actitud hacia la materia, desarrollando una falta de interés, prejuicios sobre su dificultad, bloqueo e incluso rechazo (Chaves et al., 2008). Se conciben las matemáticas como algo dogmático, cerrado, invariable y abstracto, otra dificultad agregada es su carácter constructivo.

El ámbito educativo queda dividido bajo enfoques tradicionales o constructivistas (Villamizar-Acevedo et al., 2017), dando lugar a modelos asociados. Las matemáticas se han vinculado a modelos tradicionales, que asientan sus bases en el saber teórico; generando procedimientos inconexos con la realidad, donde el docente imparte los contenidos y el estudiante tiene un papel pasivo (Mora, 2003). Los modelos constructivistas, se han basado en las teorías de Piaget y Vigotsky (Castaño, 2009), de gran repercusión educativa según García (2007). Junto con la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausbel (1983), establecen el rumbo a seguir en el mundo educativo. El actual sistema requiere un cambio conceptual, dando paso a enseñanzas innovadoras y el saber hacer, promoviendo una educación competente a nivel sociocultural, laboral y otorgando herramientas para el futuro (Figueroa, 2016; Defaz, 2020 y Guerra, 2020).

Producto del enfoque teórico de las Matemáticas y su descontextualización (Jaramillo, 2014), el alumno percibe contenidos carentes de utilidad y sin aplicación en el entorno, idea que se aleja de la concepción histórica entre el hombre y las matemáticas. La impartición parcelada y la carencia de conexión entre los elementos curriculares, las convierten en incomprensibles para el estudiante. Peralta (1998) afirma que se trabajan como una materia fría, cerrada, aislada y sin conexión con otras áreas. Por esta razón, se ha producido una distancia entre las matemáticas y el alumnado, como reflejan los rendimientos académicos y resultados de los informes PISA (2018). Lo anterior, se potencia por la falta de interés hacia las profesiones o contenidos científicos o técnicos en general. No obstante, su utilidad en las diversas acciones cotidianas y su constante uso, hace imprescindible que la población disponga de unos conocimientos mínimos.

A su vez, las matemáticas incluyen una dificultad por su complejidad y abstracción, producto del lenguaje matemático y la visión espacial que precisan. Esto sucede en el campo de la Geometría, cuyo aprendizaje debe alejarse de la mecanización y memorización (Gamboa y Ballestero, 2010; Duval, 2001), también es importante que no se limite sólo a las exigencias curriculares. El estudio de la Geometría supone una de las mayores preocupaciones para los docentes (Marmolejo y Vega, 2005). Guzmán (1993), establece que más allá de la enseñanza de la materia en términos conceptuales, su estudio desarrolla la capacidad de razonamiento. Para Gamboa y Ballesteros (2010), la enseñanza de la Geometría ha sido de carácter tradicional. Además, cada docente sigue sus estrategias y criterios, sin una planificación guiada (Báez e Iglesias, 2007). Gamboa y Ballestero (2010), Goncalves (2006) y Pérez y Guillén (2007) afirman que la Geometría se considera una materia difícil, que se imparte de forma abstracta mediante metodologías tradicionales. En las aulas de secundaria se utilizan herramientas clásicas como la pizarra convencional y con menor frecuencia se hace uso de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) como apoyo para favorecer la visualización. En general, se imparten dejando de lado aspectos relevantes como el razonamiento, la argumentación y la visualización. Según Báez e Iglesias (2007) el alumnado presenta un perfil de conocimientos previos de geometría deficientes y una percepción negativa sobre la Geometría. Además, el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, sitúa al alumnado en un bajo nivel de razonamiento (Fouz, 2005; Corberán et al., 1994; Fernández, 2013 y Mason, 2009). Como establecen Pérez y Guillén (2009) y Gamboa y Ballestero (2010), el sistema educativo ha enfocado el estudio de la Geometría bajo escenarios descontextualizados.

El curso de 1º ESO resulta complejo, producto de factores como la transición de etapa de Primaria a Secundaria, un aumento de exigencia en el ámbito académico, la despersonalización de la educación y otras variables como la madurez, la adolescencia, la autoestima o las conductas disruptivas. Los estudios apuntan hacia una bajada de rendimiento de los estudiantes y aumento de la tasa de repetidores (González-Rodríguez et al., 2019).

1.2. Planteamiento del problema

En relación a la problemática detectada en el apartado anterior, se diseña una propuesta didáctica basada en postulados constructivistas, que conducen a una educación basada en el conocimiento a partir de experiencias prácticas (Hiriyappa, 2018) y el desarrollo del pensamiento crítico. Según Tamayo et al. (2021), estos postulados son relevantes para el estudiante del siglo XXI, donde se pretende implementar el currículo basado en las competencias. Los estudiantes deben ser partícipes de su proceso de enseñanza y aprendizaje y desarrollar habilidades adicionales a las cognitivas (Segredo y Reyes, 2004). Ertmer y Newby (1993) defienden las teorías constructivistas, su conexión de conocimientos y la importancia de retomar contenidos cada cierta temporalidad.

Los docentes deben reunir la competencia técnica, la didáctica y la pedagógica (Ruiz, 2008). También han de estar actualizados, planificar su trabajo y fomentar las metodologías activas e innovadoras (Defaz, 2020), recurriendo a escenarios reales para impartir los saberes y promoviendo activamente la vida sociocultural. Además de fomentar la motivación del alumnado, captar su interés a partir de la práctica, desarrollar el espíritu crítico y actitudes reflexivas. También, deben redescubrir el papel de las Matemáticas en distintas áreas, como el Arte y dejar de impartirlas de forma parcelada. Jaramillo (2014) defiende enseñar a pensar al estudiante, más allá de memorizar o mecanizar saberes.

Este modelo encaja a la perfección con materias científicas como las Matemáticas, donde los aprendizajes significativos son imprescindibles para el avance en la materia (García, 2007;

Ertmer y Newby, 1993). Además, los contenidos se conectan entre sí y con situaciones cotidianas. Villamizar-Acevedo et al. (2017) diferencian diversas vías para acceder al conocimiento, como el descubrimiento. Los factores ambientales, el entorno y como se presentan son claves en el aprendizaje, según Peggy Ertmer y Newby (1993). Se recomienda plantear tareas basadas en situaciones reales y el trabajo cooperativo (Tamayo et al., 2021).

Con objeto de ofrecer un contenido atractivo, se han relacionado las áreas del Arte y Matemáticas. La propuesta coincide con Giménez (2009), que resalta la importancia que ha tenido desde el siglo XX la combinación de disciplinas. Bajo una perspectiva histórica, las Matemáticas guardan amplia correlación con el Arte y otras materias. La idea es reconducir el enfoque de la materia, para favorecer una visión amplia de la situación y de las posibles soluciones, aumentar la comprensión y desarrollar el pensamiento crítico. Por ende, combinar disciplinas, permite relacionar lo teórico con la práctica dentro y fuera del aula, lejos de parcelar la materia. Para lograr un mayor aprendizaje de los alumnos (Alvis-Puentes,2019), la materia debe ser funcional y permitir el desarrollo de competencias del estudiante.

El sistema educativo es susceptible a todo el entorno, en España se aprecia un importante patrimonio cultural. Así pues, se trabaja uno de los retos educativos del profesorado del siglo XXI basado en abrir las aulas al entorno. De igual modo, existe relación con el Objetivo de Desarrollo Sostenible número cuatro (ODS) de la Agenda 2030 de las Naciones Unidas, que fomenta la Educación de Calidad, además de promover la cultura y los proyectos culturales.

La historia evidencia que las matemáticas surgieron para resolver los diversos conflictos que envolvían al ser humano (Ortiz, 2005), han sido la herramienta usada por el hombre para resolver enigmas de su entorno y de su vida diaria. También para explicar aquello que les rodeaba, de ahí sus primeras conexiones con la agricultura, la necesidad de conectar el cielo con la tierra y explicar distintos fenómenos. Aunque el enfoque didáctico tradicional, ha dejado en el olvido estos aspectos, trasladar anécdotas al aula favorece la conexión entre la materia y la realidad. La idea es cambiar la perspectiva del estudiante, que considere necesario su conocimiento para desenvolverse en la vida real y mejorar sus competencias. Ortiz (2008) y Sánchez (2013) recomiendan trasladar anécdotas históricas al aula, para situar al alumno en épocas antiguas y desarrollar su imaginación.

Por excelencia, la resolución de problemas es una tarea cotidiana que envuelve las acciones diarias, siendo uno de los objetivos principales de las matemáticas (Barrantes et al., 2013). Se correlaciona con la creatividad, que a su vez es una característica implícita de las matemáticas. Por ende, resolver problemas matemáticos, favorece extrapolar estos aspectos a otras áreas de la vida real. En definitiva, permite al alumno crecer como personas constructivas, resolutivas y creativas. La propuesta toma como referencia la creatividad asociada al estudio de las matemáticas y su presencia en todo el entorno, con objeto de conectar al alumno con la creatividad del arte, pero también de las matemáticas. Si bien es cierto, el arte se encuentra popularmente asociado a la creatividad, este vínculo resulta desconocido para las matemáticas. Asimismo, recurrir a anécdotas históricas favorece la visión conjunta entre el Arte y las Matemáticas, campos que originalmente no estaban parcelados. Antiguamente, los artistas, científicos y estudiosos abarcaban distintas áreas de forma simultánea. Por este motivo, se encuadra esta propuesta bajo el enfoque STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts, Maths), donde la letra "A" queda trabajada como Arte. Tribó (2008) destaca la importancia de correlacionar contenidos, a la vez que se mantiene la competencia matemática (STEM), desarrollando la creatividad del alumno, el pensamiento crítico y la capacidad de indagación.

La propuesta adopta las recomendaciones de El Diario Oficial de la Unión Europea de 2018 de 4 de junio, que avala combinar disciplinas para el estudio y se ha conectado con los cuatro pilares de la UNESCO que definen Sobhi y Cougoureux (2014), fomentando la creatividad, el espíritu crítico y la cultura e historia como bases para estudiar las matemáticas.

Según Castro (2023), las matemáticas son un instrumento fundamental para la existencia, como indica la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). La geometría considera una rama fundamental, vinculada al desarrollo del pensamiento crítico, el razonamiento, la visualización y la lógica. Se trata de una materia de utilidad, con fácil aplicación y contextualización en el entorno que favorece el desarrollo de diversas capacidades en el estudiante y es factible conectarla con diversidad de elementos curriculares, (Husserl,2000; Gil y Rico, 2003). Una buena práctica didáctica para el estudio de la Geometría es promover la conexión entre disciplinas, como el Arte y aplicarlas en contextos reales (Camargo y Acosta, 2012). Así pues, ha sido planteado un proyecto de varias sesiones, centrado en la Geometría, pero que retoma contenidos proporcionales.

En síntesis, la idea es contextualizar y estudiar las matemáticas a partir de obras de arte. Para ello, se propone combinar un Paseo Matemático por el Museo del Prado con tareas planificadas y diseñadas para el aula, sobre láminas de diversos cuadros. El alumno debe buscar elementos sobre cuadros, prestar atención a detalles y estudiar la geometría de un modo creativo y práctico. Partiendo de una visualización detallada, puede simplificar los cuadros en elementos geométricos o conceptos que sean objeto de estudio y así fomentar el pensamiento lógico. Gamboa y Ballestero (2010) defienden impartir los contenidos combinando habilidades de visualización y argumentación. Por ende, se promueve el conocimiento a partir de situaciones donde aplicar los contenidos, la experiencia y la contextualización de las actividades, como sugiere Mason (2009). También es un modo de contextualizar la geometría, acercarla al entorno y proponer actividades planificadas (Báez e Iglesias, 2007). El estudio de la Geometría en secundaria adquiere especial relevancia debido a las habilidades y capacidades del estudiante (Castro, 2023).

El Aprendizaje Basado en Proyectos resulta idóneo para la propuesta y organización de sus contenidos, la metodología se complementa con el Aprendizaje Cooperativo. La combinación de ambas, pretende atraer al alumno para trabajar la Geometría, proponiendo los contenidos de una forma original. Tribó (2008) defiende combinar metodologías innovadoras e incorporar los conocimientos teóricos y prácticos a la vez en el aula, recurriendo a la implementación de investigaciones y uso de las TIC, que en el trabajo se usan de un modo transversal. El trabajo diseñado bajo estas metodologías se enmarca dentro del enfoque STEAM.

En conclusión, se propone trabajar contenidos bajo un escenario creativo e innovador, para conectar al alumno, reconducir su percepción y favorecer su aprendizaje. Además, se ofrecen experiencias enriquecedoras, a partir del aprendizaje interdisciplinar y la contextualización de actividades, que fomenten el desarrollo de las capacidades y competencias.

1.3. Objetivos

En función de los apartados previamente expuestos, se deducen el objetivo general y los siguientes objetivos específicos de la propuesta.

1.3.1. Objetivo general

A partir del planteamiento del problema, se ha formulado el siguiente objetivo general:

- Diseñar una propuesta de intervención didáctica para la enseñanza de la Geometría a través del Arte en 1º ESO con Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y enfoque STEAM.

1.3.2. Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general se han formulado los siguientes objetivos específicos:

- Conocer y profundizar en la literatura científica sobre las metodologías activas como Aprendizaje Basado en Proyectos, Aprendizaje Cooperativo (AC) y enfoque STEAM.
- Diseñar actividades para la enseñanza de la Geometría a través del Arte por medio de obras del Museo del Prado en 1º ESO.
- Elaborar instrumentos de evaluación para evaluar la propuesta didáctica.
- Diseñar un Paseo Matemático por el Museo del Prado acorde a los contenidos estudiados.

2. Marco teórico

A continuación, se ha realizado un estudio bibliográfico mediante la revisión de diversas publicaciones científicas digitales, acudiendo a fuentes relevantes y oficiales. El análisis documental comienza por las metodologías de innovación; seguidamente se analizan las disciplinas y dinámicas propuestas en materia de Arte, Matemáticas y Geometría.

2.1. Metodologías de innovación para el estudio de contenidos matemáticos

Para llevar a cabo esta propuesta, se recurre a las metodologías activas de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y Aprendizaje Cooperativo (AC), todo ello bajo el enfoque STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas), como parte de los constructos del trabajo.

2.1.1. Aprendizaje Basado en Proyectos

Martí et al. (2010), Medina y Tapia (2017), Zorrilla et al. (2022) y Bolaños (2023) establecen que el ABP es una metodología innovadora, que parte de un proyecto de innovación con un tema y una experiencia concretos. Se trata de aplicar los conocimientos del alumno sobre un producto o proceso, donde los diferentes aspectos cognitivos se ponen en práctica para resolver problemas. El alumno se involucra en una investigación partiendo de diversas problemáticas, generando aprendizajes realmente significativos en contextos reales. También induce a la interpretación y aplicación de los conocimientos teóricos en un espectro de mayor amplitud. Trujillo (2015) afirma que el ABP permite desarrollar las habilidades requeridas para el perfil del alumno del siglo XXI, impartir los elementos curriculares y trabajar las distintas competencias clave.

Cabe diferenciar el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) del Aprendizaje Basado en Problemas, (Bretel, 2019; Martí et al., 2010). En ambas metodologías se crean situaciones de aprendizaje donde los conceptos o procedimientos nuevos no se explican directamente, por lo que el estudiante debe realizar un proceso deductivo y de investigación (Bretel, 2019; Medina y Tapia, 2017). No obstante, el Aprendizaje Basado en Problemas guarda relación con situaciones cuyo objetivo se centra en la resolución de un problema específico (Martí et al., 2010). Mientras que el ABP abarca temáticas de mayor amplitud, donde si bien se puede partir de un problema, la metodología se basa en la acción y resolución de situaciones prácticas cercanas a la vida real o cotidiana, con uno o varios objetivos predeterminados y cuyo fin es alcanzar una meta (Martí et al., 2010; Trujillo, 2015).

El ABP considera la suma de diversas experiencias, previamente programadas y sistematizadas, para impartir elementos curriculares principales y no complementarios (Sánchez, 2013; Trujillo, 2015; Medina y Tapia, 2017). Esta metodología conversa con propuestas de carácter interdisciplinar (Martí et al., 2010; Medina y Tapia, 2017; Zorrilla et al., 2022 y Bolaños, 2023). Defaz (2020) define el ABP como trabajos de cierta importancia, de tipo interdisciplinar o multidisciplinar. Para poder abordar esta metodología de forma interdisciplinarias, es necesario redefinir el papel de los actores, cambiar los programas de enseñanza y métodos de evaluación, modificar las dinámicas de las clases, etc. Medina y Tapia (2017) denuncian que no siempre es posible implementar esta metodología en proyectos interdisciplinares o valorar sus beneficios.

El docente apoya al alumno y le guía para construir el conocimiento, partiendo de unas especificaciones con un fin establecido (Bretel, 2019). Defaz (2020) habla de un proceso de investigación y un trabajo coordinado, que favorecen la adquisición de los conocimientos (Trujillo, 2015; Medina y Tapia, 2017).

El docente tiene un papel relevante para escoger el tema del proyecto y plantear la propuesta (Medina y Tapia, 2017). El valor de su trabajo se concentra en la creatividad de la propuesta y no en la exposición de los contenidos (Bretel, 2019), el aprendizaje se obtiene como resultado de todo el procedimiento e investigación para alcanzar el resultado propuesto. También ha de crear situaciones para desarrollar el proyecto y planificarlo, gestionar los recursos y preparar los materiales, subdividir el trabajo en unidades sencillas, gestionar los grupos de trabajo, evaluar los resultados y garantizar el éxito del proyecto (Trujillo, 2015; Medina y Tapia, 2017 y Defaz, 2020).

El alumno no aprende contenidos de forma aislada, sino que construye su conocimiento a partir del tiempo invertido en la investigación; lo que fomenta una mayor implicación en el proceso (Bretel, 2019). Además, le permite alcanzar conocimientos de rango superior, como planteamiento de problemas, búsqueda de información, comprensión e interpretación de datos, razonamiento y relación de conceptos, formulación de conclusiones, revisión crítica, etc. (Trujillo, 2015; Medina y Tapia, 2017). Según Martí et al. (2010), Medina y Tapia (2017), Zorrilla et al. (2022) y Bolaños (2023), para conseguir el objetivo es necesario realizar un trabajo colaborativo. Asimismo, el alumno debe elaborar un producto final (Martí et al., 2010).

Se pueden abordar diversidad de temas, aunque suelen ser aspectos de la vida real que requieren de ingenio para resolverse, según Martí et al. (2010), Bretel (2019) y Medina y Tapia (2017). Los temas son planteados como una situación de cierta complejidad en cuanto a procedimiento y resolución. Algunos estudios apuntan hacia el fuerte compromiso y motivación que existe en el proyecto por parte del alumno y el docente. Para Bretel (2019) el estudiante también puede elegir el contenido de los proyectos, siendo importante mantener la motivación del alumnado durante todo el proceso, no sólo en el momento inicial.

El estudiante debe discurrir y desarrollar estrategias para dar soluciones a las situaciones planteadas, que suponen un reto y se prologan generalmente durante un periodo de tiempo (Trujillo, 2015). El ABP favorece que el alumnado profundice especialmente en cierta temática, por lo que se convierte en un amplio conocedor de la propuesta y su conocimiento aumenta considerablemente. También fomenta la capacidad de investigación y la puesta en práctica de los conocimientos. Dicho resultado se alcanza tras una correcta planificación y planteamiento de una serie de preguntas clave ordenadas (Martí et al., 2010; Bretel,2019; Medina y Tapia, 2017). Trujillo (2015) afirma que el ABP no permite impartir la misma cantidad de contenidos que las clases magistrales, pero favorece los aprendizajes profundos. Además de tener una finalidad educativa y adaptarse al currículo, debe tener sentido e interés para el estudiante.

Según Trujillo (2015), el proyecto debe partir por formular al alumno una pregunta compleja, provocativa y abierta. Se trata de una pregunta guía de partida que reúne la esencia del proyecto, supone un reto y conecta al alumno, quién trabaja para darle respuesta. Este aprendizaje considera un desafío intelectual y refuerza los procesos metacognitivos. Además, incluye experiencias de investigación, debates, lectura y presentaciones orales, entre otras (Sánchez, 2013; Trujillo, 2015). El alumno se involucra íntegramente y construye su aprendizaje por medio de las investigaciones, siendo recomendable que disponga de cierta autonomía para desempeñar sus tareas (Sánchez, 2013; Trujillo, 2015; Medina y Tapia, 2017).

Martí et al. (2010) destaca la importancia del Aprendizaje entre Iguales como motor del ABP. También afirma que el trabajo en grupo enriquece considerablemente el resultado final, desarrolla habilidades de argumentación y discusión, pero además es indispensable por la carga de tareas que implican estos proyectos, especialmente vinculados con la investigación y elaboraciones complejas (Bretel, 2019). Para este caso, ha sido seleccionado un Aprendizaje Cooperativo como defiende Defaz (2020). Se recomienda realizar pequeñas agrupaciones de tres o cuatro alumnos, buscando la diversidad de perfiles (Trujillo, 2015).

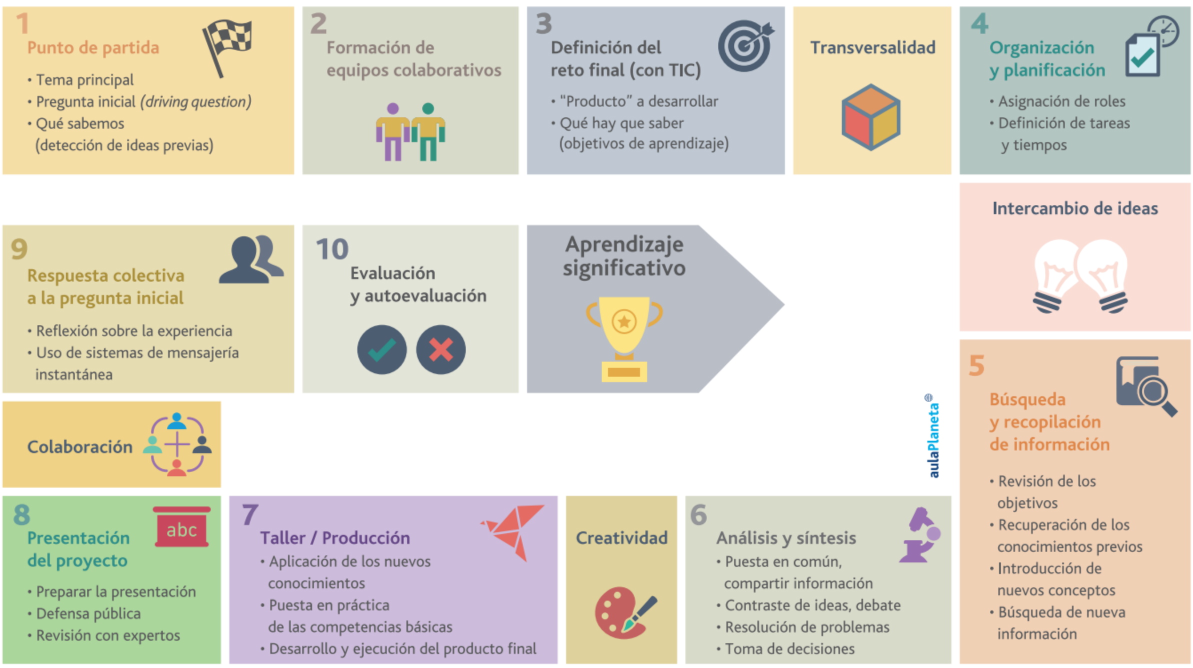
Otro aspecto a destacar en el ABP son los recursos para ejecutarlos (Martí et al., 2010). Autores como Martí et al. (2010) y Medina y Tapia (2017) defienden la importancia de hacer uso de las TIC a partir del ABP. Martí et al. (2010) destaca una serie de beneficios a nivel competencial para el alumnado, potencia las habilidades de las TIC y el desarrollo de otras nuevas, teniendo fuerte repercusión en el aprendizaje individual y grupal.

La evaluación se centra especialmente en el producto que debe ser presentado, momento en el que culmina el ABP, donde es factible evaluar el resultado obtenido tras una serie de pautas que se dieron inicialmente (Bretel, 2019). Por otra parte, favorece la capacidad del alumno para evaluar y el trabajo en grupo permiten realizar coevaluaciones. Trujillo (2015) recomienda que el profesor actúe como guía, ejerciendo un papel de supervisor, monitoreo y comprobación; ayudando a fomentar las críticas constructivas entre el alumnado. Destaca la importancia de la evaluación a lo largo del proyecto, para ajustar el proceso de enseñanza y aprendizaje y conocer el estado del alumnado. Lo compara con las situaciones de la vida real, donde se necesitan varias oportunidades hasta lograr el resultado esperado.

Según Sánchez (2013) y Trujillo (2015), el ABP favorece el aprendizaje y ofrece en general resultados positivos, fomenta el vínculo con el docente y promueve los conocimientos transversales. Para Mioduser y Betzer (2008) el aprendizaje adquirido, los rendimientos y conocimientos académicos de los estudiantes que trabajan con ABP superan a los métodos tradicionales. Sin embargo, existen inconvenientes durante su desarrollo, pues normalmente conllevan mayor tiempo del planificado en el inicio. También existen conflictos en cuanto al apoyo que se le debe otorgar al alumno y el equilibrio entre la libertad o dirección, además del manejo de la clase en general. Otro problema es la evaluación, dado que debe demostrar que se han adquirido habilidades y destrezas, además de adquisición de contenidos. A su vez, supone una carga adicional de trabajo para el docente (Sánchez, 2013).

En síntesis, Medina y Tapia (2017) defienden que esta metodología dota al estudiante de capacidades, habilidades y competencias de gran utilidad para su futuro profesional. El alumno mejora el rendimiento académico, las habilidades sociales y personales (Bolaños, 2023). Entre ellas, destaca el manejo de diversidad de fuentes de información, análisis y síntesis producto de la investigación, habilidades comunicativas, sentido de la responsabilidad, autonomía, desarrollo del pensamiento crítico, responsabilidad de trabajo individual y grupal, capacidad de organización y planificación, así como fomenta la toma de decisiones. Medina y Tapia (2017) también sugieren la propuesta de proyectos de carácter interdisciplinar con objeto de optimizar el ABP. En síntesis, la figura 1 engloba de forma esquemática las distintas etapas de esta metodología, proponiendo una serie de pasos.

Figura 1. *Características del Aprendizaje Basado en Proyectos.*



Fuente: como aplicar el aprendizaje basado en proyectos en 10 pasos. Aula Plantea.

2.1.2. Aprendizaje Cooperativo

El Aprendizaje Cooperativo (AC) ha experimentado un gran éxito en las últimas décadas, cubriendo las necesidades de los estudiantes del siglo XXI (Azorín, 2018). Trujillo y Ariza (2006) afirman que permite abarcar estrategias didácticas y de innovación, atender a la diversidad en el aula, favorecer la resolución de conflictos y educar en valores. Dado que la comunicación, la interacción y los modelos constructivistas son esenciales en la actualidad, el AC cobra especial relevancia.

Considera un sistema de trabajo en equipo, donde cada individuo contribuye a la formación de los miembros del grupo y aprende de forma individual. Los aprendizajes ofrecen mejores resultados y logros cuando los alumnos trabajan en grupo (Johnson y Johnson, 2015). Además, el trabajo conjunto permite establecer objetivos comunes (Johnson et al., 1999). Para Slavin (1999), ya cada vez se usa con mayor frecuencia para la organización del aula, en distintas disciplinas y niveles educativos. Johnson et al. (1999) lo definen como una metodología versátil y adaptable a cualquier tipo de situación de aprendizaje o contenido. Según Johnson et al. (1999), Domingo (2008) y Johnson y Johnson (2015), aumenta el rendimiento y productividad del alumnado, crea relaciones positivas, constructivas y mejora la salud mental.

Trujillo y Ariza (2006), Slavin (1999) y Johnson et al. (1999) lo definen como agrupaciones pequeñas de alumnos que se ayudan entre ellos, para realizar tareas planificadas, nunca de tipo improvisado. El docente está presente, pero destaca la relación que se establece entre los alumnos (Slavin, 1999). Johnson et al. (1999) encuentran grandes ventajas en el AC porque el alumno no se enfrenta a sus compañeros. Para Pujolás (2009a,2009b), dependiendo de la estructura de la actividad, su finalidad o combinación de elementos, los alumnos tienen diferentes experiencias. El autor diferencia entre estructura individualista asociada a un trabajo independiente, competitiva donde se genera rivalidad o cooperativista referida a las relaciones de interacción entre alumnos; esta última permite las agrupaciones de tipo homogéneo para perfiles similares o heterogéneo para diversidad de perfiles. A su vez, Johnson et al. (1999) establecen tres categorías de AC acorde a la temporalidad de los grupos, donde existen grupos formales de un periodo de duración y grupos informales de periodos puntuales de una sesión o una actividad puntual.

Esta metodología favorece la preocupación entre los alumnos, donde cada uno aporta sus conocimientos (Johnson y Johnson, 2015; Azorín, 2018). Según Slavin (1999), el objetivo de las agrupaciones es el apoyo mutuo y que todos lleguen a comprender los contenidos. La motivación reside en la ayuda mutua y el éxito de conseguir resultados positivos en equipo. El trabajo se realiza de forma constructiva, pretende fomentar la evaluación y la comprensión, a partir de ambientes de competitividad sana. El AC favorece la comprensión de los alumnos, porque las ideas explicadas entre iguales se comprenden mejor debido al lenguaje empleado.

Para Johnson et al. (1999) y Domingo (2008) no existe una regla definida sobre la cantidad de alumnos por grupo. Las agrupaciones pequeñas permiten estrechar relaciones, un desempeño visible y mayor responsabilidad y las grandes, favorecen el trabajo aumentando la capacidad de éxito, pero requieren de mayor planificación y tiempo para las tareas. Los grupos pueden ser homogéneos con alumnos de similares perfiles. Aunque se recomiendan los grupos heterogéneos, con alumnos de distintas capacidades, rendimientos e intereses; lo que provoca mayores desequilibrios cognitivos que estimulan el aprendizaje. La distribución puede ser al azar o de forma estratificada, donde el docente escoge los perfiles del grupo. Para fomentar los grupos heterogéneos se recomienda la distribución estratificada (Johnson et al., 1999). El AC favorece atender a la diversidad y la inclusión en el aula (Azorín, 2018; Slavin, 1999).

Los miembros del grupo deben saber comunicarse correctamente, respetar y establecer un liderazgo, tomar decisiones, crear vínculos de confianza y aprender a resolver conflictos. El alumno desarrolla una tarea, al tiempo que trabaja sus habilidades sociales y las relaciones interpersonales (Johnson y Johnson, 2015). Resulta clave una distribución óptima del aula y asignar roles de distinto índole a cada alumno, los que permiten controlar las relaciones de respeto dentro del grupo, trabajar por turnos, controlar el tono de voz, etc. También ayudan a funcionar correctamente y aumentar la productividad, aportar conocimientos y transmitirlos, fomentar el pensamiento y los razonamientos (Johnson et al., 1999; Domingo, 2008; Azorín, 2018). Johnson et al. (1999) definen los esquemas de AC, que son procedimientos y rutinas en el aula para realizar las tareas y evaluarlas; los que dan lugar a prácticas automatizadas y garantizan la ejecución y rendimiento. En esencia, se dan pautas a los alumnos para lograr una armonía de grupo, el alumno entiende que su rendimiento depende del esfuerzo y trabajo de todos.

Por esta razón, resulta importante asignar ese rol a cada integrante, observar su desempeño, grado de participación y establecer algún tipo de puntuación. También se fomenta la coevaluación para conocer la visión de cada alumno; además de evaluar el trabajo es factible evaluar las destrezas, siendo el objetivo de la evaluación una mejora continua. Durante la evaluación, se deben tener presentes los aprendizajes adquiridos, los razonamientos, las destrezas y habilidades, además de hábitos de trabajo. Pueden evaluarse pruebas estandarizadas, proyectos, portafolios, exposiciones escritas, pruebas orales, cuestionarios, entrevistas, cuadernos y diarios de aprendizaje, trabajo de equipo, etc. (Johnson y Johnson, 2015). El propio grupo realiza su autoevaluación (Johnson et al., 1999).

Entre las modalidades más difundidas para aplicar el AC, se puede hacer alusión a Johnson et al. (1999) y Kagan (1990) como referentes, según Pujolás (2009a,2009b), estos autores defienden una interdependencia positiva entre los miembros y responsabilidad individual como base del AC. En la literatura científica es frecuente el término de estructuras de Kagan, (Orellana, 2009 y Juárez et al.,2019). Kagan (2003, 2021) introduce el acrónimo PIES, que dicta los cuatro principios de este aprendizaje: Interdependencia positiva, Responsabilidad individual, Igualdad de participación e Interacción simultánea.

Pujolás y Lago (2011), recopilan una serie de técnicas para el AC, se trata de pautas y estrategias para desarrollar el trabajo con éxito y distribuir las tareas equitativamente. Las estructuras simples se desarrollan durante una sesión, son sencillas de comprender y aplicar, algunas de ellas son 1-2-4, el folio giratorio, lápices al centro, el juego de las palabras, la sustancia o parada de tres minutos. Las estructuras o técnicas complejas requieren de varias sesiones para su desarrollo, tales como jigsaw (rompecabezas) o “GI” (Grupos de Investigación). Por otra parte, Varas y Zariquiey (2016) hablan de técnicas de AC informal, además de las estructuras simples mencionadas, tales como: Lo que sé y lo que sabemos, Frase Mural, Demostración silenciosa, Los cuatro sabios, Parada de tres minutos, Preparar la tarea, Uno para todos, Mapa conceptual a cuatro bandas, Parejas cooperativas de investigación, Mapa conceptual mudo, Galería de aprendizaje, Collage de evaluación, etc. Como técnicas de carácter formal, sumado a las estructuras complejas indicadas, describen el Trabajo en Equipo – Logro Individual (TELI) y Aprender Juntos, entre otros.

Según Domingo (2008) el AC favorece el compromiso de los alumnos con su aprendizaje, así como el conocimiento en las áreas de matemáticas, ciencia y tecnología. De igual forma, prepara al alumno como ciudadano para el mundo real, buscando metas comunes, fomentando las habilidades cívicas como el diálogo, aprender a argumentar, tener distintas perspectivas, razonar y tolerar.

Para finalizar, cabe diferenciar entre Aprendizaje Cooperativo y Colaborativo. Jaramillo-Valencia y Quintero-Arrubla (2021) señalan notables diferencias entre las metodologías. El trabajo Colaborativo es una modalidad de trabajo grupal, donde los estudiantes muestran mayor autonomía y distribuyen sus roles, teniendo mayor libertad para tomar decisiones, realizar elecciones, etc. La figura del docente queda al margen y participa si el grupo lo solicita, pues se considera que el alumno tiene mayor madurez, pudiendo crearse dinámicas desordenadas producto de la menor supervisión. En el trabajo colaborativo, la situación de aprendizaje está muy condicionada a los estudiantes e implica mayor responsabilidad, trabajan en grupo, pero persiguen un objetivo individual al final, lo contrario que sucede en el AC donde se dan otras dinámicas como se ha descrito anteriormente. El AC suele enfocarse a grupos de menor edad, planteando situaciones de mayor dependencia hacia el docente. Ambos casos, requieren destrezas y habilidades de comunicación.

2.1.3. Enfoque STEAM

Domènech-Casal et al. (2019) denuncian la falta de vocación hacia contenidos y profesiones de carácter científico – técnico, consideran necesario reconducir estos campos hacia una educación contextualizada y práctica, recurriendo a la innovación. En este escenario, cobra especial interés el enfoque STEM, acrónimo anglosajón (Science, Technology, Engineering and Mathematics). Como señalan Perales y Aguilera (2020) y Urgiles et al. (2022), STEM hace referencia a las enseñanzas que relacionan las matemáticas con la ingeniería, con objeto de captar los intereses de los alumnos y capacitarlos en los campos asociados de Ciencias (S), Tecnología (T), Ingeniería (E) y Matemáticas (M). Además, se considera referente didáctico de las Ciencias Experimentales. Domènech-Casal et al. (2019) aclaran que no se trata de una metodología, sino de una tendencia que enmarca diversidad de herramientas y perspectivas pedagógicas. Con objeto de fomentar el campo de las ciencias desde edades tempranas, a fin de promover la motivación y las vocaciones científicas (Anguita y Hernán, 2023).

El término STEAM es un derivado de STEM, donde la "A" se relaciona con el mundo de las artes y sus diversas disciplinas, tales como Música, Pintura y Literatura (Perales y Aguilera, 2020). Así pues, la "A" queda vinculada con el campo de las humanidades y se asocia a la creatividad (Domènech-Casal et al., 2019). STEAM se presenta como un enfoque que combina pensamientos humanísticos y científicos, llevados a la práctica a partir de metodologías activas (Perales y Aguilera, 2020). Manami et al. (2023) relacionan el pensamiento lógico de las matemáticas con el campo de la filosofía, asociándolo con el pensamiento crítico y razonamiento, para construir los conocimientos. En definitiva, el término hace referencia a cinco disciplinas, donde integrar distintos ámbitos del currículo (García-Carmona, 2020). Heriksen (2014) y Catterall (2017) definen que combina disciplinas como las matemáticas, originalmente inmutables y rígidas, analizadas bajo un enfoque creativo. Según Castro (2012) es factible introducir conceptos de pintura para otras enseñanzas como las matemáticas.

Los términos STEM o STEAM, se conciben como la combinación y relación entre disciplinas, contextualización de contenidos y aplicación de metodologías activas, llevando a la práctica los distintos elementos curriculares (García-Fuentes et al., 2023). Urgiles et al. (2022) y Domènech-Casal et al. (2019) sugieren asociar la tendencia STEAM al modelo constructivista; también señalan los beneficios de combinarla con las nuevas tecnologías y el aprendizaje entre iguales, planificando actividades que favorezcan atender a la diversidad en el aula. Según Domènech-Casal et al. (2019) y Perales y Aguilera (2020), STEAM se asocia a la enseñanza en base a las competencias.

García-Fuentes et al. (2023), analizan la evolución del enfoque STEAM, para contribuir al desarrollo de las capacidades del estudiante del siglo XXI. Consideran que este enfoque puede ser una alternativa positiva dentro del sistema educativo. Por ende, apuntan hacia una integración de materias con repercusión mundial, que fomentan la motivación y atraen al alumno hacia los campos científico-técnicos, integrando y aplicando contenidos.

Acevedo (2020) y García-Carmona (2020), hacen referencia a este movimiento como una tendencia educativa. En el ámbito pedagógico, Domènech-Casal et al. (2019) hablan de tres ejes trabajados bajo el enfoque STEAM, tales son la Inclusión, la Creatividad y la Ciudadanía. Los autores resaltan la importancia de aplicar las metodologías activas, dado que favorecen el pensamiento crítico e integración de contextos reales donde todo se conecta (Urgiles et al., 2022; Moore et al., 2014 y Moreno, 2019). No obstante, Perales y Aguilera (2020) y García-Fuentes et al. (2023) denuncian una limitación del movimiento, por la falta de investigación pedagógica, la necesidad de formación del profesorado o requerimiento de flexibilizar los contenidos curriculares para trabajarlo.

Manami et al. (2023), Moore et al. (2014) y Moreno (2019) recomiendan el ABP entre las metodologías para desarrollar el enfoque STEAM. Domènech-Casal et al. (2019) relaciona el ABP como una metodología que concuerda con el enfoque STEM y define los proyectos ABP STEM que combinan ambos; aunque también observa limitaciones como la formación del profesorado o dispersión en los planteamientos de conceptos. Por otra parte, García-Carmona (2020) manifiestan que el movimiento STEAM se establece dentro de la didáctica, cuando aún existen metodologías como el ABP que no se han consolidado.

En relación a la combinación de disciplinas, las Matemáticas y en detalle la Geometría, guardan estrecha relación con el mundo de las humanidades; por los elementos que nos rodean y por el desarrollo del pensamiento en sí (Husserl, 2000). El autor advierte que la Geometría va más allá de los aspectos tradicionales y que todavía perdura como una ciencia en progreso continuo y viviente. Leonardo Da Vinci destacaba por su habilidad para combinar diversidad de conocimientos entre disciplinas, tales como arte, ciencias e ingeniería (Henriksen, 2014). Rincón (2004) señala que las obras y trabajos del artista reflejan un profundo estudio que combina campos científicos con las artes, la filosofía y otras áreas, lo que le ha conducido a grandes razonamientos para la posteridad. Sus obras se caracterizan por la combinación entre el mundo de las Matemáticas, la Geometría y el Arte.

2.2. Las Matemáticas y el Arte

Magistrali (2019) afirma que las matemáticas pueden ser identificadas en distintas modalidades artísticas, como la danza, la música, la pintura, la arquitectura, la escultura y la moda. El presente trabajo se centra en relacionar las matemáticas con cuadros del Museo del Prado. Por ende, se analiza el contexto histórico entre ambas disciplinas, junto con un paseo matemático. Para finalizar, han sido recopiladas experiencias relacionadas con estos temas.

2.2.1. Arte y estudio de las Matemáticas y la Geometría

La relación entre el Arte y las Matemáticas ha sido histórica, lo que se refleja en infinidad de grabados y pinturas (Peralta, 1998). El contexto histórico evidencia que la ciencia y la tecnología han estado asociadas al arte y cánones de belleza (García-Carmona, 2020). Las matemáticas al igual que el arte se relacionan con procesos de creación (López, 2011). Para Magistrali (2019) las matemáticas son el eje principal de las obras de arte, Marrasé (2016) apoya la tendencia de englobarlas como arte. El arte se caracteriza por una riqueza cultural llena de elementos geométricos y relaciones como el paralelismo, la simetría y la semejanza (Andongui, 2006).

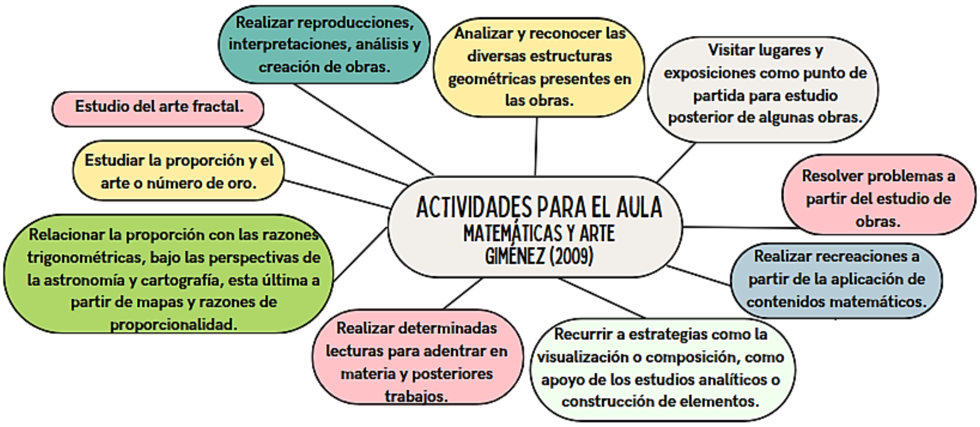
Marrasé (2016) plantea que las matemáticas están basadas en la imaginación, pero se han enfocado de forma técnica. El autor defiende catalogarlas junto con disciplinas como la literatura, la música, la danza y la pintura, porque considera que enriquecen el espíritu. También afirma que nacen de los planteamientos del ser humano y la necesidad de dar respuestas, por eso se basan en un proceso de creatividad que busca dar solución a los problemas. A su vez, asocia la creatividad con la emoción, de igual modo que un matemático es creativo al resolver un problema, lo es un pintor cuando realiza una composición y ambos requieren de imaginación.

Magistrali (2019) define las matemáticas como el lenguaje del arte, debido a que constituyen los elementos básicos de las obras de arte. Existen artistas que han fundamentado sus obras haciendo uso directo de los elementos geométricos, como el puntillismo. Otros artistas como Kandinsky y Jasper Johns se inspiran en elementos geométricos que son protagonistas en sus composiciones. En este tipo de representaciones, la expresión matemática es evidente dado que en la composición se observan las figuras directamente. No obstante, la correlación entre el Arte y las Matemáticas, no ha sido tan evidente en otras épocas o movimientos pictóricos. Si bien las matemáticas han sido el soporte de las obras de arte y componen sus estructuras, su impacto en la elaboración de las pinturas no siempre se observa directamente.

Giménez (2009), afirma que desde el siglo XX se impulsó en el sistema educativo la idea de correlacionar Arte y Geometría, se empieza a promover el estudio del Arte y las ciencias, así como el estudio de las Matemáticas y su conexión con la realidad. Según el autor, Dan Pedoe fue relevante para el estudio de la Geometría y el Arte, por su relación entre la proporción y la belleza. En el sistema educativo desde 1970 se comienzan a vincular los conceptos matemáticos en un contexto fuera de lo tradicional, los contenidos geométricos empiezan a ser correlacionados con la cultura, la historia, la literatura, etc.

Dan Pedoe (1983) estudia la perspectiva como la combinación entre las proporciones y procedimientos de diseño, lo que se produce a lo largo de la historia. El autor defiende incorporar al sistema educativo, conexiones históricas entre las Matemáticas y el Arte. El mismo, sugiere comenzar el estudio de la Geometría con figuras o anécdotas históricas, como Euclides, el trabajo de Leonardo DaVinci o la obra de Durero, que comienza a combinar la proporción con una serie de reglas de proyección (Giménez, 2009). Según Giménez (2009) ha sido escaso en las aulas el estudio de las Matemáticas y la Geometría a partir del entorno artístico, la práctica más común ha sido mencionar puntualmente teoremas. La figura 2 recopila una serie de actividades para trasladar al aula y estudiar estos aspectos.

Figura 2. *Actividades para el Aula. Matemáticas y Arte.*



Fuente: elaboración propia a partir de Giménez (2009).

Giménez (2009) recomienda combinar las actividades de la figura 2 con otras estrategias de aprendizaje para un estudio exitoso. Algunas de ellas son la visualización y la modelización, uso de las TIC, generalización de patrones o planteamiento de actividades de diseño y construcción. Cabe destacar la importancia de presentar la información de distintas formas, recurrir al uso de patrones y situaciones novedosas, con objeto de fomentar habilidades y aprendizajes significativos. Siendo de suma importancia plantear conceptos desde otras perspectivas alejadas de lo convencional, como establecen Ertmer y Newby (1993).

Henriksen (2014) señala que algunos grandes científicos estaban vinculados con la creatividad y defiende la creación de situaciones de aprendizaje que relacionen las ciencias y la visión artística. Para ello, trabaja conceptos científicos con tareas vinculadas a la creación de imágenes, dibujos, etc. De esta forma, el estudiante aprende cruzando los campos de ciencias y humanidades, con visión mayor del mundo real, creando aprendizajes potencialmente beneficiosos. En el Anexo A, pueden consultarse otros aspectos que guardan relación con la didáctica de la geometría y los escenarios de carácter histórico. Si bien se consideran de interés, por motivos de extensión del trabajo no ha sido posible desarrollarlos en este apartado.

Peralta (1998) menciona diversos cuadros y grabados con elementos o alusiones matemáticas, como La escuela de Atenas de Rafael (1509). Los artistas plasmaron figuras, herramientas o situaciones asociados a motivos matemáticos, lo que es símbolo de relación histórica entre las disciplinas. Desde el punto de vista histórico y artístico, este fenómeno ha sido reflejado en los cuadros, dibujos y grabados (Etayo, 2009).

Se considera que inicialmente la perspectiva en el arte se basaba en la Geometría de Euclides. A partir del siglo XIX se observa una relación diferente entre las pinturas y las matemáticas, coincidiendo con la revolución matemática. Donde artistas como Escher y Van Gogh introducen la Geometría no euclediana, donde la visión del artista no pretende reflejar la realidad, sino liberar las formas de la realidad, centrada en los sentidos y no el mundo real (Peralta, 1998 y Magistrali, 2019).

Según Peralta (1998), los diversos sistemas de representación empleados a lo largo de los tiempos, simbolizan la relación entre las Matemáticas y el Arte. Se produce una evolución y desarrollo conjunto de ambas disciplinas, donde aspectos como el movimiento, la perspectiva, la profundidad y el espacio se han ido perfeccionado. Las escenas originalmente eran estáticas, como evidencian los papiros egipcios. Posteriormente, empezaron a perfeccionarse y reflejar el movimiento.

La sensación de profundidad y la combinación con aspectos espaciales llevan a la perspectiva. Así pues, es primordial el concepto de perspectiva y profundidad en el arte, que guarda relación con la forma de interconectar los espacios. La pintura es una superficie plana, donde un espacio tridimensional queda plasmado a modo de composición, para lo que el artista combina la Geometría (Bouleau, 2006). Según Magistrali (2019) se emplea en las composiciones para reflejar profundidad. Los artistas renacentistas manejaban a la perfección la técnica de la perspectiva, al admirar sus obras en dos dimensiones, parece percibirse una imagen real tridimensional (Abreu y Bracho, 2023).

Según Peralta (1998) y Garijo y De María (2003) otro aspecto relevante de las obras es la proporción, vinculado con el prototipo idealizado que aporta realismo y belleza. Mientras que la armonía considera el equilibrio entre las partes de un conjunto y conduce a la belleza. El término Razón Divina o Razón Áurea definen la proporción perfecta entre la belleza y armonía, que supone la perfección estética. También se refieren a ella como la Sección áurea o proporción divina (Magistrali, 2019). Según Luca Paccioli en 1506, la proporcionalidad y la combinación entre el Arte y la Geometría parte de los conocimientos de Pitágoras (Giménez, 2009). La proporción organiza el espacio de forma agradable para los sentidos y puede ser usada a nivel estructural o en la composición de figuras o elementos (Marrasé, 2016). El Número áureo y la serie de Fibbonaci se encuentran vinculados con esta proporción (Rincón, 2004). Por ende, se puede establecer la correlación entre el rectángulo áureo; el número áureo (ϕ), denominado phi o "número de oro" y la serie de Fibbonacci, que deriva en fhi (Marrasé, 2016; Vargas; Rivero ; Vallejo, 2011 ; García y Rodríguez, 2018).

Los términos de composición y equilibrio son otra característica clave. Marrasé (2016) compara la importancia de las formas y las simetrías en las composiciones pictóricas y el estudio matemático, ambos son claves para generar armonía y estética. La composición considera el conjunto y la integración de los distintos elementos en el cuadro y su organización de formas determinadas para lograr un conjunto (Arnheim, 2011). Por otra parte, García (2023) define la geometrización como el proceso donde la realidad se simplifica en formas simples, eliminando lo secundario. La técnica puede ser traslada al aula, para el visionado detallado de las obras y su simplificación. Lo que puede aumentar la capacidad de observación del cuadro y sintetizarlo, además de favorecer la capacidad de abstracción en el arte, característica muy vinculada con las matemáticas.

Los aspectos que guardan relación entre las claves geométricas, las composiciones y las técnicas artísticas han sido ampliados en el Anexo B. Debido a las características de la propuesta, se ha considerado oportuno investigar sobre ellos y reflejarlos en el trabajo, pero por motivos de extensión no ha sido posible desarrollarlo en este apartado.

2.2.2. Acercar las matemáticas al entorno: paseos matemáticos

Para Anguita y Hernán (2023) el alumno concibe las matemáticas como una materia abstracta, rígida, aislada y descontextualizada, lo que se traduce en una falta de interés. Así pues, defienden la necesidad de evidenciar que se encuentran en todas partes. Por eso, establecen una correlación entre las rutas matemáticas y el enfoque STEM, que favorece el aprendizaje en el entorno y promueve enfoques creativos e integrados. Si bien una característica de las matemáticas es la abstracción, observar los contenidos in situ favorece la comprensión. Peralta (1998) propone abrir el concepto y acercarlas al entorno y aspectos prácticos; defiende relacionarlas con campos como el arte, aunque a priori parezcan áreas culturales lejanas.

Anguita y Hernán (2023) sugieren las rutas o paseos matemáticos como propuesta didáctica para acercar las matemáticas al alumno. Se trata de un enfoque de educación en el exterior que surge en 1980, basado en actividades desarrolladas por rutas planificadas, donde se realizan una serie de paradas puntuales. Los estudiantes conectan con el mundo y resuelven actividades planteadas en diversos puntos del itinerario. También plasman los aprendizajes teóricos en contextos experienciales, para lo que se recomiendan las tareas grupales en los lugares propuestos. Guisasola et al. (2005) defienden el proceso de enseñanza y aprendizaje en contextos no formales, además la National Science Teachers Association de EE.UU. (1998) ha manifestado su apoyo público a la labor de los museos dentro de la educación.

Arce et al. (2022) describen la importancia de divulgar los contenidos matemáticos fuera de los límites del aula, como matemáticas al aire libre, en museos o rutas por ciudades. Las matemáticas en los museos con frecuencia se asocian a las visitas programadas para estos centros culturales, se estima que favorecen el aprendizaje cognitivo y el socioafectivo, teniendo una repercusión positiva en el alumno. En España existen museos enfocados exclusivamente a las matemáticas, pero es factible recurrir a otros formatos de museo (Arce et al., 2022). Guisasola et al. (2005) recomiendan realizar visitas de forma guiada, planificada y con materiales didácticos de refuerzo para enriquecer las experiencias y los aprendizajes en estos entornos.

Guisasola et al. (2005) recomiendan una visita planificada desde el aula, donde se aporten antecedentes sobre el itinerario y se asocie con los contenidos estudiados, haciendo una recopilación de ideas. Durante la visita recomiendan partir con una explicación descriptiva del museo, junto con un resumen de lo estudiado previamente en el aula. Tras la visita sugieren hacer un balance sobre las ideas, observaciones y aprendizajes obtenidos.

Shoaft (2004) describe las rutas matemáticas como distintos puntos geolocalizados que se recorren andando, donde se formulan y se resuelven problemas matemáticos con una perspectiva diferente. Estas rutas tienen una gran repercusión en los aprendizajes individuales, favorecen el trabajo en equipo y simbolizan como las matemáticas están en todas partes. Rodríguez (2023) apoya la necesidad de integrar las matemáticas en el entorno, afirmando que son omnipresentes. El autor propone vincularlas con aspectos científicos y tecnológicos; además de áreas como el arte, la arquitectura, la naturaleza o el urbanismo. Este tipo de actividades fomentan las habilidades, las capacidades y los aspectos socioafectivos hacia la materia. Estas rutas son una práctica idónea para recorrer los entornos (ciudad, parque, museo, etc) y combinar los conocimientos matemáticos con otros adicionales.

Rodríguez (2023) plantea realizar actividades in situ, en el lugar visitado. Igualmente, pueden plantearse actividades en el aula, partiendo de una referencia, datos o base de información. Donde las tareas realizadas cobran un sentido diferente, porque permiten profundizar en contenidos estudiados fuera del aula. En cualquier caso, proponer actividades hacen al alumno partícipe de la investigación. También es factible partir de una toma de datos realizada en campo o plantear una situación de partida para que desarrolle sus conjeturas.

Los museos son espacios claves para difundir el Patrimonio cultural, el Museo Nacional del Prado se incluye entre las mejores pinacotecas a nivel mundial (García, 1994). El museo se considera un hito de la cultura, producto de la diversidad de obras pictóricas, esculturas y arte decorativo dentro de una emblemática obra de arquitectura (Maure, 2020).

2.2.3. Experiencias previas sobre enseñanza de las Matemáticas a través del Arte

Por último, se han recopilado una serie de experiencias de proyectos de interés, que guardan relación con la presente propuesta:

- El portal web "*Mateturismo - Turismo Matemático – Recreando la Belleza*", recopila elementos artísticos como escultura, cuadros, etc. bajo anécdotas matemáticas. También propone diferentes rutas matemáticas de distintos países, entre sus propuestas se encuentran varias obras del Prado. (https://mateturismo.wordpress.com/category/espana/madrid/).

- El Proyecto *MathCityMap* de la Universidad de Goethe (Frankfurt), considera una herramienta de consulta de rutas matemáticas de diferentes partes del mundo, algunas de ellas en Madrid. A su vez, permite descargar las rutas y usar diversas propuestas didácticas.

- En la web de "*Geometría Dinámica en Matemáticas*" de Mora (2007) (http://jmora7.com/), se pueden visualizar una serie de elementos artísticos combinados con la Geometría. La propuesta plantea ponerse en el lugar del artista, comprender sus emociones y las técnicas o conocimientos que utilizaba. Algunos autores como Boleau (1996) se refieren a estas técnicas como la geometría secreta de los pintores.

- En el portal web de Geogebra se encuentra el libro "*Marzo, mes de las matemáticas para un mundo mejor*", publicado para la Exposición Arte y Matemáticas (https://marzomates.webs.ull.es/matematicas-y-arte/). El mismo, se compone de obras de arte de diferentes estilos, autores y técnicas como Velázquez, Durero o Escher, que pueden ser estudiadas bajo la visualización o manipulación en esta herramienta.

- Proyecto "*Cuatro miradas para contar un cuadro*": Se trata de un Proyecto de un grupo multidisciplinar del IES Blas de Otero que trabaja las disciplinas de Geometría, Arte, Historia y Religión, sobre obras del Museo del Prado. En el portal web pueden consultarse diversos detalles. (https://sites.google.com/a/iesblasdeotero.com/museo-prado/-que-es-4-miadas-para-contar-un-cuadro)

- Ponencia "*Conexiones de las matemáticas con otras áreas del Museo Nacional del Prado",* dentro del portal web del Museo del Prado que pertenece al Área de Educación del Museo. El proyecto analiza distintas figuras (personajes) bajo perspectivas matemáticas y geométricas.

- Proyecto *STEMforYouth*, asociado a la plataforma OLCMS (Open Learning Content Management System). Se trata de una plataforma europea asociada al enfoque STEAM, donde se plantea la resolución de problemas en contextos reales, para trabajo colaborativo y proyectos de carácter interdisciplinar. (https://www.stem4youth.eu/).

3. Propuesta de intervención

Durante los apartados anteriores se han analizado los aspectos que sugieren algún cambio o mejora para impartir contenidos matemáticos como la Geometría. Tras el análisis documental, dentro del planteamiento de problema se sugiere impartir los contenidos acercando el entorno a los estudiantes, generando cambios conceptuales y haciendo uso de metodologías activas e innovación. Para ello, se ha escogido el entorno cultural del Museo del Prado y la relación histórica y tangible de la Geometría, que es factible estudiar a través de las obras de arte de este museo. Lo que se complementa con trabajo en el aula bajo una perspectiva diferente a la tradicional. Todos estos aspectos quedan reflejados en el marco teórico del trabajo producto de la investigación realizada.

Por ende, se presenta un Proyecto de Innovación para dar cumplimiento al objetivo general planteado que considera "Diseñar una propuesta de intervención didáctica para la enseñanza de la Geometría a través del Arte en 1º ESO con Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y enfoque STEAM". De igual modo, se considera el Aprendizaje Cooperativo (AC) para complementar el ABP, lo que queda reflejado entre los objetivos específicos. Estos aspectos, suponen el hilo conductor para impartir los contenidos de Geometría principalmente, recurriendo al contexto del Museo del Prado. La propuesta considera un paseo matemático, recurriendo al uso directo del entorno y aplicación directa de los contenidos. A continuación, se ha desarrollado la propuesta de intervención del trabajo, partiendo de toda la contextualización, análisis e investigación previa.

El siguiente apartado se compone de la presentación de la Unidad Didáctica, los contenidos y temporalización a desarrollar, partiendo de la Programación Didáctica como base. También se contextualiza la propuesta bajo el marco legislativo vigente que sirve de eje vertebral para el diseño curricular de la misma; dando paso al planteamiento de las distintas actividades diseñadas acorde a los elementos curriculares. Finalmente, concluye con la evaluación de la propuesta.

3.1. Presentación de la propuesta

La presente Unidad Didáctica se enmarca dentro de la Programación Didáctica del área de matemáticas del centro objeto de estudio, que corresponde al primer curso de Educación Secundaria Obligatoria (1º ESO), el que forma parte del primer ciclo de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria acuerdo a la ley vigente.

La unidad desarrollada se titula "*Unidad 8 (U8). Figuras Planas*", considerada la octava unidad didáctica de las doce unidades totales que recoge la Programación del área, como evidencia el Anexo C. A su vez, el Departamento le ha asignado el nombre de "*U8. Las mates y el arte*". Previamente se ha desarrollado la Unidad 4 de "*Magnitudes proporcionales*" y la Unidad 7 de "*Sistemas de medida*". Por otra parte, el desarrollo del pensamiento lógico-formal, la capacidad de razonamiento y la visión espacial son claves para enfrentar las unidades siguientes, tales como la Unidad 9 "*U9. Longitudes y áreas*" y la Unidad 10 "*Álgebra*".

Esta unidad se imparte durante el segundo trimestre y queda organizada en 8 sesiones totales, las sesiones en el aula presentan una duración de 55 minutos; mientras que el paseo matemático considera una sesión final, estimado en un total de 240 minutos. En el Anexo C puede consultarse la figura 6 con el cronograma de la Programación Didáctica.

3.2. Contextualización de la propuesta

El presente apartado considera una contextualización desde el punto de vista legislativo y el entorno socioeconómico del centro educativo, lo que influye considerablemente en el perfil del alumnado, recursos y temas objeto de estudio. Por último, se detallan las características fundamentales del grupo clase para el que se dirige el proyecto.

3.2.1. Marco legislativo estatal y autonómico

Bajo el marco legislativo estatal, la propuesta se enmarca acorde a las siguientes normativas:

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE).
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE). La LOMLOE entró en vigor en enero de 2021, siendo la norma jurídica que regula los estudios en niveles no universitarios. A partir del curso académico 2023/24, queda implantada de forma definitiva, derogando íntegramente a la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE).
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (RD 217/2022).

En términos autonómicos corresponde la siguiente normativa:

- Decreto 65/2022, de 20 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establecen para la Comunidad de Madrid la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (Decreto 65/2022).

3.2.2. Entorno y características del centro educativo

La propuesta se desarrolla para un Centro Concertado Bilingüe de la Comunidad de Madrid*,* localizado en la zona urbana de *Madrid capital*. Se trata de un área residencial con un nivel socioeconómico medio alto. El centro educativo considera todas las etapas, desde Educación Infantil de 3 años, hasta Bachillerato, siendo un centro de tres líneas.

El Plan Educativo del Centro (PEC), establece dentro de sus ejes principales fomentar la relación entre los agentes de la comunidad educativa, recurrir a los postulados constructivistas y apostar por la innovación, recurriendo a las metodologías activas para impartir los elementos curriculares. También existe fuerte concienciación con la integración, la igualdad, las políticas medioambientales y las actividades culturales.

A grandes rasgos, la comunidad educativa evidencia un nivel estable, que fomenta las buenas prácticas docentes; existe un nivel de rendimiento académico y clima óptimos. Por lo general, el alumnado vive en los alrededores del centro, por lo que los alumnos de Educación Secundaria y Bachillerato tienen la posibilidad de acudir andando o en transporte público de forma autónoma. Entre las instalaciones destacan la sala de informática, dos laboratorios, una Escuela de Música y espacios para actos sociales y culturales. Las aulas disponen de recursos digitales como cañón proyector y ordenador, además de carros con tablets.

3.2.3. Destinatarios

La propuesta está dirigida a un grupo clase de veinticinco estudiantes, con edades comprendidas entre once y trece años, de los cuales catorce son alumnas y once son alumnos. El grupo clase permite reflejar la diversidad en el aula, entre los estudiantes se encuentran dos alumnos repetidores. También hay un alumno con asperger, un alumno con dislexia y un alumno con discapacidad auditiva. Ninguno de los alumnos presenta dificultad motora. Posteriormente, en el apartado de atención a la diversidad se desarrollan estos aspectos.

Si bien, el grupo presenta diversidad de perfiles, intereses y motivaciones; gran parte del alumnado muestra una aptitud positiva de cara al aprendizaje y buen nivel de competencia curricular. Asimismo, el entorno familiar se muestra participativo y los estudiantes están familiarizados desde etapas inferiores con el trabajo cooperativo.

3.3. Intervención en el aula

3.3.1. Objetivos

En este apartado se identifican los objetivos generales de etapa representativos para la propuesta, así como los objetivos didácticos planteados para el alumnado.

3.3.1.1. Objetivos generales de etapa

En la presente propuesta de intervención se trabajan todos los objetivos generales de etapa de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), los que han sido reflejados en la tabla 1.

Tabla 1. *Objetivos de Etapa en ESO estatales (RD 217/2022) y autonómicos (Decreto 65/2022).*

	Objetivos de etapa											
Estatales (RD 217/2022)	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
Autonómicos (Decreto 65/2022)	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
Contribución al desarrollo y capacidades del alumnado	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Fuente: elaboración propia a partir del RD 217/2022 y Decreto 65/2022.

En el Anexo D se encuentra la tabla 16, donde puede consultarse la tabla 1 desarrollada y el sistema de trabajo en la propuesta.

3.3.1.2. Objetivos didácticos

Los objetivos didácticos (OD) consideran las metas o fines que deben alcanzar los estudiantes, los OD de la propuesta quedan recopilados en la tabla 2.

Tabla 2. *Relación de los Objetivos Didácticos.*

Objetivos Didácticos (OD)
OD1. Identificar y reconocer los distintos elementos del plano y conocer su clasificación.
OD2. Reconocer las diversas figuras planas (polígonos, círculo y circunferencia, triángulos y cuadriláteros), elementos, propiedades y clasificaciones.
OD3. Calcular problemas y ejercicios de operaciones con ángulos y practicar ejemplos sobre la mediatriz y la bisectriz.
OD4. Reconocer e interpretar las simetrías en las figuras planas.
OD5. Utilizar las escalas para resolver problemas en el entorno del arte.
OD6. Estudiar la razón y proporciones por medio de anécdotas históricas.
OD7. Buscar información con ayuda de las TIC sobre las obras de arte en fuentes fiables.
OD8. Reflexionar sobre la conexión de las matemáticas con otras áreas, en detalle, la relación entre el Arte y las Matemáticas.
OD9. Examinar aspectos geométricos de las obras de arte in situ y respetar el patrimonio cultural y la historia, intentando valorar las aplicaciones de la Geometría en el entorno desde un contexto artístico.
OD10. Resolver ejercicios y problemas para identificar la Geometría de forma creativa en obras de arte, identificando figuras planas, elementos y sus características sobres las láminas de apoyo de las obras de arte.
OD11. Proponer ideas y opciones para la resolución de las actividades, atendiendo y tolerando las opiniones de los demás compañeros. Respetando la diversidad cultural e individual entre los iguales y fomentando la cooperación y el apoyo mutuo entre los compañeros.
OD12. Diseñar un portfolio como producto final que relaciona la Geometría estudiada en los cuadros.
OD13. Defender las ideas propuestas y soluciones adoptadas producto del trabajo cooperativo. Proponer ideas y argumentos para el trabajo en grupo, defender las ideas propuestas y soluciones adoptadas.
OD14. Sintetizar la información aprendida durante el proyecto y confeccionar esquema o mapa mental.
OD15. Participar en las actividades de evaluación, tanto autoevaluación como coevaluación.

Fuente: elaboración propia, basado en el Decreto 65/2022.

3.3.2. Competencias

3.3.2.1. Competencias Clave

Para el desarrollo de esta propuesta se trabajan todas las competencias clave (CC), en la tabla 3 puede consultarse la forma en la que se plantea trabajarlas.

Tabla 3. *Competencias Clave y sistema de trabajo en la propuesta.*

Competencia Clave y sistema de trabajo en la propuesta
Competencia en comunicación lingüística (CCL): Se trabaja por medio del AC, que favorece las relaciones sociales, permitiendo poner en práctica diversidad de formas de comunicación, igualmente está presente el respeto y las habilidades comunicativas en las actividades planteadas. Además, la propuesta se plantea como un ABP donde el alumno debe activar sus conocimientos e investigar; se activa de este modo el aprendizaje significativo y fomento de la reflexión. La competencia está presente dado que se recurre al enfoque STEAM, donde las matemáticas se correlacionan con las humanidades. Siendo uno de los objetivos el desarrollo del pensamiento lógico, crítico y formal. Asimismo, el proyecto también contempla el uso del lenguaje matemático.
Competencia plurilingüe (CP): Se trabaja esta competencia a partir del visionado de un video sobre el Museo del Prado, que muestra frases y reflexiones en diferentes lenguas; como símbolo de la diversidad intercultural. El alumno amplía su perspectiva para conocer, valorar y respetar la diversidad cultural de la sociedad, dado que por medio de anécdotas históricas es factible comprobar la diversidad a lo largo de toda la historia. Esta información se emplea para debatir e intercambiar opiniones durante la realización de actividades del proyecto. La CP se ve favorecida por el AC y el sistema de trabajo por medio de agrupaciones. De igual modo, se puede mencionar el lenguaje matemático como otra forma de trabajar la competencia.
Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM): Se trata de la competencia que se va a trabajar principalmente, donde uno de los objetivos considera el desarrollo del razonamiento y el sentido crítico partiendo de la investigación y planteamiento de actividades diferentes. Siendo la resolución de ejercicios relacionados con la geometría el principal foco de estudio. También destaca la conexión entre disciplinas que se pretende realizar con la propuesta, intentando conectar al alumno con el entorno y la relación de contenidos y otras áreas. Se promueve el enfoque STEAM, por lo que quedan interconectados los campos de las Matemáticas y el Arte. Para acercar las matemáticas al entorno, se recurre al patrimonio cultural; planteando actividades tanto en el aula como en el paseo matemático. La idea es promover actividades que fomenten la reflexión y la creatividad del alumnado, por medio del ABP.
Competencia digital (CD): Se trabaja esta competencia como elemento transversal, a partir de la búsqueda de información en internet, promoviendo el uso responsable, consulta de fuentes fiables y consulta de información de calidad. A su vez, se recurre al uso de presentaciones digitales para impartir la clase, para dar ejemplo sobre el uso responsable y funcional de la tecnología.
Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA): Se trabaja esta competencia por medio de las metodologías activas propuestas en el trabajo. Las actividades realizadas a partir del AC favorecen la autonomía y gestión del tiempo por parte del alumno. También se trabaja el aprendizaje por medio del apoyo entre estudiantes, fomentando relaciones cordiales, la empatía, el respeto, la tolerancia y la integración. Enseñando al alumno a trabajar de forma autónoma, tener un papel constructivo dentro de un grupo y aprender de los demás al mismo tiempo. La distribución del trabajo en roles, permite aceptar responsabilidades y tareas. Las agrupaciones para el trabajo ayudan al alumno a expresarse y regular su estado emocional. Las metodologías innovadoras que se presentan, pretenden lograr la motivación del alumnado, el ABP propone retos que intentan captar su interés y pretenden conectar al alumno con la materia.
Competencia ciudadana (CC): Se trabaja esta competencia a través del AC que favorece las relaciones sociales entre los distintos agentes, estos aspectos y valores luego pueden ser extrapoladas a la vida real. De igual forma, se fomenta una aptitud de integración, dado que se realizan agrupaciones de carácter heterogéneo. A su vez, se trabajan desde las actividades de AC la actitud democrática y el respeto, que luego el alumno puede extrapolar a otras áreas de la vida real. También se ha conectado la propuesta con uno de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de la Agenda 2030. De igual forma, se ha centrado la propuesta en aspectos culturales e históricos, proponiendo metodologías activas bajo la tendencia STEAM. El paseo matemático permite afianzar comportamientos y poner en práctica los valores requeridos socialmente en eventos culturales e históricos, promoviendo el respeto de las normas en otros entornos.
Competencia emprendedora (CE): Se promueve esta competencia por medio de la metodología de tipo ABP, lo que fomenta la investigación y el desarrollo de ideas. También se plantean actividades que requieren de la creatividad e imaginación por parte de los estudiantes, dado que se relaciona la Geometría con el Arte, bajo la tendencia STEAM. El ABP y el AC favorecen el trabajo en equipo, así como enfrentar diversidad de retos. Las actividades planteadas también fomentan la capacidad de decisión del alumno y entrenar el pensamiento por medio de actividades que relacionan la Geometría con otros contextos. A su vez, está muy presente porque uno de los objetivos de la propuesta se centra en la creatividad, la imaginación y promover ideas; producto del tipo de actividades planteadas. Los procesos de evaluación y el producto final del ABP ofrecen diversas oportunidades de aprendizaje.

Competencia Clave y sistema de trabajo en la propuesta
Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC): Se trata de una competencia ampliamente presente en la propuesta de intervención. Se trabaja por medio del AC, dado que promueven valores como el respeto hacia la diversidad de opiniones, sentimientos y emociones. De igual forma también está muy presente el aspecto cultural y las diferentes manifestaciones artísticas que son el hilo conductor. También se consideran el respeto y el valor hacia el patrimonio cultural y su evolución, así como la toma de conciencia del arte y la diversidad cultural, como enfoque para comprender el mundo y el entorno, relacionando las Matemáticas con el Arte. Además, considera acercar las matemáticas al entorno por medio del paseo matemático. La propuesta pretende transmitir la idea de disfrutar, interpretar, reconocer y analizar las representaciones artísticas y culturales del patrimonio. Igualmente hace hincapié en reconocer los elementos técnicos que los componen. A su vez, la creatividad del alumno se pone en escena, junto a su perspectiva para interpretar las obras de arte.

Fuente: elaboración propia a partir del RD 217/2022.

En el Anexo E puede consultarse la tabla 17 que contiene la información ampliada de la tabla 3. Así como la correlación de las CC con los Descriptores Operativos (DO).

3.3.2.2. Competencias Específicas

Para el análisis de las competencias específicas (CE) se ha consultado el RD 217/2022 y el Decreto 65/2022, tomando como referencia la legislación autonómica para el desarrollo de la propuesta. La tabla 4, permite reflejar de forma esquemática la relación entre las CE, los criterios de evaluación y los Descriptores Operativos (DO) de las CC para el curso de 1º ESO. Si bien, los DO aparecen de forma referencial asociados a las CE en la legislación vigente, han sido personalizados para la presente propuesta.

Tabla 4. *Relación de Competencias específicas, criterios de Evaluación y Descriptores Operativos acorde a la legislación autonómica.*

Competencia Específica (Decreto 65/2022)	Criterios de Evaluación (Decreto 65/2022)	Descriptores Operativos (RD 217/2022)
1.	1.1. / 1.2. / 1.3.	CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE1, CE3, CCEC4
2.	2.1.	STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE1, CE3
3.	3.1.	STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD4, CE1, CE3
5.	5.1.	STEM1, STEM3, CD2, CD3, CD4, CC1, CCEC1, CCEC2
6.		STEM1, STEM2, CD3, CE3, CE1, CCEC1, CCEC2
7.	7.1.	STEM3, CD1, CD2, CE3, CCEC2, CCEC4
8.	8.1.	CCL1, CCL2, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC2, CCEC3
9.	9.1. / 9.2.	CPSAA1, CPSAA2, CPSAA4, CPSAA5, CE3
10.	10.1.	CCL5, CP3, STEM3,CPSAA2, CPSAA3, CC1, CC2, CC3

Fuente: elaboración propia, basado en el Decreto 65/2022 y del RD 217/2022.

El contenido de la tabla 4 queda desarrollado con mayor detalle en la tabla 18 del Anexo F.

3.3.3. Contenidos, contenidos transversales y relación de elementos curriculares

3.3.3.1. Contenidos

Acorde al Decreto 65/2022, los contenidos se organizan en bloques. En la presente propuesta se trabajan principalmente los bloques de contenidos “C. Geometría en el Plano y en el espacio” y “B. Medida y Geometría”. De igual forma, dado que la CC STEM es fundamental en el trabajo, los contenidos “A. Números y Operaciones” y “F. Actitudes y Aprendizaje”, son comunes a todas las unidades didácticas, en menor medida se trabajan algunos aspectos del bloque “D. Álgebra”. Estos contenidos se designan como Saberes Básicos dentro de la legislación estatal RD 217/2022 y se organizan en sentidos. Así pues, las unidades didácticas plantean correlacionar contenidos y no tienen un carácter estanco, sino abierto. La correlación entre los sentidos y bloques de contenidos se han desarrollado en la tabla 19 del Anexo G.

Cabe destacar que el Sentido socioafectivo tiene un carácter transversal y se trabaja en todas las unidades didácticas y bloques de contenidos, lo mismo sucede con el Sentido numérico dado que estamos trabajando con la CC STEM, en base a lo establecido en el RD 217/2022.

3.3.3.2. Contenidos Transversales

Los contenidos transversales se recogen en el Artículo 12 del Decreto 65/2022, se deben desarrollar entre todas las materias para contribuir a las competencias clave y a la consecución de los objetivos de la etapa, para un desarrollo integral. Así pues, durante la realización de las actividades diseñadas está presente promover la autonomía y la reflexión; lo que se trabaja por medio del ABP, el AC y las actividades desarrolladas a partir del enfoque STEAM. El desarrollo de la comprensión lectora y escrita, la comunicación audiovisual y la competencia digital se trabaja con las diferentes actividades durante todas las sesiones. La expresión oral, el emprendimiento social, el fomento del espíritu crítico, la educación emocional y en valores, la igualdad de género; la educación para la sostenibilidad incluido el respeto mutuo y la cooperación entre iguales se desarrollan directamente debido al ABP y el AC. Mientras que la creatividad queda especialmente vinculada al enfoque STEAM y el recurso del arte. En la tabla 20 del Anexo H puede consultarse como se concretan en la unidad didáctica desarrollada.

3.3.3.3. Relación entre elementos curriculares

La tabla 5 recopila todos los elementos curriculares comentados en este apartado y que consideran los constructos principales para definir la presente propuesta.

Tabla 5. *Relación de elementos curriculares.*

Unidad 8 (U8). Figuras Planas / U8. Las Mates y el Arte					
Competencia Específica (Decreto 65/2022)	**Contenidos (Decreto 65/2022)**	**Criterios de Evaluación (Decreto 65/2022)**	**Indicadores de Logro**	**Descriptores Operativos (RD 217/2022)**	**Objetivos de etapa**
1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para explorar distintas maneras de proceder y obtener soluciones posibles.	A. Números y Operaciones B. Medida y Geometría C. Geometría en el Plano y en el espacio D. Álgebra F. Actitudes y Aprendizaje	1.1. Interpretar enunciados de problemas matemáticos sencillos organizando los datos dados, estableciendo las relaciones básicas y directas entre ellos y analizando las preguntas formuladas.	1.1.1. Identifica, examina y clasifica los distintos elementos del plano (puntos, rectas, semirrectas, segmentos) y conoce su clasificación. 1.1.2. Reconoce los distintos tipos de ángulos acorde a las clasificaciones y las relaciones angulares. 1.1.3. Examina y clasifica las diversas figuras planas (polígonos, círculo y circunferencia, triángulos y cuadriláteros), elementos, propiedades y clasificaciones. 1.1.4. Reconoce, relaciona e interpreta las simetrías en las figuras planas. 1.1.5. Diferencia entre los conceptos de circunferencia y círculo, líneas poligonales y polígonos. 1.1.6. Identifica e interpreta las propiedades fundamentales de un triángulo y los puntos notables. Conoce el concepto de igualdad de triángulos.	CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE1, CE3, CCEC4.	a) b) c) d) e) f) g) h) i) j) k) l)
		1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas sencillos y relacionados con la vida cotidiana.	1.2.1. Practica y resuelve con los datos de los esquemas geométricos, explicaciones, coteja información para conseguir el resultado. 1.2.2. Reconoce y practica las propiedades de los elementos, tipos y clasificación en distintos soportes (esquemas, cuadernillos, ejemplos, cuadros). 1.2.3. Calcula problemas y ejercicios de operaciones con ángulos y practica ejemplos sobre la mediatriz y la bisectriz.		
		1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema sencillo usando las estrategias adecuadas.	1.3.1. Diseña un producto final, de tipo portfolio o parte del mismo, que describe todos los aspectos matemáticos aprendidos y relaciones con cada obra de arte. 1.3.2. Representa los elementos de un polígono (lados, ángulos, vértices y diagonales). 1.3.3. Representa los elementos de una circunferencia (centro, radio, diámetro, arco y cuerda) y reconoce las posiciones entre una recta y una circunferencia.		
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad		2.1. Conocer y aplicar las herramientas básicas para la comprobación de la corrección matemática de las soluciones	2.1.1. Compara los esquemas geométricos de las explicaciones o de los apuntes y cuadernillos con los elementos que se identifican en las láminas. 2.1.2. Contrasta los ejemplos y soluciones de otros compañeros para comprobar el resultado.	STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE1, CE3	

desde un punto de vista lógico y su repercusión global.		obtenidas en la resolución de un problema.			
3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.	A. Números y Operaciones B. Medida y Geometría C. Geometría en el Plano y en el espacio D. Álgebra F. Actitudes y Aprendizaje	3.1. Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.	3.1.1. Propone y traslada los esquemas geométricos a las láminas. 3.1.2. Numera y clasifica los distintos elementos para ordenar y organizar la información. 3.1.3. Examina y visualiza elementos geométricos en las láminas de estudio.	STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD4, CE1, CE3	a) b) c) d) e) f) g) h) i) j) k) l)
5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.		5.1. Comenzar a realizar conexiones sencillas entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.	5.1.1. Estudia y relaciona la razón y proporción por medio de anécdotas históricas y el contexto del arte. 5.1.2. Reflexiona sobre la relación entre las matemáticas y otras áreas, en concreto, el arte. 5.1.3. Identifica y valora la conexión entre la Geometría en el entorno artístico. 5.1.4. Establece las escalas y conocimientos previos para resolver problemas sobre las obras de arte. 5.1.5. Identifica los diversos elementos geométricos en el entorno a partir de obras de arte, sintetiza la información y genera las correlaciones. 5.1.6. Recurre a fuentes fiables por medio del uso de las TIC para documentar el trabajo.	STEM1, STEM3, CD2, CD3, CD4, CC1, CCEC1, CCEC2	
6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.			6.1.1. Examina y resuelve ejercicios y problemas para identificar la Geometría de forma creativa en las obras de arte. 6.1.2. Comprueba la conexión entre los conceptos teóricos explicados y las láminas de trabajo propuestas. 6.1.3. Aplica conceptos estudiados en otros temas o asignaturas para responder de forma completa durante las actividades.	STEM1, STEM2, CD3, CE3, CE1, CCEC1, CCEC2	
7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.		7.1. Elaborar representaciones matemáticas sencillas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.	7.1.1. Identifica y representa los elementos geométricos en las láminas. 7.1.2. Crea y traslada los conceptos geométricos a las láminas, vinculando los conceptos. 7.1.3. Sintetiza la información por medio de esquemas.	STEM3, CD1, CD2, CE3, CCEC2, CCEC4	

8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	A. Números y Operaciones B. Medida y Geometría C. Geometría en el Plano y en el espacio D. Álgebra F. Actitudes y Aprendizaje	8.1. Comunicar la información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.	8.1.1. Participa activamente adoptando papel activo dentro del grupo, aporta ideas y ayuda a obtener un resultado final. 8.1.2. Intenta emplear el lenguaje matemático durante la explicación oral de los contenidos, cuando manifiesta sus ideas o propone soluciones. 8.1.3. Propone justificaciones y argumentos en las explicaciones, aporta ideas para el trabajo en grupo. 8.1.4. Responde de forma ordenada, tanto oral como por escrito. 8.1.5. Entrega un trabajo limpio, uso de distintos colores y anotaciones correctas. 8.1.6. Entrega un documento con todo lo solicitado, respondiendo a todas las preguntas de forma correcta y presentación cuidada. 8.1.7. Expresa y argumenta las ideas en trabajo cooperativo.	CCL1, CCL2, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC2, CCEC3	a) b) c) d) e) f) g) h) i) j) k) l)
9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.		9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.	9.1.1. Trabaja de forma motivada y constructiva durante la actividad. 9.1.2. Manifiesta sus dudas o inquietudes al grupo o al docente con objeto de mejorar los resultados del trabajo. 9.1.3. Afronta las tareas con positividad y como retos que deben ser resueltos con la mayor calidad posible.	CPSAA1, CPSAA2, CPSAA4, CPSAA5, CE3	
		9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	9.2.1. Acepta los comentarios ajenos, con perspectiva de aumentar su aprendizaje o transmitir sus conocimientos. 9.2.2. Participa de forma equitativa con los miembros. Fomenta la comunicación fluida. 9.2.3. El grupo entrega un producto con todos los requerimientos del proyecto. 9.2.4. Defiende las ideas propuestas y soluciones adoptadas.		
10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.		10.1. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	10.1.1. Interacciona con los miembros del equipo y trabaja de forma respetuosa y proactiva. Se animan entre ellos para fomentar un buen ambiente de trabajo, existen debates, propuestas y sugerencias para mejorar el trabajo realizado. 10.1.2. Trabaja de forma productiva y con implicación. 10.1.3. Decide y discute con aptitud tolerante sobre las diversas opciones de trabajo para las actividades.	CCL5, CP3, STEM3, CPSAA2, CPSAA3, CC1, CC2, CC3	

Contenidos Transversales (CT):	CT1: Promover la autonomía y la reflexión. Acorde al Decreto 65/2022, se relacionan con el 9.1. y 9.2.	CT1.1: Realiza un trabajo autónomo con aptitud positiva e interés por la actividad. CT1.2: Participa de forma productiva y respetuosa en el grupo. CT1.3: Propone ideas ingeniosas o intenta relacionar los contenidos que se explican. CT1.4: Reflexiona e investiga sobre los temas solicitados.	-----------------	
	CT2: El desarrollo de la comprensión lectora, la expresión oral y escrita. Acorde al Decreto 65/2022, se relacionan con el 8.1. y 10.1.	CT2.1: Investiga en fuentes de información, consulta los apuntes de apoyo. CT2.2.: Participa de forma activa en el grupo de cooperativo, con el grupo clase y con el docente. Se expresa de forma correcta, coherente y recurre al uso del lenguaje matemático. CT2.3: Responde a las actividades con coherencia y argumentos.		
	CT3: Desarrollar la comunicación audiovisual.	CT3.1: Comprende el material expuesto y relaciona las explicaciones, para la puesta en práctica de los conceptos matemáticos.		
	CT4: Desarrollar la competencia digital.	CT4.1: Realiza un buen trabajo de documentación, acude a varias fuentes, compara información y muestra interés por la actividad.		
	CT5: Desarrollar el emprendimiento social, la educación emocional y en valores, la igualdad de género; la educación para la sostenibilidad incluido el respeto mutuo y la cooperación entre iguales. Acorde al Decreto 65/2022, se relacionan con el 9.1., 9.2. y 10.1.	CT5.1: Apoya a los compañeros, reflexiona sobre ideas de los demás y las propuestas de clase. CT5.2: Manifiesta una actitud de respeto, tolerancia y cooperativa. CT5.3: Recomienda y propone sus ideas, defiende y valora sus argumentos con educación.		
	CT6: El fomento del espíritu crítico y la creatividad. Acorde al Decreto 65/2022, se relacionan con el 3.1. y 5.1.	CT6.1: Comprende las conexiones planteadas entre el Arte y las Matemáticas. CT6.2: Visualiza conexiones y aporta ideas adicionales, realiza un trabajo completo con las láminas de estudio. CT6.3: Plantea ideas con criterio y creatividad, propone ideas adicionales, genera esquemas de diseño y correlación de geometría elaborados.	-----------------	

Fuente: elaboración propia a partir del Decreto 65/2022 y del RD 217/2022.

3.3.4. Metodología

Dicha propuesta se plantea bajo postulados constructivistas, donde las metodologías activas centran el desarrollo de la misma. El trabajo considera introducir los contenidos curriculares por medio del ABP y el AC para las diversas actividades. Para el trabajo cooperativo el docente organiza grupos formales con estructura cooperativista heterogénea, también existen tareas individuales y a nivel grupal. El estudio de los contenidos, parte de los conocimientos previos del alumnado detectados por medio de un cuestionario. El ABP propuesto considera un aprendizaje de tipo interdisciplinar, bajo el enfoque STEAM. A su vez, se complementa con la idea de abrir las aulas al entorno y considera un Paseo Matemático contextualizado en el Museo del Prado. El ABP fomenta la investigación y razonamiento de las respuestas, con objeto de desarrollar la creatividad.

Las sesiones y actividades siguen la secuenciación de la figura 1 gestionando los pasos del ABP, partiendo de la pregunta guía que sirve de hilo conductor *"¿Qué tienen que ver las Matemáticas y el Arte?*". Las agrupaciones se plantean para cuatro integrantes, favoreciendo la atención a la diversidad, el enriquecimiento y el apoyo entre alumnos. Los alumnos especificados con características especiales se distribuyen entre los diferentes grupos. Para el diseño de las actividades se propone la estructura de cooperativo formal "*Aprender Juntos"* desarrollada durante varias sesiones. Las técnicas simples o informales de AC, como "Plantear el trabajo que se va a realizar" y "mapa conceptual a cuatro bandas" se introducen de forma puntual en alguna sesión. Resulta fundamental el carácter participativo de los estudiantes, con objeto de que exploren, experimenten y descubran los conceptos matemáticos por sí mismos. Durante las sesiones, los grupos de cooperativo trabajan sobre distintas láminas, siguiendo un cuadernillo, impulsando la comunicación y la toma de decisiones conjuntas. Los cuadros seleccionados abordan distintas estructuras geométricas, desde escenas hasta personajes que reflejan elementos geométricos, etc. La diversidad de elementos geométricos abarca desde la composición hasta la morfología del cuadro.

En la primera sesión se inician las actividades del proyecto, como planteamiento de un reto como pregunta inicial y organización de los equipos. La dinámica general de las sesiones, considera recordar lo estudiado, plantear los objetivos, exponer los contenidos y orientar y dirigir el trabajo, fomentando las explicaciones breves y concretas del docente. Al término de las sesiones se realiza un resumen de los contenidos trabajados y una introducción de la siguiente sesión. El producto final consiste en un portfolio elaborado durante todas las sesiones. La última sesión corresponde con el paseo matemático, que contempla una ruta guiada por los cuadros estudiados desde el aula, con apoyo de materiales didácticos. Al finalizar, tendrán lugar las actividades de evaluación y reflexiones finales. El detalle de la relación entre el ABP y las etapas del mismo, puede ser consultada en el Anexo I e igualmente se complementa con la información del siguiente apartado.

3.3.5. Cronograma y secuenciación de actividades

La secuenciación y temporalización de la propuesta, consideran las 4 horas lectivas semanales destinadas a la materia. Así pues, se han establecido 7 sesiones de 55 minutos (55´) en el aula y una sesión final de 240 minutos (240´) para la última sesión del paseo matemático. Al respecto, se han diseñado 14 actividades a partir de los objetivos didácticos; las que comprenden los contenidos que deben impartirse en las distintas sesiones, de un modo coherente, secuenciado y organizado, con el fin de darle sentido constructivo a la asignatura e impartir la unidad didáctica. La figura 3 considera el cronograma de las distintas sesiones y su correlación con los pasos del ABP comprendidos en la figura 1.

Figura 3. *Cronograma de secuenciación y temporalización para Unidad Didáctica.*

	Semana 1				**Semana 2**			
	Sesiones (S)							
Actividad (Act)	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**
Act0 ¿Mates y Arte?								
Act1 ¿Elementos del plano o del cuadro?								
Act2 Las figuras planas del cuadro								
Act3 ¿Hay ángulos en el Prado?								
Act4 Investigamos								
Act5 ¿Simetrías en geometría o en los cuadros?								
Act6 Calculando escalas con los cuadros								
Act7 La razón áurea								
Act8 Practicamos								
Act9 Mis ideas y mi mente								
Act10 Creando mi propia obra de arte								
Act11 Hablando como un artista								
Act12 ¿Ahora sí Mates y Arte?								
Act13 Paseo por mi museo								
Act14 ¿Qué hemos aprendido?								
Correlación con los pasos del ABP acorde a figura 1. Pasos: (**)	**1-2-3-4-5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**6-7-8-9**	**9-10**

(*) 1 sesión equivale a 55´, salvo la S8 de 240´.
(**) Correlación de la secuenciación de sesiones y actividades con los pasos del ABP descritos en la figura 1 "Características del Aprendizaje Basado en Proyectos".

Fuente: elaboración propia.

Resulta de suma importancia proponer la organización de las actividades y sesiones. Sin embargo, deben entenderse como una propuesta flexible en función del ritmo del grupo clase. En el Anexo I se ha confeccionado la tabla 21 que permite relacionar las actividades, con las sesiones, los Objetivos Didácticos (OD) y los pasos del ABP.

3.3.5.1. Descripción de las actividades

Las actividades diseñadas acorde a su secuenciación, quedan descritas por medio de las tablas 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13, recopiladas a continuación.

Tabla 6. *Descripción de la Sesión 1 y sus actividades.*

<table>
<tr><td>Sesión</td><td colspan="3">S1 Relacionando Mates y Arte</td><td>Actividad/es</td><td>Act0 ¿Mates y Arte? / Act1 ¿Elementos del plano o del cuadro? / Act2 Las figuras planas del cuadro</td></tr>
<tr><td>Tipología</td><td colspan="3">Presentación del proyecto y organización. Detección de conocimientos previos. Inicio del proyecto.</td><td>Fase del ABP (figura 1)</td><td>Paso 1/ Paso 2/ Paso 3/ Paso 4/ Paso 5</td></tr>
<tr><td>Duración</td><td>55´</td><td>Espacio</td><td>Aula</td><td>Agrupamiento</td><td>5 grupos de 4 y un grupo de 5, trabajo cooperativo / Estructura de cooperativo “Plantear el trabajo que se va a realizar” y “Aprender Juntos” / Debate grupal / Trabajo Individual</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td colspan="5">Cuadernillo Anexo J – El alumno dispone de un cuadernillo con la información para seguir los pasos de esta actividad / Ordenador y cañón proyector / Cuaderno convencional u hojas / Material de escritura / Material de dibujo (escuadra, regla y cartabón) / Láminas blanco y negro de los cuadros de trabajo en formato A3 / Láminas en color de los cuadros de trabajo en formato A5 / Carpeta para portfolio / Fundas plásticas / Separadores / Docente / Instrumento de evaluación, Cuestionario</td></tr>
<tr><td>Competencias Clave</td><td colspan="2">CCL – CP – STEM – CD – CPSAA – CC – CE - CCEC</td><td>Objetivos didácticos</td><td colspan="2">Act0: OD8 – OD11
Act1: OD1 –OD8 - OD10 – OD11 – OD12– OD13</td></tr>
<tr><td colspan="6">Resumen de la sesión</td></tr>
<tr><td colspan="6">Durante esta sesión se van a desarrollar las actividades Act0 y Act1. De forma general, se presenta el proyecto y se desarrollan las primeras partes del ABP. Se organizan las actividades iniciales, se aporta información al alumno y se evalúan los conocimientos previos del alumno.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Temporalización / Desarrollo de la Sesión, descripción actividades.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Actividad 0</td></tr>
<tr><td>5´</td><td colspan="5">Comenzando con la Act0 se introduce al alumno en contexto de los contenidos y planificación del proyecto, con objeto de presentarlo. Además de los conceptos que se van a desarrollar, en detalle el tema de la geometría. Se comenta el vínculo y el sistema de trabajo combinando la Geometría con los cuadros del Museo del Prado. Se organizan los equipos y se presenta el reto final, que considera confeccionar un portfolio con todos los trabajos del grupo, de donde finalmente serán seleccionados para exponer en el pasillo del centro las mejores láminas, resúmenes e información de cada grupo. Se recurre a la estructura de cooperativo “Plantear el trabajo que se va a realizar” donde el alumno debe complementar el cuadernillo del Anexo J, los equipos escogen algún nombre relacionado con el arte (cuadro, museo, artista, etc), esta ficha sirve para que los grupos organicen su trabajo durante todo el proyecto.</td></tr>
<tr><td>5’</td><td colspan="5">Se realiza el visionado del video del Museo del Prado (https://www.youtube.com/watch?v=_Ot2DMWgJm0), donde diferentes actores de distintas nacionalidades y en diferentes idiomas, formulan frases que fomentan la reflexión sobre el arte en el Museo del Prado. Se respetan los grupos de trabajo estables de AC y se les hace entrega de los materiales para el proyecto; tales como carpeta, separadores y fundas plásticas, cuadernillos de actividades y láminas de cuadros.</td></tr>
<tr><td>10´</td><td colspan="5">Se plantea la pregunta guía “¿Qué tienen que ver las Matemáticas y el Arte?”, dicha pregunta se conecta con una lluvia de ideas a nivel de gran grupo que abarca contenidos sobre la Geometría, las aplicaciones de la misma y sobre las creencias de los alumnos en relación a su vínculo con el arte. De esta forma el docente prepara el contexto para activar, recordar y evaluar los conocimientos previos referidos a figuras planas (elementos del plano, figuras geométricas, ángulos, simetrías, etc). Seguidamente se explica que se debe confeccionar un portfolio como resultado de todas las actividades grupales realizadas, el que se confecciona con el transcurso del proyecto para</td></tr>
</table>

	recopilar la información. Para finalizar, cada alumno debe rellenar y entregar el cuestionario del Anexo J individualmente, con objeto de poder evaluar los conocimientos previos y el punto de partida del conocimiento.			
	Actividad 1			
5´	Se explica conceptualmente la Act1, donde el alumno debe identificar los elementos del plano sobre cuadros, con el fin de poder trabajar las distintas propiedades y responder a las preguntas. Para ello, dado que el ABP pretende fomentar la investigación del estudiante, el alumno dispone del cuadernillo para la Act1 del Anexo J. Se realiza reflexión individual sobre la frase "Todo lo que puedes imaginar es real" de Pablo Picasso.			
5´	Se realiza una explicación tradicional sobre los contenidos matemáticos, proyectando los materiales de forma digital.			
20´	Se inician las actividades y el alumno comienza el desarrollo del proyecto, en la siguiente sesión se da un plazo para finalizarlas. Se utiliza la estructura de cooperativo "*Aprender Juntos*", mientras que los alumnos van respondiendo su ficha de actividades, se van realizando por turnos las representaciones en las láminas en blanco y negro en formato A3.			
5´	Se recapitulan los aspectos claves de la sesión y se introduce el trabajo de la sesión 2 y la actividad 2.			
Evaluación del Aprendizaje				
Finalidad: Diagnóstica, para la detección de ideas previas y orientar los saberes básicos.	**Momento:** Inicial, para conocer la situación del alumnado al comienzo del proceso de enseñanza-aprendizaje, al inicio de la UD.	**Agente:** Evaluación Interna. Heteroevaluación, el evaluador es el profesor.	**Instrumento de evaluación:** Cuestionario individual "Cuestionario de Geometría", Anexo J - Act0.	
Competencias Específicas	**Contenido**	**Criterios de evaluación**	**Indicador de logro**	
CE1	B. / C.	1.1. – 1.2. – 1.3.	1.1.1. – 1.1.2. – 1.1.3. – 1.2.3. – 1.3.2.	
Contenidos transversales		CT2	CT2.3.	

Fuente: elaboración propia

Tabla 7. *Descripción de la Sesión 2 y sus actividades.*

Sesión	S2 Estudiando geometría con otros ojos			**Actividad/es**	Act1 ¿Elementos del plano o del cuadro? / Act2 Las figuras planas del cuadro
Tipología	Profundización y desarrollo del Proyecto.			**Fase del ABP (figura 1)**	Paso 5
Duración	55´	**Espacio**	Aula	**Agrupamiento**	5 grupos de 4 y un grupo de 5, trabajo cooperativo / Estructura de cooperativo "*Aprender Juntos*" / Individual
Recursos	Cuadernillo Anexo J – El alumno dispone de un cuadernillo con la información para seguir los pasos de esta actividad / Ordenador y cañón proyector / Cuaderno convencional u hojas / Material de escritura / Material de dibujo (escuadra, regla, compás, transportador de ángulos y cartabón) / Láminas blanco y negro de los cuadros de trabajo en formato A3 / Láminas en color de los cuadros de trabajo en formato A5 / Docente				
Competencias Clave	CCL –STEM – CD - CPSAA – CC – CE - CCEC		**Objetivos didácticos**	Act1: OD1 –OD8 - OD10 – OD11 – OD12 – OD13 Act2: OD2 – OD8 - OD10 – OD11 – OD12 – OD13	
Resumen de la sesión					
Durante esta sesión se da un plazo para finalizar la Act1 y se desarrolla la Act2.					
Temporalización / Desarrollo de la Sesión, descripción actividades.					
5´	Breve resumen sobre la sesión anterior. Se introduce anécdota histórica sobre el origen de la geometría.				
10´	Se da un plazo para finalizar la Act1, poniendo en común todas las ideas y soluciones trabajadas de forma individual, también para consulta de dudas. Se explican contenidos sobre las composiciones artísticas y como los artistas las utilizan en las obras de arte. En ocasiones de forma evidente y otras no. Esta introducción es tan sólo preliminar, dado que los contenidos geométricos aún no se han comenzado a estudiar en profundidad, pero sirve para establecer el seguimiento y la esencia del proyecto que viene a ser vincular las Matemáticas con el Arte, además del uso y evolución histórica que han tenido ambos campos.				
	Actividad 2				
10´	Se realiza una explicación tradicional sobre los contenidos de la Act2, proyectando los materiales de forma digital. Los contenidos que se trabajan durante esta actividad son ángulos, polígonos y líneas poligonales. El alumno debe identificar figuras planas sobre cuadros, con el fin de poder trabajar las distintas propiedades y responder a las preguntas planteadas. Se debe seguir los cuadernillos con los principales aspectos conceptuales y una serie de preguntas y ejercicios, lo que se recopila en el Anexo J.				

25´	Se recurre a la estructura de cooperativo "*Aprender Juntos*" para responder la ficha del Anexo J. Primero el alumno revisa los contenidos de forma individual, para luego realizar una puesta en común con el resto del grupo; donde se empiezan a plasmar las distintas soluciones sobre las láminas en blanco y negro en formato A3 y A4.
5´	Espacio para la reflexión donde se valoran las tareas avanzadas.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 8. *Descripción de la Sesión 3 y sus actividades.*

Sesión	S3 El mundo de las figuras planas			**Actividad/es**	Act2 Las figuras planas del cuadro
Tipología	Profundización y desarrollo del Proyecto.			**Fase del ABP (figura 1)**	Paso 5
Duración	55´	**Espacio**	Aula	**Agrupamiento**	5 grupos de 4 y un grupo de 5, trabajo cooperativo / Estructura de cooperativo "*Aprender Juntos*"
Recursos	Cuadernillo Anexo J – El alumno dispone de un cuadernillo con la información para seguir los pasos de esta actividad / Ordenador y cañón proyector / Cuaderno convencional u hojas / Material de escritura / Material de dibujo (escuadra, regla, compás, transportador de ángulos y cartabón) / Láminas blanco y negro de los cuadros de trabajo en formato A3 / Láminas en color de los cuadros de trabajo en formato A5 / Docente				
Competencias Clave	CCL –STEM – CD - CPSAA – CC – CE - CCEC	**Objetivos didácticos**	Act2: OD2 – OD8 - OD10 – OD11 – OD12 – OD13		
Resumen de la sesión					
Durante esta sesión se desarrolla la Act2.					
Temporalización / Desarrollo de la Sesión, descripción actividades.					
5´	Breve resumen sobre la sesión anterior y reflexión individual sobre la frase de la academia de Platón "Prohibida la entrada a quién no sepa de geometría".				
5´	Se da un plazo para poner en común en el grupo cooperativo todas las ideas y soluciones trabajadas de forma individual y completar algunas respuestas pendientes.				
10´	Se realiza una explicación tradicional sobre nuevos contenidos de la Act2, que permiten complementar el estudio de las figuras planas, para lo que se proyectan los materiales de forma digital. Los contenidos previstos para esta sesión consideran el estudio del círculo y circunferencia, triángulos y cuadriláteros. El alumno continúa resolviendo los ejercicios de la ficha del Anexo J y a su vez continúa identificando figuras planas sobre cuadros, con el fin de poder trabajar las distintas propiedades y responder a las preguntas planteadas.				
30´	Se recurre a la estructura de cooperativo "*Aprender Juntos*", prestando atención de que todos los alumnos participen por igual. Se recurre a esta técnica para trabajar sobre las láminas en formato A3 y A4, a pesar de que los alumnos de forma individual van respondiendo su ficha de actividades.				
5´	Se valoran las tareas avanzadas, se solicita finalizar parte de las tareas en casa.				

Fuente: elaboración propia.

Tabla 9. *Descripción de la Sesión 4 y sus actividades.*

Sesión	S4 Midiendo el arte			**Actividad/es**	Act3 ¿Hay ángulos en el Prado? / Act4 Investigamos
Tipología	Profundización y desarrollo del Proyecto.			**Fase del ABP (figura 1)**	Paso 5
Duración	55´	**Espacio**	Aula	**Agrupamiento**	5 grupos de 4 y un grupo de 5, trabajo cooperativo / Estructura de cooperativo "*Aprender Juntos*" / individual
Recursos	Cuadernillo Anexo J – El alumno dispone de un cuadernillo con la información para seguir los pasos de esta actividad / Ordenador y cañón proyector / Cuaderno convencional u hojas / Material de escritura / Material de dibujo (escuadra, regla, compás, transportador de ángulos y cartabón) / Láminas blanco y negro de los cuadros de trabajo en formato A4 / Láminas en color de los cuadros de trabajo en formato A4 / Pizarra vileda / Docente				
Competencias Clave	CCL –STEM – CD - CPSAA – CC – CE - CCEC	**Objetivos didácticos**	Act3: OD3 – OD8 - OD10 – OD11 – OD12 – OD13 Act4: OD7 –OD8 – OD12		
Resumen de la sesión					
Durante esta sesión se desarrolla la Act3 y se propone la Act4 para que el alumno pueda documentarse en casa.					
Temporalización / Desarrollo de la Sesión, descripción actividades.					

5´	Breve resumen sobre la sesión anterior y reflexión grupal sobre la perspectiva entre el Arte y las Matemáticas. Además, se incita a la reflexión sobre las aplicaciones cotidianas de la Geometría.
5´	Se da un plazo para poner en común en el grupo cooperativo todas las ideas y soluciones trabajadas individualmente.
10´	Se realiza una explicación tradicional por parte del docente sobre los contenidos de bisectriz y mediatriz. Para ello el docente se apoya en la pizarra vileda. Seguidamente se introduce una anécdota histórica sobre el origen del sistema sexagesimal. Esta anécdota sirve para conectar e introducir las medidas de los ángulos, operaciones y clasificación de los mismos; teniendo en cuenta que la medición de los ángulos tiene su base en el sistema sexagesimal.
30´	Se recurre a la estructura de cooperativo "*Aprender Juntos*" para la resolución de los distintos ejercicios, donde los alumnos exponen sus dudas, ideas y luego consensuan con su grupo cooperativo. Cada alumno va respondiendo de forma individual, teniendo en cuenta las respuestas que se adoptan a nivel grupal. Se realiza un ejercicio de cada tipo durante el transcurso de la actividad. Las láminas en formato A3 y A4 se trabajan de forma coordinada.
5´	El docente explica al alumno la Act4 que debe desarrollarse de forma individual. Esta actividad consiste en buscar información general en la web sobre los cuadros estudiados, sus medidas y dimensiones. Para ello, puede consultarse la ficha técnica de cada cuadro en la web oficial del Museo del Prado. También se incita a contrastar información de otras fuentes para realizar un trabajo documental completo y contrastado.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 10. *Descripción de la Sesión 5 y sus actividades.*

<table>
<tr><td>Sesión</td><td colspan="3">S5 La geometría secreta de los pintores</td><td>Actividad/es</td><td>Act5 ¿Simetrías en geometría o en los cuadros? / Act6 Calculando escalas con los cuadros / Act7 La razón áurea</td></tr>
<tr><td>Tipología</td><td colspan="3">Profundización y desarrollo del Proyecto.</td><td>Fase del ABP (figura 1)</td><td>Paso 5</td></tr>
<tr><td>Duración</td><td>55´</td><td>Espacio</td><td>Aula</td><td>Agrupamiento</td><td>5 grupos de 4 y un grupo de 5, trabajo cooperativo / Estructura de cooperativo "Aprender Juntos" / Individual</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td colspan="5">Cuadernillo Anexo J – El alumno dispone de un cuadernillo con la información para seguir los pasos de esta actividad / Ordenador y cañón proyector / Cuaderno convencional u hojas / Material de escritura / Material de dibujo (escuadra, regla, compás, transportador de ángulos y cartabón) / Láminas blanco y negro de los cuadros de trabajo en formato A4 / Láminas en color de los cuadros de trabajo en formato A4 / Docente / Instrumento de evaluación, Escala de Observación.</td></tr>
<tr><td>Competencias Clave</td><td colspan="2">CCL –STEM – CD - CPSAA – CC – CE - CCEC</td><td>Objetivos didácticos</td><td colspan="2">Act5: OD4 – OD8 - OD10 – OD11 – OD12 - OD13
Act6: OD5 – OD8 - OD10 – OD11 – OD12 - OD13
Act7: OD6 – OD8 - OD10 – OD11 – OD12 - OD13</td></tr>
<tr><td colspan="6">Resumen de la sesión</td></tr>
<tr><td colspan="6">Esta sesión considera en primer lugar el desarrollo de la Act5, seguidamente se introduce la Act6 y finaliza con la Act7. La sesión se ha estructurado en tres actividades acorde las tres temáticas que se trabajan, los trabajos de AC se desarrollan por medio de la estructura de cooperativo "Aprender Juntos".</td></tr>
<tr><td colspan="6">Temporalización / Desarrollo de la Sesión, descripción actividades.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Actividad 5</td></tr>
<tr><td>10´</td><td colspan="5">Breve resumen sobre la sesión anterior y explicación general con proyección digital sobre el concepto de simetría de las figuras, así como sus explicaciones sobre los cuadros y utilidad histórica que se ha dado a nivel artístico. Se hace referencia a los esquemas de simetría principales y se introducen conceptos como la perspectiva, la profundidad, la composición y equilibrio. En el Anexo J se puede realizar una lectura detallada de estos aspectos.</td></tr>
<tr><td>10´</td><td colspan="5">Se trabaja por medio de la estructura de cooperativo "Aprender Juntos" para completar los ejercicios del Anexo J. De nuevo, el alumno debe revisar los contenidos de la ficha de ejercicios, exponen sus dudas e ideas y consensúan las soluciones con su grupo cooperativo. Cada alumno va respondiendo de forma individual, teniendo en cuenta las respuestas que se adoptan a nivel grupal. Se realiza un ejercicio de cada tipo durante el transcurso de la actividad. Las láminas en formato A4 se trabajan de forma coordinada.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Actividad 6</td></tr>
<tr><td>5´</td><td colspan="5">Se recuerda el concepto de escala, se resuelve un ejemplo y se pide al alumno resolver los ejercicios de la ficha. Debe obtener la escala de los cuadros, utilizando los datos de las medidas que ha obtenido en su investigación.</td></tr>
<tr><td>10´</td><td colspan="5">Se recurre a la estructura de cooperativo "Aprender Juntos" para la resolución de la actividad.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Actividad 7</td></tr>
<tr><td>10´</td><td colspan="5">Visionado del video sobre "El Pato Donald y la proporción áurea" (https://www.bing.com/videos/riverview/relatedvideo?q=el+pato+donald+y+la+proporcion+aurea&mid=5028EBF17DEE27C28BA65028EBF17DEE27C28BA6&FORM=VIRE), explicación sobre los distintos conceptos relacionados, los que se complementan igualmente con las anécdotas e información del Anexo J. Se explica la construcción del</td></tr>
</table>

	rectángulo áureo, la proporcionalidad entre su lado y su base, la relación con la serie de Fibonacci, la relación con el pentágono mágico. Se explica cómo construir el rectángulo áureo y la espiral. Se realizan las siguientes visualizaciones de Geogebra sobre la proporción áurea https://www.geogebra.org/m/Wvpm47vg y su influencia directa en el cuadro de La Gioconda de Leonardo Da Vinci https://www.geogebra.org/m/sambpjvg . Tras explicar la construcción del rectángulo áureo, este debe ser trasladado a las láminas. Además, se deben identificar otros elementos relacionados con dicha proporción.
10´	Se realizan las actividades del Anexo J sobre la proporción áurea y se trasladan a las láminas en formato A4.

Evaluación del Aprendizaje			
Finalidad: Formativa o continua, para evaluar las dificultades durante el ABP y ajustar el proceso de aprendizaje.	**Momento:** Procesual, información sobre el estado del proyecto y el proceso de enseñanza-aprendizaje.	**Agente:** Evaluación Interna. Heteroevaluación, el evaluador es el profesor.	**Instrumento de evaluación:** Escala de Observación Numérica con gradación del 1 al 4, para la Sesión 5, corresponde a la tabla 22 que puede consultarse en el Anexo K.
Competencias Específicas	**Contenido**	**Criterios de evaluación**	**Indicador de logro**
CE1 – CE2 – CE3 – CE5 – CE6 – CE7 – CE8 – CE9 – CE10	A. / B. / C. / D. / F.	1.1. – 1.2. – 1.3. – 2.1. – 3.1. – 5.1. – CE6 - 7.1. – 8.1. – 9.1. – 9.2. – 10.1	1.1.1. – 1.1.2. – 1.1.3. – 1.1.4. – 1.1.5. – 1.1.6. – 1.2.1. – 1.2.2. – 1.2.3. – 1.3.2. – 1.3.3. – 2.1.1. – 2.1.2. – 3.1.1. – 3.1.2. - 3.1.3. – 5.1.1. – 5.1.2. – 5.1.3. – 5.1.4. – 5.1.5. – 5.1.6. – 6.1.1. – 6.1.2. – 6.1.3. – 7.1.1. – 7.1.2. – 7.1.3. – 8.1.1. – 8.1.2. – 8.1.3. – 8.1.7. – 9.1.1. – 9.1.2. – 9.1.3. - 9.2.1. – 9.2.2. – 10.1.1. – 10.1.2. – 10.1.3.
Contenidos transversales		CT1 – CT2 – CT3 – CT4 – CT5 – CT6	CT1.1. – CT1.2. – CT1.3. – CT1.4. – CT2.1. – CT2.2 – CT2.3 – CT3.1. – CT4.1. – CT5.1. – CT5.2. – CT5.3. – CT6.1. – CT6.2. – CT6.3.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 11. *Descripción de la Sesión 6 y sus actividades.*

Sesión	S6 Practicando			**Actividad/es**	Act8 Practicamos
Tipología	Profundización y desarrollo del Proyecto.			**Fase del ABP (figura 1)**	Paso 5
Duración	55´	**Espacio**	Aula	**Agrupamiento**	5 grupos de 4 y un grupo de 5, trabajo cooperativo / Estructura de cooperativo "*Aprender Juntos*" / Grupo clase / Individual
Recursos	Cuadernillo Anexo J – El alumno dispone de un cuadernillo con la información para seguir los pasos de esta actividad / Ordenador y cañón proyector / Cuaderno convencional u hojas / Material de escritura / Material de dibujo (escuadra, regla, compás, transportador de ángulos y cartabón) / Láminas blanco y negro de los cuadros de trabajo en formato A3 / Láminas en color de los cuadros de trabajo en formato A4 / Docente				
Competencias Clave	CCL –STEM – CPSAA – CC – CE – CCEC			**Objetivos didácticos**	Act8: OD1 – OD2 – OD3 – OD4 – OD5 – OD6 – OD8 – OD10 – OD11 – OD12 - OD13
Resumen de la sesión					
Durante esta sesión se desarrolla la Act8, donde la idea es dedicar tiempo para finalizar las actividades planteadas durante las sesiones anteriores y realizar ejercicios sobre láminas que muestran mayor complejidad.					
Temporalización / Desarrollo de la Sesión, descripción actividades.					
5´	Breve resumen sobre las sesiones anteriores, los conceptos y los contenidos trabajados.				
15´	Finalizar tareas pendientes a nivel grupal e individual. Planteamiento de dudas al docente a nivel del grupo clase.				
30´	Revisar las soluciones desarrolladas durante el proyecto. Dado que existe una visión de mayor envergadura, se otorga un plazo para complementar y mejorar las soluciones realizadas.				
5´	Cierre y conclusiones de la parte de introducción y aplicación de contenidos.				

Fuente: elaboración propia.

Tabla 12. *Descripción de la Sesión 7 y sus actividades.*

Sesión	S7 Reflexionando			**Actividad/es**	Act9 Mis ideas y mi mente / Act10 Creando mi propia obra de arte / Act11 Hablando como un artista / Act12 ¿Ahora si Mates y Arte?
Tipología	Síntesis, reflexión y evaluación.			**Fase del ABP (figura 1)**	Act9 (Paso 6) / Act10 (Paso 7) / Act11 (Paso 8) / Act12 (Paso 8 / Paso 9)
Duración	55´	**Espacio**	Aula	**Agrupamiento**	5 grupos de 4 y un grupo de 5, trabajo cooperativo / Estructura de cooperativo “Mapa conceptual a cuatro bandas” / Grupo clase
Recursos	Cuadernillo Anexo J – El alumno dispone de un cuadernillo con la información para seguir los pasos de esta actividad / Ordenador y cañón proyector / Cuaderno convencional u hojas / Material de escritura / Carpeta para portfolio / Fundas plásticas / Docente / Instrumento de evaluación, Rúbrica.				
Competencias Clave	CCL –STEM – CPSAA – CC – CE – CCEC	**Objetivos didácticos**	Act9: OD8 – OD11 – OD12 – OD13 - OD14 Act10: OD8 – OD11 – OD12 – OD13 Act11: OD8– OD11 – OD13 Act12: OD8 – OD11 – OD13		

Resumen de la sesión
Durante esta sesión se desarrolla la Act9 que considera la elaboración del mapa mental, la Act10 donde se definen los detalles del portfolio, la Act11 donde se realiza la exposición y el debate grupal final de la Act12. Se deben seguir ordenadamente las pautas de los enunciados del Anexo J para cada actividad.

Temporalización / Desarrollo de la Sesión, descripción actividades.	
5´	Breve introducción sobre las distintas actividades que se realizan en la sesión.
	Actividad 9
15´	El docente da una serie de pautas sobre el esquema y contenidos, para que se realice un esquema o mapa mental sobre los diversos contenidos estudiados durante el proyecto. Los alumnos deben trabajar por medio de la estructura de cooperativo “Mapa conceptual a cuatro bandas”. Los alumnos de cada equipo se reparten cada parte del mapa, finalmente se ponen en común las ideas y todos lo copian. Esta materia se prepara para formar parte del estudio. En caso de no finalizar la actividad durante la sesión, se solicitará realizarla como tarea extraescolar.
	Actividad 10
10´	El grupo ordena los distintos materiales de trabajo que consideran las láminas trabajadas en distintos formatos, junto con la lámina del cuadro a color. Se recomienda usar fundas plásticas para guardar las distintas láminas dentro del portfolio. Se preparan los cuadernillos, fichas, apuntes y se ordenan las láminas. Se da un tiempo para montar el portfolio y cumplimentar la portada, creando un trabajo ordenado y completo. En caso de no finalizar la actividad durante la sesión, se solicitará realizarla como tarea extraescolar.
	Actividad 11
15´	Cada grupo expone al resto de grupos sus principales conclusiones e impresiones, deben hacer uso del lenguaje matemático. También informan sobre la documentación que han ampliado y contrastan experiencias al realizar el proyecto.
	Actividad 12
10´	Se realiza una reflexión sobre los contenidos estudiados en Geometría y su correlación con el Arte, fomentando un debate grupal en clase que conecta con los aspectos debatidos en la actividad 11. También sirve para recapitular los aspectos y conceptos importantes a nivel curricular que deben ser estudiados.

Evaluación del Aprendizaje: Portfolio y Producción Oral			
Finalidad: Sumativa, se evalúa el portfolio que considera el producto final y la producción oral.	**Momento:** Final, porque han finalizado los contenidos y trabajos principales de la UD y el trabajo en el aula.	**Agente:** Evaluación Interna. Heteroevaluación, el evaluador es el profesor.	**Instrumento de evaluación:** Rúbrica sobre las producciones del ABP, puede consultarse en la tabla 23 del Anexo K.
Competencias Específicas	**Contenido**	**Criterios de evaluación**	**Indicador de logro**
CE1 –CE8 – CE9	A. / B. / C. / D. / F.	1.3. – 8.1. – 9.2. – 10.1	1.3.1. – 8.1.1. – 8.1.2. – 8.1.3. – 8.1.4. – 8.1.5. – 8.1.6.– 8.1.7. – 9.2.3. – 9.2.4.
Contenidos transversales		CT4 – CT5 – CT6	CT4.1. – CT5.1. – CT5.2. – CT5.3. – CT6.1. – CT6.2. – CT6.3.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 13. *Descripción de la Sesión 8 y sus actividades.*

<table>
<tr><td>Sesión</td><td colspan="3">S8 Paseo Matemático y punto y final</td><td>Actividad/es</td><td>Act13 Paseo por mi museo / Act14 ¿Qué hemos aprendido?</td></tr>
<tr><td>Tipología</td><td colspan="3">Profundización, síntesis, reflexión y evaluación.</td><td>Fase del ABP (figura 1)</td><td>Act13 (Paso 9 / Paso 10) / Act14 (Paso 10)</td></tr>
<tr><td>Duración</td><td>240´</td><td>Espacio</td><td>Museo del Prado</td><td>Agrupamiento</td><td>5 grupos de 4 y un grupo de 5, trabajo cooperativo / Individual / Grupo clase</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td colspan="5">Cuadernillo Anexo M con materiales didácticos para el museo / Material de escritura / Docente / Personal del museo / Transporte / Instrumentos de Evaluación Anexo K, Escalas de Observación / Cuestionario Anexo L.</td></tr>
<tr><td>Competencias Clave</td><td colspan="2">CCL –STEM – CPSAA – CC – CE - CCEC</td><td colspan="2">Objetivos didácticos</td><td>Act13: OD8 – OD9 – OD10 – OD11
Act14: OD8 - OD15</td></tr>
<tr><td colspan="6">Resumen de la sesión</td></tr>
<tr><td colspan="6">Durante esta sesión se desarrolla el Paseo Matemático por el Museo del Prado, que corresponde a la Act13. Se trata de una visita planificada, para el visionado de algunos cuadros estudiados en el aula. Durante la visita el alumno va rellenando de forma individual el cuadernillo del Anexo M. Los grupos de cooperativo pueden explicar algún contenido relevante que hayan detectado en el aula durante el estudio del cuadro, demostrando de este modo los conceptos adquiridos. De esta forma se fomenta la expresión oral y la participación activa, la reflexión sobre las obras de arte y el desarrollo del lenguaje matemático. La visita finaliza con la Act14 que considera las tareas de autoevaluación y coevaluación por parte del alumno. A su vez, el alumno realiza una evaluación hacia el proyecto. Para la visita se han seleccionado 16 cuadros representativos del proyecto, donde se han trabajado la diversidad de contenidos, que serán estudiados in situ. Esta actividad está enfocada al repaso de contenidos matemáticos, pero también a comentar el simbolismo de cada cuadro.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Temporalización / Desarrollo de la Sesión, descripción actividades.</td></tr>
<tr><td>25´</td><td colspan="5">Desplazamiento desde el centro hasta el museo.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Actividad 13</td></tr>
<tr><td>5´</td><td colspan="5">Introducción sobre los aspectos generales de la visita, materiales de trabajo y dinámica de la visita.</td></tr>
<tr><td>5´</td><td colspan="5">Se localizan los puntos principales del museo para ubicar al alumno y se establece el itinerario a seguir, acorde a la secuenciación establecida en el Anexo M y el itinerario planificado por el docente, tomando como guía los planos del museo.</td></tr>
<tr><td>160´</td><td colspan="5">El itinerario estima un tiempo de 10´para la visualización de cada cuadro. Mientras, se van realizando las actividades propuestas en el Anexo M, las que pueden ser finalizadas posteriormente como tarea extraescolar.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Actividad 14</td></tr>
<tr><td>10´</td><td colspan="5">Los alumnos realizan la autoevaluación de su trabajo durante el proyecto, según el formato diseñado del Anexo K.</td></tr>
<tr><td>5´</td><td colspan="5">Los alumnos realizan la coevaluación según el formato diseñado del Anexo K.</td></tr>
<tr><td>5´</td><td colspan="5">El alumno debe realizar la evaluación al proyecto realizado, cumplimentando el cuestionario de la tabla 28 del Anexo L.</td></tr>
<tr><td>25’</td><td colspan="5">Desplazamiento desde el museo hasta el centro.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evaluación del Aprendizaje</td><td colspan="4">Alumnos: Autoevaluación y coevaluación del alumno.
Docente: Heteroevaluación de tipo sumativa o final sobre el trabajo durante la visita.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Evaluación del Aprendizaje: Autoevaluación del alumno</td></tr>
<tr><td>Finalidad: Sumativa, se evalúa al finalizar el proyecto.</td><td>Momento: Final, realizada al finalizar el proyecto.</td><td>Agente: Evaluación Interna. Autoevaluación, el evaluador es el propio alumno.</td><td colspan="3">Instrumento de evaluación: Escala de Observación Numérica con gradación del 1 al 3, sobre el trabajo desempeñado y conocimientos adquiridos durante el proyecto, acorde a la tabla 24 del Anexo K. Si bien se han reflejado los indicadores de logro que se asocian a este instrumento, el diseño del mismo se realiza de forma sencilla y esquemática para el alumno.</td></tr>
<tr><td>Competencias Específicas</td><td>Contenido</td><td>Criterios de evaluación</td><td colspan="3">Indicador de logro</td></tr>
<tr><td>CE1 –CE2 – CE3 – CE5 – CE6 -CE7 – CE8 – CE9 – C10</td><td>A. / B. / C. / D. / F.</td><td>1.1. - 1.3. – 2.1. – 3.1. – 5.1. – CE6 - 7.1. - 8.1. – 9.1. - 9.2. – 10.1</td><td colspan="3">1.1.1. – 1.1.2. – 1.1.3. – 1.1.4. – 1.1.5. – 1.1.6. – 1.3.2. – 1.3.3. - 2.1.2. – 3.1.1. – 3.1.2. - 3.1.3. – 5.1.1. – 5.1.2. – 5.1.3. – 5.1.4. – 5.1.5. – 5.1.6. – 6.1.1. – 7.1.2. – 7.1.3. - 8.1.1. – 8.1.3. – 8.1.4. – 8.1.5. – 8.1.6.– 8.1.7. - 9.1.1. – 9.1.2. – 9.1.3. – 9.2.1. – 9.2.2. – 9.2.4. – 10.1.1 – 10.1.2. – 10.1.3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contenidos transversales</td><td>CT1 – CT2 – CT4 – CT5 - CT6</td><td colspan="3">CT1.1. – CT1.2. – CT1.3. – CT1.4. – CT2.1. – CT2.2. – CT2.3. - CT4.1. – CT5.1. - CT5.2. – CT6.1. – CT6.2. – CT6.3.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Evaluación del Aprendizaje: Coevaluación del alumno</td></tr>
</table>

Finalidad: Sumativa, se evalúa al finalizar el proyecto.	**Momento:** Final, realizada al finalizar el proyecto.	**Agente:** Evaluación Interna. Coevaluación, el evaluador es el propio alumno que evalúa a los miembros de su grupo.	**Instrumento de evaluación:** Escala de Observación por categorías (siempre, a veces, nunca o casi nunca), sobre el trabajo desempeñado, actitud y participación en el grupo, acorde a la tabla 25 del Anexo K. Los indicadores de logro que se asocian a este instrumento se han expresado de forma sencilla y esquemática para el alumno.
Competencias Específicas	**Contenido**	**Criterios de evaluación**	**Indicador de logro**
CE8 – CE9 – C10	F.	8.1. – 9.1. - 9.2. – 10.1	8.1.1. – 8.1.3. - 9.1.1. – 9.1.3. – 9.2.1. – 9.2.2. – 9.2.3. - 9.2.4. – 10.1.1 – 10.1.2. – 10.1.3.
Contenidos transversales		CT1 – CT2 – CT5	CT1.2. – CT1.3. – CT1.4. – CT2.2. – CT2.3. - CT5.1. - CT5.2. – CT5.3.
Evaluación del Aprendizaje: Heteroevaluación			
Finalidad: Sumativa, se evalúa lo que se considera la última sesión del proyecto.	**Momento:** Final, porque considera la evaluación de la última sesión del proyecto.	**Agente:** Evaluación Interna. Heteroevaluación, el evaluador es el docente que evalúa a los alumnos.	**Instrumento de evaluación:** Registro anecdótico sobre la visita al museo, según tabla 26 del Anexo K.
Competencias Específicas	**Contenido**	**Criterios de evaluación**	**Indicador de logro**
CE5 – CE6 - CE8 – CE9 – C10	B. / C. / F.	5.1. – CE6 - 8.1. – 9.1. - 9.2. – 10.1	5.1.5. – 6.1.2. – 6.1.3. - 8.1.1. – 8.1.3. – 8.1.4. - 8.1.5. 8.1.6. - 9.1.1. – 9.1.3. – 9.2.1. – 9.2.4. –10.1.2.
Contenidos transversales		CT1 – CT2 – CT5 – CT6	CT1.2. – CT1.2. – CT1.3. – CT2.2. – CT2.3. - CT5.1. - CT5.2. – CT5.3. – CT6.1. – CT6.3.

Fuente: elaboración propia.

3.3.6. Recursos

En este apartado se describen los recursos materiales necesarios para el desarrollo de la propuesta.

-Materiales didácticos: Para hacer seguimiento del proyecto, se hace entrega al alumno de los cuadernillos de los Anexos K y M, con los ejercicios y contenidos de las distintas actividades. Estos cuadernillos se complementan con láminas en formato A3 y A4, en blanco y negro de los cuadros trabajados. Como complemento, se hace entrega de una copia a color de cada cuadro en formato A5. También se recurre al uso de la pizarra vileda para las explicaciones por método tradicional cuando sea necesario. Además, se requiere material de escritura y cuaderno convencional u hojas, material de dibujo (escuadra, regla, cartabón, transportador de ángulos y compás), carpeta para portfolio, separadores y fundas plásticas.

-Material audiovisual e informático: Las explicaciones se apoyan en ordenador y cañón proyector, de esta forma se apoyan aquellos ejercicios que requieren visualización de contenidos multimedia, tales como videos, materiales de los cuadernillos, etc.

-Recursos TIC: Se utilizan recursos TIC, que permiten a los alumnos complementar y reforzar los contenidos trabajados en clase.

-Recursos humanos: Docente y personal del museo.

-Recursos instalaciones: Aula y Museo del Prado.

-Otros: Transporte para la visita al museo. Instrumentos de evaluación.

La utilización de estos recursos y materiales permite plantear los contenidos de un modo atractivo, motivador y accesible; que facilite el aprendizaje y la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos, en especial temas como la Geometría.

3.3.7. Atención a la diversidad

Acorde al Diseño Universal de Aprendizaje (DUA), se reconoce la realidad del aula y la diversidad de los perfiles del alumnado. Para la propuesta, se ha escogido la metodología de AC para favorecer el apoyo entre los alumnos, partiendo de la configuración de los grupos con perfiles heterogéneos, lo que permite compensar la diversidad de perfiles y capacidades. El docente es responsable de formar los grupos y ayudar a distribuir el rol de cada alumno.

Los alumnos con asperger y dislexia disponen, por lo general, de mayor tiempo para la realización de las tareas y exámenes. En ambos casos se trabaja de forma conjunta con la Unidad de Orientación para que indique recomendaciones. El alumno con asperger no asumirá el rol de relator o coordinador durante el AC, también recibe apoyo para trabajar la comunicación. Durante las sesiones el docente trabaja con el sistema de altavoz FM para el alumno con discapacidad auditiva. Si bien ninguno de estos alumnos requiere de cambios significativos en cuanto a adaptación curricular, se han distribuido en grupos distintos y reciben el apoyo de los compañeros para realizar las tareas. Los alumnos repetidores también son integrantes de equipos distintos. A su vez, se presentan contenidos con diversidad de láminas y cuadros de diferente dificultad. Por ende, durante el transcurso de las sesiones, el docente puede sugerir que láminas deben trabajar específicamente algunos alumnos.

3.3.8. Evaluación

En relación a los criterios de calificación, se pretende asignar un porcentaje de calificación del 40% para evaluar el portfolio y la producción oral del ABP y el AC. La adquisición de los contenidos, junto con el trabajo individual del alumno durante las actividades se califican con el mismo peso. Por otra parte, se estima un porcentaje del 10% respectivamente para evaluar la visita al Museo y el trabajo diario. Los instrumentos de evaluación pueden consultarse en el Anexo K, mientras que la tabla 14 permite detallar el tipo de calificación propuesto:

Tabla 14. *Calificaciones estimadas para el proyecto.*

Actividad	Trabajo y resultados evaluado con los Instrumentos de Evaluación	Porcentaje de Calificación (%)
Producto Final del Aprendizaje Basado en Proyectos y Aprendizaje Cooperativo: Portfolio y producción o exposición oral del grupo.	Rúbrica de Evaluación	40
Evaluación de adquisición de conocimientos y trabajo individual del alumno (participación dentro del grupo, cooperación, etc).	Escala de Observación.	40
Visita al Museo del Prado (participación y cuadernillo Visita al Museo Anexo M).	Registro anecdótico.	10
Lleva al día la asignatura y las tareas (actividades adicionales, tareas realizadas, etc).	Revisión del trabajo diario y tareas solicitadas.	10

Fuente: elaboración propia.

3.4. Evaluación de la propuesta

Para la propuesta se ha realizado la siguiente evaluación con el uso de la herramienta matriz DAFO (Debilidades, Amenazas, Fortalezas y Oportunidades), los aspectos positivos y negativos, así como los puntos fuertes y débiles quedan recopilados en la figura 4.

Figura 4. *Matriz DAFO para evaluar la propuesta.*

	Factores de Origen Interno	Factores de origen externo
NEGATIVO (Puntos Débiles)	**Debilidades:** **D1** – Requiere gran preparación, investigación y planificación por parte del docente. **D2** – Las actividades pueden tener una duración superior a lo planificado originalmente. **D3** - Dificultad por parte del alumnado para realización de las tareas y asimilar los contenidos. **D4** - Requiere recursos económicos y coordinaciones extraordinarias para ser implementado. **D5** - Peligro de continuidad del proyecto en caso de cambio, ausencia o reemplazo del docente.	**Amenazas:** **A1** - Requiere el apoyo o aprobación de los órganos de gobierno del centro, posible enfoque tradicional del centro. **A2** - Falta de interés del alumnado para seguir las actividades de la propuesta y aceptación de las familias del proyecto. **A3** - Las actividades no guardan relación con las propuestas didácticas convencionales, falta de formación del profesorado. **A4** - Falta de apoyo del equipo docente para aplicar innovación en los contenidos.
POSITIVO (Puntos Fuertes)	**Fortalezas:** **F1** - Fomenta combinar disciplinas e interconectar conceptos, contextualización de los contenidos y trabajo de todas las competencias. **F2** - Acerca las matemáticas al entorno, fomenta la variedad de actividades y aplicación de los contenidos de forma práctica y atractiva. **F3** -Facilidad de ampliación, flexibilidad y adaptación de contenidos a otras unidades, cursos y etapas. **F4** - Favorece la relación entre alumnos, la atención a la diversidad, así como la toma de decisiones y autonomía.	**Oportunidades:** **O1**- Promueve la aplicación de proyectos interdisciplinares y contenidos transversales. **O2** -La versatilidad para adaptar los contenidos a otros espacios, unidades, cursos y etapas. **O3** -Se pueden aplicar recursos TIC para complementar y enriquecer el proyecto. **O4** -Divulgar y dar a conocer el proyecto a otros centros, al Departamento de Educación del Prado o institucionalizar el proyecto.

Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, la evaluación de la propuesta se complementa con una autoevaluación del docente, para lo cual se ha elaborado un documento donde realizar un registro desde la reflexión y observaciones de la implementación de las distintas actividades planteadas y sus resultados. En la tabla 27 del Anexo L puede consultarse el formato para llevar a cabo dicho registro y seguimiento. Igualmente, el alumno realiza el cuestionario recopilado en la tabla 28 del Anexo L, para evaluar las características del proyecto y su desarrollo.

4. Conclusiones

Tras el marco teórico del trabajo y la propuesta de intervención desarrollada, se recopilan las principales conclusiones partiendo de los objetivos e hipótesis originales.

Como punto de partida, el objetivo general consideraba diseñar una propuesta de intervención didáctica para la enseñanza de la Geometría a través del Arte en 1º ESO con Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y enfoque STEAM. Al respecto, puede deducirse que se ha logrado, dado que se ha diseñado una propuesta donde las actividades combinan la Geometría con el Arte como hilo conductor fundamental apoyado en el enfoque STEAM. Se trata de propuestas de interés, creatividad, originalidad y cierto atractivo; donde se trabajan todas las competencias a partir de los contenidos del currículo. El ABP permite profundizar en contenidos matemáticos, desarrollar la investigación y dar forma al trabajo. Además, el trabajo cooperativo fomenta las relaciones sociales y permite atender a la diversidad. Las anécdotas históricas y el paseo matemático favorecen la contextualización de contenidos. A su vez, se ha alcanzado el objetivo general gracias a la consecución de los diferentes objetivos específicos planificados, los que se analizan a continuación.

En relación al objetivo específico uno, relativo a “conocer y profundizar en la literatura científica sobre las metodologías activas como ABP, AC y enfoque STEAM”, puede deducirse que se ha cumplido como evidencia el marco teórico. La propuesta ha sido diseñada partiendo de un minucioso análisis de la literatura científica, que ha permitido profundizar en las metodologías que intervienen, guiar el tipo de actividades y su secuenciación. Además, se han investigado aspectos técnicos que relacionan el Arte con las Matemáticas en diversas épocas, favoreciendo la ampliación de contenidos y perfeccionamiento de actividades.

El objetivo específico dos referido a "diseñar actividades para la enseñanza de la Geometría a través del Arte por medio de obras del Museo del Prado en 1º ESO"; se ha cumplido dado que se han elaborado actividades que combinan los contenidos del currículo contextualizados sobre obras del Museo del Prado. Como se ha indicado, la investigación de la literatura científica también se ha centrado en la correlación entre las Matemáticas, la Geometría y el Arte; lo que ha sido clave para el diseño de las actividades. Así pues, el alumno dispone de material personalizado que le permite hacer seguimiento a los contenidos e ir adquiriendo conocimientos sobre arte, con ejercicios prácticos diseñados específicamente para este fin.

Relativo al objetivo específico tres sobre "elaborar instrumentos de evaluación para evaluar la propuesta didáctica", puede afirmarse que se ha logrado. Así pues, se han confeccionado instrumentos específicos y personalizados sobre los distintos tipos de evaluación, en concordancia con las actividades diseñadas, quedando recopilados en los anexos del trabajo. Para finalizar, en relación al objetivo específico cuatro sobre "diseñar un Paseo Matemático por el Museo del Prado acorde a los contenidos estudiados", se confirma el logro del mismo. Al respecto, entre los materiales didácticos elaborados de los anexos, se encuentra el diseño íntegro y secuenciación de este paseo matemático para que pueda ser llevado a término.

Si bien, el estudio de las matemáticas en combinación con el arte ha sido algo usual, el enfoque STEAM lo reintroduce en el sistema educativo. Con frecuencia, en el ámbito educativo, suele recurrirse a un tipo de arte donde las figuras geométricas se observan de un modo evidente, como es el caso del cubismo o Kandinsky; siendo menos evidente el estudio de la geometría a partir de obras clásicas como las propuestas. Como refleja el marco teórico, también existe un fuerte componente geométrico en el arte clásico que se pretende dar a conocer al alumno; desarrollando aquí los puntos clave del trabajo, como son la creatividad, el razonamiento, el pensamiento lógico, la visualización y el aprendizaje profundo.

En definitiva, esta propuesta pretende ser una alternativa diferente donde el alumno en base al trabajo y esfuerzo, puede adquirir contenidos matemáticos de cierta complejidad, pero que se presentan de un modo diferente para despertar el interés y conectar con el estudiante. De este modo, el docente del siglo XXI sobrepasa el mero trámite de transmitir contenidos matemáticos, y da lugar a una formación integral y motivada del alumnado, inculcándole a su vez contenidos transversales y formándolo bajo una perspectiva integral, en base a la práctica y el currículo competencial.

5. Limitaciones y prospectiva

Si bien, la propuesta de intervención se adapta a los estándares de investigación y legislación; se trata de una propuesta de carácter teórico que no ha sido implementada dentro de la realidad del aula. Por lo que se prevé que durante su implementación existan dificultades y se requieran adaptaciones. Al respecto, se han estimado las siguientes limitaciones:

1. Durante la investigación en las publicaciones científicas, se evidencia una gran cantidad de información, que en ocasiones dificulta la selección. Asimismo, la documentación asociada al arte clásico y su correlación matemática, ha tenido que ser muy procesada.
2. Durante los estadios originales del trabajo, hasta haber diseñado las actividades, ha resultado complejo transmitir la idea de la propuesta.
3. Problemas como la temporalización de actividades propuestas por medio del ABP, con riesgo de que se superen los plazos originales. Resulta complejo adaptar todos los elementos del currículo a metodologías como el ABP. Durante la puesta en marcha posiblemente se requiera descartar actividades o contenidos.
4. Necesidad de formación del profesorado en innovación y campos de humanidades, como el arte. Falta de interés e implicación de los docentes de matemáticas en estos campos, con preferencia de impartir contenidos estrictamente matemáticos.
5. Implementar esta propuesta requiere dedicación del profesorado extraordinaria.
6. Posible falta de motivación e interés del alumnado para implementar con éxito la propuesta. Dificultad del alumnado o parte del mismo para comprender los contenidos en este formato.

En cuanto a la prospectiva, la propuesta ha sido diseñada en detalle, con la idea de que pueda ser trasladada al aula de matemáticas e implementar los contenidos de modo atractivo y original. De esta forma, se apuesta por la innovación y la idea de trabajar contenidos transversales, introducir anécdotas históricas y desarrollar otras cualidades en los alumnos como el trabajo en equipo, visualización y creatividad. Se considera que la propuesta es abierta y flexible a otros contenidos, cursos e incluso espacios, partiendo de la propuesta original. De esta forma es factible ampliar los contenidos matemáticos, los espacios de estudio y se defiende la idea de correlacionarlos con otras áreas, entre ellas, las humanidades.

Referencias bibliográficas

Abreu, J. L. y Bracho, J. (2023). *Geometría Visual, las matemáticas que surgen de cómo vemos al mundo*. https://arquimedes.matem.unam.mx/Arquimedes/GeometriaVisual/GeometriaVisual.pdf

Alvis-Puentes, J. F., Aldana-Bermúdez, E. y Caicedo-Zambrano, S. J. (2019). Los ambientes de aprendizaje reales como estrategia pedagógica para el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de básica secundaria. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, *10*(1), 135-147. https://doi.org/10.19053/20278306.v10.n1.2019.10018

Andonegui, M. (2006). Geometría: Conceptos y Construcciones Elementales. En Borjas, B. y Guédez, C. (Eds.), *Serie Desarrollo del pensamiento matemático Nº 12* (pp.1-32). Federación Internacional de Fe y Alegría.

Anguita, J. E. y Hernán, I. (Eds.). (2023). *Innovación educativa y formación docente*. Últimas aportaciones en la investigación. Dykson, S.L. https://hdl.handle.net/10115/22189

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Kluwer Academic Publishers*, *52*(3), 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Arce, M., Arnal-Palacián, M., Conejo, L., García-Alonso, I. y Méndez-Coca, M. (2022). Matemáticas Transversales. *Revista de Investigación, Universidad de Granada*, 453-479. http://funes.uniandes.edu.co/31060/

Arnheim, R. (2011). *El poder del centro: estudio sobre la composición en las artes visuales*. Ediciones Akal.

Arrillaga, J. (2016). Fundamentos de la composición visual. https://www.luigistudio.com/es/wp-content/uploads/2018/03/fundamentos-de-la-composicion-visual.pdf

Ausbel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF, 1*(1-10), 1-10.

Azcue, L. (2012). El origen de las colecciones de escultura del Museo del Prado. El Real Museo de Pintura y Escultura. *El Taller Europeo,* 73-108.

Azorín, C. M. (2018). El método de aprendizaje cooperativo y su aplicación en las aulas. *Perfiles educativos*, *40*(161), 181-194. Recuperado en 01 de noviembre de 2023, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982018000300181&lng=es&tlng=es.

Báez, R. y Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". Enseñanza de la Matemática. *12-16*, 67-87. http://funes.uniandes.edu.co/14702/

Barrantes, M., Balletbo, I. y Fernández, M.A. (2013). Enseñar geometría en secundaria. *Revista de Ciencias de la Educación ACADEMICUS, I*(3), 1-14. https://www.researchgate.net/publication/261170095_Ensenar_geometria_en_Secundaria

Battista, M.T. (2008). Chapter 3 Representations and cognitive objects in modern school geometry. En Kathleen, M. y Blume, G.W. (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics. Volumen 2 Cases and perspectives* (pp.341-362).

Bishop, A.J. (1989). A review of research on visualization in mathematics education. En Borbas, A. (Ed.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Bolaños, R. (2023). Aprendizaje basado en proyectos: una adaptación pedagógica para la innovación y el desarrollo socio-organizacional. *Región Científica, 2*(2), 1-14. https://doi.org/10.58763/rc2023104

Bouleau, C. (2006). *TRAMAS LA geometría secreta de los pintores*. Ediciones AKAL.

Bretel, L. (2019). Manual de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPro). Orientaciones para su diseño e implementación en aula. Centro de Formación Técnica, Instituto Profesional y Universidad Tecnológica de Chile INACAP.

Calvo, F. (2019). Breve historia del Museo del Prado. In Anales de Historia del Arte. *Universidad Complutense de Madrid, 29*, 29-55. https://doi.org/10.5209/anha.66052

Camargo, L. y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED,* (32), 4-8. Recuperado en 04 de noviembre de 2023, a partir de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001&lng=en&tlng=es.

Caro, P. y Breccia, M.C. (2009). Dinamización Matemática. La Geometría nos rodea. *UNIÓN- REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 5*(17), 85-95. Recuperado a partir de https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1131

Castaño, A.M. (2009). Enseñanza por competencias. La orientación actual del sistema educativo español. *Revista Educação, 1*(1). https://revistas.anchieta.br/index.php/RevistaEducacao/article/view/518

Castro, C.M. (2012). STEM, STEAM, proyectos educativos integrales y olimpiadas de química: métodos que buscan convencer a los jóvenes de que la ciencia es útil para todos. En Pinto, G. y Martín, M. (Eds.), *Enseñanza y divulgación de la Química y la Física* (pp.222-226). Garceta Grupo Editorial.

Castro, Y. (2023). Competencias de pensamiento geométrico como parte del mejoramiento en el aspecto cognitivo de visualización, análisis y abstracción que poseen los estudiantes de Básica Secundaria. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 7*(3), 4528-4550. https://ciencialatina.org/index.php/cienciala/article/view/6496

Catterall, L.G. (2017). A Brief History of STEM and STEAM from an Inadvertent Insider. *The STEAM Journal, 3*(5). https://scholarship.claremont.edu/steam/vol3/iss1/5

Chaves, E., Castillo, M. y Gamboa, R. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* 2215-5627. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6906

https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6906/6592

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit, J.B., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. *Secretaría General Técnica Centro de Publicaciones,* (95).

De Guzmán, M. (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. *Olimpíada Matemática Argentina*. https://www.acasinhadamatematica.pt/cm/af29/trabalhos/s7/Textos/TIEMat.pdf

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? [Conference]. *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2, South Africa*.

Dear, P. (2009). *Discipline and experience: The mathematical way in the scientific revolution*. University of Chicago Press.

Decreto 65/2022, de 20 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establecen para la Comunidad de Madrid la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, núm. 176,* de 26 de julio de 2022, 396-716. https://www.bocm.es/boletin/CM_Orden_BOCM/2022/07/26/BOCM-20220726-2.PDF

Defaz, M. (2020). Metodologías activas en el proceso enseñanza-aprendizaje. *Roca: Revista Científico-Educaciones de la provincia de Granma, 16*(1), 463-472. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7414344

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. The Arithmetic Teacher*. National Council of Teachers of Mathematics, 37*(6), 14-20. https://doi.org/10.5951/AT.37.6.0014

Diario Oficial de la Unión Europea. (2018). *Comunicaciones e informaciones, C189, núm.* 61, de 4 de junio de 2018, 1-33. https://eur-lex.europa.eu/legal-content/ES/TXT/PDF/?uri=OJ:C:2018:189:FULL&from=RO

Domènech-Casal, P., Lope, S. y Mora, L. (2019). Qué proyectos STEM diseña y qué dificultades expresa el profesorado de secundaria sobre Aprendizaje Basado en Proyectos. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 16*(2), 50-72. http://hdl.handle.net/10498/21343

DOI: 10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2019.v16.i2.2203.

Domingo, J. (2008). El aprendizaje cooperativo. Cuadernos de trabajo social. *Revistas Científicas Complutenses. Cuadernos de trabajo social, 21*, 231-246. https://core.ac.uk/download/pdf/38812746.pdf

Duval, R. (2001). Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à R. Douady, Université du Littoral, Nord Pas de Calais, France*. https://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/staf26/Doua.pdf

Ertmer, P. y Newby, T. (1993). Behaviorism, Cognitivism, Constructivism: Comparing Critical Features from an Instructional Design Perspective. *Performance improvement quarterly, 6*(4), 50-72. https://doi.org/10.1111/j.1937-8327.1993.tb00605.x

Etayo, F. (2009). La geometría de la representación visual. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 103*(2), 297-303. https://rac.es/ficheros/doc/00894.pdf

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. *Investigación en Educación Matemática, XVII*, 19-42. http://funes.uniandes.edu.co/6227/1/Fern%C3%A1ndez2013Lainvestigaci%C3%B3nSEIEM.pdf

Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. Un paseo por la geometría*,* 67-82. https://www.recursosep.com/wp-content/uploads/2017/04/art%C3%ADculo-niveles-van-hiele-did%C3%A1ctica-geometr%C3%ADa.pdf

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare, XIV*(15), 125-142. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5414933

García, A. y Monterrubio, M.C. (2018). *Conexiones de las matemáticas con otras áreas del Museo Nacional del Prado* [ponencia]. V Encuentro entre el profesorado, Museo Nacional del prado, Madrid, España. https://www.museodelprado.es/actualidad/multimedia/conexiones-de-las-matematicas-con-otras-areas-del/30bb795e-d554-b72c-3f74-21344e776ef0

García, H. (2007). Ausubel, Piaget y Vygotsky. *Monografías*. https://www.monografias.com/trabajos43/piaget-ausubel-vygotsky/piaget-ausubel-vygotsky

García, I., (1997). La simetría en el arte: La lógica del esquema. *IMAFRONTE,* (12-13), 135-150. Recuperado a partir de https://revistas.um.es/imafronte/article/view/38841

García, J. C. (1994). El Museo del Prado. *Revista Metafísica ADITI,* (1), 10-15. http://www.juancarlosgarciaweb.com/viajes/Viajes%20Metafisicos%2001%20-%20Juan%20Carlos%20Garcia.pdf

García, P. (2023). Matemáticas y Arte. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación matemática,* (68), 1-8. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1532

García, P. y Rodríguez, J. (2018). *Las matemáticas del arte: Más allá del número de oro.* CATARATA.

García, S. (2019, abril 3). El hombre de Vitruvio no sé si existe, ni me importa. *Mc Graw Hill*. https://www.mheducation.es/

García-Carmona, A. (2020). STEAM, ¿una nueva distracción para la enseñanza de la ciencia?. *Ápice. Revista de Educación Científica,* *4*(2), 35-50. https://doi.org/10.17979/arec.2020.4.2.6533

García-Fuentes, O., Raposo-Rivas, M. y Martínez-Figueira, M.E. (2023). El enfoque educativo STEAM: una revisión de la literatura. *Revista Complutense de Educación, 34*(1), 191-202. https://dx.doi.org/10.5209/rced.77261

Garijo, I. y De María, J.L. (2003). Colaboraciones: El número de oro. *Revista 100cias@uned, 6*(1), 49-58. http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:revista100cias-2003-numero6-5065/El_numero_oro.pdf

Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias, 21*(1), 27-47. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3940

Giménez, J. (2009). *La proporción: arte y matemáticas.* GRAO.

Gómez, P. (2002). Construir la geometría. En López, F. (Dir.), *La geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula, (pp. 11-31). Editorial GRAÓ.*

Goncalves, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría?. *Revista Ciencias de la Educación,* *1*(27), 83-98. http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/volln27/27-5.pdf

González-Rodríguez, D., Vieira, M-J. y Vidal, J. (2019). Variables que influyen en la transición de la Educación Primaria a la Educación Secundaria Obligatoria. Un modelo comprensivo.

Bordón: Revista de pedagogía, 71(2), 85-108. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6973952

Guisasola, J., Azcona, R., Etxaniz, M., Mujika, E. y Morentin, M. (2005). Diseño de estrategias centradas en el aprendizaje para las visitas escolares a los museos de Ciencias. *Revista Ciencias de la Educación, 2*(1), 19-32. http://hdl.handle.net/10498/16401

Gutierrez, A. (1991). *Procesos y habilidades en visualización espacial*. [Memorias]. 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática, Valencia, España. https://cmapspublic.ihmc.us/rid=1NGRW4M0Z-BZQ2WQ-FV/imaginaci%C3%B3n%20espacial.pdf

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Universidad de Valencia, 1,* 1-3. https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf

Henriksen, D. (2014). Full STEAM Ahead: Creativity in Excellent STEM Teaching Practices. *The STEAM Journal, 1*(15). https://scholarship.claremont.edu/steam/vol1/iss2/15

Hiriyappa, B. (2018). *El aprendizaje y sus teorías.* Babelcube Inc.

Husserl, E. (2000). El origen de la geometría. *Estudios De Filosofía, 4*, 33-54. https://doi.org/10.18800/estudiosdefilosofia.200001.004

Jaramillo, A. (2014). Enseñanza de las matemáticas. *Revista de Matemática MATUA, 1*(2).

https://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA/article/view/1197

Jaramillo-Valencia, B. y Quintero-Arrubla, S. (2021). Trabajando en equipo: múltiples perspectivas acerca del trabajo cooperativo y colaborativo. *Educación y Humanismo, 23*(41), 205-233. https://doi.org/10.17081/eduhum.23.41.4188

Johnson, D.W. y Johnson, R.T. (2015). *La evaluación en el aprendizaje cooperativo.* SM.

Johnson, D.W., Johnson, R.T. y Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula (Vol. 4).* Paidós SAICF.

Juárez, M., Rasskin, I. y Mendo, S. (2019). El Aprendizaje Cooperativo, una metodología activa para la educación del siglo XXI: una revisión bibliográfica. *Revista Prisma Social, 46* (26), 200-10. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7016662

Kagan, S. (1990). The structural approach to cooperative learning. *Educational leadership, 47*(4), 12-15.

Kagan, S. (2003). Breve historia de las Estructuras Kagan. *Kagan Online Magazine, 1*(800), 3-20.http://www.ardilladigital.com/DOCUMENTOS/EDUCACION%20ESPECIAL/APRENDIZAJE%20COOPERATIVO/Historia%20de%20las%20estructuras%20Kagan%20-%20articulo.pdf

Kagan, S. (2021). The structural approach and Kagan structures. *Pioneering perspectives in cooperative learning,* 78-127. https://ebrary.net/155643/education/structural_approach_kagan_structures

Latasa, M. (2022). Capítulo 8: Figuras Planas. En Zarco, A. M. y Vidal, L.C. (Eds), *Matemáticas LOMLOE 1º ESO* (pp. 167-201). Textos Marea Verde. https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/LOMLOE/1ESO/1%2008%20Figuras Planas.pdf

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, núm. 106,* de 4 de mayo de 2006, 17158-17207. https://www.boe.es/eli/es/lo/2006/05/03/2

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, núm. 340*, de 30 de diciembre de 2020, 122868-122953. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado, núm. 295*, de 10 de diciembre de 2013, 97858-97921. https://www.boe.es/eli/es/lo/2013/12/09/8

Machamer, P. y Woody, A. (1994). A model of intelligibility in science: Using Galileo's balance as a model for understanding the motion of bodies. *Science & Education, 3*, 215-244. https://doi.org/10.1007/BF00540155

Magistrali, D. (2019). Matemáticas y Arte: una pincelada. *Pensamiento Matemático, 9*(1), 95-111. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7035191

Manami, M. A., Gonzales, Martínez, G., Manami, J.M. y Montero, A.E. (2023). Pensamiento Lógico-Matemático revisión del modelo de evaluación STEAM para desarrollar competencias matemáticas. *Revista de filosofía, 40*(103), 83-98. https://doi.org/10.5281/zenodo.7558099

Marian. (2022). Simetrías en las figuras planas. *Así aprendo yo*. https://contigoaprendoyo.blogspot.com/

Marmolejo, G. y Vega, M. (2005). *Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas* [encuentro]. Memorias XV Encuentro de Geometría y III encuentro de Aritmética, Bogotá, Colombia. http://funes.uniandes.edu.co/5985/

Marrasé, J. M. (2016). *La belleza de las matemáticas*. Plataforma Editorial.

Martí, J. A., Heydrich, M., Rojas, M. y Hernández, A. (2010). Aprendizaje Basado en Proyectos: una experiencia de innovación docente. *Revista Universidad EAFIT, 46* (158), 11-21. Recuperado a partir de https://publicaciones.eafit.edu.co/index.php/revista-universidad-eafit/article/view/743

Mason, M. (2009). The van Hiele levels of geometric understanding. *McDougal Littell Inc., 1*(2), 4-8. https://tusach.thuvienkhoahoc.com/images/e/eb/The_van_Hiele_Levels_of_Geometric_Understanding.pdf

Maure, L. (2020). El Museo del Prado. *Sus orígenes arquitectónicos y el Madrid científico del siglo XVIII (1785-1808)*. Universidad Politécnica de Madrid. https://bv.unir.net:2689/viewer/9788494085086/2

Medina, M. A. y Tapia, M.P. (2017). El aprendizaje basado en proyectos una oportunidad para trabajar interdisciplinariamente. *OLIMPIA. Revista de la Facultad de Cultura Física de la Universidad de Granma, 14*(46), 236-246. Recuperado a partir de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6220162

Merelo, R. y Infantes, M. *Autoevaluación de Geometría*. SCRIBD. (https://es.scribd.com/document/94986587/autoevaluacion-de-geometria-1%C2%BA-ESO)

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2019). *PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes*. Informe español. Instituto Nacional de Evaluación Educativa. https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2018/pisa-2018-informes-es.html

Mioduser, D. y Betzer, N. (2008). The contribution of Project-based-learning to high-achievers' acquisition of technological knowledge and skills. *International Journal of Technology and Design Education, 18*, 59-77. https://doi.org/10.1007/s10798-006-9010-4

Montaño, A. (2016). La geometría y la composición perspectiva en la obra de Gregorio Vásquez de Arce y Ceballos. En Carreira, M. (Ed.), *Reflexiones sobre historia y teoría del arte* (pp. 41-55). UTADEO.

Monte, D. (2016, marzo 13). Sistema Sexagesimal. *Las Matemáticas no son sólo Números*. https://lasmatematicasnosonsolonumeros.blogspot.com/

Moore, T.J., Stohlmann, M.S., Wang, H.H., Tank, K.M, Glancy, A.W, y Roehring, G.H. (2014). *Implementation and integration of engineering in K-12 STEM education*. Purdue University Press.

Mora, C.D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía, 24*(70), 181-272.https://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002

Mora, J. (2021). *Arte y Matemáticas*. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/stzw77gs

Moreno, N. (2019). *La Educación STEM/STEAM. Apuestas hacia la formación, impacto y proyección de seres críticos*. Fondo Editorial Universitario Servando Garcés de la Universidad Politécnica Territorial de Falcón.

Naciones Unidas. (2023, octubre). *Objetivos de Desarrollo Sostenible.* https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/development-agenda/

Orellana, M.C. (2009). Trabajo Cooperativo. *Innovación y Experiencias Educativas*. https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/68nseñanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_21/M_CARMEN_%20ORELLANA%20RIVAS_1.pdf

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2018). *Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA)*. *Resultados de PISA*. Organización y Cooperación para el Desarrollo Económico. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_esp_ESP.pdf

Ortiz, A. (2005). *Historia de la matemática. Volumen 1. La matemática en la antigüedad*. PUCP. Pontificia Universidad Católica del Perú. http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/134460

Ortiz, A. (2008). Matemática en los antiguos Egipto y Babilonia. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (13), 5-18. http://funes.uniandes.edu.co/14833/

http://funes.uniandes.edu.co/14833/1/Ortiz2008Matem%C3%A1tica.pdf

Página de Cuatro miradas para contar un cuadro (https://sites.google.com/a/iesblasdeotero.com/museo-prado/-que-es-4-miadas-para-contar-un-cuadro)

Página de galleryIntell (https://galleryintell.com/artex/deepened-impulse-vertiefte-regung-by-wassily-kandinsky/)

Página de Geogebra (https://www.geogebra.org/?lang=es-ES)

Página de Geometría Dinámica en Matemáticas (http://jmora7.com/)

Página de Historia Arte (https://historia-arte.com/)

Página de IES Aricel (https://iesaricel.org/)

Página de Marea Verde (https://www.apuntesmareaverde.org.es/)

Página de Marzo Mes de las Matemáticas (https://marzomates.webs.ull.es/matematicas-y-arte/)

Página de MathCityMap (https://mathcitymap.eu/en/)

Página de STEMforYouth (https://www.stem4youth.eu/)

Página de Turismo Matemático. Recreando la Belleza. (https://mateturismo.wordpress.com/category/espana/madrid/)

Página de WikiArt (https://www.wikiart.org/es)

Pedoe, D. (1983). *Geometry and the visual arts*. Dover Publications.

Perales, F. J. y Aguilera, D. (2020). Ciencia-Tecnología-Sociedad vs. STEM: ¿evolución, revolución o disyunción?. Ápice. *Revista De Educación Científica, 4*(1), 1-15. https://doi.org/10.17979/arec.2020.4.1.5826

Peralta, J. (1998). Las matemáticas en el arte, la música y la literatura. *Tendencias pedagógicas,* (50), 235-244. File:///C:/Users/m_ela/Downloads/Dialnet-LasMatematicasEnElArteLaMusicaYLaLiteratura-8034571.pdf

Pérez, S. y Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. *San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM*, 295-306. http://funes.uniandes.edu.co/1262/

Pérez, S. y Guillén, G. (2009). Planteamiento de un proyecto de investigación sobre la enseñanza de la geometría en secundaria a través de diferentes enfoques. Utilización de un curso-taller como técnica para la obtención de datos. En González, M.J. y González, M.T. y Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander* (pp. 1-12). Universitat de València. https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/PerezGuillen09.pdf

Porras, L.E. (2017, mayo 16). *El pato Donald y la proporción áurea editado* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=ClXX7ItWstQ&t=18s

Pratt, D. y Davidson, I. (2003). Interactive Whiteboards and the Construction of Definitions for the Kite. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 31-38. https://eric.ed.gov/?id=ED501064

Pujolás, P. (2009a). La calidad en los equipos de aprendizaje cooperativo: algunas consideraciones para el cálculo del grado de cooperatividad. *Revista de educación,* (349), 225-239. http://hdl.handle.net/11162/74540

Pujolás, P. (2009b, octubre 5 a 9). *Aprendizaje Cooperativo y Educación inclusiva: una forma práctica de aprender juntos alumnos diferentes* [ponencia]. VI Jornadas de Cooperación Educativa con Iberoamérica sobre Educación Especial e Inclusión Educativa, Antigua, Guatemala.

Pujolàs, P. y Lago, J.R. (Coords.). Naranjo, M., Pedragosa, O., Riera, G., Segués, T., Soldevila, J., Juan, M., Oliveras, A., Olmos, G. Torné, A., Rodrigo, C. y Pujol, R. (2011). El programa CA/AC ("cooperar para aprender/aprender a cooperar") para enseñar a aprender en equipo Implementación del aprendizaje cooperativo en el aula. *UVIC. CIFE, 4*(2). https://cife-ei-caac.com/wp-content/uploads/2015/06/EL_APRENDIZAJE_COOPERATIVO.pdf

Sánchez, J. (2013). Qué dicen los estudios sobre el Aprendizaje Basado en Proyectos. *Actualidad pedagógica, 1*(4), 1-4. https://colorearte.cl/wp-content/uploads/2021/05/Aprendizaje-basado-en-proyectos.pdf

Segredo, A. M. y Reyes, D. (2004). Diseño curricular por competencias. *Correo Científico Médico de Holguín,* (8). https://www.researchgate.net/profile/Alina-M-Segredo-Perez/publication/276205763_Diseno_curricular_por_competencias/links/5552461008ae980ca606acd0/Diseno-curricular-por-competencias.pdf

Shoaf, M. M., Pollak, H. y Schneider, J. (2004). *Math Trails*. Lexington COMAP. https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=f02e6295b0aada39a855da4abd22f2b13d201cee

Škrbec, M. y Čadež, T.H. (2015). Identifying and Fostering Higher Levels of Geometric Thinking. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(3), 601-617. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1339a

Slavin, R. (1999). *Grupo de estudio sobre Aprendizaje Cooperativo. Aprendizaje cooperativo: teoría, investigación y práctica*. Buenos Aires: Aique.

Sobhi, T. y Cougoureux, M. (2014). Una Mirada actual a la Educación encierra un tesoro: evaluar la influencia del informe Delors de 1996. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. *Investigación y Prospectiva en educación – Contribuciones temáticas.* https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000220050_spa?posInSet=1&queryId=N-EXPLORE-241850ef-ffee-40bd-ac71-b55c26a9a77c

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, núm. 76*, de 30 de marzo de 2022, 41517-41789. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Rincón, A. (2004). Fibonacci y el número áureo. *Autores científicos-técnicos y académicos*, 73-81. https://www.acta.es/medios/articulos/matematicas/034071.pdf

Rivero, F. *El Número de Oro*. Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias Universidad de Los Andes. http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Numeroro/numero_libro.pdf

Rodríguez, J. (2023). Por calles y plazas: Matemáticas en tu entorno. UNIÓN *Revista iberoamericana de educación matemática, 19*(68), 1-10. Recuperado a partir de https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1521

Ruiz, J.M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista iberoamericana de educación, 47*(3), 1-8. http://funes.uniandes.edu.co/25542/1/Ruiz2008Problemas.pdf

Tamayo, L. P., Tinitana, A. G., Apolo, J. E., Martínez, E. I. y Zambrano, V. L. (2021). Implicaciones del modelo constructivista en la visión educativa del siglo XXI. *Sociedad & Tecnología, 4*(S2), 364-376. https://doi.org/10.51247/st.v4iS2.157

Tribó, G. (2008). El nuevo perfil profesional de los profesores de secundaria Educación XXI. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal, 11*, 183-209. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=70601109

Trujillo, G. (2015). *Aprendizaje basado en proyectos. Infantil, Primaria y Secundaria*. Grupo Editorial Universitario. https://hdl.handle.net/10481/83767

Urgiles-Rodríguez, B.E., Tixi-Gallegos, K. G. y Allauca-Peñafiel, M.E. (2022). Metodología Steam en Ambientes Académicos. *Revista Científica. Dominio de las Ciencias, 8*(1), 113-125. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8383491

Van Hiele, P. M. (1959). Chapter 6 The child’s thought and geometry. *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele,* 60-65. http://geometryandmeasurement.pbworks.com/f/VanHiele.pdf

Varas, M. y Zariquiey, F. (2016). 54 técnicas de Aprendizaje Cooperativo: desarrollo y consejos para su aplicación en el aula. *Equipo de Investigación Educativa IMECA, 2*(1), 1-46. https://convivenciayaprendizajecooperativo.web.uah.es/wp/54-tecnicas-de-aprendizaje-cooperativo/

Vargas, M. Sucesión de Fibonacci y el número áureo. *Revista del Instituto de Matemática y Física,* 25-30. http://matesup.cl/portal/revista/2003/4.pdf

Velilla-Jiménez, H. E. (2018). Formas de matematización de la filosofía natural: Galileo y la redefinición sociocognitiva de sus matemáticas. *Estudios de Filosofía,* (57), 59-93. https://doi.org/10.17533/udea.ef.n57a04

Villamizar-Acevedo, G. A., Lozano-León, S. G. y Sierra-Garavito, E. D. (2017). Creencias sobre las fuentes y formas de acceso al conocimiento generadas en las prácticas pedagógicas desde la perspectiva del estudiante. *Revista Perspectivas, 2*(1), 18-27. https://doi.org/10.22463/25909215.1281

Zorrilla-Pacheco, S. C., Flores-Samaniego, Á.H. y Jiménez-Gaona, Y.C. (2022). El Aprendizaje Basado en Proyectos y su aplicación didáctica en la enseñanza de las medidas de localización. *OLIMPIA. Revista Electrónica Calidad En La Educación Superior, 13*(1), 226-249. https://doi.org/10.22458/caes.v13i1.4043

Anexo A. Historia y didáctica de la Geometría

A1. Matemáticas y Geometría en un contexto histórico

Se ha considerado oportuno investigar sobre la geometría en términos históricos, dado que sustenta algunos fundamentos del trabajo; como la capacidad de abstracción, la correlación con otras ciencias humanísticas que conducen al enfoque STEAM y la relación entre la geometría y el entorno. Estos aspectos han sido la génesis para presentar la propuesta de impartir la Geometría a través del contexto del Arte. Los siguientes contenidos pueden servir como hilo conductor para elaborar anécdotas que sean trasladadas al aula, para ampliar la visión hacia esta disciplina, para apoyar las actividades diseñadas en la propuesta y para argumentar otras hipótesis que apoyen el trabajo.

Se estima que los primeros orígenes matemáticos relacionaban la naturaleza y las primeras reflexiones del ser humano, entre ellas, la necesidad de dimensionar y representar objetos, la búsqueda de cuantificarlos y describirlos; además de comprender la sucesión de eventos en la naturaleza, crear patrones y elaborar predicciones (Lynn A. Steen, 1998). Algunas primeras correlaciones se asocian a las matemáticas que proceden de los Neandertales y los primeros pensamientos del hombre (Ortiz, 2005).

Los orígenes de la geometría se asocian a la percepción de las dimensiones y formas de los objetos (Senechal, 1998); bajo esta perspectiva, puede estimarse como la rama de las matemáticas de mayor antigüedad. Camargo y Acosta (2012) remontan los orígenes de la geometría a las comunidades primitivas, al intentar representar el mundo, decorar y construir sus viviendas, como evidencian los vestigios localizados (Ortiz, 2005). Se considera que así nacen los primeros diseños geométricos, además de los conceptos de la simetría y la forma. Rincón (2004) explica que esta rama de las matemáticas ha sido relevante en la resolución de problemas, partiendo de herramientas de cierta sencillez. Sin existir un origen definido y predeterminado, se asocia a las propiedades privadas, rutinas y actividades cotidianas, como la agrimensura. Husserl (2000) afirma que el entorno natural de hoy día es básicamente el de entonces, lo que es factible de explicar por esbozos a partir de la geometría.

Por lo general, los orígenes de la geometría recaen en civilizaciones como la egipcia o babilónica, que intentan dar explicación a los fenómenos entre la tierra y el cielo, la naturaleza en general. Además, se relacionan con actividades agrícolas, donde la geometría tenía un aspecto cultural, asociado a las cantidades de las tierras, los pagos, los tamaños y se utilizaba con fines económicos, según Serres (1996) y Andonegui (2006).

El origen de la geometría se sitúa para algunos en la civilización egipcia, donde las inundaciones del Río Nilo borraban periódicamente los lindes de las tierras y debían reconstruirse. Esta actividad tan repetitiva y prolongada en el tiempo, fue clave en el desarrollo de la geometría, las mediciones y la actividad agrícola. Este procedimiento se vincula a otras civilizaciones desarrolladas alrededor de las cuencas de los ríos, como la china, india, maya y azteca (Ortiz, 2005). Las culturas hicieron uso de la geometría para la resolución de problemas y mediciones, para uso social, arquitectónico, geográfico y astronómico. En esta época se estiman las primeras formulaciones del área de figuras planas, aunque el mundo geopolíticamente era diferente y las representaciones son de carácter local (Camargo y Acosta, 2012). Eran ciudades prósperas, con altos niveles socioeconómicos y culturales que usaban las matemáticas de forma práctica, para fines de ingeniería y contabilidad. La civilización Babilónica de Mesopotamia, era conocedora del Teorema de Pitágoras, su Geometría se asocia a reglas para el cálculo de áreas y volúmenes, muy vinculada al cielo (Ortiz, 2005).

Algunos filósofos como Tales de Mileto, Pitágoras, Platón y Aristóteles dedicaron su vida al estudio de las matemáticas, dejando una valiosa herencia a la cultura griega. Según Galindo (2008), Platón empieza a exponer las matemáticas de forma crítica y extrapolarlas hacia el mundo de los problemas fundamentales. El enfoque de Platón hacia la combinación de disciplinas, tales como matemáticas y humanidades, se refleja en la historia de la civilización (Peralta, 1998).

La Escuela de Pitágoras se encargaba del estudio de las matemáticas, la filosofía y las ciencias. Para algunos, el Teorema de Pitágoras es el referente geométrico más famoso, aunque existen dudas sobre su autoría original (Ortiz, 2005). Camargo y Acosta (2012) se centran en el desarrollo de la geometría desde las aportaciones de los griegos, quienes la convierten en una disciplina. Desde el año 300 a.C. la obra de Euclides, perteneciente a la Escuela de Alejandría pasa a considerarse como cumbre del conocimiento de la geometría.

Ortiz (2005) relata que posteriormente Arquímedes muestra la geometría como una disciplina empírica con elementos perceptivos, se habla de una Geometría instrumental. A partir del siglo XIX empieza el desarrollo de la Geometría no euclediana, que se concibe como las

Matemáticas modernas. Las Matemáticas no euclidianas implican un grado mayor abstracción y una disminución de la percepción real, consideran conceptos de elementos geométricos que no se pueden percibir a partir de experiencias sensoriales y se intentan racionalizar. Actualmente, el estudio de las matemáticas y la construcción del conocimiento parte de los aspectos empíricos. El autor afirma que es necesario recurrir a la Geometría que planteaba Euclides para iniciar el conocimiento con experiencias en el entorno, que luego se va complejizando y desarrollando para construir el pensamiento racional y el razonamiento.

Husserl (2000) indica que los elementos o cuerpos no se aprecian directamente en el entorno, sino que se asocian a ideas u objetos, introduciendo de este modo el concepto de abstracción. El autor define la geometría como la ciencia que estudia objetos y modelos como base para relacionar ideas. Andonegui (2006) define la abstracción como algo implícito de las matemáticas, establece que es la forma en la que las ideas adoptan una representación que conduce a la idea o concepto de partida. En síntesis, las ideas son los elementos del mundo real y la representación son la forma de esquematizarlos. La abstracción tiene una contextualización histórica, de ahí que muchos elementos geométricos tienen nombres de origen griego o derivados del latín. Los griegos se consideran pioneros en el mundo de la Geometría y la abstracción, intentando dar sentido y utilidad a los objetos.

Velilla-Jiménez (2018), analiza la evolución de las Matemáticas y la Geometría, a través de una comparativa con el campo de las humanidades, en detalle la Filosofía. El autor detalla que algunos filósofos han debatido que las matemáticas no son una ciencia, sino que se acercan al mundo de las humanidades y la Filosofía por su marco sociocognitivo. También afirma que Aristóteles resaltaba su falta de capacidad explicativa. La filosofía plantea que las matemáticas no son capaces de analizar fenómenos naturales con exactitud, pero si analizan de forma pura elementos geométricos. Por ende, los fenómenos naturales se asocian a esquemas o similitudes con elementos geométricos, como comparar un rayo de luz con una línea.

Estos movimientos, producen una Revolución científica en el Renacimiento entre los siglos XVI y XVII, que conduce al nacimiento de la ciencia moderna, enfocada en las matemáticas prácticas y operativas (Dear, 2009). Se dice que las matemáticas actuales tienen su base en el campo relacionista, que con el tiempo da lugar a la Geometría no euclidiana. Las Matemáticas y la Geometría modernas, se centran en las relaciones entre figuras y la construcción de las mismas; más allá la comprensión y las causas que buscaban las matemáticas aristotélicas o de otras épocas (Velilla-Jiménez, 2018).

Galileo tiene un importante papel en el mundo de las matemáticas, su trabajo se centra en establecer unas bases geométricas para encontrar relaciones, formas y patrones que expliquen el mundo y los movimientos naturales (Velilla-Jiménez, 2018). Galileo recurre al uso de diagramas geométricos con líneas, ángulos, círculos y todos los elementos que implican, para analizar los problemas (Machamer y Woody, 1994). Esta metodología le permite analizar situaciones y ofrecer opiniones en la resolución de los problemas, que intentan explicar los fenómenos naturales lejos de los argumentos de las ciencias ocultas. Así pues, la Geometría empieza a ser la base de las investigaciones, una forma de establecer modelos, explicar las demostraciones con diagramas y experimentos. También destaca la correlación que realiza Galileo entre la observación y el razonamiento lógico y matemático, asociado a la relación entre las matemáticas y las experiencias (Velilla-Jiménez, 2018).

A2. Didáctica de la Geometría

Camargo y Acosta (2012) definen la geometría como una disciplina polifacética, relacionada con otros contenidos matemáticos, con las ciencias sociales, la naturaleza y el entorno. También definen dos facetas para la geometría, la primera de carácter empírico se asocia a aspectos como la percepción, la intuición, la visualización y el carácter instrumental. La segunda faceta de carácter teórico, guarda relación con los aspectos abstractos, deductivos, la rigurosidad, los aspectos conceptuales y formales. Estas dos facetas se denominan "polos", porque implican condicionantes opuestos, pero a su vez son interdependientes. A partir de experiencias se construyen los distintos niveles de conocimiento que han servido de utilidad al ser humando para dar resolución a los problemas, interpretar hechos, realizar explicaciones y elaborar obras de arte.

Algunos autores apoyan la necesidad de desarrollar un "*pensamiento geométrico*" (Guzmán, 1993). Gómez (2002) afirma que la geometría no sólo es observar o visualizar un elemento, los conocimientos deben ser comprendidos, razonados y requieren un análisis deductivo. Tener la capacidad de saber comprender y razonar los contenidos geométricos, permite desarrollar el pensamiento espacial, además del pensamiento lógico-abstracto (Andonegui, 2006). Barrantes et al. (2013) apoyan la necesidad de integrar al estudiante con el medio ambiente y que desarrolle aspectos cognitivos e intuitivos partiendo del entorno y la exploración tridimensional del espacio. También defienden mantener técnicas como la manipulación incluyendo etapas como secundaria.

La Teoría de Van Hiele se ha convertido en el referente didáctico (Fernández, 2013). El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (1959) considera una de las bases para explicar el aprendizaje de la geometría (Fouz, 2005; Corberán et al., 1994; Fernández, 2013 y Mason, 2009). En el modelo original existen cinco niveles, algunos autores definen un nivel adicional. La hipótesis principal considera que el aprendizaje de la geometría necesita una serie de escalones, que cada estudiante debe adquirir y superar, independientemente de la edad. No es factible adquirir un conocimiento nuevo hasta que el anterior no se ha logrado. A su vez, acceder a un nuevo nivel implica mayor capacidad en las competencias geométricas. El lenguaje utilizado es un punto de partida, debe ser adecuado para poder adquirir el conocimiento y el significado de los contenidos, adaptarse a la capacidad de comprensión y razonamiento del sujeto. Por otra parte, las actividades y sistemas de enseñanza deben favorecer el paso de unos niveles a otros. Fouz (2005) describe cinco niveles numerados del 0 al 4, que han sido descritos en la tabla 15.

Tabla 15. *Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele para aprendizaje de la Geometría.*

Nivel	**Denominación**	**Elementos Explícitos**	**Elementos Implícitos**
0	Visualización o reconocimiento	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
1	Análisis	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
2	Ordenación o clasificación	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
3	Deducción formal	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)
4	Rigor	Conocimiento de diferentes sistemas axiomáticos (comparar diferentes geometrías).	Trabaja la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos

Fuente: elaboración propia a partir del estudio de Fouz (2005).

Acorde a la tabla 15, Fouz (2005) describe que el nivel 4 es difícilmente alcanzado por los estudiantes, el alumnado universitario alcanza tan sólo el nivel 2. Los niveles implican una jerarquía, cada nivel se asocia a unos conocimientos de carácter implícitos, los que al pasar al siguiente nivel, se extrapolan y se denominan explícitos. Este modelo considera el conocimiento matemático en diversos aspectos, al promocionar a cada nivel, no sólo aumenta el nivel de conocimiento, también el lenguaje matemático y las capacidades del estudiante

(Fouz, 2005 y Mason, 2009). Permitir al estudiante exponer los conocimientos adquiridos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, aumenta su lenguaje matemático y el grado de adquisición del conocimiento (Škrbec y Čadež, 2015). El modelo Van Hiele guarda especial relación con la Teorías del Aprendizaje Significativo de Ausbel (1983).

Fouz (2005) plantea una serie de actividades de trabajo para cada nivel, aumentando el grado de dificultad en función de cada nivel. Por otra parte, Mason (2009) establece que se produce el conocimiento cuando existen situaciones donde aplicar los contenidos, a través de la experiencia y contextualización de las actividades. Indicando que es responsabilidad del docente diseñar actividades y experiencias para que los alumnos puedan subir a los niveles de orden superior.

A3. Concepto de visualización

Fernández (2013) analiza la visualización dentro del campo de las matemáticas, describe que la visualización espacial depende principalmente de la imagen y los procesos para su manipulación, de las representaciones externas, de la capacidad de creación del estudiante y el procesamiento de las imágenes. (del Grande, 1990; Gutiérrez, 1991; 1996). Para que exista un aprendizaje significativo en el campo de la geometría, es necesario combinar las áreas de visualización con argumentación; lo que implica que la teoría se exprese por medio de experiencias, como afirma Castiblanco et al. (2004), citado por Gamboa y Ballestero (2010).

Durante los siglos XIX y XX en matemáticas, se daba mayor valor al pensamiento lógico-formal y la visualización presentaba un papel secundario. A finales del siglo XX la visualización comienza a tener mayor relevancia en este campo. Arcavi (2003) afirma que la visualización puede resolver problemas y fomentar la creatividad. Fernández (2013) considera la visualización como precursora del conocimiento geométrico acorde a la Teoría de Van Hiele. Battista (2008) y Fernández (2013) plantean que en geometría el razonamiento tiene lugar sobre la representación de los objetos. Pratt y Davidson (2003) concluyen en su estudio que el uso de Geometría dinámica y softwares contribuyen positivamente a la comprensión de los contenidos, tanto los espaciales como de figuras planas. También favorece la comprensión entre las figuras planas y sus propiedades y fomenta el ascenso a niveles de orden superior según el modelo de Van Hiele (De Villiers, 1998 y Fernández, 2013).

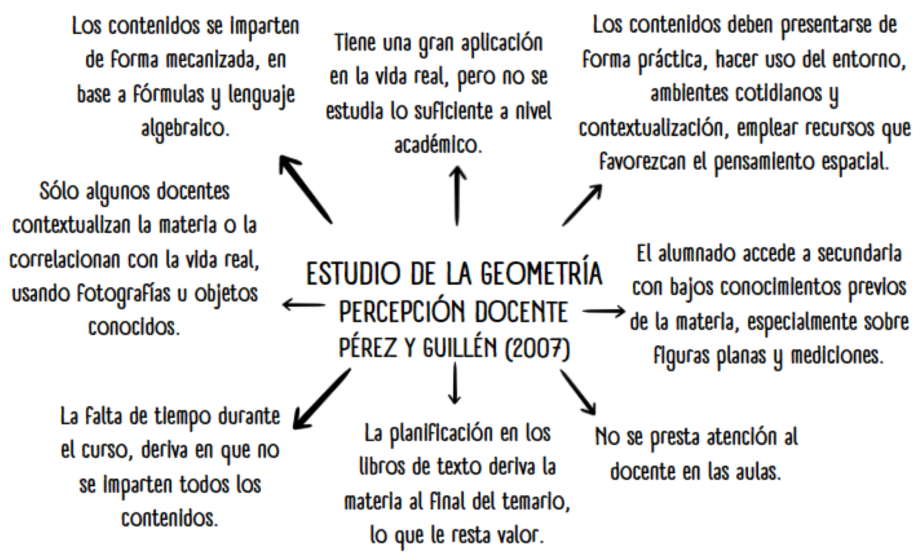
La visualización es un proceso que depende de cada estudiante, se trata de una tarea diferente e inherente para cada alumno, por ende, no es factible forzar estos ritmos, tal y como apunta Bishop (1989). No obstante, existen aspectos donde el docente puede contribuir a este proceso, como ofrecer actividades en diferentes contextos y crear situaciones de aprendizaje diversas.

A4. Problemas del alumnado para el aprendizaje de la Geometría

Pérez y Guillén (2009) definen la geometría como la capacidad de trabajar con objetos ideales que no percibimos sensorialmente, tan sólo los percibimos mentalmente. Caro y Breccia (2009), defienden que la Geometría otorga habilidades de razonamiento y resolución de problemas, las que luego se pueden extrapolar a contextos reales. El estudio de la Geometría forma parte de los elementos curriculares en las distintas etapas educativas, en secundaria adquiere especial relevancia su estudio, producto del desarrollo de habilidades y capacidades del estudiante (Castro, 2023). Pérez y Guillén (2009) y Gamboa y Ballestero (2010), denuncian que el sistema educativo ha enfocado el estudio de la Geometría bajo escenarios descontextualizados.

Pérez y Guillén (2007) deducen que los contenidos se imparten de un modo tradicional, en su estudio recopilan las siguientes conclusiones bajo las perspectivas de los docentes, las que pueden consultarse en la figura 5.

Figura 5. *Estudio de la Geometría. Percepción Docente.*



Fuente: elaboración propia a partir de Pérez y Guillén (2007).

El docente es responsable de generar situaciones de aprendizaje para construir aprendizajes significativos y desarrollar el pensamiento geométrico (Castro, 2023). A su vez, el estudio de esta área supone una de las mayores preocupaciones para los docentes (Marmolejo y Vega, 2005). Se considera que el estudio de las figuras planas es una de las grandes herramientas para la introducción de los estudiantes en el campo de la geometría (Marmolejo y Vega, 2005). Sin embargo, con frecuencia se priorizan los contenidos de mediciones por encima de los contenidos del estudio de figuras planas, que conlleva el desarrollo de determinadas habilidades en el alumnado (Pérez y Guillén, 2007).

Duval (2001) define los contenidos de la Geometría como abstractos e inaccesibles. Por ello, recomienda recurrir a registros de representación, como la lengua natural o figural. El autor también considera que además del registro natural, presenta importancia el lenguaje matemático y la capacidad de argumentar y razonar los conceptos. A nivel figural, considera imprescindibles trabajar distintos conceptos de visualización, los que resultan considerablemente complejos (Marmolejo y Vega, 2005).

Gamboa y Ballestero (2010) analizan distintos obstáculos para el estudio de la Geometría, bajo la perspectiva del alumnado. De este modo, evidencian la falta de comprensión producto de su abstracción, siendo un contenido obligatorio, descontextualizado, mecanizado y poco práctico. La falta de práctica o la falta de tiempo para impartir los contenidos, lo convierte en una disciplina de mayor complejidad.

Gamboa y Ballestero (2010) denuncian que uno de los principales problemas de la Geometría en secundaria reside en presentar de forma directa los contenidos al alumno. También se presentan como un contenido de menor preferencia dentro de los temarios y la falta de tiempo de los docentes reduce su impartición. Por lo tanto, la Geometría se percibe como contenidos de poca utilidad y cierto grado de dificultad. Según el autor, la Geometría es una disciplina directamente relacionada con la comprensión del mundo y el entorno, además de contribuir en los procesos de reflexión y resolución de problemas.

Anexo B. Matemáticas y Geometría en el Arte

B1. La perspectiva y la profundidad en el Arte

El concepto de la perspectiva, ha sido estudiado por artistas como Leonardo DaVinci y Durero, que intentaron analizarlo desde el punto de vista científico. Durante el Renacimiento, la perspectiva se convierte en una rama de las matemáticas, en concreto, de la Geometría. Esta disciplina queda estancada durante la Edad Media, pero posteriormente su evolución conduce a la Geometría Proyectiva y a la Geometría Descriptiva (Peralta, 1998). Desde el punto de vista técnico, existen dos formas de interconectar el espacio tridimensional y el bidimensional. Por un lado, se considera realizar un dibujo realista a partir de la interpretación de la vista y el cerebro. Por otro lado, se considera establecer unas reglas o claves entre la representación bidimensional (superficie) y la tridimensional (realidad), como sucede con la Geometría Descriptiva de los mapas (Etayo, 2009).

Según Etayo (2009), para plasmar un cuadro se hace uso de las leyes de la visión, comúnmente denominadas leyes de la perspectiva. En el sentido más estricto, se debe diferenciar la visión ciclópea (visionado con un único ojo) de la visión estereoscópica (visionado con los dos ojos). La visión ciclópea considera la proyección de cada punto del espacio tridimensional hasta el espacio en dos dimensiones. La misma, no permite el cálculo de distancias o ángulos; pero conserva la proyección de las rectas y las líneas paralelas se proyectan hasta unirse al horizonte del cuadro, lo que se conoce como fuga. La visión estereoscópica (con dos ojos) permite medir las profundidades, reflejando si el objeto se encuentra cerca o lejos. Según el autor, la representación fiel de un cuadro sobre la realidad son problemas que se fundamentan en modelos matemáticos.

La pintura es una superficie plana, donde un espacio tridimensional queda plasmado a modo de composición, para lo cual el artista combina la Geometría (Bouleau, 2006). Según Magistrali (2019) la perspectiva ha sido tradicionalmente conocida porque se asocia a las características de las composiciones para reflejar profundidad. Las obras de Durero (1471-1528), en concreto ilustraciones, han sido un ejemplo para los principios de la perspectiva. Los artistas renacentistas manejaban a la perfección la técnica de la perspectiva, de forma que al admirar sus obras de dos dimensiones, parece percibirse una imagen real en tres dimensiones (Abreu y Bracho, 2023).

Por otra parte, la perspectiva se asocia al concepto de anamorfosis que ha sido utilizada por numerosos artistas. La anamorfosis consiste en deformar ciertas partes de la imagen, se trata de una proyección o perspectiva distorsionada. El observador debe posicionarse en un ángulo determinado o bien utilizar algún tipo de dispositivo óptico o espejo para poder percibir la imagen de forma reconstruida o con claridad. Si bien la técnica se asocia al Renacimiento y ha sido reflejada por artistas como Leonardo Da Vinci (1452-1519), se han encontrado indicios de esta técnica en el arte prehistórico de Lascaux (Magistrali, 2019). El artista Leonardo Da Vinci introduce la perspectiva aérea, que consiste en dar profundidad a los cuadros haciendo uso de distintas técnicas y recursos pictóricos, como el esfumado (Etayo, 2009).

Según Montaño (2016) hasta mediados del siglo XIX, el arte pictórico tomaba como referencia la Geometría y la perspectiva. Con la combinación de ambas, los diferentes elementos o figuras quedaban organizados en el cuadro y los artistas trasladaban sus emociones al observador. Magistrali (2019) señala que hasta el siglo XIX las obras de arte se inspiraban en una Geometría euclídea tridimensional, pero en este siglo se produce una revolución matemática en torno a la rama de la geometría. Algunos artistas a partir de este punto de inflexión empiezan a hacer uso de otro tipo de figuras y nuevas dimensiones en sus composiciones, este hecho conduce al desarrollo de una Geometría abstracta axiomatizada. De igual forma, aproximadamente en este siglo, otros movimientos como el impresionismo, el futurismo y el cubismo han dejado de lado el arte figurativo propio de otras épocas. Estos últimos sirvieron de inspiración a Wassily Kandinsky para convertir la Geometría abstracta en la inspiración de sus obras.

Cabe mencionar, que para el desarrollo del trabajo se usa como base objeto de estudio el plano. En términos de geometría un plano queda definido por dos dimensiones, como un elemento sin espesor, ilimitado en todas sus direcciones, que guarda relación con elementos de dos dimensiones (longitud y altura), al igual que todas las figuras cerradas que se puedan representar dentro del mismo. En un entorno real, no es factible encontrar planos en el sentido estricto de su definición, pero si en representaciones, por ejemplo, una hoja de papel (Andonegui, 2006).

B2. Proporciones y la relación áurea

Los distintos autores hacen alusión a la perspectiva como una característica inminente de las obras de arte. No obstante, además de la perspectiva otro factor fuertemente asociado es la proporcionalidad (Giménez, 2009). Para el autor, la proporción se asocia a un prototipo idealizado de belleza. Mientras que se define la armonía como el equilibrio existente entre las distintas partes de un conjunto que conduce a la belleza. Por otro lado, el concepto de armonía se asocia a términos como conexión o concordancia. Desde tiempos antiguos, diversos matemáticos han correlacionado los conceptos de proporcionalidad con la belleza. Bajo perspectivas artísticas, se hace uso de la proporción para aportar realismo y belleza a las obras. Por el contrario, las deformaciones o distorsiones señalan ciertas rupturas o distinciones específicas. Ambas técnicas, tanto la proporcionalidad como la deformación son frecuentemente empleadas en el campo artístico.

Luca Paccioli en 1506 elaboró un tratado que recopilaba los conceptos fundamentales sobre la proporción, dirigido a artistas y filósofos. En el tratado, el autor combina el conocimiento de las proporciones del mundo del arte con el de la geometría, partiendo de los conocimientos de Pitágoras. Posteriormente, estos conceptos de proporcionalidad son utilizados en sus obras por artistas como Rafael, Durero o Leonardo Da Vinci para la búsqueda de proporcionalidad y armonía (Giménez, 2009).

La Razón Divina, Razón Áurea o Número Áureo se consideran la proporción perfecta entre la belleza y armonía, lo que se traduce como la perfección desde el punto de vista estético. Esta proporción se encuentra en diversidad de obras de arte, arquitectura e incluso de la naturaleza (Peralta, 1998; Garijo y De María, 2003). Así pues, esta proporcionalidad explica como la sociedad a lo largo de la historia, ha buscado la belleza en sus diversas formas y campos (Garijo y De María, 2003). Otros autores también se refieren a ella como la Sección áurea o proporción divina (Magistrali, 2019).

Leonardo Da Vinci ha sido un referente en el estudio de las proporciones, el artista se inspiró en las descripciones de Marco Vitrubio sobre la proporcionalidad y a partir de ellas, realizó la representación gráfica de "el hombre de Vitrubio". El hombre de Vitrubio se considera como la perfección de la belleza acorde a los cánones clásicos. Rincón (2004) afirma que es un ejemplo de cómo el ser humano y la naturaleza se integran en el arte, las conclusiones de su modelo han sido denominadas como la "proporción divina".

La proporción áurea considera una estructura matemática y ha sido un recurso frecuentemente utilizado en el mundo del arte. Además de artistas renacentistas, existen numerosas obras de reconocido prestigio donde queda reflejada, como en la obra de Salvador

Dalí (Magistrali, 2019). Su origen se asigna a la escuela Pitagórica en torno al siglo VI a.C. y está considerada como la perfección en términos de belleza estética. Se trata de una proporción que organiza el espacio, de modo que resulta agradable para los sentidos y la percepción del ser humano, lo que se convierte en un recurso frecuentemente utilizado a lo largo de la historia del arte (Marrasé, 2016) y que se sigue empleando en la actualidad, a pesar de que suele pasar desapercibida. En las obras se utiliza a nivel estructural en las dimensiones y configuración del cuadro, dado que pueden estar compuestos en base a rectángulos; pero también en la composición de las figuras o elementos que se plasman en ellas (Marrasé, 2016).

La escuela Pitagórica que se inspira en los orígenes y perfección del ser humano, consideraba que había descubierto el "rectángulo áureo", el que definía como una figura geométrica asociada a las proporciones ideales y la belleza. Existe una propiedad especial en este rectángulo, pues dado un mismo rectángulo áureo, es factible construir un cuadrado áureo en su interior y se obtiene una figura restante que es de nuevo un rectángulo áureo. Dentro de este rectángulo áureo, nuevamente puede realizarse el mismo procedimiento hasta infinitas veces (Rincón, 2004).

Rincón (2004) afirma que otra característica importante del rectángulo áureo es la relación entre la base y la altura, que permite obtener un valor aproximado de 1,61803398875… y se conoce como "número áureo". La proporción entre la base y la altura de este rectángulo también se traslada a figuras geométricas como el pentágono, el decágono y el dodecágono; pero también a las proporciones del ser humano. El autor plantea que posiblemente se llegó al rectángulo áureo de forma intuitiva, dado que se encuentra ampliamente reflejado en la naturaleza. A su vez, la base del rectángulo áureo sirve como plantilla para construir la espiral que tan frecuentemente se encuentra en fenómenos de la naturaleza.

Existe un fuerte vínculo entre la proporción áurea y la serie de Fibbonacci. Leonardo de Pisa, conocido como Fibbonacci fue el responsable de introducir el sistema de numeración indo-arábigo en Europa, sistema que ha perdurado hasta la actualidad (Marrasé, 2016; Rincón 2004). Tras un amplio bagaje en el campo de las matemáticas y planteamiento de numerosos problemas, sus razonamientos se extrapolaron y llevaron a la deducción de la serie de Fibbonacci, ampliamente vinculada a la sección áurea. La serie se compone de los números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, etc. y se construye sumando a cada número el anterior. Además, esta combinación matemática se considera la primera secuencia de estas características en Europa (Rincón 2004).

Por otra parte, Rincón (2004) explica que en el siglo XVIII el matemático Robert Simon reestudia la serie, descubriendo que es factible dividir cada término de la sucesión con el anterior y alcanzar un resultado similar al número áureo. En definitiva, el límite de dicha serie tiende al número áureo. Este descubrimiento ha permitido explicar numerosos fenómenos de la naturaleza, como la configuración de plantas y vegetales, reproducción de especies animales, etc. En consecuencia, es factible establecer la correlación entre el rectángulo áureo; el número áureo (ϕ), también denominado phi o "número de oro" y la serie de Fibbonacci, que deriva en fhi (Marrasé, 2016; Vargas; Rivero; Vallejo, 2011; García y Rodríguez, 2018).

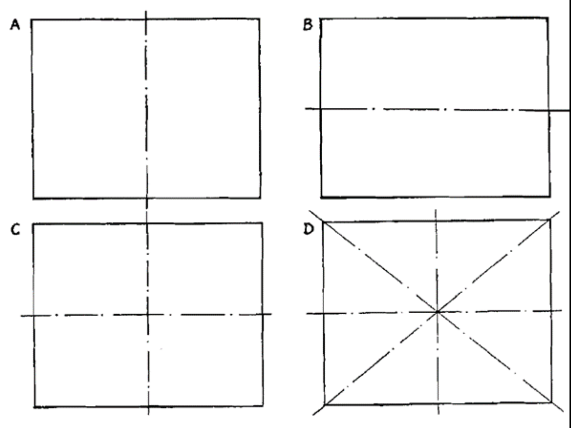
B3. Composición y equilibrio

Marrasé (2016) compara la importancia de las formas y las simetrías en las composiciones pictóricas y el estudio matemático. Se consideran elementos claves para generar armonía y estética. García (1997) considera que el arte primitivo es arbitrario, infantil, caótico y espontáneo, carece de composición. La evolución del arte comienza por el planteamiento de una línea imaginaria, el eje de simetría; la incorporación de esta subdivisión hizo factible reorganizar los conjuntos y elementos. Con el tiempo han sido desarrollados distintos esquemas geométricos en las obras de arte, así pues, se han reagrupado conjuntos simétricos en torno a las pinturas. Una de las claves básicas nace de la jerarquización, donde los elementos principales se encuentran representados en la parte central de las obras.

La composición se define como el conjunto y la integración de los distintos elementos en el cuadro, la organización de los mismos de un modo determinado, construyen un conjunto (Arnheim, 2011). Arrillaga (2016) afirma que los artistas tienden a simplificar al máximo las ideas, previo a la creación de cada obra, se trata de una primera etapa donde clarifican los conceptos.

Según explica García (1997), las representaciones consideran una lógica visual, asociada con la agrupación de conjuntos y la simetría. Los conjuntos de elementos, en ocasiones no se encuentran cercanos, pero si manifiestan una agrupación coherente. El eje de simetría se suele usar como elemento diferenciador y en torno al mismo se construye el resto de la obra, lo que significa que se reparten los elementos de forma similar y se reorganizan en función a los criterios de lejanía o cercanía de los elementos o figuras, dando armonía y equilibrio. La figura 6 reúne los esquemas de simetría principales que se encuentran en las obras de arte.

Figura 6. *Esquemas de simetría principales de las obras de arte.*



ESQUEMAS DE SIMETRÍA

A) Considera una reagrupación simétrica en torno al eje vertical, estas reagrupaciones provocan que los elementos actúen de forma interdependiente. La división está directamente asociada a la estructura del cuadro, la subdivisión del cuadro es clara y a ambos lados del eje se evidencian elementos de gran correlación y semejanza.

B) La subdivisión por medio del eje horizontal jerarquiza elementos dentro de la composición. Los elementos con carácter de superioridad se colocan en la parte de arriba del eje.

C) La combinación de los esquemas A y B, divide el espacio en cuadrantes.

D) Considera la incorporación de diferentes ejes de simetría.

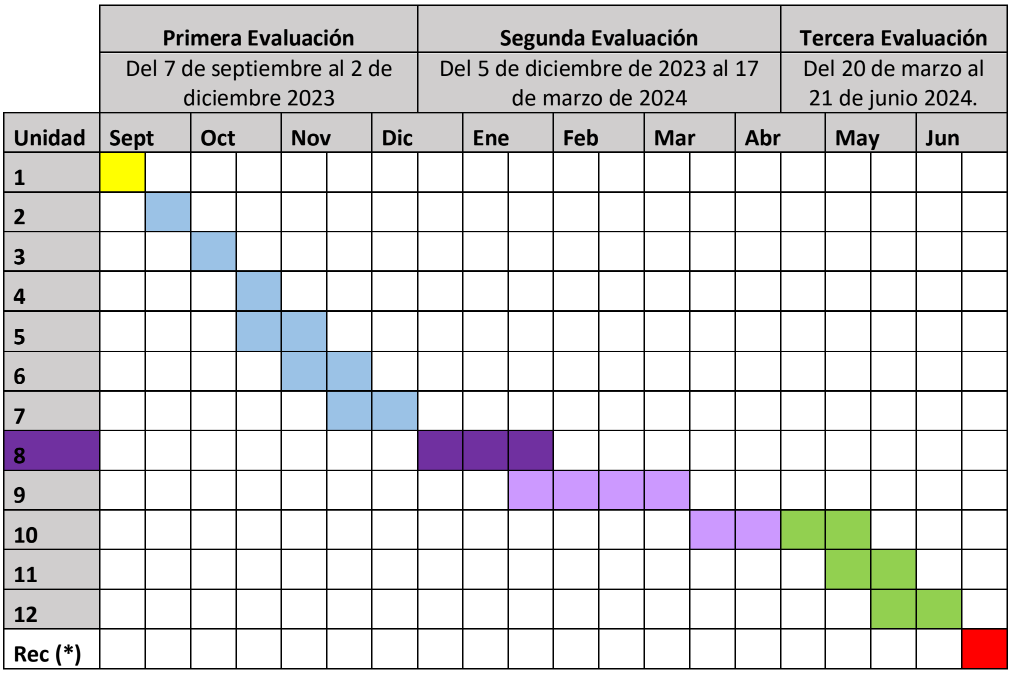
Fuente: García (1997).

A partir de la figura 6, García (1997) explica que el observador intenta establecer semejanzas y relaciones a partir de los estímulos visuales que ofrecen las obras de arte. Los esquemas de simetría ayudan al espectador a reconocer objetos y elementos partiendo de su conocimiento, pero existe un elemento sorpresa vinculado al espíritu creativo, producto de la variedad de elementos que pueden ser descubiertos. Así pues, el arte redescubre el entorno y recrea la realidad. El arte clásico y las temáticas religiosas, se encuentra especialmente vinculado a estos esquemas de simetría, lo que ha ayudado a los artistas a transmitir lo sobrenatural de lo terrenal y a destacar las figuras religiosas o principales de forma jerárquica. También se encuentra la categoría del esquema dual, el triple y el esquema en cuadrantes; que dependen de la ubicación de las figuras y en consecuencia de los grados de simetría que se divisan en la composición.

García (2023) recopila una serie de aspectos claves que relacionan el Arte con las Matemáticas. La geometrización se refiere al proceso a partir del cual la realidad se simplifica en formas simples, eliminando lo que se considera secundario. Si bien parece un proceso relativamente sencillo, presenta diversas dificultades de ejecución. La técnica puede ser trasladada al aula, para ayudar al alumnado a admirar con mayor detalle las obras, con objeto de luego poder simplificarlas.

Anexo C. Cronograma de la Programación de Didáctica

Figura 7. *Cronograma de la Programación Didáctica.*



(*) Recuperaciones
Nota: Se han asignado unas fechas tentativas y referenciales del curso 2023/24.

Fuente: elaboración propia.

Anexo D. Objetivos de Etapa estatales y autonómicos

Tabla 16. *Objetivos de Etapa estatales y autonómicos.*

<table>
<tr><th>Objetivo de etapa</th><th>Estatal (RD 217/2022)</th><th>Autonómico (Decreto 65/2022)</th><th>Descripción de forma de trabajo dentro de la propuesta de intervención</th></tr>
<tr><td>a)</td><td colspan="2">Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a las demás personas, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.</td><td>Se trabaja por medio de las metodologías activas, como el Aprendizaje Cooperativo.</td></tr>
<tr><td>b)</td><td colspan="2">Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.</td><td>Se trabaja con el Aprendizaje Cooperativo y sus distintas técnicas, también con el Aprendizaje Basado en Proyectos.</td></tr>
<tr><td>c)</td><td colspan="2">Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.</td><td>Se trabaja como elementos transversales.</td></tr>
<tr><td>d)</td><td colspan="2">Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con las demás personas, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.</td><td>Se trabaja como elementos transversales y por medio del Aprendizaje Cooperativo.</td></tr>
<tr><td>e)</td><td colspan="2">Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Desarrollar las competencias tecnológicas básicas y avanzar en una reflexión ética sobre su funcionamiento y utilización.</td><td>Se trabaja como elementos transversales y por medio del Aprendizaje Basado en Proyectos. La Competencia Digital se trabaja solicitando al alumno una investigación sobre la información y de forma transversal, dando ejemplo sobre el uso funcional de la tecnología durante las clases.</td></tr>
<tr><td>f)</td><td colspan="2">Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.</td><td>Se trabaja por medio del Aprendizaje Basado en Proyectos y el enfoque STEAM. El trabajo fomenta la combinación e interacción interdisciplinar.</td></tr>
<tr><td>g)</td><td colspan="2">Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.</td><td>Se trabaja por medio de metodologías activas como el Aprendizaje Basado en Proyectos y el Aprendizaje Cooperativo.</td></tr>
<tr><td>h)</td><td>Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la comunidad autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.</td><td>Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.</td><td>Se trabaja como elementos transversales, también por medio de metodologías activas como el Aprendizaje Basado en Proyectos y el Aprendizaje Cooperativo. Se fomenta la participación activa del alumno, con debates grupales, expresión oral, desarrollo del lenguaje matemático. También se preparan materiales con anécdotas históricas, para hacer seguimiento del trabajo.</td></tr>
<tr><td>i)</td><td colspan="2">Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.</td><td>Se trabaja como elementos transversales, por medio del visionado de un video con mensajes en distintas lenguas. También por medio de la introducción de anécdotas históricas.</td></tr>
<tr><td>j)</td><td colspan="2">Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de las demás personas, así como el patrimonio artístico y cultural.</td><td>Se trabaja por medio del Paseo Matemático del Museo del Prado, la inserción de los contenidos de arte dentro de la unidad, el estudio de las diversas obras de arte, la introducción de anécdotas históricas en el aula, el enfoque STEAM y el Aprendizaje Cooperativo.</td></tr>
</table>

Objetivo de etapa	**Estatal (RD 217/2022)**	**Autonómico (Decreto 65/2022)**	**Descripción de forma de trabajo dentro de la propuesta de intervención**
k)	Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado, la empatía y el respeto hacia los seres vivos, especialmente los animales, y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.		Se trabaja como elemento transversal, así como por medio del Aprendizaje Cooperativo.
l)	Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.		Se trabaja por medio del Paseo Matemático del Museo del Prado, la inserción de los contenidos de arte dentro de la unidad, el estudio de las diversas obras de arte, la introducción de anécdotas históricas en el aula y el enfoque STEAM.

Fuente: elaboración propia a partir del RD 217/2022 y Decreto 65/2022, relación de trabajo dentro de la propuesta de intervención.

Anexo E. Competencias Clave, definición y participación en la propuesta

Tabla 17. *Competencias Clave (RD 217/2022).*

Educación Secundaria Obligatoria			
Competencias Clave	**Definición acorde a (RD 217/2022)**	**Sistema de trabajo en la propuesta**	**Descriptores Operativos trabajados**
Competencia en comunicación lingüística (CCL)	La competencia en comunicación lingüística supone interactuar de forma oral, escrita, signada o multimodal de manera coherente y adecuada en diferentes ámbitos y contextos y con diferentes propósitos comunicativos. Implica movilizar, de manera consciente, el conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes que permiten comprender, interpretar y valorar críticamente mensajes orales, escritos, signados o multimodales evitando los riesgos de manipulación y desinformación, así como comunicarse eficazmente con otras personas de manera cooperativa, creativa, ética y respetuosa. La competencia en comunicación lingüística constituye la base para el pensamiento propio y para la construcción del conocimiento en todos los ámbitos del saber. Por ello, su desarrollo está vinculado a la reflexión explícita acerca del funcionamiento de la lengua en los géneros discursivos específicos de cada área de conocimiento, así como a los usos de la oralidad, la escritura o la signación para pensar y para aprender. Por último, hace posible apreciar la dimensión estética del lenguaje y disfrutar de la cultura literaria.	Esta competencia se trabaja por medio del AC, el que favorece las relaciones sociales entre el alumnado y el docente y el alumnado, permitiendo poner en práctica diversidad de formas de comunicación. Además, la propuesta se plantea como un ABP donde el alumno debe activar sus conocimientos e investigar para ir resolviendo los diferentes ejercicios, problemas o retos planteados; se activa de este modo el aprendizaje significativo, vinculado al carácter constructivo de las matemáticas. También se introducen algunas frases a modo reflexión para el alumno, el que debe activar su criterio y razonamientos para comprenderlas. De igual modo, se propone al alumno investigar y obtener información sobre los cuadros o láminas con las que trabaja. La competencia está presente dado que se recurre al enfoque STEAM, donde las matemáticas se correlacionan con el área de las humanidades, en este caso, del arte. Siendo uno de los objetivos que el alumno desarrolle el pensamiento lógico, crítico y formal realizando actividades que permitan combinar la Geometría con el campo del arte. Así pues, la creatividad y el desarrollo del pensamiento crítico; junto con su puesta en escena al trabajar en grupos heterogéneos y en actividades grupales, favorecen el desarrollo de la CCL. Asimismo, el proyecto también contempla el uso del lenguaje matemático. Igualmente está presente el respeto y las habilidades comunicativas, producto del AC planteado y los diversos roles que adopta el alumnado.	CCL1, CCL2, CCL3, CCL5
Competencia plurilingüe (CP)	La competencia plurilingüe implica utilizar distintas lenguas, orales o signadas, de forma apropiada y eficaz para el aprendizaje y la comunicación. Esta competencia supone reconocer y respetar los perfiles lingüísticos individuales y aprovechar las experiencias propias para desarrollar estrategias que permitan mediar y hacer transferencias entre lenguas, incluidas las clásicas, y, en su caso, mantener y adquirir destrezas en la lengua o lenguas familiares y en las lenguas oficiales. Integra, asimismo, dimensiones históricas e	Se trabaja esta competencia a partir del visionado de un video sobre el Museo del Prado, el que expresa distintos tipos de frases y reflexiones en diferentes lenguas; mostrando de este modo la diversidad intercultural que se asocia al arte y al museo seleccionado en sí. Debido al contexto histórico que se trabaja en la propuesta, el alumno amplía su perspectiva para conocer, valorar y respetar la diversidad cultural de la sociedad, dado que por medio de anécdotas históricas es factible comprobar la diversidad a lo largo de toda la historia. Así pues, esta información se emplea para debatir e intercambiar opiniones durante la realización de actividades del proyecto. La CP se ve favorecida por el AC y el sistema de trabajo por medio de agrupaciones.	CP1, CP3

Educación Secundaria Obligatoria			
Competencias Clave	**Definición acorde a (RD 217/2022)**	**Sistema de trabajo en la propuesta**	**Descriptores Operativos trabajados**
Competencia plurilingüe (CP)	interculturales orientadas a conocer, valorar y respetar la diversidad lingüística y cultural de la sociedad con el objetivo de fomentar la convivencia democrática.	También se puede mencionar el lenguaje matemático como otra forma de trabajar la competencia.	CP1, CP3
Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)	La competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (competencia STEM por sus siglas en inglés) entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno de forma comprometida, responsable y sostenible. La competencia matemática permite desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos. La competencia en ciencia conlleva la comprensión y explicación del entorno natural y social, utilizando un conjunto de conocimientos y metodologías, incluidas la observación y la experimentación, con el fin de plantear preguntas y extraer conclusiones basadas en pruebas para poder interpretar y transformar el mundo natural y el contexto social. La competencia en tecnología e ingeniería comprende la aplicación de los conocimientos y metodologías propios de las ciencias para transformar nuestra sociedad de acuerdo con las necesidades o deseos de las personas en un marco de seguridad, responsabilidad y sostenibilidad.	Se trata de la competencia que se va a trabajar principalmente, donde uno de los objetivos considera el desarrollo del razonamiento y el sentido crítico partiendo de la investigación y planteamiento de actividades diferentes. Siendo la resolución de ejercicios y problemas matemáticos, especialmente relacionados con la Geometría el principal foco de estudio. También destaca la conexión entre disciplinas que se pretende realizar con la propuesta, intentando conectar al alumno con el entorno y la relación de contenidos y otras áreas. De igual modo, se promueve el enfoque STEAM, por lo que quedan interconectados los campos de las Matemáticas y el Arte. Para acercar las matemáticas al entorno, se recurre al patrimonio cultural; planteando actividades tanto en el aula como una visita in situ por medio de un paseo matemático. Dentro de las actividades es fundamental la observación que realiza el alumno para proceder con la resolución de las actividades propuestas. La idea es promover actividades que fomenten la reflexión y la creatividad del alumnado. Lo que también se ve favorecido debido al planteamiento del proyecto por medio del ABP, que plantea determinados retos al alumno, con objeto de indagar e iterar para dar solución o buscar respuestas. A su vez, se alcanzan soluciones por medio de la interacción de los integrantes del equipo y el alumno debe lograr un producto final. También se fomenta en este caso la interpretación de esquemas o estructuras gráficas, por medio de los cuadros. Así como la visión espacial, interpretación de figuras y símbolos propios de las matemáticas. Trabajando de esta forma el lenguaje matemático, para ir reduciendo el carácter abstracto.	STEM1, STEM2, STEM3, STEM4
Competencia digital (CD)	La competencia digital implica el uso seguro, saludable, sostenible, crítico y responsable de las tecnologías digitales para el aprendizaje, para el trabajo y para la participación en la sociedad, así como la interacción con estas. Incluye la alfabetización en información y datos, la comunicación y la colaboración, la educación mediática, la creación de contenidos digitales (incluida la programación), la seguridad (incluido el bienestar digital y las competencias relacionadas con la ciberseguridad), asuntos relacionados con la ciudadanía digital, la privacidad, la propiedad intelectual, la	Se trabaja esta competencia como elemento transversal, dado que una de las actividades propuestas para el ABP, considera puntualmente la búsqueda de información en internet, promoviendo el uso responsable, consulta de fuentes fiables y consulta de información de calidad. La información obtenida se comparte con los compañeros producto del AC. También se hace uso de presentaciones digitales con la información a impartir durante la clase. Con objeto de dar ejemplo sobre el uso responsable y funcional de la tecnología.	CD1, CD2, CD3, CD4

Educación Secundaria Obligatoria			
Competencias Clave	**Definición acorde a (RD 217/2022)**	**Sistema de trabajo en la propuesta**	**Descriptores Operativos trabajados**
Competencia digital (CD)	resolución de problemas y el pensamiento computacional y crítico.		CD1, CD2, CD3, CD4
Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)	La competencia personal, social y de aprender a aprender implica la capacidad de reflexionar sobre uno mismo para autoconocerse, aceptarse y promover un crecimiento personal constante; gestionar el tiempo y la información eficazmente; colaborar con otros de forma constructiva; mantener la resiliencia; y gestionar el aprendizaje a lo largo de la vida. Incluye también la capacidad de hacer frente a la incertidumbre y a la complejidad; adaptarse a los cambios; aprender a gestionar los procesos metacognitivos; identificar conductas contrarias a la convivencia y desarrollar estrategias para abordarlas; contribuir al bienestar físico, mental y emocional propio y de las demás personas, desarrollando habilidades para cuidarse a sí mismo y a quienes lo rodean a través de la corresponsabilidad; ser capaz de llevar una vida orientada al futuro; así como expresar empatía y abordar los conflictos en un contexto integrador y de apoyo.	Se trabaja esta competencia por medio de las metodologías activas propuestas en el trabajo. Las actividades realizadas a partir del AC favorecen la autonomía y gestión del tiempo por parte del alumno. También se trabaja el aprendizaje por medio del apoyo entre estudiantes, fomentando relaciones cordiales, la empatía, el respeto, la tolerancia y la integración. Enseñando al alumno a trabajar de forma autónoma, tener un papel constructivo dentro de un grupo y aprender de los demás al mismo tiempo. La distribución del trabajo en roles, permite aceptar responsabilidades y tareas. Las agrupaciones para el trabajo ayudan al alumno a expresarse y regular su estado emocional. Las metodologías innovadoras que se presentan pretender lograr la motivación del alumnado, el ABP propone retos que intentan captar su interés y pretenden conectar al alumno con la materia. A su vez, tanto el ABP como el AC fomentan la autoevaluación y la coevaluación. Dado que el ABP propone una serie de objetivos, supone un reto para el alumno, activa los aprendizajes significativos y favorece la reflexión y construcción del conocimiento.	CPSAA1, CPSAA2, CPSAA3, CPSAA4, CPSAA5
Competencia ciudadana (CC)	La competencia ciudadana contribuye a que alumnos y alumnas puedan ejercer una ciudadanía responsable y participar plenamente en la vida social y cívica, basándose en la comprensión de los conceptos y las estructuras sociales, económicas, jurídicas y políticas, así como en el conocimiento de los acontecimientos mundiales y el compromiso activo con la sostenibilidad y el logro de una ciudadanía mundial. Incluye la alfabetización cívica, la adopción consciente de los valores propios de una cultura democrática fundada en el respeto a los derechos humanos, la reflexión crítica acerca de los grandes problemas éticos de nuestro tiempo y el desarrollo de un estilo de vida sostenible acorde con los Objetivos de Desarrollo Sostenible planteados en la Agenda 2030.	Se trabaja esta competencia a través del AC que favorece las relaciones sociales entre el alumnado y entre docente y alumnos; partiendo de estos aspectos y valores que el alumno adquiere, luego pueden ser extrapoladas estas dinámicas a la vida real. También se fomenta una aptitud de integración, dado que se realizan agrupaciones de carácter heterogéneo. A su vez, se trabajan desde las actividades de AC la actitud democrática y el respeto, lo que luego el alumno puede extrapolar a otras áreas de la vida real. También se ha conectado el proyecto con uno de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) planteados en la Agenda 2030. De igual forma, se ha centrado la propuesta en aspectos culturales e históricos, proponiendo metodologías activas bajo la tendencia STEAM. El Paseo Matemático por el Museo del Prado permite afianzar comportamientos y poner en práctica los valores requeridos socialmente en eventos culturales e históricos, en contextos diferentes al aula, promoviendo el respeto de las normas en otros entornos.	CC1, CC2, CC3
Competencia emprendedora (CE)	La competencia emprendedora implica desarrollar un enfoque vital dirigido a actuar sobre oportunidades e ideas, utilizando los conocimientos específicos necesarios para	Se promueve esta competencia por medio de la metodología de tipo ABP, lo que fomenta la investigación y el desarrollo de ideas. También se plantean actividades que requieren de la	CE1, CE3

Educación Secundaria Obligatoria			
Competencias Clave	**Definición acorde a (RD 217/2022)**	**Sistema de trabajo en la propuesta**	**Descriptores Operativos trabajados**
Competencia emprendedora (CE)	generar resultados de valor para otras personas. Aporta estrategias que permiten adaptar la mirada para detectar necesidades y oportunidades; entrenar el pensamiento para analizar y evaluar el entorno, y crear y replantear ideas utilizando la imaginación, la creatividad, el pensamiento estratégico y la reflexión ética, crítica y constructiva dentro de los procesos creativos y de innovación; y despertar la disposición a aprender, a arriesgar y a afrontar la incertidumbre. Asimismo, implica tomar decisiones basadas en la información y el conocimiento y colaborar de manera ágil con otras personas, con motivación, empatía y habilidades de comunicación y de negociación, para llevar las ideas planteadas a la acción mediante la planificación y gestión de proyectos sostenibles de valor social, cultural y económico-financiero.	creatividad e imaginación por parte de los estudiantes, dado que se relaciona la Geometría con el Arte, bajo la tendencia STEAM. El ABP y el AC favorecen el trabajo en equipo, así como enfrentar diversidad de retos. Las actividades planteadas también fomentan la capacidad de decisión del alumno y entrenar el pensamiento por medio de actividades que relacionan la geometría con otros contextos. También está muy presente porque uno de los objetivos de la propuesta se centra en la creatividad, la imaginación y promover ideas. Asimismo, por medio de los procesos de evaluación y el producto final que se debe obtener con el ABP se encuentran diversas oportunidades de aprendizaje, partiendo de un proyecto innovador con carácter cultural bajo el enfoque STEAM. El proyecto de innovación propuesto pretende ofrecer una experiencia de aprendizaje diferente al alumno.	CE1, CE3
Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC)	La competencia en conciencia y expresión culturales supone comprender y respetar el modo en que las ideas, las opiniones, los sentimientos y las emociones se expresan y se comunican de forma creativa en distintas culturas y por medio de una amplia gama de manifestaciones artísticas y culturales. Implica también un compromiso con la comprensión, el desarrollo y la expresión de las ideas propias y del sentido del lugar que se ocupa o del papel que se desempeña en la sociedad. Asimismo, requiere la comprensión de la propia identidad en evolución y del patrimonio cultural en un mundo caracterizado por la diversidad, así como la toma de conciencia de que el arte y otras manifestaciones culturales pueden suponer una manera de mirar el mundo y de darle forma.	Se trata de una competencia ampliamente presente en la propuesta de intervención. Esta competencia se trabaja por medio del AC, dado que promueven valores como el respeto hacia la diversidad de opiniones, sentimientos y emociones. De igual forma también está muy presente el aspecto cultural que se fomenta en el proyecto y las diferentes manifestaciones artísticas, que son el hilo conductor. También se consideran el respeto y el valor hacia el patrimonio cultural y la evolución del mismo, así como la toma de conciencia del arte y la diversidad cultural, como enfoque para comprender el mundo y el entorno. Estos aspectos presentan un fuerte vínculo con esta propuesta, la que relaciona las Matemáticas con el Arte. Además, considera el enfoque STEAM, acercar las matemáticas al entorno empleando el arte como hilo conductor y para ello plantea el recurso del paseo matemático como acercamiento al patrimonio cultural. La propuesta pretende transmitir la idea de disfrutar, interpretar, reconocer y analizar las representaciones artísticas y culturales del patrimonio. Igualmente hace hincapié en reconocer los elementos técnicos que los componen. Se trata de un aspecto que se trabaja especialmente debido a que las actividades centran su atención en los elementos geométricos y otros conceptos matemáticas que son identificados por medio de cuadros del Museo del Prado. Permitiendo así comprender la Geometría, además de las diversas técnicas de trabajo artísticas a lo largo de la historia. A su vez, la creatividad del alumno se pone en escena, junto a su perspectiva para interpretar las obras de arte.	CCEC1, CCEC2, CCEC3, CCEC4

Educación Secundaria Obligatoria			
Competencias Clave	**Definición acorde a (RD 217/2022)**	**Sistema de trabajo en la propuesta**	**Descriptores Operativos trabajados**
Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC)		También se trabaja la creatividad en diversos soportes, por medio de distintas láminas en las actividades del aula; in situ durante el paseo matemático. Fomentando reconocer las diversas técnicas visuales que se encuentran en las obras de arte.	CCEC1, CCEC2, CCEC3, CCEC4

Fuente: elaboración propia a partir del RD 217/2022 y Decreto 65/2022, relación de trabajo dentro de la propuesta de intervención.

Anexo F. Competencias específicas, criterios de Evaluación y Descriptores Operativos

Tabla 18. *Relación de Competencias específicas, criterios de Evaluación y Descriptores Operativos acorde a la legislación autonómica.*

Primero de Educación Secundaria Obligatoria		
Competencia Específica (Decreto 65/2022)	**Criterios de Evaluación (Decreto 65/2022)**	**Descriptores Operativos (RD 217/2022)**
1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para explorar distintas maneras de proceder y obtener soluciones posibles.	1.1. Interpretar enunciados de problemas matemáticos sencillos organizando los datos dados, estableciendo las relaciones básicas y directas entre ellos y analizando las preguntas formuladas. 1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas sencillos y relacionados con la vida cotidiana. 1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema sencillo usando las estrategias adecuadas.	CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE1, CE3, CCEC4.
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista lógico y su repercusión global.	2.1. Conocer y aplicar las herramientas básicas para la comprobación de la corrección matemática de las soluciones obtenidas en la resolución de un problema.	STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE1, CE3
3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.	3.1. Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.	STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD4, CE1, CE3
5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	5.1. Comenzar a realizar conexiones sencillas entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.	STEM1, STEM3, CD2, CD3, CD4, CC1, CCEC1, CCEC2
6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.		STEM1, STEM2, CD3, CE3, CE1, CCEC1, CCEC2
7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.	7.1. Elaborar representaciones matemáticas sencillas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.	STEM3, CD1, CD2, CE3, CCEC2, CCEC4
8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	8.1. Comunicar la información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.	CCL1, CCL2, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC2, CCEC3

Primero de Educación Secundaria Obligatoria		
Competencia Específica (Decreto 65/2022)	**Criterios de Evaluación (Decreto 65/2022)**	**Descriptores Operativos (RD 217/2022)**
9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.	CPSAA1, CPSAA2, CPSAA4, CPSAA5, CE3
	9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	
10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.	10.1. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	CCL5, CP3, STEM3, CPSAA2, CPSAA3, CC1, CC2, CC3

Fuente: elaboración propia a partir del Decreto 65/2022 y del RD 217/2022.

Anexo G. Saberes Básicos y sentidos, bloques y contenidos

Tabla 19. *Saberes Básicos y sentidos, bloques y contenidos.*

Sentidos Matemáticos (RD 217/2022)	Bloque de Contenidos (Decreto 65/2022)	Contenidos trabajados en la propuesta (Decreto 65/2022)
A. Sentido Numérico	A. Números y Operaciones	A. Números y operaciones. 1. Conteo. - Estrategias sencillas de recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana. 2. Cantidad. - Uso de los números enteros, fraccionarios y decimales en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana. 3. Operaciones. - Uso de las propiedades de las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) para realizar cálculos de manera eficiente con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales, adaptando las estrategias a cada situación. 5. Proporcionalidad. - Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas. - Situaciones de proporcionalidad directa e inversa en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de diversos problemas (escalas)
B. Sentido de la Medida	B. Medida y Geometría	2. Medición. – Figuras planas: interpretación y aplicación en contextos geométricos sencillos. - Triángulos. Clasificación y propiedades. - Cuadriláteros. Clasificación y propiedades. - Diagonales, apotema y simetrías en polígonos regulares. - Circunferencia, círculo, arco y sector circular. - Representación de objetos geométricos con propiedades fijadas. 3. Estimación y relaciones. - Formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones. Aplicación a objetos cotidianos.
C. Sentido Espacial	C. Geometría en el Plano y el espacio	1. Figuras geométricas de dos dimensiones. – Figuras geométricas planas: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características. – Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas.
D. Sentido Algebraico	D. Álgebra	2. Modelo matemático. – Modelización de situaciones sencillas de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico. Comprensión de la importancia del lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.
F. Sentido socioafectivo	F. Actitudes y Aprendizaje	1. Creencias, actitudes y emociones. – Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas, identificando los errores cometidos como uno de los motores para su aprendizaje. Se fomentará entre el alumnado el desarrollo de estrategias que le permitan identificar sus puntos débiles y aprender de los errores. 2. Trabajo en equipo y toma de decisiones. – Selección de técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo.

Fuente: elaboración propia, basado en el Decreto 65/2022.

Anexo H. Contenidos Transversales.

Tabla 20. *Desarrollo de los contenidos transversales trabajados según el Decreto 65/2022.*

Contenidos Transversales (Artículo 12, Decreto 65/2022)	Como se trabajan
Promover la autonomía y la reflexión	Se trabaja a partir de la tipología de actividades propuestas. Por ejemplo, por medio de la correlación de disciplinas, planteamiento de frases que inviten a la reflexión. El AC, ABP y las técnicas de trabajo fomentan la autonomía del estudiante. La metodología ABP y el enfoque STEAM invitan a la reflexión, al razonamiento y al desarrollo del criterio.
El desarrollo de la comprensión lectora, la expresión oral y escrita	Se trabaja por medio de enunciados y actividades que solicitan búsqueda de información e investigación. Las activades grupales fomentan la expresión oral, para responder a los enunciados y actividades se trabaja la expresión escrita.
Comunicación audiovisual	Se trabaja por medio de presentaciones digitales y actividades audiovisuales, como el visionado de videos que plantea el docente.
La competencia digital	Se solicita al alumnado el uso de las TIC para la búsqueda de información y documentación de forma puntual.
El emprendimiento social	Se trabaja por medio del AC y el ABP, donde el alumno debe adoptar roles, tomar decisiones y trabajar en grupo los distintos aspectos trabajados.
El fomento del espíritu crítico	Se trabaja por medio de la temática escogida para el proyecto, que relaciona la Geometría con el Arte, introduciendo aspectos históricos y culturales en las actividades. La metodología de tipo ABP fomenta el razonamiento, la investigación el criterio y el desarrollo del pensamiento lógico.
La educación emocional y en valores	Se fomenta producto del AC, se trabaja en todas las actividades diseñadas.
La igualdad de género	Se fomenta producto del AC, se trabaja en todas las actividades diseñadas.
La creatividad	Se trata de uno de los focos principales del proyecto, el alumno debe ser creativo, incentivar la imaginación y estudiar los contenidos matemáticos bajo otra perspectiva. El enfoque STEAM y el hilo conductor del trabajo desarrollan la creatividad.
La educación para la sostenibilidad incluido el respeto mutuo y la cooperación entre iguales	Se fomenta producto del AC, se trabaja en todas las actividades diseñadas.

Fuente: elaboración propia a partir del Artículo 12 del Decreto 65/2022.

Anexo I. Temporalización y cronograma de actividades de la Unidad

Tabla 21. *Relación entre las actividades de cada sesión, los objetivos didácticos y los pasos del ABP según la figura 1 de Aula Planeta.*

Objetivos Didácticos (OD)	**Actividad (Act)**	**Nombre de la Actividad**	**Sesión (S)**	**Nombre de la Sesión (S)**	**Paso del Proyecto acorde a infografía Aula Planeta**	**Descripción de las distintas etapas**
OD8 – OD11	Act0	¿Mates y Arte?	S1	Relacionando Mates y Artes	Paso 1/ Paso 2/ Paso 3/ Paso 4	Se presenta el proyecto y se formula la propuesta, describiendo su estructura y temporalización. Se organizan los equipos y se presenta el reto final, que considera en confeccionar un portfolio con todos los trabajos del grupo. Los que serán seleccionados para exponer en el pasillo del centro. Partiendo del visionado de un video, se realiza una lluvia de ideas para activar y evaluar los conocimientos previos del alumno. Lo que se complementa con la realización de un cuestionario para detectar los conocimientos previos.
OD1 –OD8 - OD10 – OD11 – OD12 – OD13	Act1	¿Elementos del plano o del cuadro?	S1 / S2		Paso 5	Se estudian los contenidos del currículo, por medio de cuadros. Se proponen diversos tipos de actividades para desarrollar la creatividad por medio de la combinación de contenidos, como establece el enfoque STEAM. Por un lado, se repasan los contenidos; por otro lado, se van introduciendo los nuevos contenidos. Se solicita al alumno realizar una investigación documental como tarea extraescolar, con objeto de aumentar sus conocimientos. También se solicita que se documente para preparar información para la siguiente clase. Durante las sesiones se van haciendo recapitulaciones y balances sobre el avance.
OD2 – OD8 - OD10 – OD11 – OD12 – OD13	Act2	Las figuras planas del cuadro	S1	Relacionando Mates y Artes	Paso 5	
			S2	Estudiando geometría con otros ojos		
			S3	El mundo de las figuras planas		
OD3 –OD8 - OD10 – OD11 – OD12 – OD13	Act3	¿Hay ángulos en el Prado?	S4	Midiendo el arte	Paso 5	
OD7 –OD8 – OD12	Act4	Investigamos	S4		Paso 5	
OD4 – OD8 - OD10 – OD11 – OD12 - OD13	Act5	¿Simetrías en geometría o en los cuadros?	S5		Paso 5	

Objetivos Didácticos (OD)	Actividad (Act)	Nombre de la Actividad	Sesión (S)	Nombre de la Sesión (S)	Paso del Proyecto acorde a infografía Aula Planeta	Descripción de las distintas etapas
OD5 – OD8 - OD10 – OD11 – OD12 - OD13	Act6	Calculando escalas con los cuadros		La geometría secreta de los pintores	Paso 5	
OD6 – OD8 - OD10 – OD11 – OD12 - OD13	Act7	La razón áurea			Paso 5	
OD1 – OD2 – OD3 – OD4 – OD5 – OD6 – OD8 – OD10 – OD11 – OD12 - OD13	Act8	Practicamos	S6	Practicando	Paso 5	Aplicamos todos los conceptos estudiados.
OD8 – OD11 – OD12 – OD13 - OD14	Act9	Mis ideas y mi mente	S7	Reflexionando	Paso 6	Se elabora un mapa mental que sintetice los diversos contenidos matemáticos, por medio de la técnica de El mapa conceptual a cuatro bandas. El trabajo por medio del AC fomenta la comunicación, el compartir ideas y su puesta en común, así como el apoyo entre miembros del equipo.
OD8 – OD11 – OD12 – OD13	Act10	Creando mi propia obra de arte	S7		Paso 7	Ordenar y seleccionar la información relevante del proyecto, para presentar un portfolio completo y ordenado.
OD8– OD11 – OD13	Act11	Hablando como un artista	S7		Paso 8	Recurriendo al uso del lenguaje matemático, los alumnos exponen a los demás grupos sus resultados, conclusiones y experiencias. Aportando la información con la documentación investigada y actividades resueltas.
OD8 – OD11 – OD13	Act12	¿Ahora sí Mates y Arte?	S7		Paso 8 / Paso 9	Debate grupal en clase.
OD8 – OD9 – OD10 – OD11	Act13	Paseo por mi museo	S8	Paseo Matemático y punto y final	Paso 9 / Paso 10	Culmina el ABP con el paseo matemático, que induce a la reflexión, así como a la puesta en práctica de lo aprendido.
OD8 - OD15	Act14	¿Qué hemos aprendido?	S8		Paso 10	Espacio para realizar los distintos tipos de evaluaciones diseñadas y de este modo

Objetivos Didácticos (OD)	**Actividad (Act)**	**Nombre de la Actividad**	**Sesión (S)**	**Nombre de la Sesión (S)**	**Paso del Proyecto acorde a infografía Aula Planeta**	**Descripción de las distintas etapas**
						cumplimentar los instrumentos de evaluación respectivos.

Fuente: elaboración propia a partir del Aprendizaje Basado en Proyectos de la figura 1 del Aula Planeta.

Anexo J. Cuadernillo de Actividades

Mi pregunta es:

¿Qué tienen que ver las Matemáticas y el Arte?

Actividad 0. ¿Mates y Arte?

1. **Nuestros objetivos serán:**

- Aprender juntos Matemáticas y Geometría a través del Arte.
- Realizar las distintas actividades planteadas para el proyecto por medio de cuadernillos de actividades.
- Trabajar en grupo con mis compañeros.
- Participar de forma activa y respetuosa con mis compañeros.
- Realizar las distintas hojas de actividades.
- Entregar un portfolio junto a mi equipo.
- Reflexionar sobre las matemáticas y su conexión con otras áreas como el arte.
- Visitar el Museo del Prado para disfrutar de lo aprendido.

2. **Partes del portfolio. ¿Qué debemos elaborar y entregar?**

Hay que diseñar un portfolio con las actividades que se van a realizar durante el Proyecto, evaluando especialmente el contenido y la presentación según la rúbrica.

Debe reunir todas las actividades realizadas en grupo.

Cada grupo entrega un portfolio con el cuadernillo resuelto y las láminas trabajadas.

Los elementos que debe tener el portfolio son:

Materiales:
- Carpeta grande y resistente de anillas.
- Separadores para cada actividad.
- Funda de plástico para las láminas trabajadas.

Apartados:
- Portada personalizada que incluya: Nombre del grupo, nombre de los integrantes, curso, fotografía o imagen (opcional), nombre de la asignatura y título del proyecto.
- La portada se puede decorar con algún signo que identifique el proyecto (foto del Museo del Prado, alguna figura que relacione lo estudiado de un cuadro trabajado, alguna imagen del proyecto que puede ser de alguna de las actividades).
- Índice.
- Resolución completa de todos los cuadernillos de actividades.

Orden para presentar la información:

1º. Portada
2º. Índice
3º. Cuadernillos de Actividades entregados por el docente de cada integrante.
4º. Ejercicios resueltos del cuadernillo en orden, incluyendo todas las hojas con las respuestas.
5º. Funda o fundas plásticas con los cuadros trabajados para cada actividad en orden.

6º. Realizar este procedimiento para todas las actividades de forma ordenada. Por ejemplo, el orden puede ser separar cada actividad y detrás incluir las láminas correspondientes.

3. ¿Qué materiales voy a encontrar y que es lo que hay que hacer?

Cada estudiante dispone de un cuadernillo como apoyo, pero los ejercicios al completo deben quedar resueltos por el equipo en su conjunto. Por eso, se entrega una única lámina del cuadro en distintos formatos (A3, A4, A5) en blanco y negro, además de una lámina en formato A5 del cuadro a color. Se entrega una copia de cada lámina por equipo.
Me van a entregar un cuadernillo con todo lo que debo saber y los ejercicios para resolver. En el cuadernillo están todos los formatos, pasos, formularios y cuestionarios que debo ir realizando en mi proyecto. Por lo general cada cuadernillo consta de: *1. Parte teórica sobre los contenidos.* *2. Comentarios, textos y curiosidades sobre los temas vinculados con el arte y el contexto histórico que se trata en cada sesión. Varían según la actividad.* *3. Ejercicios que se deben resolver junto a un inventario de los cuadros que hay que trabajar en cada ejercicio.* *Algunas actividades no disponen de todas estas partes, por ello, dependiendo de la actividad se indican pautas o información que necesitas saber para realizar la actividad y seguir el proyecto de forma efectiva.*
También voy a encontrar la parte de los contenidos para estudiar y conocer al final de este proyecto. Me servirán para estudiar y también de apoyo y guía para la realización de actividades.
Me van a plantear una serie de ejercicios matemáticos, ¡Los de toda la vida!
En lugar de leer enunciados sobre un libro, voy a usar un cuadernillo.
Puedo usar mi cuaderno de matemáticas como apoyo para ideas y ejercicios, pero me van a entregar láminas de cuadros 1 por cada equipo para que pueda dar mis soluciones.
Observaré bien las láminas, sobre la lámina en blanco y negro plasmaré mis soluciones matemáticas. Sobre la lámina en color, puedo ir comparando y verificando si algún elemento no queda claro, además me servirá para conocer perfectamente la obra de arte.
Parece raro, pero no lo es, porque los enunciados de los ejercicios me van a decir que necesito realizar en cada caso.
Las matemáticas, al igual que la creatividad y la imaginación, pueden tener infinitas soluciones. Por eso, según mi perspectiva y la de mi equipo voy a adoptar una estrategia para resolver cada caso.
Las respuestas matemáticas son muy importantes, pero soy yo y mi equipo quién decide como abordar cada ejercicio.
Recuerda que debes aplicar tu criterio matemático, pero que las soluciones pueden ser muy distintas. Aporta tu creatividad para resolver las actividades y poder deducir resultados geométricamente correctos.
Puedes completar las láminas incorporando todas las soluciones que se te ocurran. Lo mínimo que debes hacer es lo que solicita el enunciado de cada ejercicio, pero si te atreves intenta dar un paso más y aportar cuantas más soluciones mejor.
Algunas actividades puedes contestarlas directamente sobre el cuadernillo, también puedes utilizar hojas adicionales para completar las respuestas del trabajo. Las actividades se realizan en equipo y se debe elegir que respuestas se entregan.
Es muy recomendable ser ordenado durante el trabajo y recurrir al uso de distintos colores para dejar bien indicadas las distintas soluciones.

4. En función del equipo asignado rellena la siguiente ficha:

Fecha:
Nombre del equipo:
Integrantes:
La tarea consiste en:
El tiempo para realizar la tarea es:
Lo que se espera de nosotros en este proyecto es:
Las responsabilidades individuales son: Coordinador: _________________________________ Moderador: __________________________________ Relator: ______________________________________ Verificador: ___________________________________
Los materiales que se van a emplear son:
El Plan de trabajo diseñado es (primero, después, más tarde, etc):
¿Estamos preparados para empezar? Let´s go!

5. **Reflexiona y responde que podrían tener en común las Matemáticas y el Arte. Esta será tu primera reflexión como equipo, anota las principales ideas.**

"¿Qué tienen que ver las Matemáticas y el Arte?"

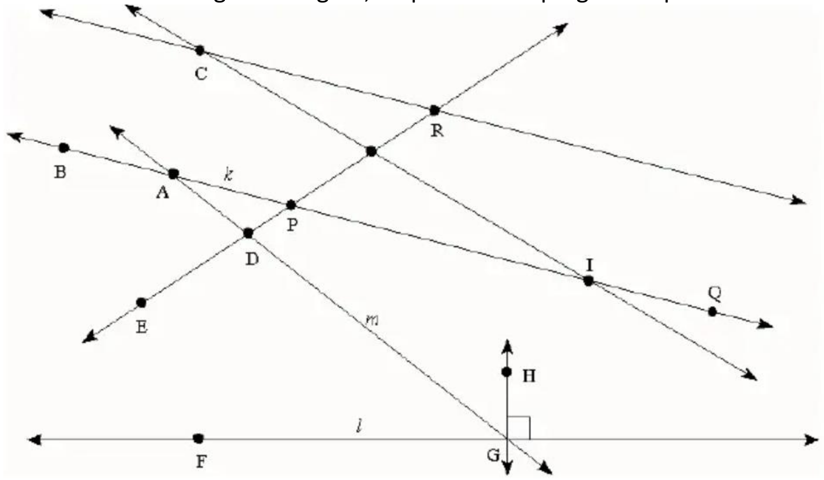
Puntuación:

Nombre: ______________________________

Fecha: ________________________________

CUESTIONARIO DE GEOMETRÍA *(Resolver y entregar de forma individual)*

Vocabulario de geometría. Dada la siguiente figura, responde a las preguntas que se indican:



1. $\overleftrightarrow{FG}$ es una…
a) recta
b) semirrecta
c) segmento.
d) línea.

2. $\overline{PQ}$ es una…
a) recta
b) ángulo
c) segmento.
d) semirrecta.

3. ¿Cómo se llama el punto de corte de dos rectas?
a) Punto de corte
b) intersección
c) bisección
d) segmento

4. ¿Cómo son las rectas k y l?
a) cortantes
b) secantes
c) bisecantes
d) paralelas

5. ¿Qué es $\angle ADE$?
a) Un vértice
b) Un ángulo
c) Una recta
d) Una cruz

6. ¿CUál de los siguientes ángulos es agudo?
a) $\angle ADE$
b) $\angle ADP$
c) $\angle \mathrm{FGH}$

7. ¿Qué tipo de ángulo es $\angle \mathrm{CIQ}$?
a) agudo
b) obtuso
c) llano

8. ¿Cuál es el ángulo suplementario de $\angle ADE$
a) $\angle \mathrm{FGH}$
b) $\angle \mathrm{EDG}$
c) $\angle ADP$

9. ¿Cuál es el ángulo complementario de $\angle DGH$
a) $\angle ADP$
b) $\angle \mathrm{FGD}$
c) $\angle \mathrm{EDG}$

10. ¿Cuál es el ángulo interior alterno de $\angle ADE$?
a) $\angle ADP$
b) $\angle \mathrm{FGH}$
c) $\angle \mathrm{DPG}$

11. Completa las siguientes frases:
a) Un cuadrado tiene ___________ lados y _____________ ángulos.
b) Un triángulo escaleno tiene los lados _______________________.
c) Los pentágonos tienen ________________________ lados y ángulos.
d) Un trapecio tiene un par de ______________ paralelas y las otras lados __________________.

12. Escribe los nombres de las siguientes figuras:
a) Un triángulo con dos lados iguales y el otro distinto.
b) Un polígono con ocho lados.
c) Un cuadrilátero con dos partes de lados paralelos.
d) Un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan una a otra en su punto medio.

Fuente: Autoevaluación de Geometría. Rafael Merelo, Montserrat Infantes. (https://es.scribd.com/document/94986587/autoevaluacion-de-geometria-1%C2%BA-ESO).

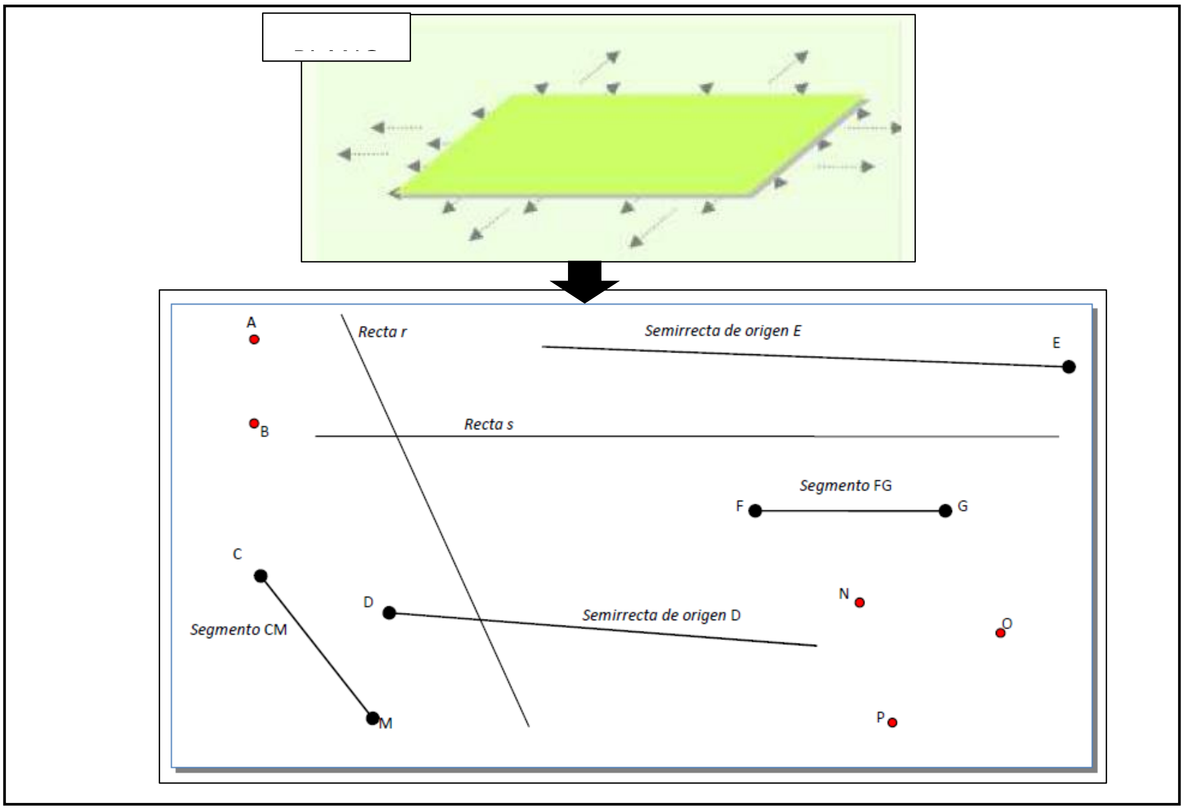
Actividad 1. ¿Elementos del plano o del cuadro?

¿Qué debemos saber?

Estudio de las figuras planas.

A) Elementos del Plano: Puntos, rectas, semirrectas, segmentos

Observa los distintos elementos que podemos encontrar en el plano:



Fuente: Marea Verde.

Elemento del Plano	Definición Matemática	Representación	Nombre
Punto	El elemento más sencillo del plano es el punto	Un punto o un pequeño círculo	Letras mayúsculas A, B, C, …
Recta	La recta es un objeto elemental del plano. Constituye una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección.	Una recta (línea).	Las rectas se nombran con letras minúsculas r, s, t, …
Semirrecta	Es cada una de las partes en las que queda dividida una recta por un punto que pertenece a ella. El punto se denomina origen.	Una recta (línea) y un punto.	Las semirrectas se nombran con letras minúsculas o referenciando su origen: semirrecta de origen O, semirrecta p, …
Segmento	Es la porción de recta comprendida entre dos puntos de la misma. Los puntos se llaman extremos.	Una recta (línea) y dos puntos.	Los segmentos se nombran mediante sus extremos, por ejemplo: segmento AB o segmento de extremos A, B.

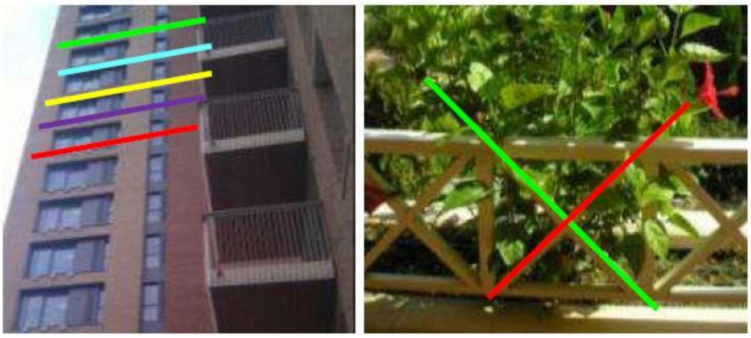
Fuente: elaboración propia a partir de Marea Verde.

B) Rectas paralelas y secantes

***Rectas paralelas**:* No tienen ningún punto común	
***Rectas secantes**:* Tienen un único punto común	
***Rectas coincidentes**:* Todos sus puntos son comunes	

Por un punto *P* exterior a una recta *r* solo puede trazarse una recta paralela a ella e infinitas secantes.

- A nuestro alrededor encontramos objetos cotidianos en los que se aprecian paralelas y secantes:



Fuente: elaboración propia a partir de Marea Verde.

¿Sabías que?

A lo largo de la historia, los artistas han recurrido al uso de la Geometría para poder realizar sus creaciones y obras de arte. Todas las obras de arte y entre ellas los cuadros están repletos de elementos en el plano, que sirvieron para poder construirlas.

¿Sabías qué?

Reflexiones sobre Mates y Arte

Las Matemáticas y el Arte están relacionadas desde tiempos históricos, como podemos comprobar en infinidad de obras de arte.

Esto permite que podamos relacionar el vínculo entre la ciencia y las humanidades, las Matemáticas y el Arte.

Las Matemáticas y el Arte están muy relacionadas con la creación y la creatividad. De igual modo que un artista crea una composición, un matemático resuelve un problema.

El mundo del arte está inundado de elementos geométricos, relaciones con el paralelismo, la simetría, la semejanza, etc. ¿No te suenan éstos términos a conceptos que hemos estudiado en matemáticas?

La creatividad, la imaginación, la emoción, son términos que siempre vinculamos al mundo del arte; pero que también se relacionan con el mundo de las matemáticas.

Magistrali (2019) define las matemáticas como el lenguaje del arte, debido a que constituyen los elementos básicos de las obras de arte.

Existen artistas que han fundamentado sus obras haciendo uso directo de los elementos geométricos, como el puntillismo. Otros artistas como Kandinsky y Jasper Johns se inspiran en elementos geométricos que son protagonistas en sus composiciones. En este tipo de representaciones, la expresión matemática es evidente dado que en la composición se observan las figuras directamente. No obstante, la correlación entre el arte y las matemáticas, no ha sido tan evidente en otras épocas o movimientos pictóricos. Si bien las matemáticas han sido el soporte de las obras de arte y componen sus estructuras, su impacto en la elaboración de las pinturas no siempre se observa directamente.

7. Cabeza (1913) - Cubismo sintético

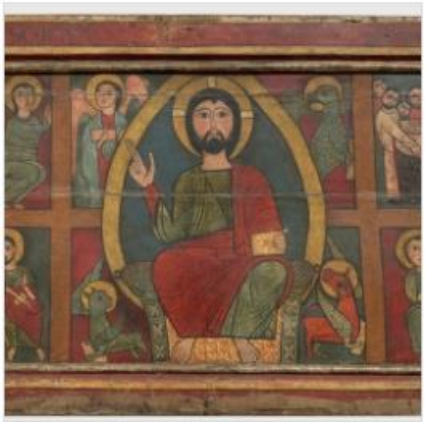
10. El artista y su modelo (1928) - Neoclasicismo y surrealismo

Figura 11. Círculos dentro de círculo. Kandinsky. 1911.

Figura 12. Merry Structure. Wassily Kandinsky. 1926.

Fuente: elaboración propia a partir de https://www.wikiart.org/es, https://historia-arte.com/ y https://galleryintell.com/artex/deepened-impulse-vertiefte-regung-by-wassily-kandinsky/ .

Según Peralta (1998), los diversos sistemas de representación empleados a lo largo de los tiempos, simbolizan la relación entre las Matemáticas y el Arte. Se produce una evolución y desarrollo conjunto de ambas disciplinas, donde aspectos como el movimiento, la perspectiva, la profundidad y el espacio se han ido perfeccionado. Las escenas originalmente eran estáticas, como evidencian los papiros egipcios. Posteriormente, empezaron a perfeccionarse y reflejar el movimiento.

	
Frontal con escenas de infancia de Jesús Temple sobre tabla. Primer tercio del siglo XIII ANÓNIMO	Frontal de Guils Temple sobre tabla. Finales del siglo XIII ANÓNIMO
Fuente: Museo del Prado.	
	
El Descendimiento *Óleo sobre tabla. Antes de 1443* *WEYDEN, ROGIER VAN DER*	*Tríptico del Jardín de las delicias* *Grisalla, Óleo sobre tabla de madera de roble. 1490 - 1500* *EL BOSCO*
Fuente: Museo del Prado.	

La geometría secreta de los pintores

Como puedes ver, a veces las composiciones son muy evidentes, pero otras son de mayor complejidad y debemos buscar agrupaciones de figuras o elementos en los propios cuadros para poder llegar a comprender cuales fueron las bases matemáticas que utilizó el artista para su composición. A continuación, se encuentran algunos ejemplos:

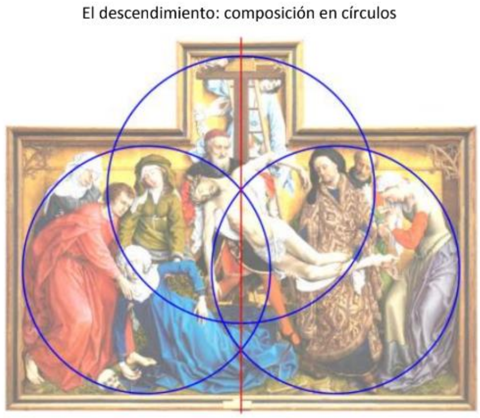
 *La Crucifixión* *Óleo sobre lienzo. 1597 - 1600* EL GRECO	La Crucifixión: cuadrado 
 *Venus y Adonis* *Óleo sobre lienzo. Hacia 1580* VERONÉS, PAOLO	Venus y Adonis: pentágono regular 

 *La Inmaculada Concepción de los Venerables* *Óleo sobre lienzo. 1660 - 1665* MURILLO, BARTOLOMÉ ESTEBAN	La Inmaculada Concepción de los Venerables: triángulo 
 *La Resurrección de Cristo* *Óleo sobre lienzo. 1597 - 1600* EL GRECO	La Crucifixión: rombo 

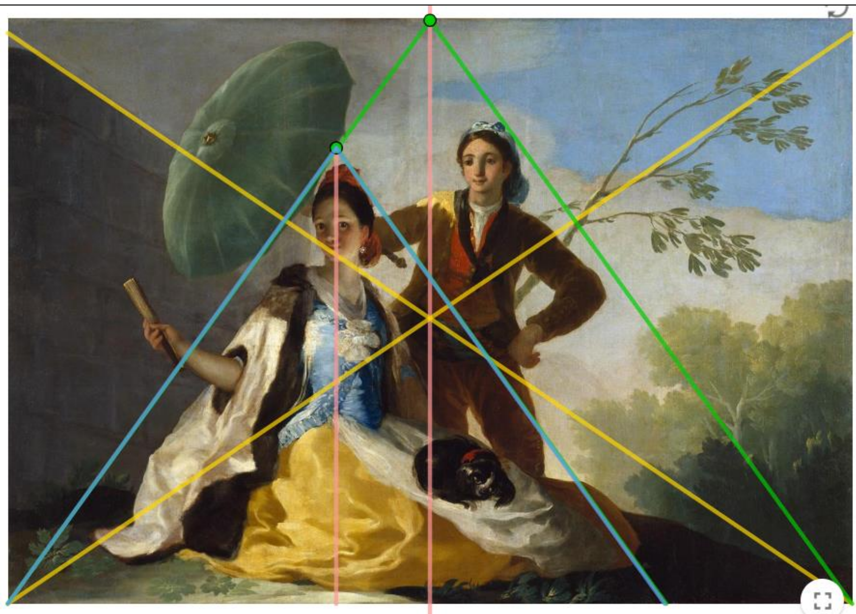
El Descendimiento

Óleo sobre tabla. Siglo XVI

COXCIE, MICHIEL (OBRA COPIADA DE: WEYDEN, ROGIER VAN DER)



Fuente: A la izquierda imágenes del Museo del Prado, a la derecha imágenes realizadas digitalmente por el IES Blas de Otero.



Fuente: Geogebra.

¿Qué te sugiere la frase "Todo lo que puedes imaginar es real" de Pablo Picasso?

Tras una primera reflexión individual, por en común tus ideas con tus compañeros y expresa las ideas clave y conclusiones del grupo.

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA ACTIVIDAD 1:

Estudiamos los elementos del plano a partir de cuadros expuestos en el Museo del Prado.

EJERCICIO 1.1. A continuación, se encuentran los siguientes cuadros expuestos en el Museo del Prado, donde trabajaremos los distintos ejercicios y problemas matemáticos sobre ellos.

	
La Anunciación Témpera sobre tabla. Hacia 1426 ANGELICO, FRA	La Virgen de los Reyes Católicos Técnica mixta sobre tabla. 1491 - 1493 MAESTRO DE LA VIRGEN DE LOS REYES CATÓLICOS

Fuente: Museo del Prado.

1. Dispones de esta lámina en formato A3 en blanco y negro, sobre la misma identifica al menos 3 rectas y nómbralas.
2. Dibuja 3 segmentos que tengan sus extremos fuera de las rectas dibujadas en el apartado anterior.

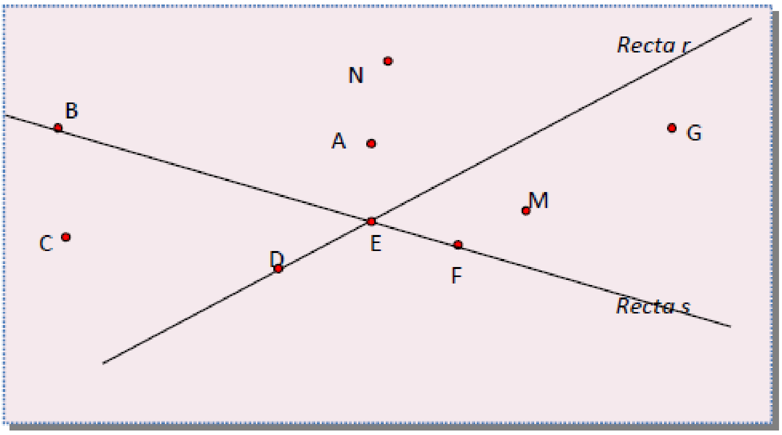
3. Dibuja al menos tres segmentos y nombra su origen.
4. Dibuja dos semirrectas, nombra su origen.
5. Teniendo en cuenta que has trazado una serie de puntos y elementos origen, intenta trazar rectas entre ellos. Sabemos que una recta es un elemento definido entre dos puntos, indica el nombre de la recta por medio de estos dos puntos.
6. Crea una tabla como la del ejemplo donde quede organizada toda la información que has reflejado en la lámina, de forma que puedas consultar los distintos elementos que has ido identificando en tu ejercicio. Recuerda que todos los elementos del plano deben estar correctamente nombrados.

Cuadro:		
Elemento del Plano	**Color**	**Nombre**
Punto	Azul	A
Recta	Verde	r

Consejos: Puedes utilizar un color distinto para cada tipo de elementos, de esta forma la información y las soluciones quedarán más claras y ordenadas. Como se trata del primer ejercicio que vamos a realizar de estas características, aquí puedes observar un ejemplo general de cómo puedes identificar elementos geométricos en una obra de arte. Recuerda que las actividades se realizarán manualmente, por ello, sigue los consejos y utiliza distintos tipos de colores, respeta las nomenclaturas y simbologías. Por ejemplo, al marcar un punto deberás incorporar una letra mayúscula, al dibujar una línea deberás incluir una letra en minúscula, etc.

Fuente: elaboración propia a partir del cuadro La Anunciación.

EJERCICIO 1.2. Dado el siguiente esquema de puntos y rectas:



Fuente: Marea Verde.

Sobre la siguiente lámina en A3 en blanco y negro, se pide que traslades los elementos de este esquema al siguiente cuadro y respondas las preguntas que se indican a continuación. Debes elegir donde indicar cada uno de los puntos del esquema sobre el cuadro, empieza por los puntos y luego puedes ir uniendo las rectas. La nube de puntos que obtengas no necesariamente debe ser idéntica, pero sí aproximada y reflejar todos los elementos indicados.

ACTIVIDAD 1	
Cuadro	**Descripción de los elementos identificados**
	
San Juan Bautista y el maestro franciscano Enrique de Werl Óleo sobre tabla de madera de roble. 1438 CAMPIN, ROBERT	

1. Dibuja tres segmentos que tengan sus extremos fuera de las rectas r y s.
2. ¿El punto B pertenece a la recta s? ¿Y a la recta r?.
3. Dibuja un segmento que tenga como extremos A y un punto que esté en las rectas r y s.
4. Dibuja una semirrecta de origen C y que pase por B.
5. ¿Es posible dibujar una recta que pase a la vez por M, F y G? ¿Y por N, A y E?

EJERCICIO 1.3. Dados los siguientes cuadros, trabaja sobre las láminas en A3 acorde a las preguntas que se indican:

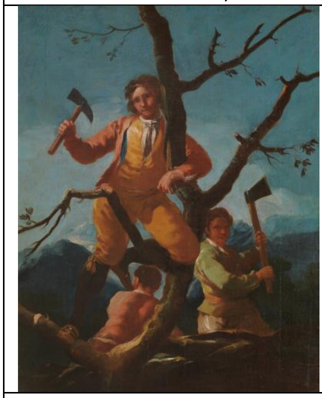
a)Identifica y dibuja rectas sobre los distintos elementos que observes en los cuadros, de modo que haya rectas paralelas, perpendiculares y secantes no perpendiculares. En caso de no encontrar alguna de ellas en un cuadro en concreto se debe dejar especificado.

b)Este es el listado de los cuadros para trabajar este ejercicio, además cuentas con las láminas en blanco y negro para plasmar las soluciones. Rellena la casilla derecha indicando los elementos identificados. Podéis repartiros las láminas entre vosotros y luego poner las soluciones en común y acordar los resultados.

ACTIVIDAD 1	
Cuadro	**Descripción de los elementos identificados**
	
Santa Bárbara Óleo sobre tabla de madera de roble. 1438 CAMPIN, ROBERT	

	
La Última Cena Óleo sobre tabla. 1555 - 1562 JUANES, JUAN DE	
	
Escenas de La historia de Nastagio degli Onesti Técnica mixta sobre tabla. 1483 BOTTICELLI, SANDRO	
	
Cristo crucificado Óleo sobre lienzo. Hacia 1632 VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y	
	
El Alma cristiana acepta su cruz Óleo sobre lienzo. Hacia 1630 ANÓNIMO	

	
Las lanzas o La rendición de Breda Óleo sobre lienzo. Hacia 1635 VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y	
	
La Anunciación Óleo sobre tabla de madera de roble. 1420 - 1425 CAMPIN, ROBERT	
	
La Crucifixión Óleo sobre tabla. 1509 - 1519 FLANDES, JUAN DE	
	
El lavatorio Óleo sobre lienzo. 1548 - 1549 TINTORETTO, JACOPO ROBUSTI	

	
Baile a orillas del Manzanares Óleo sobre lienzo. 1776 - 1777 GOYA Y LUCIENTES, FRANCISCO DE	
	
Los leñadores Óleo sobre lienzo. 1777 - 1780 GOYA Y LUCIENTES, FRANCISCO DE	
	
El paseo de las Delicias Óleo sobre lienzo. 1784 - 1785 BAYEU Y SUBÍAS, FRANCISCO	
	
Las hilanderas o la fábula de Aracne Óleo sobre lienzo. 1655 - 1660 VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y	

	
Soldados romanos en el circo Óleo sobre lienzo. Hacia 1640 FALCONE, ANIELLO	

Actividad 2. Las figuras planas del cuadro.

¿Sabías que?

La Geometría se considera la rama más antigua de las matemáticas.

Camargo y Acosta (2012) remontan los orígenes de la geometría a las comunidades primitivas, al intentar representar el mundo, decorar y construir sus viviendas, como evidencian los vestigios localizados (Ortiz, 2005). Se considera que así nacen los primeros diseños geométricos, además de los conceptos de la simetría y la forma. Rincón (2004) explica que esta rama de las matemáticas ha sido relevante en la resolución de problemas, partiendo de herramientas de cierta sencillez. Sin existir un origen definido y predeterminado, se asocia a las propiedades privadas, rutinas y actividades cotidianas, como la agrimensura. Husserl (2000) afirma que el entorno natural de hoy día es básicamente el de entonces, lo que es factible de explicar por esbozos a partir de la geometría.

Por lo general, los orígenes de la geometría recaen en civilizaciones como la egipcia o babilónica, que intentan dar explicación a los fenómenos entre la tierra y el cielo, la naturaleza en general. Además, se relacionan con actividades agrícolas, donde la geometría tenía un aspecto cultural, asociado a las cantidades de las tierras, los pagos, los tamaños y se utilizaba con fines económicos, según Serres (1996) y Andonegui (2006).

El origen de la geometría se sitúa para algunos en la civilización egipcia, donde las inundaciones del Río Nilo borraban periódicamente los lindes de las tierras y debían reconstruirse. Esta actividad tan repetitiva y prolongada en el tiempo, fue clave en el desarrollo de la geometría, las mediciones y la actividad agrícola. Este procedimiento se vincula a otras civilizaciones desarrolladas alrededor de las cuencas de los ríos, como la china, india, maya y azteca (Ortiz, 2005). Las culturas hicieron uso de la geometría para la resolución de problemas y mediciones, para uso social, arquitectónico, geográfico y astronómico. En esta época se estiman las primeras formulaciones del área de figuras planas, aunque el mundo geopolíticamente era diferente y las representaciones son de carácter local (Camargo y Acosta, 2012). Eran ciudades prósperas, con altos niveles socioeconómicos y culturales que usaban las matemáticas de forma práctica, para fines de ingeniería y contabilidad. La civilización Babilónica de Mesopotamia, era conocedora del Teorema de Pitágoras, su Geometría se asocia a reglas para el cálculo de áreas y volúmenes, muy vinculada al cielo (Ortiz, 2005).

Algunos filósofos como Tales de Mileto, Pitágoras, Platón y Aristóteles dedicaron su vida al estudio de las matemáticas, dejando una valiosa herencia a la cultura griega.

La Escuela de Pitágoras se encargaba del estudio de las matemáticas, la filosofía y las ciencias. Para algunos, el Teorema de Pitágoras es el referente geométrico más famoso, aunque existen dudas sobre su autoría original (Ortiz, 2005). Camargo y Acosta (2012) se centran en el desarrollo de la geometría desde las aportaciones de los griegos, quienes la convierten en una disciplina. Desde el año 300 a.C. la obra de Euclides, perteneciente a la Escuela de Alejandría pasa a considerarse como cumbre del conocimiento de la geometría.

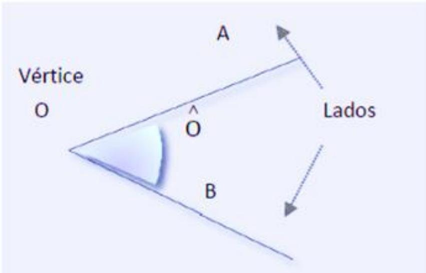
Galileo tiene un importante papel en el mundo de las matemáticas, su trabajo se centra en establecer unas bases geométricas para encontrar relaciones, formas y patrones que expliquen el mundo y los movimientos naturales (Velilla-Jiménez, 2018). Galileo recurre al uso *de diagramas geométricos con líneas, ángulos, círculos y todos los elementos que implican, para analizar los problemas (Machamer y Woody, 1994).*

¿Qué debemos saber?

Estudio de las figuras planas.

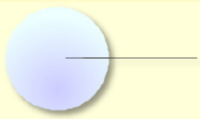
PRIMERA PARTE: ÁNGULOS

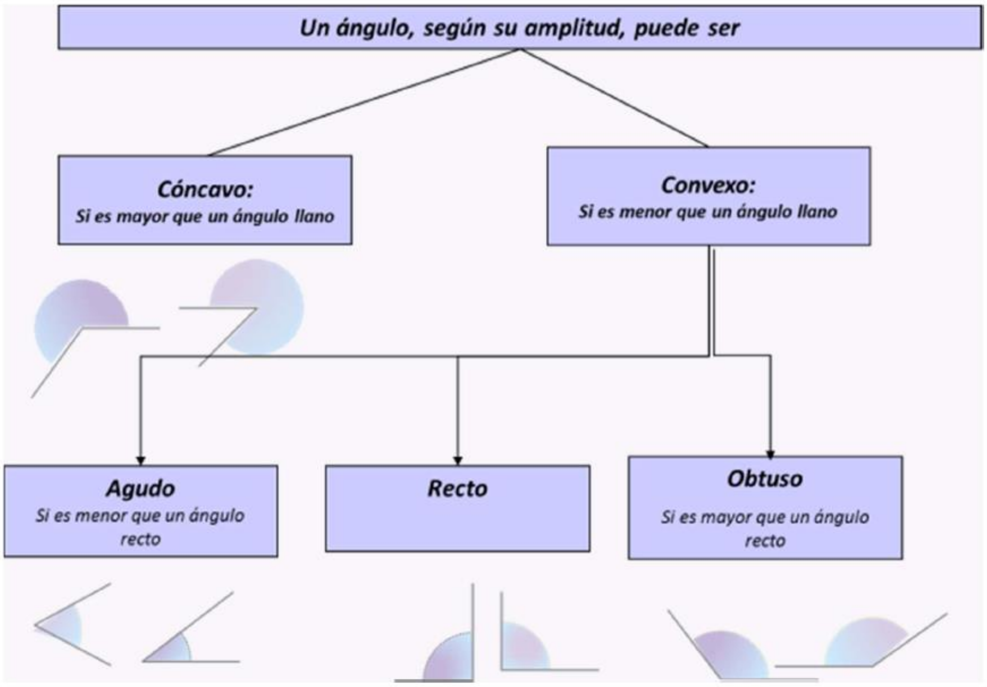
1. Ángulos. Definición y representación.

Elemento del Plano	Definición Matemática	Representación	Como nombrarlo
Ángulo	La región del plano limitada por dos semirrectas con un origen común. Las semirrectas que lo limitan se llaman lados y el origen vértice.	 	Podemos utilizar una sola letra o bien tres, que serán nombres de tres puntos: el primero y el último punto sobre los lados del ángulo y el central el vértice. En ambos casos se coloca encima el símbolo ^. En el ángulo del dibujo: $\hat{O} = A\hat{O}B$

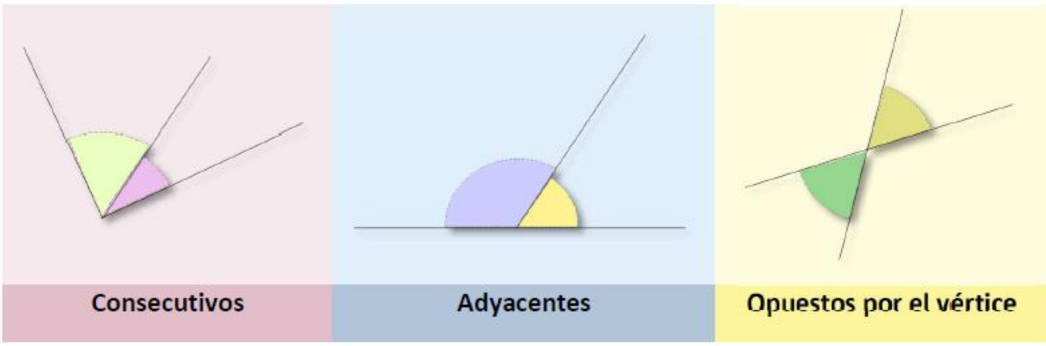
Fuente: elaboración propia a partir de Marea Verde.

2. Ángulos. Tipos de ángulos

Ángulo completo, llano y recto:		
Clasificación acorde a semirrectas especiales: Definiremos tres ángulos que nos servirán tanto como referencia para clasificar los demás, como para definir una de las medidas angulares más utilizadas.		
Ángulo completo: Es el definido por dos semirrectas iguales.	**Ángulo llano**: Es la mitad de un ángulo completo.	**Ángulo recto**: Es la mitad de un ángulo llano.
		
Ángulo cóncavo y convexo (agudo, recto y obtuso):		



Ángulos consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice:



Fuente: elaboración propia a partir de Marea Verde.

3. Ángulos complementarios y suplementarios

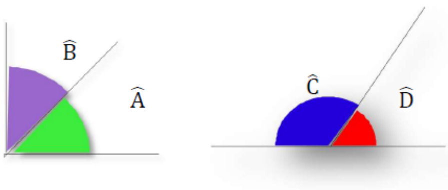
Se llaman **ángulos complementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90 º)

Se llaman **ángulos suplementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo llano (180 º)

Ejemplo:

- En la figura aparecen dos ejemplos gráficos:

A y *B* son ángulos complementarios. *C* y *D* son suplementarios.



Ejemplo:

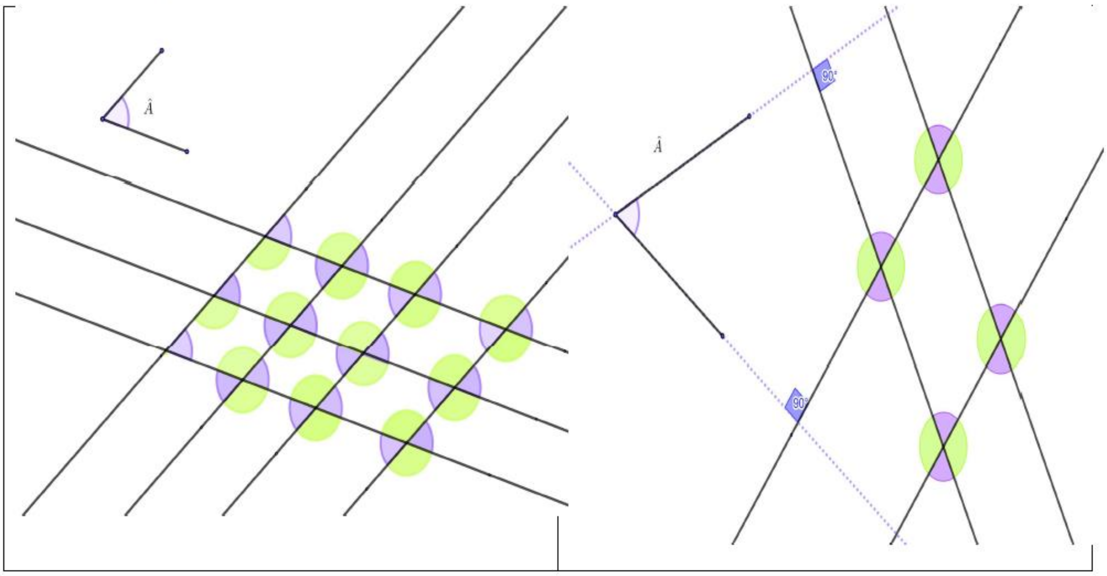
- El ángulo $\hat{A}$ = 12 º es el complementario de $\hat{B}$ = 78 º y el suplementario de $\hat{C}$ = 168 º

Fuente: Marea Verde.

4. Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante. Ángulos de lados paralelos y perpendiculares

- Los ángulos que tienen sus lados paralelos son iguales o suplementarios.
- Los ángulos que tienen sus lados perpendiculares son iguales o suplementarios

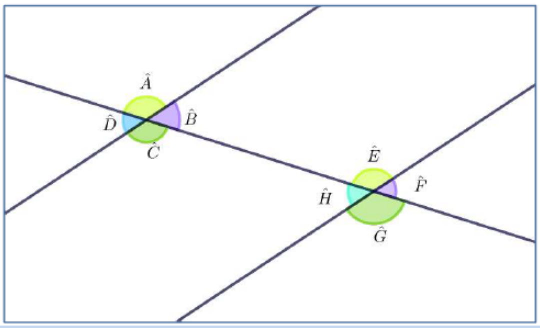
Observa los ejemplos:



Fuente: Marea Verde.

5. Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante

Si una recta secante corta a dos rectas paralelas, forma con ellas ocho ángulos que reciben distintos nombres según la posición que ocupan



Ángulos internos son los que están en la franja del plano comprendida entre las dos paralelas. En la figura, son los ángulos $\hat{B}, \hat{C}, \hat{E}$ y $\hat{H}$.

Ángulos externos son los que están en cada uno de los dos semiplanos definidos por una paralela sin contener a la otra. En la figura, son los ángulos $A, \hat{D}, \hat{F}$ y $\hat{G}$.

Ángulos alternos son los no adyacentes situados a uno y otro lado de la secante. Pueden ser ***alternos internos o externos***, según se encuentren en la franja que limitan las dos paralelas o en las dos zonas exteriores. En la figura las parejas formadas por $\hat{B}$, $\hat{H}$ y $\hat{C}, \hat{E}$ son alternos internos. Las parejas $\hat{A}, \hat{G}$ y $\hat{D}, \hat{F}$ son alternos externos.

Ángulos correspondientes son los no adyacentes, uno interno y otro externo situados a un mismo lado de la secante. En nuestra figura, son ángulos correspondientes las parejas $\hat{A}$ y $\hat{E}$,$\hat{B}$ y $\hat{F}$, $\hat{D}$ y $\hat{H}$ así como $\hat{C}$ y $\hat{G}$.

Estos ocho ángulos forman cuatro ángulos agudos iguales entre sí y cuatro ángulos obtusos iguales entre sí dado que

- Los ángulos alternos internos son iguales dos a dos: $\hat{B} = \hat{H}$ y $\hat{C} = \hat{E}$
- Los ángulos alternos externos son iguales dos a dos: $\hat{A} = \hat{G}$ y $\hat{D} = \hat{F}$
- Los ángulos correspondientes son iguales dos a dos : $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G}$ y $\hat{D} = \hat{H}$

Es decir: $\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = \hat{G}$ Y $\hat{B} = \hat{D} = \hat{F} = \hat{H}$

Fuente: Marea Verde.

SEGUNDA PARTE: POLÍGONOS

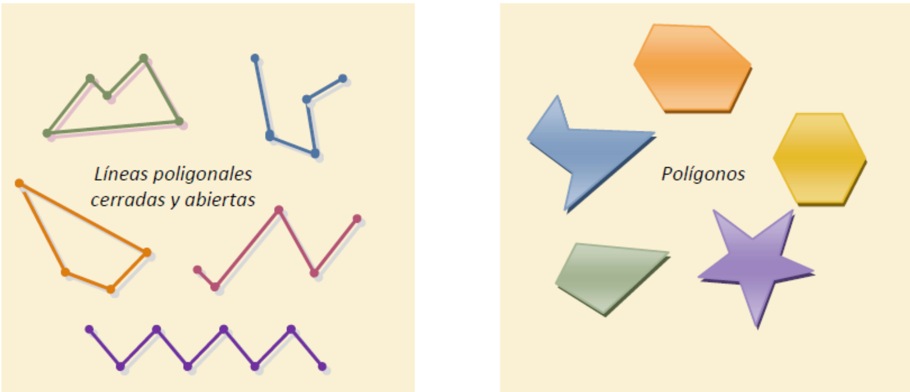
6. Líneas poligonales y polígonos

Una **línea poligonal** es una colección de segmentos consecutivos. Esto quiere decir que el primer segmento tiene un extremo común con el segundo. El extremo libre del segundo es común con el tercero y así sucesivamente.

Si los extremos libres del primero y del último coinciden, se dice que la línea poligonal es cerrada. En caso contrario, es *abierta*.

Un **polígono** es una región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

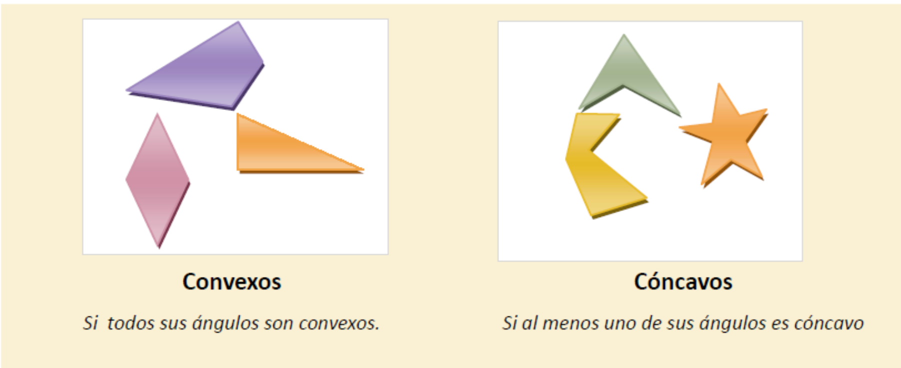
Ejemplo:



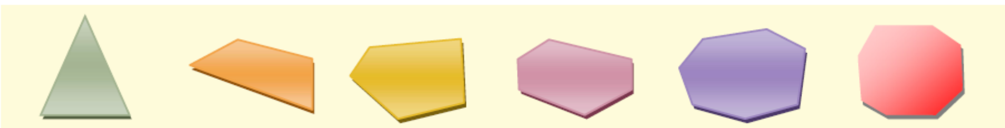
Fuente: Marea Verde.

7. Clasificación de los polígonos según ángulos y lados

Según *los ángulos* los polígonos se clasifican en dos grandes grupos:



Por *el número de lados,* los polígonos se clasifican en



Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octógono
Tres lados	*Cuatro lados*	*Cinco lados*	*Seis lados*	*Siete lados*	*Ocho lados*

Si un polígono tiene todos sus ángulos iguales se llama **equiángulo** y si tiene todos sus lados iguales se llama **equilátero**.

Fuente: Marea Verde.

8. Elementos de un polígono: lados, ángulos, vértices, diagonales

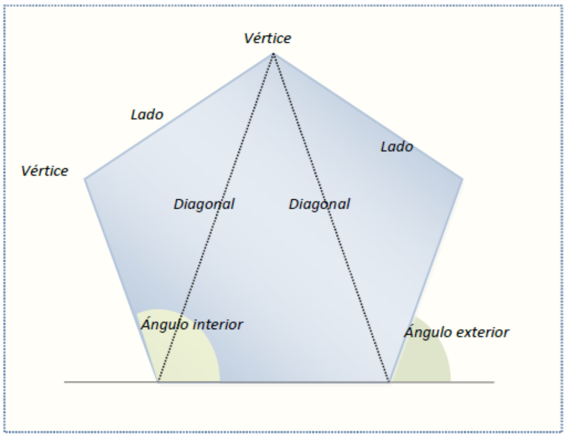
Se llama **lado** de un polígono a cada uno de los segmentos que forman la línea poligonal que lo limita.

Los ángulos limitados por dos lados consecutivos son los **ángulos interiores** del polígono.

Los ángulos limitados por un lado y la prolongación del lado consecutivo son los **ángulos exteriores** del polígono

Los puntos en los que se cortan los lados se llaman **vértices.**

Cada uno de los segmentos que une dos vértices no consecutivos se llama **diagonal.**



Cualquier polígono tiene el mismo número de lados, de ángulos interiores y de vértices.

Dos polígonos son **iguales** si tienen los lados y los ángulos iguales. En algunos casos basta con saber que se cumplen condiciones menos exigentes (llamadas criterios de igualdad) para garantizarlo. Veremos por ejemplo tres criterios de igualdad de triángulos.

Fuente: Marea Verde.

9. Clasificación de los polígonos: Regulares e irregulares

Los polígonos que tienen todos sus ángulos interiores y sus lados iguales se denominan **regulares.** Los polígonos regulares son entonces equiláteros y equiángulos. Si por lo menos una de estas condiciones se incumple, el polígono se llama **irregular.**

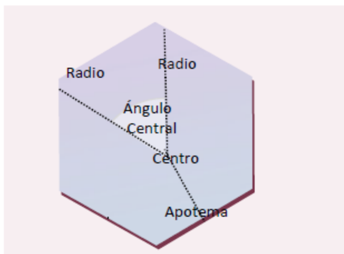
En un polígono regular aparecen nuevos elementos:

Centro que es un punto que equidista de los vértices.

Radio que es un segmento que une el centro con un vértice del polígono.

Ángulo central que es el menor de los ángulos que determinan dos radios que unen vértices consecutivos.

Apotema que es el segmento que une el centro con el punto medio de un lado. La apotema es perpendicular al lado.



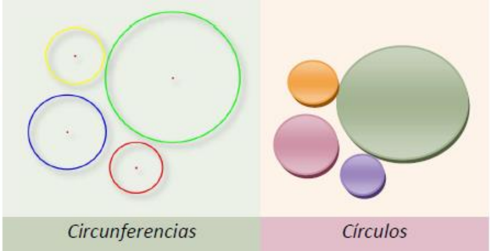
Fuente: Marea Verde.

TERCERA PARTE: CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

10. Circunferencia y círculo

Una **circunferencia** es una línea cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un punto interior a la misma llamado centro.

La porción de plano limitado por una circunferencia se llama **círculo.**



Fuente: Marea Verde.

11. Elementos de la circunferencia

Se llaman elementos de una circunferencia a ciertos puntos y segmentos singulares de la misma. Los describimos a continuación

El **centro** es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

El **radio** de una circunferencia es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Se nombra con la letra r o bien con sus puntos extremos. La medida del radio es constante.

El **diámetro** de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio.

Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de longitud máxima.

Cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia se llama **arco**.

Un arco de circunferencia se denota con el símbolo $\frown$ sobre las letras que designan los puntos extremos del arco. Por ejemplo, el arco de extremos A, B se escribe $\overset{\frown}{AB}$. Un caso particular es la semicircunferencia, arco delimitado por los extremos de un diámetro

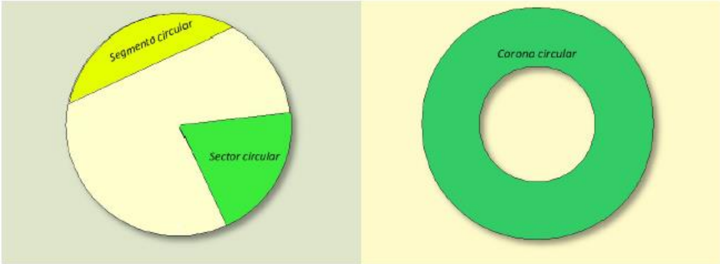
Fuente: Marea Verde.

12. Sector circular y segmento circular. Corona circular

Un **sector circular** es la porción de círculo comprendida entre dos radios.

Un **segmento circular** es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos.

Una **corona circular** es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.

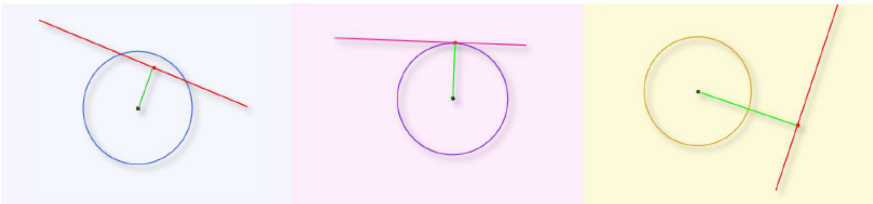


El ángulo que forman los dos radios que determinan un sector circular, se llama ángulo central. Si el ángulo central es llano, el sector circular es un semicírculo.

Fuente: Marea Verde.

13. Posiciones entre una recta y una circunferencia

Una recta puede tener dos puntos comunes con una circunferencia, uno o ninguno.



SECANTES Dos puntos en común	TANGENTES Un punto en común	RECTA EXTERIOR A LA CIRCUNFERENCIA Ningún punto común

El punto común de una circunferencia y una recta tangentes, se llama **punto de tangencia.**

La distancia del centro de la circunferencia a una recta es menor, igual o mayor que el radio, dependiendo de que sean secantes, tangentes o exteriores.

Fuente: Marea Verde.

14. Propiedades importantes de las circunferencias y sus elementos

Algunas construcciones geométricas como el trazado de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, la búsqueda del centro de un arco de circunferencia o el dibujo de una recta tangente a una circunferencia cuando se conoce el punto de tangencia, se pueden resolver gracias a estas propiedades que seleccionamos.

Las mediatrices de todas las cuerdas de una circunferencia pasan por el centro.	La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

Fuente: Marea Verde.

CUARTA PARTE: TRIÁNGULOS

15. Triángulos. Clasificación de los triángulos

Un triángulo es un polígono de tres lados.

Según *los lados* los triángulos se clasifican en:

Equiláteros	**Isósceles**	**Escalenos**
Tienen tres lados iguales	*Tienen exactamente dos lados iguales*	*Los tres lados son desiguales*

Según *los ángulos* los triángulos se clasifican en:

Acutángulos	**Rectángulos**	**Obtusángulos**
Tienen tres ángulos agudos	*Tienen un ángulo recto*	*Tienen un ángulo obtuso*

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el tercero se denomina *hipotenusa*.

Fuente: Marea Verde.

16. Propiedades fundamentales de un triángulo

La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

De esta propiedad se deducen las consecuencias siguientes:

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
Cada ángulo de un triángulo equilátero vale 60º.

En un triángulo cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Es preciso tener en cuenta esta propiedad para saber si tres segmentos dados pueden o no ser los lados de un triángulo

Fuente: Marea Verde.

17. Rectas y puntos notables de un triángulo

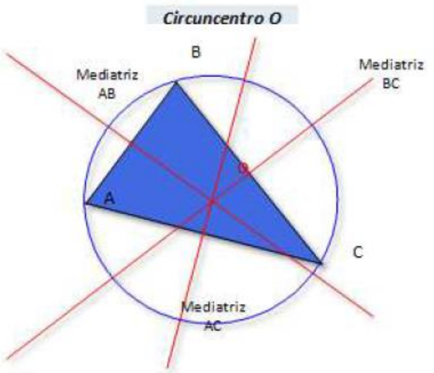
En un triángulo se definen cuatro tipos de rectas denominadas, genéricamente, rectas notables. Esas rectas son: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.

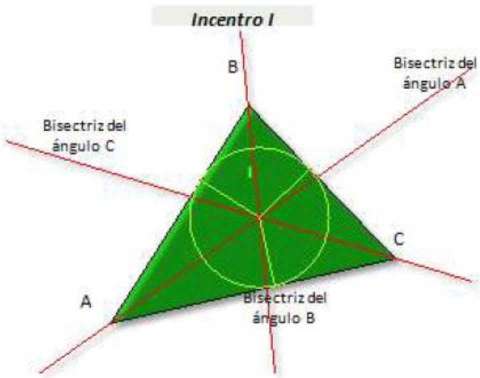
En todo triángulo existen tres rectas de cada uno de los tipos mencionados y tienen la propiedad de pasar por un mismo punto. Los puntos de intersección de estos grupos de rectas se denominan puntos notables

Las mediatrices de los tres lados del triángulo concurren en un punto llamado **circuncentro** (O en la figura izquierda del ejemplo 14). Dicho punto equidista de los vértices y, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto llamado incentro (I en la figura de la izquierda del ejemplo 14). Dicho punto equidista de los lados del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Ejemplo:



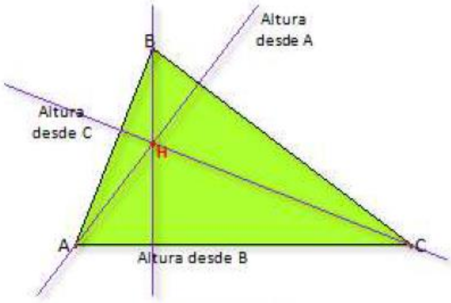


Se llama **altura** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

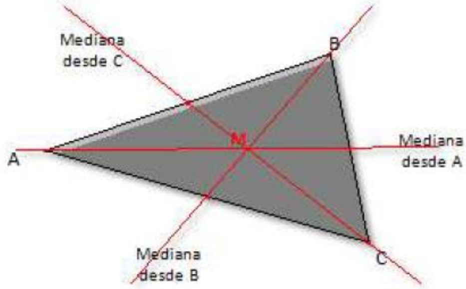
Las tres alturas de un triángulo se cortan en el **ortocentro.**

Se llama **mediana** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. El punto de corte de las medianas se llama **baricentro**.

Ejemplo:



Ortocentro H



Baricentro M

Fuente: Marea Verde.

18. Igualdad de Triángulos

Dos triángulos son iguales si los tres lados y los tres ángulos son iguales.

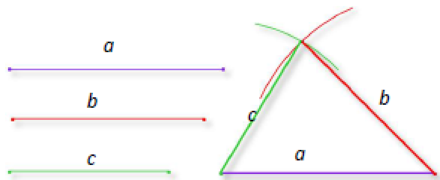
Para comprobar que dos triángulos son iguales es suficiente comprobar que se cumple uno de los tres criterios siguientes:

1º Tienen los tres lados iguales.

Es posible construir un triángulo tomando como punto de partida las longitudes de los tres lados: *a, b, c*

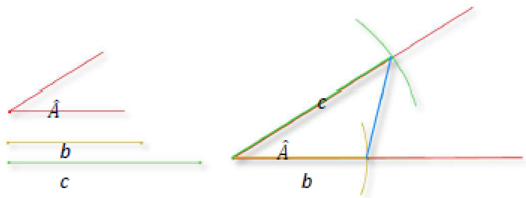
Para ello, se dibuja un segmento de longitud igual a uno de ellos (*a* por ejemplo). Sus extremos serán dos vértices del triángulo.

A continuación, desde un extremo se traza un arco con radio *b* y desde el otro se traza un arco con radio *c*. El punto común de los dos arcos es el vértice que falta:

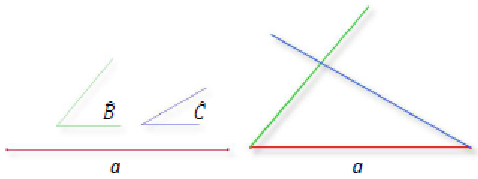


2º Tienen dos lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ambos.

Pongamos que los datos son las longitudes b y c y el ángulo $\hat{A}$. Se dibuja en primer lugar el ángulo $\hat{A}$. Su vértice es un vértice del triángulo. Sobre sus lados se llevan con un compás las medidas b y c, estos arcos son los dos vértices restantes.



3º Tienen un lado igual adyacente a dos ángulos también iguales.



Suponemos conocido el lado a y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$. Podemos construir el triángulo con facilidad también en este caso.

Se dibuja en primer lugar el segmento a. Sus extremos son dos vértices de nuestro triángulo. En sus extremos, se dibujan los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de modo que el segmento a sea un lado de cada uno de ellos. Por último, se prolongan los lados de $\hat{B}$ y $\hat{C}$ hasta que se corten.

Fuente: Marea Verde.

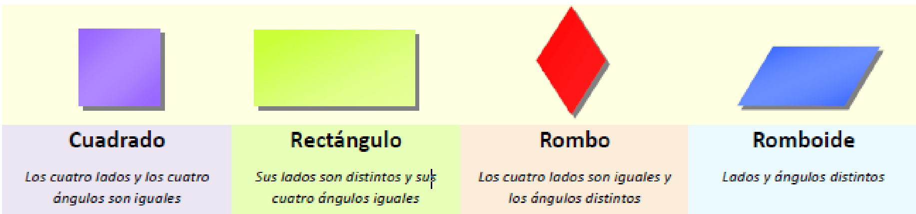
QUINTA PARTE: CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Como otros polígonos, se clasifican en dos grandes grupos dependiendo del tipo de ángulos que tengan: cóncavos y convexos.

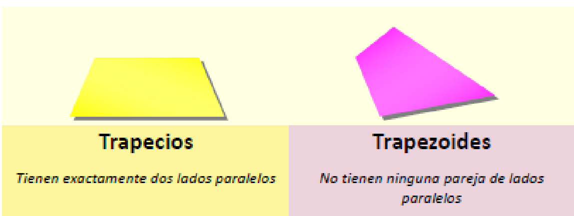
19. Clasificación de los cuadriláteros convexos

Los cuadriláteros convexos se clasifican en **paralelogramos** y **no paralelogramos.**

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados paralelos e iguales dos a dos. También sus ángulos son iguales dos a dos. Hay cuatro tipos de paralelogramos:



Los cuadriláteros no paralelogramos pueden ser de dos tipos:



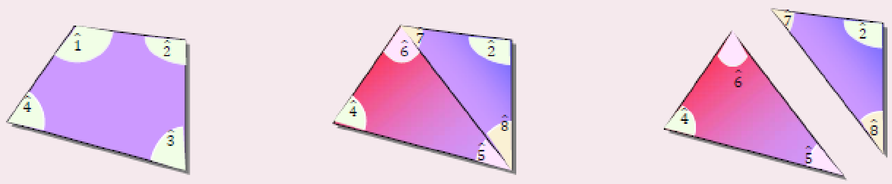
Además, si un trapecio tiene dos lados iguales, se llama trapecio isósceles y si tiene dos ángulos rectos, se llama trapecio rectángulo.

Fuente: Marea Verde.

20. Propiedades de los cuadriláteros

1. La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360 °.

Al trazar una de las diagonales de un cuadrilátero queda dividido en dos triángulos. La suma de los ángulos de ambos coincide con la suma de los ángulos del cuadrilátero.



Nombramos los ángulos del cuadrilátero

Dibujamos una diagonal y nombramos también los nuevos ángulos que aparecen :

$\hat{5},\ \hat{6},\ \hat{7}$ y $\hat{8}$

$\hat{6}+\hat{7}=\hat{1}$ $\quad$ $\hat{5}+\hat{8}=\hat{3}$

$$\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}=180°$$
$$\hat{2}+\hat{7}+\hat{8}=180°$$
$$\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{2}+\hat{7}+\hat{8}=$$
$$=\hat{4}+\hat{3}+\hat{2}+\hat{1}=$$
$$=180°+180°=360°$$

Otras propiedades de los cuadriláteros son

2. La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.
3. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.
4. Las diagonales tanto de un rombo como de un cuadrado, son perpendiculares.
5. Al unir los puntos medios de un cuadrilátero, se forma un paralelogramo.

Fuente: Marea Verde.

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA ACTIVIDAD 2

Estudiamos los elementos del plano a partir de cuadros expuestos en el Museo del Prado.

EJERCICIO 2.1. **ÁNGULOS**. Sobre los siguientes cuadros y con todo lo que ya conoces sobre ellos, debes identificar ángulos y clasificarlos. Apóyate de elementos para dibujarlos, como regla, escuadra y cartabón:

a)Debes identificar al menos dos ángulos de cada tipo, acorde a las clasificaciones que acabamos de estudiar, también debes nombrarlos correctamente. Es posible que en un mismo cuadro no puedas identificar todos los tipos de ángulos estudiados, pero como tienes varios cuadros, seguro que es posible identificar los distintos tipos de ángulos entre todos. En caso de que alguno no haya quedado identificado lo debes especificar. Luego debes construir una tabla como la del ejemplo y organizar toda tu información:

Nombre del cuadro	**Autor**	**Nombre del ángulo identificado**	**Tipo de ángulo acorde a las clasificaciones estudiadas**

b)Debes encontrar y proponer dos ángulos complementarios y dos suplementarios en el total de las láminas. Para ello, utiliza dos de los cuadros que te interesen de los que se muestran a continuación y propón la solución.
c)Sobre uno de los cuadros, el que elija cada equipo, debes identificar los 8 ángulos que delimitan dos rectas paralelas y una secante.
A continuación, está el listado de los cuadros para trabajar este ejercicio. Además, cuentas con las láminas en blanco y negro para plasmar las soluciones. Podéis repartiros las láminas entre vosotros y luego poner las soluciones en común y acordar los resultados.

ACTIVIDAD 2	
Cuadro	**Descripción de los elementos identificados**
	
Santa Bárbara Óleo sobre tabla de madera de roble. 1438 CAMPIN, ROBERT	
	
La Virgen de Lovaina Óleo sobre tabla. Hacia 1520 ORLEY, BERNARD VAN	

	
Las tentaciones de San Antonio Abad Óleo sobre tabla de madera de roble. 1510 - 1515 EL BOSCO	
	
El Alma cristiana acepta su cruz Óleo sobre lienzo. Hacia 1630 ANÓNIMO	
	
Bodegón con alcachofas, flores y recipientes de vidrio Óleo sobre lienzo. 1627 HAMEN Y LEÓN, JUAN VAN DER	
	
Margarita de Austria, reina de España Óleo sobre lienzo. 1607 PANTOJA DE LA CRUZ, JUAN	

	
La Verónica Óleo sobre lienzo. 1620 - 1625 STROZZI, BERNARDO	
	
La reina Margarita de Austria Óleo sobre lienzo. 1606 PANTOJA DE LA CRUZ, JUAN	
	
Los zancos Óleo sobre lienzo. 1791 - 1792 GOYA Y LUCIENTES, FRANCISCO DE	
	
Tobías y el ángel Óleo sobre lienzo. Hacia 1787 GOYA Y LUCIENTES, FRANCISCO DE	

EJERCICIO 2.2. **POLÍGONOS**. Sobre los siguientes cuadros y con todo lo que ya conoces sobre los polígonos, deja fluir tu ingenio para identificar polígonos y líneas poligonales. Si fuera necesario, apóyate de elementos para dibujarlos, como regla, escuadra y cartabón. Se solicita:
a)Identificar líneas poligonales abiertas y cerradas. Debes identificar por lo menos 4 por cada lámina. Si quieres puedes organizar tu información en una tabla como la del ejemplo:

Cuadro	Nombre de la línea poligonal (1, 2, I, II …)	Tipo: Abierta o cerrada

b)Identificar distintos tipos de polígonos de cada tipo, acorde a las clasificaciones que acabamos de estudiar. Probablemente en cada cuadro encontrarás polígonos de distinta categoría. Debes identificar por lo menos 4 por cada lámina.

c)Clasifica los polígonos identificados según sus ángulos. Recuerda que en este caso pueden ser cóncavos o convexos.

d)Clasifica los polígonos identificados según sus lados.

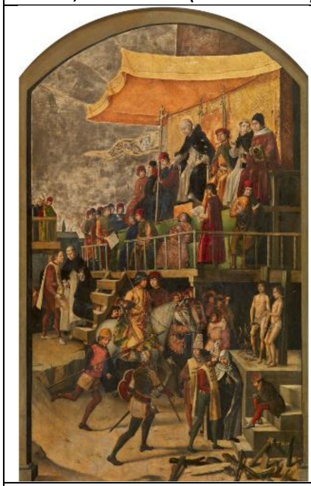
e)Podrías indicar si se tratan de polígonos de tipo equiángulo o equilátero.

Para organizar tu información de los apartados b), c), d) y e) sobre los polígonos identificados, puedes establecer una numeración de los mismos (1,2, I, II, A, B …) y realizar una tabla como la del ejemplo, quizá sea conveniente utilizar una hoja apaisada. La tabla será de gran utilidad para organizar tu información. Puedes presentar la información para cada cuadro o para todos los cuadros en conjunto como en el ejemplo.

Cuadro	Nombre del Polígono (1, 2, I, II, A, B …)	Clasificación según sus ángulos	Clasificación según sus lados	¿Es equitángulo o equilátero?	¿Es regular o irregular?

Este es el listado de los cuadros para trabajar este ejercicio, además cuentas con las láminas en blanco y negro para plasmar las soluciones. Podéis repartiros las láminas entre vosotros y luego poner las soluciones en común y acordar los resultados.

ACTIVIDAD 2	
Cuadro	**Descripción de los elementos identificados**
	
Tríptico de la vida de la Virgen Óleo sobre tabla. Hacia 1445 BOUTS, DIRK	

	
La Fuente de la Gracia Óleo sobre tabla. 1440 - 1450 EYCK, JAN VAN (TALLER DE)	
	
Auto de Fe presidido por Santo Domingo de Guzmán Óleo sobre tabla. 1491 - 1499 BERRUGUETE, PEDRO	
	
Autorretrato Óleo sobre tabla. 1498 DURERO, ALBERTO	

	
Funeral de san Antonio Abad Temple sobre tabla de madera de chopo. 1426 - 1430 ANGELICO, FRA	
	
La Sala de Constantino en el Vaticano Óleo sobre lienzo. 1869 ROSALES GALLINAS, EDUARDO	
	
La infanta Margarita de Austria Óleo sobre lienzo. Hacia 1665 MARTÍNEZ DEL MAZO, JUAN BAUTISTA	
	
El archiduque Leopoldo Guillermo en su galería de pinturas en Bruselas Óleo sobre lámina de cobre. 1647 - 1651 TENIERS, DAVID	

	
La Vista y el Olfato Óleo sobre lienzo. Hacia 1620 BRUEGHEL EL VIEJO, JAN ; BALEN, HENDRICK VAN ; FRAN..	
	
El lavatorio Óleo sobre lienzo. 1548 - 1549 TINTORETTO, JACOPO ROBUSTI	
	
Isabel la Católica dictando su testamento Óleo sobre lienzo. 1864 ROSALES GALLINAS, EDUARDO	
	
Ruinas con la Pirámide de Cayo Cestio Óleo sobre lienzo. Hacia 1730 PANINI, GIOVANNI PAOLO	

	
Las meninas Óleo sobre lienzo. 1656 VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y	
	
El juicio de Salomón Óleo sobre lienzo. 1660 - 1670 GUTIÉRREZ CABELLO, FRANCISCO	
	
Auto de Fe en la plaza Mayor de Madrid Óleo sobre lienzo. 1683 RIZI, FRANCISCO	
	
San Damián Óleo sobre tabla. Hacia 1510 YÁÑEZ DE LA ALMEDINA, FERNANDO	

EJERCICIO 2.3. **POLÍGONOS**. Ahora que ya somos unos expertos identificando polígonos, partiendo de los cuadros trabajados en el ejercicio 2.2., selecciona aquellos polígonos que consideres representativos e identifica los elementos del polígono (lados, ángulos, vértices, diagonales). Realiza esta actividad como mínimo para 3 polígonos diferentes, sobre la propia lámina deja indicados los nombres de los distintos elementos.

EJERCICIO 2.4. **POLÍGONOS**. Identifica la apotema, el ángulo central, el centro y los radios sobre tres de los polígonos que tengas identificados en las láminas del ejercicio 2.2. Se deben dejar indicados los nombres de los cuadros donde se ha realizado el ejercicio.

EJERCICIO 2.5. **POLÍGONOS**. Identifica la apotema, el ángulo central y el centro sobre tres de los polígonos que tengas identificados en las láminas del ejercicio 2.2. que sean: a) un triángulo equilátero, b) un cuadrado, c) un hexágono regular, d) pentágono. En caso de no haber identificado dichos polígonos en tus cuadros, dibújalos en tu cuaderno e identifica la apotema, el ángulo central y el centro sobre los dibujos. Se deben dejar indicados los nombres de los cuadros donde se ha realizado el ejercicio.

EJERCICIO 2.6. **CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA**. Dadas las láminas de los siguientes cuadros en formato A4:

a)Dibuja las circunferencias que encuentres y traza los radios, indicando su medida en centímetros. Escoge tres de las circunferencias e indica en ellas un sector circular de 30º y otro de 60º.

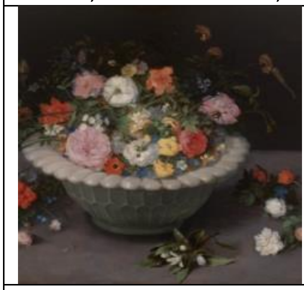
b)Escoge tres circunferencias y traza una cuerda en cada una de ellas, indicando su medida en centímetros.

c)Intenta identificar, aunque sea de forma aproximada, por lo menos tres coronas circulares en las figuras. Si fuera necesario, traza los círculos de forma referencial aunque no sean exactamente coincidentes con tu imagen del cuadro. Intenta realizar los trazos aunque el círculo aparezca parcialmente.

d)Selecciona dos de las circunferencias y traza en cada una de ellas una recta secante, una recta tangente y una recta exterior a la circunferencia. No olvides dejar indicado el centro y el radio, además del nombre del tipo de recta que se está dibujando.

Se debe prestar atención porque los elementos geométricos no siempre forman parte de la representación en sí o de la pintura, pueden estar asociados a la forma del cuadro. Utiliza material de dibujo como compás, regla, escuadra, cartabón y transportador de ángulos para este ejercicio. Se deben dejar indicados los nombres de los cuadros donde se ha realizado el ejercicio y cada apartado.

ACTIVIDAD 2	
Cuadro	**Descripción de los elementos identificados**
	
Tríptico del Jardín de las delicias Grisalla, Óleo sobre tabla de madera de roble. 1490 - 1500 EL BOSCO	
	
Aparición de la Virgen a una comunidad de dominicos Óleo sobre tabla. 1491 - 1499 BERRUGUETE, PEDRO	
	
La extracción de la piedra de la locura Óleo sobre tabla de madera de roble. 1501 - 1505 EL BOSCO	
	
Alegoría mística con san Sebastián, san Bernardo y san Francisco Óleo sobre tabla. 1582 SÁNCHEZ COELLO, ALONSO	

	
Guirnalda con la Virgen, el Niño y dos ángeles Óleo sobre lámina de cobre. Hacia 1619 BRUEGHEL EL VIEJO, JAN ; PROCACCINI, GIULIO CESARE	
	
Cibeles y las Estaciones dentro de un festón de frutas Óleo sobre tabla. 1615 - 1618 BALEN, HENDRICK VAN ; BRUEGHEL EL JOVEN, JAN	
	
Florero Óleo sobre tabla. 1615 BRUEGHEL EL VIEJO, JAN	
	
La infanta Isabel Clara Eugenia Óleo sobre lienzo. Hacia 1615 RUBENS, PEDRO PABLO ; BRUEGHEL EL VIEJO, JAN	

	
Cibeles y las Estaciones dentro de un festón de frutas Óleo sobre tabla. 1615 - 1618 BALEN, HENDRICK VAN ; BRUEGHEL EL JOVEN, JAN	
	
La Adoración de los Reyes Magos Óleo sobre lienzo. 1612 - 1614 MAÍNO, FRAY JUAN BAUTISTA	
	
Jarrón de bronce con rosas Óleo sobre lienzo. 1640 - 1660 CAMPROBÍN, PEDRO DE	

	
San Bernardo y la Virgen Óleo sobre lienzo. 1645 - 1652 CANO, ALONSO	
	
Interior de la rotonda del Museo del Prado Óleo sobre lienzo. 1833 KUNTZ Y VALENTINI, PEDRO	
	
La Virgen con el Niño Pintura al fresco sobre revestimiento mural trasladado. Hacia 1495. ANTONIAZZO ROMANO	

EJERCICIO 2.7. **CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA**. Dadas las siguientes láminas de cuadros en formato A4, se pide:

a)Trazar la circunferencia e identificar los distintos elementos (centro, radio, diámetro y cuerda).

b)Trazar un segmento circular e indicar su medida en centímetros.

c)Trazar un sector circular e indicar el radio del mismo en centímetros y su ángulo en grados.

d)Trazar una recta secante, una recta tangente y una recta exterior a la circunferencia en cualquiera de sus puntos. Dejando trazado igualmente el radio para cada caso.

ACTIVIDAD 2	
Cuadro	**Descripción de los elementos identificados**
	
Las parejas reales Óleo sobre lienzo. 1770. PARET Y ALCÁZAR, LUIS	
	
Mesa de los Pecados Capitales Óleo sobre tabla de madera de chopo. 1505 - 1510 EL BOSCO	

EJERCICIO 2.8. **TRIÁNGULOS**. Dadas las siguientes láminas de cuadros en formato A4, se pide:

a)Identificar y clasificar los distintos ángulos de los siguientes cuadros. Sobre la propia lámina deja indicado que tipo de triángulo es. Construye una tabla como la del ejemplo:

Cuadro	**Triángulo**	**Clasificación según los lados**	**Clasificación según los ángulos**	**Indica las medidas de los 3 lados (cm)**

b)Recuerda que en el ejercicio 2.1. estuvimos trabajando con los ángulos, seguramente si revisas las láminas de este ejercicio, puedes encontrar más triángulos y clasificarlos. Deja indicado el nombre de los cuadros donde has identificado triángulos adicionales. Sobre la propia lámina deja indicado que tipo de triángulo es.

c)Selecciona dos triángulos y traza el circuncentro (puedes llamar O al circuncentro, igual que en la figura estudiada), recuerda que éste se obtiene a partir de las mediatrices de los tres lados. Deben aparecer tanto las mediatrices de sus lados nombradas, como el circuncentro indicado.

d)Selecciona dos triángulos y traza el incentro (I), recuerda que éste se obtiene a partir de las bisectrices de sus ángulos. Deben aparecer tanto las bisectrices, como el incentro indicando su nombre.

e)Selecciona dos triángulos, indica la altura (h) y calcula el ortocentro (H). Deben aparecer todos los elementos representados con su nombre.

f)Selecciona dos triángulos, indica la mediana y calcula el baricentro (M). Deben aparecer todos los elementos representados con su nombre.

Para resolver estos ejercicios será de gran ayuda que te fijes en las figuras de ejemplo que vienen en la explicación. Para evitar errores, intenta seguir los mismos pasos y trasladarlo tal cual a tus láminas, respetando número de elementos y forma de nombrarlos.

ACTIVIDAD 2	
Cuadro	**Descripción de los elementos identificados**
	
Retrato de la reina Ana de Austria Óleo sobre lienzo. Hacia 1573 ANGUISSOLA, SOFONISBA	
	
Las infantas Isabel Clara Eugenia y Catalina Micaela Óleo sobre lienzo. Hacia 1575 SÁNCHEZ COELLO, ALONSO	

	
El príncipe Felipe y el enano Miguel Soplillo Óleo sobre lienzo. Hacia 1620 VILLANDRANDO, RODRIGO DE	
	
Tríptico de la Adoración de los Magos Óleo sobre tabla 1470 – 1472 MENKIG, HANS	
	
Tríptico de La Adoración de los Magos Grisalla, Óleo sobre tabla de madera de roble. Hacia 1494 EL BOSCO	

	
Santa Catalina Óleo sobre tabla. Hacia 1510 YÁÑEZ DE LA ALMEDINA, FERNANDO	
	
La Inmaculada Concepción Óleo sobre lienzo. Hacia 1635 ZURBARÁN, FRANCISCO DE	
	
Florero Óleo sobre lienzo. 1635 FERNÁNDEZ "EL LABRADOR", JUAN	

	
El quitasol Óleo sobre lienzo. 1777 GOYA Y LUCIENTES, FRANCISCO DE	

EJERCICIO 2.9. **CUADRILÁTEROS**. Teniendo en cuenta las láminas de cuadros estudiadas durante esta actividad. Se pide:

a) Identificar y clasificar cuatro cuadriláteros convexos de tipo paralelogramo y cuatro cuadriláteros convexos de tipo no paralelogramo. Construye una tabla como la del ejemplo:

Cuadro	**¿Es paralelogramo o no paralelogramo?**	**Clasificación según los lados**	**Clasificación según los ángulos**	**Indica las medidas de los 3 lados (cm)**

b)Indica las diferencias entre un cuadrilátero convexo de tipo paralelogramo o de tipo no paralelogramo.

c) Selecciona dos de los cuadriláteros señalados e indica sobre la lámina las propiedades del mismo. En caso de necesitarlo, puedes apoyarte de un esquema adicional y dibujar el cuadrilátero aparte. Debes comprobar:
- Nombrar y medir cada uno de los ángulos.
- Calcular la suma de todos los ángulos del cuadrilátero,
- Trazar la diagonal y medir los ángulos faltantes.

Para resolver estos ejercicios será de gran ayuda que te fijes en las figuras de ejemplo que vienen en la explicación.

Reflexionando

¿Sabías qué?

El término de geometría deriva del griego, donde "geo" significa tierra y "metron" se asocia con la medida (Andonegui, 2006).

Se dice que en la puerta de entrada de la Academia de Plantón había un cartel inscrito indicando "Prohibida la entrada al que no sepa de Geometría", también traducido como "prohibida la entrada al carente de espíritu geométrico".

En síntesis, las ideas son los elementos del mundo real y la representación son la forma de esquematizarlos, por ejemplo, una circunferencia trazada es una representación de un objeto, que conduce a una idea o aproximación a un objeto.

Reflexiona:

¿Qué te sugiere la frase “Prohibida la entrada a quién no sepa de Geometría”?

Actividad 3. ¿Hay ángulos en el Prado?

Reflexiona en grupo:

¿Sabrías decir alguna actividad o tarea cotidiana donde se emplee la Geometría? Intenta dar varios ejemplos.

¿Qué debemos saber?

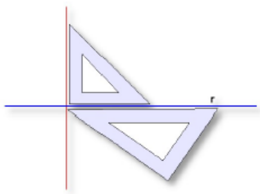
Estudio de las figuras planas.

Mediatriz, bisectriz. Medida y cálculo de ángulos.

1. Rectas perpendiculares. Mediatriz de un segmento

Dos rectas son **perpendiculares** si forman un ángulo recto. Es un caso especial de rectas secantes.

Para construir una recta perpendicular a una recta dada *r*, se adapta un cartabón a *r* y sobre él se apoya uno de los lados que forma el ángulo recto (cateto) de la escuadra. El otro cateto de la escuadra nos sirve para realizar la construcción deseada. También pueden cambiarse las funciones de escuadra y cartabón.



La **mediatriz** de un segmento AB es la recta perpendicular a AB trazada desde el punto medio

Todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan, es decir, están a la misma distancia, de los extremos.

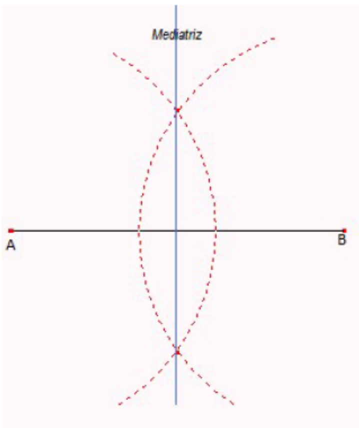
Con un compás y una regla podemos trazar fácilmente la mediatriz de un segmento dado. Debemos seguir los pasos

Se dibuja el segmento *AB*.

Con centro en *A* y con radio *R* mayor que la mitad del segmento, se traza un arco que corte al segmento *AB*.

Con el mismo radio se traza un arco de centro *B*.

Se unen los puntos comunes de los dos arcos. Esta recta es la mediatriz.



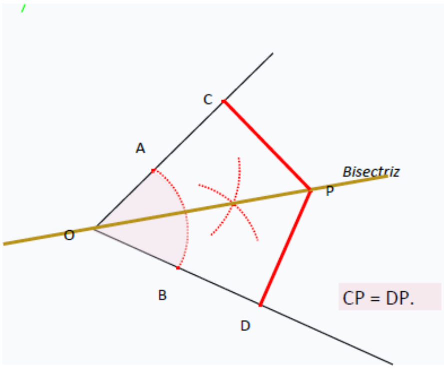
Fuente: Marea Verde.

2. Bisectriz de un ángulo

La **bisectriz de** un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

Los puntos de la bisectriz son equidistantes a los 2 lados del ángulo. Puedes observar que en la figura del ejemplo adjunto que *CP = DP*.

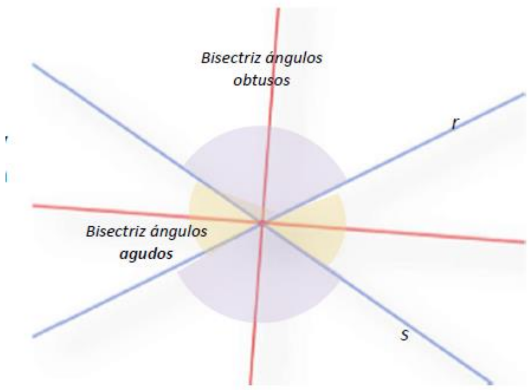
Para trazar la bisectriz de un ángulo de vértice *O*, se traza un arco haciendo centro en O que determina dos puntos, *A* y *B*. A continuación, con centros en *A* y *B* respectivamente y con radio fijo mayor que la mitad de la distancia *AB*, trazamos dos arcos. Estos se cortan en un punto, que unido con el vértice *O* nos da la bisectriz.



Dos rectas secantes determinan cuatro ángulos y sus bisectrices se cortan conformando ángulos rectos entre ellas.

Ejemplo:

- *En la figura inferior observamos que las bisectrices de los ángulos que forman r y s son perpendiculares.*



Fuente: elaboración propia a partir de Marea Verde.

3. Medida de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el llamado ***sistema sexagesimal***. La unidad de medida es el ***grado sexagesimal***. Se representa con el símbolo ° y se define como 1/360 de un ángulo completo.

1° = 1 / 360 parte de un ángulo completo

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto 1 minuto = 1´ = 1/ 60 parte de un grado.

Segundo 1 segundo = 1´´ = 1 / 60 parte de un minuto.

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Si un ángulo viene expresado en dos o tres de estas unidades, se dice que está expresado en *forma compleja*. En la *forma incompleja* de la medida de un ángulo aparece una sola unidad.

El paso de una a otra forma se realiza mediante multiplicaciones o divisiones por 60, según haya que transformar una unidad de medida de ángulos en la unidad inmediata inferior o superior.

Recuerda estas relaciones:

1 ángulo completo = 360 °

1 ángulo llano = 180°

1 ángulo recto = 90°

1 ° = 60 minutos = 3 600 segundos

1 minuto = 60 segundos

Ejemplo:

- Forma compleja: A = 12º 40 ´ 32´´ B = 13´ 54´´ C = 120 º 23´´
- Forma incompleja: D = 35 000´´ E = 23 º F = 34´

Ejemplo:

- Pasaremos el ángulo D del ejemplo anterior a forma compleja:

35 000´´	60	583´	60
500	583´	**43´**	**9 º**
200			
20´´			

D = 35 000´´ = 583´ 20´´= 9 º 43´ 20´´

Ejemplo:

- A = 12 º 23´ 10´´ = 12 · 3 600´´ + 23 · 60´´+ 10´´ = 44 590 ´´

Fuente: Marea Verde.

4. Operaciones con ángulos

Operaciones con ángulos: Suma de ángulos

Para sumar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan los sumandos haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después se suman las cantidades correspondientes a cada unidad. Si los segundos sobrepasan 60, se transforman en minutos y se suman a los minutos resultantes de la primera fase de la suma. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados y se suman a los grados anteriormente obtenidos.

Ejemplo 7:

24º 43´ 29´´	77´´	60	73´	60
45º 29´ 48´´	**17´´**	1´	**13´**	1º
69º 72´ 77´´	Nº minutos = 72´+ 1´= 73´		Nº de grados = 69º + 1º = 70º	

24º 43´ 29´´ + 45º 29´ 48´´ = 69º 72´ 77´´ = 69º 73´ 17´´ = **70º 13´ 17´´**

Operaciones con ángulos: Resta de ángulos

Para restar datos de medida de ángulos, ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan el minuendo y el sustraendo haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después restamos. Si en alguna columna el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa una unidad inmediatamente superior a la que presente el problema para que la resta sea posible.

Ejemplo:

65º 48´ 50´´ 45º 29´ 48´´ **20º 19´ 2´´**	65º 48´ 50´´ - 45º 29´ 48´´ = **20º 19´ 2´´**

Ejemplo:

37º 60´ ~~38º~~ 12´ 14´´ 15º 15´ 15´´	71´ 60´´ ~~37º~~ 72´ 14´´ 15º 15´ 15´´	37º 71´ 74´´ 15º 15´ 15´´ **22º 56´ 59´´**

38º 12´ 14´´ - 15º 15´ 15´´ = 37º 72´ 14´´- 15º 15´ 15´´ = 37º 71´ 74´´- 15º 15´ 15´´ =
= **22º 56´ 59´´**

Fuente: elaboración propia a partir de Marea Verde.

¿Sabías qué?

Raíces y origen del sistema sexagesimal

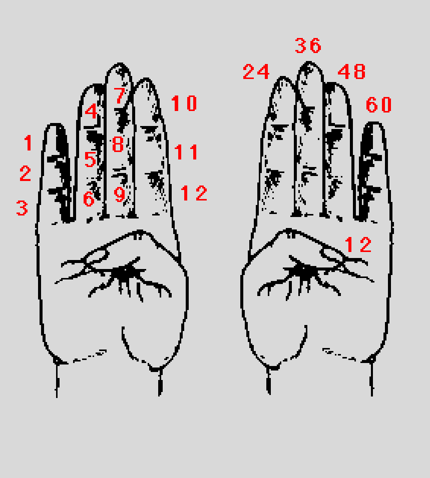
La relación de las matemáticas con el hombre existe desde el inicio de la civilización. Durante la prehistoria, el ser humano no necesitaba los números, dado que se limitaban a recolectar los alimentos que necesitaban. Con la llegada de la agricultura comenzó la necesidad de comercio y hacer referencia a las cantidades de mucho o poco, surge así la necesidad de los números concretos.

El hombre se vale de las primeras herramientas de las que dispone, por lo que el conteo se inicia valiéndose de partes del cuerpo como los dedos, surgiendo así el sistema decimal, se trata de un sistema de cálculo en base 10

Entorno al IV a.C., en Mesopotamia, los babilonios utilizaban un sistema de cálculo en base 60. Con el dedo pulgar de la mano derecha, se cuentan las falanges del resto de dedos. Cada dedo tiene tres falanges, por lo que en total obtenemos el número 12. Una persona diestra puede realizar la operación con la mano derecha, mientras que una persona zurda realizaría el mismo procedimiento con la mano izquierda. Este método permite contar hasta 12, por lo que para continuar con cifras superiores se va levantando un dedo de la mano libre, la mano izquierda sería la mano libre si estamos contando con la derecha, dado que tenemos 5 dedos se completan las 60 unidades (12 x 5 = 60). Por lo que este número, fácil de obtener empezó a considerarse como una cifra redonda de fácil aplicación y utilidad. Por esta razón, empezó a utilizarse para el comercio, mercadeo y pasa a convertirse como una cifra de referencia en la diversidad de transacciones y medidas, partiendo del número 12 y sus múltiplos como el 24.

Actualmente, este sistema de conteo que resultaba de usar las dos manos para contar, se sigue utilizando en algunos contextos. Por ejemplo, en la medición del tiempo (minutos y segundos) y la medición de ángulos. También se encuentra en las medidas tradicionales inglesas (un pie son doce pulgadas) o en nuestra vida diaria como la compra de huevos que se venden por docenas.

Fuente: https://es.wikidat.com/info/sistema-sexagesimal .



Fuente: las Matemáticas no son sólo Números (https://lasmatematicasnosonsolonumeros.blogspot.com/2016/03/sistema-sexagesimal.html).

ACTIVIDAD DE REFUERZO (ALTERNATIVA)

¿Te atreves a probar el ejercicio del origen sexagesimal?

Prueba a realizar el procedimiento propuesto que usaban los antiguos babilónicos, si quieres puedes numerar las falanges de tus dedos como en el ejemplo y hacer fotos del procedimiento que puedes incluir en el porfolio, junto con una pequeña explicación. Podéis realizarlo todos los integrantes del grupo, repartir el trabajo y de este modo será más sencillo.

EJERCICIO 3.1. **MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO**. Ahora que ya somos unos expertos identificando ángulos y polígonos, vamos a dar un paso más. En la Actividad 1 estuvimos identificando distintas rectas en algunos cuadros del Museo del Prado. En los ejercicios 1.1. y 1.2. se identificaron rectas y segmentos sobre ambos cuadros. A continuación, realiza las siguientes actividades:

a)Debes volver a las láminas de los ejercicios 1.1., 1.2. y 1.3. y escoger 4 rectas o segmentos en cada cuadro donde realizar la mediatriz.

b) ¿Es posible dibujar 3 rectas, secantes dos a dos de modo que haya exactamente: a) Una pareja de rectas perpendiculares? b) ¿Dos parejas de rectas perpendiculares? c) ¿Las tres parejas de rectas sean perpendiculares?

c) Realiza sobre uno de los cuadros una mediatriz de un segmento de 6 cm.

d) Escoge un segmento representado en uno de los cuadros de longitud 10 cm, si no tienes ninguno representado con estas características intenta adaptarlo. Después debes realizar su mediatriz y una recta perpendicular al segmento de partida que esté a una distancia de 5 cm de la mediatriz trazada. ¿Qué posición ocupa esta recta con respecto al segmento de partida?

Recuerda que los cuadros trabajados en el ejercicio 1.1. y 1.2. fueron:

Ejercicio 1.1.	**Ejercicio 1.2.**
	
La Anunciación Témpera sobre tabla. Hacia 1426 ANGELICO, FRA	San Juan Bautista y el maestro franciscano Enrique de Werl Óleo sobre tabla de madera de roble. 1438 CAMPIN, ROBERT

EJERCICIO 3.2. **MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO**. Ahora daremos un paso más. En el ejercicio 2.2. has identificado distintos tipos de polígonos y líneas poligonales. Debes escoger 2 polígonos de este ejercicio y realizar la mediatriz de los lados diferentes lados del polígono. Deja indicado que cuadros has utilizado para realizar la mediatriz de los lados de los polígonos.

EJERCICIO 3.3. **BISECTRIZ DE UN ÁNGULO**. En el ejercicio 2.1. hemos identificado distintos tipos de ángulos, vuelve a las láminas de este ejercicio y realiza 4 bisectrices. Deja indicado que cuadros has utilizado para realizar la bisectriz.

EJERCICIO 3.4. **MEDIDA DE ÁNGULOS**. En el ejercicio 2.1. hemos identificado distintos tipos de ángulos, vuelve a las láminas de este ejercicio. También se ha realizado una tabla con la clasificación de los mimos. Utilizando un transportador de ángulos, mide por lo menos 7 de los ángulos realizados, realiza una tabla con la del ejemplo e indica su medida acorde al sistema sexagesimal. Ya tienes los datos del ejercicio 2.1., por lo tanto, simplemente debes añadir a tus datos la medición del ángulo:

Nombre del cuadro	**Nombre del ángulo identificado**	**Tipo de ángulo acorde a las clasificaciones estudiadas**	**Medida del ángulo (º)**

EJERCICIO 3.5. **OPERACIONES CON ÁNGULOS**. Pasa los siguientes ángulos a su forma compleja. Deja reflejadas las operaciones.

a) 12 500´´
b) 83´
c) 230´´
d) 17 600´´

EJERCICIO 3.6. OPERACIONES CON ÁNGULOS. Pasa los siguientes ángulos de forma compleja a forma incompleja. Deja reflejadas las operaciones.

a) 12º 34´ 40´´
b) 13º 23´ 7 ´´
c) 49º 56´ 32´´
d) 1º 25´ 27´´

EJERCICIO 3.7. OPERACIONES CON ÁNGULOS. Según los resultados que has indicado en el ejercicio 3.4., ¿en qué forma has dado los valores, compleja o incompleja? Razona la respuesta.

EJERCICIO 3.8. OPERACIONES CON ÁNGULOS. Según los resultados que has indicado en el ejercicio 3.5., convierte los resultados a la forma contraria. De esta forma puedes realizar un ejercicio de comprobación. Recuerda que hemos trabajado la forma compleja y la incompleja. Los resultados deben quedar reflejados, puedes construir una tabla como la del ejemplo para organizarlos:

Cuadro	**Expresión en grados**	**Expresión en minutos**	**Expresión en segundos**	**Medida del ángulo**

Si te atreves, puedes realizar este mismo ejercicio ahora con los datos del ejercicio 3.6 (Actividad Adicional).

EJERCICIO 3.9. OPERACIONES CON ÁNGULOS. Realiza las siguientes operaciones que guardan relación con la suma y resta de ángulos. Deja reflejadas las operaciones.

a) 34º 45´ 30´´ + 12º 27´ 15´´
b) 16º 30´ 1´´+ 12º 13´ 12´´ + 2º 1´
c) 16º 45' + 23º 13'' + 30º 20´ 30´´
d) 65º 48´ 56´´ - 12º 33´ 25´´
e) 35º 54´ 23´´ - 15º 1´ 35''

EJERCICIO 3.10. OPERACIONES CON ÁNGULOS. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el ejercicio 3.6. Plantea como mínimo dos combinaciones de restas entre ángulos y dos de sumas entre ángulos y realiza las operaciones que has propuesto. Recuerda que simplemente debes seguir la misma metodología que has utilizado en el ejercicio 3.9. Deja reflejadas las operaciones.

EJERCICIO 3.11. OPERACIONES CON ÁNGULOS. Identifica, dibuja y mide los ángulos que aparecen en el siguiente cuadro:

	
La Sagrada Familia con un ángel músico, santa Catalina y santa Bárbara Óleo sobre tabla. 1510 - 1520 MAESTRO DE FRANCFORT (TALLER DE)	

Actividad 4. Investigamos

Ya conocemos muchos cuadros del Museo del Prado y hemos estado trabajando conceptos fundamentales de Geometría a partir de los mismos. Ahora debéis escoger varios cuadros para buscar información en Internet sobre los mismos. Cada integrante del equipo va a buscar información de 4 de los cuadros que hay en este cuadernillo. Lo importante es que dentro de un mismo equipo, los integrantes investiguen sobre cuadros diferentes y no se repitan. De esta forma abreviamos el trabajo y es posible recopilar mayor información. Por lo tanto, es muy importante este punto que repartáis bien el trabajo. Dentro de este cuadernillo, ya conocemos el título, la fecha y el autor de los diversos cuadros. También sabemos que forman parte de la colección expuesta del Museo del Prado, ahora de forma individual debemos averiguar los siguientes aspectos:

- Significado o historia del cuadro
- Medidas reales del cuadro.

Es recomendable buscar esta información en la web del Museo del Prado, donde encontrarás la ficha técnica de los cuadros y toda la información que necesitas. Sin embargo, puedes recurrir a otras fuentes para conocer estos datos. Si lo prefieres puedes ayudarte de una tabla o ficha como la siguiente para organizar tu información.

Cuadro	
Fecha	
Autor	
Medidas del cuadro	
Foto	
Qué significado tiene	

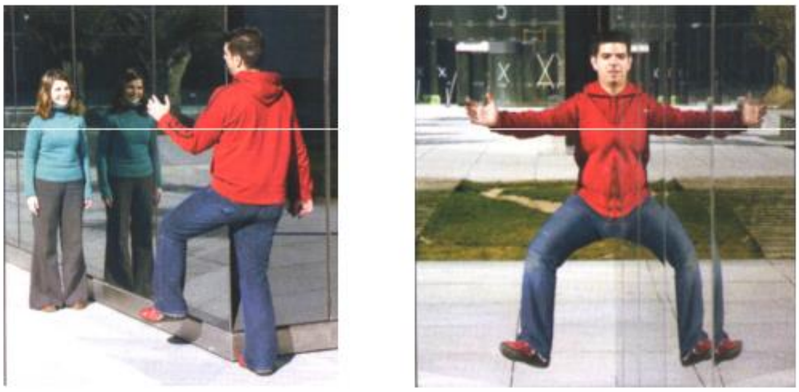
Actividad 5. ¿Simetrías en Geometría o en los cuadros?

¿Qué debemos saber?

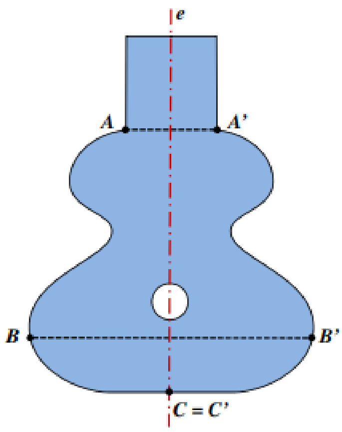
1. Simetrías axiales.

SIMETRÍA AXIAL DE FIGURAS PLANAS.

Una figura tiene un **eje de simetría** cuando el eje (recta) divide a la figura en dos partes, siendo una reflejo de la otra.



SIMETRÍA AXIAL DE FIGURAS PLANAS.

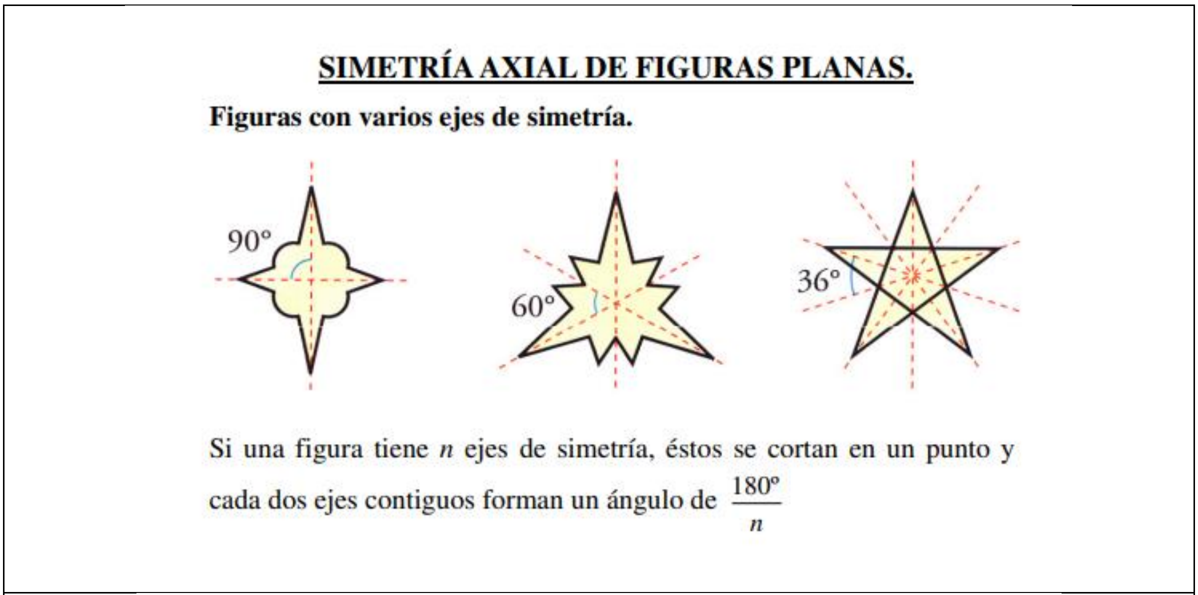


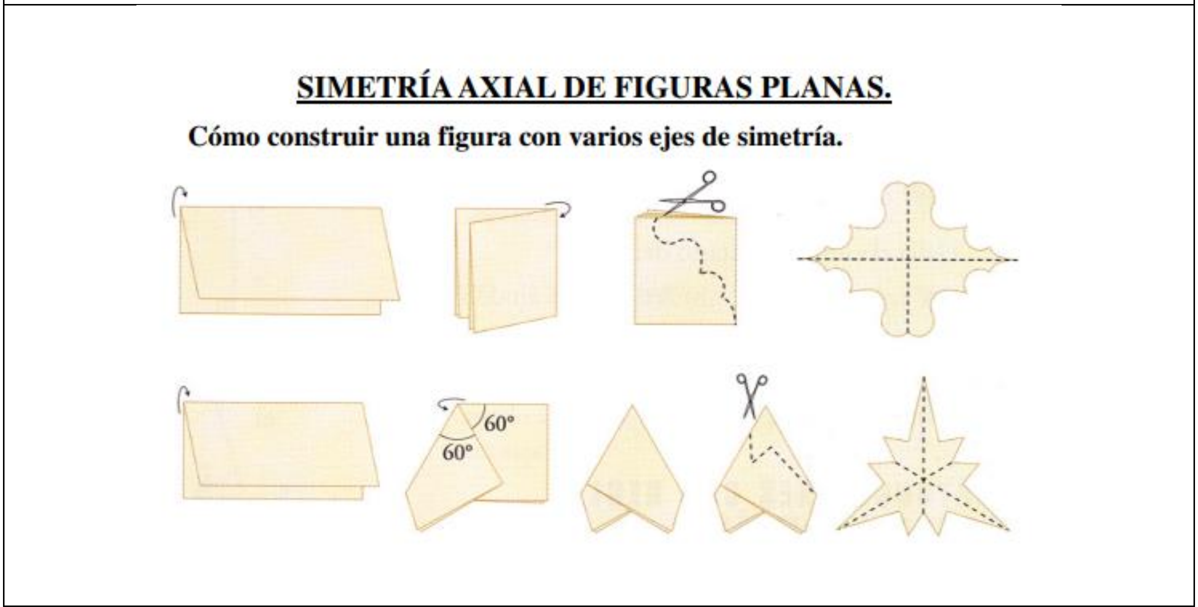
e = eje de simetría

A y A' son simétricos respecto de e.

B y B' son simétricos respecto de e.

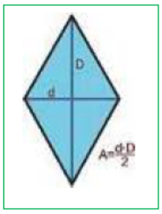
Cada punto del eje es simétrico de sí mismo.

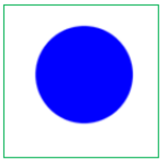




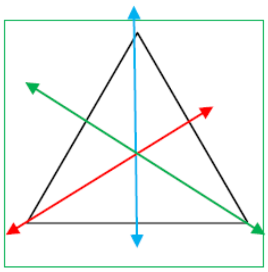
Fuente: IES Aricel (https://iesaricel.org/javierpl/Archivos/Eso1/1ESO_Tema%2013_Figuras%20Planas.pdf).

2. Eje de simetría





Si la recta *r* es un eje de simetría de una figura entonces todo punto de esa figura tiene como transformado por la simetría de eje *r* a otro punto de dicha figura.

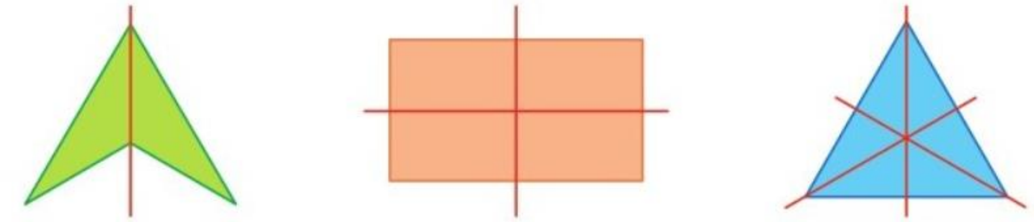


Ejemplos:

- Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría y un triángulo equilátero, tres.
- Un rectángulo o un rombo tienen dos ejes de simetría, y un cuadrado cuatro.
- Un círculo tiene una infinidad de ejes de simetría (todos sus diámetros).

Fuente: Marea Verde.

Un eje de simetría de un polígono es una línea recta tal que, al doblar por ella la figura, las dos mitades que se obtienen coinciden.



Tiene un eje de simetría. Tiene dos ejes de simetría. Tiene tres ejes de simetría.

Algunas figuras planas pueden tener uno o varios ejes de simetría.

La figuras que tienen eje de simetría se denominan **figuras simétricas.**

Fuente: Blog Así Aprendo yo (https://contigoaprendoyo.blogspot.com/2020/05/simetrias-en-las-figuras-planas.html).

IMPORTANTE: Los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría como lados.

¿Sabías qué?

Realiza esta lectura para reflexionar sobre lo que hemos visto en clase:

Geometría secreta de los pintores

Los artistas combinan y encajan en los cuadros distintas figuras y elementos artísticos combinados con geometría. Algunos autores como Boleau (1996) se refieren a estas técnicas como la geometría secreta de los pintores.

Cuando somos observadores e intentamos analizar las obras y buscar estas combinaciones geométricas en las mismas, nos estamos poniendo en el lugar del artista, comprendiendo sus emociones y las técnicas o conocimientos que utilizaba.

La perspectiva y la profundidad en el Arte

La sensación de profundidad y la combinación con aspectos espaciales llevan a la perspectiva. Así pues, es primordial el concepto de perspectiva y profundidad en el Arte, que guarda relación con la forma de interconectar los espacios. La pintura es una superficie plana, donde un espacio tridimensional queda plasmado a modo de composición, para lo que el artista combina la geometría (Bouleau, 2006). Según Magistrali (2019) se emplea en las composiciones para reflejar profundidad. Los artistas renacentistas manejaban a la perfección la técnica de la perspectiva, al admirar sus obras en dos dimensiones, parece percibirse una imagen real tridimensional (Abreu y Bracho, 2023).

El concepto de la perspectiva, ha sido estudiado por artistas como Leonardo DaVinci y Durero, que intentaron analizarlo desde el punto de vista científico. Durante el Renacimiento, la perspectiva se convierte en una rama de las matemáticas, en concreto, de la Geometría.

Permite conectar el espacio tridimensional con el bidimensional. Por un lado, se considera realizar un dibujo realista a partir de la interpretación de la vista y el cerebro. Por otro lado, se considera establecer unas reglas o claves entre la representación bidimensional (superficie) y la tridimensional (realidad), como sucede con la Geometría Descriptiva de los mapas (Etayo, 2009).

La pintura es una superficie plana, donde un espacio tridimensional queda plasmado a modo de composición, para lo cual el artista combina la geometría (Bouleau, 2006). Según Magistrali (2019) la perspectiva ha sido tradicionalmente conocida porque se asocia a las características de las composiciones para reflejar profundidad. Las obras de Durero (1471-1528), en concreto ilustraciones, han sido un ejemplo para los principios de la perspectiva. Los artistas renacentistas manejaban a la perfección la técnica de la perspectiva, de forma qué al admirar sus obras de dos dimensiones, parece percibirse una imagen real en tres dimensiones (Abreu y Bracho, 2023).

Por otra parte, la perspectiva se asocia al concepto de anamorfosis que ha sido utilizada por numerosos artistas. La anamorfosis consiste en deformar ciertas partes de la imagen, se trata de una proyección o perspectiva distorsionada. El observador debe posicionarse en un ángulo determinado o bien utilizar algún tipo de dispositivo óptico o espejo para poder percibir la imagen de forma reconstruida o con claridad. Si bien la técnica se asocia al Renacimiento y ha sido reflejada por artistas como Leonardo Da Vinci (1452-1519), se han encontrado indicios de esta técnica en el arte prehistórico de Lascaux (Magistrali, 2019). El artista Leonardo Da Vinci introduce la perspectiva aérea, que consiste en dar profundidad a los cuadros haciendo uso de distintas técnicas y recursos pictóricos, como el esfumado (Etayo, 2009).

Según Montaño (2016) hasta mediados del siglo XIX, el arte pictórico tomaba como referencia la geometría y la perspectiva. Con la combinación de ambas, los diferentes elementos o figuras quedaban organizados en el cuadro y los artistas trasladaban sus emociones al observador. Magistrali (2019) señala que hasta el siglo XIX las obras de arte se inspiraban en una Geometría euclídea tridimensional, pero en este siglo se produce una revolución matemática en torno a la rama de la Geometría. Algunos artistas a partir de este punto de inflexión empiezan a hacer uso de otro tipo de figuras y nuevas dimensiones en sus composiciones, este hecho conduce al desarrollo de una Geometría abstracta axiomatizada. De igual forma, aproximadamente en este siglo, otros movimientos como el impresionismo, el futurismo y el cubismo han dejado de lado el arte figurativo propio de otras épocas. Estos últimos sirvieron de inspiración a Wassily Kandinsky para convertir la Geometría abstracta en la inspiración de sus obras.

Cabe mencionar, que para el desarrollo del proyecto se usa como base objeto de estudio el plano. En términos de geometría un plano queda definido por dos dimensiones, como un elemento sin espesor, ilimitado en todas sus direcciones, que guarda relación con elementos de dos dimensiones (longitud y altura), al igual que todas las figuras cerradas que se puedan representar dentro del mismo. En un entorno real, no es factible encontrar planos en el sentido estricto de su definición, pero si en representaciones, por ejemplo, una hoja de papel (Andonegui, 2006).

Composición y equilibrio

Marrasé (2016) compara la importancia de las formas y las simetrías en las composiciones pictóricas y el estudio matemático. Se consideran elementos claves para generar armonía y estética. García (1997) considera que el arte primitivo es arbitrario, infantil, caótico y espontáneo, carece de composición.

La evolución del arte comienza por el planteamiento de una línea imaginaria, el eje de simetría; la incorporación de esta subdivisión hizo factible reorganizar los conjuntos y elementos. Con el tiempo han sido desarrollados distintos esquemas geométricos en las obras de arte, así pues, se han reagrupado conjuntos simétricos en torno a las pinturas. Una de las claves básicas nace de la jerarquización, donde los elementos principales se encuentran representados en la parte central de las obras.

La composición se define como el conjunto y la integración de los distintos elementos en el cuadro, la organización de los mismos de un modo determinado, construyen un conjunto (Arnheim, 2011). Arrillaga (2016) afirma que los artistas tienden a simplificar al máximo las ideas, previo a la creación de cada obra, se trata de una primera etapa donde clarifican los conceptos.

Según explica García (1997), las representaciones consideran una lógica visual, asociada con la agrupación de conjuntos y la simetría. Los conjuntos de elementos, en ocasiones no se encuentran cercanos, pero si manifiestan una agrupación coherente. El eje de simetría se suele usar como elemento *diferenciador y en torno al mismo se construye el resto de la obra, lo que significa que se reparten los elementos de forma similar y se reorganizan en función a los criterios de lejanía o cercanía de los elementos o figuras, dando armonía y equilibrio.*

¿Sabías qué?

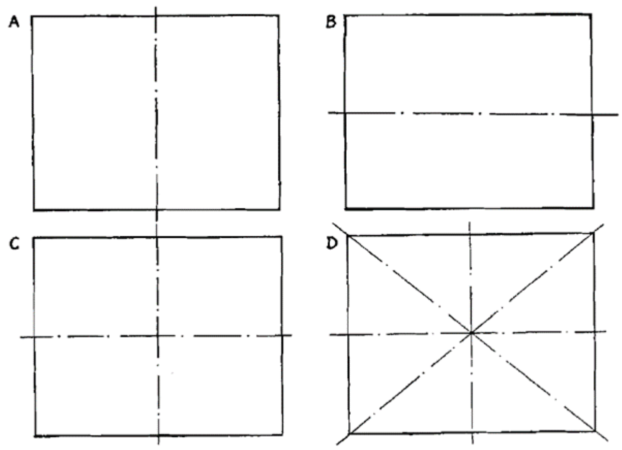
Esquemas de simetría principales de las obras de arte

El autor García (1997) explica que cuando revisamos un cuadro o una obra de arte, el observador intenta establecer semejanzas y relaciones a partir de los estímulos visuales que ofrecen las obras de arte.

Los esquemas de simetría ayudan al espectador, es decir, a nosotros, a reconocer objetos y elementos partiendo de su conocimiento; pero existe un elemento sorpresa vinculado al espíritu creativo, producto de la variedad de elementos que pueden ser descubiertos. Así pues, el arte redescubre el entorno y recrea la realidad.

El arte clásico y las temáticas religiosas, se encuentra especialmente vinculado a estos esquemas de simetría, lo que ha ayudado a los artistas a transmitir lo sobrenatural de lo terrenal y a destacar las figuras religiosas o principales de forma jerárquica. También se encuentra la categoría del esquema dual, el triple y el esquema en cuadrantes; que dependen de la ubicación de las figuras y en consecuencia de los grados de simetría que se divisan en la composición.

A continuación, se muestran los esquemas de simetría principales que se encuentran en las obras de arte:



ESQUEMAS DE SIMETRÍA

A) Considera una reagrupación simétrica en torno al eje vertical, estas reagrupaciones provocan que los elementos actúen de forma interdependiente. La división está directamente asociada a la estructura del cuadro, la subdivisión del cuadro es clara y a ambos lados del eje se evidencian elementos de gran correlación y semejanza.

B) La subdivisión por medio del eje horizontal jerarquiza elementos dentro de la composición. Los elementos con carácter de superioridad se colocan en la parte de arriba del eje.

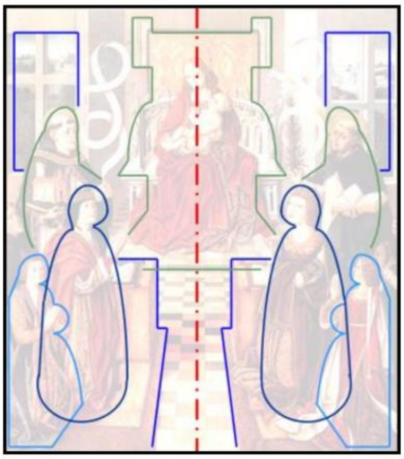
C) La combinación de los esquemas A y B, divide el espacio en cuadrantes.

D) Considera la incorporación de diferentes ejes de simetría.

Fuente: García (1997).

EJERCICIOS PROPUESTOS PARA LA ACTIVIDAD 5

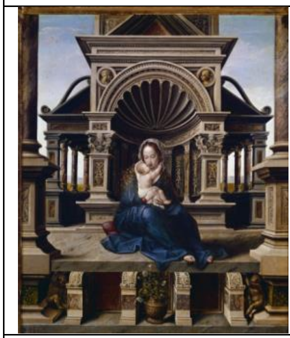
EJERCICIO 5.1. **SIMETRÍAS**. Sobre los siguientes cuadros cuyas láminas en blanco y negro se encuentran en formato A4, con todo lo que ya conoces sobre la simetría, identifica ejes simétricos en los mismos. Si te atreves, también puedes dar un paso más y realizar un esquema simplificado del cuadro, te ayudará a entender los contenidos y lo que el artista quería transmitir y te estarás poniendo en su lugar. Recuerda que hemos hablado sobre la *Geometría secreta de los pintores* y la *geometrización*, ambos han sido herramientas utilizadas por los artistas, donde han correlacionado las Matemáticas con el Arte. Primero observa el ejemplo:

 *La Virgen de los Reyes Católicos* *Técnica mixta sobre tabla. 1491 - 1493* MAESTRO DE LA VIRGEN DE LOS REYES CATÓLICOS	
Fuente: Museo del prado.	Fuente: I.E.S. Blas de Otero (https://sites.google.com/a/iesblasdeotero.com/museo-prado/-que-es-4-miadas-para-contar-un-cuadro).

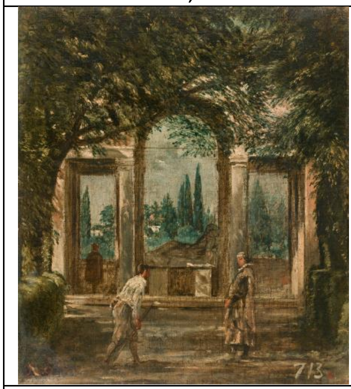
A continuación, se encuentra el listado de cuadros con el que debes trabajar:

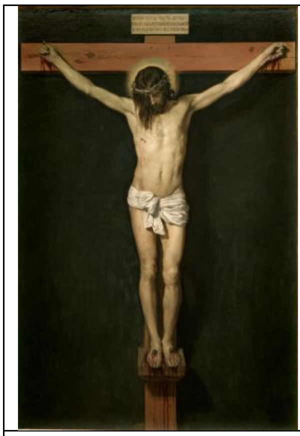
ACTIVIDAD 5	
Cuadro	**Indicar porque se han definido de este modo los ejes de simetría**
	
La cometa Óleo sobre lienzo. 1777 - 1778 GOYA Y LUCIENTES, FRANCISCO DE	

	
El Descendimiento Óleo sobre tabla. Antes de 1443 WEYDEN, ROGIER VAN DER	
	
Tríptico de la vida de la Virgen Óleo sobre tabla. Hacia 1445 BOUTS, DIRK	
	
La Fuente de la Gracia Óleo sobre tabla. 1440 - 1450 EYCK, JAN VAN (TALLER DE)	
	
El Tránsito de la Virgen Óleo sobre tabla. Hacia 1470 MAESTRO DE SOPETRÁN	

	
La Natividad Óleo sobre tabla. Hacia 1470 MAESTRO DE SOPETRÁN	
	
Tríptico de La Adoración de los Magos Grisalla, Óleo sobre tabla de madera de roble. Hacia 1494 EL BOSCO	
	
La Virgen de Lovaina Óleo sobre tabla. Hacia 1520 ORLEY, BERNARD VAN	
	
La Crucifixión Óleo sobre tabla. 1509 - 1519 FLANDES, JUAN DE	

	
El Tránsito de la Virgen Óleo sobre tabla. 1546 - 1550 CORREA DE VIVAR, JUAN	
	
La Última Cena Óleo sobre tabla. 1555 - 1562 JUANES, JUAN DE	
	
Alegoría mística con san Sebastián, san Bernardo y san Francisco Óleo sobre tabla. 1582 SÁNCHEZ COELLO, ALONSO	
	
El entierro del señor de Orgaz Óleo sobre lienzo. Hacia 1625 ANÓNIMO (OBRA COPIADA DE: EL GRECO)	

	
Bodegón con florero y perro Óleo sobre lienzo. Hacia 1625 HAMEN Y LEÓN, JUAN VAN DER	
	
Vista del jardín de la Villa Medici de Roma con la estatua de Ariadna Óleo sobre lienzo. Hacia 1630 VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y	
	
La Virgen y el Niño en un cuadro rodeado de flores y frutas Óleo sobre tabla. 1617 - 1620 RUBENS, PEDRO PABLO ; BRUEGHEL EL VIEJO, JAN	

	
Cristo crucificado Óleo sobre lienzo. Hacia 1632 VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y	
	
La Inmaculada Concepción Óleo sobre lienzo. Hacia 1635 ZURBARÁN, FRANCISCO DE	
	
Paisaje con una vid Óleo sobre lienzo. Hacia 1645 HIEPES, TOMÁS	
	
Auto de Fe en la plaza Mayor de Madrid Óleo sobre lienzo. 1683 RIZI, FRANCISCO	

	
La Anunciación Óleo sobre lienzo. Hacia 1660 MURILLO, BARTOLOMÉ ESTEBAN	

EJERCICIO 5.2. **SIMETRÍAS**. ¿Cuántos ejes de simetría tiene una circunferencia? ¿Y un triángulo equilátero? ¿y un cuadrado? ¿y un pentágono?

EJERCICIO 5.3. **SIMETRÍAS**. En la actividad 2 estuvimos identificando diversidad de polígonos. Trata de identificar sobre los cuadros del ejercicio 5.1 por lo menos 5 polígonos y sobre ellos, dibuja los ejes de simetría respectivamente. Si tienes problemas para ello, puedes utilizar los polígonos que dibujaste en el ejercicio 2.2. Si quieres puedes utilizar una tabla para organizar y resumir tu información, aquí tienes un ejemplo:

Cuadro	**Descripción del polígono**	**Número de ejes de simetría**	**Esquemas geométricos asociados al cuadro**

Actividad 6. Calculando escalas con los cuadros.

Recordando

Yo sé que te acuerdas, pero igualmente lo repasamos. En la actividad 4 se solicitó buscar las dimensiones de una serie de cuadros, al consultar en el portal web del Museo del Prado, era factible conocer las dimensiones reales de los cuadros de su colección.

A continuación, recordaremos algunos conceptos básicos sobre las escalas, para poder conocer la escala de mi lámina de trabajo. Teniendo en cuenta las dimensiones reales del cuadro y pudiendo medir mi lámina de trabajo, es factible obtener la escala y con ello, obtener una relación entre las proporciones reales y las representadas en el cuadro.

Trabajar con escalas es como trabajar con una fórmula. Me permite despejar incógnitas e ir conociendo las dimensiones reales de los objetos, sólo con tener el dato de la escala y pudiendo medirlo en la lámina de trabajo. Estos ejercicios se pueden realizar en ambas direcciones, de tal forma que siempre es factible establecer las relaciones entre la realidad y el dibujo. Me puedo hacer una idea de qué dimensiones tenían los objetos que realmente el artista dibujó y dejó reflejados en su composición.

Las escalas nos permiten conocer que la imagen real y la del dibujo (lámina) son semejantes.

Los que debemos saber

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos **"escala"**

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida

La **escala** es la relación que existe entre la magnitud que tiene un objeto en la realidad y en su representación gráfica.

$$a:b \qquad \frac{a}{b} = \frac{dibujo}{realidad} = \text{Escala}$$

Por ejemplo, la escala 1:200 significa que 1 cm del plano equivale a 200 cm en la realidad.

Fuente: Marea Verde.

EJERCICIO 6.1: Para aquellos cuadros de donde tu grupo obtuvo la información de las dimensiones reales, seleccionar 4 de ellos y calcular:

a)La escala del dibujo dando el valor con una expresión de tipo 1:1000, es decir, escala numérica con numerador 1. Para ello, deberás medir las dimensiones de tu lámina y obtener la proporcionalidad existente con respecto a las dimensiones averiguadas del tamaño real. Presta especial atención a las unidades, dado que para realizar este tipo de cálculos todo debe presentar las mismas unidades.

Actividad 7. La razón áurea

¿Sabías qué?

Proporciones y la relación áurea

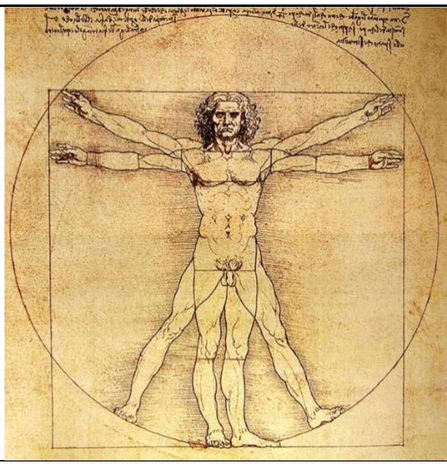
Además de la perspectiva otro factor fuertemente asociado al arte es la proporcionalidad (Giménez, 2009). Para el autor, la proporción se asocia a un prototipo idealizado de belleza. Mientras que se define la armonía como el equilibrio existente entre las distintas partes de un conjunto que conduce a la belleza. Por otro lado, el concepto de armonía se asocia a términos como conexión o concordancia. Desde tiempos antiguos, diversos matemáticos han correlacionado los conceptos de proporcionalidad con la belleza. Bajo perspectivas artísticas, se hace uso de la proporción para aportar realismo y belleza a las obras. Por el contrario, las deformaciones o distorsiones señalan ciertas rupturas o distinciones específicas. Ambas técnicas, tanto la proporcionalidad como la deformación son frecuentemente empleadas en el campo artístico.

La proporción se asocia a los estándares y cánones de belleza clásicos, se dice que la armonía aporta equilibrio y organiza las partes de un conjunto. La Razón Divina o Razón Áurea marcan la proporción perfecta entre belleza y armonía. También reciben el nombre de Razón Divina o Razón Áurea. Se dice que conducen a la perfección estética. La proporción organiza el espacio de forma agradable para los sentidos y puede ser usada a nivel estructural o en la composición de figuras o elementos. Se puede establecer la correlación entre el rectángulo áureo; el número áureo (φ), denominado phi o "número de oro" y la serie de Fibbonacci, que deriva en fhi

Luca Paccioli en 1506 elaboró un tratado que recopilaba los conceptos fundamentales sobre la proporción, dirigido a artistas y filósofos. En el tratado, el autor combina el conocimiento de las proporciones del mundo del Arte con el de la Geometría, partiendo de los conocimientos de Pitágoras. Posteriormente, estos conceptos de proporcionalidad son utilizados en sus obras por artistas como Rafael, Durero o Leonardo Da Vinci para la búsqueda de proporcionalidad y armonía (Giménez, 2009). La Razón Divina, Razón Áurea o Número Áureo se consideran la proporción perfecta entre la belleza y armonía, lo que se traduce como la perfección desde el punto de vista estético. Esta proporción se encuentra en diversidad de obras de arte, arquitectura e incluso de la naturaleza (Peralta, 1998; Garijo y De María, 2003). Así pues, esta proporcionalidad explica como la sociedad a lo largo de la historia, ha buscado la belleza en sus diversas formas y campos (Garijo y De María, 2003). Otros autores también se refieren a ella como la Sección áurea o proporción divina (Magistrali, 2019).

Leonardo Da Vinci ha sido un referente en el estudio de las proporciones, el artista se inspiró en las descripciones de Marco Vitrubio sobre la proporcionalidad y a partir de ellas, realizó la representación gráfica de "el hombre de Vitrubio". El hombre de Vitrubio se considera como la perfección de la belleza acorde a los cánones clásicos. Rincón (2004) afirma que es un ejemplo de cómo el ser humano y la naturaleza se integran en el arte, las conclusiones de su modelo han sido denominadas como la "proporción divina".

En la siguiente figura es factible observar la representación clásica y popularmente conocida de "el hombre de Vitrubio" de Leonardo Da Vinci.



Fuente: Mc Graw Hill (https://www.mheducation.es/blog/el-hombre-de-vitruvio-no-se-si-existe-ni-me-importa).

La proporción áurea considera una estructura matemática y ha sido un recurso frecuentemente utilizado en el mundo del arte. Además de artistas renacentistas, existen numerosas obras de reconocido prestigio donde queda reflejada, como en la obra de Salvador Dalí (Magistrali, 2019). Su origen se asigna a la escuela Pitagórica en torno al siglo VI a.C. y está considerada como la perfección en términos de belleza estética. Se trata de una proporción que organiza el espacio, de modo que resulta agradable para los sentidos y la percepción del ser humano, lo que se convierte en un recurso frecuentemente utilizado a lo largo de la historia del arte (Marrasé, 2016) y que se sigue empleando en la actualidad, a pesar de que suele pasar desapercibida. En las obras se utiliza a nivel estructural en las dimensiones y configuración del cuadro, dado que pueden estar compuestos en base a rectángulos; pero también en la composición de las figuras o elementos que se plasman en ellas (Marrasé, 2016).

La escuela Pitagórica que se inspira en los orígenes y perfección del ser humano, consideraba que había descubierto el "rectángulo áureo", el que definía como una figura geométrica asociada a las proporciones ideales y la belleza. Existe una propiedad especial en este rectángulo, pues dado un mismo rectángulo áureo, es factible construir un cuadrado áureo en su interior y se obtiene una figura restante que es de nuevo un rectángulo áureo. Dentro de este rectángulo áureo, nuevamente puede realizarse el mismo procedimiento hasta infinitas veces (Rincón, 2004).

Rincón (2004) afirma que otra característica importante del rectángulo áureo es la relación entre la base y la altura, que permite obtener un valor aproximado de 1,61803398875… y se conoce como "número áureo". La proporción entre la base y la altura de este rectángulo también se traslada a figuras geométricas como el pentágono, el decágono y el dodecágono; pero también a las proporciones del ser humano. El autor plantea que posiblemente se llegó al rectángulo áureo de forma intuitiva, dado que se encuentra ampliamente reflejado en la naturaleza. A su vez, la base del rectángulo áureo sirve como plantilla para construir la espiral que tan frecuentemente se encuentra en fenómenos de la naturaleza. Existe un fuerte vínculo entre la proporción áurea y la serie de Fibbonacci. Leonardo de Pisa, conocido como Fibbonacci fue el responsable de introducir el sistema de numeración indo-arábigo en Europa, sistema que ha perdurado hasta la actualidad (Marrasé, 2016; Rincón 2004). Tras un amplio bagaje en el campo de las matemáticas y planteamiento de numerosos problemas, sus razonamientos se extrapolaron y llevaron a la deducción de la serie de Fibbonacci, ampliamente vinculada a la sección áurea. La serie se compone de los números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, etc. y se construye sumando a cada número el anterior. Además, esta combinación matemática se considera la primera secuencia de estas características en Europa (Rincón 2004).

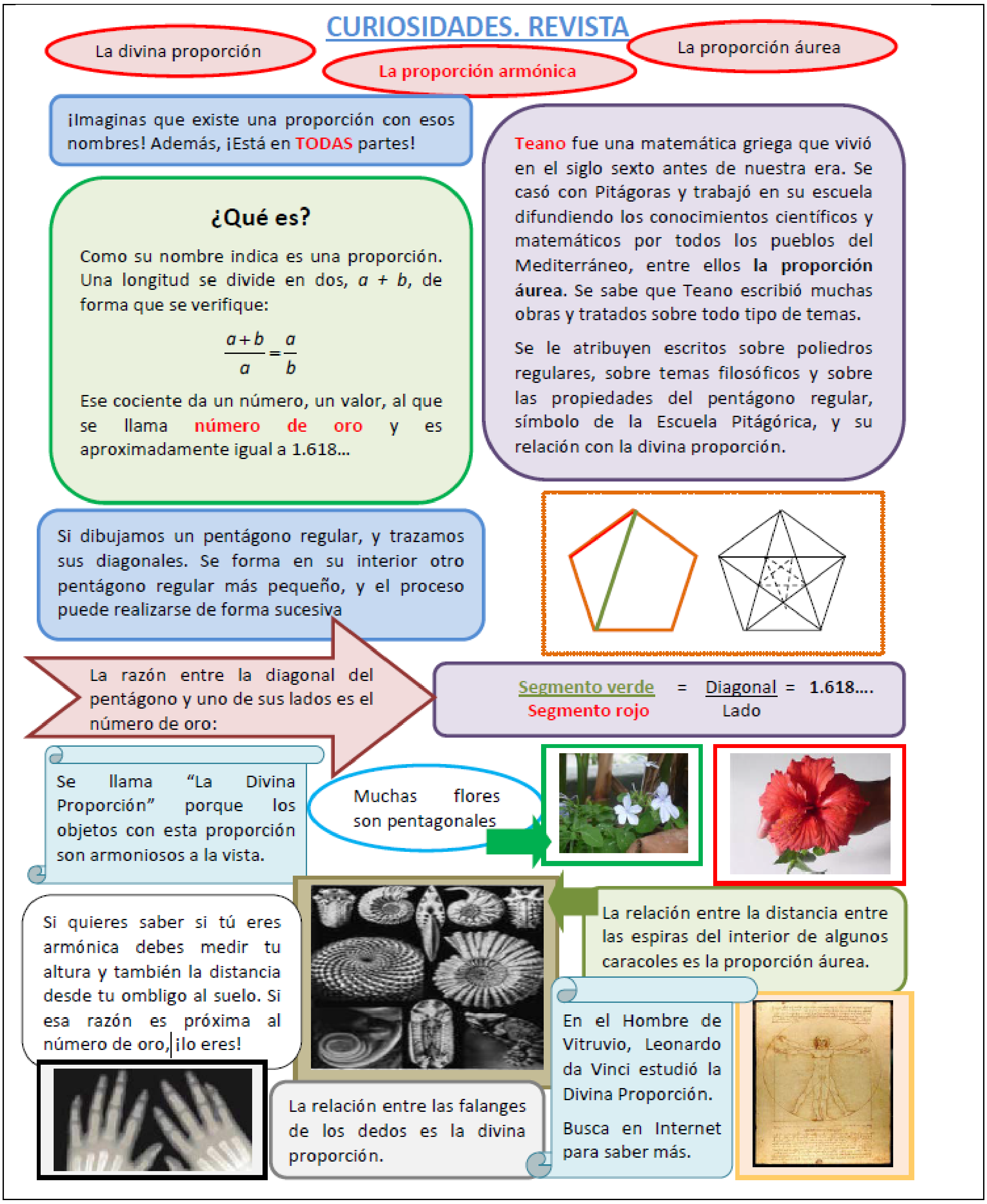
Por otra parte, Rincón (2004) explica que en el siglo XVIII el matemático Robert Simon reestudia la serie, descubriendo que es factible dividir cada término de la sucesión con el anterior y alcanzar un resultado similar al número áureo. En definitiva, el límite de dicha serie tiende al número áureo. Este descubrimiento ha permitido explicar numerosos fenómenos de la naturaleza, como la configuración de plantas y vegetales, reproducción de especies animales, etc. En consecuencia, es factible establecer la correlación entre el rectángulo áureo; el número áureo (φ), también denominado phi o "número de *oro" y la serie de Fibbonacci, que deriva en fhi (Marrasé, 2016; Vargas; Rivero; Vallejo, 2011; García y Rodríguez, 2018).*

Quiero compartir el siguiente video contigo:

"El Pato Donald y la proporción áurea"

https://www.bing.com/videos/riverview/relatedvideo?q=el+pato+donald+y+la+proporcion+aurea&mid=5028EBF17DEE27C28BA65028EBF17DEE27C28BA6&FORM=VIRE

Lluvia de ideas:



Fuente: Marea Verde.

Actividades adicionales: Si quieres puedes buscar información en internet sobre el Hombre de Vitrubio. Una vez realiza tu investigación, puedes comprobar las conclusiones de la proporción sobre tu propio cuerpo (rostro, cuerpo, falanges).

Actividades adicionales: Puedes curiosear en los siguientes enlaces de Geogebra algunos videos, actividades y aspectos sobre la proporción áurea:

a)Aplicaciones en arquitectura sobre la proporción áurea:

https://www.geogebra.org/m/x2mvwjaf

https://www.geogebra.org/m/hBE92DKf

https://www.geogebra.org/m/entcxfmb

https://www.geogebra.org/m/x2mvwjaf

b)Construcción del rectángulo áureo y la espiral:

https://www.geogebra.org/m/TSnfBAqD

https://www.geogebra.org/m/d24gzvym

c)Espiral áurea en la naturaleza:

https://www.geogebra.org/m/ex9dzak9

e)La proporción aurea:

https://www.geogebra.org/m/nhrrggkw

f)Proporción áurea:

https://www.geogebra.org/m/xn3wnbzv

g)Modelado geométrico:

https://www.geogebra.org/m/vC7eZ7Kp

h)Espiral áurea:

https://www.geogebra.org/m/Sd4PhYuV

https://www.geogebra.org/m/agahqkyv#material/jf7qcbdx

i)Proporción áurea en el arte:

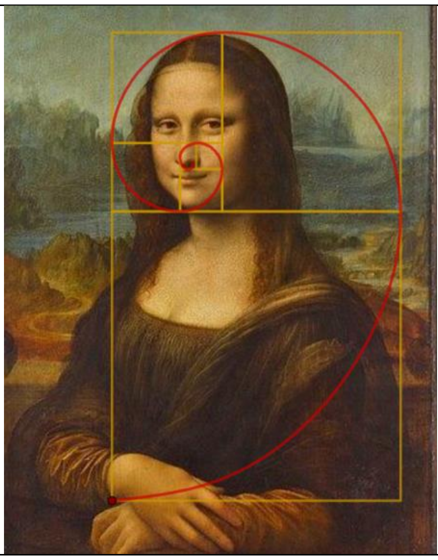
https://www.geogebra.org/m/AKr2xtAu

j)Proporción áurea El Hombre de Vitrubio:

https://www.geogebra.org/m/qxjvzqmz

EJERCICIO 7.1.: El gran artista Leonardo Da Vinci dejó reflejadas la divina proporción en su obra maestra La Gioconda. En este video de Geogebra puedes comprobar este aspecto: https://www.geogebra.org/m/sambpjvg . Históricamente se considera que todas las obras de gran fama tienen implícita esta proporcionalidad, lo que las convierte en un enganche para el observador. En el Museo del Prado podemos encontrar una obra de similares características que recibe el nombre de La Gioconda o Mona Lisa del taller de Leonardo da Vinci, también conocida como "La Gioconda del Prado", se cree que esta obra originalmente fue elaborada por un aprendiz de Leonardo Da Vinci, quién la fue elaborando en paralelo mientras su maestro, en ese mismo taller confeccionaba La Gioconda, que hoy día podemos visitar en el Museo del Lovre. Aunque durante años se estimó que su origen era difícilmente de relacionar, durante una de las restauraciones se pudo observar el fondo de este retrato, donde la gran similitud con el original evidenció que habían sido creadas de forma paralela.

Acorde a la lámina en formato A4 sobre el cuadro de "La Gioconda del Prado", traslada el rectángulo áureo y la espiral áurea al mismo.



Fuente: Geogebra.

Mona Lisa
Óleo sobre tabla de madera de nogal. 1507 - 1516

LEONARDO DA VINCI (TALLER DE)

EJERCICIO 7.2.: Siguiendo el procedimiento del ejercicio 7.1., realiza la construcción del rectángulo áureo y la espiral sobre el cuadro de Las Meninas del Museo del Prado. Visualiza el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/v5tthf7m para conocer la composición que realizó Velázquez.

Las meninas
Óleo sobre lienzo. 1656

VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y

EJERCICIO 7.3.: Intenta identificar y dibujar el rectángulo áureo y la espiral en los siguientes cuadros:

El Cardenal
Óleo sobre tabla. 1510 - 1511

RAFAEL

El lavatorio
Óleo sobre lienzo. 1548 - 1549

TINTORETTO, JACOPO ROBUSTI

EJERCICIO 7.4.: Intenta identificar y dibujar el pentágono áureo en los siguientes cuadros:


Carlos V en la batalla de Mühlberg Óleo sobre lienzo. 1548 TIZIANO, VECELLIO DI GREGORIO

Felipe IV, a caballo Óleo sobre lienzo. Hacia 1635 VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y

La reina Margarita de Austria, a caballo Óleo sobre lienzo. Hacia 1635 VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y (Y OTROS)

Actividad 8. Practicamos

Se trata de una *Jornada de reflexión* para mejorar el trabajo. Dedicaremos la sesión al planteamiento de dudas, término de actividades, revisión de soluciones, etc. Para los que hayan terminado, el reto es atreverse con otras combinaciones de ejercicios.

Actividad 9. Mis ideas y mi mente

¿Qué debemos saber? Pautas para elaborar el Mapa Conceptual:

EJERCICIO 9.1.: Por equipos se va a realizar un Mapa Conceptual que recoja los aspectos estudiados en clase. Los contenidos que debe contener el esquema son:

Elementos del Plano:
- Puntos, rectas, semirrectas, segmentos. Puedes usar dibujos y símbolos para un mejor estudio.
- Tipos de rectas y dibujo de cada tipo al lado a modo de ejemplo.

Ángulos:
- Indica su definición y representa un ejemplo con sus nombres y sus partes.
- Tipos de ángulos, indicar con un esquema las distintas clasificaciones y un dibujo de cada tipo.
- Ángulos complementarios y suplementarios, define y dibuja.

Polígonos:
- Definición y diferencia mediante algún dibujo entre línea poligonal y polígono.
- Clasificaciones de los polígonos, según sus ángulos y según sus lados. Indicar mediante un esquema las distintas clasificaciones y un dibujo de cada tipo.
- Elementos de un polígono (lados, ángulos, vértices, diagonales), utiliza un dibujo para representarlos.
- Diferencia entre polígono regular e irregular, representa un dibujo con el centro, radio, ángulo central y apotema.

Circunferencia y círculo:
- Diferencias entre circunferencia y círculo, define y haz un dibujo.
- Elementos de la circunferencia (centro, radio, diámetro, cuerda), haz un dibujo.
- Dibuja sector circular y segmento circular. Dibuja corona circular
- Posiciones entre una recta y una circunferencia, con un dibujo especifica los tres tipos.

Triángulos:
- Clasificación de los triángulos, indica los tipos y añade un dibujo.
- Indica las propiedades principales de un triángulo (suma de sus ángulos y relación entre sus lados).
- Indica con un dibujo la mediatriz y bisectriz de un segmento y de un triángulo. Recuerda que es importante nombrar los distintos elementos.
- Indica con un dibujo la altura, mediana, ortocentro y baricentro de un triángulo. Recuerda que es importante nombrar los distintos elementos.
- Indica las 3 características para la “Igualdad de Triángulos”.

Cuadriláteros:
- Indica su definición.
- Clasificación de los cuadriláteros convexos, diferencia entre paralelogramo y no paralelogramo. Indica el nombre y haz un dibujo de cada tipo.
- Indica las propiedades de los cuadriláteros (suma de sus ángulos y diagonales).

Mediatriz y bisectriz:
- Realiza un dibujo de cada tipo.

Medida y cálculo de ángulos
- Indicar sistema de medida de ángulos y unidades de medida.
- Diferencia entre forma compleja e incompleja, puedes indicarlo poniendo un ejemplo.
- Suma y resta de ángulos. Indica el procedimiento por medio de un ejemplo.

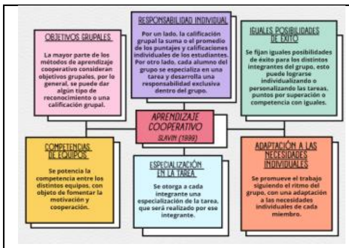
Simetría:
- Haz un dibujo e indica el eje de simetría de una figura plana.
- Pon dos ejemplos de figuras con varios ejes de simetría, realiza el dibujo e indica el eje.
- Definición y propiedades de la simetría.

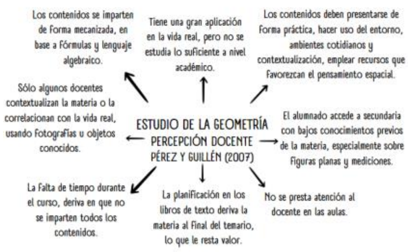
Escalas:
- Indica la expresión para la escala numérica.

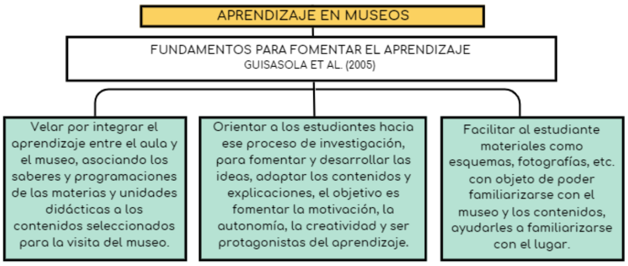
Arte:
- ¿Para que usan la simetría los artistas?
- ¿Qué es la razón áurea? Dibuja un rectángulo áureo. ¿Dónde podemos encontrar la razón áurea?
- Principales elementos geométricos en los cuadros.

El mapa conceptual se debe realizar a mano, dado que incluirás diversos dibujos y/o esquemas. No obstante, aquí tienes algunos ejemplos de estructuras para que tengas en mente como empezar un mapa conceptual. Recuerda dividir el trabajo entre los distintos miembros del equipo para ir montando un mapa general. Montar la información entre todos, distribuyendo cada una de las partes; aunque finalmente, tendréis que tener todos una copia del mapa para poder estudiarlo.

Esta actividad es un apartado importante para el posterior estudio, por lo que en caso de no haberla finalizado durante la clase, deberéis poneros de acuerdo para realizarla como tarea extraescolar y finalizarla.







Fuente: elaboración Propia con Genially y Canva.

Actividad 10. Creando mi propia obra de arte

Vuelve al contenido de la Actividad 0 y revisa los apartados que debe incluir el portfolio. Junto con el resto de tu equipo comienza a montar la información, revisa que todas las soluciones se encuentren en limpio para presentar un trabajo ordenado y coherente. Selecciona las soluciones con mejor presentación para ser entregadas en caso de disponer de varias opciones.

Revisa que todos los cuadernillos estén complementos y no olvides incluir las hojas extras donde realizaste cálculos, esquemas y resolviste los ejercicios.

Siguiendo las pautas y el orden que indica tu cuadernillo y las actividades propuestas, revisa que no falte ninguna información para el portfolio. Recuerda incluir portada, índice y todos los elementos solicitados.

Pliega con cuidado las láminas de trabajo, revisa que no falte ninguna y guárdalas en las fundas plásticas.

En caso de no finalizar la actividad a tiempo, deberéis poneros de acuerdo y finalizarla como tarea extraescolar.

Actividad 11. Hablando como un artista

Comparte con tu grupo tus conclusiones finales.

Por grupos, preparar un guión sencillo para no olvidar los puntos clave que queréis defender en clase. Se puede intentar seguir las siguientes pautas para prepararlo:

1. ***¿Qué hemos aprendido?*** *Escoge un cuadro para explicar todos los contenidos matemáticos que ha identificado tu grupo. El profesor lo proyecta, mientras un miembro del grupo lo explica.*
2. ***¿Se pueden estudiar geometría en los cuadros?***
3. ***Alguna anécdota histórica o aspecto que me ha llamado la atención****.*

Actividad 12. ¿Ahora sí Mates y Arte?

Se realiza un debate a nivel de grupo clase, demostrando y concluyendo junto con el docente todo lo aprendido durante el Proyecto.

ÚLTIMA HOJA: PARA LA VISITA AL MUSEO

Actividad 13. Paseo por mi museo

Esta actividad pertenece a la última sesión que realizaremos en el Museo del Prado. Será nuestro paseo matemático para culminar con esta unidad de Geometría.

Los materiales de esta actividad se trabajan de forma individual durante la visita y serán distribuidos en la última sesión que considera la visita al Museo, con la que finaliza el Proyecto.

Actividad 14. ¿Qué hemos aprendido?

Se trata de la última actividad del proyecto, que tendrá lugar durante el Paseo Matemático por el Museo del Prado.

Ahora es tú momento para reflexionar y pensar sobre lo que has aprendido y lo que no, también de valorar a tus compañeros. Serás tú quién haga el papel de profe, recuerda que debes ser justo contigo mismo y con tus compañeros, ahí es donde se encuentra la verdadera reflexión y el verdadero aprendizaje.

Debes ser justo y evaluar el trabajo, no pensar quién es tu amigo o quién no. Haz con ellos lo mismo que te gustaría que hicieran contigo.

Además, también te voy a pedir que puedas evaluar este proyecto, que te ha parecido su realización y si consideras que ha sido una experiencia positiva; o por el contrario, si aprendes más cuando usamos los libros de texto y con las clases de toda la vida.
Te voy a repartir tres documentos, que debes rellenar y entregar tan pronto los termines. No tienes que compartir tus respuestas con tus compañeros, se trata de un trabajo autónomo:

- Ficha de autoevaluación: Lo que he aprendido.
- Ficha de coevaluación: Evaluando a mis compañeros.
- Cuestionario sobre tu opinión y valoración del proyecto.

Anexo K. Instrumentos de Evaluación

Tabla 22. *Escala de Observación Numérica para evaluación del alumno, para la sesión 5.*

ESCALA DE OBSERVACIÓN NUMÉRICA (1 a 4): ADQUISIÓN DE CONTENIDOS RELACIONADOS CON EL ABP					
Nombre del alumno:					
Materia:	**Evaluación:**				
Proyecto:	**Fecha:**				
1: Nunca / 2: Algunas Veces / 3: Casi Siempre / 4: Siempre					
Criterios de Evaluación	**Indicadores de Logro**	**VALORACIÓN**			
		1	**2**	**3**	**4**
1.1.	1.1.1. Identifica, examina y clasifica los distintos elementos del plano (puntos, rectas, semirrectas, segmentos) y conocer su clasificación.				
	1.1.2. Reconoce los distintos tipos de ángulos acorde a las clasificaciones y las relaciones angulares.				
	1.1.3. Examina y clasifica las diversas figuras planas (polígonos, círculo y circunferencia, triángulos y cuadriláteros), elementos, propiedades y clasificaciones.				
	1.1.4. Reconoce, relaciona e interpreta las simetrías en las figuras planas.				
	1.1.5. Diferencia entre los conceptos de circunferencia y círculo, líneas poligonales y polígonos.				
	1.1.6. Identifica e interpreta las propiedades fundamentales de un triángulo y los puntos notables. Conoce el concepto de igualdad de triángulos.				
1.2.	1.2.1. Practica y resuelve con los datos de los esquemas geométricos, explicaciones, coteja información para conseguir el resultado.				
	1.2.2. Reconoce y practica las propiedades de los elementos, tipos y clasificación en distintos soportes (esquemas, cuadernillos, ejemplos, cuadros).				
	1.2.3. Calcula problemas y ejercicios de operaciones con ángulos y practicar ejemplos sobre la mediatriz y la bisectriz.				
1.3.	1.3.2. Representa los elementos de un polígono (lados, ángulos, vértices y diagonales).				
	1.3.3. Representa los elementos de una circunferencia (centro, radio, diámetro, arco y cuerda) y reconoce las posiciones entre una recta y una circunferencia.				
2.1.	2.1.1. Compara los esquemas geométricos de las explicaciones o de los apuntes y cuadernillos con los elementos que se identifican en las láminas.				
	2.1.2. Contrasta los ejemplos y soluciones de otros compañeros para comprobar el resultado.				
3.1.	3.1.1. Propone y traslada los esquemas geométricos a las láminas.				
	3.1.2. Numera y clasifica los distintos elementos para ordenar y organizar la información.				
	3.1.3. Examina y visualiza elementos geométricos en las láminas de estudio.				
5.1.	5.1.1. Estudia y relaciona la razón y proporción por medio de anécdotas históricas y el contexto del arte.				
	5.1.2. Reflexiona sobre la relación entre las matemáticas y otras áreas, en concreto, el arte.				
	5.1.3. Identifica y valora la conexión entre la geometría en el entorno artístico.				
	5.1.4. Establece las escalas y conocimientos previos para resolver problemas sobre las obras de arte.				

Criterios de Evaluación	Indicadores de Logro	VALORACIÓN			
		1	2	3	4
5.1.	5.1.5. Identifica los diversos elementos geométricos en el entorno a partir de obras de arte, sintetiza la información y genera las correlaciones.				
	5.1.6. Recurre a fuentes fiables por medio del uso de las TIC para documentar el trabajo.				
CE6	6.1.1. Examina y resuelve ejercicios y problemas para identificar la geometría de forma creativa en las obras de arte.				
	6.1.2. Comprueba la conexión entre los conceptos teóricos explicados y las láminas de trabajo propuestas.				
	6.1.3. Aplica conceptos estudiados en otros temas o asignaturas para responder de forma completa durante las actividades.				
7.1.	7.1.1. Identifica y representa los elementos geométricos en las láminas.				
	7.1.2. Crea y traslada los conceptos geométricos a las láminas, vinculando los conceptos.				
	7.1.3. Sintetiza la información por medio de esquemas.				
8.1.	8.1.1. Participa activamente adoptando papel activo dentro del grupo, aporta ideas y ayuda a obtener un resultado final.				
	8.1.2. Intenta emplear el lenguaje matemático durante la explicación oral de los contenidos, cuando manifiesta sus ideas o propone soluciones.				
	8.1.3. Propone justificaciones y argumentos en las explicaciones, aporta ideas para el trabajo en grupo.				
	8.1.7. Expresa y argumenta las ideas en trabajo cooperativo.				
9.1	9.1.1. Trabaja de forma motivada y constructiva durante la actividad.				
	9.1.2. Manifiesta sus dudas o inquietudes al grupo o al docente con objeto de mejorar los resultados del trabajo.				
	9.1.3. Afronta las tareas con positividad y como retos que deben ser resueltos con la mayor calidad posible.				
9.2.	9.2.1. Acepta los comentarios ajenos, con perspectiva de aumentar su aprendizaje o transmitir sus conocimientos.				
	9.2.2. Participa de forma equitativa con los miembros. Fomenta la comunicación fluida.				
10.1.	10.1.1. Interacciona con los miembros del equipo y trabaja de forma respetuosa y proactiva. Se animan entre ellos para fomentar un buen ambiente de trabajo, existen debates, propuestas y sugerencias para mejorar el trabajo realizado.				
	10.1.2. Trabaja de forma productiva y con implicación.				
	10.1.3. Decide y discute con aptitud tolerante sobre las diversas opciones de trabajo para las actividades.				
CT1	CT1.1: Realiza un trabajo autónomo con aptitud positiva e interés por la actividad.				
	CT1.2: Participa de forma productiva y respetuosa en el grupo.				
	CT1.3: Propone ideas ingeniosas o intenta relacionar los contenidos que se explican.				

Criterios de Evaluación	Indicadores de Logro	VALORACIÓN			
		1	2	3	4
CT1	CT1.4: Reflexiona e investiga sobre los temas solicitados.				
CT2	CT2.1: Investiga en fuentes de información, consulta los apuntes de apoyo.				
	CT2.2.: Participa de forma activa en el grupo de cooperativo, con el grupo clase y con el docente. Se expresa de forma correcta, coherente y recurre al uso del lenguaje matemático.				
	CT2.3: Responde a las actividades con coherencia y argumentos.				
CT3	CT3.1: Comprende el material expuesto y relaciona las explicaciones, para la puesta en práctica de los conceptos matemáticos.				
CT4	CT4.1: Realiza un buen trabajo de documentación, acude a varias fuentes, compara información y muestra interés por la actividad.				
CT5	CT5.1: Apoya a los compañeros, reflexiona sobre ideas de los demás y las propuestas de clase.				
	CT5.2: Manifiesta una actitud de respeto, tolerancia y cooperativa.				
	CT5.3: Recomienda y propone sus ideas, defiende y valora sus argumentos con educación.				
CT6	CT6.1: Comprende las conexiones planteadas entre el Arte y las Matemáticas.				
	CT6.2: Visualiza conexiones y aporta ideas adicionales, realiza un trabajo completo con las láminas de estudio.				
	CT6.3: Plantea ideas con criterio y creatividad, propone ideas adicionales, genera esquemas de diseño y correlación de geometría elaborados.				
	PUNTAJE				

Fuente: elaboración propia.

Tabla 23. *Rúbrica de evaluación para el producto final del ABP y el AC: portfolio y producción oral del grupo.*

Nombre del Alumno: ______________________________ **Evaluación Alumno:** ________________

Nombre del Grupo: ______________________________ **Evaluación Grupo:** ________________

INDICADORES	Niveles de desempeño				Nivel de Logro
	1 (SUSPENSO)	2 (APROBADO)	3 (NOTABLE)	4 (SOBRESALIENTE)	
1.3.1. Diseña un producto final, de tipo portfolio o parte del mismo, que describe todos los aspectos matemáticos aprendidos y relaciones con cada obra de arte.	Sólo se ha entregado una parte del trabajo, por ejemplo, el cuadernillo o las láminas, o bien sólo una parte de las preguntas respondidas.	El grupo entrega un portfolio con ciertas carencias. Entrega de un documento donde se ha contestado a la mayor parte de las preguntas correctamente.	El grupo entrega un informe con la mayor parte de las respuestas y buena presentación en general. Entrega un documento donde se ha contestado a la mayor parte de las preguntas correctamente.	El grupo entrega un informe con todas las respuestas ordenadas, se observa un trabajo limpio, uso de distintos colores y anotaciones correctas. Entrega un portfolio con todo lo solicitado, respondiendo a todas las preguntas de forma correcta, presentación cuidada e incluye la totalidad de apartados.	
8.1.1. Participa activamente adoptando papel activo dentro del grupo, aporta ideas y ayuda a obtener un resultado final.	No ha existido un trabajo en grupo como tal. El trabajo en su totalidad recae en una única persona.	El 50% de los miembros del equipo han participado por igual en la realización de las tareas. Trabajan de forma desordenada, se evidencia falta de proposición de ideas y participación. No se ha planificado la actividad correctamente.	El 75% de los miembros han participado por igual en la realización de las tareas. Trabajan bien, pero de forma desordenada, no comparten y proponen ideas. Se ha repartido el trabajo correctamente, pero el grupo no muestra un rendimiento óptimo, se observa una gestión lenta de las tareas. Se puede mejorar.	Escuchan a sus compañeros, proponen ideas y son respetuosos con el trabajo de los demás y sus opiniones. Excelente organización y reparto del trabajo en grupo. Todas las personas han participado realizando un trabajo efectivo. Existe una buena planificación del trabajo.	
8.1.2. Intenta emplear el lenguaje matemático durante la explicación oral de los contenidos, cuando manifiesta sus ideas o propone soluciones.	No existe una base de lenguaje matemático, tampoco existe intención de avanzar en este aspecto.	Existe comunicación, pero no hay intención de hacer uso del lenguaje matemático.	Existe un lenguaje matemático, aunque se observa dificultad para la comunicación.	Existe un lenguaje matemático correcto para el nivel, los contenidos se expresan con coherencia y fluidez.	

INDICADORES	**Niveles de desempeño**				**Nivel de Logro**
	1 (SUSPENSO)	**2 (APROBADO)**	**3 (NOTABLE)**	**4 (SOBRESALIENTE)**	
8.1.3. Propone justificaciones y argumentos en las explicaciones, aporta ideas para el trabajo en grupo.	Los miembros del equipo no interaccionan o no trabajan de una forma respetuosa.	Los miembros del equipo interaccionan y trabajan de una forma respetuosa. Pero no existe motivación de cara a la tarea, no se animan entre ellos para fomentar un buen ambiente de trabajo.	Los miembros del equipo interaccionan y trabajan de una forma respetuosa. Se animan entre ellos para fomentar un buen ambiente de trabajo, se observa complicidad entre ellos.	Los miembros del equipo interaccionan y trabajan de una forma respetuosa y proactiva. Se animan entre ellos para fomentar un buen ambiente de trabajo, existen debates, propuestas y sugerencias para mejorar el trabajo realizado. Trabajo realizado de forma productiva y con implicación.	
8.1.4. Responde de forma ordenada, tanto oral como por escrito.	Falta gran parte del trabajo y no es factible evaluar la expresión escrita.	Expresión oral y escrita incoherentes.	Hay buena expresión oral, pero la expresión escrita evidencia carencias.	Existe una correcta expresión oral y escrita.	
8.1.5. Entrega un trabajo limpio, uso de distintos colores y anotaciones correctas.	Sólo se ha entregado una parte del trabajo, por ejemplo, el informe, o bien sólo una parte de las preguntas respondidas.	El grupo entrega un informe con ciertas carencias. Entrega de un documento donde se ha contestado a la mayor parte de las preguntas correctamente.	El grupo entrega un informe con la mayor parte de las respuestas y buena presentación en general. Entrega un documento donde se ha contestado a la mayor parte de las preguntas correctamente.	El grupo entrega un informe con todas las respuestas ordenadas, se observa un trabajo limpio, uso de distintos colores y anotaciones correctas. Entrega un documento con todo lo solicitado, respondiendo a todas las preguntas de forma correcta y presentación cuidada.	
8.1.6. Entrega un documento con todo lo solicitado, respondiendo a todas las preguntas de forma correcta y presentación cuidada.	Sólo se ha entregado una parte del trabajo, por ejemplo, el informe, o bien sólo una parte de las preguntas respondidas.	El grupo entrega un informe ciertas carencias. Entrega de un documento donde se ha contestado a la mayor parte de las preguntas correctamente.	El grupo entrega un informe con la mayor parte de las respuestas y buena presentación en general. Entrega un documento donde se ha contestado a la mayor parte de las preguntas correctamente.	El grupo entrega un trabajo con todas las respuestas ordenadas, se observa un trabajo limpio, uso de distintos colores y anotaciones correctas. Entrega un documento con todo lo solicitado, respondiendo a todas las preguntas de forma correcta y presentación cuidada.	
8.1.7. Expresa y argumenta las ideas en trabajo cooperativo.	No existe comunicación entre los miembros del equipo, falta de interés por el proyecto.	Los alumnos trabajan de forma individual, no existe comunicación entre ellos, adoptan una aptitud de poca cooperación.	Los alumnos trabajan en equipo de forma regular, pero muestran una aptitud competitiva.	Existe una actitud de comunicación fluida entre los miembros del equipo, se apoyan mutuamente y comparten las ideas antes de responder.	

INDICADORES	**Niveles de desempeño**				**Nivel de Logro**
	1 (SUSPENSO)	**2 (APROBADO)**	**3 (NOTABLE)**	**4 (SOBRESALIENTE)**	
9.2.3. El grupo entrega un producto con todos los requerimientos del proyecto.	Sólo se ha entregado una parte del trabajo, por ejemplo, el informe, o bien sólo una parte de las preguntas respondidas.	El grupo entrega un informe ciertas carencias. Entrega de un documento donde se ha contestado a la mayor parte de las preguntas correctamente.	El grupo entrega un informe con la mayor parte de las respuestas y buena presentación en general. Entrega un documento donde se ha contestado a la mayor parte de las preguntas correctamente.	El grupo entrega un informe con todas las respuestas ordenadas, se observa un trabajo limpio, uso de distintos colores y anotaciones correctas. Entrega un documento con todo lo solicitado, respondiendo a todas las preguntas de forma correcta y presentación cuidada.	
9.2.4. Defiende las ideas propuestas y soluciones adoptadas.	El alumno apenas ha trabajado activamente, no se observa interés por la actividad realizada.	El alumno participa parcialmente, se observa que existen partes de la actividad donde se muestra desinteresado.	El alumno participa con la finalidad de entregar el trabajo, sin embargo, no se observa una aptitud positiva de cara a la realización de la actividad.	El alumno ha participado activamente adoptando papel activo dentro del grupo, aporta ideas y ayuda a obtener un resultado final. Se observa motivación del alumno para realizar la actividad.	
CT4.1: Realiza un buen trabajo de documentación, acude a varias fuentes, compara información y muestra interés por la actividad.	Apenas se ha realizado la parte de búsqueda de información, o el alumno no lleva la información.	Se ha investigado parte de la documentación, pero falta información o parte de la investigación.	Se ha realizado un trabajo completo de documentación y se investigan más ítems de los que solicita la actividad. Aunque no se han realizado todas las actividades adicionales.	Se realizan todas las actividades propuestas de forma adicional, además, se ha realizado un trabajo completo de documentación y se investigan más ítems de los que solicita la actividad.	
CT5.1: Apoya a los compañeros, reflexiona sobre ideas de los demás y las propuestas de clase.	Existe una aptitud poco respetuosa y reactiva en ciertos momentos.	Existe un acercamiento selectivo hacia ciertos compañeros, pero no una cohesión o proactividad con ellos.	El alumno interactúa con su equipo, aunque a veces se observa menos participativo.	Trabajo en equipo con el grupo y con el resto de alumnos de otros grupos. Aptitud positiva y proactiva para apoyar a los compañeros.	
CT5.2: Manifiesta una actitud de respeto, tolerancia y cooperativa.	No ha existido un trabajo en grupo como tal. El trabajo en su totalidad recae en una única persona.	El 50% de los miembros del equipo han participado por igual en la realización de las tareas. Trabajan de forma desordenada, se evidencia falta de proposición de ideas y participación. No se ha planificado la actividad correctamente.	El 75% de los miembros han participado por igual en la realización de las tareas. Trabajan bien, pero de forma desordenada y no siempre se proponen ideas. Se ha repartido el trabajo correctamente, pero el grupo no muestra un rendimiento óptimo, se observa una gestión lenta de las tareas.	Escuchan a sus compañeros, proponen ideas y son respetuosos con el trabajo de los demás y sus opiniones. Excelente organización y reparto del trabajo en grupo. Todas las personas han participado realizando un trabajo efectivo. Existe una buena planificación del trabajo.	

INDICADORES	Niveles de desempeño				Nivel de Logro
	1 (SUSPENSO)	2 (APROBADO)	3 (NOTABLE)	4 (SOBRESALIENTE)	
CT5.3: Recomienda y propone sus ideas, defiende y valora sus argumentos con educación.	Se han evidenciado algunas faltas de respeto y falta de atención durante las actividades.	El alumno se muestra respetuoso durante sus argumentaciones, con aptitud tolerante y cooperativa con sus compañeros. Pero no participa activamente en la resolución de actividades.	El alumno aporta ideas y soluciones la mayor parte del tiempo. Se muestra respetuoso durante sus argumentaciones, con aptitud tolerante y cooperativa con sus compañeros. Aunque se observa cierto desinterés o distracción durante algunas actividades.	El alumno aporta ideas y soluciones constantemente. Se muestra respetuoso durante sus argumentaciones, con aptitud tolerante y cooperativa con sus compañeros.	
CT6.1: Comprende las conexiones planteadas entre el Arte y las Matemáticas.	El trabajo está lleno de incoherencias, no existe comprensión de los contenidos matemáticos y existen problemas para realizar las conexiones con el Arte.	Los contenidos matemáticos se han comprendido parcialmente, así como su conexión con el Arte.	Existe un dominio de los contenidos matemáticos, en detalle de la Geometría, pero existe dificultad para realizar las conexiones con el mundo del arte.	Existe un dominio de los contenidos matemáticos, en detalle de la Geometría y se han realizado correctamente las conexiones con el mundo del arte.	
CT6.2: Visualiza conexiones y aporta ideas adicionales, realiza un trabajo completo con las láminas de estudio.	El trabajo está lleno de incoherencias, no existe comprensión de los contenidos matemáticos y existen problemas para realizar las conexiones con el Arte. No se entrega todo el trabajo.	Los contenidos matemáticos se han comprendido parcialmente, así como su conexión con el Arte. Entrega completa del trabajo, pero bastante mejorable.	Existe un dominio de los contenidos matemáticos, en detalle de la Geometría, pero existe dificultad para realizar las conexiones con el mundo del arte. Entrega completa del trabajo.	Existe un dominio de los contenidos matemáticos, en detalle de la Geometría y se han realizado correctamente las conexiones con el mundo del arte. Entrega completa del trabajo, incluyendo actividades adicionales.	
CT6.3: Plantea ideas con criterio y creatividad, propone ideas adicionales, genera esquemas de diseño y correlación de Geometría elaborados.	Falta de interés o no entrega el trabajo.	Ha existido una buena predisposición durante todo el proyecto, pero se realiza el mínimo número de actividades.	Ha existido una aptitud creativa y buena predisposición durante la mayor parte del proyecto.	Ha existido una aptitud creativa y muy buena predisposición durante todo el proyecto.	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 24. *Instrumento de autoevaluación. Escala de Observación Numérica para realizar el alumno.*

Indicaciones: Marca con una "x" la opción que señale como consideras que ha sido tu aptitud, tu colaboración, grado de implicación y aprendizaje en el proyecto.

AUTOEVALUACIÓN			
Ficha de autoevaluación: Lo qué he aprendido			
Aquí debo indicar mi valoración de cómo considero que he trabajado en grupo para este Proyecto:			
Nombre y apellidos:			
Materia:			
Proyecto:		**Fecha:**	
Escala Valorativa:	**1: Nunca / 2: A veces / 3: Siempre**		

CRITERIOS	**INDICADORES DE LOGRO**	**Valoración**		
		1	2	3
1.1.1.	Conozco los elementos del plano (puntos, rectas, semirrectas, segmentos) y su clasificación.			
1.1.2.	Reconozco las clasificaciones de los ángulos, se identificarlos y medirlos.			
1.1.3.	Conozco los distintos tipos de figuras planas (polígonos, círculo y circunferencia, triángulos y cuadriláteros) y puedo clasificarlas.			
1.1.4.	Entiendo el concepto de simetría y el eje de simetría.			
1.1.5.	Diferencio entre circunferencia y círculo, líneas poligonales y polígonos.			
1.1.6.	Conozco las propiedades de un triángulo, los puntos notables y la igualdad de triángulos.			
1.3.2.	Represento los elementos de un polígono (lados, ángulos, vértices y diagonales).			
1.3.3.	Represento los elementos de una circunferencia (centro, radio, diámetro, arco y cuerda) y reconozco las posiciones entre una recta y una circunferencia.			
2.1.2.	Contrasto los ejemplos y soluciones de otros compañeros para comprobar el resultado.			
3.1.1.	Propongo y traslado los elementos geométricos a las láminas de cuadros.			
3.1.2.	Numero y clasifico los distintos elementos para ordenar y organizar la información.			
3.1.3.	Examino y visualizo elementos geométricos en las láminas de estudio.			
5.1.1.	Conozco la proporción áurea y algunas anécdotas históricas relacionadas sobre el arte.			
5.1.2.	Reflexiono sobre la relación entre las Matemáticas y el Arte, además de otras áreas.			
5.1.3.	Valoro la conexión entre la geometría y el entorno artístico.			
5.1.4.	Utilizo las escalas para resolver problemas sobre las medidas de los cuadros.			
5.1.5.	Identifico distintos elementos geométricos en las obras de arte.			
5.1.6.	Hago un uso responsable de las TIC para documentar el trabajo.			
6.1.1.	Intento ser creativo para resolver ejercicios e identificar la Geometría en las obras de arte.			
7.1.2.	Traslado y relaciono los conceptos geométricos con los cuadros.			
7.1.3.	Realizo un esquema con la información.			
8.1.1.	Participo activamente dentro del grupo, aporto ideas y ayudo a obtener el resultado final.			
8.1.3.	Propongo justificaciones y argumentos en las explicaciones, aportando ideas para el trabajo en grupo.			
8.1.4.	Respondo de forma ordenada, oral y por escrito.			
8.1.5.	Entrego un trabajo limpio, con distintos colores y anotaciones.			
8.1.6.	Entrego un documento con todos los apartados y presentación cuidada.			
8.1.7.	Expreso y argumento mis ideas a los miembros de mi grupo.			
9.1.1.	Trabajo de forma motivada durante las actividades.			
9.1.2.	Manifiesto mis dudas e inquietudes al grupo o al docente.			
9.1.3.	Afronta las tareas con positividad y como retos que deben ser resueltos con la mayor calidad posible.			
9.2.1.	Acepto con tolerancia y respeto los comentarios ajenos.			
9.2.2.	Me comunico por igual con todos mis compañeros.			
9.2.4.	Defiendo las ideas propuestas y soluciones adoptadas.			
10.1.1.	Interacciono con los miembros de mi equipo y trabaja de forma respetuosa, para lograr un buen trabajo.			
10.1.2.	Trabajo de forma productiva y con implicación.			

CRITERIOS	**INDICADORES DE LOGRO**	**Valoración**		
		1	2	3
10.1.3.	Decido y participo sobre las diversas soluciones para las actividades.			
CT1.1.	Realizo un trabajo con aptitud positiva e interés por la actividad.			
CT1.2.	Participo de forma productiva y respetuosa en el grupo.			
CT1.3.	Propongo ideas a mi grupo.			
CT1.4.	Investigo sobre los temas solicitados.			
CT2.1.	Investigo en fuentes de información y consulto los cuadernillos y apuntes.			
CT2.2.	Participo de forma activa en el grupo, con el grupo clase y con el docente. Intento usar el lenguaje matemático.			
CT2.3.	Respondo a las actividades con argumentos.			
CT4.1.	Realizo un buen trabajo de documentación, consulto varias fuentes y comparo información.			
CT5.1.	Apoyo a los compañeros, reflexiono sobre las ideas de los demás.			
CT5.2.	Manifiesto una actitud de respeto y tolerancia y cooperativa.			
CT6.1.	Comprendo la relación entre el Arte y las Matemáticas.			
CT6.2.	Aporta ideas adicionales, realizo un trabajo completo con las láminas de los cuadros.			
CT6.3.	Planteo ideas con criterio y creatividad, propongo ideas adicionales.			
	PUNTAJE			

Fuente: elaboración propia.

Tabla 25. *Instrumento de coevaluación. Escala de Observación Numérica para realizar el alumno.*

Indicaciones: Marca con una "x" la opción que señale como realizaron tus compañeros de equipo las distintas actividades. Debes cumplimentar una ficha por cada compañero, no olvides dejar indicado tu nombre y el compañero al que estás evaluando.

COEVALUACIÓN			
Ficha de coevaluación: Evaluando a mis compañeros			
Aquí debo indicar la valoración del trabajo de mis compañeros:			
Mi nombre y apellidos:			
Materia:			
Proyecto:		**Fecha:**	
Nombre del equipo:			
Nombre de mi compañero:			
Indicadores	**Niveles**		
	Siempre	**A veces**	**Nunca o casi nunca**
Participa en todas las actividades realizadas por el equipo.			
Cumple con las tareas y comisiones asignadas.			
Participa en la toma de acuerdos del equipo.			
Propone ideas al equipo.			
Muestra una aptitud respetuosa con los miembros del equipo.			
Participa en las tareas con actitud positiva.			
Colabora en la elaboración del portfolio.			
Colabora en la exposición oral.			
Nombre de mi compañero:			
Indicadores	**Niveles**		
	Siempre	**A veces**	**Nunca o casi nunca**
Participa en todas las actividades realizadas por el equipo.			
Cumple con las tareas y comisiones asignadas.			
Participa en la toma de acuerdos del equipo.			
Propone ideas al equipo.			
Muestra una aptitud respetuosa con los miembros del equipo.			
Participa en las tareas con actitud positiva.			
Colabora en la elaboración del portfolio.			
Colabora en la exposición oral.			
Nombre de mi compañero:			
Indicadores	**Niveles**		
	Siempre	**A veces**	**Nunca o casi nunca**
Participa en todas las actividades realizadas por el equipo.			
Cumple con las tareas y comisiones asignadas.			
Participa en la toma de acuerdos del equipo.			
Propone ideas al equipo.			
Muestra una aptitud respetuosa con los miembros del equipo.			
Participa en las tareas con actitud positiva.			
Colabora en la elaboración del portfolio.			
Colabora en la exposición oral.			
Nombre de mi compañero:			
Indicadores	**Niveles**		
	Siempre	**A veces**	**Nunca o casi nunca**
Participa en todas las actividades realizadas por el equipo.			

Cumple con las tareas y comisiones asignadas.			
Participa en la toma de acuerdos del equipo.			
Propone ideas al equipo.			
Muestra una aptitud respetuosa con los miembros del equipo.			
Participa en las tareas con actitud positiva.			
Colabora en la elaboración del portfolio.			
Colabora en la exposición oral.			

Fuente: elaboración propia.

Tabla 26. *Instrumento de heteroevaluación docente. Registro Anecdótico de Visita al Museo*

<table>
<tr><td colspan="4">REGISTRO ANECDÓTICO</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ficha de heteroevaluación para el docente</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observaciones durante la visita al Museo</td></tr>
<tr><td>Materia:</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Proyecto:</td><td></td><td>Fecha:</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre del alumno:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Actividad:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción de la situación:</td><td colspan="2">Análisis:</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Calificación (1 a 10) del cuadernillo entregado sobre la visita al museo:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observaciones sobre el cuadernillo entregado:</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

Anexo L. Evaluación del Proyecto

Tabla 27. *Formato de Autoevaluación docente de las actividades y sesiones de la propuesta didáctica.*

Sesión	**Actividad**	**Fecha**	**Valoración de Actividades (consecución de objetivos, adecuación de saberes básicos, duración, claridad del procedimiento, nivel de dificultad, los instrumentos de evaluación permiten valorar el logro de los criterios, etc).**	**Observaciones (secuenciación y temporalización adecuadas, actividades adaptadas correctamente, presentación de los contenidos atractiva para el alumnado)**	**Propuesta de mejora**
01	Act0 / Act 1	…./…./….			
02	Act2	…./…./….			
03					
04					
05					
06					
07					
08					

Fuente: elaboración propia.

Tabla 28. *Formato de Heteroevaluación del alumno sobre el proyecto.*

CUESTIONARIO PARA EL ALUMNO, PARA EVALUACION DEL PROYECTO					
Nombre del alumno:					
1	¿Te ha parecido interesante el Proyecto? (Indica con una cruz tu respuesta)	Sí		No	
2	¿Por qué?				
3	Prefiero estudiar los contenidos de este modo (Indica con una cruz tu respuesta)	Sí		No	
4	Indica si prefieres estudiar los contenidos del libro y por qué.				
5	Indica si has descubierto nuevas cosas o prefieres otras técnicas de estudio tradicionales.				
6 	Lo que más me ha gustado:				
7 	Lo que menos me ha gustado:				
8	Qué cambiaría:				
9	Valora el proyecto del 1 a 5. (1: Rojo, Malo, 5: Verde, Muy Bueno). Rodea tu respuesta. 				

Fuente: elaboración propia.

Anexo M. Paseo Matemático por el Museo del Prado

Primera Visita: Salas -1 y 0

Visita	Cuadro	Datos del cuadro
1ª Visita		La Última Cena Óleo sobre tabla. 1555 - 1562 JUANES, JUAN DE
		Sala 051
2ª Visita		Mona Lisa Óleo sobre tabla de madera de nogal. 1507 - 1516 LEONARDO DA VINCI (TALLER DE)
		Sala 052B
3ª Visita		El Descendimiento Óleo sobre tabla. Antes de 1443 WEYDEN, ROGIER VAN DER
		Sala 058
4ª Visita		Santa Bárbara Óleo sobre tabla de madera de roble. 1438 CAMPIN, ROBERT
		Sala 058
5ª Visita		La Crucifixión Óleo sobre tabla. 1509 - 1519 FLANDES, JUAN DE
		Sala 058A
6ª Visita		Escenas de La historia de Nastagio degli Onesti Técnica mixta sobre tabla. 1483 BOTTICELLI, SANDRO
		Sala 056B
7ª Visita		Tríptico del Jardín de las delicias Grisalla, Óleo sobre tabla de madera de roble. 1490 - 1500 EL BOSCO
		Sala 056A
8ª Visita		Mesa de los Pecados Capitales Óleo sobre tabla de madera de chopo. 1505 - 1510

Visita	Cuadro	Datos del cuadro
		EL BOSCO Sala 056A
9ª Visita		La reina Margarita de Austria Óleo sobre lienzo. 1606 PANTOJA DE LA CRUZ, JUAN Sala 055
10ª Visita		La Anunciación Témpera sobre tabla. Hacia 1426 ANGELICO, FRA Sala 056B

Subimos escaleras - Planta 1

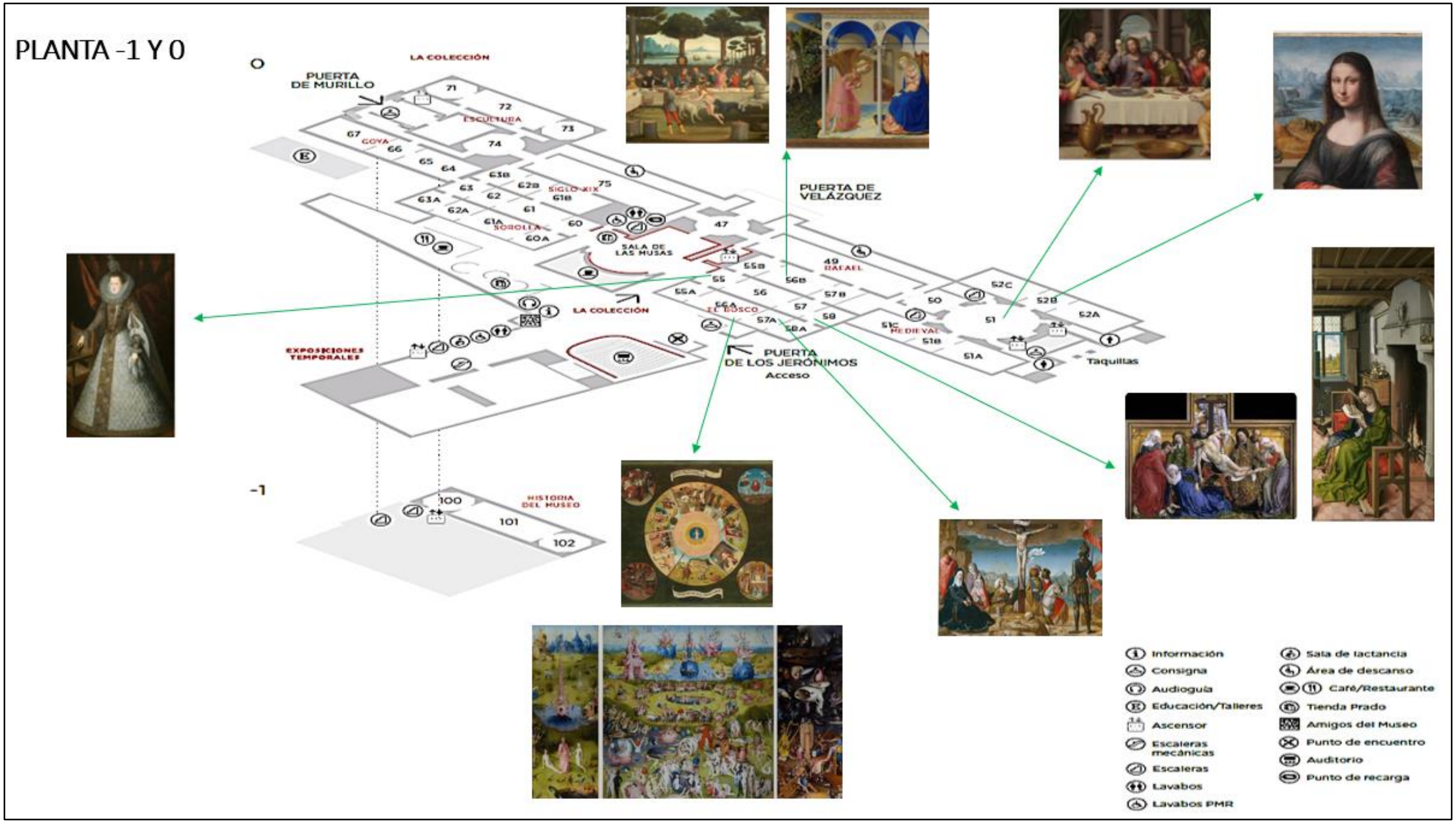
Visita	Cuadro	Datos del cuadro
10ª Visita		Las hilanderas o la fábula de Aracne Óleo sobre lienzo. 1655 - 1660 VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y Sala 015A
11ª Visita		Las meninas Óleo sobre lienzo. 1656 VELÁZQUEZ, DIEGO RODRÍGUEZ DE SILVA Y Sala 012
12ª Visita		La Virgen de los Reyes Católicos Técnica mixta sobre tabla. 1491 - 1493 MAESTRO DE LA VIRGEN DE LOS REYES CATÓLICOS Sala C
13ª Visita		Carlos V en la batalla de Mühlberg Óleo sobre lienzo. 1548 TIZIANO, VECELLIO DI GREGORIO Sala 027
14ª Visita		El lavatorio Óleo sobre lienzo. 1548 - 1549 TINTORETTO, JACOPO ROBUSTI Sala 025
15ª Visita		Las parejas reales

		Óleo sobre lienzo. 1770 PARET Y ALCÁZAR, LUIS
		Sala 039

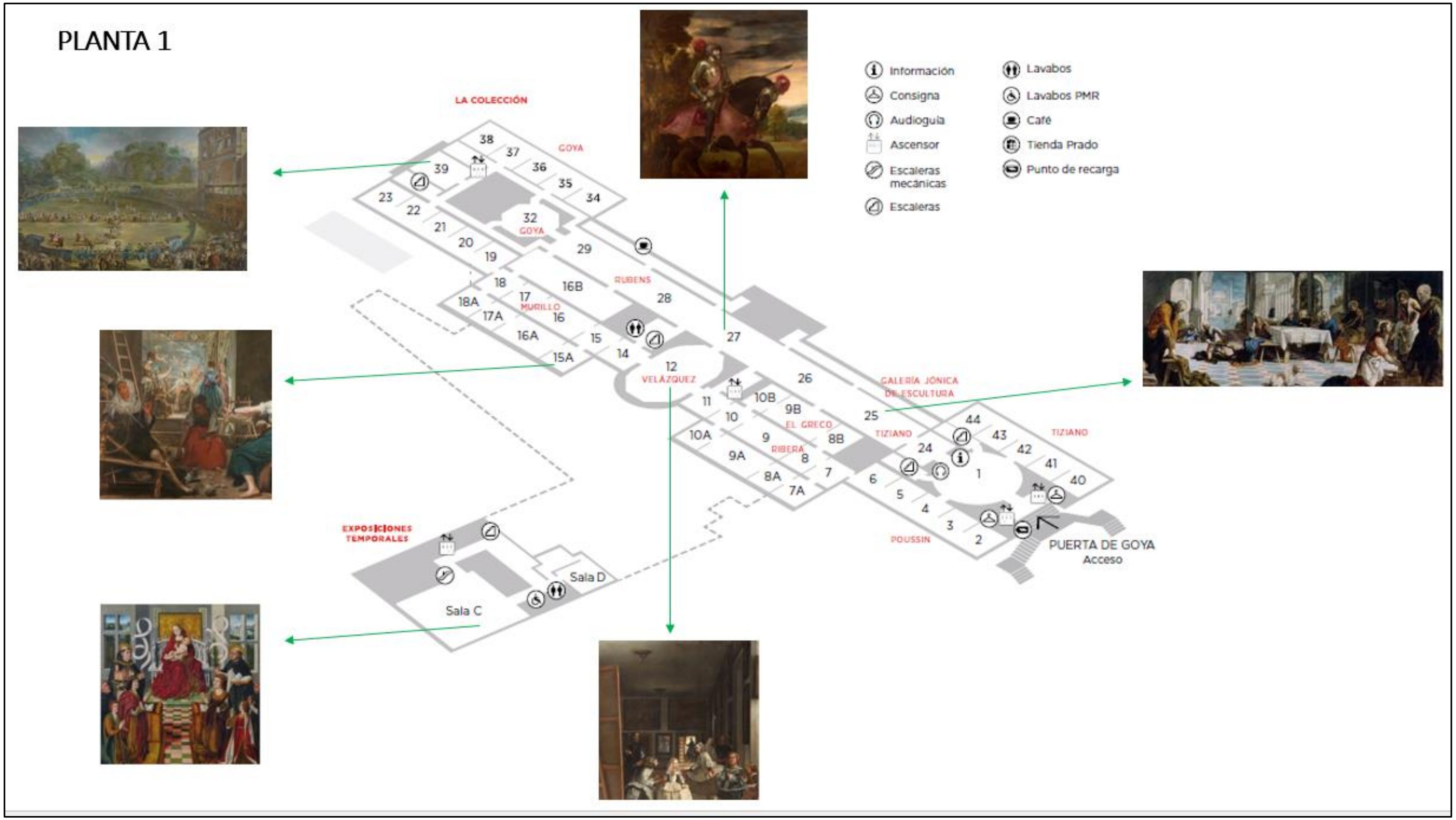
Subimos escaleras - PLANTA 2

Visita	Cuadro	Datos del cuadro
16ª Visita		La cometa Óleo sobre lienzo. 1777 - 1778 GOYA Y LUCIENTES, FRANCISCO DE
		Sala 087

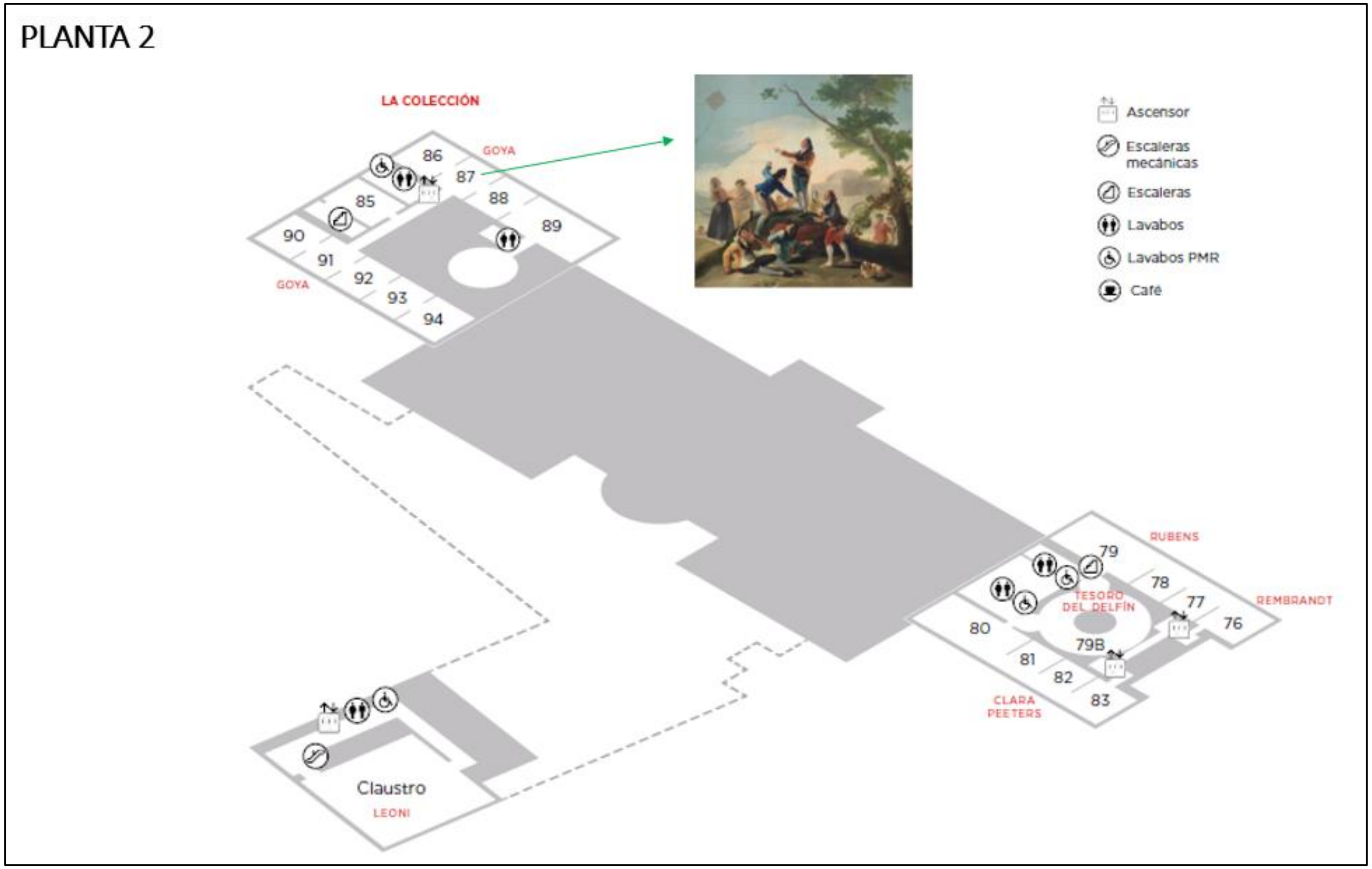
PLANOS VISITA AL MUSEO DEL PRADO:



Fuente: elaboración propia a partir de los planos y cuadros del Museo del Prado.



Fuente: elaboración propia a partir de los planos del Museo del Prado.



Fuente: elaboración propia a partir de los planos y cuadros del Museo del Prado.

Actividad 14:
Cuadernillo para la visita al Museo

Nombre del Alumno:

Paseo Matemático

Un paseo matemático es una ruta o itinerario pero visitando distintos puntos con ojos matemáticos.

Visita al Museo del Prado

Después de tanto trabajo en el aula, ha llegado el momento de culminar todo lo que sabemos.

Hoy ya somos unos expertos sobre una pequeña muestra de los cuadros que se exponen en este museo.

Escoger entre el mejor de los cuadros es una tarea difícil, también lo ha sido decidir entre aquellos cuadros que vamos a visitar. Pero finalmente se ha construido este itinerario, esperando que lo disfrutéis.

Breve Historia y contextualización

Colección: No expuesto (19142) - Expuesto (2231)

Itinerario:
Orden de visita Planta -1 y 0, Planta 1, Planta 2

Los museos son espacios claves para difundir el Patrimonio cultural, el Museo Nacional del Prado se incluye entre las mejores pinacotecas a nivel mundial (García, 1994). Se inauguró en 1819 y la monarquía fue retroalimentando la colección pasando a ser "Real Museo de Pintura y Escultura" o "Museo Real" (Azcue, 2012). La idea era instaurar un museo público en España, al igual que hizo Francia con el museo del Louvre, para acercar el arte al pueblo y trasladar la cultura y la educación a toda la sociedad; hasta ese momento el público principal era la aristocracia y la Iglesia (Calvo, 2019). El museo se considera un hito de la cultura, producto de la diversidad de obras pictóricas, esculturas y arte decorativo dentro de una emblemática obra de arquitectura. En sus inicios fue creado como institución científica, hasta finalmente convertirse en museo (Maure, 2020).

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	

Interpretación / significado del cuadro:

Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	

Interpretación / significado del cuadro:

Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	

Interpretación / significado del cuadro:

Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	

Interpretación / significado del cuadro:

Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	

Interpretación / significado del cuadro:

Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

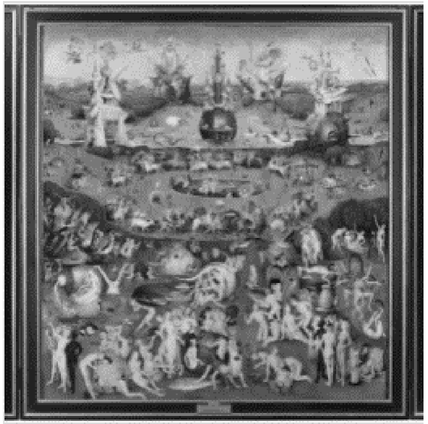
Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	

Interpretación / significado del cuadro:
Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo. Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	



Interpretación / significado del cuadro:

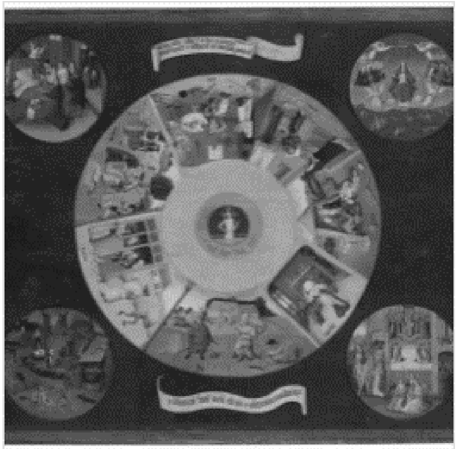
Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	



Interpretación / significado del cuadro:
Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo. Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	

Interpretación / significado del cuadro:

Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	

Interpretación / significado del cuadro:

Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

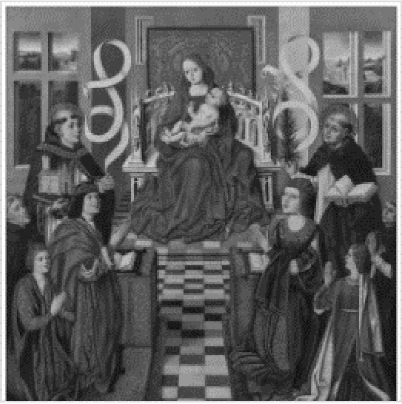
Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	
	
Interpretación / significado del cuadro:	
Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.	

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	
Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo. Realiza aquí tu dibujo:	

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	
	
Interpretación / significado del cuadro:	
Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.	

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	
Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo. Realiza aquí tu dibujo:	

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	



Interpretación / significado del cuadro:

Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	

Interpretación / significado del cuadro:

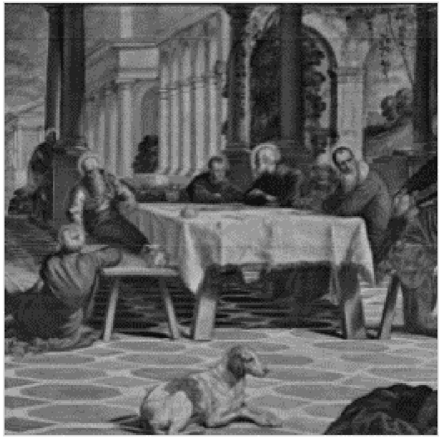
Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	



Interpretación / significado del cuadro:
Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo. Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	

Interpretación / significado del cuadro:

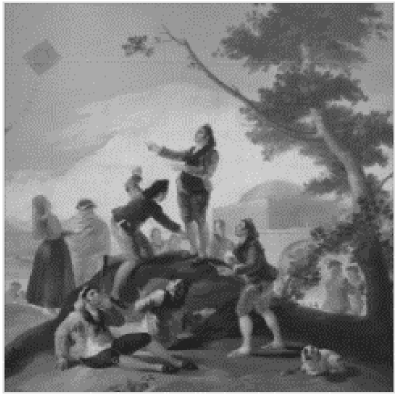
Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo:

Título:	
Año	
Autor	
Dimensiones	



Interpretación / significado del cuadro:

Geometrización: Realiza un esquema o boceto del cuadro, dibuja el eje de simetría de la composición general y los subgrupos de elementos geométricos.

Identifica ángulos y clasifícalos	
Identifica los polígonos y clasifícalos	
Indica los triángulos y clasifícalos	
Está presente la razón áurea, justifica sí o no	
Opinión personal del cuadro	

Describe los elementos geométricos destacados dentro de la composición (recuerda lo estudiado en el aula), puedes ayudarte de un esquema o dibujo.

Realiza aquí tu dibujo: