

Universidad Internacional de la Rioja (UNIR)

Escuela Superior de Ingeniería y
Tecnología

Máster en Computación Cuántica

Computación cuántica apli-
cada al análisis espacial en
electroencefalografía

Trabajo Fin de Estudios

presentado por: Francisco Vidal Requejo y Antonio José Ruz Hervás

Dirigido por: Rodrigo Gil-Merino y Rubio

Ciudad: Logroño

Fecha: 13 de septiembre de 2023

Índice de contenidos

1. Introducción	9
1.1. Motivación	10
1.2. Planteamiento del trabajo	11
1.3. Estructura de capítulos	12
2. Contexto y estado de la técnica	13
2.1. Obtención de datos	13
2.2. Pre-procesado	19
2.2.1. Métodos de regresión	20
2.2.2. Transformada wavelet	20
2.2.3. Separación ciega de fuentes (BSS)	21
2.2.4. Descomposición empírica de modos (EMD)	22
2.2.5. Filtrado de la señal	22
2.2.6. Métodos híbridos	23
2.3. Extracción de características	23
2.3.1. Dominio del tiempo	23
2.3.2. Dominio de frecuencias	24
2.3.3. Dominio de tiempo y frecuencias	24
2.3.4. Dominio del espacio	24
2.3.5. Dominio del tiempo y espacio	25
2.4. Clasificación	25
2.4.1. Aprendizaje automático clásico	26
2.5. Computación cuántica y EEG	28
2.5.1. Aprendizaje automático cuántico	30
2.5.2. Aprendizaje automático cuántico en EEG	32
2.6. Resumen del contexto y estado de la técnica	33
3. Objetivos	37
3.1. Objetivo general	37
3.2. Objetivos específicos	37

4. Desarrollo del trabajo	38
4.1. Entendiendo los EEG	38
4.2. Armónicos esféricos	40
4.3. Armónicos esféricos de una señal EEG	41
4.4. Computación cuántica aplicada a señales EEG	42
4.4.1. Cálculos mediante computación cuántica	42
4.4.2. Evaluación de armónicos esféricos mediante computación cuántica	50
4.4.3. Complejidad computacional y limitaciones	55
4.5. Diseño de la solución	58
4.5.1. Preprocesado	58
4.5.2. Evaluación de armónicos esféricos	59
4.5.3. Extracción de coeficientes de expansión	60
4.6. Implementación de la solución	61
4.7. Descripción de los resultados aplicados a EEG de intención motora	63
4.7.1. Evaluación de armónicos esféricos	64
4.7.2. Clasificación de EEG mediante QML	72
5. Conclusiones y trabajo futuro	75
5.1. Conclusiones	75
5.2. Trabajo futuro	77
A. Apéndices	101
A.1. Notación <i>big O</i>	101
A.2. Identidades trigonométricas	102
A.3. Potencias de Binomios	102
A.4. Formulación completa de los armónicos esféricos	103
A.5. Primeros polinomios asociados de Legendre	105
A.6. Listado de primeros armónicos esféricos	106
A.7. Representación gráfica de los armónicos esféricos	108
A.8. Coordenadas esféricas de los electrodos.	109
A.9. Tabla con los datos de error de la evaluación de armónicos esféricos utilizando un procesador cuántico real	110

Índice de ilustraciones

2.1. Fotografía de una persona con una capucha EEG	14
2.2. Esquema lateral de situación de electrodos en el sistema “10-20”	15
2.3. Esquema frontal de situación de electrodos en el sistema “10-20”	15
2.4. Esquema superior de situación de electrodos en el sistema “10-20”	16
2.5. Esquema superior de situación de electrodos en el sistema “10-20”	17
2.6. Esquema superior de situación de electrodos en el sistema “10-10”	18
2.7. Esquema superior de situación de electrodos en el sistema “10-5”	18
2.8. Ejemplo genérico de circuito cuántico	29
2.9. Ejemplo de representación del estado de un cúbit en la esfera de Bloch	30
2.10. Taxonomía de las opciones disponibles para lectura de EEG	35
2.11. Técnicas cuánticas aplicadas a EEG	36
4.1. Coseno del ángulo de rotación en una esfera de Bloch	45
4.2. Circuito de rotaciones sobre el eje Y en paralelo usando el mismo ángulo	46
4.3. Diagrama de dependencia funcional para la implementación del cálculo de armónicos esféricos	60
4.4. Gráfica de un modelo de kernel cuántico	63
4.5. Errores en la evaluación de armónicos esféricos mediante computación cuántica.	69
4.6. Estadísticas de error en la evaluación de armónicos esféricos mediante simulación cuántica en función de la cantidad de ejecuciones.	71
4.7. Gráfica generada. Datos: evento cerrar la mano derecha, usuario 4, frecuencia entre 7Hz y 30Hz, 1 segundo.	72
4.8. Gráfica generada con el método <i>plot.events</i> del modulo viz de la librería mne.	73
4.9. Gráfica generada que compara el <i>exactitud</i> entre el modelo cuántica y clásico.	74
4.10. Gráfica generada que compara la <i>función de pérdida</i> entre el modelo cuántica y clásico.	74

- 5.1. Obtención del valor esperado de un cúbit en un estado arbitrario (indicado por la línea roja) mediante búsqueda binaria. Aplicado el método sucesivamente se puede ajustar el error de la medida mediante una aproximación diferente a la realizada a través del simple aumento del número de ejecuciones. 79

Índice de tablas

4.1. Error para la evaluación de armónicos esféricos con un simulador cuántico analítico respecto a la función <i>sp_harm</i>	65
4.2. Estadísticas de error por electrodo.	70
4.3. Covarianza entre la parte real e imaginaria de cada electrodo.	70

Resumen

El estudio del funcionamiento del cerebro humano resulta útil para diversas aplicaciones, como el diagnóstico de ciertas condiciones neurológicas o cognitivas, el seguimiento y estudio de la evolución de las mismas o la determinación de la intencionalidad del individuo para manejar prótesis o interfaces cerebro-computador (BCI, por sus siglas en inglés).

Una de las herramientas más ampliamente utilizada para extraer información del cerebro son los electroencefalogramas (EEG), pues tiene la ventaja de poder realizarse de manera mínimamente intrusiva y de ofrecer un estudio de la actividad del cerebro en tiempo real y durante su funcionamiento ordinario. El análisis de estos datos se puede realizar considerando diferentes dominios (espacial, temporal, frecuencias, etc.). En concreto, el estudio de la información obtenida a través de una familia de funciones denominada *armónicos esféricos*, se ha demostrado útil para el diagnóstico de la epilepsia a través de la información espacial de dichos datos y podría ser relevante para otras aplicaciones. Sin embargo, el cálculo y análisis utilizando dichas funciones puede resultar demasiado costoso computacionalmente, sobre todo cuando se utilizan gran cantidad de electrodos o muchos armónicos. Esto es debido, en gran medida, a la cantidad de productos de potencias de funciones trigonométricas que se necesitan realizar para obtener los armónicos esféricos que, no obstante, se pueden computar eficientemente utilizando la computación cuántica.

En este trabajo, se analizan las propiedades de cálculo trigonométrico inherentes a la computación cuántica y se plantea su utilización de forma provechosa, junto con algunos cálculos en computación clásica, para la evaluación de armónicos esféricos, poniendo dicho método a prueba mediante simulaciones. También se describen las limitaciones de la aplicación práctica en un procesador cuántico real de las técnicas utilizadas, debidas en gran parte al estado actual de desarrollo de la computación cuántica, y se plantean posibles soluciones de cara al futuro. Este método de evaluación de armónicos esféricos será utilizado en el contexto del análisis espacial de datos de EEG mediante aprendizaje automático cuántico, que será posteriormente aplicado.

Por último, se sugerirán nuevas vías de investigación que lleven a la resolución de las complicaciones que actualmente presenta la aplicación práctica de la computación cuántica a este tipo de problemas.

Palabras Clave: electroencefalograma, computación cuántica, armónicos esféricos, intención motora, aprendizaje automático cuántico

Abstract

The study of the human brain's functioning proves useful for various applications, such as diagnosing certain neurological or cognitive conditions, monitoring and studying their progression, or determining an individual's intent for controlling prosthetics or brain-computer interfaces (BCI).

One of the most widely employed tools for extracting information from the brain is the electroencephalogram (EEG), as it offers the advantage of being minimally invasive and provides real-time insight into brain activity during normal functioning. Analysis of this data can be conducted across different domains (spatial, temporal, frequencies, etc.). Specifically, investigating the information obtained through a set of functions known as *spherical harmonics* has proven useful in epilepsy diagnosis through spatial information, and it could hold relevance for other applications. However, computation and analysis involving these functions can become computationally expensive, especially when dealing with numerous electrodes or multiple harmonics. This is largely due to the volume of power-product trigonometric calculations required to derive spherical harmonics, which, nevertheless, can be efficiently computed using quantum computing.

In this study, the inherent trigonometric calculation properties of quantum computing are analyzed and their advantageous utilization is proposed, alongside certain classical computations, for evaluating spherical harmonics. This method is put to the test through simulations. Additionally, the limitations of practically implementing these techniques on a real quantum processor are described, mainly due to the current state of quantum computing development, and potential future solutions are proposed. This approach to evaluating spherical harmonics will be employed within the context of spatial analysis of EEG data through quantum machine learning, subsequently to be applied.

Lastly, new avenues of research will be suggested to address the challenges currently associated with practically applying quantum computing to this type of problem.

Keywords: electroencephalography, quantum computing, spherical harmonics, motor intention, quantum machine learning

1. Introducción

Las técnicas de electroencefalografía, consistentes en el estudio de los campos eléctricos generados por los potenciales electroquímicos que ocurren en el cerebro, suponen actualmente una de las herramientas disponibles más útiles para el estudio de este.

La clasificación de los datos obtenidos en un electroencefalograma (EEG) tiene aplicaciones prácticas diversas, entre las que se encuentran la detección de desórdenes neurológicos (Bera, 2021) o la utilización de interfaces cerebro-computador (Brain-Computer Interface o BCI, en inglés) tanto para diagnóstico médico como para restaurar capacidades perdidas, como puede ser la comunicación o el movimiento a través de prótesis mecanizadas (Bulárka y Gontean, 2016).

Un EEG consiste en la aplicación de varios electrodos pegados al cuero cabelludo de un individuo o insertados en el cerebro. Los campos eléctricos generados debido a las fluctuaciones eléctricas de los potenciales neuronales (Buzsáki, 2006), provocan pequeñas diferencias de potencial al otro extremo de los electrodos correlacionadas con la función neurológica (Nunez y Srinivasan, 2006).

En concreto, los EEG aplicados a nivel extracraneal, tienen la ventaja de proporcionar un método no invasivo y de sencilla implementación para monitorizar datos de la actividad cerebral en tiempo real, al contrario de lo que ocurre con otras técnicas como los EEG intracraneales (que requieren de intervención quirúrgica) o técnicas no basadas en electroencefalografía como los magnetoencefalogramas (MEG, que se valen de maquinaria aparatosa). Además, según Nunez y Srinivasan (2006) las características de los EEG superficiales son más aptas para cierto tipo de aplicaciones en las que las lecturas intracraneales ofrecen información demasiado específica acerca del funcionamiento neurológico del cerebro, a tal nivel que no se puede relacionar con la función cognitiva.

En el pasado, la interpretación de estas correlaciones se realizaba de manera analítica por personal especializado. Sin embargo, dada la complejidad de la representación y tratamiento de la información extraída, hoy en día se prefiere la utilización de la computación para resolver esta cuestión y, en concreto, dada la heterogeneidad de las lecturas de EEG entre individuos, han ganado mucho peso las técnicas de aprendizaje automático (ML, por sus siglas en inglés) debido a su capacidad para adaptarse a las peculiaridades de cada persona (Saeidi et al., 2021).

Aun así, dada la naturaleza de la electroencefalografía, las distintas fases del análi-

sis de los datos obtenidos del EEG, suponen un coste computacional elevado, e incluso inasumible, para ciertas aplicaciones (por ejemplo en la utilización de un número elevado de electrodos o para aplicaciones en tiempo real), por lo que se requieren técnicas y tecnologías que puedan reducir o asumir dicho coste.

Es aquí donde la emergente computación cuántica puede proporcionar una ventaja, que dado que se basa en un formalismo matemático totalmente distinto a la llamada “computación clásica”, permite la aplicación de nuevas técnicas para la representación y análisis de la información.

La computación cuántica se postula como una solución de futuro a diversos problemas de elevada complejidad, como son la formulación de algoritmos de ML, en los que el uso de aprendizaje automático cuántico (QML, por sus siglas en inglés) ha resultado en notables mejoras en la optimización de parámetros, la eficiencia de ejecución y la reducción de las tasas de error (Kak, 1995).

En concreto, en el análisis de datos EEG se han postulado ya soluciones basadas en QML para el filtrado de la señal (Gandhi et al., 2014) y para el análisis de la misma (Huang et al., 2022).

Estas técnicas QML aceleran el proceso de aprendizaje frente a las técnicas de ML clásicas pero, al ser una tecnología emergente, es necesario comprobar la viabilidad práctica de la solución aportada (Ciliberto et al., 2018).

En el presente trabajo se postula y pone a prueba la utilización de QML y el análisis espacial mediante computación cuántica de los datos obtenidos de un EEG.

1.1. Motivación

La utilización de información extraída de EEG puede mejorar el diagnóstico de enfermedades como la epilepsia, el Alzheimer y el Parkinson, además de mejorar la calidad de vida de las personas con discapacidades cognitivas o motoras, permitiéndoles comunicarse y controlar su entorno de manera más efectiva mediante tecnologías BCI (Ma et al., 2022).

El uso de EEG también tiene un gran potencial en el ámbito de la investigación científica, proporcionando información valiosa sobre la cognición y el comportamiento humano, útil para la comprensión de enfermedades mentales y trastornos psicológicos (Bera, 2021).

Cada uno de los dominios de análisis de aplicados a las lecturas de EEG, conlleva un tipo de complejidad propia que dificulta o ralentiza su procesamiento. En concreto, en lo

que al dominio espacial se refiere, la problemática mayor radica en la interpretación de lecturas prácticamente bidimensionales de un campo eléctrico que se sitúa en un espacio tridimensional y que atraviesa diferentes medios (lo que supone diferentes conductividades).

El análisis espacial de las señales de un EEG tiene una importancia determinante en multitud de aplicaciones, como el diagnóstico de epilepsia (Kaiboriboon et al., 2012) o la determinación de intención motora (MI, por sus siglas en inglés), útil para aplicaciones BCI (Xie et al., 2021), por lo que la búsqueda de optimizaciones en este campo puede suponer una mejora en la calidad de vida de multitud de personas.

1.2. Planteamiento del trabajo

En el presente estudio se realizará una exposición de las diversas técnicas empleadas en el tratamiento de señales EEG. Se iniciará el trabajo estableciendo el contexto del proceso de adquisición de datos EEG y su posterior tratamiento mediante la aplicación de distintas técnicas de análisis y algoritmos de aprendizaje automático. En este sentido, se expondrán tanto las técnicas clásicas como las cuánticas, con el propósito de situar las técnicas utilizadas en el trabajo dentro del ámbito general de análisis de EEG.

Tras esto, se procederá a la exposición de los fundamentos teóricos en los que se basa este trabajo y la formulación del modelo teórico con el que se trabajará. Dado que el objetivo del trabajo es encontrar una mejora en el cálculo de los armónicos esféricos (análisis espacial), para medir esta mejora se utilizarán métricas de complejidad computacional (cuánto cuesta resolver computacionalmente un problema) dadas definidas mediante la denominada notación *big O* (Bachmann, 1904), que mide la complejidad asintótica de los algoritmos, es decir, que función determina el máximo crecimiento del tiempo o espacio de cálculo del problema, según crece el tamaño del problema. En el Apéndice A.1 se detalla el funcionamiento de la notación *big O*.

El modelo teórico obtenido, será posteriormente sometido a prueba en la medida en la que las condiciones tecnológicas actuales lo permitan. Recuérdese que la computación cuántica se encuentra actualmente en una fase inicial en lo que a implementación tecnológica se refiere, por lo que aunque los principios teóricos de la física cuántica avalen las soluciones aquí expuestas (Igeta y Yamamoto, 1988), sólo se podrán probar en la práctica parcialmente, debido a las carencias encontradas en los dispositivos cuánticos actuales. Es-

tas son: la baja escalabilidad, o lo que es lo mismo, la dificultad de aumentar la capacidad del sistema; bajos tiempos de decoherencia, es decir, el tiempo que el sistema mantiene sus propiedades cuánticas; y gran cantidad de errores en general que presentan los dispositivos cuánticos actuales (Lau et al., 2022). Por lo que los desarrollos aquí expuestos se tendrán que apoyar principalmente en simuladores de computadores cuánticos, eso si, utilizando datos extraídos de lecturas EEG reales.

Finalmente, se realizará un análisis de los resultados y se expondrán las conclusiones y los trabajos futuros propuestos en el área.

1.3. Estructura de capítulos

A continuación se muestran los capítulos en los que está estructurado el presente trabajo:

Introducción. En este primer Capítulo, del cual esta sección forma parte, se realiza la presentación del preámbulo del trabajo así como las motivaciones que han llevado a plantearlo y la estructura general del mismo.

Contexto y estado de la técnica. Aquí se introducirá el esquema funcional general del análisis de lecturas EEG y se realizará un recorrido por las técnicas presentadas hasta la fecha actual. Merecerán una mención aparte las técnicas propuestas que hacen uso de la computación cuántica.

Objetivos y metodología del trabajo. En este Capítulo se establecerán los objetivos generales y específicos a alcanzar, además se presentará la metodología de trabajo a seguir.

Desarrollo del trabajo. Aquí se describirá el detalle de la solución propuesta, exponiendo los fundamentos teóricos y los trabajos anteriores en los que se basa. Además, se describirá la implementación de dicha propuesta y los resultados obtenidos de su ejecución con datos de EEG reales.

Conclusiones y trabajo futuro. En este Capítulo se realizará un análisis de los resultados obtenidos y se sugerirán las líneas de investigación que puedan aportar valor a la propuesta.

2. Contexto y estado de la técnica

La adquisición y manipulación de datos de EEG en sistemas BCI se puede diseñar mediante un proceso dividido en los siguientes bloques funcionales (Sen et al., 2020):

- Obtención de datos.
- Pre-procesado: que consiste en la eliminación de ruido e interferencias de la señal inicial y su posterior normalización.
- Extracción de características: aquellas que van a analizar el modelo.
- Clasificación.

A continuación, se detallará el estado actual de las técnicas y procedimientos para cada uno de los bloques, tras lo cual se presentará un resumen con un esquema general de las técnicas estudiadas y los problemas que quedan por resolver.

2.1. Obtención de datos

En este bloque se sitúa la medición de los campos eléctricos generados por el cerebro. Hasta el momento sólo se han implementado soluciones de electroencefalografía mediante electrodos que, tras más de cien años de refinamiento y avances, presentan una vasta cantidad de trabajos que estudian las diferentes consideraciones a la hora de aplicar un EEG. Entre estos aspectos a tener en cuenta se encuentran el tipo de electrodos a utilizar o su situación y cantidad.

En cuanto al tipo de electrodos, existen, según Teplan (2002):

- Desechables (con o sin gel pre-aplicado).
- Reutilizables de disco (oro, plata, acero inoxidable o estaño).
- Banda y capuchas para la cabeza.
- Electrodos de solución salina.
- Electrodos de aguja.

Sobre la situación espacial, podemos diferenciar primeramente entre electrodos intracraneales y extracraneales.

En cuanto a los electrodos intracraneales, requieren la hospitalización del sujeto de estudio y, además, las características de las lecturas extraídas de los mismos son más

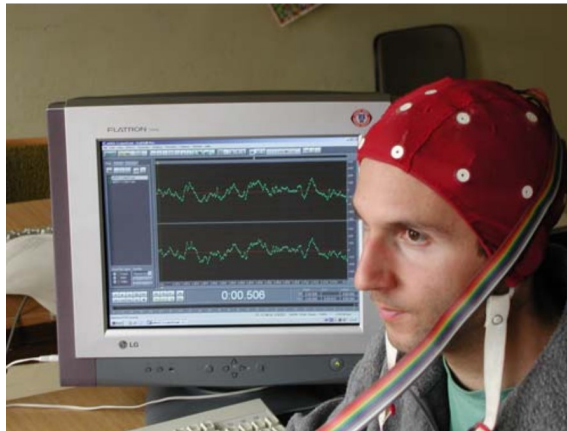


Figura 2.1. Fotografía de una persona con una capucha EEG (Teplan, 2002).

adecuadas para determinadas aplicaciones. Según Nunez y Srinivasan (2006, p.4) “en la práctica, los datos EEG intracraneales pueden no estar relacionados o estar débilmente relacionados con la cognición y el comportamiento”. Esto es, en lo que se refiere a EEG, la mayor información acerca del razonamiento consciente e intenciones del individuo la otorgan las de datos de electrodos extracraneales.

Para determinar la posición en la que situar los electrodos en EEG sobre el cuero cabelludo, la forma más estandarizada de hacerlo se basa en el llamado “sistema 10-20” de la Sociedad Americana Electroencefalográfica (AES, 1991). Este toma como referencia la medición del perímetro entre el nasión (hendidura localizada entre la nariz y la frente) y el inión (protuberancia occipital) sobre el plano de perfil de la cabeza del sujeto en estudio, para situar los electrodos. Esta medida se divide en 6 segmentos, cuya longitud corresponde al 10% de la medida completa, en el caso de los segmentos que parte del nasión y del inión, y el 20% en el resto de los casos (por esto el sistema se denomina “10-20”). Los electrodos irán situados en los extremos de los segmentos, y para denominar su posición se usa: F_p para la posición del polo frontal, F para la línea frontal de electrodos, C para la central, P para la parietal y O para la occipital (Figura 2.2).

El mismo criterio de segmentación se sigue para la situación de los electrodos que rodean la cabeza desde un plano frontal (Figura 2.3). Se puede ver como, para nombrar a las posiciones de los electrodos pegados a la parte de la izquierda de la cabeza del sujeto, se le asigna un subíndice impar a la letra correspondiente y par a las de la parte derecha. En el caso de las posiciones centrales, se utiliza el subíndice z (correspondiente a “zero” en inglés) y los electrodos situados aquí son usados como referencia en ciertas aplicaciones (en estos casos a veces se les llama “tierra” o “ground”).

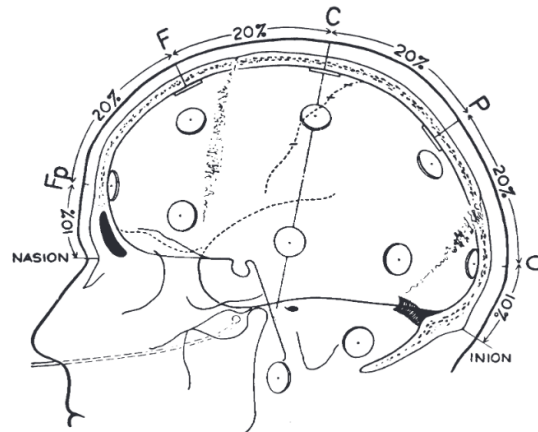


Figura 2.2. Esquema lateral de situación de electrodos entre Inión y Nasion en el sistema “10-20” (Klem et al., 1999)

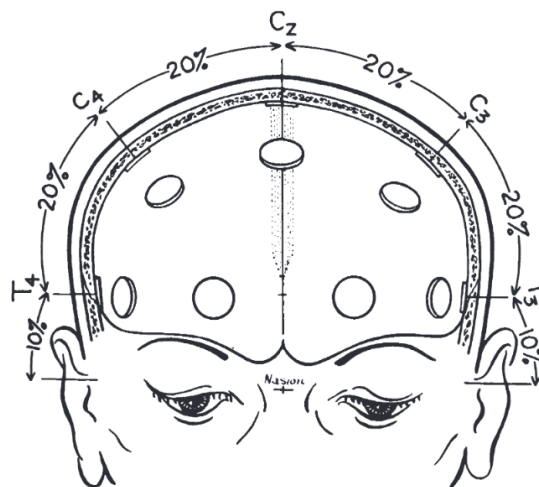


Figura 2.3. Esquema frontal de situación de electrodos entre Inión y Nasion en el sistema “10-20”. (Klem et al., 1999).

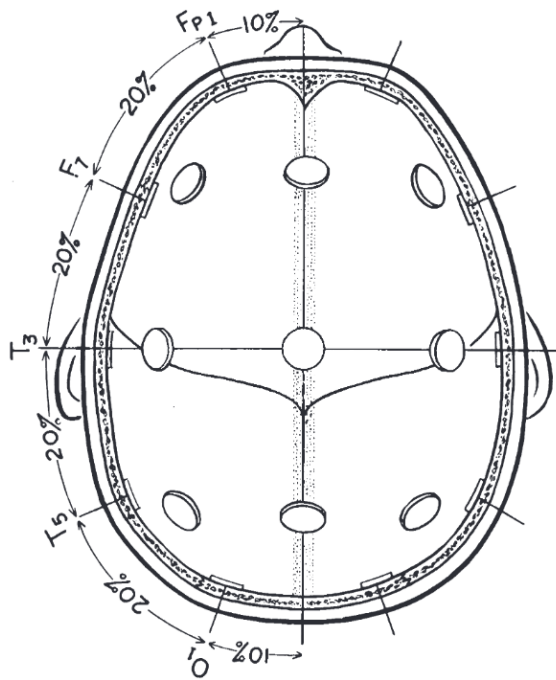


Figura 2.4. Esquema superior de situación de electrodos entre Inión y Nasión en el sistema “10-20” (Klem et al., 1999).

Finalmente, se sitúan los electrodos a través de los laterales desde una vista de un plano superior utilizando el mismo criterio de medida “10-20” desde las referencias del inión y nasión, como se puede ver en la Figura 2.4. Adicionalmente, se contempla añadir dos electrodos en la zona del cerebelo (con nombres C_{b1} y C_{b2}) o introducir dos electrodos en los orificios nasales, que habitualmente se usan como referencias para medir las diferencias de potencial del resto de electrodos. El mapa final se muestra en la Figura 2.5.

La AES también ha contemplado la ampliación de la resolución de la información obtenida en un EEG, a través de la utilización de más electrodos (AES, 1994), en un esquema compatible con el que acabamos de ver y que se conoce como “10-10” (figura 2.6). En este esquema, los electrodos se separan en segmentos del 10% de la medida perimetral realizada inicialmente entre nasión e inión.

Más tarde, Oostenveld y Praamstra (2001) propusieron disminuir la separación entre electrodos al 5% de la medida de referencia para aumentar la cantidad de información como se recoge en la figura 2.7. Nótese que lo que nos aportan estos esquemas es el espacio teórico de posibles posiciones de electrodos sobre la cabeza de un paciente y una forma sistemática de etiquetado. Esto no quiere decir que se deban usar tantos electrodos y posiciones como

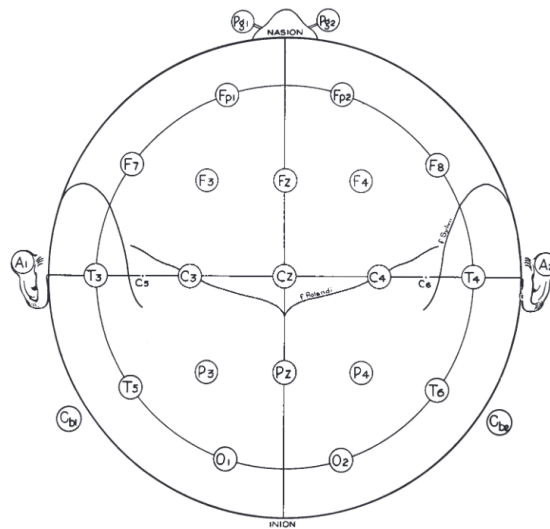


Figura 2.5. Esquema completo de situación de electrodos en el sistema “10-20” (Klem et al., 1999).

se indican en el esquema, sino que se utilizará un número de ellos a conveniencia en función de la necesidad de resolución de la información para la aplicación concreta y las capacidades de cálculo disponibles, pues más electrodos, suponen más cálculos.

En concreto, la estandarización propuesta por Oostenveld y Praamstra (2001) viene a acomodarse a una realidad en la que se utilizan aplicaciones con cada vez más electrodos y los anteriores esquemas se quedan cortos para situarlos. Dichos autores consideran, pues, que en los últimos años, hay una tendencia creciente en cuanto al número de electrodos utilizados, que busca resolver las carencias de los sistemas anteriores, pero que presenta nuevos retos. El más inmediato de ellos es que más electrodos suponen más información a analizar o, lo que es lo mismo, mayor coste computacional. Hay, por tanto, una demanda de técnicas para manejar tal cantidad de datos.

Por otra parte, el utilizar más electrodos provoca una mayor variabilidad en la información obtenida debida a las diferencias morfológicas de los cerebros estudiados (Steinmetz et al., 1989), lo que supone una mayor necesidad de caracterización del sistema para cada individuo concreto.

2.2. Pre-procesado

Los campos eléctricos generados por la actividad neuronal son de muy baja intensidad, por lo que su señal correspondiente en un EEG se encuentra entremezclada con ruido ambiental, así como el reflejo del resto de la actividad biológica del individuo, como, el movimiento muscular, el parpadeo o los latidos del corazón (Zhang et al., 2015).

A todas estas señales ajenas a los potenciales neuronales (tanto aquellas provenientes del ruido ambiental como las generadas en el propio organismo del individuo) se las conoce como artefactos y, debido a su solapamiento con la señal a analizar, pueden suponer un problema para la correcta interpretación de la misma, como se comentará a lo largo de esta sección. Los artefactos que alteran la señal extraída de un EEG pueden ser de los siguientes tipos (Jiang et al., 2019):

- oculares, debidos al parpadeo y movimiento de los ojos.
- musculares, debidos a movimientos musculares en las proximidades de los electrodos.
- cardiacos, también llamados “artefactos de pulso” y cuya frecuencia se encuentra en torno a los $1,2Hz$.
- extrínsecos, entre los que se encuentra la alteración debida a la separación de los electrodos de la fuente de la señal (volume conduction).

Por lo tanto, antes de extraer información de la señal obtenida, se hace necesaria su depuración (eliminación de artefactos), para obtener solo la información correlacionada con la función neuronal y su posterior amplificación, para que el rango dinámico de la señal sea lo suficientemente amplio para su interpretación.

Nolte et al. (2004) proponen una manera efectiva de descartar el fenómeno del volume conduction. Para el resto de artefactos existen varias técnicas de eliminación de artefactos de la señal que podemos agrupar según si están basadas en el uso de métodos analíticos o en el uso de ML. De entre las primeras, destacan las siguientes (Jiang et al., 2019):

- métodos de Regresión.
- transformada Wavelet.
- métodos basados en separación ciega de fuentes (BSS).
- descomposición empírica de modos (EMD).

- métodos de filtrado.
- descomposición dispersa (SCA).
- métodos híbridos.

A continuación, se comentan brevemente cada uno de los métodos listados anteriormente.

2.2.1. Métodos de regresión

Se basan en que cada canal se compone de la señal pura, más una o varias parte de la señal del artefacto. Para descartar la parte del artefacto se utiliza una señal de referencia que será restada a la señal leída en el EEG, ponderando con un coeficiente estimado para cada canal (Legendre, 1805; Gauss, 1823).

La ventaja de este tipo de métodos reside en su sencillez en cuánto al cálculo se refiere. El problema es que se necesitan varios canales de referencia, y no es siempre posible posicionar los electrodos de la forma más adecuada para obtener una lectura de referencia idónea, o calcular unos coeficientes adecuados.

2.2.2. Transformada wavelet

Consiste en la división temporal de la señal en ventanas de tiempo llamadas wavelets y su transformación al dominio de frecuencias mediante el análisis de Fourier (Grossmann y Morlet, 1984). Esto se consigue mediante el análisis en el dominio de frecuencias de la onda y su división en escalas de tiempo j y desplazamientos k respecto a las mismas:

$$\phi_{jk}(t) = 2^j \phi(2^j t - k) \quad (2.1)$$

Para cada wavelet, la transformada correspondiente se calcula a partir del producto interno de dicho wavelet por las distintas muestras recogidas de la señal (que llamamos Ψ):

$$W_\phi = \langle \Psi | \phi \rangle \quad (2.2)$$

Para filtrar la señal, se estiman los wavelets que intervienen en la señal pura y cuáles forman parte del artefacto. En base a estas estimaciones, se desechan de la señal leída los wavelets que corresponden con el ruido.

Este método presenta problemas cuando las propiedades espectrales del artefacto se solapan con las de la onda, por lo que se prefiere combinar con otros métodos, como por ejemplo el análisis de componentes independientes (ICA, por sus siglas en inglés).

2.2.3. Separación ciega de fuentes (BSS)

Considera que la señal obtenida en la lectura de los electrodos es la combinación de varias señales, incluidas la señal pura y los artefactos (Choi et al., 2004). Se puede estimar el contenido de la señal original mediante diferentes métodos analíticos que se explican a continuación.

Análisis de componentes principales (PCA)

Se trata de un método que convierte variables correlacionadas en variables no correlacionadas (componentes principales), o lo que es lo mismo, realizar un cambio de coordenadas que maximice la ortogonalidad. Esto se consigue mediante el cálculo de los autovectores de la matriz de covarianza de los datos a analizar (Pearson, 1901). Al cambiar el sistema de coordenadas a uno en el que la ortogonalidad es máxima, los datos que presenten una mayor continuidad en el tiempo estarán cercanos a los vectores de referencia, mientras que los datos fruto de variaciones abruptas y esporádicas, estarán alejados de los orígenes de las nuevas coordenadas. En cierto modo, esta técnica da mayor continuidad a la señal (Abdi y Williams, 2010).

Análisis de componentes independientes (ICA)

Con este método se separa la información en componentes independientes, que no necesariamente deber ser ortogonales, tras esto, se descartan las componentes correlacionadas con los artefactos (Jutten y Herault, 1991).

ICA ha demostrado ser más efectivo en la eliminación de artefactos que PCA cuando las señales combinadas son estadísticamente independientes, no siguen una distribución gaussiana y la dimensión de la señal leída es mayor o igual a la original. Estas restricciones hacen que este método sólo sea adecuado para aplicaciones muy específicas, pues normalmente no se puede saber de antemano si se cumplen estos criterios (Abdi y Williams, 2010).

Análisis de correlación canónica (CCA)

Este método funciona buscando la relación lineal más adecuada entre dos conjuntos de datos, maximizando la correlación entre los mismos (Hotelling, 1936). Una vez hecho esto se toman las componentes con menos correlación. CCA ha sido probado satisfactoriamente

eliminando el ruido provocado por movimientos musculares (De Vos et al., 2010).

Imaginería de fuentes EEG (ESI)

Se trata de un método basado en una técnica de modelado de imágenes que integra las componentes espaciales y temporales de los datos EEG para identificar las fuentes de los dipolos que generan los potenciales que provocan los cambios en el campo eléctrico en los electrodos (Michel et al., 2004).

A grandes rasgos esta técnica consiste en estimar las posibles configuraciones de fuentes de dipolos en el área del cerebro que podrían dar como resultado la lectura obtenida, y analizar esta información con otros métodos analíticos como, por ejemplo, con PCA (Liu y Yao, 2006), para descartar las componentes del ruido.

2.2.4. Descomposición empírica de modos (EMD)

Consiste en descomponer la señal en unas componentes llamadas funciones intrínseca de modo (Huang et al., 1998). Ha demostrado su utilidad para extraer los artefactos relacionados con el movimiento ocular de la señal (Looney et al., 2008).

2.2.5. Filtrado de la señal

Se trata de descartar una parte de la señal en función al análisis de sus distintas características. Debido a la periodicidad de la misma, el que la señal leída se salga de un rango determinado en amplitud, frecuencia, etc., puede indicar datos de ruido a descartar. A continuación, se comentan brevemente las distintas características de una señal sobre las que se puede realizar un filtrado.

Filtrado en frecuencia

Se realiza la descomposición de las señales en el dominio de frecuencias mediante sus transformadas de Fourier (Fourier, 1822), para descartar las frecuencias en las que inter vengan los artefactos. Es un método sencillo pero que no es efectivo en el caso de que haya solapamiento espectral entre la señal original y los artefactos.

Filtrado adaptativo

A partir de una señal de referencia, se genera una señal correlacionada con el artefacto y se resta de la señal leída. Utiliza el algoritmo de la menor media cuadrática (LMS, por

sus siglas en inglés) que permite obtener el valor esperado mínimo del cuadrado de la señal de error y tiene la desventaja de que requiere más electrodos para poder generar la señal de referencia (Glaser, 1961).

Filtrado Wiener

Se basa en una técnica estadística que minimiza el error medio cuadrático entre las señales de interés y las señales estimadas. No requiere de una señal de referencia (Wiener, 1964).

2.2.6. Métodos híbridos

Por último, se puede utilizar la combinación de varios métodos, como por ejemplo la transformada wavelet y BSS, para obtener mejores resultados que con uno solo (Klados et al., 2011).

2.3. Extracción de características

Una vez se tiene una señal representativa de la actividad eléctrica neuronal, hay que extraer de la misma la información de las características que se consideren relacionadas con el rango de clasificación. Podemos clasificar las características a obtener por distintos métodos, en función del dominio de representación al que pertenecen.

2.3.1. Dominio del tiempo

Se analiza el valor de la señal en una determinada magnitud en función del tiempo. Esta representación de la señal se puede describir mediante PCA, que ya se ha descrito como útil para el pre-procesado, y que consigue reducir la dimensionalidad sin causar pérdida de información, a la par que se obtienen componentes ortogonales. Sin embargo, este método no funciona de manera óptima para datos de gran complejidad (Xie y Oniga, 2020).

También se puede utilizar ICA para la extracción de características de la señal, como una alternativa de cálculo más rápido, pero que no conserva la ortogonalidad.

Por último, en el dominio del tiempo tenemos los modelos autorregresivos (AR), que asumen que la señal EEG puede ser expresada como una combinación lineal de las señales en momentos anteriores en el tiempo (Anderson et al., 1998). Se trata de una categorización

efectiva para señales no estacionarias, pero poco efectiva para otro tipo de señales (Lawhern et al., 2012).

2.3.2. Dominio de frecuencias

La información que aporta la descomposición en frecuencias de una señal es muy útil para discriminar entre categorías aplicables a la señal leída. Por ello que el uso de la aproximación a la serie de Fourier es relevante a la hora de analizar datos de EEG. El uso del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés), que obtiene de la transformada de Fourier para valores discretos de forma eficiente, se amolda a las necesidades de rendimiento de una lectura de un EEG en tiempo real. Su uso se adecua a señales estacionarias y bandas de frecuencia estrechas.

2.3.3. Dominio de tiempo y frecuencias

El uso de la transformada de Fourier de tiempo reducido (STFT), que relaciona las frecuencia de la señal con el tiempo, ha demostrado ser útil para realizar la clasificación de comportamientos (Zabidi et al., 2012).

Además, la transformada wavelet ya explicada para el pre-procesado, permite adaptar la ventana de tiempo del wavelet según nos interese analizar las frecuencias más altas o más bajas. Sin embargo, este método sufre del principio de incertidumbre de Heissenberg, que establece que en regímenes ondulatorios es imposible determinar con certeza total toda la información de la señal simultáneamente, lo cual afecta a su rendimiento (Saeidi et al., 2021).siglas

2.3.4. Dominio del espacio

El método de patrón común espacial (CSP, por sus siglas en inglés), que consiste en encontrar filtros espaciales que maximicen la varianza para una clase y la minimicen para las demás, ha sido utilizado de forma satisfactoria para clasificar imágenes del movimiento (Li et al., 2013).

Otro método de análisis de características espaciales de lecturas EEG, que ha sido muy utilizado para el diagnóstico y estudio de la epilepsia entre otras cosas, es la descomposición de los datos en armónicos esféricos. Consiste en la proyección de los datos leídos sobre una serie de funciones, llamadas armónicos esféricos, que forman una base ortonormal de las

posiciones sobre una esfera. Posteriormente se pueden aplicar las siguientes técnicas para obtener mapeos de la actividad eléctrica de mayor resolución (Dezhong, 2000):

- Mapeo del potencial cortical (CPM, por sus siglas en inglés).
- Mapeo del laplaciano del cuero cabelludo (LM, por sus siglas en inglés).
- Mapeo del potencial pseudo cortical (PCPM, por sus siglas en inglés).
- Mapeo de la capa de dipolo equivalente (EDM, por sus siglas en inglés).
- Mapeo de la capa de carga equivalente (ECM, por sus siglas en inglés).

También se puede utilizar el método de clasificación de señal múltiple (MUSIC, por sus siglas en inglés) para estimar la fuente del dipolo eléctrico a partir de la expansión en armónicos esféricos de las señales (Giri et al., 2018).

2.3.5. Dominio del tiempo y espacio

También se ha utilizado la técnica *cubic spline technique* (CST, por sus siglas en inglés), que obtiene una fórmula de interpolación entre un conjunto de puntos, de modo que la curva resultante sea continua y derivable en primera y segunda derivadas (es decir, una curva “suave” entre dichos puntos). Esta técnica se ha utilizado para interpolar la función de las lecturas de cada electrodo. (Raheem y Hussein, 2016).

2.4. Clasificación

La clasificación de datos es útil para categorizar los datos existentes y darles un contexto al que pertenecen. También se puede conseguir una generalización de las categorías englobando los datos disponibles en ellas, para que posteriormente un nuevo dato similar a la generalización conseguida se asocie a la categoría más cercana a sus iguales (los otros datos pertenecientes a la categoría).

Un campo actualmente utilizado para la tarea de clasificar es el de la inteligencia artificial (IA), que permite aprender y extraer las características más interesantes de la categoría desde los datos que pertenecen a ella. Este método de aprender a clasificar desde unos datos de entrada y su correspondiente salida o categoría es lo que se conoce como aprendizaje supervisado, que pretende a posteriori predecir la categoría a la que pertenecen unos datos de entrada nunca conocidos antes.

La IA consiste en la simulación de comportamientos humanos como el razonamiento o el aprendizaje automático. Las aplicaciones donde se pueden utilizar la IA son múltiples y van desde sectores como educación (Hernando Calvo et al., 2022) o finanzas (Alonso y Carbó, 2022) hasta transporte (Woschank et al., 2020) o salud (Jungwirth y Haluza, 2023). La rama del aprendizaje automático, es una de las áreas de la IA que se utiliza para la categorización, clasificación y análisis de datos (Soofi y Awan, 2017).

2.4.1. Aprendizaje automático clásico

El aprendizaje automático (ML, por sus siglas en inglés) consiste en una serie de técnicas que utilizan algoritmos y modelos informáticos para aprender tareas mediante el procesamiento de los datos disponibles específicos del contexto que se quiere aprender (Akinsola, 2017). Estas técnicas se suelen diferenciar en dos grandes grupos que son las redes neuronales artificiales (ANN, por sus siglas en inglés) y el resto de técnicas o algoritmos convencionales no ANN.

Como se comenta en Mahesh (2019), el ML clásico dispone de una variedad de modelos o estrategias de aprendizaje catalogadas principalmente por aprendizaje supervisado y no supervisado. Entre los modelos o técnicas de ML más utilizados se encuentran los modelos de regresión (McCullagh, 1980), arboles de decisión (SONG y LU, 2015), maquinas de vector soporte (SVM, por sus siglas en inglés; Mammone et al., 2009) y las ANN (Abraham, 2005).

Respecto de los algoritmos no ANN, tanto el algoritmo análisis discriminante lineal (LDA, por sus siglas en inglés; Ye et al., 2004) como el algoritmo *Naive Bayes* (NB; Rennie et al., 2003) que es un clasificador probabilístico que aplica el teorema de Bayes (Bayes, 1763) que necesita solo un conjunto reducido de datos de entrenamiento para clasificar, son utilizados en el análisis de señales EEGs en MI y BCI según (Saeidi et al., 2021). LDA identifica combinaciones lineales de las variables que separan las clases y se basa en la suposición de que la densidad de los datos se distribuye normalmente con la misma covarianza entre las clases (Molla et al., 2021).

Otro método no ANN ampliamente utilizado por diversos autores, como Biagetti et al. (2021), Lawhern et al. (2012) y Ma et al. (2016) entre otros, para el análisis de datos de EEGs es el modelo SVN comentado anteriormente, que se basa en un modelado geométrico (Cortes y Vapnik, 1995) donde el algoritmo trata de separar los datos en hiperplanos diferentes, esto es, separar las clases de datos en planos de dimensión diferente a la original,

lo que se conoce como *espacio de características*.

Por otra parte, las ANN están inspiradas en un modelo biológico, lo que se conoce como bioinspiración (Krose y Smagt, 1996), y tratan de simular el comportamiento de una red interconecta de neuronas en la que cada neurona artificial se describe mediante un modelo matemático que se conoce como perceptron (Schuld et al., 2014).

Las ANN actualmente están siendo ampliamente utilizadas en el campo de la IA, con un importante crecimiento a partir de 2012 con la utilización de redes neuronales convolucionales (CNN, por sus siglas en inglés) que fueron descritas por Fukushima (1980) y actualizadas posteriormente con nuevas estrategias para que aprendieran de una manera más eficiente (Ciresan et al., 2011). Es pues a partir de 2012, gracias a que se dispone de una mayor cantidad de datos, ya sea texto o imágenes principalmente, a la mejora del hardware y la capacidad de computación de las tarjetas gráficas utilizadas para el cálculo matricial necesario en estos modelos, que las ANN han comenzando a llamarse técnicas de Aprendizaje Profundo o su traducción al inglés *Deep Learning* (DL), en parte por la posibilidad de utilizar modelos con muchas capas intermedias u ocultas (Wang y Raj, 2017).

Los principales modelos de DL son utilizados en el campo del procesamiento del lenguaje natural (PNL, por sus siglas en inglés) y en el campo del análisis de imágenes o visión por computador. Los modelos PNL son utilizados en la generación de texto como el modelo LeakGAN (Guo et al., 2017) o modelos conversacionales como el modelo InternImage-H (Dao et al., 2023) que utilizan los llamados *transformers*, basados estos en redes neuronales recurrentes (RNN, por sus siglas en inglés; Zaremba et al., 2015) y en la técnica llamada *attention* (Vaswani et al., 2017). Los modelos CNN son los utilizados para el análisis de imágenes o visión por computador como los modelos YOLOX-L (Li, Li et al., 2023) o ViT-Adapter-L (Wang et al., 2023) y el aprendizaje en segmentación con el modelo InternImage-H (Wang et al., 2023) y en clasificación de imágenes como el modelo Lion (Chen et al., 2023) que utiliza CNN + transformers.

En cuanto a los modelos de DL para la clasificación de EEG, se basan principalmente en modelos con arquitectura CNN, como el modelo *Deep ConvNets* (Schirmermeister et al., 2017; Yayık et al., 2019), el modelo *EEGNet* (Lawhern et al., 2018) o el modelo *FBCNet* (Mane et al., 2021). El modelo *FBCNet* obtiene los mejores resultados en una comparación (Ma et al., 2022) con los otros dos modelos CNN y otros dos algoritmos de clasificación clásicos, patrones espaciales comunes (CSP, por sus siglas en inglés; Ramoser et al., 2001)

y el patrón espacial común de banco de filtros (FBCSP, por sus siglas en inglés; Ang et al., 2008). FBCSP aplica la estrategia de aprendizaje adaptativo (AL, por sus siglas en inglés; Zhang et al., 2021) que consiste en la utilización de la técnica de aumento de datos (DA, por sus siglas en inglés; Krizhevsky et al., 2017) junto con la técnica de transferencia de aprendizaje (TL, por sus siglas en inglés; Pan y Yang, 2010). TL consiste en utilizar una ANN ya pre-entrenada para entrenar una red objetivo y con ello obtener mejores resultados, y su utilización entre otros motivos es debido al alto coste computacional de los entrenamientos en ML, y la necesidad de grandes espacios de almacenamiento y tiempo humano en el etiquetado de las imágenes (Tormos et al., 2022). La técnica DA (Dao et al., 2019) consiste en generar variabilidad en las imágenes originales para poder incrementar los datos de entrenamiento de los modelos de DL. Estas dos técnicas, TL y DA son ampliamente utilizadas en el tratamiento de datos de imágenes, y por tanto, también en el análisis de datos de EEG cuando se utilizan modelos CNN.

2.5. Computación cuántica y EEG

La computación cuántica, propuesta inicialmente por Feynman (1982), se basa en la utilización de las características de la mecánica cuántica para la realización de cálculos y simulaciones. Estas propiedades son principalmente:

- La superposición, que consiste en que el sistema se describe como una combinación lineal de todos sus posibles estados, es decir, dado un sistema con n estados $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle\}$ este vendrá descrito en todo momento por $\alpha_1 |1\rangle + \alpha_2 |2\rangle + \dots + \alpha_n |n\rangle$. Los coeficientes α_n son números complejos y se denominan *amplitudes de probabilidad*, y el resultado de la medición de un sistema cuántico sigue una distribución de probabilidad coincidente con el módulo al cuadrado de estos coeficientes, así, la suma de las amplitudes de probabilidad de los estados posibles en un sistema cuántico es siempre uno.

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = 1 \quad (2.3)$$

- El entrelazamiento, según el cual se pueden correlacionar los estados de dos partes del sistema (subsistemas), de modo que la medición en una parte del sistema determine lo que se obtendría en la medición de la otra.

Gracias a esto, la computación cuántica permite la manipulación simultánea de varios estados a la vez, obteniendo un paralelismo intrínseco. Todas estas características hacen que la computación cuántica sea particularmente interesante para una serie de tipos concretos de problemas, como son, los problemas de optimización, la simulación de otros sistemas cuánticos o el aprendizaje automático.

Hay varios formalismos para la utilización de la computación cuántica, pero el más extendido es el de *circuitos cuánticos* (Deutsch, 1989), que consiste en la modelización del algoritmo a ejecutar como circuitos que van modificando el estado del sistema a través de operadores llamados *puertas cuánticas*. En la Figura 2.8 se puede ver un ejemplo de circuito cuántico en el que se aplican sendas puertas cuánticas arbitrarias X e Y a dos estados $|0\rangle$ y luego se realiza una medición.

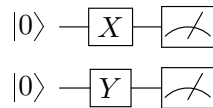


Figura 2.8. Ejemplo genérico de circuito cuántico. Fuente: elaboración propia.

Existen varios algoritmos utilizados para demostrar lo que se conoce como ventaja cuántica, que reduce la complejidad algorítmica de los mejores procedimientos clásicos conocidos para realizar las mismas tareas. Dos ejemplos son el algoritmo de Grover (1996) que busca un valor en una secuencia no ordenada de datos con complejidad asintótica en tiempo de $O(N^{1/2})$ y el algoritmo de Shor (1994) que factoriza números grandes en sus factores primos con complejidad asintótica en tiempo de $O((\log N)^3)$.

Las unidades de información más comunes en este tipo de sistema son los denominados *cúbits* (Schumacher, 1995) que representan un sistema de dos estados y todas las posibles combinaciones entre ellos en el plano de los complejos (manteniendo siempre una suma igual a uno con el cuadrado de sus coeficientes). La representación gráfica más común de un cúbit es la denominada *esfera de Bloch* (Arecchi et al., 1972) que consiste en la representación del estado mediante un vector que apunta desde el centro de una esfera a su superficie y en la que los ejes corresponden con la parte real ($|0\rangle$ a $|1\rangle$ o eje z), la parte imaginaria ($|i\rangle$ a $|-i\rangle$ o eje y) y el eje comprendido entre los estados de superposición equiprobable sin parte imaginaria ($|+\rangle$ a $|-\rangle$ o eje x). La Figura 2.9 muestra un ejemplo de esta representación. Aunando todos estos elementos, se puede ver la aplicación de puertas

cuánticas en un circuito cuántico como rotaciones de un ángulo arbitrario (θ) sobre los ejes x , y o z en la esfera de Bloch, denominándose $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ y $R_z(\theta)$ respectivamente.

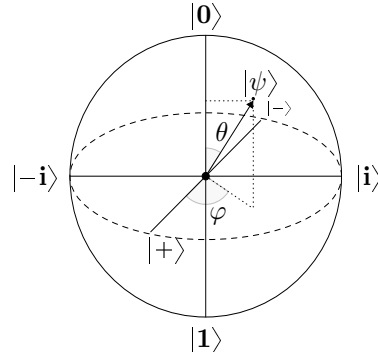


Figura 2.9. Ejemplo de representación del estado de un cúbit en la esfera de Bloch. Fuente: elaboración propia.

En el ámbito de EEG, los trabajos de computación cuántica realizados hasta ahora, están principalmente relacionados con el aprendizaje automático cuántico.

2.5.1. Aprendizaje automático cuántico

Los modelos de aprendizaje automático cuántico (QML, por sus siglas en inglés) están basados en aprovechar la potencia de cálculo de la computación cuántica en el campo de la IA (Abohashima et al., 2020).

Las redes neuronales cuánticas artificiales (QNN, por sus siglas en inglés) involucran una colección de ideas con diferentes grados de aproximación a las ANN. Los modelos de ANN trabajan con una dinámica no lineal intrínseca y el mayor reto de las QNN es conseguir una dinámica en el marco lineal y unitario de la mecánica cuántica que es su marco de trabajo Cao et al. (2017).

Los modelos que han sido utilizados en QML para el análisis y clasificación de datos son diferenciados en modelos QNN y no QNN. Los más destacados son: maquina de vector soporte cuántico (QSVM, por sus siglas en inglés; Rebstrost et al., 2014), red neuronal convolucional cuántica (QCNN, por sus siglas en inglés; Lawhern et al., 2018), algoritmo de vecinos cercanos cuántico (QNNa, por sus siglas en inglés; Wiebe et al., 2014), red neuronal recurrente cuántica (RQNN, por sus siglas en inglés; Li, Wang et al., 2023) y red neuronal con reforzamiento cuántica (QRL, por sus siglas en inglés; Meyer et al., 2022).

Respecto a los modelos comentados anteriormente destacan el QSVM que es de propósito general y pretende separar el espacio de características en hiperplanos mediante una

función kernel, y el QCNN que en su versión clásica está especializado en procesar imágenes y video, y en su versión cuántica (Kerenidis et al., 2019) trata de reproducir el comportamiento de las CNN y que ha sido mejorada en la propuesta de Shen y Liu (Shen y Liu, 2021) con la red neuronal convolucional de Fourier cuántica (QFCNN).

El modelo RQNN que no ha sido muy estudiado (no existe un estándar de facto) se construye apilando bloques recurrentes cuánticos (QRBs, por sus siglas en inglés) de manera plana (uno detrás de otro) (Takaki et al., 2021) o de manera escalonada (Li, Wang et al., 2023) donde se reescala la entrada al siguiente bloque QRBS de proceso evitando el reinicio de un qubit en cada escalada y por tanto mejorando la decoherencia general del circuito. QRB consiste en un circuito con tres componentes, codificación, *ansatz* y medición. Para la codificación en QNN se utiliza la codificación angular y para el *ansatz* que produce la aproximación a la función objetivo se utilizan métodos inspirados en la eficiencia del hardware aplicando algoritmos cuánticos variacionales (Li, Wang et al., 2023).

Los modelos QRL, que son modelos de aprendizaje por refuerzo (sin etiquetas o clases objetivo) con diversas implementaciones, están basados en circuitos cuánticos variacionales (VQC, por sus siglas en inglés) que tratan de aproximarse a un contexto clásico con diferentes *encodings* (información clásica transformada en estados cuánticos; Schuld y Killoran, 2019; Elron y Eldar, 2006) como entrada y arquitecturas. Tres ejemplos de QRL son el modelo de simulación proyectiva cuántica (QPS, por sus siglas en inglés; Briegel y Cuevas, 2013), la máquina de Boltzmann cuántica variacional (VarQBM, por sus siglas en inglés; Zoufal et al., 2021) y el modelo gradiente de política determinista profundo cuántico (QDDPG, por sus siglas en inglés; Silvirianti et al., 2015; Wu et al., 2023). El modelo QPS ejecuta una acción después de elegir la mejor acción simulada futura, similar a como funciona clásicamente, con una función de recompensa (Briegel y Cuevas, 2013). El modelo VarQBM (Zoufal et al., 2021) utiliza el método de la evolución del tiempo imaginario cuántico variacional (VarQITE, por sus siglas en inglés) basado en el principio variacional de McLachlan (McLachlan, 1964) que calcula el gradiente de la función de pérdida real para hamiltonianos parametrizados arbitrarios. El modelo QDDPG (Silvirianti et al., 2015; Wu et al., 2023) que utiliza una estrategia similar al algoritmo DDPG clásico (Lillicrap et al., 2019) y que es eficiente para resolver problemas de decisión secuenciales en el dominio continuo (que sufren de alta dimensionalidad por su discretización) y que solo requiere una sola vez una optimización para generar un modelo que genere la secuencia de control deseada para cada estado objetivo arbitrario buscado.

Se han aplicado modelos QNN y no QNN híbridos con muy buenos resultados para el aprendizaje automático cuántico, como la red neuronal recurrente por refuerzo cuántica (QLSTM-DRQN, por sus siglas en inglés; Chen, 2022) y la red neuronal cuántica híbrida con capas densas paralelas cuánticas (HQNN-Parallel, por sus siglas en inglés; Senokosov et al., 2023). La red QLSTM-DRQN utiliza como función kernel del aprendizaje por refuerzo una red cuántica recurrente de memoria a largo plazo (QLSTM, por sus siglas en inglés) obteniendo mejores resultados que la utilización de VQC como función kernel. La red HQNN-Parallel consiste en una red convolucional clásica que realiza el procedimiento de minimizar las dimensiones extrayendo el significado más importante de las imágenes y posteriormente para mejorar el tiempo de proceso utiliza capas densas paralelas basadas en VQC. Los VQC son circuitos cuánticos basados en puertas que utiliza una función de coste que trata de encontrar mínimos locales arbitrariamente buenos utilizando funciones heurísticas. Dos ejemplos de función de coste para los VQC es la basada en el cociente de Rayleigh utilizando el método Rayleigh–Ritz (Yuan et al., 2019) y la basada en el principio de McLachlan (1964) según Cerezo et al. (2021).

2.5.2. Aprendizaje automático cuántico en EEG

A pesar de que la computación cuántica se encuentra en sus primeras etapas de desarrollo, su estudio aplicado a los EEG ha generado ya resultados prometedores en las distintas fases de su procesado (Aishwarya et al., 2020).

Los posibles beneficios de la aplicación de la computación cuántica, no viene dados solamente por su superioridad de procesado para ciertas tareas concretas como puede ser aquellas que tienen que ver con optimización o ML (Ciliberto et al., 2018), sino también en que se apoya en un paradigma totalmente distinto basado en un conjunto de principios como la función de onda, indeterminación, superposición, etc (Ajagekar et al., 2020) que pueden utilizarse para replantear los problemas desde otra perspectiva como en Popiel et al. (2021) donde se aplica el formalismo cuántico considerando las lecturas de los EEG como funciones de onda y analizando sus operadores posición y momento.

En el preprocesado de datos BCI una de las arquitecturas utilizadas se basa en el modelo RQNN que puede describir señales aleatorias no estacionarias como paquetes de ondas variables en el tiempo y es utilizado en el tratamiento de las señales BCI (Huang et al., 2022; Gandhi et al., 2011). Mediante este tipo de estrategias Gandhi et al. (2014) han implementado una solución de eliminación de ruido no gaussiano en las señales EEGs

(Suter, 2017) utilizando un modelo RQNN y considerando la salida de la misma como una función de distribución de probabilidad (utilizando un LDA para la clasificación), consiguiendo mejorar los resultados en un 5% de precisión respecto de los resultados con las señales EEGs sin procesar.

En el apartado de extracción de características se ha utilizado la versión cuántica del algoritmo de optimización de enjambre de partículas o *Particle Swarm Optimizer* (PSO, por sus siglas en inglés; Sedighzadeh y Masehian, 2009; Eberhart y Shi, 2001), basado en la resolución de un problema de optimización sobre el movimiento de un enjambre de partículas con un algoritmo evolutivo, y para realizar ICA se ha demostrado especialmente útil en el análisis de grandes cantidades de datos como ocurre con los sistemas BCI basados en EEG (Huang et al., 2013).

Otra estrategia utilizada para la extracción de características utiliza la transformación de paquetes de ondas cuántica (QWPT, por sus siglas en inglés; Li et al., 2015) para obtener una medida de la entropía de la energía del paquete ondas (WPEE, por sus siglas en inglés; Kak, 2007), aunque también puede ser aplicada para obtener otras métricas. Se utiliza QSVM para la etapa de clasificación tras obtener la WPEE, demostrando las capacidades de la computación cuántica para análisis de gran cantidad de información, que se puede aplicar para extender la complejidad de las características analizadas de los datos de un EEG (Li et al., 2015).

También se han obtenido buenos resultados en la clasificación de EEGs mediante la red neuronal cuántica de ranura cúbica (CS-QNN, por sus siglas en inglés; Raheem y Hussein, 2016) que se alimenta de datos obtenidos por CST y los clasifica con QNN.

2.6. Resumen del contexto y estado de la técnica

Tras muchos años de estudio de la información extraída de los EEG, hay una gran diversidad de aproximaciones para resolver cada una de las fases del proceso. Los métodos analíticos y estadísticos son los más estudiados y presentan una relativa simplicidad en su implementación y un coste computacional asumible. Sin embargo, tienen la gran desventaja de que cada método sólo muestra efectividad para un dominio específico. Cada método de pre-procesado es más útil para eliminar un tipo específico de artefacto y cada método de clasificación se aviene mejor a unas determinadas aplicaciones (intención de movimiento, BCI, etc.). Debido a ello y a la variabilidad de las lecturas entre individuos, ha ganado

peso en los últimos años la aplicación de estrategias basadas en IA y más concretamente en ML. En la Figura 2.10 se muestran las distintas opciones encontradas actualmente para cada uno de los bloques funcionales de una solución de clasificación de lecturas EEG. Estos esquemas se basan en los presentados en Saeidi et al. (2021).

En cuanto a las opciones cuánticas, puede verse un esquema de las distintas aplicaciones realizadas a EEG en la Figura 2.11. Aunque ya se han aplicado diversas técnicas de computación cuántica para pre-procesado, extracción de características y clasificación, aún queda mucho por estudiar respecto a la adecuación de cada técnica para cada fase y contexto. También hace falta determinar las secuencias de técnicas, en cada una de las funcionalidades del esquema de clasificación general de un EEG, que son más adecuadas para cada situación y aplicación. Además, se debe profundizar en la aplicación de las propiedades del paradigma cuántico al problema: ¿qué puede aportar la interpretación de alguna parte del sistema como una función de onda?, ¿cómo se puede utilizar el fenómeno de la superposición para manejar la información leída en un EEG?, ¿y el entrelazamiento?, ¿en qué medida pueden ser útiles algoritmos propios de la cuántica como la transformada cuántica de Fourier (QFT)?.



Figura 2.10. Taxonomía de las opciones disponibles para lectura de EEG (elaboración propia).

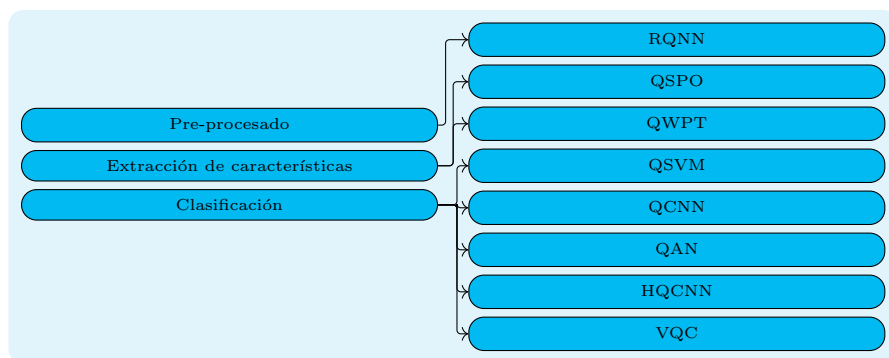


Figura 2.11. Técnicas cuánticas aplicadas a EEG (elaboración propia).

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

El objetivo general del presente trabajo consiste en la utilización de la computación cuántica para obtener una mejora en el análisis y clasificación de las señales obtenidas de un EEG. Esta mejora puede venir dada tanto en la precisión de la representación y análisis de la información, como en la eficacia o eficiencia de los métodos utilizados.

3.2. Objetivos específicos

- Presentar las nociones básicas y el marco de trabajo de en el que se desarrolla el análisis de EEG extracraneales.
- Proponer alguna mejora en alguno de los procesos de análisis de EEG gracias a la computación cuántica.
- Aplicar la mejora a datos reales para comprobar la mejora en la clasificación de la intención de movimiento.
- Encontrar la posibilidad de aplicación de las soluciones cuánticas aquí encontradas a otras áreas de interés dentro y fuera del ámbito de la Electroencefalografía.
- Analizar la viabilidad de las soluciones encontradas en la actual era de dispositivos cuánticos ruidosos de escala intermedia (NISQ, por sus siglas en inglés).
- Postular las características que deben mejorar en los computadores cuánticos en el futuro y que tengan aplicación al problema de estudio.

4. Desarrollo del trabajo

4.1. Entendiendo los EEG

Los potenciales eléctricos medidos en un EEG provienen de los potenciales electroquímicos producidos en la actividad neuronal (Nunez y Srinivasan, 2006). En esta se generan dos tipos de potenciales eléctricos:

- Potenciales sinápticos (Synaptic Potentials, SP), aquellos que se producen en las conexiones entre neuronas.
- Potenciales de acción (Action Potentials, AP), aquellos que son producidos en la actividad interna de cada neurona.

De estos dos tipos de potenciales los únicos relevantes para la medición obtenida en un EEG son los SP.

Dada la complejidad de estos potenciales que se presentan de manera anisotrópica y en elevadas cantidades (más de mil millones de neuronas para un cerebro adulto), para simplificar el estudio se consideran regiones del cerebro en las que los potenciales son promediados. Un ejemplo de esto son las llamadas “macrocolumnas”, que se utilizan como una unidad de superficie sobre la que medir dipolos en el córtex, de entre 1 y 3 mm. El orden de conexiones sinápticas en una macrocolumna es de alrededor de 10^{10} .

Al considerar estos conjuntos de células, el potencial se comporta como si se tratase de un dipolo, y a las regiones donde se producen estos dipolos, se las denomina fuentes del dipolo (DS, por sus siglas en inglés). A este modelo se le conoce como “aproximación de dipolo” (Nunez y Srinivasan, 2006). Esto es posible porque el tejido cerebral se comporta como un conductor lineal a gran escala, lo que hace que las señales se superpongan, es decir, el potencial eléctrico producido en un área determinada del cerebro se puede describir como una combinación lineal de los potenciales eléctricos que afecte a dicha área. Las aproximaciones a los potenciales generados por la actividad neuronal, tienen entonces su reflejo en la parte externa del cráneo donde pueden ser medidas por unos electrodos.

Dado que cada electrodo de un EEG abarca un área determinada, la medida obtenida representa una mezcla de los SP para dicha zona. De este modo, la medida, aunque es consecuencia de la actividad neuronal, no permite deducir de forma exacta y unívoca cuál ha sido esta última, por lo que lecturas similares podrían ser consecuencia de procesos

neuronales distintos. Además, hay que tener en cuenta que los campos eléctricos atraviesan distintos tejidos (corteza cerebral, meninge, cráneo, etc.) hasta ser captados por los electrodos del EEG. Dichos medios presentan distintas conductividades por lo que afecta notablemente a las características de la señal y pueden dificultar la caracterización de la DS.

Para resolver esta cuestión, se trabaja con el llamado modelo de n-esferas y que consiste en modelar la cabeza humana como esferas homogéneas concéntricas correspondientes a los distintos tejidos, cada una de las cuales presenta una conductividad característica. Por ejemplo, el modelo de 4-esferas que es el que más tejidos tiene en cuenta, considera el tejido cerebral o cortex, fluido cerebro espinal (CSF) o meninge, calavera y cuero cabelludo. El modelo de 3-esferas es similar pero sin tener en cuenta la diferencia de conductividad del fluido cerebro espinal.

Aunque es clara la ventaja del modelo de 3-esferas frente a los que consideran menos tejidos, parece que no hay acuerdo en cuanto a si es más óptimo considerar un modelo de 3 o 4 esferas, pues debido a la falta de certidumbre acerca de la conductividad real que presentan ciertos tejidos, cada autor tiene preferencia por uno u otro modelo (Nunez y Srinivasan, 2006).

Estas consideraciones son especialmente relevantes en lo que a la localización del DS se refiere, pues afectan sustancialmente a la estimación de la localización del DS a partir de las lecturas EEG, característica importante para ciertas aplicaciones, como por ejemplo el diagnóstico y estudio de la epilepsia, área en la cual se han hecho mayores esfuerzos para obtener una localización precisa del DS.

También la distribución temporal y de frecuencias de la señal se considera para obtener información acerca de la función neuronal. Es pues, el tipo de clasificación a considerar (diagnóstico de una condición en concreto, clasificación de procesos cognitivos como puede ser la intención motora, etc) la que determinará las características de la señal que serán de interés para la aplicación.

Sin embargo, debido a las circunstancias expuestas, es el análisis espacial del origen de la señal el que presenta mayor complejidad, problema al que se han realizado distintas aproximaciones, de las cuales la que promete resultados más precisos es el análisis de coordenadas en armónicos esféricos.

4.2. Armónicos esféricos

Los armónicos esféricos son una serie de funciones ortonormales que pueden ser usados para representar localizaciones en una esfera a través de unos coeficientes de expansión (Seeley, 1966). Se formulan a partir de la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas (ver desarrollo en Apéndice A.4 y la representación gráfica de los mismos en el Apéndice A.7) y son de la forma $Y_l^m(\theta, \varphi)$, donde:

- l es el grado, con valores enteros de 0 a ∞
- m es el orden, con valores enteros de $-l$ a $+l$.
- θ y φ son las coordenadas esféricas de la localización a representar.

Así, dada una función $f(\theta, \varphi)$ con valores situados en una esfera, esta se puede representar como $f_Y(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-m}^{+m} A_l^m Y_l^m$, siendo A_l^m los coeficientes de expansión.

Para el cálculo de los coeficientes de expansión a partir de la función original se utiliza la siguiente integral:

$$A_l^m = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \overline{Y_l^m(\theta, \varphi)} f(\theta, \varphi) d\varphi d\theta, \quad (4.1)$$

siendo $\overline{Y_l^m(\theta, \varphi)}$ el complejo conjugado de cada armónico esférico.

Los armónicos esféricos tienen la forma:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos(\theta)) e^{im\phi} \quad (4.2)$$

Donde $P_l^m(x)$ son los polinomios asociados de Legendre. Para el caso de $P_l^m(\cos(\theta))$ el desarrollo de los mismo puede hacerse de la siguiente forma:

$$P_l^m(\cos(\theta)) = (-1)^m (\sin\theta)^m \frac{d^m}{d(\cos\theta)^m} (P_l(\cos\theta)) \quad (4.3)$$

Y teniendo en cuenta que $P_l(x)$ son los polinomios de Legendre, que se pueden obtener a partir de la fórmula de Rodrigues:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l] \quad (4.4)$$

Como se puede comprobar en el Apéndice A.5, el desarrollo de los polinomios asociados de Legendre para la función coseno, se puede determinar en base a sumas y productos de potencias de funciones trigonométricas. En este trabajo se mostrará como se puede utilizar la computación cuántica para calcular potencias y ciertos productos de potencias de funciones trigonométricas de una manera eficiente de modo que se mejore la complejidad computacional en el cálculo de armónicos esféricos.

4.3. Armónicos esféricos de una señal EEG

Como se ha comentado anteriormente, una técnica apropiada para caracterizar la información espacial de los datos extraídos mediante EEG en un momento determinado en el tiempo, consiste en calcular los coeficientes de expansión en armónicos esféricos correspondientes a la medida realizada por los electrodos. Al llevar la medición al dominio de los armónicos esféricos, se realiza automáticamente una extrapolación de la función discreta a una continua, considerando las interdependencias de las mediciones realizadas, lo cual es útil para localizar la posición exacta de los dipolos, pues estos no tienen por qué estar justo debajo del electrodo (Nunez y Srinivasan, 2006).

En un primer momento, podría parecer que a más electrodos más resolución de la señal, y por lo tanto, mejor la aproximación obtenida. Sin embargo, esto no tiene por qué ser así necesariamente, pues si los electrodos están demasiado próximos no aportan nada y, además, se ven afectados por la variabilidad entre individuos en lo que a topología de los surcos cerebrales se refiere, dificultando la caracterización de cualidades compartidas entre individuos si estas son relevantes para la aplicación a implementar. Si no se llega a los límites en los cuales el aumento de número de electrodos deja de tener sentido, el uso de más electrodos permite una mejor caracterización de la señal, debido a que permite la obtención de órdenes mayores de armónicos esféricos. *Si hacemos la analogía con expansiones de Fourier, utilizar más electrodos sería al ámbito espacial en los armónicos esféricos lo que a las funciones temporales es la frecuencia de muestreo en el caso de Fourier* (Nunez y Srinivasan, 2006, p.300).

Vemos así como la proyección de las mediciones a la base de armónicos esféricos puede utilizarse para caracterizar de forma precisa la situación de los dipolos generados en el cerebro, mucho más precisa que CSP, el otro método más utilizado para este propósito.

El mayor problema con el aumento de electrodos y órdenes de armónicos esféricos es que la complejidad computacional se eleva considerablemente, con complejidad asintótica de $O(N^3)$ para N armónicos (Suda y Takami, 2002). Para poder utilizar una solución basada en armónicos esféricos, y de la que se pueda obtener información relevante en tiempo real, es necesario encontrar una vía eficiente para su cálculo, que no nos presta las soluciones computacionales aplicadas hasta ahora en este campo (Giri et al., 2018).

4.4. Computación cuántica aplicada a señales EEG

En este apartado se desarrolla una propuesta de evaluación de armónicos esféricos mediante la utilización de computación cuántica, con resultados aplicables a datos extraídos de EEG.

4.4.1. Cálculos mediante computación cuántica

La complejidad computacional en el cálculo de los armónicos esféricos, viene determinada por la gran cantidad de cálculos basados en trigonometría que conllevan y que resultan en una gran cantidad de cálculos a realizar si se quieren determinar utilizando computación clásica. Sin embargo, las características ondulatorias inherentes a la mecánica cuántica confieren a la computación cuántica capacidades implícitas de representación de ángulos y fases, lo que deriva en la posibilidad de realizar cálculos trigonométricos sin apenas costes, como se verá seguidamente.

Expresiones binomiales en el producto tensorial

A continuación, se muestra como el producto tensorial de un operador de orden 2 en el que el valor absoluto de los coeficientes de las diagonales son iguales, realizado n veces, se puede expresar mediante la potencia n de un binomio compuesto por sus coeficientes.

Considérese un operador de la siguiente forma:

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Si hayamos el producto tensorial del operador por sí mismo:

$$\hat{O} \otimes \hat{O} = \begin{pmatrix} a^2 & -ab & -ab & b^2 \\ ab & a^2 & -b^2 & -ab \\ ab & b^2 & a^2 & -ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Como se puede ver, cada fila o columna que se coja contiene los términos de la potencia binomial $(a + b)^2$ con las siguientes combinaciones de signos:

- la primera fila y la última columna corresponden al desarrollo del binomio $(a+b)^2$.
- la primera columna y la última fila corresponden al desarrollo del binomio $(a-b)^2$.

- el resto de filas y columnas se componen de los términos del resultado de la operación $(a + b)(a - b)$, teniendo en cuenta que todos los coeficientes de la diagonal principal deben ser a^2 .

Sea ahora un operador de orden n , cuya composición obedece a las siguientes reglas:

- la primera fila y la última columna corresponden al desarrollo del binomio $(a+b)^n$.
- la primera columna y la última fila corresponden al desarrollo del binomio $(a-b)^n$.
- el resto de filas y columnas se componen de los términos del resultado de las operaciones $\prod_{i=1}^n (a \pm b)$, realizando todas las combinaciones de signos posibles (es decir 2^n) y teniendo en cuenta que todos los coeficientes de la diagonal principal deben ser a^2 .

Si lo expresamos como una matriz de orden 2 de la siguiente manera:

$$\hat{O}^{\otimes n} = \widehat{A + B} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

En la que A es la matriz que se compone de los primeros $n/2$ elementos de la matriz original y el resto se distribuye de forma coherente. Así, $(A + B) = (a + b)^n$.

Entonces, si hacemos el siguiente producto tensorial:

$$\hat{O} \otimes \widehat{A + B} = \begin{pmatrix} aA & -aB & -bA & bB \\ aB & aA & -bB & -bA \\ bA & bB & aA & -aB \\ bB & bA & aB & aA \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Como se puede comprobar, si obviamos los signos, las filas y columnas de la matriz resultante responden a los términos resultantes del producto $(a+b)(A+B)$, como $(A+B) = (a + b)^n$, entonces:

$$\hat{O} \otimes \widehat{A + B} = \hat{O} \otimes \hat{O}^{\otimes n} = \hat{O}^{\otimes(n+1)} \quad (4.9)$$

Que, como se acaba de ver, tiene forma de potencia de binomio en sus filas y columnas con la distribución de signos correspondiente a las distintas combinaciones de signos en $\prod_{i=1}^n (a \pm b)$.

La distribución de los términos de la expansión de la potencia del binomio concreta, viene dada de tal forma que cada término aparece en cada fila o columna de la matriz resultante tantas veces como indique su coeficiente en la citada expansión. Si consideramos la primera columna, se pueden encontrar los distintos términos de la expansión de la

potencia del binomio en las posiciones $2^i \forall i \in n$, con n el orden de la matriz y posiciones numeradas de 0 a n . Para comprobarlo, se parte de la Ecuación 4.6, en la que se puede comprobar que el resultado obtenido contiene en las posiciones 1, 2 y 4 los distintos términos de la expansión de la potencia binomial $(a + b)^2$.

Suponiendo que $\hat{O}^{\otimes n}$ cumple que tiene en las posiciones 2^i los términos buscados:

$$\hat{O} \otimes \hat{O}^{\otimes n} = \begin{pmatrix} a\hat{O}^{\otimes n} & -b\hat{O}^{\otimes n} \\ b\hat{O}^{\otimes n} & a\hat{O}^{\otimes n} \end{pmatrix} = \hat{O}^{\otimes(n+1)} \quad (4.10)$$

Como en una matriz en la que hay números iguales y distintos entre sí, el multiplicarlos a todos por el mismo número no altera esas relaciones de igualdad y desigualdad, la parte de la matriz multiplicada por a , va a mantener las relaciones de igualdad y desigualdad existentes en $\hat{O}^{\otimes n}$. Es decir, si se tiene:

$$x \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy_0 \\ xy_1 \\ \vdots \\ xy_n \end{pmatrix}$$

Entonces, para cualquier combinación entre k y l con $k \leq n$ y $l \leq n$:

$$\begin{cases} xy_k = xy_l & \text{si } y_k = y_l \\ xy_k \neq xy_l & \text{si } y_k \neq y_l \end{cases}$$

Por lo que en $a\hat{O}^{\otimes n}$ se pueden encontrar términos distintos en las posiciones 2^i hasta la posición n . Como el último elemento de la columna de $\hat{O}^{\otimes n}$ es distinto a todos los demás (lo mismo ocurre con el primer término), $b\hat{O}^{\otimes n}$ proporcionará un valor diferente al resto en la posición 2^n , que para la matriz $\hat{O} \otimes \hat{O}^{\otimes n}$, resulta en un valor distinto en la posición 2^{n+1} . Así, queda demostrado que para cualquier $\hat{O}^{\otimes n}$ se podrán encontrar los distintos términos de la expansión binomial $(a \pm b)^n$ en las posiciones $2^i \forall i \in [0..n]$.

Tomando $\{\hat{O}_l : l \in [0..n]\}$ como cada uno de los términos en las posiciones 2^i , se tiene que $\hat{O}_l = a^{n-l}b^l$, dado esto por el hecho de que, como se puede observar en la Ecuación 4.10, la mitad superior de la primera columna del resultado es $a \cdot \hat{O}^{\otimes n}$ y la segunda mitad $b \cdot \hat{O}^{\otimes n}$, por lo que se dispone ya de un mecanismo para encontrar los términos de la expresión binomial $(a \pm b)^n$.

Potencias del coseno

Considérese ahora un único cúbit inicializado al estado $|0\rangle$ al que se le ha provocado una rotación de ángulo θ sobre el eje Y .

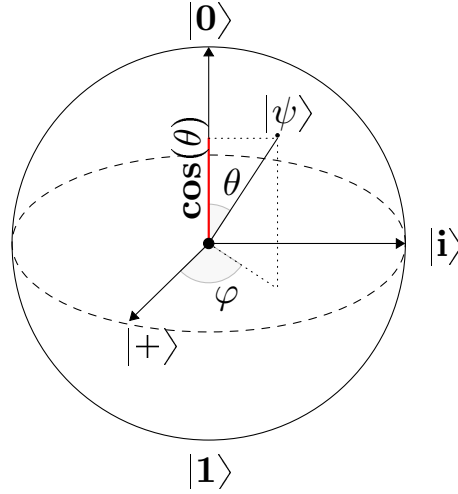


Figura 4.1. Coseno del ángulo de rotación en una esfera de Bloch. Fuente: elaboración propia.

El eje Z contiene el coseno del ángulo rotado. Si se considera la matriz de rotación arbitraria sobre el eje y :

$$R_y(\theta) = e^{i\frac{\theta Y}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

En el caso partir del estado $|0\rangle$, es decir $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la aplicación del operador R_y da el siguiente resultado:

$$R_y(\theta) |0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Tras una serie continua de mediciones para determinar las probabilidades de cada estado, considérese la siguiente operación:

$$p(|0\rangle) - p(|1\rangle) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.13)$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos^2x - \sin^2y = \cos(x+y)\cos(x-y)$:

$$p(|0\rangle) - p(|1\rangle) = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \cos(\theta)\cos(0) = \cos\theta \quad (4.14)$$

A continuación, se considera la aplicación de puertas de rotación sobre el eje Y , aplicadas a un número indeterminado de cúbits de forma paralela y utilizando en todas el mismo ángulo θ . El diagrama del circuito cuántico sería el siguiente:

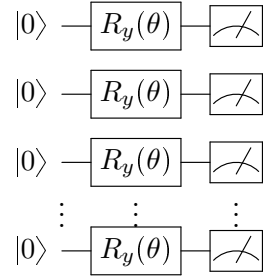


Figura 4.2. Circuito de rotaciones sobre el eje Y en paralelo usando el mismo ángulo.
Fuente: elaboración propia.

Dado que el operador de rotación sobre el eje Y tiene la misma forma que el operador \hat{O} y estamos aplicando todas las rotaciones sobre el mismo ángulo, el resultado del producto tensorial $R_y(\theta) \otimes R_y(\theta) \otimes \dots \otimes R_y(\theta)$ contiene los términos de la potencia del binomio $(\text{sen}(\frac{\theta}{2})\text{cos}(\frac{\theta}{2}))^n$ en sus filas y columnas, es decir, la matriz asociada a los operadores de rotación, considerando n cúbits, sería la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \cos^n(\frac{\theta}{2}) & -\text{sen}(\frac{\theta}{2})\text{cos}^{n-1}(\frac{\theta}{2}) & \dots & -\text{sen}^{n-1}(\frac{\theta}{2})\text{cos}(\frac{\theta}{2}) & -\text{sen}^n(\frac{\theta}{2}) \\ \text{sen}(\frac{\theta}{2})\text{cos}^{n-1}(\frac{\theta}{2}) & \cos^n(\frac{\theta}{2}) & \dots & -\text{sen}^n(\frac{\theta}{2}) & -\text{sen}^{n-1}(\frac{\theta}{2})\text{cos}(\frac{\theta}{2}) \\ \vdots & \dots & -\text{sen}^n(\frac{\theta}{2}) & \text{sen}^{n-2}(\frac{\theta}{2})\text{cos}^2(\frac{\theta}{2}) & -\text{sen}^{n-1}(\frac{\theta}{2})\text{cos}(\frac{\theta}{2}) \\ \text{sen}^n(\frac{\theta}{2}) & \text{sen}^{n-1}(\frac{\theta}{2})\text{cos}(\frac{\theta}{2}) & \dots & \text{sen}^{n-(n-1)}(\frac{\theta}{2})\text{cos}^{n-1}(\frac{\theta}{2}) & \cos^n(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Al aplicar el operador a $|0\rangle^{\otimes n}$, se obtiene un nuevo estado compuesto de los coeficientes de la primera columna, que contiene los términos del desarrollo del binomio de grado correspondiente al grado de la matriz, cada uno repetido tantas veces como figura en dicho desarrollo del binomio:

$$\begin{pmatrix} \cos^n(\frac{\theta}{2}) \\ \text{sen}(\frac{\theta}{2})\text{cos}^{n-1}(\frac{\theta}{2}) \\ \vdots \\ \text{sen}^n(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

El valor esperado consistirá en una estadística correspondiente a la suma de los cua-

drados de los coeficientes. Es decir:

$$\langle 0^{\otimes n} | R_y(\theta)^{\otimes n} | 0^{\otimes n} \rangle = \begin{pmatrix} (\cos^n(\frac{\theta}{2}))^2 \\ (\text{sen}(\frac{\theta}{2})\cos^{n-1}(\frac{\theta}{2}))^2 \\ \vdots \\ (\text{sen}^n(\frac{\theta}{2}))^2 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Esta matriz contiene toda la información de las potencias de $\cos^l(\theta)$ para $l \leq n$, pues si consideramos el cambio de variables $c = \cos^2\frac{\theta}{2}$ y $s = \text{sen}^2\frac{\theta}{2}$ y la expresión $(c+s)^{n-k}(c-s)^k$ donde k es la potencia del coseno del ángulo a averiguar, como $(c+s) = (\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \text{sen}^2(\frac{\theta}{2})) = 1$ y $(c-s) = (\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \text{sen}^2(\frac{\theta}{2})) = \cos(\theta)$ el resultado será $1(\cos\theta)^k$:

$$(c+s)^{n-k}(c-s)^k = \cos^k\theta \quad (4.18)$$

Expandiendo la expresión $(c+s)^{n-k}(c-s)^k$ se obtendrán combinaciones de sumas y restas de los términos de la expansión de la expresión binomial $(c+s)^n$. Dichos términos son los obtenidos en la ejecución del circuito.

Por ejemplo, en un circuito de 3 cúbits:

$$\begin{aligned} \cos^3\theta &= (c-s)^3 = c^3 - 3c^2s + 3cs^2 - s^3 = \\ &= \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^3 - 3\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 - \left(\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^3 = \\ &= \left(\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 - 3\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 + 3\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 - \left(\text{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Que es la combinación de los términos obtenidos de la ejecución del circuito con tres cúbits sumando los coeficientes de los estados con un número de unos en el ket par o cero y restando los coeficientes correspondientes a los estados con un número de unos impar, es decir:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^r p(|i\rangle) \quad (4.20)$$

Con r igual al número de unos en la etiqueta del ket y donde cada $p(|i\rangle)$ representa el módulo al cuadrado de cada uno de los estados, o lo que es lo mismo por lo que vimos anteriormente, el cuadrado de cada uno de los términos del binomio $(\cos\frac{\theta}{2} + \text{sen}\frac{\theta}{2})^n$. Esta última fórmula es aplicable para cualquier número de cúbits si se quiere obtener $\cos^n\theta$.

Siguiendo este mismo razonamiento y utilizando la propiedad demostrada también anteriormente de las expresiones binomiales, según la cual, se pueden obtener los distintos términos de la expansión de la potencia binomial en las posiciones $2^i \forall i \in [1..n]$ de la matriz del valor esperado, se puede calcular el resto de potencias del coseno $\cos^{n-1}\theta \dots \cos\theta$.

Potencias del seno

Considerando la identidad trigonométrica $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}(\theta)$ se puede utilizar el mismo circuito visto anteriormente para calcular potencias del seno. Se tendría $R_y\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \otimes R_y\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \otimes \dots \otimes R_y\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ con el resultado:

$$\begin{pmatrix} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \dots & -\text{sen}^n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \vdots & \dots & -\text{sen}^n\frac{\pi}{2} - \theta & -\text{sen}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \text{sen}^n\frac{\pi}{2} - \theta & \text{sen}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \dots & \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Y el valor esperado:

$$\langle 0^{\otimes n} | R_y\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^{\otimes n} | 0^{\otimes n} \rangle = \begin{pmatrix} \left(\cos^n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^2 \\ \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^2 \\ \vdots \\ \left(\text{sen}^n\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Considerando esta vez $c = \cos^2\frac{\pi}{2} - \theta$ y $s = \text{sen}^2\frac{\pi}{2} - \theta$, tenemos que $(c-s)^k = (\cos^2\frac{\pi}{2} - \theta - \text{sen}^2\frac{\pi}{2} - \theta)^k = (\cos\frac{\pi}{2} - \theta)^k = \text{sen}^k\theta$. Así tenemos que:

$$(c+s)^{n-k}(c-s)^k = \text{sen}^k\theta \quad (4.23)$$

Con lo que usando n cúbits, se tiene una expresión desde la que se puede partir para obtener la combinación del valor esperado del circuito que resulte en el cálculo de las potencias del seno.

Productos de potencias seno · coseno

A través del valor esperado, se pueden obtener también algunos productos del tipo $\text{sen}^i(\theta)\cos^j(\theta)$ con $i+j = n$ siendo n el número de cúbits utilizado y que corresponde con el mayor orden l de los armónicos esféricos a calcular.

Para cualquier $k \in \mathbb{N} : k > 2$, con $p = 1$ si n es impar y $p = 2$ si n es par:

$$\begin{aligned} & \left(\text{sen}^{k-p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^k\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 - \left(\text{sen}^k\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{k-p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 = \\ & = \text{sen}^{2k-2p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{2k}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}^{2k}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{2k-2p}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \\ & = \text{sen}^{2k-2p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{2k-2p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos^{2p}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}^{2p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \\ & = \frac{\text{sen}^{2k-2p}\theta}{2^{2k-2p}}\cos\theta \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dado que $(\cos^4(\frac{\theta}{2}) - \sin^4(\frac{\theta}{2})) = (\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2}))(\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})) = (\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})) = \cos\theta$.

También aquí se puede utilizar el ángulo $\frac{\pi}{2} - \theta$ para cambiar las funciones trigonométricas en la expresión resultante de modo que se obtendría:

$$\left(\sin^{k-p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^k\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 - \left(\sin^k\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{k-p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 = \frac{\cos^{2k-2p}\theta}{2^{2k-2p}}\text{sen}\theta \quad (4.25)$$

Para n pares también se puede comprobar la siguiente relación:

$$\begin{aligned} (\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2})^2 - (\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2})^2 &= \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^6\frac{\theta}{2} - \text{sen}^4\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2} = \\ &= \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos^4\frac{\theta}{2} - \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}) = \frac{\text{sen}^2\theta}{4}\left(\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 - \frac{\text{sen}^2\theta}{4}\right) = \\ &= \frac{\text{sen}^2\theta}{4}\left(\frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}{4}\right) = \frac{\text{sen}^2\theta + 2\text{sen}^2\theta\cos\theta + \text{sen}^2\theta\cos^2\theta - \text{sen}^4\theta}{16} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Despejando $\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$:

$$\text{sen}^2\theta\cos^2\theta = 16\left((\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2})^2 - (\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2})^2\right) - \text{sen}^2\theta - 2\text{sen}^2\theta\cos\theta + \text{sen}^4\theta \quad (4.27)$$

Donde todos los términos de la parte derecha de la ecuación se pueden calcular mediante las relaciones ya mostradas.

Otras relaciones trigonométricas

A continuación se describen otras relaciones trigonométricas que se pueden obtener de la combinación de los resultados obtenidos del valor esperado del circuito cuántico estudiado, que no tienen aplicación directa para el problema sobre el que trata este trabajo, pero que pueden ser de interés en otros ámbitos.

En los circuitos con n par, se puede comprobar la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \left(\sin^{n/2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{n/2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 + \left(\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 &= \sin^{2n/2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{2n/2}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \\ &= \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin^n\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

O también, esta otra:

$$\begin{aligned} \left(\sin^{n/2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{n/2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 &= \sin^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) = \\ &= \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n = \left(\frac{\text{sen}\theta}{2}\right)^n = \frac{\text{sen}^n\theta}{2^n} \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.4.2. Evaluación de armónicos esféricos mediante computación cuántica

Las relaciones obtenidas pueden utilizarse de forma provechosa para realizar la evaluación de los polinomios asociados de Legendre correspondientes a los armónicos esféricos.

Considerando el circuito indicado en la Figura 4.2, se puede realizar dos tandas de ejecuciones del mismo, con un número de cúbits igual al mayor orden l del polinomio asociado de Legendre $P_l^m(\cos\theta)$ que se quiera calcular, para obtener el valor esperado:

- Una realizando rotaciones θ con el ángulo correspondiente al que se quieran realizar los cálculos trigonométricos obteniendo las potencias del coseno de dicho ángulo y los productos del tipo $\frac{\text{sen}^{2k-2p}\theta}{2^{2k-2p}}\cos\theta$.
- Otra realizando rotaciones $\frac{\pi}{2} - \theta$ para obtener las potencias del seno y los productos del tipo $\frac{\cos^{2k-2p}\theta}{2^{2k-2p}}\text{sen}\theta$.
- El resto de cálculos de los polinomios asociados de Legendre habría que realizarlos utilizando computadoras clásicas y apoyándose en las potencias y productos ya calculados.

Para calcular, por ejemplo, los polinomios asociados de Legendre de hasta orden $l = 4$ se pueden descomponer como se muestra en el Apéndice A.5. Con la obtención del valor esperado para el estado $|0000\rangle$ de la versión de 4 cúbits del circuito estudiado, obtenemos,

para un ángulo de rotación θ :

$$C = \langle 0000 | R_y(\theta) \otimes R_y(\theta) \otimes R_y(\theta) \otimes R_y(\theta) | 0000 \rangle = \begin{pmatrix} (\cos^4 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^2 \\ (\sin^4 \frac{\theta}{2})^2 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Y para un ángulo de rotación $\frac{\pi}{2} - \theta$:

$$S = \langle 0000 | R_y(\frac{\pi}{2} - \theta) \otimes R_y(\frac{\pi}{2} - \theta) \otimes R_y(\frac{\pi}{2} - \theta) \otimes R_y(\frac{\pi}{2} - \theta) | 0000 \rangle = \begin{pmatrix} (\cos^4 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin \frac{\pi-\theta}{2} \cos^3 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\pi-\theta}{2} \cos^2 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^3 \frac{\pi-\theta}{2} \cos \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\pi-\theta}{2} \cos^2 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^3 \frac{\pi-\theta}{2} \cos \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^4 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\pi-\theta}{2} \cos^2 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^3 \frac{\pi-\theta}{2} \cos \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^4 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\pi-\theta}{2} \cos^2 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^3 \frac{\pi-\theta}{2} \cos \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^4 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^2 \frac{\pi-\theta}{2} \cos^2 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^3 \frac{\pi-\theta}{2} \cos \frac{\pi-\theta}{2})^2 \\ (\sin^4 \frac{\pi-\theta}{2})^2 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Para $P_0^0(\cos\theta)$ no hay nada que calcular, pues es constante.

Para $P_1^0(\cos\theta)$:

$$\begin{aligned} P_1^0(\cos\theta) &= \cos\theta = \\ &= (\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})^3 (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ &= \left((\cos^3 \frac{\theta}{2})^2 + (\sin^3 \frac{\theta}{2})^2 + 3(\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2})^2 + 3(\cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2})^2 \right) \\ &\quad (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ &= (\cos^4 \frac{\theta}{2})^2 + (\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^2 + 3(\sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2})^2 + 3(\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2})^2 - \quad (4.32) \\ &\quad - (\sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2})^2 \\ &\quad - (\sin^4 \frac{\theta}{2})^2 - 3(\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2})^2 - 3(\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^2 = \\ &= (\cos^4 \frac{\theta}{2})^2 - 2(\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^2 + 2(\sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2})^2 - (\sin^4 \frac{\theta}{2})^2 = \\ &= C_0 + 2C_1 - 2C_7 - C_{15} \end{aligned}$$

$$P_1^1(\cos\theta) = -\text{sen}(\theta) = -\cos\frac{\pi}{2} - \theta = -S_0 - 2S_1 + 2S_7 + S_{15} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} P_2^0(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = \\ &= \frac{1}{2} \left(3\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^2 - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(3 \left(\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\text{sen}^2\frac{\theta}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^2 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\text{sen}^2\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(3 \left(\left(\cos^4\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2\left(\cos^3\frac{\theta}{2}\text{sen}^1\frac{\theta}{2}\right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\text{sen}^4\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2\left(\cos\frac{\theta}{2}\text{sen}^3\frac{\theta}{2}\right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\left(\cos^3\frac{\theta}{2}\text{sen}^1\frac{\theta}{2}\right)^2 - 2\left(\cos\frac{\theta}{2}\text{sen}^3\frac{\theta}{2}\right)^2 - 4\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^2 \right) - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(3 \left(\left(\cos^4\frac{\theta}{2}\right)^2 - 2\left(\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\text{sen}^4\frac{\theta}{2}\right)^2 \right) - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} (3(C_0 - 2C_3 + C_{15}) - 1) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$P_2^1(\cos\theta) = -3\cos\theta\text{sen}\theta = 3(C_0 + 2C_1 - 2C_7 - C_{15})(-S_0 - 2S_1 + 2S_7 + S_{15}) \quad (4.35)$$

$$P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta = 3\cos^2\frac{\pi}{2} - \theta = 3(S_0 - 2S_3 + S_{15}) \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} P_3^0(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) = \\ &= \frac{1}{2} \left(5\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^3 - \right. \\ &\quad \left. - 3(C_0 + 2C_1 - 2C_7 - C_{15}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(5\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) \left(\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^3 - 3\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2\text{sen}^2\frac{\theta}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^3 \right) - 3(C_0 + 2C_1 - 2C_7 - C_{15}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(5 \left(\left(\cos^4\frac{\theta}{2}\right)^2 - 3\left(\cos^3\frac{\theta}{2}\text{sen}^1\frac{\theta}{2}\right)^2 + 3\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\cos\frac{\theta}{2}\text{sen}^3\frac{\theta}{2}\right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\cos^3\frac{\theta}{2}\text{sen}^1\frac{\theta}{2}\right)^2 - 3\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + 3\left(\cos\frac{\theta}{2}\text{sen}^3\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\text{sen}^3\frac{\theta}{2}\right)^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - 3(C_0 + 2C_1 - 2C_7 - C_{15}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (5(C_0 - 2C_1 + 2C_7 - C_{15}) - 3(C_0 + 2C_1 - 2C_7 - C_{15})) = \\ &= \frac{1}{2} (2C_0 - 16C_1 + 16C_7 - 2C_{15}) = \\ &= C_0 - 8C_1 + 8C_7 - C_{15} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
 P_3^1(\cos\theta) &= -\frac{3}{2}(5\cos^2\theta - 1)\text{sen}\theta = -\frac{3}{2}(5\cos^2\theta\text{sen}\theta - \text{sen}\theta) = \\
 &= -\frac{3}{2}(5(4S_1 - 4S_7) - S_0 - 2S_1 + 2S_7 + S_{15}) = \\
 &= -\frac{3}{2}(-S_0 + 18S_1 - 18S_7 + S_{15})
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$P_3^2(\cos\theta) = 15\cos\theta\text{sen}^2\theta = 15(4C_1 - 4C_7) \tag{4.39}$$

$$P_3^3(\cos\theta) = -15\text{sen}^3\theta = -15\cos^3\frac{\pi}{2} - \theta = -15(S_0 - 2S_1 + 2S_7 - S_{15}) \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
 P_4^0(\cos\theta) &= \frac{1}{8}(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) = \\
 &= \frac{1}{8}(35(C_0 - 4C_1 + 6C_3 - 4C_7 + C_{15}) - 30(C_0 - 2C_3 + C_{15}) + 3) = \\
 &= \frac{1}{8}(5C_0 - 140C_1 + 270C_3 - 140C_7 + 5C_{15} + 3)
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
 P_4^1(\cos\theta) &= -\frac{5}{2}(7\cos^3\theta - 3\cos\theta)\text{sen}\theta = -\frac{5}{2}(7\cos^3\theta\text{sen}\theta - 3\cos\theta\text{sen}\theta) = \\
 &= -\frac{5}{2}(7\cos\theta\cos^2\theta\text{sen}\theta - 3\cos\theta\text{sen}\theta) \\
 &= -\frac{5}{2}(7((C_0 + 2C_1 - 2C_7 - C_{15})(4S_1 - 4S_7)) \\
 &\quad + 3(C_0 + 2C_1 - 2C_7 - C_{15})(-S_0 - 2S_1 + 2S_7 + S_{15}))
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
 P_4^2(\cos\theta) &= \frac{15}{2}(7\cos^2\theta - 1)\text{sen}^2\theta = \frac{15}{2}(7\cos^2\theta\text{sen}^2\theta - \text{sen}^2\theta) = \\
 &= \frac{15}{2}(7(8C_1 - 16C_3 + 8C_7 - 4S_1 + 8S_3 - 4S_7) - \\
 &\quad - S_0 + 2S_3 - S_{15}) = \\
 &= \frac{15}{2}(56C_1 - 112C_3 + 56C_7 - S_0 - 28S_1 + 58S_3 - 28S_7 - S_{15})
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$P_4^3(\cos\theta) = -105\cos\theta\text{sen}^3\theta = -105(C_0 + 2C_1 - 2C_7 - C_{15})(S_0 - 2S_1 + 2S_7 - S_{15}) \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
 P_4^4(\cos\theta) &= 105\text{sen}^4\theta = 105\cos^4\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \\
 &= 105\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^4 = \\
 &= 105\left(\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^4 - 4\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^3\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \right. \\
 &\quad \left. + 6\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^2\left(\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\left(\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^3 + \left(\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^4\right) = \\
 &= 105(S_0 - 4S_1 + 6S_3 - 4S_7 + S_{15})
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Es destacable que los desarrollos para P_2^1 , P_4^1 y P_4^3 no se han realizado utilizando expresiones de sumas directas de los elementos de las matrices C y S , sin embargo, se

pueden calcular clásicamente y sin gran coste computaciones utilizando los resultados de senos y cosenos ya calculados y multiplicándolos, habiéndose quitado de todas formas el coste computacional que suponen los cálculos trigonométricos ya realizados.

La obtención de los valores correspondientes a los polinomios de Legendre con grado m negativo, se puede realizar a partir de los valores ya calculados utilizando la siguiente fórmula:

$$P_l^{-m} = (-q)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m$$

Una vez obtenidos los valores resultantes de la evaluación de los polinomios de Legendre, habría que calcular, para cada valor de m , el resultado de evaluar la función $e^{im\phi}$ la cual se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$e^{im\phi} = \cos(m\phi) + i\text{sen}(m\phi) \quad (4.46)$$

De modo que se descompondría cada armónico esférico en su parte real:

$$\text{Re}(Y_m^l(\theta, \phi)) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos(\theta)) \cos(m\phi) \quad (4.47)$$

Y en su parte imaginaria:

$$\text{Im}(Y_m^l(\theta, \phi)) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos(\theta)) \text{sen}(m\phi) \quad (4.48)$$

Calculando $\cos(m\phi)$ y $\text{sen}(m\phi)$ cada uno con un cúbit mediante un circuito cuántico del tipo de los mostrados, la obtención de la evaluación del armónico esférico se finalizarán mediante un simple producto de tres términos para cada una de las partes, real e imaginaria.

4.4.3. Complejidad computacional y limitaciones

Como se ha comentado anteriormente, la complejidad computacional del análisis de armónicos esféricos de una señal EEG es del orden de $O(N^3)$ en el tiempo y un coste de crecimiento exponencial en el espacio, con el método descrito, pasando la parte de cálculo trigonométrico al computador cuántico, el coste computacional hay que analizarlo de otra forma.

El bloque cuántico aumenta en tamaño de una forma inferior a la lineal con el aumento del problema. En concreto, se puede comprobar fácilmente que si consideramos los armónicos esféricos de la forma Y_l^m , cada cúbit añadido aporta la capacidad para realizar

los cálculos necesarios para $2l + 1$ armónicos, dejando el problema en una complejidad espacial del orden $O(\log(N))$. El coste espacial de la parte clásica, aumenta linealmente con la cantidad de armónicos a utilizar, ya que cada armónico esférico necesita el mismo almacenamiento.

En cuanto al aumento del coste temporal, el cálculo de más armónicos esféricos no influye directamente en el circuito cuántico en términos de complejidad, pues el mismo no variará en profundidad. En la parte clásica el aumento del tiempo de cómputo será lineal $O(N)$, pues los cálculos que estarán limitados a una serie de sumas y multiplicaciones de las cuales muchos resultados son reutilizados.

Por otra parte, el problema de los armónicos esféricos hay que considerarlo en función a la cantidad de parejas de ángulos (correspondientes a los electros del EEG) que se quiera calcular. En este sentido, el circuito cuántico requerido para cada uno de los electrodos es exactamente igual, por lo que el coste computacional del mismo en función del aumento de electrodos es de $O(N)$. En la parte clásica el aumento de la capacidad de almacenamiento sigue un patrón lineal según aumente el número de ángulos a calcular.

Si se considera el aumento de la cantidad de tiempo necesaria para la obtención del resultado en función de la cantidad de electrodos utilizados, en el caso del circuito cuántico y suponiendo que cada circuito cuántico se pueda ejecutar en paralelo, el aumento del número de electrodos no afecta sustancialmente al tiempo de ejecución final. Sin embargo, en el caso del circuito clásico hay un aumento del tiempo de ejecución que sigue un patrón lineal.

Se puede considerar de una manera superficial que la complejidad que arroja el algoritmo descrito es como sigue:

- Complejidad temporal = $O(N^2)$.
- Complejidad espacial = $\log(N)N^2$.

Estos resultados presentan, sin embargo, una serie de limitaciones. La primera surge al tener en cuenta el número de ejecuciones necesarias para el algoritmo cuántico. Para obtener una precisión decimal determinada en los resultados hacen falta una cantidad de ejecuciones equivalentes. Es decir, si se desea que los resultados tengan d cifras decimales de precisión, se necesitaran más de 10^d ejecuciones del circuito cuántico, dado que el resultado es una estadística y al menos hay que tener una población suficiente para poder caracterizar el resultado, aunque sería conveniente que se le añadieran una cantidad de

ejecuciones calculada en función de las características del procesador cuántico, para afinar más la estadística y para mitigar posibles errores.

Un problema añadido es que el aumento del orden de los armónicos esféricos arroja cada vez potencias mayores de senos y coseno que, como sabemos, devuelven resultados entre 0 y 1. Debido a esto, cuanto mayor sea la potencia menor será el número y mayor la precisión requerida, por lo que el aumento de la cantidad de armónicos esféricos a calcular provoca el aumento del tiempo de ejecución del circuito cuántico de una manera indirecta.

Para cuantificarlo, se determina primero el orden de precisión requerido para el resultado de las funciones seno y coseno, que será del tipo 10^{-d} , es decir, se contemplarán d decimales en el resultado de las funciones trigonométricas. Decidido también el orden l mayor de armónicos esféricos a calcular, la cantidad de decimales requeridos para un resultado correcto será $d \cdot l$. Por lo que, denominando ϵ como la cantidad de ejecuciones que se añadirán para mitigar errores y para mejorar la precisión del resultado, los circuitos cuánticos deberían ejecutarse $2^{d \cdot l + \epsilon}$ veces.

También, se requiere mayor precisión cuanto más próximo esté el ángulo a cero para el caso del cálculo del coseno, o a $\frac{\pi}{2}$ para el seno, dado que en estas situaciones el resultado tiene a ser cada vez menor, requiriendo más decimales para poder expresarse de una manera aceptable.

Se puede ver que la cantidad de ejecuciones necesarias para el algoritmo aumenta de manera enorme según se requiera precisión para el circuito. Los autores del presente trabajo consideran que la ventaja de este algoritmo supone mantener una complejidad asumible para gran cantidad de ángulos y armónicos, en tanto que la precisión necesaria se pueda alcanzar. De los tres términos del coste debido a la precisión, sólo uno, el derivado del aumento de la cantidad de armónicos esféricos, aumenta con el tamaño del problema.

Asimismo, los autores esperan que la mejora en la calidad de los sistemas cuánticos y en la detección, corrección y mitigación de errores, así como la posible determinación de resultados con menos ejecuciones mediante la utilización de más cúbits aporte una mejora sustancial al circuito. La forma más simple de realizarlo es mediante la ejecución de varias instancias con el mismo circuito y los mismos ángulos en cúbits físicos diferentes, algo apropiado para este circuito dado que presenta un crecimiento espacial contenido y no tiene entrelazamiento. También es posible que la utilización de cúbits auxiliares en el circuito para obtener información extra del mismo, o la realización de medidas sobre distintas bases en las distintas ejecuciones, pueda ser también provechosa para el objetivo

buscado.

4.5. Diseño de la solución

En esta Sección se presenta el diseño general de la solución y se comenta cada una de las partes.

4.5.1. Preprocesado

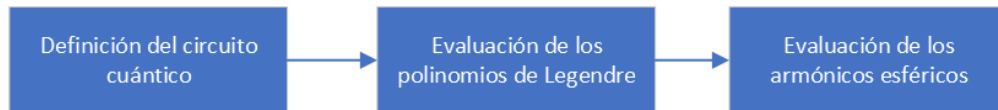
El preprocesado de los datos de EEG se ha realizado de la siguiente manera:

- Se cargan los datos de los EEG de un individuo, especificando el listado de tareas a cargar (3 EEGs concatenados recuperados de una tarea concreta).
- Se estandarizan el nombre y la posición de los canales utilizados cargando el 'estandar 1005' como canales de referencia.
- Se obtienen los eventos que hay en el objeto cargado. Esto es un listado de eventos (15 eventos por cada EEG recuperado) donde consta el momento del evento (cada segundo del EEG tiene 160 muestras) y el identificador del evento.
- Se calculan los armónicos esféricos de cada canal (según su posición en la esfera cerebral, esto es la posición de cada sensor en el cerebro) mediante la función *sp_harm*.
- Se filtran los datos del EEGs entre las frecuencias 7Hz y 30Hz.
- Para cada evento se calcula:
 - La sección del momento de ejecución del evento dentro de un segundo de tiempo.
 - Para los datos de esta sección se utilizan solo los datos de los canales 'Fp1', 'Fp2', 'F3', 'F4', 'C3', 'C4', 'P3', 'P4', 'O1', 'O2' utilizados en el análisis de la intención de frenado de un conductor (Nguyen y Chung, 2019).
 - Se recupera la posición del valor más alto de entre los canales 'Fp1', 'Fp2', 'F3', 'F4', 'C3', 'C4', 'P3', 'P4', 'O1', 'O2' en la sección que se está analizando. Esta posición marcará un nuevo punto en el análisis de los datos del evento.
 - Para cada evento se utiliza un rango de 20 posiciones anteriores y 44 posteriores a la nueva posición obtenida en el paso anterior pero utilizando todos los canales del EEGs. Este preprocesado permite obtener una matriz de características 64

x 64 del valor más característico cercano al momento del evento marcado por la lista de eventos del EEG.

4.5.2. Evaluación de armónicos esféricos

La evaluación de armónicos esféricos se realizará en las siguientes fases:



Definición del circuito cuántico

Primeramente se obtendrán los datos de las matrices C y S , definidas en el Apéndice ??, a partir de la ejecución del circuito cuántico con las rotaciones correspondientes.

Se define, en primera instancia, una función llamada $CircuitoCoseno(theta, nCubits)$ que implemente el circuito cuántico para calcular la matriz C a partir del número de cúbits a utilizar y el ángulo de rotación deseado. Esta función retorna el valor esperado inicializando el circuito a $|0^{\otimes n}\rangle$.

Para obtener la matriz S , se utiliza una función llamada $CircuitoSeno(theta, nCubits)$ que llama a $CircuitoCoseno(theta, nCubits)$ con un ángulo de $\frac{\pi}{2} - \theta$ como argumento.

Además, se define la función $ExpPhi(phi, m)$ que utiliza la dos funciones ya descritas, para obtener los valores reales e imaginario de $e^{im\varphi}$ a través de sendos circuitos de 1 cúbit (utilizando la fórmula $e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) + i \cdot \text{sen}(m\varphi)$). El resultado vendrá recogido en una tupla con dos valores, el primero para $\cos(m\varphi)$ y el segundo para $\text{sen}(m\varphi)$.

Evaluación de polinomios de Legendre

Para el cálculo de los valores correspondientes de los polinomios de Legendre para el coseno del ángulo dado, se desarrollarán las fórmulas definidas en el Apéndice ?? en la función $EvalAsocLegendre4(theta)$. Para los polinomios asociados de Legendre con $m < 0$ se usará la fórmula $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l]$.

El resultado devuelto es un diccionario en el que la etiqueta indica el polinomio sobre el que se evalúa el coseno de θ y el valor el resultado de dicha evaluación.

Evaluación de armónicos esféricos

Por último, la función $EvalEsfericos4(theta, phi)$ utiliza $EvalAsocLegendre4(theta)$ y $ExpPhi(phi, m)$ para calcular el resultado de la evaluación de los armónicos esféricos de grado 4 (límite impuesto por los polinomios asociados de Legendre calculados), para unos ángulos polar (θ) y azimutal (ϕ) indicados. El resultado se devolverá en un diccionario en el que la etiqueta indica el armónico esférico sobre el que se evalúan los ángulos y el valor el resultado de dicha evaluación.

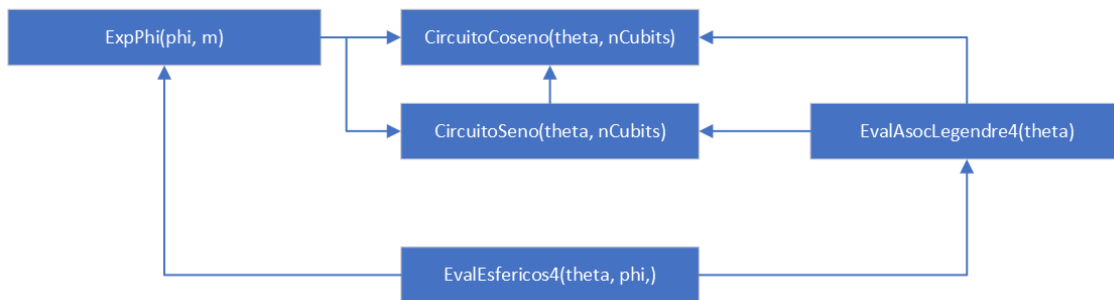


Figura 4.3. Diagrama de dependencia funcional para la implementación del cálculo de armónicos esféricos. Fuente: elaboración propia.

Para determinar los ángulos sobre los que evaluar los armónicos esféricos, se modela la cabeza como una esfera ideal, de modo que dichos ángulos corresponden con la posición de los electrodos dentro de dicha esfera. Dado que los ángulos son los mismos durante todo el proceso de lectura e interpretación de los datos EEG, se pueden calcular previamente a su utilización para la extracción de los coeficientes de expansión. Así, el resultado de la ejecución de $EvalEsfericos4(theta, phi)$ se guarda en una lista en la que cada elemento corresponde al array de tuplas que da como resultado la evaluación de los armónicos esféricos correspondientes para una pareja de ángulos θ y ϕ .

4.5.3. Extracción de coeficientes de expansión

Con la matriz obtenida en el preprocesado de los datos se ha de obtener los valores correspondientes finales con una normalización de estos datos mediante armónicos esféricos. Para este proceso se multiplica para cada muestra (fila de la matriz) y para cada uno de los canales el valor por cada uno de los valores de los armónicos esféricos de ese canal (sumatorio del valor del canal multiplicado por cada armónico esférico). La matriz obtenida pues está compuesta por 64 muestras cercanas el momento del evento por 64 canales

normalizados por sus armónicos esféricos. Esta matriz se utilizará como una imagen en un modelo convolucional de IA.

4.6. Implementación de la solución

Tecnologías utilizadas

- Lenguaje de programación: *Python 3.11* (Rossum, 2023).
- Entorno de programación de circuitos cuánticos: *Pennylane 0.31* (Bergholm et al., 2022).
- Procesador cuántico: *IBM Falcon r4T* (ibmq_belem; *IBM Quantum* 2023).
- Simulador de procesador cuántico: *IBM QASM* (ibmq_qasm_simulator; *IBM Quantum* 2023).
- Librería de cálculo científicos: *Scipy* (Oliphant et al., 2023).
- Librería para la integración en PennyLane del entorno IBM Qiskit: *Pennylane-Qiskit 0.32* (Bergholm et al., 2022).
- Librería de manipulación de arrays en Python: *Numpy* (Harris et al., 2020).
- Librería para gráficos en Python: *Matplotlib* (Hunter, 2007).
- Librería para aprendizaje automático en Python: *Tensorflow* (Martín Abadi et al., 2015) y *Scikit-learn*.
- Librería para la gestión de datos EEG *mne* (Gramfort et al., 2014)

Código fuente

El código fuente puede encontrarse en la URL https://github.com/antonioruz/neurocognition_mcc_code. En él se utilizan los datos de ángulos de la tabla presentada en el Apéndice A.8, que son los correspondientes a las coordenadas de los electrodos que se utilizaron para obtener los datos de EEG que se utilizan en este trabajo.

Evaluación de los armónicos esféricos

La evaluación de los armónicos esféricos se realiza hasta el orden $l = 4$ utilizando cuatro cúbits, por ser este el orden hasta el cual se han desarrollado los cálculos en este trabajo (véase Apéndice ??). Este supone un orden lo suficientemente alto como para discutir la

viabilidad de la técnica, pues atañe a polinomios de Legendre de grados pares e impares y una variedad de potencias de productos de funciones trigonométricas.

Para comprobar si el resultado es el correcto, se evalúan los armónicos esféricos utilizando la función *sp_harm* de la librería *Scipy* de *Python*, comparando posteriormente este resultado con el obtenido de los cálculos utilizando el circuito cuántico. Se calcula así una tasa de error que supone la resta de cada uno de los resultados de la evaluación de armónicos esféricos utilizando la librería *Scipy* de la correspondiente evaluación usando computación cuántica. El resultado es un listado de valores por pareja de ángulos y armónico esférico, cada uno de los cuales contiene un error para la parte real y otro para la imaginaria.

En cuanto al simulador de procesador cuántico elegido, se trata de *default.qubit* que es el simulador básico disponible en *Pennylane* y libre de errores.

Análisis de MI en datos de EEG

Para el análisis de MI en datos de EEG no se ha utilizado ningún preprocesado que modifique la dimensionalidad de los datos o valores leídos de los EEG, como pueden ser PCA o ICA, que obtienen mejores aproximaciones en otras condiciones, como en el tratamientos de EEG con modelos clásicos.

Se ha explorado la posibilidad de utilizar un modelo QSVM mediante 2 kernels diferentes por la analogía a los modelos clásicos de SVM, pero finalmente se ha optado por emplear un modelo que puede utilizar como encoding un kernel convolucional cuántico y poder compararlo con su versión de modelo clásico.

El motivo principal de la elección de este modelo, ha surgido en el análisis inicial de los datos del EEG, donde los valores marcados para cada uno de los eventos no tienen suficiente definición para poder clasificarlos, debido al ruido en los datos y al desplazamiento temporal de los datos más característicos del evento respecto a la marca original del momento del evento. Otra motivación de la elección del modelo es poder evaluar un espacio temporal como encoding (array de características de entrada al modelo) para un evento.

Encodings clásico y cuántico en modelo DL

Como se comentó en el preprocesado, se ha utilizado como marca del momento del evento, el valor máximo de los datos cercanos al evento (1,2 segundos) de entre los canales

utilizados en el análisis de la intención de frenado de un conductor (Nguyen y Chung, 2019). El encoding inicial se genera partiendo de esta marca, y se compone de 64 muestras x 64 canales como valores de entrada al modelo clásico. En el caso de la forma cuántica, el encoding lo forma una matriz de características obtenida después del cálculo realizado mediante un kernel (filtro convolucional) cuántico sobre los datos del encoding clásico (Figura 4.4).

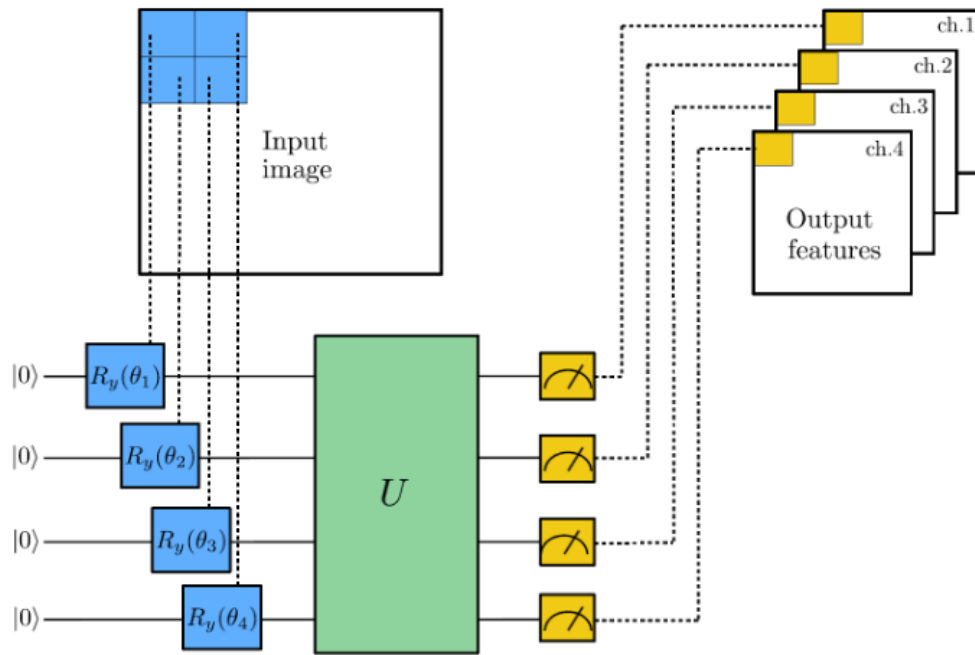


Figura 4.4. Gráfica de un modelo de kernel cuántico (Mari, 2020).

La matriz de características del kernel cuántico se obtiene a partir de rotaciones sobre los datos de entrada, donde un kernel 2*2 produce un dato de salida (análogo a un pixel en una convolución). En este caso el proceso se realiza sobre los datos del kernel para diferentes valores esperados, con lo que se obtienen 4 valores de cada procesado del kernel en vez de uno, pasando de una dimensinalidad inicial de 64*64 a una dimensinalidad final 32*32*4.

4.7. Descripción de los resultados aplicados a EEG de intención motora

En esta Sección se describen los resultados obtenidos en las propuestas de este trabajo. Se divide en dos grandes bloques:

- Un apartado dedicado a la propuesta de cálculo de armónicos esféricos para su utilización en la caracterización de la información a clasificar. Se comprueban tanto los resultados obtenidos en simuladores de distinto tipo, como los resultantes de utilización de computadores cuánticos reales.
- Otro apartado donde se detallan los resultados obtenidos en la clasificación de datos de lectura de EEG reales mediante QML.

4.7.1. Evaluación de armónicos esféricos

En general, los datos obtenidos tras la aplicación de la evaluación de armónicos esféricos presentada en este trabajo, informan acerca de la consistencia teórica del mismo. Sin embargo, los procesadores cuánticos actuales están demasiado limitados por su tasa de errores como para obtener resultados satisfactorios. Para evaluar los resultados obtenidos mediante el algoritmo cuántico propuesto se utilizará el error definido como el valor absoluto de la resta entre el resultado obtenido con el algoritmo en estudio y el resultado correcto calculado mediante la función *sp_harm*.

Procesador cuántico simulado analíticamente

Se realiza una primera prueba mediante un simulador analítico, esto es, un simulador que obtiene los resultados mediante el cálculo matemático determinista de las predicciones de la ecuación de Schrödinger. Este tipo de simulación servirá para determinar la validez de los fundamentos expuestos en este trabajo. La Tabla 4.1, muestra el error obtenido mediante la utilización de *Pennylane* y el simulador de circuitos cuánticos *default.qubit*.

Electrodo	Error \mathbb{R}	Error \mathbb{I}	Electrodo	Error \mathbb{R}	Error \mathbb{I}
Fc5	$3,330 \cdot 10^{-16}$	0	F1	$1,665 \cdot 10^{-16}$	$2,220 \cdot 10^{-16}$
Fc3	$1,665 \cdot 10^{-16}$	$6,938 \cdot 10^{-17}$	Fz	$5,551 \cdot 10^{-17}$	$8,326 \cdot 10^{-17}$
Fc1	$2,220 \cdot 10^{-16}$	$5,551 \cdot 10^{-17}$	F2	$1,665 \cdot 10^{-16}$	$3,330 \cdot 10^{-16}$
Fcz	$5,551 \cdot 10^{-17}$	$2,775 \cdot 10^{-17}$	F4	$2,220 \cdot 10^{-16}$	$4,527 \cdot 10^{-17}$
Fc2	$2,220 \cdot 10^{-16}$	$2,775 \cdot 10^{-17}$	F6	$2,775 \cdot 10^{-16}$	$2,775 \cdot 10^{-16}$
Fc4	$1,665 \cdot 10^{-16}$	$9,020 \cdot 10^{-17}$	F8	$3,885 \cdot 10^{-16}$	$2,081 \cdot 10^{-17}$
Fc6	$3,330 \cdot 10^{-16}$	0	Ft7	$5,551 \cdot 10^{-16}$	0
C5	$6,900 \cdot 10^{-18}$	$6,212 \cdot 10^{-18}$	Ft8	$5,551 \cdot 10^{-16}$	0
C3	$6,231 \cdot 10^{-18}$	$6,452 \cdot 10^{-18}$	T7	$9,262 \cdot 10^{-18}$	$6,476 \cdot 10^{-19}$
C1	$8,256 \cdot 10^{-18}$	$3,504 \cdot 10^{-18}$	T8	$9,262 \cdot 10^{-18}$	$6,476 \cdot 10^{-19}$
Cz	$8,970 \cdot 10^{-18}$	0	T9	$5,968 \cdot 10^{-18}$	$7,112 \cdot 10^{-18}$
C2	$8,256 \cdot 10^{-18}$	$3,504 \cdot 10^{-18}$	T10	$5,968 \cdot 10^{-18}$	$7,112 \cdot 10^{-18}$
C4	$6,231 \cdot 10^{-18}$	$6,452 \cdot 10^{-18}$	Tp7	$5,551 \cdot 10^{-16}$	0
C6	$6,900 \cdot 10^{-18}$	$6,212 \cdot 10^{-18}$	Tp8	$5,551 \cdot 10^{-16}$	0
Cp5	$3,330 \cdot 10^{-16}$	0	P7	$3,885 \cdot 10^{-16}$	$2,081 \cdot 10^{-17}$
Cp3	$1,665 \cdot 10^{-16}$	$6,938 \cdot 10^{-17}$	P5	$2,775 \cdot 10^{-16}$	$2,775 \cdot 10^{-16}$
Cp1	$2,220 \cdot 10^{-16}$	$5,551 \cdot 10^{-17}$	P3	$2,220 \cdot 10^{-16}$	$3,681 \cdot 10^{-17}$
Cpz	$5,551 \cdot 10^{-17}$	$2,775 \cdot 10^{-17}$	P1	$1,665 \cdot 10^{-16}$	$2,220 \cdot 10^{-16}$
Cp2	$2,220 \cdot 10^{-16}$	$2,775 \cdot 10^{-17}$	Pz	$5,551 \cdot 10^{-17}$	$8,326 \cdot 10^{-17}$
Cp4	$1,665 \cdot 10^{-16}$	$9,020 \cdot 10^{-17}$	P2	$1,665 \cdot 10^{-16}$	$3,330 \cdot 10^{-16}$
Cp6	$3,330 \cdot 10^{-16}$	0	P4	$2,220 \cdot 10^{-16}$	$4,527 \cdot 10^{-17}$
Fp1	$1,249 \cdot 10^{-16}$	$1,040 \cdot 10^{-17}$	P6	$2,775 \cdot 10^{-16}$	$2,775 \cdot 10^{-16}$
Fpz	$5,551 \cdot 10^{-17}$	$3,469 \cdot 10^{-18}$	P8	$3,885 \cdot 10^{-16}$	$2,081 \cdot 10^{-17}$
Fp2	$1,249 \cdot 10^{-16}$	$1,040 \cdot 10^{-17}$	Po7	$1,110 \cdot 10^{-16}$	0
Af7	$2,775 \cdot 10^{-16}$	0	Po3	$3,330 \cdot 10^{-16}$	0
Af3	$3,330 \cdot 10^{-16}$	0	Poz	$5,551 \cdot 10^{-17}$	$5,551 \cdot 10^{-17}$
Afz	$5,551 \cdot 10^{-17}$	$5,551 \cdot 10^{-17}$	Po4	$3,330 \cdot 10^{-16}$	0
Af4	$3,330 \cdot 10^{-16}$	0	Po8	$1,110 \cdot 10^{-16}$	0
Af8	$2,775 \cdot 10^{-16}$	0	O1	$1,249 \cdot 10^{-16}$	$1,040 \cdot 10^{-17}$
F7	$3,885 \cdot 10^{-16}$	$2,081 \cdot 10^{-17}$	Oz	$5,551 \cdot 10^{-17}$	$3,469 \cdot 10^{-18}$
F5	$2,775 \cdot 10^{-16}$	$2,775 \cdot 10^{-16}$	O2	$1,249 \cdot 10^{-16}$	$1,040 \cdot 10^{-17}$
F3	$2,220 \cdot 10^{-16}$	$3,681 \cdot 10^{-17}$	Iz	$1,110 \cdot 10^{-16}$	$1,387 \cdot 10^{-17}$

Tabla 4.1. Error para la evaluación de armónicos esféricos con un simulador cuántico analítico respecto a la función *sp_harm*.

Como se puede comprobar, los errores son prácticamente nulos, pues ninguno llega a 10^{-14} . Estos pequeños errores son debidos a que la librería *Pennylane* trabaja con una precisión mayor a *Scipy*. Teniendo en cuenta que se ha utilizado el simulador *default.qubit* de *Pennylane*, que se comporta como un procesador cuántico ideal y sin errores, este resultado sirve para demostrar la viabilidad teórica de la solución propuesta para la evaluación de armónicos esféricos mediante computación cuántica.

Procesador cuántico real

La utilización de los circuitos cuánticos propuestos en procesadores cuánticos reales arrojan actualmente resultados sustancialmente desviados de las predicciones teóricas. Debido a la baja disponibilidad del hardware cuántico públicamente accesible en la actualidad, hecho que se traduce en largos tiempos de espera de los trabajos en las colas, resulta inviable realizar la evaluación de armónicos esféricos para el conjunto completo de electrodos de los datos a analizar, por lo que se han seleccionado solamente los más adecuados para caracterizar el error, al contener una muestra representativa de la diversidad de coordenadas angulares. Se ha elegido a aquellos con las siguientes coordenadas:

- coordenadas ambas distintas de cero para una comprobación general (*Fc5*, $\theta = -21$ y $\varphi = -71$).
- ambos ángulos iguales a cero (*Cz*, $\theta = 0$ y $\varphi = 0$).
- coordenada polar cero y coordenada azimutal con un valor pequeño (*C2*, $\theta = 0$ y $\varphi = 23$).
- coordenada polar cero y coordenada azimutal con un valor grande (*C6*, $\theta = 0$ y $\varphi = 69$).
- coordenada polar de valor pequeño y una determinada coordenada azimutal (*Fc4*, $\theta = 28$ y $\varphi = 50$).
- coordenada azimutal igual que el anterior y una coordenada polar de mayor valor (*F2*, $\theta = 68$ y $\varphi = 50$).

En todo caso se han escogido electrodos situados en posiciones con ángulos menores a 90° para evitar la periodicidad de los valores absolutos de las funciones trigonométricas.

Para este experimento se han realizado 20000 ejecuciones para cada circuito, lo que arroja una precisión máxima sin error de 4 cifras decimales. Dado que se está estudiando

sólamente el error relacionado con la ejecución de circuitos cuánticos, se obvía para el análisis del error el armónico Y_0^0 , por no intervenir en él la ejecución de circuito cuántico alguno, así como los armónicos esféricos con $m < 0$, por calcularse a partir de los resultados obtenidos de los circuitos utilizados para sus contrapartes positivos.

Lo primero que destaca es la cantidad de errores obtenidos, cuestión que se puede comprobar en las siguientes estadísticas:

- error máximo parte real, $E_{\mathbb{R}max} \approx 0,61996527$.
- error máximo parte imaginaria, $E_{\mathbb{I}max} \approx 0,60550008$.
- error medio parte real, $\overline{E_{\mathbb{R}}} \approx 0,07729710$.
- error medio parte imaginaria, $\overline{E_{\mathbb{I}}} \approx 0,06333663$.
- mediana de la parte real del error, $\tilde{E}_{\mathbb{R}} \approx 0,03426938$.
- mediana de la parte imaginaria del error $\tilde{E}_{\mathbb{I}} \approx 0,05568134$.
- desviación típica total, $\sigma \approx 0,14810111$.
- covarianza entre el error de la parte real y el error de la parte imaginaria,

$$Cov(E_{\mathbb{R}}, E_{\mathbb{I}}) \approx \begin{pmatrix} 0,00992233 & 0,00672211 \\ 0,00672211 & 0,01215882 \end{pmatrix}.$$
- covarianza entre electrodos para la parte real,

$$Cov(E_{Fc5\mathbb{R}}, E_{Cz\mathbb{R}}, E_{C2\mathbb{R}}, E_{C6\mathbb{R}}, E_{Fc4\mathbb{R}}, E_{F2\mathbb{R}}) \approx \begin{pmatrix} 0,00938843 & 0,00280261 & 0,00111221 & 0,00251219 & 0,00669783 & 0,00575396 \\ 0,00280261 & 0,00333019 & 0,00142436 & 0,00078762 & 0,00471411 & 0,00345237 \\ 0,00111221 & 0,00142436 & 0,00096933 & 0,00077918 & 0,00214516 & 0,00301316 \\ 0,00251219 & 0,00078762 & 0,00077918 & 0,00200931 & 0,00131628 & 0,00527173 \\ 0,00669783 & 0,00471411 & 0,00214516 & 0,00131628 & 0,00937372 & 0,00532885 \\ 0,00575396 & 0,00345237 & 0,00301316 & 0,00527173 & 0,00532885 & 0,02068832 \end{pmatrix}.$$
- covarianza entre electrodos para la parte imaginaria,

$$Cov(E_{Fc5\mathbb{I}}, E_{Cz\mathbb{I}}, E_{C2\mathbb{I}}, E_{C6\mathbb{I}}, E_{Fc4\mathbb{I}}, E_{F2\mathbb{I}}) \approx \begin{pmatrix} 1,7264 \cdot 10^{-2} & 3,9705 \cdot 10^{-4} & 8,7115 \cdot 10^{-4} & 1,5272 \cdot 10^{-3} & 1,0903 \cdot 10^{-2} & 1,2511 \cdot 10^{-2} \\ 3,9705 \cdot 10^{-4} & 1,0033 \cdot 10^{-5} & 1,5797 \cdot 10^{-5} & 3,2988 \cdot 10^{-5} & 2,8241 \cdot 10^{-4} & 2,4748 \cdot 10^{-4} \\ 8,7115 \cdot 10^{-4} & 1,5797 \cdot 10^{-5} & 1,4694 \cdot 10^{-4} & 1,1524 \cdot 10^{-4} & 1,1139 \cdot 10^{-5} & 1,7323 \cdot 10^{-3} \\ 1,5272 \cdot 10^{-3} & 3,2988 \cdot 10^{-5} & 1,1524 \cdot 10^{-4} & 1,6192 \cdot 10^{-4} & 8,1605 \cdot 10^{-4} & 1,5961 \cdot 10^{-3} \\ 1,0903 \cdot 10^{-2} & 2,8241 \cdot 10^{-4} & 1,1139 \cdot 10^{-5} & 8,1605 \cdot 10^{-4} & 1,0619 \cdot 10^{-2} & 3,0095 \cdot 10^{-3} \\ 1,2511 \cdot 10^{-2} & 2,4748 \cdot 10^{-4} & 1,7323 \cdot 10^{-3} & 1,5961 \cdot 10^{-3} & 3,0095 \cdot 10^{-3} & 2,4797 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

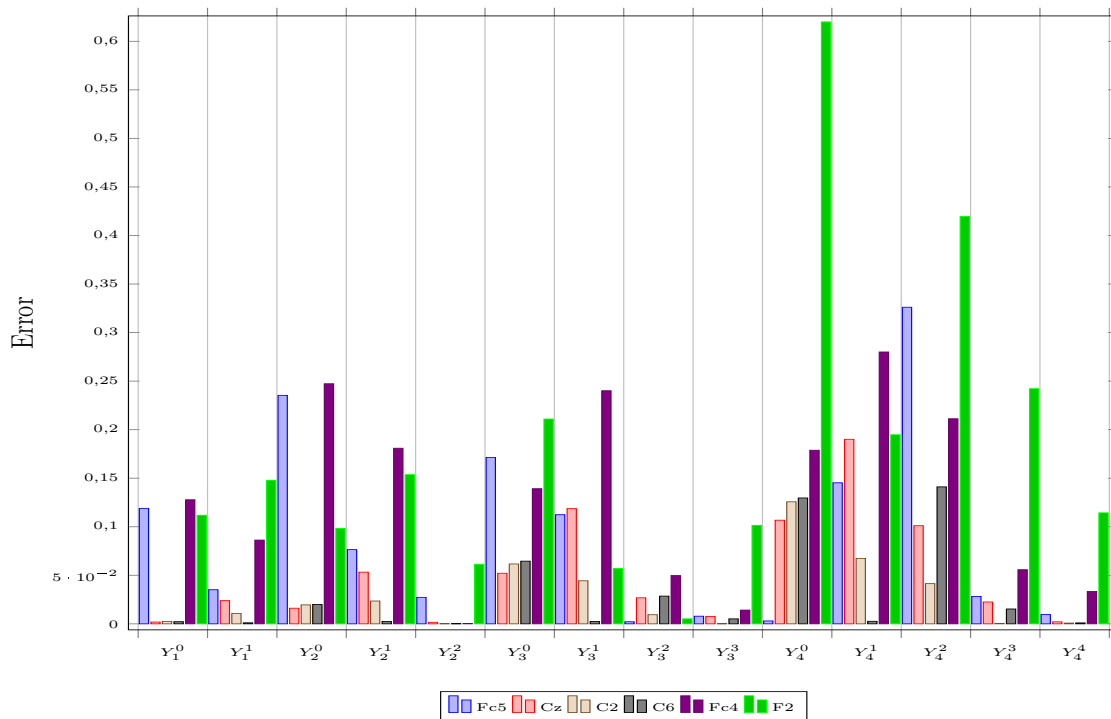
Las conclusiones que se sacan son fáciles de comprobar:

- elevado error, determinado por el error máximo, la media y la mediana.
- valores de error dispersos, por lo que se requiere de un análisis más minucioso para caracterizar el error convenientemente. Además, dada la gran diferencia que hay entre el error medio y la mediana con el error máximo, se puede deducir que la distribución del error es tal que hay un pocos valores que presentan gran error, muy diferenciados del resto de datos.
- el crecimiento del error, comprobado por la covarianza, es prácticamente homogéneo en todos los datos.

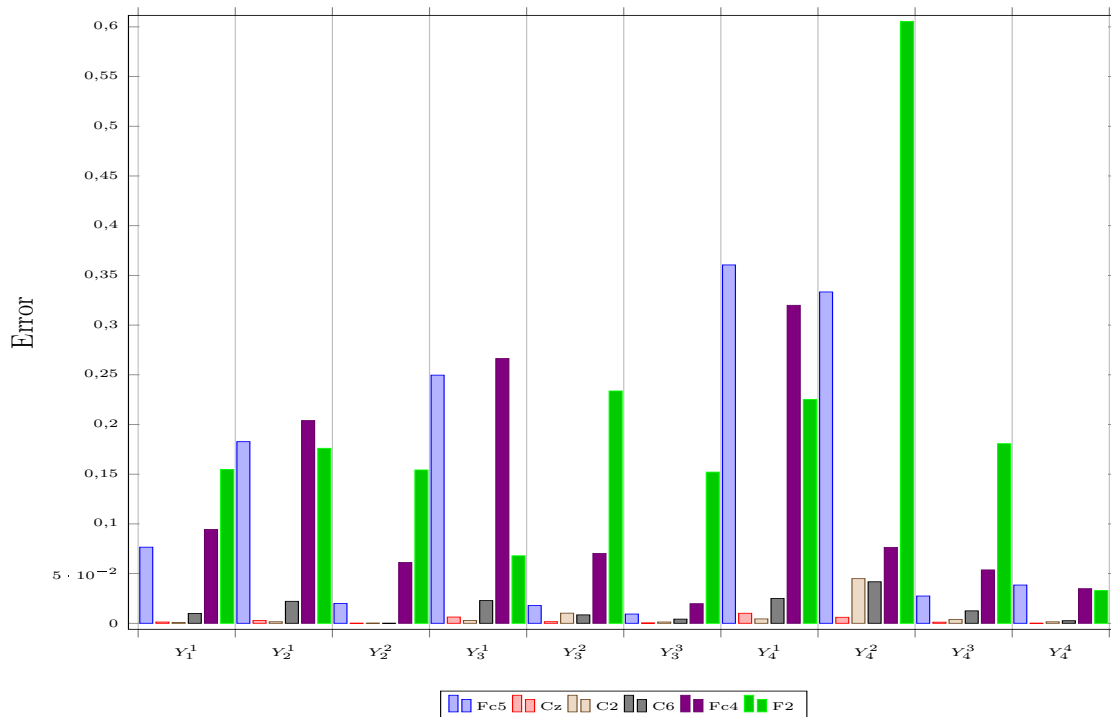
Un estudio comparativo del error, agrupándolo por electrodos y por armónicos esféricos, puede arrojar algo más de luz acerca de su naturaleza. Para ello se han desarrollado dos gráficas comparativas del error, separando por un lado el error en la parte real del valor de la evaluación de los armónicos esféricos obtenidos (Figura 4.5a) y por otro el error en la parte imaginaria (Figura 4.5b). En ellas se puede comprobar más fácilmente las características propias del error en la aplicación concreta de estudio (evaluación de armónicos esféricos de lecturas de EEG), esta son:

- agrupación del error en torno a los electrodos con ángulos distintos de cero: esto puede ser debido a que en estas situaciones alguno de los circuitos no tiene que aplicar puerta cuántica alguna (por ejemplo, para un ángulo de cero grados la matriz C se calcula simplemente realizando una medición de un circuito cuántico de 4 cúbits sin ninguna puerta lógica), aún así, resulta destacable y da una idea del estado actual de los procesadores cuánticos reales, que el error obtenido en estas circunstancias no es en absoluto despreciable.
- el error es más acusado en aquellos armónicos que implican productos de seno por coseno ($0 < m < l$).
- el error aumenta en general según aumenta el grado (l) de los armónicos esféricos.
- resulta especialmente destacable el error en el electrodo $F2$, que ambos ángulos con el valor mayor del conjunto de electrodos probado, confirmando que ángulos mayores ocasionan mayor error. Esto explica por que el error máximo del total de datos difiere tanto de su media y mediana, hecho que se comentó anteriormente

y puede estar relacionado también con el hecho de que el sistema sea propenso a buscar su estado fundamental.



(a) Histograma de error de la parte real en el circuito cuántico



(b) Histograma de error de la parte imaginaria en el circuito cuántico

Figura 4.5. Errores en la evaluación de armónicos esféricos mediante computación cuántica.

Comprobando los datos de las Tablas 4.2 y 4.3, que contienen la información estadística agrupada por electrodos, se puede llegar a las mismas conclusiones que las extraídas del análisis del error total: error elevado, disperso y con un crecimiento homogéneo.

	$Fc5$	Cz	$C2$	$C6$	$Fc4$	$F2$
$E_{max\mathbb{R}}$	0,32607624	0,19007655	0,12569968	0,14107722	0,28000658	0,61996527
$E_{max\mathbb{I}}$	0,3333253	0,0100934	0	0,04176999	0,31987643	0.
$\overline{E}_{\mathbb{R}}$	0,08277404	0,05086704	0,02423461	0,02461756	0,11987199	0,16141739
$\overline{E}_{\mathbb{I}}$	0,10525891	0,00238599	0,00572613	0,01195496	0,0960461	0,15864769
$\tilde{E}_{\mathbb{R}}$	0,03512517	0,02390339	0,01056814	0,00261824	0,08628087	0,11430801
$\tilde{E}_{\mathbb{I}}$	0,0765563	0,00126931	0,00069123	0,02494961	0,09446583	0,0329332
$E_{\sigma\mathbb{R}}$	0,15996008	0,05662694	0,0327357	0,04565499	0,13853989	0,20896586
$E_{\sigma\mathbb{I}}$	0	0	0	0	0	0

Tabla 4.2. Estadísticas de error por electrodo.

$Fc5$		Cz	
\mathbb{R}	\mathbb{I}	\mathbb{R}	\mathbb{I}
0,00938843	0,00822247	$3,33018 \cdot 10^{-3}$	$1,67598 \cdot 10^{-4}$
0,00822247	0,01726493	$1,67598 \cdot 10^{-4}$	$1,00332 \cdot 10^{-5}$
$C2$		$C6$	
\mathbb{R}	\mathbb{I}	\mathbb{R}	\mathbb{I}
$9,69329 \cdot 10^{-4}$	$5,79433 \cdot 10^{-5}$	0,00200931	0,00023772
$5,79433 \cdot 10^{-5}$	$1,46947 \cdot 10^{-4}$	0,00023772	0,00016192
$Fc4$		$F2$	
\mathbb{R}	\mathbb{I}	\mathbb{R}	\mathbb{I}
0,00937372	0,0065583	0,02068832	0,00876569
0,0065583	0,0106193	0,00876569	0,02479786

Tabla 4.3. Covarianza entre la parte real e imaginaria de cada electrodo.

Los datos completos de los errores se pueden comprobar en la tabla del Apéndice A.9.

Simulaciones no analíticas y análisis del número de ejecuciones

Para comprobar los resultados que se obtendrían en un procesador real para todos los electrodos, se realiza una simulación mediante el *simulador QASM* de IBM, que presenta un mayor disponibilidad. Se compararán además, las estadísticas de error que se obtienen al aumentar el número de ejecuciones de los circuitos cuánticos. En este caso y dado que se ha visto que el error evoluciona prácticamente de manera homogénea en cuanto a las componentes real e imaginaria, por simplicidad, se ha considerado únicamente el módulo de los errores en vez de sus componentes real e imaginaria por separado.

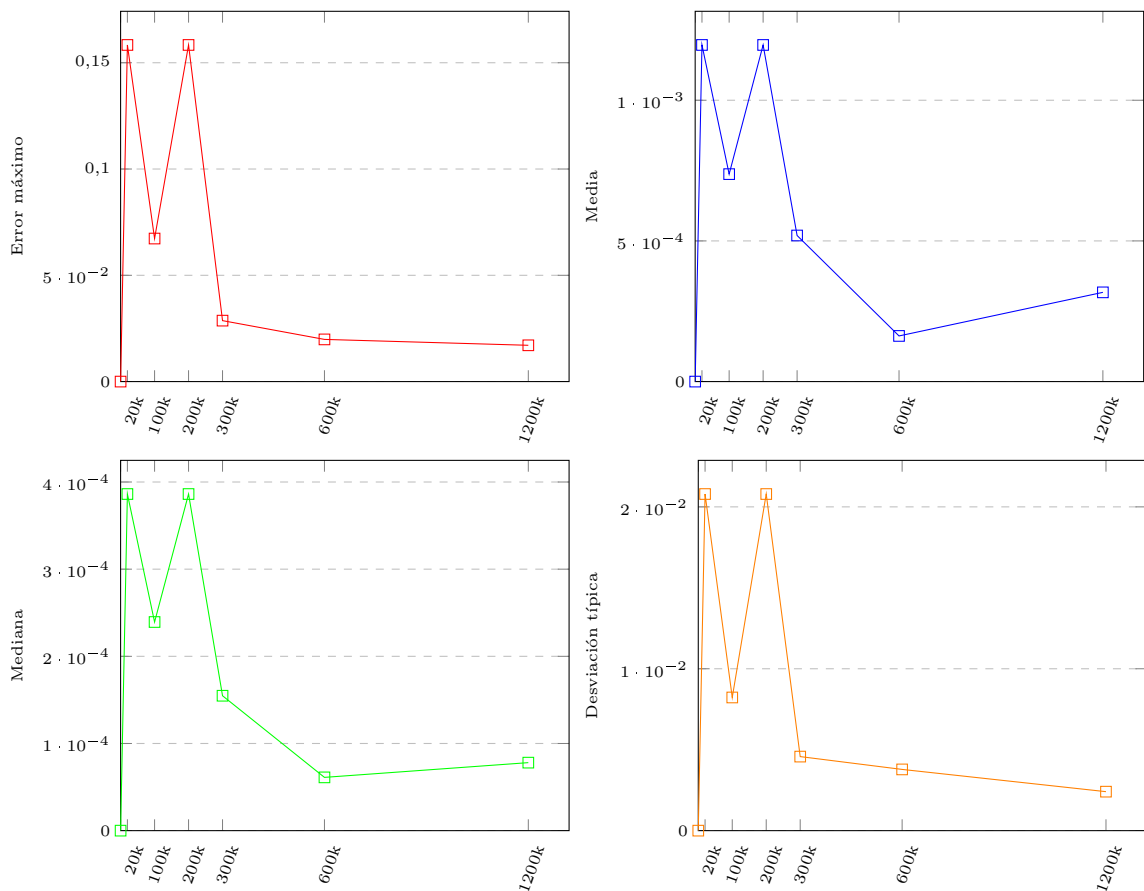


Figura 4.6. Estadísticas de error en la evaluación de armónicos esféricos mediante simulación cuántica en función de la cantidad de ejecuciones.

Como se puede ver en la Figura 4.6, la evolución es similar para todas la métricas descendiendo, en general, con el número de ejecuciones. Sin embargo, un pequeño incremento de la media y la mediana en la parte final de las gráficas, considerandolo conjuntamente con la disminución del error medio y la desviación típica, parece indicar que además de

disminuir, los errores se acercan en torno a los mismo valores con el incremento del número de ejecuciones. Todo esto coincide con las predicciones de la teoría y de la simulación analítica, que dicen que cuando el número de ejecuciones tiende a infinito el error será cero. Queda visto que en el caso de la evaluación de armonicos esféricos mediante simulación cuántica ocurre lo mismo.

4.7.2. Clasificación de EEG mediante QML

Los resultados obtenidos en la clasificación de MI mediante QML no muestran una mejora significativa respecto de los modelos clásicos utilizados como se puede ver en la Figura 4.9.

Un ejemplo de los datos utilizados es la gráfica de la Figura 4.7 donde se muestra un segundo de tiempo (con marca del evento en la muestra 80) del primer evento con los datos filtrados entre la banda 7Hz y 30Hz del usuario número 4 (de los EEGs disponibles) para la intención motora de cerrar y abrir el puño.

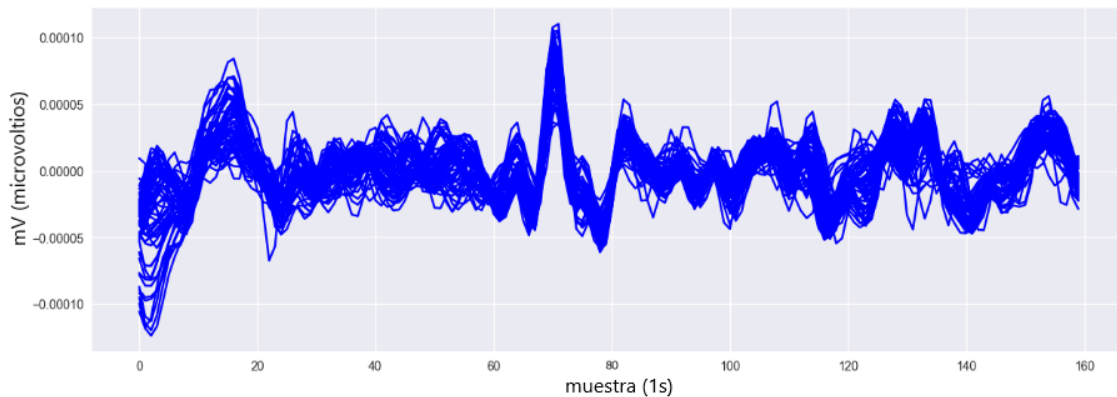


Figura 4.7. Gráfica generada. Datos: evento cerrar la mano derecha, usuario 4, frecuencia entre 7Hz y 30Hz, 1 segundo.

En la Figura 4.8 se puede observar el listado de marcas originales donde se produce el evento, el identificador del evento producido y la gráfica de estos datos. Debido a la baja disponibilidad de ejemplos para 2 clases de tareas (45 ejemplos) y que los datos disponibles tienen mucha variabilidad para un mismo evento, no se ha podido realizar una suficiente adecuación de los datos para lograr buenos valores de *exactitud*:

$$exactitud = \text{Número de predicciones correctas} / \text{Total de predicciones}$$


```
Tiempo de los eventos:
[ 4.2 12.5 20.8 29.1 37.4 45.7 54. 62.3 70.6 78.9 87.2 95.5
103.8 112.1 120.4 129.2 137.5 145.8 154.1 162.4 170.7 179. 187.3 195.6
203.9 212.2 220.5 228.8 237.1 245.4 254.2 262.5 270.8 279.1 287.4 295.7
304. 312.3 320.6 328.9 337.2 345.5 353.8 362.1 370.4]

Evento producido:
[3 2 3 2 2 3 3 2 2 3 2 3 3 2 3 2 3 2 3 3 2 2 3 3 2 2 2 3 2 3 3 2 3
2 2 3 2 3 2 3 3]
```

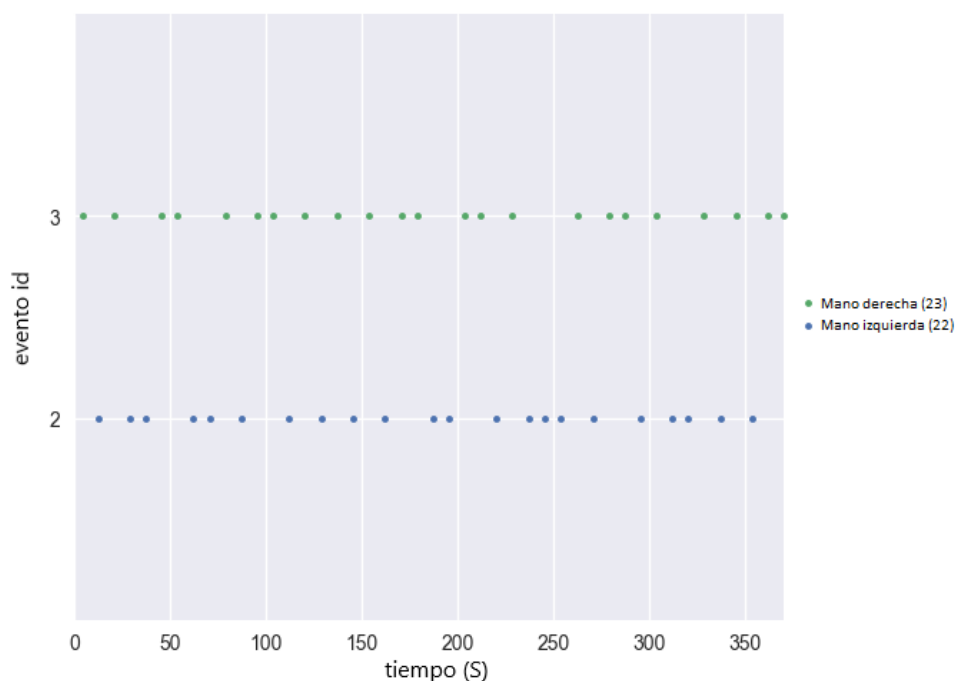


Figura 4.8. Gráfica generada con el método *plot_events* del modulo *viz* de la librería *mne*.

En la Figura 4.9 se puede observar los resultados obtenidos de *exactitud* y como el modelo no es capaz de mejorar la exactitud según avanza el entrenamiento. Por contra la función de pérdida (Figura 4.10) si ha ido consiguiendo mejores resultados según va avanzando el entrenamiento del modelo. Esto puede ser debido a que las predicciones cuando son acertadas están muy próximas al valor esperado pero por contra el modelo no es capaz de predecir un número alto de casos.

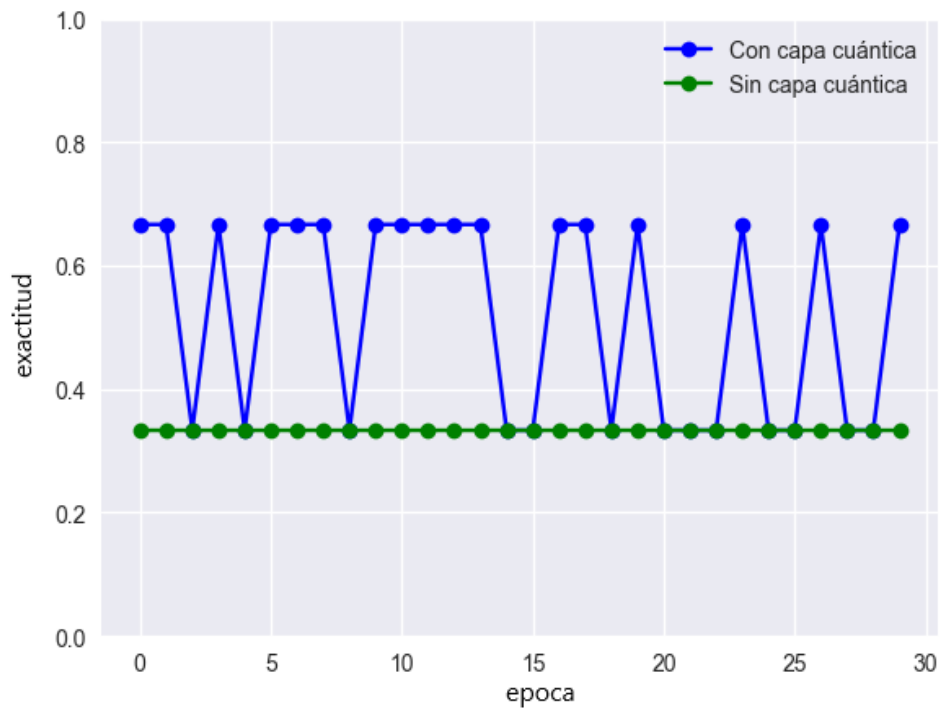


Figura 4.9. Gráfica generada que compara el *exactitud* entre el modelo cuántica y clásico.

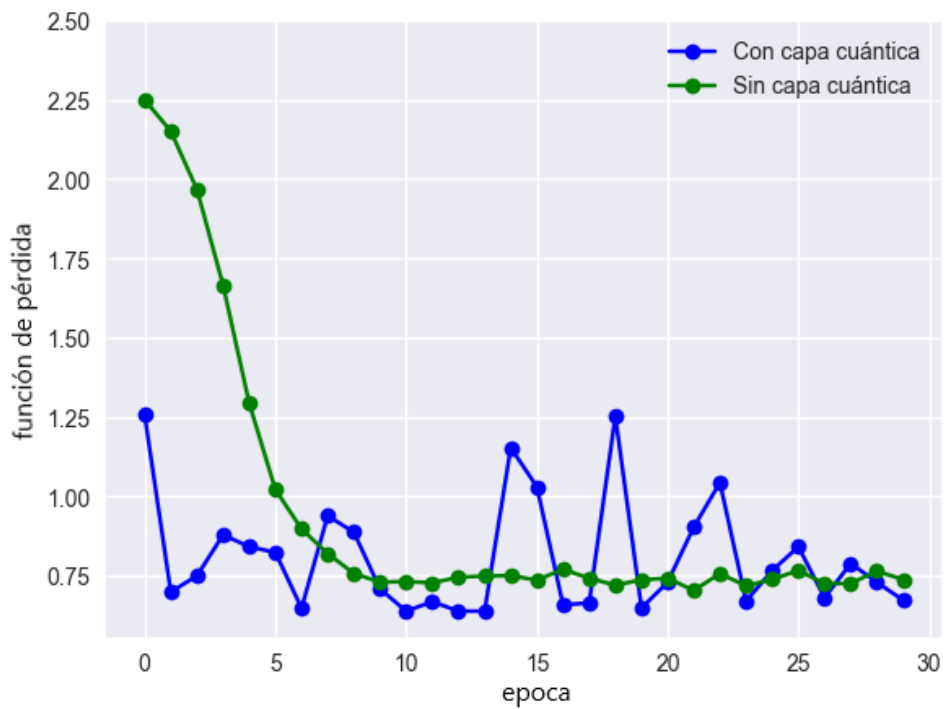


Figura 4.10. Gráfica generada que compara la *función de pérdida* entre el modelo cuántica y clásico.

5. Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

En este trabajo, se ha visto como las características propias de la computación cuántica aportan formas novedosas de realizar cálculos trigonométricos y en concreto, se ha propuesto una aplicación al cálculo de armónicos esféricos para su utilización en el análisis de lecturas de EEG aunque, la mejora en la capacidad de cálculo de armónicos esféricos puede, además, ser una gran ayuda en otras áreas de la ciencia como es la localización de fuentes de sonido (Abhayapala y Bhatta, 2003; Teutsch y Kellermann, 2005) o el análisis de la radiación de fondo de microondas (Górski et al., 2005). También se ha mostrado que puede relacionarse la ejecución de circuitos cuánticos con el cálculo de potencias de binomios, que en este caso han consistido en binomios de funciones trigonométricas, pero podrían plantearse otro tipo de componentes de los binomios.

Reducción de la complejidad computacional

Aunque el marco teórico presentado es sólido, como se ha podido comprobar mediante simulaciones, la imprecisión de los dispositivos actuales debida al ruido hace que aún no sea práctica la utilización del algoritmo presentado para el cálculo de armónicos esféricos. Se puede observar, sin embargo, cómo el ámbito cuántico presenta herramientas útiles para la reducción de la complejidad ciclomática de cierto tipo de problemas, haciendo que se pueda plantear el análisis de armónicos esféricos de mayor orden que el que es abarcable desde una aproximación basada en la computación clásica. Los resultados principales obtenidos del algoritmo pueden ser, además, aprovechados para utilidades más comunes, como es el cálculo binomial y trigonométrico, por lo que podría utilizarse para otras aplicaciones distintas a la evaluación de polinomios asociados de Legendre y armónicos esféricos.

Número de ejecuciones y errores detectados

Otro problema que se ha visto es que el algoritmo planteado tal cual necesita de una gran cantidad de ejecuciones para ser funcional, las cuales aumentan en número al aumentar el orden de los armónicos esféricos a calcular. En este sentido la limitación la pone la aplicación a la que se quieran aplicar estos cálculos, pues considerando las mejores estadísticas obtenidas en los experimentos con simulaciones no analíticas, es decir, aquellas

que se han obtenido mediante 1200000 ejecuciones de cada uno de los 10 circuitos, la media arroja una precisión de 10^{-3} y la mediana de 10^{-4} , aunque para el error máximo sólo se consigue una precisión de 10^{-1} . Teniendo en cuenta la dispersión del error, que presenta el error máximo en unos pocos datos puntuales y muy alejados del resto, es posible que para la utilidad que se le quiera dar a este circuito el mencionado error máximo pueda no ser relevante. Si observamos la media, la conclusión es que para una precisión 10^{-n} se requieren 10^{3+n} ejecuciones de los circuitos cuánticos. En cuanto a la limitación del error máximo, resulta difícil establecer conclusiones definitivas con la información obtenida de los experimentos, pues los datos extraídos de los mismos no sirven para saber hasta que punto el error máximo converge a la media si se siguen realizando más ejecuciones. Todo lo que se puede saber es que el error máximo sigue disminuyendo, pero no bajo qué patrón. A pesar de todo esto, la sencillez del algoritmo permite una gran flexibilidad a la hora de ejecutar varias instancias simultáneamente.

Clasificación de MI con armónicos esféricos

Teniendo en cuenta la gran cantidad de ejecuciones necesarias para que el algoritmo cuántico planteado sea utilizable por otros procesos, finalmente no ha sido utilizado en la clasificación de MI. La dificultad de encontrar un cálculo fiable libre de errores o con un error máximo suficientemente aceptable, hace que no sea posible utilizar el algoritmo planteado como parte de un circuito continuo cuántico de IA, sino que debe ser utilizado para el cálculo de los valores de los armónicos esféricos a priori (precalculados), perdiendo parte de la información cuántica disponible.

Los resultados obtenidos en la clasificación de MI no han sido los inicialmente previstos, pues comparando los resultados con otro tipo de clasificadores de MI no se ha logrado alcanzar unos valores aceptables en la clasificación de los datos. El principal motivo de no obtener buenos resultados es no haber encontrado un preprocesado adecuado para la utilización de los datos de los EEG con modelos de IA cuánticos. Se ha constatado que el modelo utilizado de clasificación consigue mejores resultados con otro tipo de datos convolucionales.

5.2. Trabajo futuro

Generalización del algoritmo

Se ha podido ver como se ha desarrollado la aplicación del algoritmo presentado para la obtención de armónicos esféricos hasta un grado de $l = 4$. Sería interesante buscar una formulación generalizada para la obtención de los productos de potencias de funciones trigonométricas de un grado arbitrario. Esto permitiría trabajar con cualquier número de cúbits y obtener los resultados programáticamente. Asimismo, se necesita más investigación acerca de las características de las matrices C y S presentadas (resultantes de la ejecución del circuito cuántico aplicando el ángulo a evaluar y el ángulo restado de $\frac{\pi}{2}$ respectivamente), para encontrar otros productos que no se han dado en este trabajo, como por ejemplo $\sin(\theta)\cos(\theta)$ o $\sin^3(\theta)\cos(\theta)$, de modo que el cálculo de polinomios asociados de Legendre a partir de la información obtenida del circuito se limitase a sumas y productos por constantes.

Integración en circuito cuántico mayor

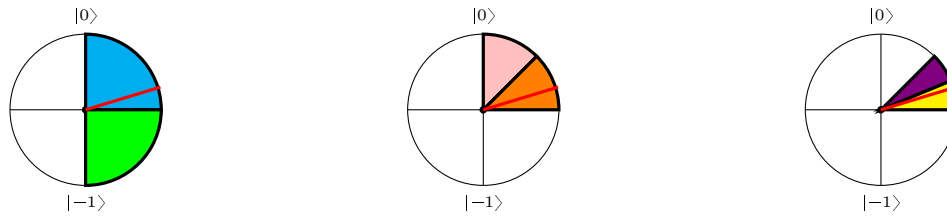
Dado que las propiedades características de la computación cuántica se presentan solamente hasta que se realiza el proceso de medición, si se tienen en cuenta las técnicas de cálculo aquí presentadas, el paso siguiente más inmediato sería intentar utilizar la información trigonométrica directamente en un circuito cuántico antes de colapsarlo, de modo que se solventen los problemas que derivan del colapso de la función de onda. En concreto, y por la temática del presente trabajo, sería interesante intentar clasificar los datos obtenidos en un mismo circuito cuántico. Para un circuito cuántico que careciera de errores, o los errores fueran desdeñables, sería factible utilizar los datos calculados de los armónicos esféricos (ponderandolos para el valor del canal o electrodo correspondiente) como valores de entrada a la siguiente etapa del circuito. Esto consideraría estos valores como las amplitudes de probabilidad dentro de un encoding (coeficientes de la combinación lineal de los estados cuánticos) para un modelo de QSVM, por ejemplo, en vez de utilizar los valores obtenidos al medir el circuito (obtener los valores de los armónicos esféricos colapsando el circuito que calcula los armónicos esféricos). También sería interesante en este caso investigar si se puede aprovechar la fase del cúbit para representar más información, mediante la utilización de puertas cuánticas RZ , y representar la parte exponencial del cálculo de

armónicos esféricos, es decir, $e^{i\phi}$, por ejemplo, para identificar la orientación de las fuentes de los dipolos que generan los potenciales eléctricos en el cerebro con más precisión.

Mejora de la medición

Otra posible mejora podría venir dada por la reducción del número de ejecuciones del circuito cuántico necesarias para el cálculo. Una posible aproximación a este problema es la utilización de cúbits auxiliares entrelazados con los cúbits propios del circuito para que se recoja más información en cada medición. También se podría ejecutar el mismo circuito en varios procesadores simultáneamente con los mismos parámetros, reduciendo así el tiempo final de ejecución.

Siguiendo con la reducción del número de ejecuciones, otra opción podría consistir en añadir en el circuito una rotación ω cada ϵ mediciones (en un entorno ideal sin errores $\epsilon = 1$). Cogiendo los ángulos adecuados e interpretando consecuentemente la medición obtenida, la rotación efectuada daría información acerca de la parte de la esfera de Bloch en la que se encuentra el cúbit a través de la medición en distintas bases. Esto da como resultado que, en vez de aumentar la precisión decimal por cada 10ϵ ejecuciones, se disminuiría el error progresivamente cada ϵ veces que se ejecute el circuito, definiendo el número de ejecuciones necesarias finalmente en función del error admisible, independientemente de la precisión. Formulado de manera intuitiva, se trata del concepto de búsqueda binaria aplicado a un ángulo arbitrario, como se puede observar en la Figura 5.1, cada paso iría acercándose más al ángulo a encontrar. Sería necesario estudiar los resultados de las mediciones, cómo interpretarlos y cómo funcionaría esta aproximación en un circuito de varios cúbits.



(a) Para la primera medición se deja el cúbit tal cual. Si la lectura realizada resulta en $|0\rangle$, se considera que el cúbit se encuentra en la porción azul, si es $|1\rangle$, se considera la porción verde.

(b) Para la segunda medición se rota el cúbit 45° , esto hará que la medida determine si se encuentra en la parte rosa o en la naranja.

(c) A continuación se gira previamente a la medición, el resultado del cúbit los 45 anteriores y se le suma $\frac{45^\circ}{2} = 22'5''$, si de la lectura anterior se obtuvo $|0\rangle$, o sólo $22'5''$ si dio $|1\rangle$. En todo caso, lo que se consigue es volver a dividir el espacio de posibilidades en las que se encuentra el cúbit.

Figura 5.1. Obtención del valor esperado de un cúbit en un estado arbitrario (indicado por la línea roja) mediante búsqueda binaria. Aplicado el método sucesivamente se puede ajustar el error de la medida mediante una aproximación diferente a la realizada a través del simple aumento del número de ejecuciones.

Siguiendo con la reducción de los errores que se obtienen en los cálculos realizados mediante computación cuántica, una cuestión fundamental y transversal a toda la computación cuántica es la reducción del ruido, que implica la detección y corrección de errores planteada desde la algoritmia y también desde la implementación de sistemas más robustos. Hay aquí mucho trabajo por delante, aunque recientemente se ha planteado que se puede utilizar la computación cuántica en la era NISQ para fines prácticos mediante la mitigación de errores (Kim et al., 2023).

Simulación cuántica

En el ámbito específico del cálculo de armónicos esféricos, sería interesante llevar el estudio al apartado de la simulación de sistemas cuánticos (la simulación de estos sistemas por medio de computación cuántica). Dentro de este ámbito propuesto inicialmente por Feynman (1982) y que constituye una de las principales promesas de la computación cuántica, quizás se puedan aprovechar las características propias de los orbitales atómicos

o moleculares, que se definen en función de los armónicos esféricos, para realizar los cálculos de coeficientes necesarios.

Calculo binomial

Además, este trabajo muestra una relación entre la computación cuántica y el cálculo de potencias de binomios, lo que conduce a investigar de que manera este tipo de cálculos pueden aprovecharse en la resolución de problemas. También, determinar que tipos de binomios pueden utilizarse, como se pueden combinar en un circuito cuántico, etc.

Complejidad en computación cuántica

También parece necesario promover el establecimiento de un marco estándar de trabajo adecuado en lo que se refiere al cálculo de la complejidad computacional de circuitos cuánticos, dadas sus peculiaridades y dado el hecho de que siempre forman parte de un sistema mixto cuántico-clásico, pues, aún en el caso de que el algoritmo a utilizar sea puramente cuántico, hay que tener en cuenta los costes de “overhead” derivados de la preparación del circuito, su medición y la interpretación de la información arrojada por el mismo.

Bibliografía

- Abdi, Hervé y Lynne J. Williams (2010). “Principal component analysis”. en. En: *WIREs Computational Statistics* 2.4, págs. 433-459. ISSN: 1939-0068. DOI: 10.1002/wics.101. (Visitado 29-06-2023).
- Abhayapala, T.D. y H. Bhatta (feb. de 2003). “Coherent broadband source localization by modal space processing”. En: *10th International Conference on Telecommunications, 2003. ICT 2003*. Vol. 2, 1617-1623 vol.2. DOI: 10.1109/IC.2003.1191676.
- Abohashima, Zainab, Mohamed Elhosen, Essam H. Houssein y Waleed M. Mohamed (jun. de 2020). *Classification with Quantum Machine Learning: A Survey*. en. URL: <https://arxiv.org/abs/2006.12270v1> (visitado 20-04-2023).
- Abraham, Ajith (2005). “Artificial neural networks”. En: *Handbook of measuring system design*. Publisher: John Wiley & Sons, Ltd Chichester, UK. URL: http://wsc10.softcomputing.net/ann_chapter.pdf.
- AES (abr. de 1991). “American Electroencephalographic Society guidelines for standard electrode position nomenclature”. eng. En: *Journal of Clinical Neurophysiology: Official Publication of the American Electroencephalographic Society* 8.2, págs. 200-202. ISSN: 0736-0258.
- AES (ene. de 1994). “Guideline thirteen: guidelines for standard electrode position nomenclature. American Electroencephalographic Society”. eng. En: *Journal of Clinical Neurophysiology: Official Publication of the American Electroencephalographic Society* 11.1, págs. 111-113. ISSN: 0736-0258.
- Aishwarya, Seth, Vaishnav Abeer, Babu Sathish y K. Subramanya (2020). “Quantum Computational Techniques for Prediction of Cognitive State of Human Mind from EEG Signals”. en. En: *Journal of Quantum Computing* 2.4. Publisher: Tech Science Press, págs. 157-170. ISSN: 2579-0137, 2579-0145. DOI: 10.32604/jqc.2020.015018. URL: <https://www.techscience.com/jqc/v2n4/41123> (visitado 11-04-2023).
- Ajagekar, Akshay, Travis Humble y Fengqi You (ene. de 2020). “Quantum computing based hybrid solution strategies for large-scale discrete-continuous optimization problems”. en. En: *Computers & Chemical Engineering* 132, pág. 106630. ISSN: 0098-1354. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2019.106630. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135419307665>.

- Akinsola, J E T (jun. de 2017). “Supervised Machine Learning Algorithms: Classification and Comparison”. En: *International Journal of Computer Trends and Technology (IJCTT)* 48, págs. 128-138. DOI: 10.14445/22312803/IJCTT-V48P126.
- Alonso, Andrés y José Manuel Carbó (oct. de 2022). *Inteligencia Artificial Y Finanzas: Una Alianza Estratégica (Artificial Intelligence and Finance: A Strategic Alliance)*. en. SSRN Scholarly Paper. Rochester, NY. DOI: 10.2139/ssrn.4252710. URL: <https://papers.ssrn.com/abstract=4252710>.
- Anderson, C.W., E.A. Stolz y S. Shamsunder (mar. de 1998). “Multivariate autoregressive models for classification of spontaneous electroencephalographic signals during mental tasks”. En: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 45.3. Conference Name: IEEE Transactions on Biomedical Engineering, págs. 277-286. ISSN: 1558-2531. DOI: 10.1109/10.661153.
- Ang, Kai Keng, Zheng Yang Chin, Haihong Zhang y Cuntai Guan (jun. de 2008). “Filter Bank Common Spatial Pattern (FBCSP) in Brain-Computer Interface”. En: *2008 IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*. ISSN: 2161-4407, págs. 2390-2397. DOI: 10.1109/IJCNN.2008.4634130. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/4634130>.
- Arecchi, F. T., Eric Courtens, Robert Gilmore y Harry Thomas (dic. de 1972). “Atomic Coherent States in Quantum Optics”. En: *Physical Review A* 6.6. Publisher: American Physical Society, págs. 2211-2237. DOI: 10.1103/PhysRevA.6.2211. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.6.2211> (visitado 25-08-2023).
- Bachmann, Paul (1904). “Analytische Zahlentheorie”. de. En: *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen: Arithmetik und Algebra*. Ed. por Wilhelm Franz Meyer. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, págs. 636-674. ISBN: 978-3-663-16019-9. DOI: 10.1007/978-3-663-16019-9_3. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-663-16019-9_3 (visitado 24-08-2023).
- Bayes, Thomas (dic. de 1763). “LII. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. By the late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, A. M. F. R. S”. En: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 53. Publisher: Royal Society, págs. 370-418. DOI: 10.1098/rstl.1763.0053. URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1763.0053>.
- Bera, Tushar Kanti (mar. de 2021). “A Review on The Medical Applications of Electroencephalography (EEG)”. En: *2021 Seventh International conference on Bio Signals,*

Images, and Instrumentation (ICBSII), págs. 1-6. DOI: 10.1109/ICBSII51839.2021.9445153.

- Bergholm, Ville, Josh Izaac, Maria Schuld, Christian Gogolin, Shah Nawaz Ahmed, Vishnu Ajith, M. Sohaib Alam, Guillermo Alonso-Linaje, B. Akash Narayanan, Ali Asadi, Juan Miguel Arrazola, Utkarsh Azad, Sam Banning, Carsten Blank, Thomas R. Bromley, Benjamin A. Cordier, Jack Ceroni, Alain Delgado, Olivia Di Matteo, Amintor Dusko, Tanya Garg, Diego Guala, Anthony Hayes, Ryan Hill, Aroosa Ijaz, Theodor Isacsson, David Ittah, Soran Jahangiri, Prateek Jain, Edward Jiang, Ankit Khandelwal, Korbinian Kottmann, Robert A. Lang, Christina Lee, Thomas Loke, Angus Lowe, Keri McKiernan, Johannes Jakob Meyer, J. A. Montañez-Barrera, Romain Moyard, Zeyue Niu, Lee James O’Riordan, Steven Oud, Ashish Panigrahi, Chae-Yeun Park, Daniel Polatajko, Nicolás Quesada, Chase Roberts, Nahum Sá, Isidor Schoch, Borun Shi, Shuli Shu, Sukin Sim, Arshpreet Singh, Ingrid Strandberg, Jay Soni, Antal Száva, Slimane Thabet, Rodrigo A. Vargas-Hernández, Trevor Vincent, Nicola Vitucci, Maurice Weber, David Wierichs, Roeland Wiersema, Moritz Willmann, Vincent Wong, Shaoming Zhang y Nathan Killoran (jul. de 2022). *PennyLane: Automatic differentiation of hybrid quantum-classical computations*. arXiv:1811.04968 [physics, physics:quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.1811.04968. URL: <http://arxiv.org/abs/1811.04968> (visitado 20-07-2023).
- Biagetti, Giorgio, Paolo Crippa, Laura Falaschetti, Simona Luzzi y Claudio Turchetti (ene. de 2021). “Classification of Alzheimer’s Disease from EEG Signal Using Robust-PCA Feature Extraction”. en. En: *Procedia Computer Science*. Knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering Systems: Proceedings of the 25th International Conference KES2021 192, págs. 3114-3122. ISSN: 1877-0509. DOI: 10.1016/j.procs.2021.09.084. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050921018214> (visitado 25-01-2023).
- Briegel, Hans J. y Gemma De las Cuevas (feb. de 2013). *Projective simulation for artificial intelligence*. arXiv:1104.3787 [cond-mat, physics:nlin, physics:quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.1104.3787. URL: <http://arxiv.org/abs/1104.3787>.
- Bulárka, Szilárd y Aurel Gontean (oct. de 2016). “Brain-Computer Interface review”. En: *2016 12th IEEE International Symposium on Electronics and Telecommunications (ISETC)*, págs. 219-222. DOI: 10.1109/ISETC.2016.7781096.

- Buzsáki, György (oct. de 2006). *Rhythms of the Brain*. en. Oxford University Press. ISBN: 978-0-19-530106-9. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195301069.001.0001. URL: <https://academic.oup.com/book/11166> (visitado 13-04-2023).
- Cao, Yudong, Gian Giacomo Guerreschi y Alán Aspuru-Guzik (nov. de 2017). *Quantum Neuron: an elementary building block for machine learning on quantum computers*. arXiv:1711.11240 [quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.1711.11240. URL: <http://arxiv.org/abs/1711.11240> (visitado 05-04-2023).
- Cerezo, M., Andrew Arrasmith, Ryan Babbush, Simon C. Benjamin, Suguru Endo, Keisuke Fujii, Jarrod R. McClean, Kosuke Mitarai, Xiao Yuan, Lukasz Cincio y Patrick J. Coles (ago. de 2021). “Variational Quantum Algorithms”. En: *Nature Reviews Physics* 3.9. arXiv:2012.09265 [quant-ph, stat], págs. 625-644. ISSN: 2522-5820. DOI: 10.1038/s42254-021-00348-9. URL: <http://arxiv.org/abs/2012.09265> (visitado 20-04-2023).
- Chen, Samuel Yen-Chi (oct. de 2022). *Quantum deep recurrent reinforcement learning*. arXiv:2210.14876 [quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.2210.14876. URL: <http://arxiv.org/abs/2210.14876>.
- Chen, Xiangning, Chen Liang, Da Huang, Esteban Real, Kaiyuan Wang, Yao Liu, Hieu Pham, Xuanyi Dong, Thang Luong, Cho-Jui Hsieh, Yifeng Lu y Quoc V. Le (feb. de 2023). *Symbolic Discovery of Optimization Algorithms*. arXiv:2302.06675 [cs]. DOI: 10.48550/arXiv.2302.06675. URL: <http://arxiv.org/abs/2302.06675> (visitado 16-04-2023).
- Choi, Seungjin, Andrzej Cichocki, Hyung-Min Park y Soo-Young Lee (nov. de 2004). “Blind source separation and independent component analysis: A review”. En: *Neural Inf. Process. Lett. Rev* 6. URL: https://www.researchgate.net/publication/228847761_Blind_source_separation_and_independent_component_analysis_A_review.
- Ciliberto, Carlo, Mark Herbster, Alessandro Davide Ialongo, Massimiliano Pontil, Andrea Rocchetto, Simone Severini y Leonard Wossnig (ene. de 2018). “Quantum machine learning: a classical perspective”. En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 474.2209. arXiv:1707.08561 [quant-ph, stat], pág. 20170551. ISSN: 1364-5021, 1471-2946. DOI: 10.1098/rspa.2017.0551. URL: <http://arxiv.org/abs/1707.08561> (visitado 05-04-2023).

- Ciresan, Dan, Ueli Meier, Jonathan Masci, Luca Maria Gambardella y Jürgen Schmidhuber (jul. de 2011). “Flexible, High Performance Convolutional Neural Networks for Image Classification.” En: págs. 1237-1242. DOI: 10.5591/978-1-57735-516-8/IJCAI11-210.
- Cortes, Corinna y Vladimir Vapnik (sep. de 1995). “Support-vector networks”. en. En: *Machine Learning* 20.3, págs. 273-297. ISSN: 1573-0565. DOI: 10.1007/BF00994018. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00994018> (visitado 20-04-2023).
- Dao, Tri, Daniel Y. Fu, Khaled K. Saab, Armin W. Thomas, Atri Rudra y Christopher Ré (feb. de 2023). *Hungry Hungry Hippos: Towards Language Modeling with State Space Models*. arXiv:2212.14052 [cs]. DOI: 10.48550/arXiv.2212.14052. URL: <http://arxiv.org/abs/2212.14052> (visitado 16-04-2023).
- Dao, Tri, Albert Gu, Alexander Ratner, Virginia Smith, Chris De Sa y Christopher Re (mayo de 2019). “A Kernel Theory of Modern Data Augmentation”. en. En: *Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning*. ISSN: 2640-3498. PMLR, págs. 1528-1537. URL: <https://proceedings.mlr.press/v97/dao19b.html>.
- De Vos, Maarten, Stephanie Riès, Katrien Vanderperren, Bart Vanrumste, Francois-Xavier Alario, Sabine Van Huffel y Boris Burle (jun. de 2010). “Removal of muscle artifacts from EEG recordings of spoken language production”. eng. En: *Neuroinformatics* 8.2, págs. 135-150. ISSN: 1559-0089. DOI: 10.1007/s12021-010-9071-0.
- Deutsch, David Elieser (sep. de 1989). “Quantum computational networks”. EN. En: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. Publisher: The Royal Society London. DOI: 10.1098/rspa.1989.0099. URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1989.0099> (visitado 25-08-2023).
- Dezhong, Yao (ene. de 2000). “High-resolution EEG mappings: a spherical harmonic spectra theory and simulation results”. en. En: *Clinical Neurophysiology* 111.1, págs. 81-92. ISSN: 1388-2457. DOI: 10.1016/S1388-2457(99)00205-9. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1388245799002059> (visitado 10-05-2023).
- Eberhart y Yuhui Shi (mayo de 2001). “Particle swarm optimization: developments, applications and resources”. En: *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation (IEEE Cat. No.01TH8546)*. Vol. 1, 81-86 vol. 1. DOI: 10.1109/CEC.2001.934374.

- Elron, Noam y Yonina C. Eldar (mayo de 2006). *Optimal Encoding of Classical Information in a Quantum Medium*. arXiv:quant-ph/0601010. DOI: 10.48550/arXiv.quant-ph/0601010. URL: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0601010> (visitado 02-09-2023).
- Feynman, Richard P. (jun. de 1982). “Simulating physics with computers”. En: *International Journal of Theoretical Physics* 21.6, págs. 467-488. ISSN: 1572-9575. DOI: 10.1007/BF02650179. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02650179>.
- Fourier, Jean Baptiste Joseph (1822). “Théorie analytique de la chaleur”. En: *Académie des Sciences* 3.
- Fukushima, Kunihiko (abr. de 1980). “Neocognitron: A self-organizing neural network model for a mechanism of pattern recognition unaffected by shift in position”. en. En: *Biological Cybernetics* 36.4, págs. 193-202. ISSN: 0340-1200, 1432-0770. DOI: 10.1007/BF00344251. URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF00344251>.
- Gandhi, Vaibhav, Vipul Arora, Laxmidhar Behera, Girijesh Prasad, Damien Coyle y Tm McGinnity (jul. de 2011). “EEG denoising with a recurrent quantum neural network for a brain-computer interface”. En: *The 2011 International Joint Conference on Neural Networks*. San Jose, CA, USA: IEEE, págs. 1583-1590. ISBN: 978-1-4244-9635-8. DOI: 10.1109/IJCNN.2011.6033413. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/6033413/> (visitado 02-04-2023).
- Gandhi, Vaibhav, Girijesh Prasad, Damien Coyle, Laxmidhar Behera y Thomas Martin McGinnity (feb. de 2014). “Quantum Neural Network-Based EEG Filtering for a Brain-Computer Interface”. En: *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 25.2, págs. 278-288. ISSN: 2162-2388. DOI: 10.1109/TNNLS.2013.2274436.
- Gauss, Carl Friedrich (1823). *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*. la. Google-Books-ID: ZQ8OAAAAQAAJ. H. Dieterich.
- Giri, Amita, Lalan Kumar y Tapan Gandhi (nov. de 2018). “EEG Dipole Source Localization in Hemispherical Harmonics Domain”. En: *2018 Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA ASC)*. ISSN: 2640-0103, págs. 679-684. DOI: 10.23919/APSIPA.2018.8659466.
- Glaser, E. (abr. de 1961). “Signal detection by adaptive filters”. En: *IRE Transactions on Information Theory* 7.2. Conference Name: IRE Transactions on Information Theory, págs. 87-98. ISSN: 2168-2712. DOI: 10.1109/TIT.1961.1057629.
- Górski, K. M., E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke y M. Bartelmann (abr. de 2005). “HEALPix: A Framework for High-Resolution Discretization

- and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere”. en. En: *The Astrophysical Journal* 622.2. Publisher: IOP Publishing, pág. 759. ISSN: 0004-637X. DOI: 10.1086/427976. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/427976/meta> (visitado 05-08-2023).
- Gramfort, A., M. Luessi, E. Larson, D. Engemann, D. Strohmeier, C. Brodbeck, L. Parkkonen y M. Hämäläinen (feb. de 2014). “MNE software for processing MEG and EEG data”. En: *NeuroImage* 86, págs. 446-460. ISSN: 1053-8119. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2013.10.027. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3930851/>.
- Grossmann, A. y J. Morlet (jul. de 1984). “Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape”. En: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 15.4. Publisher: Society for Industrial and Applied Mathematics, págs. 723-736. ISSN: 0036-1410. DOI: 10.1137/0515056. URL: <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/0515056> (visitado 11-07-2023).
- Grover, Lov K. (nov. de 1996). *A fast quantum mechanical algorithm for database search*. arXiv:quant-ph/9605043. DOI: 10.48550/arXiv.quant-ph/9605043. URL: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9605043> (visitado 20-04-2023).
- Guo, Jiaxian, Sidi Lu, Han Cai, Weinan Zhang, Yong Yu y Jun Wang (dic. de 2017). *Long Text Generation via Adversarial Training with Leaked Information*. arXiv:1709.08624 [cs]. DOI: 10.48550/arXiv.1709.08624. URL: <http://arxiv.org/abs/1709.08624> (visitado 16-04-2023).
- Harris, Charles R., K. Jarrod Millman, Stéfan J. van der Walt, Ralf Gommers, Pauli Virtanen, David Cournapeau, Eric Wieser, Julian Taylor, Sebastian Berg, Nathaniel J. Smith, Robert Kern, Matti Picus, Stephan Hoyer, Marten H. van Kerkwijk, Matthew Brett, Allan Haldane, Jaime Fernández del Río, Mark Wiebe, Pearu Peterson, Pierre Gérard-Marchant, Kevin Sheppard, Tyler Reddy, Warren Weckesser, Hameer Abbasi, Christoph Gohlke y Travis E. Oliphant (sep. de 2020). “Array programming with NumPy”. en. En: *Nature* 585.7825. Number: 7825 Publisher: Nature Publishing Group, págs. 357-362. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: <https://www.nature.com/articles/s41586-020-2649-2> (visitado 10-08-2023).
- Hernando Calvo, Alfredo, Ana Municio Zúñiga, Azucena Vázquez Gutiérrez, Hector Gardó Huerta y Hector Martínez Romero (dic. de 2022). *Los algoritmos a examen*. ES. 1.^a ed. Barcelona: Fundació Bofill. ISBN: 978-84-12-48298-0. URL: <https://fundaciobofill.cat/es/publicaciones/los-algoritmos-a-examen>.

- Hotelling, Harold (dic. de 1936). “Relations between two sets of variates”. En: *Biometrika* 28.3-4, págs. 321-377. ISSN: 0006-3444. DOI: 10.1093/biomet/28.3-4.321. URL: <https://doi.org/10.1093/biomet/28.3-4.321> (visitado 11-07-2023).
- Huang, Dandan, Mei Wang, Jianping Wang y Jiixin Yan (ene. de 2022). “A survey of quantum computing hybrid applications with brain-computer interface”. en. En: *Cognitive Robotics* 2, págs. 164-176. ISSN: 2667-2413. DOI: 10.1016/j.cogr.2022.07.002. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667241322000155> (visitado 22-03-2023).
- Huang, Lu, Hong Yu, Ran Li, Xiang Li y Jun Gu (mayo de 2013). “An Improved EEG Feature Extraction Method Based on Quantum Particle Swarm Optimizer Algorithm”. En: *Advanced Materials Research* 694-697, págs. 2526-2529. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.694-697.2526.
- Huang, Norden E., Zheng Shen, Steven R. Long, Manli C. Wu, Hsing H. Shih, Quanan Zheng, Nai-Chyuan Yen, Chi Chao Tung y Henry H. Liu (mar. de 1998). “The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis”. en. En: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 454.1971, págs. 903-995. ISSN: 1364-5021, 1471-2946. DOI: 10.1098/rspa.1998.0193. URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1998.0193> (visitado 11-07-2023).
- Hunter, John D. (mayo de 2007). “Matplotlib: A 2D Graphics Environment”. En: *Computing in Science & Engineering* 9.3. Conference Name: Computing in Science & Engineering, págs. 90-95. ISSN: 1558-366X. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.
- IBM Quantum* (2023). en. URL: <https://quantum-computing.ibm.com/> (visitado 20-07-2023).
- Igeta, K. e Y. Yamamoto (jul. de 1988). “Quantum mechanical computers with single atom and photon fields”. EN. En: *International Conference on Quantum Electronics (1988), paper TuI4*. Optica Publishing Group, TuI4. URL: <https://opg.optica.org/abstract.cfm?uri=IQEC-1988-TuI4> (visitado 29-06-2023).
- Jiang, Xiao, Gui-Bin Bian y Zean Tian (ene. de 2019). “Removal of Artifacts from EEG Signals: A Review”. en. En: *Sensors* 19.5. Number: 5 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute, pág. 987. ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s19050987. URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/19/5/987> (visitado 18-04-2023).

- Jungwirth, David y Daniela Haluza (ene. de 2023). “Artificial Intelligence and Public Health: An Exploratory Study”. en. En: *International Journal of Environmental Research and Public Health* 20.5. Number: 5 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute, pág. 4541. ISSN: 1660-4601. DOI: 10.3390/ijerph20054541. URL: <https://www.mdpi.com/1660-4601/20/5/4541>.
- Jutten, Christian y Jeanny Herault (jul. de 1991). “Blind separation of sources, part I: An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture”. en. En: *Signal Processing* 24.1, págs. 1-10. ISSN: 0165-1684. DOI: 10.1016/0165-1684(91)90079-X. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016516849190079X> (visitado 11-07-2023).
- Kaiboriboon, Kitti, Hans O. Lüders, Mehdi Hamaneh, John Turnbull y Samden D. Lhatoo (sep. de 2012). “EEG source imaging in epilepsy—practicalities and pitfalls”. en. En: *Nature Reviews Neurology* 8.9. Number: 9 Publisher: Nature Publishing Group, págs. 498-507. ISSN: 1759-4766. DOI: 10.1038/nrneuro1.2012.150. URL: <https://www.nature.com/articles/nrneuro1.2012.150> (visitado 18-04-2023).
- Kak, Subhash (ene. de 1995). “Quantum Neural Computing”. en. En: *Advances in Imaging and Electron Physics*. Ed. por Peter W. Hawkes. Vol. 94. Elsevier, págs. 259-313. DOI: 10.1016/S1076-5670(08)70147-2. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1076567008701472> (visitado 19-04-2023).
- Kak, Subhash (abr. de 2007). “Quantum Information and Entropy”. En: *International Journal of Theoretical Physics* 46.4. arXiv:quant-ph/0605096, págs. 860-876. ISSN: 0020-7748, 1572-9575. DOI: 10.1007/s10773-006-9245-6. URL: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0605096> (visitado 21-07-2023).
- Kerenidis, Iordanis, Jonas Landman y Anupam Prakash (nov. de 2019). *Quantum Algorithms for Deep Convolutional Neural Networks*. arXiv:1911.01117 [quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.1911.01117. URL: <http://arxiv.org/abs/1911.01117> (visitado 20-04-2023).
- Kim, Youngseok, Andrew Eddins, Sajant Anand, Ken Xuan Wei, Ewout van den Berg, Sami Rosenblatt, Hasan Nayfeh, Yantao Wu, Michael Zaletel, Kristan Temme y Abhinav Kandala (jun. de 2023). “Evidence for the utility of quantum computing before fault tolerance”. en. En: *Nature* 618.7965. Number: 7965 Publisher: Nature Publishing Group, págs. 500-505. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/s41586-023-06096-3. URL: <https://www.nature.com/articles/s41586-023-06096-3> (visitado 26-06-2023).

- Klados, Manousos A., Christos Papadelis, Christoph Braun y Panagiotis D. Bamidis (jul. de 2011). “REG-ICA: A hybrid methodology combining Blind Source Separation and regression techniques for the rejection of ocular artifacts”. en. En: *Biomedical Signal Processing and Control*. ITAB 2009 6.3, págs. 291-300. ISSN: 1746-8094. DOI: 10.1016/j.bspc.2011.02.001. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1746809411000061> (visitado 11-07-2023).
- Klem, G. H., H. O. Lüders, H. H. Jasper y C. Elger (1999). “The ten-twenty electrode system of the International Federation. The International Federation of Clinical Neurophysiology”. eng. En: *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology. Supplement* 52, págs. 3-6. ISSN: 0424-8155.
- Krizhevsky, Alex, Ilya Sutskever y Geoffrey E. Hinton (mayo de 2017). “ImageNet classification with deep convolutional neural networks”. En: *Communications of the ACM* 60.6, págs. 84-90. ISSN: 0001-0782. DOI: 10.1145/3065386. URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/3065386>.
- Krose, B. y Patrick van der Smagt (ene. de 1996). “An Introduction to Neural Networks”. En: URL: https://www.researchgate.net/publication/225067619_An_Introduction_to_Neural_Networks.
- Lau, Jonathan Wei Zhong, Kian Hwee Lim, Harshank Shrotriya y Leong Chuan Kwek (sep. de 2022). “NISQ computing: where are we and where do we go?” en. En: *AAPPS Bulletin* 32.1, pág. 27. ISSN: 2309-4710. DOI: 10.1007/s43673-022-00058-z. URL: <https://doi.org/10.1007/s43673-022-00058-z> (visitado 29-06-2023).
- Lawhern, Vernon, W. David Hairston, Kaleb McDowell, Marissa Westerfield y Kay Robbins (jul. de 2012). “Detection and classification of subject-generated artifacts in EEG signals using autoregressive models”. en. En: *Journal of Neuroscience Methods* 208.2, págs. 181-189. ISSN: 0165-0270. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2012.05.017. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165027012001860> (visitado 19-04-2023).
- Lawhern, Vernon J., Amelia J. Solon, Nicholas R. Waytowich, Stephen M. Gordon, Chou P. Hung y Brent J. Lance (oct. de 2018). “EEGNet: A Compact Convolutional Network for EEG-based Brain-Computer Interfaces”. En: *Journal of Neural Engineering* 15.5. arXiv:1611.08024 [cs, q-bio, stat], pág. 056013. ISSN: 1741-2560, 1741-2552. DOI: 10.1088/1741-2552/aace8c. URL: <http://arxiv.org/abs/1611.08024> (visitado 20-04-2023).

- Legendre, Adrien Marie (1805). *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. fr. Google-Books-ID: FRcOAAAAQAAJ. F. Didot.
- Li, Chuyi, Lulu Li, Yifei Geng, Hongliang Jiang, Meng Cheng, Bo Zhang, Zaidan Ke, Xiaoming Xu y Xiangxiang Chu (ene. de 2023). *YOLOv6 v3.0: A Full-Scale Reloading*. arXiv:2301.05586 [cs]. DOI: 10.48550/arXiv.2301.05586. URL: <http://arxiv.org/abs/2301.05586> (visitado 16-04-2023).
- Li, Peiyang, Peng Xu, Rui Zhang, Lanjin Guo y Dezhong Yao (ago. de 2013). “L1 Norm based common spatial patterns decomposition for scalp EEG BCI”. En: *BioMedical Engineering OnLine* 12.1, pág. 77. ISSN: 1475-925X. DOI: 10.1186/1475-925X-12-77. URL: <https://doi.org/10.1186/1475-925X-12-77>.
- Li, Yanan, Zhimin Wang, Rongbing Han, Shangshang Shi, Jiaxin Li, Ruimin Shang, Haiyong Zheng, Guoqiang Zhong y Yongjian Gu (feb. de 2023). *Quantum Recurrent Neural Networks for Sequential Learning*. arXiv:2302.03244 [quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.2302.03244. URL: <http://arxiv.org/abs/2302.03244> (visitado 20-04-2023).
- Li, YaoChong, Ri-Gui Zhou, RuiQing Xu, Jia Luo y She-Xiang Jiang (ago. de 2015). “A Quantum Mechanics-Based Framework for EEG Signal Feature Extraction and Classification”. En: *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing* 10.1, págs. 211-222. ISSN: 2168-6750. DOI: 10.1109/TETC.2020.3000734. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9112355>.
- Lillicrap, Timothy P., Jonathan J. Hunt, Alexander Pritzel, Nicolas Heess, Tom Erez, Yuval Tassa, David Silver y Daan Wierstra (jul. de 2019). *Continuous control with deep reinforcement learning*. arXiv:1509.02971 [cs, stat]. DOI: 10.48550/arXiv.1509.02971. URL: <http://arxiv.org/abs/1509.02971>.
- Liu, Tiejun y Dezhong Yao (ago. de 2006). “Removal of the ocular artifacts from EEG data using a cascaded spatio-temporal processing”. en. En: *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 83.2, págs. 95-103. ISSN: 0169-2607. DOI: 10.1016/j.cmpb.2006.03.009. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169260706000988> (visitado 18-04-2023).
- Looney, David, Ling Li, Tomasz M. Rutkowski, Danilo P. Mandic y Andrzej Cichocki (2008). “Ocular Artifacts Removal from EEG Using EMD”. en. En: *Advances in Cognitive Neurodynamics ICCN 2007*. Ed. por Rubin Wang, Enhua Shen y Fanji Gu. Dordrecht: Springer Netherlands, págs. 831-835. ISBN: 978-1-4020-8387-7. DOI: 10.1007/978-1-4020-8387-7_145.

- Ma, Jun, Banghua Yang, Wenzheng Qiu, Yunzhe Li, Shouwei Gao y Xinxing Xia (sep. de 2022). “A large EEG dataset for studying cross-session variability in motor imagery brain-computer interface”. En: *Scientific Data* 9. DOI: 10.1038/s41597-022-01647-1. URL: <https://www.nature.com/articles/s41597-022-01647-1>.
- Ma, Yuliang, Xiaohui Ding, Qingshan She, Zhizeng Luo, Thomas Potter y Yingchun Zhang (mayo de 2016). “Classification of Motor Imagery EEG Signals with Support Vector Machines and Particle Swarm Optimization”. en. En: *Computational and Mathematical Methods in Medicine* 2016. Publisher: Hindawi, e4941235. ISSN: 1748-670X. DOI: 10.1155/2016/4941235. URL: <https://www.hindawi.com/journals/cmmm/2016/4941235/> (visitado 20-04-2023).
- Mahesh, Batta (ene. de 2019). *Machine Learning Algorithms -A Review*. DOI: 10.21275/ART20203995. URL: https://www.researchgate.net/publication/344717762_Machine_Learning_Algorithms_-A_Review.
- Mammone, Alessia, Marco Turchi y Nello Cristianini (2009). “Support vector machines”. En: *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics* 1.3. Publisher: Wiley Online Library, págs. 283-289. URL: <https://wires.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/wics.49>.
- Mane, Ravikiran, Effie Chew, Karen Chua, Kai Keng Ang, Neethu Robinson, A. P. Vinod, Seong-Whan Lee y Cuntai Guan (mar. de 2021). *FBCNet: A Multi-view Convolutional Neural Network for Brain-Computer Interface*. arXiv:2104.01233 [cs, eess]. DOI: 10.48550/arXiv.2104.01233. URL: <http://arxiv.org/abs/2104.01233> (visitado 18-04-2023).
- Mari, Andrea (mar. de 2020). “Quantvolutional Neural Networks”. en. En: *PennyLane Demos*. Publisher: Xanadu. URL: https://pennylane.ai/qml/demos/tutorial_quantvolution.
- Martín Abadi, Ashish Agarwal, Paul Barham, Eugene Brevdo, Zhifeng Chen, Craig Citro, Greg S. Corrado, Andy Davis, Jeffrey Dean, Matthieu Devin, Sanjay Ghemawat, Ian Goodfellow, Andrew Harp, Geoffrey Irving, Michael Isard, Yangqing Jia, Rafal Jozefowicz, Lukasz Kaiser, Manjunath Kudlur, Josh Levenberg, Dandelion Mané, Rajat Monga, Sherry Moore, Derek Murray, Chris Olah, Mike Schuster, Jonathon Shlens, Benoit Steiner, Ilya Sutskever, Kunal Talwar, Paul Tucker, Vincent Vanhoucke, Vijay Vasudevan, Fernanda Viégas, Oriol Vinyals, Pete Warden, Martin Wattenberg, Martin

- Wicke, Yuan Yu y Xiaoqiang Zheng (2015). *TensorFlow: Large-Scale Machine Learning on Heterogeneous Systems*. URL: <https://www.tensorflow.org/>.
- McCullagh, Peter (1980). “Regression models for ordinal data”. En: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 42.2. Publisher: Wiley Online Library, págs. 109-127. ISSN: 0035-9246. URL: <http://people.csail.mit.edu/jrennie/papers/other/mccullagh-ordinal-80.pdf>.
- McLachlan, A.D. (ene. de 1964). “A variational solution of the time-dependent Schrodinger equation”. En: *Molecular Physics* 8.1. Publisher: Taylor & Francis eprint: <https://doi.org/10.1080/00268976400100041>, págs. 39-44. ISSN: 0026-8976. DOI: 10.1080/00268976400100041. URL: <https://doi.org/10.1080/00268976400100041> (visitado 20-04-2023).
- Meyer, Nico, Christian Ufrecht, Maniraman Periyasamy, Daniel D. Scherer, Axel Plinge y Christopher Mutschler (nov. de 2022). *A Survey on Quantum Reinforcement Learning*. arXiv:2211.03464 [quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.2211.03464. URL: <http://arxiv.org/abs/2211.03464> (visitado 20-04-2023).
- Michel, Christoph M., Micah M. Murray, Göran Lantz, Sara Gonzalez, Laurent Spinelli y Rolando Grave de Peralta (oct. de 2004). “EEG source imaging”. en. En: *Clinical Neurophysiology* 115.10, págs. 2195-2222. ISSN: 1388-2457. DOI: 10.1016/j.clinph.2004.06.001. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1388245704002135> (visitado 11-07-2023).
- Molla, Md. Khademul Islam, Sanjoy Kumar Saha, Sabina Yasmin, Md. Rabiul Islam y Jungpil Shin (2021). “Trial Regeneration With Subband Signals for Motor Imagery Classification in BCI Paradigm”. En: *IEEE Access* 9. Conference Name: IEEE Access, págs. 7632-7642. ISSN: 2169-3536. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3049191.
- Nguyen, Trung-Hau y Wan-Young Chung (ene. de 2019). “Detection of Driver Braking Intention Using EEG Signals During Simulated Driving”. en. En: *Sensors* 19.13. Number: 13 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute, pág. 2863. ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s19132863. URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/19/13/2863> (visitado 09-08-2023).
- Nolte, Guido, Ou Bai, Lewis Wheaton, Zoltan Mari, Sherry Vorbach y Mark Hallett (oct. de 2004). “Identifying true brain interaction from EEG data using the imaginary part of coherency”. en. En: *Clinical Neurophysiology* 115.10, págs. 2292-2307.

- ISSN: 1388-2457. DOI: 10.1016/j.clinph.2004.04.029. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1388245704001993> (visitado 18-04-2023).
- Nunez, Paul L. y Ramesh Srinivasan (2006). *Electric fields of the brain: the neurophysics of EEG*. eng. 2nd ed. OCLC: 608652584. Oxford: Oxford University Press. ISBN: 978-0-19-986567-3.
- Oliphant, Travis, Eric Jones y Peterson Pearu (2023). *SciPy*. URL: <https://scipy.org/> (visitado 28-07-2023).
- Oostenveld, Robert y Peter Praamstra (abr. de 2001). “The five percent electrode system for high-resolution EEG and ERP measurements”. en. En: *Clinical Neurophysiology* 112.4, págs. 713-719. ISSN: 1388-2457. DOI: 10.1016/S1388-2457(00)00527-7. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1388245700005277> (visitado 15-04-2023).
- Pan, Sinno Jialin y Qiang Yang (oct. de 2010). “A Survey on Transfer Learning”. En: *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* 22.10. Conference Name: IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, págs. 1345-1359. ISSN: 1558-2191. DOI: 10.1109/TKDE.2009.191.
- Pearson, Karl (nov. de 1901). “LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space”. En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 2.11. Publisher: Taylor & Francis, págs. 559-572. ISSN: 1941-5982. DOI: 10.1080/14786440109462720. (Visitado 11-07-2023).
- Popiel, Nicholas J. M., Colin Metrow, Geoffrey Laforge, Adrian M. Owen, Bobby Stojanowski y Andrea Soddu (oct. de 2021). “Exploring electroencefalography with a model inspired by quantum mechanics”. En: *Scientific Reports* 11, pág. 19771. ISSN: 2045-2322. DOI: 10.1038/s41598-021-97960-7. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8492705/> (visitado 22-03-2023).
- Raheem, Mariam Abdul-Zahra y Ehab AbdulRazzaq Hussein (nov. de 2016). “Classification of EEG Signals Using Quantum Neural Network and Cubic Spline”. English. En: *International Journal of Electronics and Telecommunications* 62.4, págs. 401-408. ISSN: 20818491. DOI: 10.1515/eletel-2016-0055. URL: <https://www.proquest.com/docview/1861146110> (visitado 22-03-2023).
- Ramoser, Herbert, J Müller-Gerking y Gert Pfurtscheller (ene. de 2001). “Optimal Spatial Filtering of Single Trial EEG During Imagined Hand Movement”. En: *IEEE transactions on rehabilitation engineering : a publication of the IEEE Engineering in Medi-*

- cine and Biology Society* 8, págs. 441-6. DOI: 10.1109/86.895946. URL: https://www.researchgate.net/publication/224330976_Filter_Bank_Common_Spatial_Pattern_FBCSP_in_brain-computer_interface.
- Rebentrost, Patrick, Masoud Mohseni y Seth Lloyd (sep. de 2014). “Quantum support vector machine for big data classification”. En: *Physical Review Letters* 113.13. arXiv:1307.0471 [quant-ph], pág. 130503. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.130503. URL: <http://arxiv.org/abs/1307.0471> (visitado 20-04-2023).
- Rennie, Jason D. M., Lawrence Shih, Jaime Teevan y David R. Karger (ago. de 2003). “Tackling the poor assumptions of naive bayes text classifiers”. En: *Proceedings of the Twentieth International Conference on International Conference on Machine Learning*. ICML’03. Washington, DC, USA: AAAI Press, págs. 616-623. ISBN: 978-1-57735-189-4. URL: <https://dl.acm.org/doi/10.5555/3041838.3041916> (visitado 28-06-2023).
- Rossum, Guido van (jul. de 2023). *Python*. en. URL: <https://www.python.org/> (visitado 20-07-2023).
- Saeidi, Maham, Waldemar Karwowski, Farzad V. Farahani, Krzysztof Fiok, Redha Taiar, P. A. Hancock y Awad Al-Juaid (nov. de 2021). “Neural Decoding of EEG Signals with Machine Learning: A Systematic Review”. en. En: *Brain Sciences* 11.11, pág. 1525. ISSN: 2076-3425. DOI: 10.3390/brainsci11111525. URL: <https://www.mdpi.com/2076-3425/11/11/1525> (visitado 10-04-2023).
- Schirrneister, Robin, Jost Springenberg, Lukas Fiederer, Martin Glasstetter, Katharina Eggensperger, Michael Tangermann, Frank Hutter, Wolfram Burgard y Tonio Ball (ago. de 2017). “Deep learning with convolutional neural networks for EEG decoding and visualization: Convolutional Neural Networks in EEG Analysis”. En: *Human Brain Mapping* 38.11. ISSN: 1097-0193. DOI: 10.1002/hbm.23730. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/hbm.23730>.
- Schuld, M., I. Sinayskiy y F. Petruccione (nov. de 2014). “The quest for a Quantum Neural Network”. En: *Quantum Information Processing* 13.11. arXiv:1408.7005 [quant-ph], págs. 2567-2586. ISSN: 1570-0755, 1573-1332. DOI: 10.1007/s11128-014-0809-8. URL: <http://arxiv.org/abs/1408.7005> (visitado 20-04-2023).
- Schuld, Maria y Nathan Killoran (feb. de 2019). “Quantum machine learning in feature Hilbert spaces”. En: *Physical Review Letters* 122.4. arXiv:1803.07128 [quant-ph],

- pág. 040504. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.040504.
URL: <http://arxiv.org/abs/1803.07128> (visitado 02-09-2023).
- Schumacher, Benjamin (abr. de 1995). “Quantum coding”. En: *Physical Review A* 51.4. Publisher: American Physical Society, págs. 2738-2747. DOI: 10.1103/PhysRevA.51.2738. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.51.2738> (visitado 25-08-2023).
- Sedighzadeh, Davoud y Ellips Masehian (2009). “Particle Swarm Optimization Methods, Taxonomy and Applications”. En: *International Journal of Computer Theory and Engineering*, págs. 486-502. ISSN: 17938201. DOI: 10.7763/IJCTE.2009.V1.80. URL: <http://www.ijcte.org/show-26-173-1.html> (visitado 21-07-2023).
- Seeley, R. T. (abr. de 1966). “Spherical Harmonics”. En: *The American Mathematical Monthly* 73.4P2. Publisher: Taylor & Francis, págs. 115-121. ISSN: 0002-9890. DOI: 10.1080/00029890.1966.11970927. (Visitado 29-06-2023).
- Sen, Pratap Chandra, Mahimarnab Hajra y Mitadru Ghosh (2020). “Supervised Classification Algorithms in Machine Learning: A Survey and Review”. en. En: *Emerging Technology in Modelling and Graphics*. Ed. por Jyotsna Kumar Mandal y Debika Bhattacharya. Advances in Intelligent Systems and Computing. Singapore: Springer, págs. 99-111. ISBN: 9789811374036. DOI: 10.1007/978-981-13-7403-6_11.
- Senokosov, Arsenii, Alexander Sedykh, Asel Sagingalieva y Alexey Melnikov (abr. de 2023). *Quantum machine learning for image classification*. arXiv:2304.09224 [quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.2304.09224. URL: <http://arxiv.org/abs/2304.09224> (visitado 20-04-2023).
- Shen, Feihong y Jun Liu (jun. de 2021). *QFCNN: Quantum Fourier Convolutional Neural Network*. arXiv:2106.10421 [quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.2106.10421. URL: <http://arxiv.org/abs/2106.10421> (visitado 20-04-2023).
- Shor, P.W. (1994). “Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring”. En: *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. Conference Name: 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science ISBN: 9780818665806 Place: Santa Fe, NM, USA Publisher: IEEE Comput. Soc. Press, págs. 124-134. DOI: 10.1109/SFCS.1994.365700. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/365700/> (visitado 20-04-2023).
- Silvirianti, Silvirianti, Bhaskara Narottama y Soo Shin (ago. de 2015). *UAV Coverage Path Planning with Quantum-based Deep Deterministic Policy Gradient*. Vol. 14. 8. DOI: 10.

- 36227/techrxiv.21973784. URL: https://www.techrxiv.org/articles/preprint/UAV_Coverage_Path_Planning_with_Quantum-based_Deep_Deterministic_Policy_Gradient/21973784.
- SONG, Yan-yan y Ying LU (abr. de 2015). “Decision tree methods: applications for classification and prediction”. En: *Shanghai Archives of Psychiatry* 27.2, págs. 130-135. ISSN: 1002-0829. DOI: 10.11919/j.issn.1002-0829.215044. URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4466856/> (visitado 28-06-2023).
- Soofi, Aized y Arshad Awan (ago. de 2017). “Classification Techniques in Machine Learning: Applications and Issues”. En: *Journal of Basic & Applied Sciences* 13, págs. 459-465. DOI: 10.6000/1927-5129.2017.13.76. URL: https://www.researchgate.net/publication/319370844_Classification_Techniques_in_Machine_Learning_Applications_and_Issues.
- Steinmetz, Helmuth, Günter Fürst y Bernd-Ulrich Meyer (jun. de 1989). “Cranio-cerebral topography within the international 10–20 system”. en. En: *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology* 72.6, págs. 499-506. ISSN: 0013-4694. DOI: 10.1016/0013-4694(89)90227-7. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0013469489902277> (visitado 15-04-2023).
- Suda, Reiji y Masayasu Takami (abr. de 2002). “A fast spherical harmonics transform algorithm”. en. En: *Mathematics of Computation* 71.238, págs. 703-715. ISSN: 0025-5718, 1088-6842. DOI: 10.1090/S0025-5718-01-01386-2. URL: <https://www.ams.org/mcom/2002-71-238/S0025-5718-01-01386-2/> (visitado 23-05-2023).
- Suter, Alice H. (ago. de 2017). “Occupational Hearing Loss from Non-Gaussian Noise”. en. En: *Seminars in Hearing* 38.3. Publisher: Thieme Medical Publishers, págs. 225-262. ISSN: 0734-0451, 1098-8955. DOI: 10.1055/s-0037-1603726. URL: <http://www.thieme-connect.de/DOI/DOI?10.1055/s-0037-1603726> (visitado 20-07-2023).
- Takaki, Yuto, Kosuke Mitarai, Makoto Negoro, Keisuke Fujii y Masahiro Kitagawa (mayo de 2021). “Learning temporal data with a variational quantum recurrent neural network”. En: *Physical Review A* 103.5. Publisher: American Physical Society, pág. 052414. DOI: 10.1103/PhysRevA.103.052414. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.103.052414>.
- Teplan, Michal (2002). “Fundamentals of EEG measurement”. En: *Measurement science review* 2.2, págs. 1-11.

- Teutsch, Heinz y Walter Kellermann (ene. de 2005). “Eigen-beam processing for direction-of-arrival estimation using spherical apertures”. En: *Hands-free Speech Commun. and Microphone Arrays*. Vol. 4.
- Tormos, Adrian, Dario Garcia-Gasulla, Victor Gimenez-Abalos y Sergio Alvarez-Napagao (nov. de 2022). *When & How to Transfer with Transfer Learning*. arXiv:2211.04347 [cs]. DOI: 10.48550/arXiv.2211.04347. URL: <http://arxiv.org/abs/2211.04347> (visitado 18-04-2023).
- Vaswani, Ashish, Noam Shazeer, Niki Parmar, Jakob Uszkoreit, Llion Jones, Aidan N. Gomez, Łukasz Kaiser e Illia Polosukhin (dic. de 2017). “Attention is all you need”. En: *Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems*. NIPS’17. Red Hook, NY, USA: Curran Associates Inc., págs. 6000-6010. ISBN: 978-1-5108-6096-4.
- Wang, Haohan y Bhiksha Raj (mar. de 2017). *On the Origin of Deep Learning*. arXiv:1702.07800 [cs, stat]. DOI: 10.48550/arXiv.1702.07800. URL: <http://arxiv.org/abs/1702.07800>.
- Wang, Wenhai, Jifeng Dai, Zhe Chen, Zhenhang Huang, Zhiqi Li, Xizhou Zhu, Xiaowei Hu, Tong Lu, Lewei Lu, Hongsheng Li, Xiaogang Wang y Yu Qiao (mar. de 2023). *InternImage: Exploring Large-Scale Vision Foundation Models with Deformable Convolutions*. arXiv:2211.05778 [cs]. DOI: 10.48550/arXiv.2211.05778. URL: <http://arxiv.org/abs/2211.05778>.
- Wiebe, Nathan, Ashish Kapoor y Krysta Svore (jul. de 2014). *Quantum Algorithms for Nearest-Neighbor Methods for Supervised and Unsupervised Learning*. arXiv:1401.2142 [quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.1401.2142. URL: <http://arxiv.org/abs/1401.2142> (visitado 20-04-2023).
- Wiener, Norbert (1964). *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series: With Engineering Applications*. en. Google-Books-ID: _QldNQEACAAJ. M.I.T. Press. ISBN: 978-0-262-73005-1.
- Woschank, Manuel, Erwin Rauch y Helmut Zsifkovits (ene. de 2020). “A Review of Further Directions for Artificial Intelligence, Machine Learning, and Deep Learning in Smart Logistics”. en. En: *Sustainability* 12.9. Number: 9 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute, pág. 3760. ISSN: 2071-1050. DOI: 10.3390/su12093760. URL: <https://www.mdpi.com/2071-1050/12/9/3760> (visitado 06-07-2023).

- Wu, Shaojun, Shan Jin, Dingding Wen, Donghong Han y Xiaoting Wang (ene. de 2023). *Quantum reinforcement learning in continuous action space*. arXiv:2012.10711 [quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.2012.10711. URL: <http://arxiv.org/abs/2012.10711>.
- Xie, Xiaofeng, Yao Hou, Rongnian Tang, Yizhen Wang, Songyuan Xiao y Junzhe Huang (oct. de 2021). “Decoding of motor intention from Brain EEG signal via local spatial sparse pattern”. En: *2021 5th Asian Conference on Artificial Intelligence Technology (ACAIT)*, págs. 786-790. DOI: 10.1109/ACAIT53529.2021.9731143.
- Xie, Yu y Stefan Oniga (sep. de 2020). “A Review of Processing Methods and Classification Algorithm for EEG Signal”. en. En: *Carpathian Journal of Electronic and Computer Engineering* 13.1, págs. 23-29. DOI: 10.2478/cjece-2020-0004. URL: <https://sciendo.com/article/10.2478/cjece-2020-0004> (visitado 19-04-2023).
- Yayik, Apdullah, Yakup Kutlu y Gökhan Altan (jul. de 2019). *Deep Learning with ConvNET Predicts Imagery Tasks Through EEG*. arXiv:1907.05674 [cs, eess]. DOI: 10.48550/arXiv.1907.05674. URL: <http://arxiv.org/abs/1907.05674> (visitado 18-04-2023).
- Ye, Jieping, Ravi Janardan y Qi Li (2004). “Two-Dimensional Linear Discriminant Analysis”. En: *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 17. MIT Press. URL: https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2004/hash/86ecfcbc1e9f1ae5ee2d71910877da36-Abstract.html.
- Yuan, Xiao, Suguru Endo, Qi Zhao, Ying Li y Simon Benjamin (oct. de 2019). “Theory of variational quantum simulation”. En: *Quantum* 3. arXiv:1812.08767 [quant-ph], pág. 191. ISSN: 2521-327X. DOI: 10.22331/q-2019-10-07-191. URL: <http://arxiv.org/abs/1812.08767> (visitado 20-04-2023).
- Zabidi, A., W. Mansor, Y. K. Lee y C. W. N. F. Che Wan Fadzal (sep. de 2012). “Short-time Fourier Transform analysis of EEG signal generated during imagined writing”. En: *2012 International Conference on System Engineering and Technology (ICSET)*, págs. 1-4. DOI: 10.1109/ICSEngT.2012.6339284.
- Zaremba, Wojciech, Ilya Sutskever y Oriol Vinyals (feb. de 2015). *Recurrent Neural Network Regularization*. arXiv:1409.2329 [cs]. DOI: 10.48550/arXiv.1409.2329. URL: <http://arxiv.org/abs/1409.2329>.
- Zhang, Chi, Li Tong, Ying Zeng, Jingfang Jiang, Haibing Bu, Bin Yan y Jianxin Li (ago. de 2015). “Automatic Artifact Removal from Electroencephalogram Data Based on A Priori Artifact Information”. en. En: *BioMed Research International* 2015. Publisher:

Hindawi, e720450. ISSN: 2314-6133. DOI: 10.1155/2015/720450. URL: <https://www.hindawi.com/journals/bmri/2015/720450/> (visitado 18-04-2023).

Zhang, Kaishuo, Neethu Robinson, Seong-Whan Lee y Cuntai Guan (abr. de 2021). “Adaptive transfer learning for EEG motor imagery classification with deep Convolutional Neural Network”. en. En: *Neural Networks* 136, págs. 1-10. ISSN: 0893-6080. DOI: 10.1016/j.neunet.2020.12.013. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893608020304305>.

Zoufal, Christa, Aurélien Lucchi y Stefan Woerner (jun. de 2021). “Variational Quantum Boltzmann Machines”. En: *Quantum Machine Intelligence* 3.1. arXiv:2006.06004 [quant-ph], pág. 7. ISSN: 2524-4906, 2524-4914. DOI: 10.1007/s42484-020-00033-7. URL: <http://arxiv.org/abs/2006.06004>.

A. Apéndices

A.1. Notación *big O*

Dado un algoritmo, que recibe una entrada determinada, resulta interesante de cara a la determinación de su eficiencia el saber cuanto espacio de memoria adicional utiliza o cuanto tiempo tarda de más, al aumentar el dominio de dicha entrada.

En el peor de los casos, el coste del algoritmo será inferior a cierto conjunto de funciones. De esta, la que menos crecimiento presenta es la que define lo que se denomina “complejidad asintótica” del algormimo.

La manera más habitual de expresar la complejidad asintótica, es la notación *big O*, que se escribe de la forma $O(f)$ donde f es la función que delimita la complejidad asintótica del algoritmo. Esta complejidad puede representar las unidades espaciales o temporales según interese analizar.

A continuación se muestra una tabla con las funciones de complejidad asintótica utilizadas más habitualmente expresadas en notación *big O*:

Notación	Denominación
$O(1)$	Constante
$O(\log n)$	Logarítmica
$O((\log n)^c)$	Polilogarítmica
$O(n)$	Lineal
$O(n \log n)$	Linear logarítmica
$O(n^2)$	Cuadrática
$O(n^c)$	Polinomial
$O(c^n)$	Exponencial
$O(n!)$	Factorial

Donde n indica el tamaño del problema y c una constante.

A.2. Identidades trigonométricas

Listado de las identidades trigonométricas que se han utilizado en este trabajo:

$$\text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{cos}(\theta)$$

$$\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}(\theta)$$

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha)\text{cos}(\beta) \pm \text{sen}(\beta)\text{cos}(\alpha)$$

$$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos}(\alpha)\text{cos}(\beta) \pm \text{sen}(\beta)\text{sen}(\alpha)$$

$$\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta)$$

$$\text{cos}(2\theta) = \text{cos}^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)$$

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{1 - \text{cos}(2\theta)}{2}$$

$$\text{cos}^2(\theta) = \frac{1 + \text{cos}(2\theta)}{2}$$

A.3. Potencias de Binomios

A continuación se muestran dos listados de las primeras potencias de suma y resta de binomios:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$\begin{aligned}
 (a - b)^0 &= 1 \\
 (a - b)^1 &= a - b \\
 (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
 (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 (a - b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
 (a - b)^5 &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 4ab^4 - b^5 \\
 (a - b)^6 &= a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\
 (a - b)^7 &= a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7
 \end{aligned}$$

A.4. Formulación completa de los armónicos esféricos

Los armónicos esféricos surgen de la solución a la ecuación de Laplace de la posición expresada en coordenadas esféricas, es decir:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$$

Para resolver esta ecuación se hace una separación en dos funciones, una con la parte radial y otra con la parte angular:

$$f(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)Y(\theta, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial R(r)Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 R(r)Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 Y(\theta, \varphi) \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta R(r) \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} R(r) \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} &= 0 \\
 Y(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} R(r) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} R(r) \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Si se divide esta última expresión por $Y(\theta, \varphi)R(r)$ se obtiene:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \varphi) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \varphi) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

Haciendo separación de variables:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \lambda$$

$$\frac{1}{Y(\theta, \varphi) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi Y(\theta, \varphi)} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = -\lambda$$

Por conveniencia, como se verá más adelante, conviene trabajar con el cambio de variable $\lambda = l(l + 1)$. Así, se tendrá:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = l(l + 1)$$

$$\frac{1}{Y(\theta, \varphi) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi Y(\theta, \varphi)} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = -l(l + 1)$$

La primera ecuación contiene la parte radia y se puede desarrollar de la siguiente sforma:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - l(l + 1)R(r) = 0$$

$$2r \frac{dR(r)}{dr} + r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} - l(l + 1)R(r) = 0$$

Cuya solución es del tipo r^s y que sustituyendo otra vez en la ecuación resuelta se obtendrá:

$$R(r) = \begin{cases} r^l \\ r^{-l-1} \end{cases}$$

Aplicando separación de variables de nuevo en la segunda ecuación de la forma $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2$$

$$l(l + 1) \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = m^2$$

La solución a la primera ecuación es del tipo $\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$ para $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Dado que $\Phi(\varphi)$ es periódica ($\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$), necesariamente $m \in \mathbb{N}$.

Multiplicando la segunda ecuación por $\frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta}$ y reordenando términos, se tiene:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left(l(l + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0$$

Que se corresponde con la ecuación de los polinomios asociados de Legendre para:

$$\Theta(\theta) = P_l^m(\cos \theta)$$

Así la solución general buscada es de la forma:

$$f(r, \theta, \varphi) = \begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{Bmatrix} P_l^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} e^{im\varphi} \\ e^{-im\varphi} \end{Bmatrix}$$

Los armónicos esféricos, eligiendo un r de modos que queden normalizados, quedan así definidos por la siguiente expresión:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta)$$

A.5. Primeros polinomios asociados de Legendre

$$P_0^0(\cos\theta) = +1$$

$$P_1^0(\cos\theta) = +\cos\theta$$

$$P_1^1(\cos\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

$$P_2^0(\cos\theta) = +\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$P_2^1(\cos\theta) = -3\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

$$P_2^2(\cos\theta) = +3\operatorname{sen}^2\theta$$

$$P_3^0(\cos\theta) = +\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$\begin{aligned} P_3^1(\cos\theta) &= -\frac{3}{2}(5\cos^2\theta - 1)\operatorname{sen}\theta \\ &= -\frac{3}{2}(5\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

$$P_3^2(\cos\theta) = +15\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$$

$$P_3^3(\cos\theta) = -15\operatorname{sen}^3\theta$$

$$P_4^0(\cos\theta) = +\frac{1}{8}(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3)$$

$$\begin{aligned} P_4^1(\cos\theta) &= -\frac{5}{2}(7\cos^3\theta - 3\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \\ &= -\frac{5}{2}(7\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta - 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4^2(\cos\theta) &= +\frac{15}{2}(7\cos^2\theta - 1)\operatorname{sen}^2\theta \\ &= +\frac{15}{2}(7\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \end{aligned}$$

$$P_4^3(\cos\theta) = -105\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta$$

$$P_4^4(\cos\theta) = +105\operatorname{sen}^4\theta$$

$$P_5^0(\cos\theta) = +\frac{63}{8}\cos^5(\theta) - 70\cos^3(\theta) + 15\cos(\theta)$$

$$P_5^1(\cos\theta) = +\frac{15}{8}(-21\cos^4(\theta) + 14\cos^2(\theta) - 1)\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\begin{aligned}
 &= +\frac{15}{8} (-21 \operatorname{sen}(\theta) \cos^4(\theta) + 14 \operatorname{sen}(\theta) \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)) \\
 P_5^2(\cos\theta) &= +\frac{105}{2} \cdot (2 - 3 \sin^2(\theta)) \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\theta) \\
 &= +\frac{105}{2} \cdot (2 \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\theta) - 3 \operatorname{sen}^4(\theta) \cos(\theta)) \\
 P_5^3(\cos\theta) &= +\frac{105}{2} \cdot (1 - 9 \cos^2(\theta)) \operatorname{sen}^3(\theta) \\
 &= +\frac{105}{2} \cdot (\operatorname{sen}^3(\theta) - 9 \operatorname{sen}^3(\theta) \cos^2(\theta)) \\
 P_5^4(\cos\theta) &= +945 \operatorname{sen}^4(\theta) \cos(\theta) \\
 P_5^5(\cos\theta) &= -945 \operatorname{sen}^5(\theta)
 \end{aligned}$$

A.6. Listado de primeros armónicos esféricos

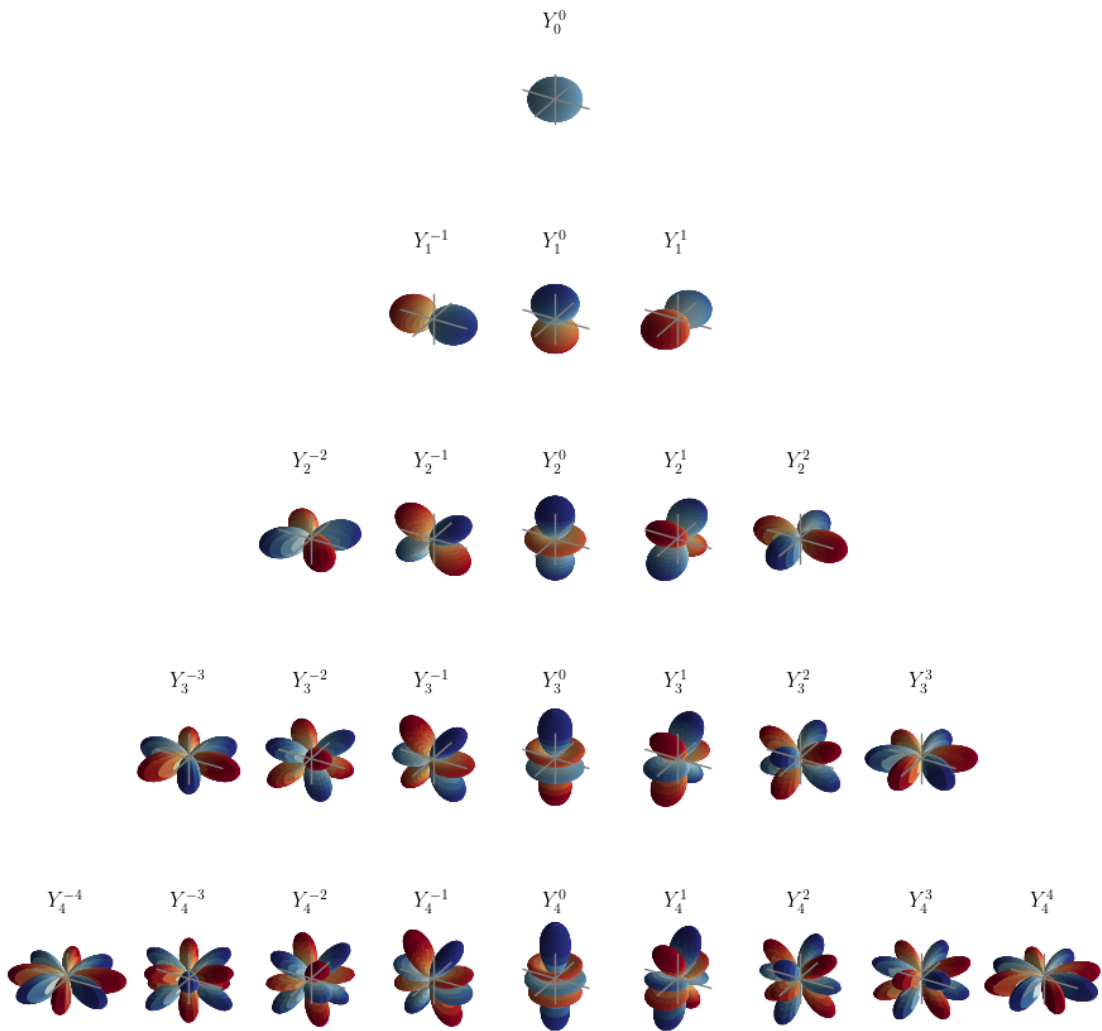
$$\begin{aligned}
 Y_0^0 &= +\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \\
 Y_1^{-1} &= +\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-i\phi} \operatorname{sen}(\theta) \\
 Y_1^0 &= +\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos(\theta) \\
 Y_1^1 &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{i\phi} \operatorname{sen}(\theta) \\
 Y_2^{-2} &= +\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{-2i\phi} \operatorname{sen}^2(\theta) \\
 Y_2^{-1} &= +\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{-i\phi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \\
 Y_2^0 &= +\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2(\theta) - 1) \\
 Y_2^1 &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{i\phi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \\
 Y_2^2 &= +\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} e^{2i\phi} \operatorname{sen}^2(\theta) \\
 Y_3^{-3} &= +\frac{1}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}} e^{-3i\phi} \operatorname{sen}^3(\theta) \\
 Y_3^{-2} &= +\frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} e^{-2i\phi} \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\theta) \\
 Y_3^{-1} &= +\frac{1}{8} \sqrt{\frac{21}{\pi}} e^{-i\phi} \operatorname{sen}(\theta) (5 \cos^2(\theta) - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_3^0 &= + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} (5 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)) \\
 Y_3^1 &= - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{21}{\pi}} e^{i\phi} \operatorname{sen}(\theta) (5 \cos^2(\theta) - 1) \\
 Y_3^2 &= + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} e^{2i\phi} \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\theta) \\
 Y_3^3 &= - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}} e^{3i\phi} \operatorname{sen}^3(\theta) \\
 Y_4^{-4} &= + \frac{3\sqrt{70}}{32\sqrt{\pi}} e^{-4i\phi} \sin^4(\theta) \\
 Y_4^{-3} &= + \frac{3\sqrt{35}}{8\sqrt{\pi}} e^{-3i\phi} \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\
 Y_4^{-2} &= - \frac{3\sqrt{10}}{16\sqrt{\pi}} \cdot e^{-2i\phi} \sin^2(\theta) (7 \sin^2(\theta) - 6) \\
 Y_4^{-1} &= + \frac{3\sqrt{5}}{64\sqrt{\pi}} \cdot e^{-i\phi} (2 \sin(2\theta) + 7 \sin(4\theta)) \\
 Y_4^0 &= + \frac{3}{16\sqrt{\pi}} \cdot (35 \cos^4(\theta) - 30 \cos^2(\theta) + 3) \\
 Y_4^1 &= - \frac{3\sqrt{5}}{64\sqrt{\pi}} \cdot e^{i\phi} (2 \sin(2\theta) + 7 \sin(4\theta)) \\
 Y_4^2 &= - \frac{3\sqrt{10}}{16\sqrt{\pi}} \cdot e^{2i\phi} \sin^2(\theta) (7 \sin^2(\theta) - 6) \\
 Y_4^3 &= - \frac{3\sqrt{35}}{8\sqrt{\pi}} e^{3i\phi} \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\
 Y_4^4 &= + \frac{3\sqrt{70}}{32\sqrt{\pi}} e^{4i\phi} \sin^4(\theta) \\
 Y_5^{-5} &= + \frac{3\sqrt{77}}{32\sqrt{\pi}} e^{-5i\phi} \sin^5(\theta) \\
 Y_5^{-4} &= + \frac{3\sqrt{770}}{32\sqrt{\pi}} e^{-4i\phi} \sin^4(\theta) \cos(\theta) \\
 Y_5^{-3} &= + \frac{\sqrt{385}}{32\sqrt{\pi}} \cdot e^{-3i\phi} \sin^3(\theta) (9 \cos^2(\theta) - 1) \\
 Y_5^{-2} &= - \frac{\sqrt{2310}}{16\sqrt{\pi}} \cdot e^{-2i\phi} \sin^2(\theta) \cos(\theta) (3 \sin^2(\theta) - 2) \\
 Y_5^{-1} &= + \frac{\sqrt{330}}{32\sqrt{\pi}} \cdot e^{-i\phi} \sin(\theta) (21 \cos^4(\theta) - 14 \cos^2(\theta) + 1) \\
 Y_5^0 &= + \frac{\sqrt{11}}{16\sqrt{\pi}} \cdot (63 \cos^4(\theta) - 70 \cos^2(\theta) + 15) \cos(\theta) \\
 Y_5^1 &= - \frac{\sqrt{330}}{32\sqrt{\pi}} \cdot e^{i\phi} \sin(\theta) (21 \cos^4(\theta) - 14 \cos^2(\theta) + 1) \\
 Y_5^2 &= - \frac{\sqrt{2310}}{16\sqrt{\pi}} \cdot e^{2i\phi} \sin^2(\theta) \cos(\theta) (3 \sin^2(\theta) - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_5^3 &= -\frac{\sqrt{385}}{32\sqrt{\pi}} \cdot e^{3i\phi} \sin^3(\theta) (9 \cos^2(\theta) - 1) \\
 Y_5^4 &= +\frac{3\sqrt{770}}{32\sqrt{\pi}} e^{4i\phi} \sin^4(\theta) \cos(\theta) \\
 Y_5^5 &= -\frac{3\sqrt{77}}{32\sqrt{\pi}} e^{5i\phi} \sin^5(\theta)
 \end{aligned}$$

A.7. Representación gráfica de los armónicos esféricos

Gráficas de los armónicos esféricos obtenidas mediante la adaptación del código en <https://scipython.com/blog/visualizing-the-real-forms-of-the-spherical-harmonics/>.



A.8. Coordenadas esféricas de los electrodos.

A continuación, se muestra una tabla con los datos de los ángulos (expresados en grados) de las coordenadas esféricas de los electrodos correspondientes a los datos de electroencefalogramas utilizados en este trabajo:

Electrodo	Coordenada Azimutal	Coordenada polar	Electrodo	Coordenada Azimutal	Coordenada polar
Fc5	-71	-21	F1	-50	-68
Fc3	-50	-28	Fz	46	90
Fc1	-32	-45	F2	50	68
Fcz	23	90	F4	60	51
Fc2	32	45	F6	75	41
Fc4	50	28	F8	92	36
Fc6	71	21	Ft7	-92	-18
C5	-69	0	Ft8	92	18
C3	-46	0	T7	-92	0
C1	23	0	T8	92	0
Cz	0	0	T9	-115	0
C2	23	0	T10	115	0
C4	46	0	Tp7	-92	18
C6	69	0	Tp8	92	-18
Cp5	-71	21	P7	-92	36
Cp3	-50	28	P5	-75	41
Cp1	-32	45	P3	-60	51
Cpz	23	-90	P1	-50	68
Cp2	32	-45	Pz	46	-90
Cp4	50	-28	P2	50	-68
Cp6	71	-21	P4	60	-51
Fp1	-92	-72	P6	75	-41
Fpz	92	90	P8	92	-36
Fp2	92	72	Po7	-92	54
Af7	-92	-52	Po3	-74	67
Af3	-74	-67	Poz	69	-90
Afz	69	90	Po4	74	-67
Af4	74	67	Po8	92	-54
Af8	92	52	O1	-92	72
F7	-92	-36	Oz	92	-90
F5	-75	-41	O2	92	-72
F3	-60	-51	Iz	115	-90

A.9. Tabla con los datos de error de la evaluación de armónicos esféricos utilizando un procesador cuántico real

- Número de cúbits: 4.
- Número de ejecuciones de los circuitos cuánticos: 20000.
- Electrodo para los que se han realizado los cálculos: Fc5, Cz, C2, C6, Fc4, F2.

<i>Fc5</i>			<i>Cz</i>		
Armónico Esférico	Error \mathbb{R}	Error \mathbb{I}	Armónico Esférico	Error \mathbb{R}	Error \mathbb{I}
Y_1^0	0,11894072		Y_1^0	0,00185669	
Y_1^1	0,03512517	0,07655630	Y_1^1	0,02390339	0,00126931
Y_2^0	0,23533486		Y_2^0	0,01608497	
Y_2^1	0,07644008	0,18272265	Y_2^1	0,05324649	0,00282748
Y_2^2	0,02727659	0,01989725	Y_2^2	0,00155518	0,00009277
Y_3^0	0,17142730		Y_3^0	0,05209542	
Y_3^1	0,11242097	0,24962986	Y_3^1	0,11865545	0,00630082
Y_3^2	0,00213037	0,01784744	Y_3^2	0,02682123	0,00159994
Y_3^3	0,00785901	0,00931434	Y_3^3	0,00753021	0,00038166
Y_4^0	0,00297002		Y_4^0	0,10673762	
Y_4^1	0,14527816	0,36050933	Y_4^1	0,19007655	0,01009340
Y_4^2	0,32607624	0,33332530	Y_4^2	0,10107845	0,00602953
Y_4^3	0,02818656	0,02744266	Y_4^3	0,02250477	0,00114063
Y_4^4	0,00954596	0,03849122	Y_4^4	0,00207891	0,00008934
<i>C2</i>			<i>C6</i>		
Armónico Esférico	Error \mathbb{R}	Error \mathbb{I}	Armónico Esférico	Error \mathbb{R}	Error \mathbb{I}
Y_1^0	0,00251630		Y_1^0	0,00219871	
Y_1^1	0,01056814	0,00069123	Y_1^1	0,00104242	0,00993339
Y_2^0	0,01953851		Y_2^0	0,01996429	
Y_2^1	0,02350938	0,00153768	Y_2^1	0,00232044	0,02211178
Y_2^2	0,00017197	0,00018651	Y_2^2	0,00016451	0,00004871
Y_3^0	0,06168605		Y_3^0	0,06455951	
Y_3^1	0,04434508	0,00290048	Y_3^1	0,00239774	0,02284844
Y_3^2	0,00940308	0,01019829	Y_3^2	0,02855329	0,00845403
Y_3^3	0,00015761	0,00131055	Y_3^3	0,00511914	0,00419355
Y_4^0	0,12569968		Y_4^0	0,12964019	
Y_4^1	0,06737794	0,00440699	Y_4^1	0,00261824	0,02494961
Y_4^2	0,04143226	0,04493613	Y_4^2	0,14107722	0,04176999
Y_4^3	0,00047040	0,00391140	Y_4^3	0,01528831	0,01252405
Y_4^4	0,00077656	0,00149741	Y_4^4	0,00095687	0,00260345

<i>Fc4</i>			<i>F2</i>		
Armónico Esférico	Error \mathbb{R}	Error \mathbb{I}	Armónico Esférico	Error \mathbb{R}	Error \mathbb{I}
Y_1^0	0,12776838		Y_1^0	0,11186876	
Y_1^1	0,08628087	0,09446583	Y_1^1	0,14790329	0,15476933
Y_2^0	0,24727940		Y_2^0	0,09828872	
Y_2^1	0,18085983	0,20392367	Y_2^1	0,15358701	0,17603733
Y_2^2	0,00043079	0,06115770	Y_2^2	0,06132677	0,15423709
Y_3^0	0,13918405		Y_3^0	0,21094795	
Y_3^1	0,24006737	0,26631116	Y_3^1	0,05708445	0,06788957
Y_3^2	0,04970826	0,07025280	Y_3^2	0,00510742	0,23371237
Y_3^3	0,01416770	0,01972000	Y_3^3	0,10145379	0,15210755
Y_4^0	0,17879572		Y_4^0	0,61996527	
Y_4^1	0,28000658	0,31987643	Y_4^1	0,19471426	0,22523440
Y_4^2	0,21120731	0,07636342	Y_4^2	0,41954607	0,60550008
Y_4^3	0,05574385	0,05369884	Y_4^3	0,24215093	0,18067523
Y_4^4	0,03341359	0,03480638	Y_4^4	0,11430801	0,03293320