



Universidad Internacional de La Rioja  
Facultad de Educación

Máster Universitario en Didáctica de las Matemáticas  
en Educación Secundaria y Bachillerato

**Enseñanza de semejanza y trigonometría  
mediante metodologías activas y  
participativas en cuarto de la ESO**

Trabajo fin de estudio presentado por: Antonio Ricart Torres

Tipo de trabajo: Propuesta de intervención didáctica

Director/a: Daniel Moreno Mediavilla

Fecha: 19 de julio de 2023

## Resumen

La figura del profesor es fundamental en el sistema educativo, ya que es responsable de guiar y transmitir los conocimientos necesarios a sus estudiantes. Sin embargo, la sociedad tiende a evaluar su desempeño en función de los resultados, lo que ha llevado a que recaiga sobre él la mayor parte del peso de las clases. En el contexto español, los resultados actuales en matemáticas han evidenciado la necesidad de introducir cambios en el modelo pedagógico, especialmente en el bloque de geometría, que ha perdido su enfoque práctico, generando dificultades en los estudiantes. Ante esta situación, surge la propuesta de modificar el papel tanto del profesor como del alumno, de modo que se promueva la construcción del conocimiento a través de un enfoque educativo más práctico y centrado en el estudiante. En este contexto, este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo diseñar una propuesta de intervención para la enseñanza-aprendizaje de semejanza y trigonometría en cuarto de la ESO. La propuesta de intervención incorpora metodologías participativas y activas, como el modelo *Flipped Classroom* y el aprendizaje cooperativo, con el fin de fomentar un aprendizaje significativo y motivador para los estudiantes, siguiendo un enfoque constructivista. Así, se busca involucrar a los alumnos en su proceso de aprendizaje, promoviendo la aplicación de los conocimientos adquiridos en situaciones reales y haciendo uso de las tecnologías de la información y la comunicación para lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje más efectivo y dinámico, donde los estudiantes sean los protagonistas de su propio aprendizaje y se fomente el trabajo en equipo y la cooperación.

**Palabras clave:** trigonometría, aprendizaje activo, *Flipped Classroom*, aprendizaje cooperativo, situaciones reales.

## Abstract

The figure of the teachers is essential in the educational system, as they are responsible for guiding and transmitting the necessary knowledge to their students. However, society tends to evaluate their performance based on results, which has led to the teacher bearing the brunt of the weight of classes. In the Spanish context, current results in mathematics have highlighted the need to introduce changes in the pedagogical model, especially in the geometry block, which has lost its practical focus, generating difficulties for students. In response to this situation, the proposal arises to modify the role of both the teacher and the student, in order to promote the construction of knowledge through a student-centered educational approach. In this context, the objective of this Master's Thesis is to design an intervention proposal for the teaching-learning of similarity and trigonometry in the fourth grade of ESO. The intervention proposal incorporates participatory and active methodologies, such as the Flipped Classroom model and cooperative learning, in order to promote meaningful and motivating learning for students, following a constructivist approach. The aim is to involve students in their own learning process, promoting the application of acquired knowledge in real situations and making use of information and communication technologies. In this way, a more effective and dynamic teaching-learning process is expected to be achieved, where students are the protagonists of their own learning and teamwork cooperation is encouraged.

**Keywords:** trigonometry, active learning, Flipped Classroom, cooperative learning, real situations.

## Índice de contenidos

<b>1. Introducción.....</b>	<b>6</b>
1.1. Justificación.....	7
1.2. Planteamiento del problema.....	9
1.3. Objetivos del TFE.....	11
1.3.1. Objetivo general.....	11
1.3.2. Objetivos específicos.....	11
<b>2. Marco teórico.....</b>	<b>12</b>
2.1. Estado de la cuestión.....	12
2.2. Marco conceptual.....	15
2.2.1. Modelos y teorías constructivistas.....	15
2.2.1.1. El constructivismo según Jean Piaget.....	15
2.2.1.2. El constructivismo según Lev Vigotsky.....	16
2.2.2. Aprendizaje significativo.....	17
2.2.2.1. Aprendizaje significativo de Ausubel.....	17
2.2.2.2. Factores que favorecen un aprendizaje significativo en el aula.....	19
2.2.3. Aprendizaje basado en metodologías activas.....	20
2.2.4. Modelo Flipped Classroom.....	22
2.2.5. La taxonomía de Bloom en el modelo Flipped Classroom.....	28
2.2.6. Aprendizaje cooperativo.....	30
2.2.6.1. Beneficios, roles y actitudes del aprendizaje cooperativo.....	30
2.2.6.2. Técnicas de aprendizaje cooperativo.....	33
2.2.7. Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas.....	37
2.2.7.1. Origen y clasificación.....	37
2.2.7.2. Dificultades y errores asociados a la trigonometría.....	39
<b>3. Propuesta didáctica.....</b>	<b>42</b>
3.1. Presentación y contextualización de la propuesta.....	42
3.2. Marco legislativo.....	42
3.2.1. Objetivos de la etapa.....	43
3.2.2. Competencias clave.....	43
3.2.3. Objetivos específicos.....	45
3.2.4. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables....	46
3.3. Objetivos.....	49
3.4. Contenidos.....	50
3.5. Metodología.....	51
3.6. Temporalización.....	53
3.7. Recursos.....	54

3.8. Actividades.....	59
3.9. Evaluación.....	70
<b>4. Conclusiones.....</b>	<b>71</b>
<b>5. Limitaciones y prospectiva.....</b>	<b>73</b>
<b>6. Referencias bibliográficas.....</b>	<b>75</b>
<b>7. Anexo A. Evaluación.....</b>	<b>82</b>
<b>8. Anexo B. Situaciones de aprendizaje en entornos reales.....</b>	<b>85</b>
<b>9. Anexo C. Enunciados de prácticas y problemas propuestos.....</b>	<b>94</b>

## Índice de figuras

Figura 1. Evolución de las puntuaciones medias estimadas en matemáticas.....	9
Figura 2. Zona de desarrollo próximo.....	17
Figura 3. Comparativa entre el aprendizaje mecánico y el significativo.....	18
Figura 4. Factores que favorecen el aprendizaje significativo en el aula.....	20
Figura 5. Comparación entre el modelo tradicional y el aula invertida.....	24
Figura 6. Flipped Classroom: Actividades propuestas.....	27
Figura 7. Niveles cognitivos de la Taxonomía de Bloom revisada por Krathwohl.....	29
Figura 8. Técnicas de aprendizaje cooperativo.....	34
Figura 9. Clasificación de las dificultades.....	37
Figura 10. Plinto de Ptolomeo.....	86
Figura 11. Carta solar Exeter.....	87
Figura 12. Inclinación de la Tierra respecto el plano de la eclíptica.....	88
Figura 13. Cuadrante casero.....	88
Figura 14. Escuadra láser.....	89
Figura 15. T3: Medir la altura de una farola.....	90
Figura 16. T4: Medir un ángulo horizontal.....	91
Figura 17. T5: Medir distancia hasta la portería de fútbol.....	91
Figura 18. T6: Medir la altura de una ventana de pie inaccesible.....	92
Figura 19. T7: Medir la distancia entre dos columnas a las que no podemos acceder.....	93
Figura 20. Homotecias con GeoGebra.....	97
Figura 21. Posición de Thales con GeoGebra.....	98

## Índice de tablas

Tabla 1. Clasificación de las dificultades y los errores en trigonometría.....	40
Tabla 2. Objetivos específicos.....	45
Tabla 3. Contenidos, objetivos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje y competencias clave del Bloque 1.....	47
Tabla 4. Contenidos, objetivos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje y competencias clave del Bloque 3.....	48
Tabla 5. Relación entre los Contenidos y los Objetivos específicos.....	50
Tabla 6. Temporalización de las sesiones.....	53
Tabla 7. Relación de vídeos para la presentación de los contenidos.....	54
Tabla 8. Relación de los materiales manipulativos.....	56
Tabla 9. Relación de los recursos TIC.....	58
Tabla 10. Actividades de la sesión 1.....	59
Tabla 11. Actividades de la sesión 2.....	60
Tabla 12. Actividades de la sesión 3.....	61
Tabla 13. Actividades de las sesiones 4, 5 y 6.....	62
Tabla 14. Actividades de la sesión 7.....	63
Tabla 15. Actividades de la sesión 8.....	64
Tabla 16. Actividades de la sesión 9.....	65
Tabla 17. Actividades de la sesión 10.....	66
Tabla 18. Actividades de la sesión 11.....	67
Tabla 19. Actividades de las sesiones 12, 13 y 14.....	68
Tabla 20. Actividades de la sesión 15.....	69
Tabla 21. Rúbrica de prácticas y problemas.....	82
Tabla 22. Rúbrica del documento y la exposición de la situación de aprendizaje.....	83
Tabla 23. Escala de observación para la evaluación del trabajo en grupo.....	84
Tabla 24. Situación de aprendizaje: La semejanza en el patio.....	85
Tabla 25. Situación de aprendizaje: La trigonometría en el patio.....	90
Tabla 26. Test de conocimientos previos.....	94
Tabla 27. Prácticas y problemas del bloque de Semejanza.....	95
Tabla 28. Práctica de Semejanza con GeoGebra.....	97
Tabla 29. Prácticas y problemas del bloque de Trigonometría.....	98

## 1. Introducción

El presente Trabajo de Fin de Máster se encuentra organizado en diversas secciones con el fin de abordar de manera rigurosa y estructurada los objetivos propuestos. En primer lugar, se expone una introducción en la que se justifican los motivos del estudio, se identifican los problemas que se pretenden resolver y se establecen los objetivos del TFM. A continuación, se presenta un marco teórico que analiza el estado actual de la cuestión y proporciona una base conceptual sólida para el desarrollo de la propuesta de intervención. En la siguiente sección, se detallan todos los aspectos relevantes para la implementación de la intervención propuesta. Por último, se incluyen las conclusiones del estudio y un análisis exhaustivo de las limitaciones que se han identificado en el trabajo presentado.

### 1.1. Justificación

La enseñanza de las matemáticas durante los estudios de secundaria en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) tiene múltiples justificaciones a nivel curricular, entre ellas, destacamos la de buscar y desarrollar habilidades analíticas y estrategias de resolución de problemas como, por ejemplo, la capacidad de descomponer problemas complejos en componentes más simples y aplicar la lógica y la razón a las situaciones que se deben resolver (García-Rubio, 2018).

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje los estudiantes desarrollan habilidades de pensamiento crítico, tales como la capacidad de evaluar y analizar información, así como la capacidad de formular y evaluar argumentos que pueden llevar al éxito en numerosas situaciones prácticas. Por todo ello, las matemáticas son una herramienta muy útil en la vida cotidiana puesto que nos ayudan a comprender y resolver una amplia variedad de situaciones prácticas.

Por último, las matemáticas son una disciplina fundamental utilizada en una amplia variedad de carreras y disciplinas académicas. Por lo tanto, es esencial que los estudiantes tengan una sólida comprensión de los conceptos matemáticos para tener éxito en la formación profesional y en la educación superior.



Uno de los grandes bloques que encontramos dentro de la materia de las matemáticas es la geometría. La geometría ha sido considerada como un pilar fundamental en la educación y la cultura de los individuos debido a su amplia aplicación en diversos contextos y su capacidad para desarrollar habilidades cognitivas y de razonamiento (Briceño y Alamillo, 2017). Pero su papel ha sido relegado, en la enseñanza tradicional, a la memorística de fórmulas y su aplicación algorítmica dejando de lado la manipulación, desarrollo visual y la reflexión a la hora de elaborar diversas estrategias de resolución.

Un apartado de especial dificultad dentro de la geometría es el estudio de la trigonometría, que aparece en la enseñanza secundaria y tiene un peso importante en la materia. Esta afirmación puede objetivarse en otros estudios tal como apuntan Martín et al. (2016) en su trabajo donde afirman que “la trigonometría es un contenido escolar que resulta difícil de entender por los estudiantes” (p. 52). En ese sentido, la trigonometría es exigente, conforma una estructura de gran riqueza que interconecta diversas nociones y se vincula con otras estructuras matemáticas y disciplinas. Por ello, resulta de vital importancia que los conceptos esenciales y sus significados deben de quedar claros puesto que, si no, generan confusión en el alumnado a la hora de seguir construyendo conocimiento en cursos superiores.

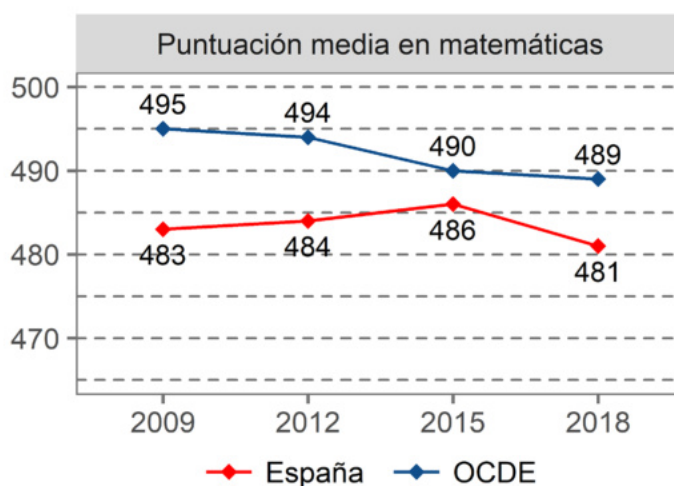
En consecuencia, con el escenario planteado, se presenta en este documento un diseño de propuesta de intervención para la enseñanza-aprendizaje de semejanza y trigonometría para cuarto de la ESO. El diseño de la propuesta se ha realizado siguiendo las recomendaciones del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), a propósito de la publicación *Principles to Actions* (2014), donde se especifica que el éxito en matemáticas para todos los miembros de la comunidad educativa involucra el papel del profesor como promotor de una enseñanza efectiva, facilitador de materiales físicos o virtuales y experiencias donde el alumno pueda desarrollar su conocimiento colaborando con el resto para resolver desafíos comunes y darse apoyo mutuo.

## 1.2.Planteamiento del problema

Partiendo de la situación educativa actual a nivel nacional en España, se puede constatar que los alumnos experimentan dificultades frente a la materia de matemáticas y se evidencia que a día de hoy queda margen de mejora en los procesos de enseñanza-aprendizaje de geometría en el aula.

Según los resultados del informe PISA 2018 (OCDE, 2019), España obtuvo una puntuación media de 481 puntos en matemáticas, lo que sitúa al país por debajo de la media de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), con 489 puntos, y de la media de la Unión Europea, con 499 puntos.

**Figura 1.** Evolución de las puntuaciones medias estimadas en matemáticas



Fuente: Informe PISA 2018 (OCDE 2018).

Observando la evolución en los últimos diez años de las puntuaciones estimadas en matemáticas, se vislumbra que España, con 481 puntos, está por debajo de los 483 puntos alcanzados en 2009, rompiendo una tendencia al alza que permanecía desde entonces. Así, podemos ver que la materia de matemáticas necesita de apoyo por parte de las instituciones españolas, los centros y la comunidad educativa para la mejora de los resultados.

En cuanto a cómo se presenta la Geometría en el ámbito educativo en el artículo de Ávila y Garcés-Perdomo (2020) se destaca que los estudiantes la perciben como un conjunto de definiciones y fórmulas alejadas de su realidad. La enseñanza tradicional aplicada a la

geometría enfatiza la memorización y la resolución de problemas descontextualizados de forma mecánica siendo percibida por los educandos como una disciplina difícil y poco útil.

Los resultados de estudios referenciados en el artículo Advíncula-Clemente et al. (2022) especifican que las clases de geometría en la educación secundaria se han basado en un sistema tradicional de enseñanza, donde docentes presentan la teoría, desarrollan ejemplos y aportan los ejercicios que deben ser resueltos por los estudiantes, dejando de lado el desarrollo de los procesos de visualización, argumentación y justificación. Esta serie de afirmaciones deja entrever la necesidad de promover un cambio en el paradigma en el modo en que se desarrollan las clases y el papel que el profesor tiene en el aula.

Respecto a la comprensión precisa de los conceptos específicos de la trigonometría y su aplicación, Martin et al. (2016) destacan en sus conclusiones la necesidad imperante de profundizar en el tema mediante el diseño y la implementación de diversas situaciones que abarquen las diferentes componentes de los conceptos trigonométricos desarrollados. Es vital proponer actividades adaptadas para mostrar la flexibilidad entre las diferentes representaciones y su utilidad, así como una contextualización de las situaciones problema a desarrollar para motivar a los alumnos que confieran una mayor coherencia en la enseñanza de la trigonometría.

Si se analiza la relación entre la dimensión afectiva y el aprendizaje de las matemáticas, se puede encontrar, tal y como se afirma en el artículo Gamboa (2014), que buena parte de los estudiantes las perciben como un obstáculo en el logro de sus objetivos escolares. En el estudio, se analizan diferentes factores afectivos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas, como la ansiedad, la autoeficacia, la motivación y el interés. El autor concluye que los estudiantes que tienen una actitud positiva hacia las matemáticas y que se sienten seguros y motivados en el proceso de aprendizaje tienen más probabilidades de tener éxito en la materia.

En cuanto a las implicaciones pedagógicas, el autor sugiere que los docentes deben ser conscientes de la importancia de la dimensión afectiva en el aprendizaje de las matemáticas y deben trabajar en el desarrollo de estrategias que promuevan una actitud positiva y motivada hacia la materia. Asimismo, se resalta la necesidad de crear un ambiente de aprendizaje que fomente la confianza y la colaboración entre los estudiantes, y que permita

la exploración y el descubrimiento de los conceptos matemáticos de manera lúdica y creativa.

Dada la situación actual se podría plantear una actuación dirigida a los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje de la semejanza y la trigonometría optimizando los resultados y la percepción de los estudiantes frente a la materia.

### 1.3. Objetivos del TFE

#### 1.3.1. Objetivo general

El objetivo general del presente Trabajo de Fin de Máster (TFM) es el de diseñar una propuesta de intervención para la enseñanza-aprendizaje de semejanza y trigonometría mediante metodologías activas y participativas en cuarto de la ESO.

#### 1.3.2. Objetivos específicos

A continuación, se presentan los objetivos específicos de la propuesta de intervención:

- Identificar las principales dificultades de los estudiantes relacionadas con estos conceptos y diseñar estrategias para abordarlas.
- Identificar factores que favorezcan un aprendizaje significativo y su aplicación en el aula.
- Explorar diversas metodologías activas y cooperativas para fomentar la motivación de los alumnos, incluyendo el uso de las TIC y la aplicación de los conocimientos en situaciones reales.
- Elaborar situaciones didácticas que presenten los conceptos de semejanza y trigonometría de forma clara y eficaz, y que involucren a los estudiantes en actividades significativas y motivadoras.

De esta manera, se espera que los estudiantes adquieran los conocimientos necesarios en este tema, desarrollen habilidades para resolver problemas y trabajar en equipo, y se motiven en el aprendizaje de las matemáticas.

## 2. Marco teórico

La construcción teórica que permite sostener el planteamiento del estudio se corresponde con el marco teórico. En ésta se encuentran los conceptos y los antecedentes sólidos que no dejan duda que el estudio a realizar se ha ubicado adecuadamente dentro de un nivel investigativo y que existen argumentos necesarios para defender su ejecución (Monje, 2011).

La funcionalidad de este capítulo reside en lograr forjar las ideas acerca del conocimiento mismo o paradigmas, conjuntamente con las teorías generales o concepciones generales y las teorías sustantivas o conceptos específicos a investigar (Sautu et al., 2005).

En el marco teórico se distinguen dos partes bien diferenciadas: la primera, que se corresponde con la presentación de los antecedentes investigativos, es decir con estudios desarrollados en la misma línea de investigación donde se entrevén los vacíos de su conocimiento, detectados a posteriori de haber realizado una búsqueda exhaustiva; y la segunda, que es el marco conceptual que debe estar plenamente estructurado a manera de ideario de principios, estructurados de manera lógica, jerárquica y organizada sus contenidos que deben estar debidamente referenciados por diferentes fuentes de interés (Monje, 2011; Supo, 2015).

### 2.1. Estado de la cuestión

En esta sección, nos adentramos en una breve revisión de los antecedentes, trabajos e investigaciones que abordan el estado actual de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación secundaria fuera del ámbito de la enseñanza tradicional. A modo de estado del arte, ésta es crucial para comprender el contexto en el que nos encontramos y las posibles soluciones a los retos que enfrentamos como docentes.

Para tal finalidad se ha realizado una búsqueda en las principales bases de datos y repositorios:

- Dialnet: Es una base de datos bibliográfica en línea que recoge publicaciones de diversas áreas de conocimiento, incluyendo educación y pedagogía. Cuenta con más

de 14 millones de referencias, incluyendo artículos de investigación, tesis doctorales, libros y otros tipos de publicaciones.

- E-Prints Complutense: Es un repositorio digital de la Universidad Complutense de Madrid que permite el acceso a tesis doctorales, artículos, libros y otros documentos científicos producidos por la comunidad universitaria. La plataforma está dirigida a académicos, estudiantes e investigadores, y su acceso es gratuito.
- Google Scholar: Es un motor de búsqueda en línea que permite la búsqueda y el acceso a una amplia variedad de contenidos científicos, incluyendo artículos, tesis doctorales, libros y otros materiales académicos. La plataforma es ampliamente utilizada por académicos, estudiantes e investigadores de todo el mundo, y ofrece una opción para buscar de manera específica en bibliotecas y repositorios universitarios.
- Redalyc: Es una plataforma de acceso abierto que recopila revistas científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal. Incluye una sección dedicada a la educación, donde se pueden encontrar artículos de investigación docente y otros temas relacionados.
- ReUnir: es el Repositorio Institucional en acceso abierto de la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR). ReUnir contiene la producción científica y académica resultante de la actividad científica y docente de su Comunidad Universitaria, TFM y TFG de antiguos alumnos, referencias a los libros editados por UNIR Editorial y acceso al contenido de la Revista Española de Pedagogía y Nueva Revista.
- RODERIC: es el Repositorio de la Universidad de Valencia, que ofrece acceso a una amplia variedad de documentos científicos, incluyendo tesis doctorales, artículos y libros, producidos por la comunidad universitaria de esta institución. El acceso a la plataforma es gratuito y está dirigido a académicos, estudiantes e investigadores.
- SciELO: Es una biblioteca digital de acceso abierto que ofrece una amplia colección de revistas científicas en diversos idiomas, incluyendo español, portugués e inglés. La plataforma tiene un enfoque particular en las ciencias de la salud y ciencias sociales, y cuenta con la participación de diferentes países de América Latina, Europa y África.

A continuación, se presentan los trabajos más relevantes y novedosos seleccionados, que representan las nuevas líneas de trabajo en la docencia de la geometría, con aplicación en la trigonometría y en lengua castellana de los últimos 8 años:

- La evolución de la tecnología y el software en particular permiten grandes avances en cuanto a simulaciones y representaciones en el aula cuasi instantáneas. Se destacan artículos como Villamarín (2015) en el que se detallan métodos, herramientas y aplicaciones que permiten realizar transformaciones afines, bilineales y perspectivas en tres dimensiones consideradas esenciales para la generación y el análisis de imágenes y también la visión artificial.
- La geometría fractal es un ámbito relativamente nuevo y de interés creciente en la comunidad educativa y poco a poco van apareciendo más publicaciones de artículos promoviéndola como se detalla en el artículo de Artigue et al. (2021).
- La aparición de propuestas educativas diferentes a las que proponen las editoriales de los libros de matemáticas. Como caso de éxito particular aparece Innovamat. Fundada en 2017, surge como una propuesta curricular de matemáticas que tiene como objetivo fundamental transformar el proceso de aprendizaje de esta materia en una experiencia emocionante y enriquecedora. Explica Sánchez (2022, abril 20) que Innovamat sustituye por completo el tradicional libro de texto por un método flexible y adaptativo que se basa en la manipulación de materiales, el descubrimiento autónomo, la interacción entre compañeros y la compartición de estrategias. De esta manera, se fomenta el aprendizaje significativo y se impulsa el desarrollo de habilidades matemáticas de una forma lúdica y natural.
- La realidad virtual aplicada a la enseñanza va tomando forma y se están analizando sus capacidades en estudios como el de Yarin y Gamarra (2023). Los autores presentan un caso de estudio sobre el uso de la Realidad Virtual en la enseñanza de la geometría descriptiva. Como conclusión destacan que la experiencia de aprendizaje con esta tecnología mejora la habilidad espacial utilizando un entorno no inmersivo 3D.
- El software GeoGebra sigue en boga. Existe un especial énfasis en que el docente domine GeoGebra y se actualice constantemente para adquirir las competencias TIC

necesarias a desarrollar en el aula como se explica en García-Lázaro y Martín-Nieto (2023).

## 2.2. Marco conceptual

El marco conceptual nos aportará las directrices que debe seguir nuestra propuesta de intervención para la consecución de los objetivos de la programación propuestos de forma que se superen los problemas planteados con éxito.

El siguiente estudio presenta desde la teoría constructivista del desarrollo cognitivo, pasando por las bases para fomentar un aprendizaje significativo, hasta la justificación de las metodologías activas que seleccionaremos. Todo ello, con el objetivo de trasladar de una forma eficaz los conocimientos de semejanza y trigonometría a los alumnos en el proceso de enseñanza aprendizaje que se diseña de forma consecuente y se presenta en los siguientes capítulos.

### 2.2.1. Modelos y teorías constructivistas

Los exponentes más representativos, en la teoría constructivista del conocimiento son Jean Piaget y Lev Vigotsky que se explican en los siguientes subapartados.

#### 2.2.1.1. El constructivismo según Jean Piaget

Jean Piaget fue un psicólogo suizo que propuso una teoría del desarrollo cognitivo llamada constructivismo. Según Piaget (1972), los seres humanos construyen su propio conocimiento a través de la interacción con el ambiente y la reflexión sobre sus experiencias. Esta construcción se da en etapas sucesivas, en las que los individuos pasan de un nivel de pensamiento más simple a uno más complejo.

El constructivismo de Piaget, se basa en la idea de que los seres humanos no reciben el conocimiento directamente del ambiente, sino que lo construyen a través de su propia actividad mental. Según esta teoría, los seres humanos son activos, curiosos y buscan comprender su entorno. La interacción entre los individuos y la realidad es fundamental para



la construcción del conocimiento de forma que cada persona lo elabora a partir de la información que ya posee y del resultado de las interacciones con el entorno (Saldarriaga-Zambrano et al., 2016).

En el constructivismo de Piaget, el conocimiento se construye a través de la asimilación y la acomodación. La asimilación se refiere a la incorporación de nuevos conocimientos a las estructuras mentales ya existentes, mientras que la acomodación se refiere a la adaptación de las estructuras mentales para poder incorporar nuevos conocimientos.

Piaget (1972) identificó cuatro etapas en el desarrollo cognitivo: la etapa sensoriomotora, la etapa preoperatoria, la etapa de operaciones concretas y la etapa de operaciones formales. En cada una de estas etapas, los individuos construyen nuevos conocimientos y habilidades, que les permiten comprender el mundo de una manera más compleja.

A la hora de implementar en el aula, partiendo de la premisa que los seres humanos construyen su propio conocimiento a través de la interacción con el ambiente y la reflexión sobre sus experiencias, la teoría de Piaget destaca la importancia de la actividad mental de los individuos y propone un enfoque de enseñanza centrado en el aprendizaje activo y la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes a partir de experiencias guiadas en el aula.

#### 2.2.1.2. El constructivismo según Lev Vigotsky

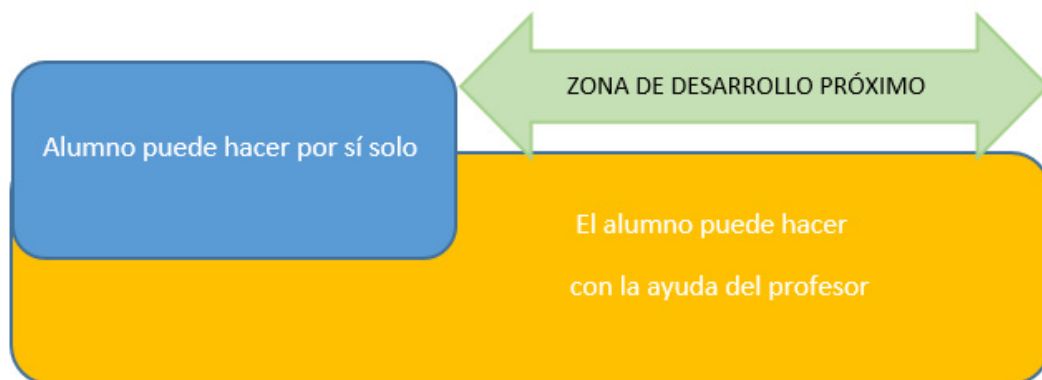
Lev Vygotsky fue un psicólogo y pedagogo ruso que propuso una teoría del desarrollo cognitivo y del aprendizaje social. Según ésta, los seres humanos construyen su conocimiento en colaboración con otros individuos y a través de la interacción con su ambiente sociocultural (Mérida y Jorge, 2009).

El constructivismo según Vygotsky (1978) se centra en la idea de que el aprendizaje se da a través de la interacción social y del diálogo con otros individuos. Éste afirma que los individuos aprenden mejor cuando trabajan en colaboración y cuando reciben apoyo y guía de individuos más experimentados y competentes.

En la teoría de Vygotsky, el aprendizaje se da a través de la zona de desarrollo próximo, que es la distancia entre lo que un individuo puede hacer por sí solo y lo que puede hacer con la

ayuda de otros individuos más experimentados y competentes. Así, el aprendizaje se da cuando los individuos son guiados y apoyados en el proceso de enfrentar tareas que están justo por encima de su nivel actual de desarrollo.

**Figura 2.** Zona de desarrollo próximo



Fuente: Elaboración propia según Vygotsky (1978)

## 2.2.2. Aprendizaje significativo

### 2.2.2.1. Aprendizaje significativo de Ausubel

El aprendizaje significativo de Ausubel es una teoría del aprendizaje propuesta por el psicólogo David Ausubel en la década de 1960. Según Ausubel, el aprendizaje significativo es aquel en el que el estudiante relaciona la nueva información con su conocimiento previo y lo integra en su estructura cognitiva de manera significativa y relevante (Torres, 2003).

Ausubel (1968) diferencia entre dos tipos de aprendizaje: el aprendizaje mecánico y el aprendizaje significativo. El aprendizaje mecánico se produce cuando el estudiante memoriza información sin relacionarla con su conocimiento previo, mientras que el aprendizaje significativo se produce cuando el estudiante relaciona la nueva información con su conocimiento previo.

**Figura 3.** Comparativa entre el aprendizaje mecánico y el significativo



Fuente: Elaboración propia según Ausubel (1968)

Para que el aprendizaje significativo se produzca, Ausubel propone que la nueva información debe ser relevante y significativa para el estudiante, y que debe estar organizada de manera clara y coherente. Además, el estudiante debe estar motivado y dispuesto a aprender.

En cuanto al papel del docente es el de facilitar el aprendizaje significativo proporcionando una estructura clara y organizada para la nueva información, y estableciendo conexiones entre la nueva información y el conocimiento previo del estudiante, que debe conocer de antemano. El docente también debe motivar al estudiante y crear un ambiente de aprendizaje positivo y colaborativo.

#### 2.2.2.2. Factores que favorecen un aprendizaje significativo en el aula

El aprendizaje significativo es un proceso mediante el cual el estudiante conecta nuevos conocimientos con sus experiencias previas, valores y habilidades, de manera que el aprendizaje sea más personal, relevante y duradero. Algunos factores que pueden favorecer un aprendizaje significativo son (Palmero, 2011):

- **Motivación:** la motivación es un factor clave en el aprendizaje significativo. Los estudiantes deben estar interesados en lo que están aprendiendo y tener un propósito claro. Los profesores pueden fomentar la motivación proporcionando actividades que sean relevantes y significativas para los estudiantes.
- **Conexión con la vida cotidiana:** los estudiantes aprenden mejor cuando pueden conectar lo que están aprendiendo con su vida cotidiana. Los profesores pueden hacer esto al proporcionar ejemplos y aplicaciones prácticas de los conceptos que están enseñando.
- **Participación activa:** los estudiantes aprenden mejor cuando están involucrados activamente en el proceso de aprendizaje. Los profesores pueden fomentar la participación activa mediante la realización de actividades que permitan a los estudiantes interactuar con el material y con sus compañeros.
- **Retroalimentación:** la retroalimentación es importante para el aprendizaje significativo ya que permite a los estudiantes saber cómo están progresando y qué deben hacer para mejorar. Los profesores pueden proporcionar retroalimentación mediante la revisión de trabajos y proyectos de los estudiantes y ofreciendo comentarios constructivos.
- **Colaboración:** la colaboración entre los estudiantes puede ser muy efectiva para el aprendizaje significativo. Los estudiantes pueden trabajar juntos en proyectos y discutir ideas para profundizar su comprensión del tema. Los profesores pueden fomentar la colaboración al asignar trabajos en grupo y al fomentar la discusión en el aula.

**Figura 4.** Factores que favorecen el aprendizaje significativo en el aula.



Fuente: Elaboración propia según Palmero (2011)

En el aula, los profesores pueden aplicar estos factores mediante el diseño de actividades que involucren a los estudiantes en el proceso de aprendizaje, proporcionando retroalimentación regular y relevante, y fomentando la colaboración y la discusión en el aula. Además, es importante que los profesores estén conscientes de los intereses y necesidades individuales de sus estudiantes para poder adaptar su enseñanza de manera efectiva.

### **2.2.3. Aprendizaje basado en metodologías activas**

El aprendizaje basado en metodologías activas es un enfoque educativo centrado en el estudiante, que pone en primer plano su participación activa en el proceso de aprendizaje. Este enfoque se basa en la idea de que el aprendizaje es más efectivo cuando los estudiantes participan activamente en su propia educación y son responsables de su propio aprendizaje (Asunción, 2019).

En este enfoque, el papel del alumno es fundamental, ya que los estudiantes son los protagonistas de su propio aprendizaje. Los alumnos se convierten en agentes activos que tienen que construir su propio conocimiento y trabajar de manera colaborativa con sus compañeros. De esta forma, los estudiantes adquieren habilidades como el trabajo en equipo, la resolución de problemas, la toma de decisiones y la comunicación efectiva.

Entre las características relevantes del aprendizaje basado en metodologías activas se pueden destacar las siguientes (Asunción, 2019):

- **Aprendizaje centrado en el estudiante:** En este enfoque, el alumno es el protagonista del proceso de aprendizaje, por lo que se tiene en cuenta sus necesidades, intereses y habilidades.
- **Aprendizaje colaborativo:** La colaboración entre estudiantes es una de las claves del aprendizaje activo. Se fomenta el trabajo en equipo y la cooperación, con el objetivo de que los estudiantes aprendan unos de otros y construyan juntos su conocimiento.
- **Participación activa del estudiante:** En el aprendizaje basado en metodologías activas, el estudiante es el protagonista de su propio aprendizaje. Se le invita a participar activamente en el proceso, a través de actividades que fomentan la reflexión, la discusión y la resolución de problemas.
- **Enfoque práctico:** El aprendizaje se realiza a través de actividades prácticas y experiencias concretas, lo que permite a los estudiantes aplicar lo que han aprendido en situaciones reales.
- **Flexibilidad y adaptabilidad:** Las metodologías activas suelen ser muy flexibles y adaptables a las necesidades y características de cada estudiante. Se fomenta la personalización del aprendizaje y se busca que cada estudiante pueda avanzar a su propio ritmo.
- **Uso de recursos y tecnologías:** En el aprendizaje activo, se utilizan diferentes recursos y tecnologías para enriquecer el proceso educativo. Esto incluye desde materiales audiovisuales y juegos educativos, hasta plataformas virtuales y herramientas de comunicación en línea.
- **Evaluación formativa:** En el aprendizaje activo, la evaluación no es un fin en sí mismo, sino una herramienta para medir el progreso y mejorar el proceso de aprendizaje. Se

utilizan diferentes estrategias de evaluación formativa para identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes y ajustar el proceso educativo en consecuencia.

- Reflexión: Los estudiantes tienen la oportunidad de reflexionar sobre lo que han aprendido y cómo lo han aprendido, lo que les permite mejorar su propio proceso de aprendizaje.

Hay que añadir que, el aprendizaje basado en metodologías activas fomenta el desarrollo de habilidades y competencias fundamentales para el éxito en el mundo laboral y las relaciones sociales del individuo.

#### **2.2.4. Modelo *Flipped Classroom***

El modelo pedagógico *Flipped Classroom* o aula invertida se ha popularizado en los últimos años y tiene como objetivo principal, según Bergman y Sams (2012), mejorar el aprendizaje de los estudiantes mediante la inversión del modelo de enseñanza tradicional fomentando un aprendizaje más personalizado, colaborativo y centrado en el estudiante.

Esta propuesta propone trasladar parte del proceso de enseñanza y aprendizaje fuera del aula para aprovechar mejor el tiempo en clase, enfocándose en desarrollar procesos cognitivos más complejos que permitan un aprendizaje significativo. Así, el modelo promueve que los estudiantes vean o experimenten los contenidos teóricos en casa, a través de videos o materiales didácticos, y luego trabajen en clase en la aplicación práctica de esos conocimientos con la ayuda del profesor como guía.

En cuanto a las diferencias entre el modelo de enseñanza tradicional y el que propone *Flipped Classroom*, según lo propuesto por Bergman y Sams (2012), podemos destacar las siguientes:

- Inversión del modelo de enseñanza: En el modelo tradicional, el profesor suele explicar el contenido en el aula y los estudiantes trabajan en las actividades prácticas en casa. En cambio, en el modelo *Flipped Classroom*, los estudiantes ven los contenidos teóricos en casa a través de materiales didácticos, como videos, y trabajan en las aplicaciones prácticas de los conocimientos en el aula con el apoyo del profesor.

- Personalización del aprendizaje: Tradicionalmente todos los estudiantes recibían la misma información y trabajaban en las mismas actividades en el aula. Sin embargo, con este nuevo modelo, los estudiantes pueden revisar el contenido a su propio ritmo y trabajar en las actividades prácticas en el aula adaptadas a sus necesidades y habilidades individuales.
- Fomento de la colaboración y el diálogo: Habitualmente el profesor solía ser el centro de atención y los estudiantes trabajaban individualmente. Por contra, el aula invertida propone que los estudiantes puedan trabajar en grupos y fomentar la colaboración y el diálogo con sus compañeros y el profesor.
- Uso de tecnología: En el modelo tradicional, el uso de tecnología suele ser limitado. En cambio, en el modelo *Flipped Classroom*, la tecnología es una herramienta fundamental para proporcionar a los estudiantes el contenido teórico y para facilitar el aprendizaje personalizado y la comunicación entre estudiantes y profesores.

En la Figura 5 podemos observar una comparativa entre el modelo tradicional y el modelo aula invertida donde se aprecian los papeles del alumno y del profesor:



**Figura 5.** Comparación entre el modelo tradicional y el aula invertida.



Fuente: Elaboración propia según Tourón y Santiago (2014)

Estas diferencias pueden ser muy beneficiosas para mejorar el aprendizaje de los estudiantes y su motivación en el aula. Además, el aula invertida facilita el aprendizaje activo porque permite a los estudiantes tener un mayor control sobre su propio aprendizaje, fomenta la colaboración y el trabajo en equipo, y les brinda la oportunidad de aplicar lo que han aprendido en contextos relevantes y significativos.

Si bien el modelo *Flipped Classroom* puede ser beneficioso para el aprendizaje activo de los estudiantes, también puede presentar algunas dificultades a la hora de ser implementado en el aula. A continuación se presentan algunas de las posibles dificultades que pueden afectar al profesor, a los estudiantes y sus familias según Bergman y Sams (2012):

- Falta de acceso a tecnología: los estudiantes deben tener acceso a dispositivos electrónicos y conexión a internet en sus hogares. Si algunos estudiantes no tienen acceso a la tecnología necesaria, puede generar desigualdades en el acceso al aprendizaje y dificultades en la implementación del modelo.
- Dificultades en la planificación de las clases: los profesores deben invertir tiempo en la creación de materiales de aprendizaje como videos, lecturas o podcasts para que los estudiantes puedan acceder a ellos fuera del aula. Además, los profesores deben ser creativos en la planificación de las actividades en clase para aprovechar al máximo el tiempo disponible.
- Necesidad de una mayor implicación de los estudiantes: éstos son responsables de su propio aprendizaje y deben trabajar de manera autónoma fuera del aula. Esto puede ser un desafío para algunos estudiantes que necesitan una mayor guía y dirección por parte del profesor.
- Resistencia al cambio: algunos estudiantes y profesores pueden sentirse incómodos con el cambio de roles. Los profesores deben estar preparados para ayudar a los estudiantes a adaptarse al nuevo modelo y motivarlos a participar activamente en su propio aprendizaje.
- Falta de apoyo por parte de las familias: deben estar involucradas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y apoyarlos en la realización de tareas fuera del aula. Si las familias no están informadas o no están de acuerdo con el modelo *Flipped Classroom*, puede generar dificultades en la implementación del modelo.

Así, la implementación del aula invertida puede presentar algunas dificultades relacionadas con la tecnología, la planificación de las clases, la implicación de los estudiantes, la resistencia al cambio y el apoyo de las familias. Es importante que los profesores estén preparados para enfrentar estos desafíos y trabajar en colaboración con los estudiantes y sus familias para asegurar el éxito del modelo.

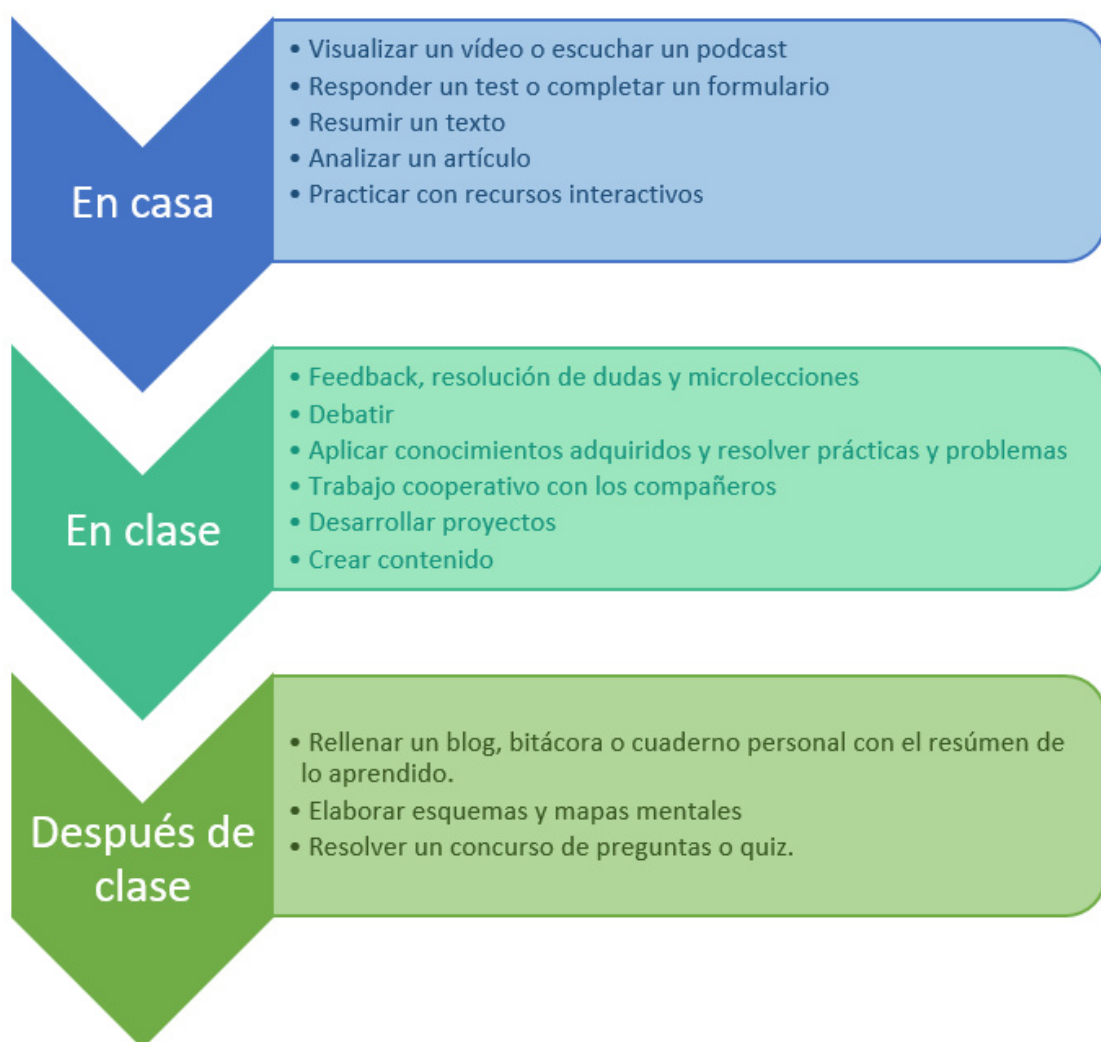
En cuanto al rol del profesor, éste cambia de ser el centro del proceso de enseñanza a ser un facilitador del aprendizaje de los estudiantes. El profesor se convierte en un guía que ayuda a los estudiantes a explorar y comprender el contenido de manera activa y autónoma. A continuación, se presentan algunas de las principales funciones a desempeñar (Tourón y Santiago, 2014):

- Selección y creación de materiales: el profesor debe seleccionar y crear materiales de aprendizaje como videos, lecturas o podcasts que los estudiantes puedan utilizar para adquirir conocimientos y conceptos fuera del aula.
- Orientación y retroalimentación: una vez que los estudiantes han adquirido conocimientos fuera del aula, el profesor debe guiarlos en el proceso de aplicación y análisis del contenido en el aula, así como, debe proporcionar retroalimentación individualizada para ayudar a los estudiantes a mejorar la comprensión del tema.
- Diseño de actividades de aprendizaje: el profesor debe diseñar actividades de aprendizaje que permitan a los estudiantes aplicar los conocimientos adquiridos en el aula. Estas actividades pueden incluir discusiones en grupo, ejercicios prácticos o proyectos.
- Fomento del aprendizaje colaborativo: el profesor debe fomentar el trabajo en equipo y el aprendizaje colaborativo entre los estudiantes. Esto puede ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades sociales y de comunicación mientras trabajan en la resolución de problemas.
- Evaluación y seguimiento: el profesor debe evaluar regularmente el progreso de los estudiantes y proporcionar retroalimentación para ayudarlos a mejorar su aprendizaje. Además, debe realizar un seguimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes y ajustar la estrategia de enseñanza según sea necesario.

En el diseño de la propuesta didáctica que se presenta en este TFM el modelo *Flipped Classroom* se va a implementar al principio de cada tema, donde los alumnos deben adquirir los nuevos conocimientos y destrezas para luego poder pasar a las prácticas de síntesis finales que se proponen como explicaremos más adelante.

En la Figura 6 podemos ver un esquema de las actividades propuestas según el momento y lugar en el que se van a desarrollar:

**Figura 6.** *Flipped Classroom: Actividades propuestas*



Fuente: Elaboración propia según Bergman y Sams (2012)

### **2.2.5. La taxonomía de Bloom en el modelo *Flipped Classroom***

Benjamin Bloom fue un influyente psicólogo y pedagogo estadounidense que realizó diversas aportaciones al campo del aprendizaje y el desarrollo cognitivo.

Si se realiza un análisis de la estructura del modelo que propone el aula invertida, ésta se sustenta en una base cognitiva estrechamente ligada a los niveles de aprendizaje descritos por la reconocida Taxonomía de Bloom (Parra, 2017).

La jerarquía cognitiva de Bloom es la taxonomía más difundida y popularizada en el ámbito educativo del mundo occidental. Su propuesta consiste en clasificar los objetivos educativos en seis categorías, cuyo nivel de complejidad va en aumento: Conocimiento, Comprensión, Aplicación, Análisis, Síntesis y Evaluación tal como se detalla en Bloom (1956). De esta forma, se establece una progresión gradual y secuencial en las operaciones mentales que deben ser dominadas por el alumno para lograr un aprendizaje efectivo. En resumen, el éxito en cada nivel depende del adecuado dominio de los niveles anteriores, lo que permite una formación sólida y coherente en el ámbito educativo.

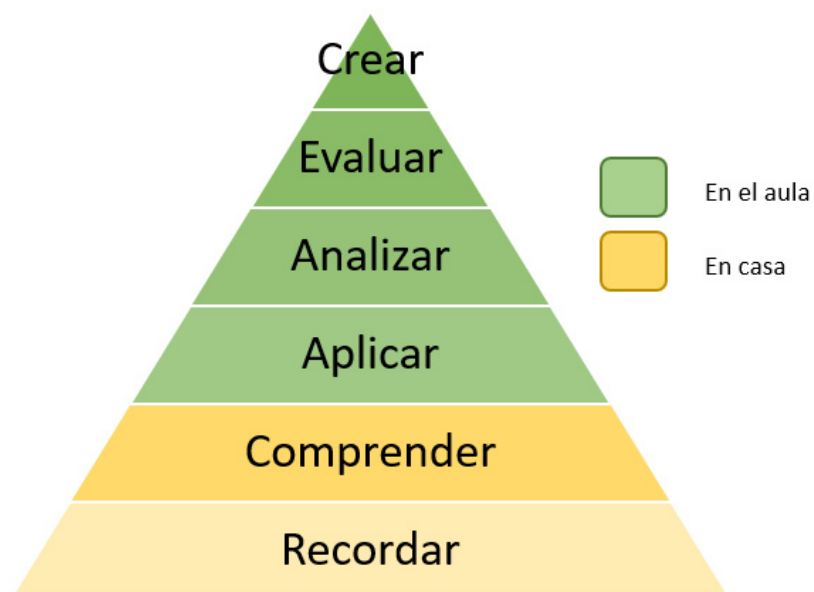
La Taxonomía de Bloom fue revisada por Krathwohl (2002) dándole un enfoque en su aplicación en la educación actual. El resultado consta de seis niveles, al igual que la taxonomía original, pero se basa en verbos que describen los procesos cognitivos involucrados en cada nivel. Los seis niveles son:

- Recordar (Recollection): Este nivel se refiere a la capacidad de recuperar información previamente aprendida de la memoria.
- Entender (Comprehension): Hace referencia a la capacidad de comprender el significado de la información aprendida.
- Aplicar (Application): Se basa en la capacidad de utilizar la información aprendida en situaciones nuevas o familiares.
- Analizar (Analysis): Se fundamenta en la capacidad de descomponer la información en partes más pequeñas y comprender cómo están relacionadas entre sí.
- Evaluar (Evaluation): Consiste en juzgar la calidad de la información y los conceptos, de comparar diferentes puntos de vista y de tomar decisiones informadas.
- Crear (Creation): Se asienta en la capacidad de combinar diferentes partes de la información aprendida en una nueva forma y crear algo nuevo y original.

Cada nivel requiere habilidades cognitivas más avanzadas que el nivel anterior, y los niveles superiores presuponen que los niveles inferiores ya se han dominado. La taxonomía revisada de Bloom es ampliamente utilizada por educadores para diseñar objetivos de aprendizaje específicos, desarrollar planes de enseñanza efectivos y evaluar el aprendizaje de los estudiantes.

El modelo *Flipped Classroom*, al invertir el proceso de aprendizaje tradicional, permite que los estudiantes aborden los niveles más altos de la taxonomía en clase. Al revisar el material de aprendizaje en casa, los estudiantes pueden llegar a la clase mejor preparados para participar en actividades que les permiten aplicar, analizar, evaluar y crear información en colaboración con otros estudiantes y el profesor. Por ejemplo, en el aula, los estudiantes pueden trabajar en proyectos de grupo o discutir ideas en un debate para aplicar lo que han aprendido y demostrar un nivel más alto de comprensión y evaluación de la información. Así queda detallado en la Figura 7:

**Figura 7.** Niveles cognitivos de la Taxonomía de Bloom revisada por Krathwohl.



Fuente: Elaboración propia según Krathwohl (2002)

Al reflexionar sobre el tema en cuestión, se puede concluir que ciertas habilidades que se encuentran en los niveles más básicos de la taxonomía de Bloom, como recordar y comprender, podrían ser adquiridas sin la necesidad de una supervisión constante por parte

del docente. Sin embargo, otras habilidades más complejas, como aplicar, analizar, evaluar y crear, requieren de la colaboración y orientación del profesorado, así como del trabajo en equipo con otros compañeros de clase. Este tipo de habilidades requieren de un proceso más riguroso, que implica diferenciar los componentes y elementos relevantes, así como la generación, producción, construcción y elaboración de ideas que permitan su aplicación en situaciones específicas.

### **2.2.6. Aprendizaje cooperativo**

El aprendizaje cooperativo es un enfoque pedagógico que se basa en la idea de que los estudiantes pueden aprender mejor cuando trabajan juntos y se apoyan mutuamente en el proceso de aprendizaje. En el aprendizaje cooperativo, los estudiantes trabajan juntos en pequeños grupos para alcanzar una meta común, y se asignan roles y responsabilidades específicos a cada miembro del grupo (Johnson et al., 1999).

#### **2.2.6.1. Beneficios, roles y actitudes del aprendizaje cooperativo**

La cooperación consiste en trabajar juntos para alcanzar objetivos comunes. Aunque a todas luces esta estrategia pedagógica puede ser beneficiosa para los estudiantes, es importante establecer ciertas condiciones para que sea efectiva (Torrego, 2012):

- Grupos heterogéneos: es importante que los grupos estén compuestos por estudiantes de diferentes niveles de habilidad, géneros, antecedentes culturales y niveles socioeconómicos. Esto permite a los estudiantes aprender de las experiencias y perspectivas de los demás.
- Responsabilidad individual y mutua: cada estudiante en el grupo es responsable de su propio aprendizaje y del aprendizaje de sus compañeros. Es importante que los estudiantes se sientan responsables de asegurarse de que todos los miembros del grupo estén entendiendo y aprendiendo.
- Interdependencia positiva: los miembros del grupo deben sentir que su éxito depende del éxito de los demás. De esta manera, se promueve la colaboración y la cooperación entre los estudiantes.

- **Roles y responsabilidades:** es importante que cada miembro del grupo tenga un papel específico y que las responsabilidades de cada miembro sean claras. Esto ayuda a evitar confusiones y asegura que todos los miembros del grupo contribuyen de manera equitativa.
- **Comunicación efectiva:** los miembros del grupo deben ser capaces de comunicarse de manera efectiva para discutir y compartir ideas. Es importante fomentar la comunicación abierta y el respeto mutuo.
- **Evaluación grupal y formativa:** como herramienta de mejora, puede realizarla el profesor o también los propios alumnos con una autoevaluación. Se pueden utilizar instrumentos como tablas de observación, hojas de evaluación, cuestionarios, etc.
- **Rendimiento individual:** Es necesario poder medir el grado de evolución de las habilidades y conocimientos de forma individual. El grado de implicación en el proyecto de cada alumno puede ser diferente y los resultados del grupo no pueden enmascarar el rendimiento particular.

Se puede vislumbrar que es efectivo para fomentar el aprendizaje activo y el desarrollo de habilidades sociales y emocionales en los estudiantes. Al trabajar en grupos, los estudiantes pueden aprender a comunicarse de manera efectiva, a resolver problemas de manera colaborativa y a desarrollar habilidades de liderazgo y cooperación. Además, el aprendizaje cooperativo puede fomentar el aprendizaje autónomo y el desarrollo de la metacognición, ya que los estudiantes son responsables de su propio aprendizaje y deben reflexionar sobre su propio progreso y el del grupo.

Los diferentes roles que pueden tomar los estudiantes en el grupo (Torrego, 2012):

- **Moderador:** controla el tiempo, turno de palabra y dirige las actividades.
- **Secretario - Portavoz:** anota las decisiones y acuerdos, rellena formularios, se comunica con otros grupos o con el profesor.
- **Coordinador:** controla que se cumpla el plan previsto, revisa el estado actual y objetivos a realizar.
- **Observador:** apunta registros de los comportamientos o actitudes adecuados con el rol que ejercen los miembros del grupo y controla la rotación de roles.



- Encargado del material: se ocupa de tener todo el material preparado para la actividad

Por otro lado, el docente propone prácticas organizadas y estructuradas. Es por ello que el aprendizaje cooperativo está recomendado para las etapas de educación primaria y secundaria. El papel del profesor es fundamental para asegurar el éxito. A continuación se detallan los roles que desempeña el profesor en el aula (Johnson et al., 2014):

- Facilitador: el profesor actúa como facilitador del aprendizaje cooperativo, proporcionando a los estudiantes las herramientas y recursos necesarios para llevar a cabo sus tareas.
- Organizador: el profesor debe organizar y estructurar las actividades cooperativas para que los estudiantes trabajen de manera efectiva en equipo.
- Tutor: el profesor puede actuar como tutor, ofreciendo orientación y apoyo a los estudiantes en el proceso de aprendizaje.
- Observador: el profesor observa y evalúa el desempeño de los estudiantes, proporcionando retroalimentación constructiva y orientación para mejorar su trabajo en equipo.
- Motivador: el profesor debe motivar a los estudiantes a trabajar juntos y a comprometerse con el proceso de aprendizaje cooperativo.
- Diseñador de tareas: el profesor diseña tareas desafiantes y significativas que requieren la colaboración y el trabajo en equipo para lograr una meta común.
- Evaluador: el profesor evalúa el trabajo de los estudiantes en función de la calidad del trabajo individual y de los niveles de logro que ha alcanzado el grupo.

Esta metodología no solo mejora el rendimiento académico, sino que también puede fomentar una serie de actitudes positivas en los alumnos. A continuación, se describen algunas de estas actitudes (Torrego, 2012):

- Empatía: los estudiantes aprenden a comprender y valorar los puntos de vista y sentimientos de los demás integrantes del grupo.
- Responsabilidad individual: El trabajo en equipo en el aprendizaje cooperativo exige que cada miembro del equipo asuma una parte de la responsabilidad en la tarea y en el logro de los objetivos comunes.

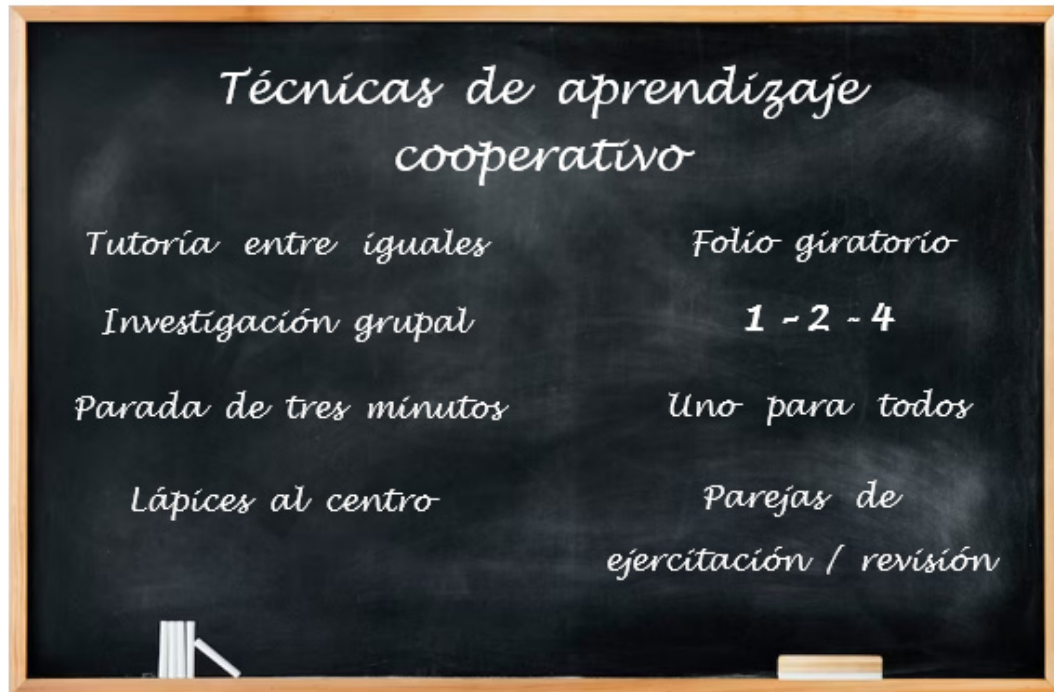
- Tolerancia: Al trabajar en equipo, los estudiantes aprenden a respetar las ideas y perspectivas de los demás, lo que promueve la tolerancia y la comprensión intercultural.
- Respeto: los estudiantes aprenden a respetar las ideas, opiniones y decisiones de sus compañeros.
- Confianza: los estudiantes aprenden a confiar en sí mismos y en sus habilidades, así como en las habilidades de sus compañeros.
- Solidaridad: los estudiantes aprenden a ayudar y a apoyar a sus compañeros en el proceso de aprendizaje.
- Cooperación: los estudiantes aprenden a trabajar juntos para alcanzar un objetivo común, lo que implica compartir ideas y escuchar a los demás.
- Autoestima: El aprendizaje cooperativo puede promover la autoestima y la confianza en sí mismos, ya que los estudiantes pueden sentirse más seguros al trabajar en equipo entre iguales y recibir retroalimentación positiva de sus compañeros.

Estas actitudes positivas son esenciales para el éxito en la vida personal y profesional de los estudiantes, y pueden ser fomentadas a través de las acciones cooperativas que se establecen en el aula.

#### 2.2.6.2. Técnicas de aprendizaje cooperativo

Existen diferentes técnicas de aprendizaje cooperativo que se pueden implementar en el aula, dependiendo de los objetivos, las necesidades de los estudiantes y del contenido que se esté enseñando. Algunas de las técnicas más comunes son (Torrego, 2012):

**Figura 8.** Técnicas de aprendizaje cooperativo



Fuente: Elaboración propia según Torrego (2012)

- Tutoría entre iguales: Un estudiante con mayor conocimiento en un tema específico ayuda a otro estudiante que necesita aprender ese tema. Esta estrategia fomenta la responsabilidad y el liderazgo en los estudiantes.
- Parada de tres minutos: El docente realiza pequeñas pausas de tres minutos en una exposición y pide a los grupos que resuman verbalmente los contenidos explicados hasta el momento y formulen dos preguntas sobre esa parte del material. Luego, cada grupo presenta una de sus preguntas al resto de los grupos, evitando repetir preguntas similares. Después de que se han planteado todas las preguntas, el profesor continúa con la explicación hasta la siguiente pausa de tres minutos. Este proceso se repite durante toda la exposición.
- Lápices al centro: El proceso de desarrollo consta de cinco pasos. Primero, el profesor propone un ejercicio o problema a los alumnos. Luego, los alumnos se organizan en grupos pequeños y se nombra a un moderador. Los bolígrafos se colocan al centro de la mesa para indicar que no se puede escribir. El moderador lee en voz alta la pregunta o ejercicio, se asegura de que todo el grupo exprese su opinión y

comprueba que todos comprendan la respuesta acordada. Finalmente, cada alumno responde a la pregunta por escrito sin hablar en ese momento. Este proceso fomenta la discusión y la comprensión de la respuesta acordada antes de que cada alumno la escriba individualmente.

- 1-2-4: El profesor plantea un problema o pregunta y los alumnos tienen unos minutos para pensar en una respuesta. Después, en sus equipos, discuten sus ideas con su "pareja de hombro" y buscan formular una única respuesta. Luego, las parejas comparan sus respuestas con otros miembros de su equipo-base, para encontrar la respuesta más adecuada al problema planteado. Finalmente, el profesor dirige una discusión en grupo grande, donde un miembro de cada equipo-base expone la respuesta de su grupo.
- Uno para todos: El proceso de desarrollo se divide en cinco pasos. Primero, el docente propone una serie de ejercicios a los alumnos. Luego, los alumnos se organizan en pequeños grupos y trabajan en el primer ejercicio, asegurándose de que todos comprendan cómo realizarlo antes de pasar al siguiente. Una vez finalizado el tiempo, el profesor revisa y corrige el trabajo de un miembro del equipo al azar y le pide que explique el proceso seguido en cada ejercicio. Finalmente, la recompensa o calificación obtenida por ese alumno será la misma para el resto del equipo. Este proceso fomenta el trabajo en equipo y la comprensión completa de cada ejercicio antes de avanzar al siguiente.
- Parejas de ejercitación/ revisión: Esta técnica describe los pasos a seguir en el desarrollo de un ejercicio o problema en el aula. En primer lugar, el profesor propone algunos ejercicios o problemas que los estudiantes deben resolver en parejas. El alumno A lee el problema y explica cómo resolverlo, mientras que el alumno B verifica la precisión de la solución. Luego, ambos resuelven el ejercicio individualmente y comparan sus respuestas para corregir errores. Después, intercambian los roles y resuelven el siguiente problema. Una vez que han completado todos los ejercicios, verifican sus respuestas con otra pareja y revisan el proceso si no están de acuerdo para llegar a un consenso. Finalmente, el profesor recoge el cuaderno de uno de los miembros del grupo para corregirlo y si está correcto, todos los miembros del grupo reciben la recompensa.

- Folio giratorio: El que el docente entrega a los grupos un folio con una frase relacionada con los contenidos que se trabajarán durante la sesión. La frase se coloca en el centro de la mesa y cada alumno escribe las ideas que le sugiere. Luego, los grupos intercambian el folio con otros equipos y añaden algunas ideas que no estén recogidas. Finalmente, cada grupo recoge su folio con las aportaciones de otros grupos y trata de construir una idea general sobre la frase. Este método fomenta la creatividad, la participación activa de los estudiantes y la construcción de conocimiento de forma colaborativa.

Por último vamos a detallar una técnica de aprendizaje cooperativo con la que los alumnos van a trabajar durante una o varias sesiones con un nivel alto de autonomía y que requiere que los alumnos cuenten con cierto nivel de conocimientos y destrezas que deberán aplicar:

- La investigación grupal es una técnica de aprendizaje que tiene como objetivos el fomento del interés por los temas a tratar, la realización de trabajos de investigación y el desarrollo de habilidades metacognitivas. Además, busca promover estrategias para la planificación del trabajo y reflexionar sobre la forma más eficaz de realizar una tarea.

Los estudiantes junto con el profesor seleccionan un aspecto específico de la unidad a tratar en clase y se agrupan en equipos de entre dos y cuatro integrantes en los que se establecen los roles necesarios para afrontar una tarea orientada. Juntos con el profesor, planifican los procedimientos de aprendizaje y objetivos coherentes con los temas específicos seleccionados. A continuación, los estudiantes desarrollan las tareas propuestas contando con la ayuda y coordinación del profesor.

En el siguiente paso, los estudiantes analizan y evalúan la información recolectada y planifican cómo presentarla de forma interesante a sus compañeros. La presentación de cada grupo será evaluada tanto por el profesor como por el grupo clase.

Durante el proceso es esencial establecer las consignas adecuadas para que los estudiantes puedan pedir y ofrecer apoyo en todo momento.

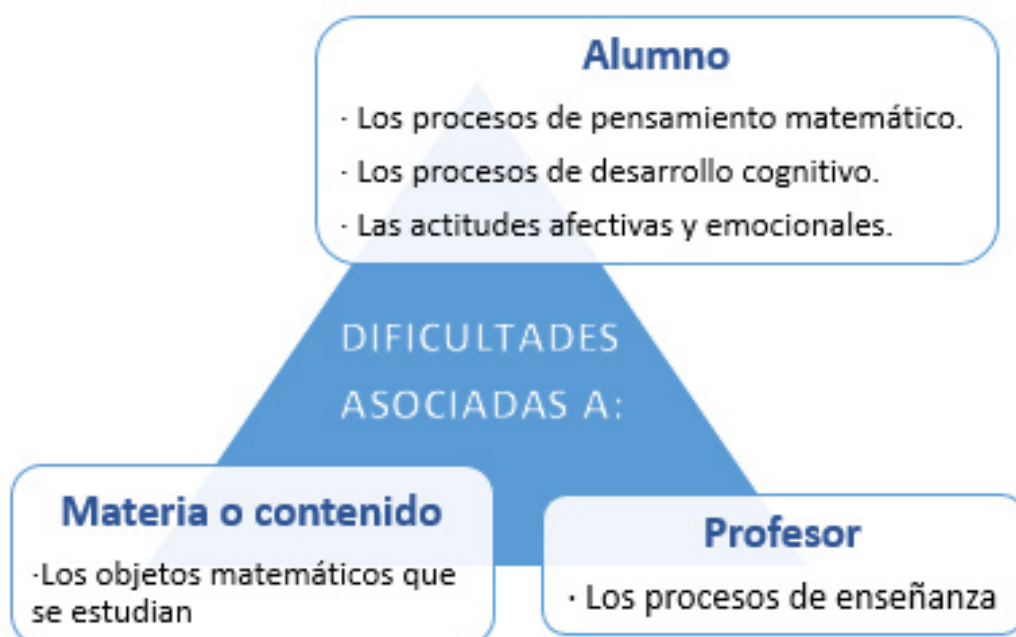
### 2.2.7. Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas.

En el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas, ciertas investigaciones se enfocan en la exploración exhaustiva de los errores, obstáculos y dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. De manera consecuente, estos estudios buscan soluciones y propuestas que aborden de manera eficaz los retos inherentes al aprendizaje matemático.

#### 2.2.7.1. Origen y clasificación.

En el aprendizaje de las Matemáticas, el planteamiento de Socas (1997) considera que las dificultades parten del alumno, de la materia o contenido y del profesor o institución escolar y distingue cinco categorías según su procedencia, como podemos observar en la Figura 9:

**Figura 9.** Clasificación de las dificultades



Fuente: Elaboración propia según Socas (1997)

Según el punto de vista del profesor encontramos dificultades asociadas a los procesos de enseñanza. Éstas están relacionadas con aspectos del currículo, la organización del centro y

los propios métodos de enseñanza. Entre las más comunes que podemos encontrar en el aula tenemos:

- Dificultades asociadas a la secuenciación de los contenidos.
- La falta de tiempo a la hora de poder impartir la materia debido a lo extenso que es el currículum de matemáticas de cuarto de ESO en su modalidad académicas.
- Falta de capacitación pedagógica del profesor.
- Falta de recursos educativos para apoyar la enseñanza.

Según el punto de vista de la materia o contenido aparecen las dificultades asociadas a los objetos matemáticos que se estudian, entre los que se destaca:

- La complejidad asociada a los objetos matemáticos que se estudian entraña dificultad por sí misma. La falta de comprensión profunda y significativa de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes puede llevar, en ocasiones, a errores y confusiones en su aplicación práctica.
- Dificultades asociadas al propio lenguaje matemático. Las más frecuentes relacionadas con el lenguaje y la lectura en matemáticas se pueden concretar en las siguientes (Carrillo, 2009):
  - Dificultades debidas a la complejidad sintáctica del lenguaje utilizado.
  - Dificultades debidas a la utilización de vocabulario técnico.
  - Dificultades causadas por la utilización de notación matemática.
  - Dificultades debidas a la incapacidad de relacionar las matemáticas con el contexto.
- La necesidad de trabajar desde la abstracción. El alto nivel de abstracción y generalización hace que los conceptos, leyes y teoremas estén alejados de representaciones que sean más perceptibles o asociadas al mundo rodea al alumno.

Por último, tomando el punto de vista del alumno aparecen tres categorías más que vamos a desarrollar a continuación.

En primer lugar vamos a abordar las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático. Los alumnos presentan dificultades a la hora de abordar las siguientes acciones en el aula (Beltrán et al., 2013):

- Resolver problemas o situaciones
- Modelar procesos y fenómenos de la realidad
- Comunicar
- Razonar y formular
- Comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos

En segundo lugar tenemos las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo. Estas dificultades se asocian a lo que los alumnos son o no son capaces de hacer, por ejemplo (Etchepareborda et al., 2005):

- A la capacidad de mantener la atención como puede ser un alumno con TDA o TDAH.
- Problemas a la hora de memorizar.
- La falta de conocimientos previos.
- Derivadas de la falta de percepción espacial.
- Problemas con el lenguaje.

En tercer y último lugar aparecen las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales, donde aparecen:

- Falta de motivación y de interés por la materia. Lo que puede llevar a una falta de participación y atención en las clases.
- El miedo a cometer errores y falta de confianza en sus habilidades. Estos aspectos van en relación a la autoestima del alumno y el miedo al fracaso.

#### 2.2.7.2. Dificultades y errores asociados a la trigonometría.

La trigonometría es una rama fundamental de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo. Esta disciplina es esencial para el cálculo de distancias, alturas, y ángulos en diferentes contextos, desde la navegación hasta la ingeniería y la física.

Sin embargo, muchos estudiantes encuentran dificultades en el aprendizaje de la trigonometría que luego se manifiestan en forma de errores a la hora de resolver un problema. Estos errores pueden llevar a resultados incorrectos y a una comprensión incompleta de los conceptos.



Vamos a abordar el análisis de dificultades y errores a partir de tres conceptos como son la estructura conceptual, la traducción entre las representaciones y las transformaciones sintácticas (Morales et al., 2013):

**Tabla 1. Clasificación de las dificultades y los errores en trigonometría**

<b>Estructura conceptual</b>	
<b>Dificultades</b>	Dificultad para reconocer, construir y representar propiedades y elementos geométricos asociados con problemas en los que se involucran las razones trigonométricas.
<b>Errores</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● No reconocer los triángulos rectángulos por sus características.</li> <li>● No distinguir correctamente la hipotenusa de los catetos.</li> <li>● Confundir el ángulo recto con los ángulos agudos en un triángulo rectángulo.</li> <li>● No trazar correctamente las alturas en cualquier triángulo.</li> <li>● No ver que la suma de los ángulos internos de un triángulo es <math>180^\circ</math>.</li> <li>● No identificar correctamente los lados del triángulo respecto a un ángulo, provocando el fallo al calcular las razones trigonométricas.</li> <li>● Representar bidimensionalmente figuras de tres dimensiones sin utilizar la perspectiva adecuada.</li> <li>● No asignar correctamente los ángulos en la representación gráfica del problema de trigonometría.</li> <li>● No identificar las longitudes dadas en un problema dentro de su representación gráfica.</li> </ul>
<b>Transformaciones entre las representaciones</b>	
<b>Dificultades</b>	Dificultades para realizar las traducciones entre las distintas representaciones de las razones trigonométricas.
<b>Errores</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Establecer de forma equivocada la razón trigonométrica a partir del modelo gráfico del problema.</li> <li>● Construir un modelo gráfico que no representa al problema trigonométrico descrito.</li> <li>● Colocar de forma equivocada los datos conocidos en la representación gráfica de un problema.</li> <li>● No interpretar ni relacionar correctamente los valores numéricos obtenidos dentro de la solución del problema.</li> <li>● No determinar, a partir del valor de la razón trigonométrica, el valor del ángulo que se busca en el problema aunque disponga de calculadora o similar.</li> </ul>

Transformaciones sintácticas	
<b>Dificultades</b>	Dificultad para construir transformaciones sintácticas equivalentes de las razones trigonométricas.
<b>Errores</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>● Al determinar la razón trigonométrica que resuelve el problema, no asigna correctamente los datos conocidos.</li><li>● No despejar de forma correcta las incógnitas en las razones trigonométricas.</li><li>● Confundir la amplitud de un ángulo con el valor obtenido de la razón trigonométrica que lo representa.</li><li>● No utilizar de forma correcta las herramientas tecnológicas para resolver un problema.</li></ul>

*Fuente: Elaboración propia según Morales et al. ( 2013)*

Teniendo en cuenta las dificultades y los errores se presentan algunas sugerencias de mejora para el estudio de la trigonometría que se promueven en el artículo de Araya, Monge y Morales (2017):

- **Enfatizar la comprensión conceptual:** En lugar de enfocarse en la memorización de fórmulas y procedimientos, se sugiere que se haga énfasis en la comprensión conceptual de los conceptos trigonométricos, como los ángulos, las razones trigonométricas y las identidades trigonométricas.
- **Utilizar tecnología educativa:** El estudio sugiere que la tecnología educativa, como programas de ordenador específicos para geometría y calculadoras gráficas, pueden ser una herramienta útil para el aprendizaje de la trigonometría. Estas herramientas pueden ayudar a los estudiantes a visualizar mejor los conceptos y a realizar cálculos más complejos con mayor facilidad.
- **Promover la resolución de problemas:** Finalmente, el estudio sugiere que se promueva la resolución de problemas en el estudio de la trigonometría. La resolución de problemas puede ayudar a los estudiantes a aplicar los conceptos que han aprendido en situaciones nuevas y desafiantes, lo que puede mejorar su comprensión y retención a largo plazo de los conceptos trigonométricos.
- **Integrar la trigonometría en contextos del mundo real:** En lugar de presentar la trigonometría como una serie de conceptos abstractos, se sugiere que se integre la trigonometría en contextos del mundo real, como la medición de distancias, la

navegación y la ingeniería. Esto puede ayudar a los estudiantes a comprender mejor la relevancia y la aplicación práctica de los conceptos trigonométricos.

### 3. Propuesta didáctica

#### 3.1. Presentación y contextualización de la propuesta

La siguiente propuesta de intervención didáctica está pensada para trabajar con un grupo de 24 estudiantes, de edades comprendidas entre los 15 y 16 años, que se encuentran cursando en el cuarto año de la ESO la materia Matemáticas en la modalidad académicas. El grupo presenta un interés medio por la materia, y se caracteriza por contar con una diversidad de motivaciones y expectativas en relación a su futuro académico y profesional, lo que genera un ambiente heterogéneo en el aula. Asimismo, se destaca que existe cierta paridad en cuanto al número de niños y niñas, lo que permitirá generar dinámicas y estrategias que fomenten la igualdad de género. Conscientes de este contexto, el proyecto buscará propiciar espacios de aprendizaje significativo y cooperativo que permitan al alumnado desarrollar sus potencialidades y consolidar sus conocimientos en la materia.

#### 3.2. Marco legislativo

En este documento se presenta un diseño de propuesta de intervención para la enseñanza-aprendizaje de semejanza y trigonometría para cuarto de la ESO en su modalidad académicas. Por consiguiente, a la hora de diseñar y planificar las pautas de actuación de la propuesta de intervención en el aula se han considerado los referentes normativos según lo dispuesto en el marco legal que conforma:

- La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, a partir de ahora LOMCE.
- La Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. A partir de ahora LOMLOE.
- El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la ESO y Bachillerato.

- La Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la ESO y el Bachillerato.

### **3.2.1. Objetivos de la etapa**

La Educación Secundaria Obligatoria (ESO) es una etapa educativa obligatoria en España que consta de cuatro cursos y está dirigida a jóvenes de entre 12 y 16 años. Esta etapa presenta una serie de objetivos que se entienden como los logros que el estudiante debe alcanzar al finalizarla como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje planificadas a tal fin. Según el Artículo 11 del Decreto 48/2015, estos objetivos buscan desarrollar en los estudiantes diversas capacidades y valores, como la responsabilidad, el respeto a los demás, la igualdad de oportunidades entre hombres y mujeres, la disciplina, el trabajo en equipo, el rechazo a la discriminación y la violencia, el sentido crítico, la capacidad de aprender y tomar decisiones, entre otros. También se busca fomentar habilidades en el uso de la información y la tecnología, en la comprensión y expresión de diferentes lenguas, en el conocimiento, respeto por la cultura y la historia, en el cuidado de la salud y del medio ambiente, y en la apreciación y comprensión del arte.

### **3.2.2. Competencias clave**

Las Competencias Clave son capacidades que permiten a los alumnos desarrollarse personalmente y desenvolverse en el entorno social que le rodea. Esto se traducirá en saber aplicar los aprendizajes del aula a situaciones de la vida cotidiana. Por competencias se entiende, en un sentido amplio, la concatenación de saberes que articulan una concepción del ser, del saber, saber hacer y saber convivir, tal y como se indica en el informe de la Unesco de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI (Delors, 1996).

El Artículo 2 , de 14 de mayo, en el Artículo 4 y la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, en el Anexo I recogen y describen siete competencias que los alumnos deben haber adquirido al finalizar la educación obligatoria, que son las siguientes:

- Comunicación lingüística (CL): Para fomentar el desarrollo, es necesario enfatizar en la importancia del lenguaje matemático y su uso preciso en la expresión habitual, así como en la comprensión de los enunciados y la comunicación de los resultados obtenidos. Además, se debe promover la lectura de textos matemáticos y artículos especializados.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT): Implica la habilidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar fenómenos en su contexto y resolver problemas en situaciones cotidianas. Es fundamental abordar áreas como números, álgebra, geometría, funciones, probabilidad y estadística, las cuales están interrelacionadas de diversas formas. Las matemáticas desarrollan esta competencia a través de sus contenidos y procedimientos, los cuales son esenciales para la comprensión y modelización de los fenómenos de la realidad a nivel científico y tecnológico.
- Competencia digital (CD): El uso de herramientas tecnológicas, tales como pizarras digitales, ordenadores, tablets, calculadoras, así como su software y las aplicaciones en línea, es fundamental para el desarrollo de la competencia digital. Estas herramientas apoyan la resolución de problemas y la comprobación de soluciones, al tiempo que permiten la organización de información, simulaciones y representación de funciones y modelos geométricos. Hay que mencionar que los alumnos viven en una sociedad en la que se consume mucha información a través de las redes y deben recibir una educación apropiada para puedan evaluar la calidad y la validez de la información y así poder manejar y utilizarla de forma responsable en el ámbito matemático y en otros ámbitos de su vida cotidiana.
- Aprender a aprender (CAA): La autonomía en la resolución de problemas y la verbalización del proceso de resolución son clave para el desarrollo de la competencia de aprender a aprender. También es necesario incidir en contenidos como la perseverancia, la sistematización, la mirada crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo, los cuales aparecen principalmente en la resolución de problemas.
- Competencias sociales y cívicas (CSC): La utilización de diferentes estrategias de cálculo y de resolución de problemas facilita la aceptación de otros puntos de vista, lo

cual es fundamental para el trabajo en equipo. Reconocer y valorar las aportaciones ajenas enriquece al alumno.

- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE): Las estrategias matemáticas, como la resolución de problemas, que incluyen la planificación, la gestión del tiempo y de recursos, la valoración de los resultados y la argumentación para defender el proceso y los resultados, son esenciales para el desarrollo de la competencia en sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. Esto se logra fomentando actitudes de confianza y autonomía en la resolución de situaciones abiertas y problemas reales.
- Conciencia y expresiones culturales (CEC): A lo largo de la historia, el pensamiento matemático ha contribuido a la explicación, justificación y resolución de situaciones y problemas de la humanidad, facilitando el desarrollo cultural de las sociedades. La aportación matemática se hace presente en diversas producciones artísticas, y sus estrategias y procesos mentales fomentan la conciencia y expresión cultural de las sociedades. Además, el alumno puede comprender diversas manifestaciones artísticas y utilizar sus conocimientos matemáticos en la creación de sus propias obras.

### 3.2.3. Objetivos específicos

Los objetivos específicos (OE) que definen el alcance de la propuesta de intervención para la enseñanza-aprendizaje de semejanza y trigonometría para cuarto de la ESO en su modalidad académicas diseñados siguiendo el currículo establecido (RD 1105/2014, pp. 395-398) son los siguientes:

**Tabla 2. Objetivos específicos**

Objetivos específicos para la enseñanza de la semejanza:	Código
Reconocer figuras y cuerpos semejantes, argumentando de manera correcta, y determinar su razón de semejanza	OS1
Obtener figuras semejantes a una dada	OS2
Reconocer la semejanza de triángulos aplicando los respectivos criterios de semejanza	OS3

Aplicar el Teorema de Thales para calcular distancias desconocidas	OS4
Demostrar y aplicar los teoremas de la altura y del cateto a problemas de la vida cotidiana	OS5
<b>Objetivos específicos para la enseñanza de la trigonometría:</b>	<b>Código</b>
Reconocer los sistemas de medida de ángulos: Sexagesimal y en radianes	OT1
Conocer las razones trigonométricas de un ángulo agudo y aplicarlas a la resolución de triángulos rectángulos	OT2
Hallar todas las razones trigonométricas de un ángulo agudo a partir de una de ellas. Usar las funciones de la calculadora	OT3
Demostrar las relaciones básicas entre las razones trigonométricas y la relación fundamental de la trigonometría.	OT4
Resolver problemas con triángulos rectángulos	OT5
Deducir las razones trigonométricas sobre la circunferencia goniométrica de ángulos mayores de $90^\circ$	OT6
Comprender las relaciones que hay entre ángulos complementarios, suplementarios, que difieren $90^\circ$ y que difieren $180^\circ$	OT7
Entender y aplicar el teorema del seno y el teorema del coseno	OT8
Aplicar todos los conocimientos adquiridos en la resolución de triángulos no rectángulos y problemas de trigonometría	OT9

*Fuente: Elaboración propia según RD 1105/2014*

### 3.2.4. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

El currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato se encarga de establecer y regular los objetivos, competencias, contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables necesarios para una formación integral en Matemáticas. Para la propuesta que presenta este proyecto se han seleccionado los elementos del bloque transversal Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas y del Bloque 3: Geometría que se consideran a desarrollar del curso 4º ESO modalidad académicas (RD 1105/2014, pp. 395-398). A continuación se presentan las tablas en las que se relacionan dichos elementos por bloque:

**Tabla 3. Contenidos, objetivos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje y competencias clave del Bloque 1.**

Contenidos curriculares	Objetivos específicos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Comp. clave
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica.	OS1, OT7, OT5	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas 2.4. Utiliza procesos de razonamiento en la resolución de problemas reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.	CAA CL SIEE CMCT
Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	OS2, OS3, OS4, OT8, OT9	6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana.	6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad. 6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.	CAA SIEE CMCT
Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para mejorar el proceso de aprendizaje.	OS2, OT9	11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos, gráficas y simulaciones. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual buscando información relevante, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y compartiendo éstos en entornos para facilitar la interacción.	11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 12.1. Elabora documentos digitales propios como resultado del proceso y los comparte. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.	CEC SIEE CD CL CSC CMCT

*Fuente: Elaboración propia según RD 1105/2014*



**Tabla 4. Contenidos, objetivos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje y competencias clave del Bloque 3.**

Contenidos curriculares	Objetivos específicos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables (EAE)	Comp. clave
Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	OS1, OS2, OS3, OS4 y OS5.	2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, etc y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.	CAA CMCT
Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.	OT1, OT2, OT3, OT4, OT5, OT6 y OT7.	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.	CAA CD CMCT
Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico. Aplicaciones informáticas que faciliten la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	OS4, OT5, OT8 y OT9.	1. Utilizar las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.	SIEE CD CSC CMCT

*Fuente: Elaboración propia según RD 1105/2014*

### 3.3.Objetivos

El alcance de los objetivos de la propuesta de intervención didáctica diseñada en el presente TFM pasa por fomentar los factores que favorecen un aprendizaje significativo de los conocimientos relacionados con la semejanza y la trigonometría del curso que nos compete. Los objetivos de la propuesta son los siguientes:

- Favorecer la participación activa de los estudiantes promoviendo su protagonismo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El estudiante debe ser el protagonista del proceso de aprendizaje por lo que se tendrán en cuenta sus necesidades, intereses y habilidades. Personalización del aprendizaje al ritmo del estudiante.
- Promover un modelo de aprendizaje como es *Flipped Classroom* sustentado en su base cognitiva con los niveles de aprendizaje descritos en la Taxonomía de Bloom para alcanzar los objetivos didácticos de la propuesta. Enfatizando la comprensión conceptual mediante la asignación de más tiempo a los procesos prácticos que a los teóricos.
- Fomentar la cooperación entre los estudiantes en la consecución de objetivos con todos los beneficios del trabajo en equipo que conlleva, fomentando la reflexión, capacidad crítica y habilidades comunicativas y organizativas.
- Establecer lazos con los contenidos y la vida cotidiana mediante el enfoque práctico a través de situaciones y experiencias concretas reales donde se aplican los nuevos conocimientos adquiridos utilizando materiales manipulativos en entornos cercanos al estudiante.
- Utilizar recursos y tecnologías para enriquecer el proceso educativo y fomentar la competencia digital. Las herramientas facilitan tanto los cálculos, representaciones como la presentación de la información agilizando los procesos de enseñanza.
- Maximizar la motivación de los estudiantes. Fomentar actitudes positivas en los alumnos como la empatía, responsabilidad individual, tolerancia, respeto, confianza, solidaridad, cooperación y autoestima.

### 3.4.Contenidos

En la propuesta se ha planteado diferenciar los contenidos específicos que se van a desarrollar a la hora de trabajar en dos bloques temáticos. Por un lado tenemos el bloque de los contenidos que ocupa la semejanza y por otro el que se asocia a los contenidos de trigonometría.

A continuación se presentan los contenidos específicos estructurados por bloques que se van a desarrollar en la propuesta didáctica y su relación con los objetivos específicos:

**Tabla 5. Relación entre los Contenidos y los Objetivos específicos.**

Contenidos del bloque de semejanza	Objetivos específicos
C1 - Figuras semejantes. Construcción mediante proyección u homotecia. Razón de semejanza.	OS1 y OS2
C2 - El teorema de Thales. Triángulos en posición de Thales. Criterios de semejanza.	OS3
C3 - Relaciones en triángulos rectángulos. Teorema del cateto, Teorema de la altura y Teorema de Pitágoras.	OS4
Contenidos del bloque de trigonometría	Objetivos específicos
C4 - Medida de ángulos: sistema sexagesimal y en radianes.	OT1
C5 - Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.	OT2 y OT3
C6 - Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.	OT6 y OT7
C7 - Identidades trigonométricas.	OT4
C8 - Resolución de triángulos rectángulos.	OT5
C9 - Teorema del seno y teorema del coseno.	OT8
C10 - Resolución de cualquier triángulo. Aplicaciones.	OT9

*Fuente: Elaboración propia según RD 1105/2014*

### 3.5. Metodología

La metodología didáctica se define como el conjunto de estrategias, procedimientos y acciones que son organizadas y planificadas de manera consciente y reflexiva por el profesorado con el fin de permitir el aprendizaje del alumnado y la consecución de los objetivos establecidos. Este enfoque se concibe como una herramienta fundamental para facilitar la transmisión de conocimientos y habilidades a los estudiantes de manera efectiva y eficiente, asegurando un proceso de enseñanza-aprendizaje significativo y de calidad (RD 1105/2014).

En esta intervención, se han incorporado metodologías participativas y activas, como el modelo *Flipped Classroom* y el aprendizaje cooperativo, para fomentar un aprendizaje significativo y motivador para los estudiantes, siguiendo un enfoque constructivista. El objetivo es involucrar a los alumnos en su proceso de aprendizaje, fomentando la aplicación de los conocimientos adquiridos en situaciones reales y haciendo uso de las tecnologías de la información y la comunicación. De esta manera, se busca lograr un proceso de enseñanza-aprendizaje más efectivo y dinámico, donde los estudiantes sean los protagonistas de su propio aprendizaje y se promueva el trabajo en equipo y la cooperación.

En lo que respecta al papel del docente, se produce una transformación en el que deja de ser el protagonista del proceso educativo para convertirse en un facilitador del aprendizaje de los alumnos. El profesor asume el rol de guía, cuya tarea es apoyar a los estudiantes para que puedan explorar y comprender el contenido de forma activa y autónoma.

Para promover la colaboración entre los estudiantes, el profesor formará equipos heterogéneos de cuatro integrantes. Durante algunas sesiones, se asignarán roles específicos a los miembros del equipo para que trabajen juntos en la creación de documentos y prácticas, y se brinden ayuda mutua durante el proceso.

Para implementar el modelo de aula invertida, es necesario dedicar tiempo en la primera sesión para informar y explicar a los estudiantes y sus familias cómo se llevarán a cabo las sesiones, la evaluación y los requisitos necesarios, como disponer de internet y un dispositivo inteligente en sus hogares, dado las diferencias con el modelo tradicional.

Así se propone el siguiente modelo para primera sesión:

- Actividades previas a la sesión:
  - Vídeo de introducción al modelo *Flipped Classroom*
  - Test de conocimientos previos
- Actividades de aula:
  - Resolución de dudas sobre el modelo *Flipped Classroom* y técnicas de aprendizaje
  - Establecer grupos de trabajo cooperativo heterogéneos de 4 alumnos
  - Realizar alguna actividad que implique alguna técnica de aprendizaje cooperativo.

Para las sesiones de resolución de prácticas y problemas se seguirá el siguiente modelo:

- Actividades previas a la sesión:
  - Ver vídeos de introducción a los contenidos y hacer un esquema resumen.
  - Realizar test sobre el contenido visionado
- Actividades de aula:
  - Resolución de dudas y errores de los test. El profesor complementa la teoría con una microlección utilizando la PDI y el software GeoGebra.
  - Resolver prácticas y problemas de forma cooperativa, utilizando técnicas como: lápices al centro, tutoría entre iguales, 1-2-4, parada de tres minutos y parejas de ejercitación/revisión. Para corregir las actividades, el docente, puede utilizar la técnica uno para todos.
- Tareas:
  - Escribir en la bitácora personal del aula virtual un resumen de los conocimientos y técnicas aprendidas durante la sesión.

Por último, en las últimas sesiones de cada bloque, se plantean situaciones de aprendizaje en las que los estudiantes pondrán en práctica los conocimientos y habilidades adquiridos, además de utilizar una amplia gama de herramientas de medición y recursos para abordar y resolver situaciones reales de manera colaborativa. Se generará un informe que documente los procesos y resultados obtenidos, los cuales serán presentados en clase mediante una exposición. Para ello se utilizarán técnicas como la investigación grupal y la tutoría entre iguales.

### 3.6. Temporalización

Los procesos de enseñanza-aprendizaje se llevarán al aula siguiendo la siguiente estructura repartida en 15 sesiones, teniendo en cuenta que cada sesión se corresponde a un día de clase:

**Tabla 6. Temporalización de las sesiones.**

Bloque temático 1 Semejanza		
Sesión	Título de la sesión	Espacios
1	Presentación. Figuras semejantes: razón de semejanza.	Aula de referencia
2	Criterios de semejanza y el teorema de Thales.	Aula de referencia
3	Trabajando con triángulos rectángulos. Teorema del cateto y de la altura.	Aula de referencia
4	Situación de aprendizaje: La semejanza en el patio	Patio del instituto y Aula de referencia
5		
6		
Bloque temático 2 Trigonometría		
Sesión	Título de la sesión	Espacios
7	Medida de ángulos y razones trigonométricas.	Aula de referencia
8	La circunferencia goniométrica. Razones trigonométricas de cualquier ángulo.	Aula de referencia
9	Identidades trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos.	Aula de referencia
10	Teorema del seno y del coseno.	Aula de referencia
11	Resolución de problemas con trigonometría.	Aula de referencia
12	Situación de aprendizaje: La trigonometría en el patio	Patio del instituto y Aula de referencia
13		
14		
15	Prueba escrita	Aula de referencia

*Fuente: Elaboración propia.*

### 3.7. Recursos

Los diferentes recursos de apoyo que se van a utilizar en la propuesta didáctica los hemos clasificado en tres grupos. Los vídeos de introducción a los contenidos, los materiales manipulativos y los recursos relacionados con las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC). A continuación se presentan en diferentes tablas:

**Tabla 7. Relación de vídeos para la presentación de los contenidos.**

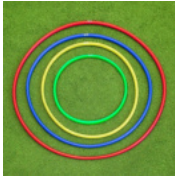


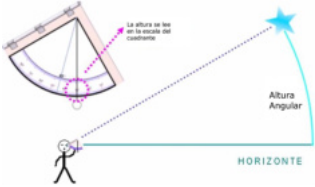

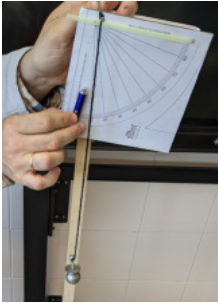

Contenido	Vídeo	Duración	Código
- Introducción al modelo <i>Flipped Classroom</i>	<a href="#">¿Qué es el flipped classroom o clase invertida?</a>	4 min	VI0
<b>Contenidos del bloque de semejanza</b>			
C1 - Figuras semejantes. Construcción mediante proyección u homotecia. Razón de semejanza.	<a href="#">RAZÓN de SEMEJANZA Perímetro, Área y Volumen</a>	12 min	VC1
C2 - El teorema de Thales. Triángulos en posición de Thales. Criterios de semejanza.	<a href="#">Teorema de THALES SEMEJANZA de Triángulos</a>	17 min	VC2
C3 - Relaciones en triángulos rectángulos. Teorema del cateto, Teorema de la altura y Teorema de Pitágoras.	<a href="#">TEOREMA de EUCLIDES del CATETO y la ALTURA</a>	11 min	VC3
<b>Contenidos del bloque de trigonometría</b>			
C4 - Medida de ángulos: sistema sexagesimal y en radianes.	<a href="#">Convertir GRADOS en RADIANES</a>	6 min	VC4
C5 - Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.	<a href="#">Hallar RAZONES TRIGONOMÉTRICAS de un Triángulo Rectángulo</a>	3 min	VC5
C6 - Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.	<a href="#">Razones TRIGONOMÉTRICAS de Cualquier Ángulo con</a>	22 min	VC6

	<a href="#">Circunferencia GONIOMÉTRICA</a>		
C7 - Identidades trigonométricas.	<a href="#">IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS</a> <a href="#">Fundamentales Trigonometría</a>	14 min	VC7
C8 -Resolución de triángulos rectángulos.	<a href="#">Resolución de triángulos rectángulos 1</a>	5 min	VC8A
	<a href="#">Resolución de triángulos rectángulos 2</a>	5min	VC8B
C9- Teorema del seno y teorema del coseno.	<a href="#">Teorema del SENO</a> <a href="#">Demostración y Ejercicio</a>	14 min	VC9A
	<a href="#">Teorema del COSENO</a> <a href="#">Demostración y Ejercicio</a>	12min	VC9B
C10 - Resolución de cualquier triángulo. Aplicaciones.	<a href="#">Problemas de trigonometría 1</a>	6min	VC10A
	<a href="#">Problemas de trigonometría 2</a>	6min	VC10B
<b>Aplicaciones y proyectos basados en los contenidos desarrollados</b>			
SA1- Semejanza de triángulos	<a href="#">Matemáticas III 20 Aplicaciones de la semejanza de triángulos</a>	14 min	VSA1
SA2- Razones trigonométricas	<a href="#">Matemáticas III Aplicaciones de las razones trigonométricas</a>	12 min	VSA2A
	<a href="#">Aplicaciones de la trigonometría</a>	12 min	VSA2B

*Fuente: Elaboración propia.*






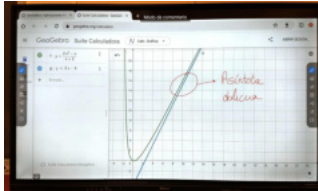
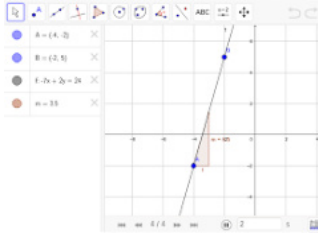
**Tabla 8. Relación de los materiales manipulativos.**

Nombre	Imagen	Descripción
Aros		Los usaremos para calcular su circunferencia, ángulos internos, diámetro, radio, etc.
Brújula		Instrumento de orientación que utiliza una aguja imantada para señalar el norte magnético terrestre.
Cinta métrica		Instrumento para realizar mediciones de distancias.
Cuadrante casero		Instrumento para medir ángulos. <a href="#">Instrucciones para su construcción.</a> <a href="#">Vídeo explicativo.</a>
Cuerda		La cuerda nos va a permitir establecer líneas entre puntos y facilitará las mediciones.
Escuadra láser casera		Instrumento casero para medir una distancia entre dos puntos, uno de ellos inalcanzable utilizando el teorema de la altura.
Estaca		Las estacas nos permiten establecer puntos o hitos, sobre el terreno y anclar cuerdas.

Gnomon		Palo de madera para utilizarlo como referencia. Para el caso es preferible que esté graduado y tenga unos 2m de altura.
Grafómetro casero		Instrumento para realizar mediciones de ángulos horizontales.
Medidor láser		Instrumento de medición de distancias. Algunos modelos son capaces de calcular áreas y volúmenes.
Odómetro de rueda		Instrumento de medición de distancias.
Plinto de Ptolomeo		Instrumento para calcular el ángulo del sol respecto de la horizontal. Se suele utilizar para medir la altura máxima del Sol sobre el horizonte. Debe colocarse orientado S-N.
Plomada		La plomada emplea la gravedad para poder establecer la vertical con precisión.
Teodolito		Instrumento de medición de ángulos verticales y horizontales.

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 9. Relación de los recursos TIC.**

Nombre	Imagen	Descripción
Aula virtual de la materia		Entorno de aprendizaje en línea donde los estudiantes pueden acceder a materiales de aprendizaje, interactuar con profesores y compañeros de clase y completar actividades educativas desde cualquier lugar con acceso a internet.
Calculadora científica		Dispositivo electrónico para cálculos complejos, incluyendo funciones trigonométricas entre otras.
Dispositivos móviles inteligentes: portátil, tablet, móvil, etc.		Dispositivos informáticos personales como portátiles, tablets, o móviles que se pueden transportar fácilmente debido a su diseño compacto y ligero.
Pizarra Digital Interactiva de nueva generación		Dispositivo tecnológico que permite mostrar y manipular información en una pantalla táctil mediante un lápiz óptico o el dedo.
SW: GeoGebra,		Software educativo gratuito utilizado para enseñar y aprender matemáticas, que combina geometría, álgebra y cálculo. Proporciona una plataforma interactiva donde los usuarios pueden dibujar gráficas, funciones matemáticas y realizar cálculos numéricos.

*Fuente: Elaboración propia.*

### 3.8. Actividades

Las diferentes actividades se han organizado en fichas para una o varias sesiones. En cada ficha se detallan las actividades previas que el alumno debe realizar antes de la sesión y también las actividades de aula y tareas propuestas así como toda la programación asociada.

Los instrumentos de evaluación citados en cada tabla de actividades podemos encontrarlos en el Anexo A. Las situaciones de aprendizaje en entornos reales tanto de las sesiones de semejanza como de trigonometría están recogidas y detalladas en el Anexo B. Por último, en el Anexo C aparece una colección de prácticas y problemas tipo clasificadas según los contenidos que se van a desarrollar.

**Tabla 10. Actividades de la sesión 1.**

Sesión	Título de la sesión	
1	Presentación. Figuras semejantes: razón de semejanza.	
OE	Contenidos a desarrollar	Comp Clave
OS1 y OS2	C1 - Figuras semejantes. Razón de semejanza entre longitudes, áreas y volúmenes.	CAA, CD, CMCT y SIEE
Descripción de las Actividades previas a la sesión		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Visualizar el vídeo V10 y VC1 y hacer un esquema resumen.</li> <li>● Realizar el test de conocimientos previos.</li> </ul>		35 min
Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Presentación de la UD y del modelo y metodologías que se emplearán como dinámica en las siguientes sesiones. Resolución de dudas del contenido visionado. El profesor complementa la teoría con una microlección utilizando la PDI y GeoGebra.</li> <li>● Establecer grupos de trabajo heterogéneos de 4 alumnos.</li> <li>● Resolución de prácticas y problemas en el cuaderno de forma cooperativa, resolviendo dudas entre los compañeros de equipo mediante 1-2-4 de forma cooperativa.</li> <li>● Tarea: Escribir en la bitácora personal del Aula Virtual un resumen de los conocimientos y técnicas aprendidos.</li> </ul>		55 min
Recursos		Espacios
PDI, calculadora científica, portátiles y GeoGebra.		Aula de referencia.

Metodología de aprendizaje	Criterios evaluación y EA.
Aprendizaje cooperativo. Técnica: 1-2-4	Criterio de evaluación 2 EAE 2.1 y 2.3
Procedimientos de evaluación	Instrumentos de evaluación
Análisis del test de conocimientos previos. (20%) Corrección del cuaderno de prácticas y problemas. (60%) Observación del trabajo en grupo. (20%)	Test conocimientos previos Rúbrica de prácticas. Escala de observación.

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 11. Actividades de la sesión 2.**

Sesión	Título de la sesión	
2	Criterios de semejanza y el teorema de Thales.	
OE	Contenidos a desarrollar	Comp Clave
OS2, OS3 y OS4	C2 - El teorema de Thales. Triángulos en posición de Thales. Criterios de semejanza entre triángulos.	CAA, CD, CMCT y SIEE
Descripción de las Actividades previas a la sesión		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>Visualizar el vídeo VC2 y hacer un esquema resumen.</li> <li>Realizar test sobre el contenido visionado.</li> </ul>		30 min
Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de dudas del contenido visionado. El profesor complementa la teoría con una microlección utilizando la PDI y el software GeoGebra.</li> <li>Resolución de prácticas y problemas en el cuaderno de forma cooperativa, resolviendo dudas entre los compañeros de equipo mediante lápices al centro.</li> <li>Seguir los pasos de una guía para crear con GeoGebra figuras semejantes mediante homotecias y triángulos semejantes utilizando la posición de Thales. En caso necesario se puede acudir a la tutoría entre iguales. Se entrega en el aula virtual.</li> <li>Tarea: Escribir en la bitácora personal del aula virtual un resumen de los conocimientos y técnicas aprendidas.</li> </ul>		55 min
Recursos		Espacios
PDI, calculadora científica, portátiles de aula, GeoGebra.		Aula de referencia.
Metodología de aprendizaje		Criterios evaluación y EA.

Aprendizaje cooperativo. Técnicas: lápices al centro, tutoría entre iguales y uno para todos.	Criterio de evaluación 2 EAE 2.1 y 2.3
<b>Procedimientos de evaluación</b>	<b>Instrumentos de evaluación</b>
Análisis del test sobre el contenido visionado. (20%) Corrección de las prácticas de cuaderno mediante la técnica uno para todos: El profesor corrige un cuaderno por grupo y la nota es la misma para todos los miembros. (60%) Observación del trabajo en grupo. (20%)	Test del contenido en vídeo. Rúbrica de prácticas y problemas. Escala de observación.

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 12. Actividades de la sesión 3.**

Sesión	Título de la sesión	
3	Trabajando con triángulos rectángulos. Teorema del cateto y de la altura.	
OE	Contenidos a desarrollar	Comp Clave
OS5	C3 - Relaciones de semejanza en triángulos rectángulos. Teorema del cateto, Teorema de la altura y Teorema de Pitágoras.	CAA, CD, CMCT y SIEE
Descripción de las Actividades previas a la sesión		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>Visualizar vídeo VC3 y hacer un esquema resumen.</li> <li>Realizar test sobre el contenido visionado.</li> </ul>		30 min
Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de dudas sobre el contenido visionado. El profesor complementa la teoría con una microlección utilizando la PDI y GeoGebra, aprovechando para demostrar el teorema del cateto y de la altura. Luego se demuestra el teorema de Pitágoras de forma gráfica y también a partir del teorema del cateto. Durante la exposición se utilizará la parada de tres minutos.</li> <li>Resolución de prácticas y problemas en el cuaderno de forma cooperativa por parejas de ejercitación / revisión.</li> <li>Tarea: Escribir en la bitácora personal del aula virtual un resumen de los conocimientos y técnicas aprendidas.</li> </ul>		55 min
Recursos		Espacios
PDI, calculadora científica y GeoGebra.		Aula de referencia.
Metodología de aprendizaje		Criterios evaluación y EA.

Aprendizaje cooperativo: técnicas: parada de tres minutos y parejas de ejercitación/revisión.	Criterio de evaluación 2 EAE 2.1 y 2.3
<b>Procedimientos de evaluación</b>	<b>Instrumentos de evaluación</b>
Corrección del test del contenido visionado. (20%) Corrección del cuaderno de prácticas y problemas. (60%) Observación del trabajo en grupo. (20%)	Test del contenido en vídeo. Rúbrica de prácticas y problemas. Escala de observación.

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 13. Actividades de las sesiones 4, 5 y 6.**

Sesión	Título de la sesión	
4, 5 y 6	Situación de aprendizaje: La semejanza en el patio	
OE	Contenidos a desarrollar	Comp Clave
OS1, OS2, OS3, OS4 y OS5	C1, C2 y C3	CD, CL, CSC, CMCT y SIEE
Descripción de las Actividades previas a la sesión		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Visualizar vídeo VSA1</li> <li>● Elaboración del material necesario para la clase: cuadrante y plinto de Ptolomeo.</li> <li>● Acordar entre los compañeros de grupo la asignación de roles.</li> </ul>		35 min
Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Los alumnos, organizados en grupos de trabajo cooperativo, resolverán una serie de situaciones reales propuestas por el profesor siguiendo el dossier de la práctica. Para ello contarán con entornos de trabajo en el patio y material para efectuar mediciones in situ. (Sesiones 4 y 5)</li> <li>● Una vez obtengan todas las mediciones necesarias, deberán efectuar los cálculos necesarios para obtener las soluciones, representar las diferentes situaciones con GeoGebra y documentar todo el trabajo realizado para posteriormente entregarlo a través del Aula Virtual. Además los resultados obtenidos se expondrán en clase al resto de los compañeros.</li> </ul>		165 min
Recursos		Espacios
Cuadrante casero, Plinto de Ptolomeo, escuadra láser,		Patio del instituto

grafómetro casero, cinta métrica, estacas, cuerda, brújula, gnomon, portátiles de clase, software GeoGebra, calculadora científica.	y aula de referencia
<b>Metodología de aprendizaje</b>	<b>Criterios evaluación y EA.</b>
Aprendizaje cooperativo: Investigación grupal y tutoría entre iguales.	Criterio de evaluación 2 EAE 2.1 y 2.3
<b>Procedimientos de evaluación</b>	<b>Instrumentos de evaluación</b>
Corrección del documento de resultados. (50%) Evaluación de la exposición en clase. (30%) Observación del trabajo en grupo. (20%)	Rúbrica del documento y de la exposición. Escala de observación.

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 14. Actividades de la sesión 7.**

Sesión	Título de la sesión	
7	Medida de ángulos y razones trigonométricas.	
OE	Contenidos a desarrollar	Comp Clave
OT1, OT2 y OT3	C4 - Medida de ángulos: sistema sexagesimal y en radianes. C5 - Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.	CAA, CD
Descripción de las Actividades previas a la sesión		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Visualizar vídeos VC4 y VC5 y hacer un esquema resumen.</li> <li>● Realizar test sobre el contenido visionado.</li> </ul>		20 min
Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Resolución de dudas y errores de los test del contenido visionado. El profesor complementa la teoría con una microlección utilizando la PDI y GeoGebra.</li> <li>● Realizar una práctica sencilla en la que los alumnos por parejas escogen un aro y una cuerda suficientemente larga para medir y establecer la relación entre la longitud del aro y su diámetro. Entonces deberán explicar el radián como unidad de medida angular con sus palabras.</li> <li>● Resolución de prácticas y problemas en el cuaderno de forma cooperativa, resolviendo dudas entre los compañeros de equipo mediante lápices al centro.</li> </ul>		55 min



<ul style="list-style-type: none"> <li>Tarea: Escribir en la bitácora personal del aula virtual un resumen de los conocimientos y técnicas aprendidas.</li> </ul>	
<b>Recursos</b>	<b>Espacios</b>
PDI, aros, cuerda, cinta métrica, calculadora científica y GeoGebra.	Aula de referencia.
<b>Metodología de aprendizaje</b>	<b>Criterios evaluación y EA.</b>
Aprendizaje cooperativo. Técnicas: lápices al centro y uno para todos.	Criterios de evaluación 1 y 2 EAE 1.1 y 2.2
<b>Procedimientos de evaluación</b>	<b>Instrumentos de evaluación</b>
Corrección del test del contenido visionado. (20%) Corrección de las prácticas de cuaderno mediante la técnica uno para todos: El profesor corrige un cuaderno por grupo y la nota es la misma para todos los miembros. (60%) Observación del trabajo en grupo. (20%)	Test del contenido en vídeo. Rúbrica de prácticas y problemas. Escala de observación.

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 15. Actividades de la sesión 8.**

Sesión	Título de la sesión	
8	La circunferencia goniométrica. Razones trigonométricas de cualquier ángulo.	
OE	Contenidos a desarrollar	Comp Clave
OT6 y OT7	C6 -Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.	CAA, CD y CMCT.
Descripción de las Actividades previas a la sesión		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>Visualizar vídeo VC6 y hacer un esquema resumen.</li> <li>Realizar test sobre el contenido visionado.</li> </ul>		30 min
Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de dudas sobre el contenido visionado. El profesor complementa la teoría con una microlección utilizando la PDI y GeoGebra. Durante la exposición se resolverán situaciones con GeoGebra de forma numérica y gráfica y se utilizará la parada de tres minutos.</li> <li>Resolución de prácticas y problemas en el cuaderno de forma cooperativa por parejas de ejercitación/revisión. Se pueden</li> </ul>		55 min

comprobar los resultados obtenidos con GeoGebra si es necesario. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tarea: Escribir en la bitácora personal del aula virtual un resumen de los conocimientos y técnicas aprendidas.</li> </ul>		
<b>Recursos</b>	<b>Espacios</b>	
PDI, calculadora científica, portátiles de aula y GeoGebra.	Aula de referencia.	
<b>Metodología de aprendizaje</b>	<b>Criterios evaluación y EA.</b>	
Aprendizaje cooperativo. Técnicas: parada de tres minutos y parejas de ejercitación/revisión.	Criterios de evaluación 1 y 2 EAE 1.1 y 2.2	
<b>Procedimientos de evaluación</b>	<b>Instrumentos de evaluación</b>	
Corrección del test del contenido visionado. (20%) Corrección del cuaderno de prácticas y problemas. (60%) Observación del trabajo en grupo. (20%)	Test del contenido en vídeo. Rúbrica de prácticas y problemas. Escala de observación.	

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 16. Actividades de la sesión 9.**

<b>Sesión</b>	<b>Título de la sesión</b>	
9	Identidades trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos.	
<b>OE</b>	<b>Contenidos a desarrollar</b>	<b>Comp Clave</b>
OT4 OT5	C7 - Identidades trigonométricas. C8 - Resolución de triángulos rectángulos.	CAA, CD y CMCT.
<b>Descripción de las Actividades previas a la sesión</b>		<b>Tiempo</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Visualizar vídeos VC7, VC8A y VC8B y hacer un esquema resumen.</li> <li>• Realizar test sobre el contenido visionado.</li> </ul>		30 min
<b>Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas</b>		<b>Tiempo</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolución de dudas y errores de los test del contenido visionado. El profesor complementa la teoría con una microlección utilizando la PDI y GeoGebra. El profesor demostrará las identidades trigonométricas y durante la exposición se utilizará la parada de tres minutos.</li> <li>• Resolución de prácticas y problemas en el cuaderno de forma cooperativa, resolviendo dudas entre los compañeros de equipo mediante lápices al centro.</li> <li>• Tarea: Escribir en la bitácora personal del aula virtual un resumen</li> </ul>		55 min

de los conocimientos y técnicas aprendidas.	
<b>Recursos</b>	<b>Espacios</b>
PDI, calculadora científica y GeoGebra.	Aula de referencia.
<b>Metodología de aprendizaje</b>	<b>Criterios evaluación y EA.</b>
Aprendizaje cooperativo. Técnicas: parada de tres minutos, lápices al centro y uno para todos.	Criterios de evaluación 1 y 2 EAE 1.1 y 2.2
<b>Procedimientos de evaluación</b>	<b>Instrumentos de evaluación</b>
Corrección del test del contenido visionado. (20%) Corrección de las prácticas de cuaderno mediante la técnica uno para todos: El profesor corrige un cuaderno por grupo y la nota es la misma para todos los miembros. (60%) Observación del trabajo en grupo. (20%)	Test del contenido en vídeo. Rúbrica de prácticas y problemas. Escala de observación.

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 17. Actividades de la sesión 10.**

Sesión	Título de la sesión	
10	Teorema del seno y del coseno.	
OE	Contenidos a desarrollar	Comp Clave
OT8	C9 - Teorema del seno y teorema del coseno.	CAA, CD y CMCT.
Descripción de las Actividades previas a la sesión		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>Visualizar vídeos VC9A y VC9B y hacer un esquema resumen.</li> <li>Realizar test sobre el contenido visionado.</li> </ul>		30 min
Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de dudas sobre el contenido visionado. El profesor complementa la teoría con una microlección utilizando la PDI y GeoGebra. Durante la exposición se resolverán situaciones con GeoGebra de forma numérica y gráfica y se utilizará la parada de tres minutos.</li> <li>Resolución de prácticas y problemas en el cuaderno de forma cooperativa por parejas de ejercitación / revisión. Se pueden comprobar los resultados obtenidos con GeoGebra si es necesario.</li> <li>Tarea: Escribir en la bitácora personal del aula virtual un resumen de los conocimientos y técnicas aprendidas.</li> </ul>		55 min

<b>Recursos</b>	<b>Espacios</b>
PDI, calculadora científica, portátiles de aula y GeoGebra.	Aula de referencia.
<b>Metodología de aprendizaje</b>	<b>Criterios evaluación y EA.</b>
Aprendizaje cooperativo. Técnicas: parada de tres minutos y parejas de ejercitación/revisión.	Criterios de evaluación 1 y 2 EAE 1.1 y 2.2
<b>Procedimientos de evaluación</b>	<b>Instrumentos de evaluación</b>
Corrección del test del contenido visionado. (20%) Corrección del cuaderno de prácticas y problemas. (60%) Observación del trabajo en grupo. (20%)	Test del contenido en vídeo. Rúbrica de prácticas y problemas. Escala de observación.

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 18. Actividades de la sesión 11.**

<b>Sesión</b>	<b>Título de la sesión</b>	
11	Resolución de problemas con trigonometría.	
<b>OE</b>	<b>Contenidos a desarrollar</b>	<b>Comp Clave</b>
OT9	C10 - Resolución de cualquier triángulo. Aplicaciones.	CAA, CD, CL, CMCT y SIEE
<b>Descripción de las Actividades previas a la sesión</b>		<b>Tiempo</b>
Visualizar vídeos VC10A y VC10B y hacer un esquema resumen. Realizar test sobre el contenido visionado.		30 min
<b>Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas</b>		<b>Tiempo</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de dudas y errores de los test del contenido visionado. El profesor complementa la teoría con una microlección utilizando la PDI y GeoGebra.</li> <li>Resolución de prácticas y problemas en el cuaderno de forma cooperativa, para ello se utilizará la técnica 1-2-4. Primero los alumnos discuten sus ideas con su pareja hombro, luego comparan las respuestas con los otros miembros del equipo-base y finalmente el profesor dirige una discusión en grupo grande, donde cada equipo-base expone la respuesta de su grupo.</li> <li>Tarea: Escribir en la bitácora personal del aula virtual un resumen de los conocimientos y técnicas aprendidas.</li> </ul>		55 min
<b>Recursos</b>	<b>Espacios</b>	

PDI, calculadora científica, portátiles de aula y GeoGebra.	Aula de referencia.
<b>Metodología de aprendizaje</b>	<b>Criterios evaluación y EA.</b>
Aprendizaje cooperativo. Técnicas: 1-2-4 y uno para todos.	Criterios de evaluación 1 y 2 EAE 1.1 , 2.1 y 2.2
<b>Procedimientos de evaluación</b>	<b>Instrumentos de evaluación</b>
Corrección del test del contenido visionado. (20%) Corrección de las prácticas de cuaderno mediante la técnica uno para todos: El profesor corrige un cuaderno por grupo y la nota es la misma para todos los miembros. (60%) Observación del trabajo en grupo. (20%)	Test del contenido en vídeo. Rúbrica de prácticas y problemas. Escala de observación.

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 19. Actividades de las sesiones 12, 13 y 14.**

Sesión	Título de la sesión	
12, 13 y 14	Situación de aprendizaje: La trigonometría en el patio	
OE	Contenidos a desarrollar	Comp Clave
OT1 a OT9	C10 - Resolución de cualquier triángulo. Aplicaciones.	CD, CL, CSC, CMCT y SIEE
Descripción de las Actividades previas a la sesión		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Visualizar vídeos VSA2A y VSA2B.</li> <li>● Preparar el material para la clase: cuadrante y plinto de Ptolomeo.</li> <li>● Acordar entre los compañeros de grupo la asignación de roles.</li> </ul>		30 min
Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas		Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Realizar una recogida de ideas aprovechando los grupos sobre qué aplicaciones puede tener la trigonometría en situaciones reales mediante la técnica del folio giratorio.</li> <li>● Los alumnos, organizados en grupos de trabajo cooperativo, resolverán una serie de situaciones reales propuestas por el profesor siguiendo el dossier de la práctica. Para ello contarán con entornos de trabajo en el patio y material para efectuar mediciones in situ.</li> <li>● Una vez obtengan todas las mediciones necesarias, deberán efectuar los cálculos necesarios para obtener las soluciones, representar las diferentes situaciones con GeoGebra y documentar todo el trabajo realizado para posteriormente entregarlo a través</li> </ul>		165 min

del aula virtual. Además los resultados obtenidos se expondrán en clase al resto de los compañeros.	
<b>Recursos</b>	<b>Espacios</b>
Cuadrante casero, plinto de Ptolomeo, cinta métrica, odómetro, escuadra láser, estacas, martillo, cuerda, brújula, plomada, gnomon, portátiles de clase, software GeoGebra, calculadora científica y teodolito.	Patio del instituto y Aula de referencia
<b>Metodología de aprendizaje</b>	<b>Criterios evaluación y EA.</b>
Aprendizaje cooperativo: Folio giratorio, investigación grupal y tutoría entre iguales.	Criterios de evaluación 1 y 2 EAE 1.1, 2.1 y 2.2
<b>Procedimientos de evaluación</b>	<b>Instrumentos de evaluación</b>
Corrección del documento de resultados. (50%) Evaluación de la exposición en clase. (30%) Observación del trabajo en grupo. (20%)	Rúbrica del documento y de la exposición. Escala de observación.

*Fuente: Elaboración propia.*

**Tabla 20. Actividades de la sesión 15.**

<b>Sesión</b>	<b>Título de la sesión</b>	
15	Prueba escrita	
<b>OE</b>	<b>Contenidos a desarrollar</b>	<b>Comp Clave</b>
OS1 a OS5 y OT1 a OT9	C1 a C10.	SIEE y CMCT
<b>Descripción de las Actividades previas a la sesión</b>		<b>Tiempo</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Estudio y repaso de las actividades y conocimientos adquiridos.</li> </ul>		-
<b>Descripción de las Actividades de aula y tareas propuestas</b>		<b>Tiempo</b>
Realizar una prueba escrita. Completar el test de autoevaluación y coevaluación.		55 min
<b>Recursos</b>	<b>Espacios</b>	
Calculadora científica.	Aula de referencia.	
<b>Metodología de aprendizaje</b>	<b>Criterios evaluación y EA.</b>	
Prueba individual de conocimientos.	Criterios de evaluación 1 y 2	

	EAE 1.1, 2.1, 2.2 y 2.3
<b>Procedimientos de evaluación</b>	<b>Instrumentos de evaluación</b>
Corrección de la prueba escrita. (100%) Análisis de la coevaluación. Análisis de la evaluación del proceso de aprendizaje.	Prueba escrita Coevaluación Evaluación del proceso

*Fuente: Elaboración propia.*

### 3.9. Evaluación

La evaluación es un proceso mediante el cual se recopila y analiza información para determinar el nivel de logro que han alcanzado los estudiantes en relación a los objetivos, conocimientos y competencias establecidos. También se utiliza para tomar decisiones informadas sobre la eficacia y calidad del nuevo modelo de enseñanza-aprendizaje propuesto. Los instrumentos de evaluación para tal propósito son los siguientes:

- Test de conocimientos previos
- Test del contenido en vídeo.
- Rúbrica de prácticas y problemas. (Anexo A. Tabla 20)
- Rúbrica de evaluación del documento y la exposición de la situación de aprendizaje. (Anexo A. Tabla 21)
- Escala de observación para la evaluación del trabajo en grupo. (Anexo A. Tabla 22)
- Prueba escrita.
- Coevaluación.
- Evaluación del proceso. (Anexo A. Evaluación del proceso)

En un principio se realizará una evaluación inicial diagnóstica a partir del test de conocimientos previos que nos permitirá conocer el punto de partida de los alumnos. Con los resultados del análisis se conformarán los grupos cooperativos de forma heterogénea.

A lo largo del proceso se llevará a cabo una evaluación formativa a partir de los resultados de los test de contenido de vídeo. Su análisis aporta información sobre si los contenidos de los vídeos se han asimilado sin problemas o si se detectan dificultades que deben ser paliadas en el aula trabajando los conocimientos y procesos a reforzar.

Para determinar el nivel de logro al final de la etapa se llevará a cabo una evaluación sumativa sobre 10. La Nota Final del proceso de enseñanza-aprendizaje de semejanza y trigonometría se compone del 30% de la nota media de las sesiones de prácticas y problemas más el 40 % de la nota obtenida en las sesiones de situaciones de aprendizaje más el 30% de la nota de la prueba escrita.

Por último, la coevaluación y la evaluación del proceso nos permitirán elaborar un análisis para ver si el proceso ha funcionado satisfactoriamente o hay que efectuar mejoras a futuro. De esta evaluación también se extrae un factor importante como viene a ser el grado de satisfacción de los alumnos frente a la materia.

## 4. Conclusiones

A continuación se exponen las conclusiones en relación al objetivo general del trabajo, evaluando el grado de consecución de los objetivos específicos planteados a lo largo de este Trabajo Fin de Máster.

El objetivo general era el diseño de una propuesta de intervención para la enseñanza-aprendizaje de semejanza y trigonometría mediante metodologías activas y participativas en cuarto de la ESO. Para dar respuesta a este objetivo se plantearon cuatro objetivos específicos:

- Identificar las principales dificultades de los estudiantes relacionadas con estos conceptos y diseñar estrategias para abordarlas.

Dentro del apartado Marco teórico se ha dedicado un apartado en el que se clasifican y detallan dichas dificultades desde un enfoque general hasta uno más específico a nivel de contenido. Estas dificultades se clasifican según su origen, ya sea asociadas a la materia o contenido, al profesor o al propio alumno. Además, se plantean propuestas de mejora específicas que se aplican en la propuesta didáctica presentada en este documento.

- Identificar factores que favorezcan un aprendizaje significativo y su aplicación en el aula.



En el Marco teórico, junto con un análisis de los modelos y teorías constructivistas, se ha puesto énfasis en el estudio del aprendizaje significativo, abordando en detalle los elementos que promueven una experiencia educativa significativa y los valores que aporta al aula. A partir de este análisis, se han elegido cuidadosamente las metodologías más apropiadas para nuestra propuesta de intervención en el aula.

- Explorar diversas metodologías activas y cooperativas para fomentar la motivación de los alumnos, incluyendo el uso de las TIC y la aplicación de los conocimientos en situaciones reales.

Se han seleccionado y justificado en el Marco teórico del presente TFM como principales pilares a la hora de afrontar la propuesta didáctica el modelo pedagógico *Flipped Classroom* y el aprendizaje cooperativo, sustentados por un uso normalizado de las TIC en el aula y la aplicación de conocimientos en entornos reales a través de la técnica de investigación grupal.

- Elaborar situaciones didácticas que presenten los conceptos de semejanza y trigonometría de forma clara y eficaz, y que involucren a los estudiantes en actividades significativas y motivadoras.

En el marco establecido por los tres objetivos específicos anteriores, se presenta en el apartado de la Propuesta didáctica una serie de actividades secuenciadas y detalladas, diseñadas para que el profesor pueda implementarlas en el aula. Estas actividades están centradas en que los estudiantes adquieran los conocimientos curriculares sobre semejanza y trigonometría, al mismo tiempo que desarrollan habilidades para resolver problemas en situaciones reales, se fomenta el trabajo en equipo y la motivación en el aprendizaje de las matemáticas.

Como conclusión particular, el Trabajo Fin de Máster ha sido una experiencia enriquecedora y motivadora a nivel personal como docente. He ampliado mis conocimientos, explorado nuevas metodologías y recursos innovadores. Esta investigación me ha mantenido actualizado y me ha proporcionado un crecimiento tanto a nivel personal como profesional.

## 5. Limitaciones y prospectiva

En esta sección se abordan dos aspectos principales. En primer lugar, se presentan las observaciones relevantes sobre los problemas o carencias identificados durante el desarrollo de este proyecto. En segundo lugar, se destacan las posibles áreas de investigación y futuras líneas de trabajo que se derivan de la finalización de este Trabajo de Fin de Máster.

En relación a las limitaciones, se presentan los siguientes aspectos:

- Dificultad para encontrar información sobre propuestas que apliquen los conocimientos matemáticos en geometría en entornos reales y experiencias concretas que combinen *Flipped Classroom* con técnicas de aprendizaje cooperativo.
- Por falta de tiempo no se han podido elaborar videos propios siguiendo los estándares recomendados y que no excedan los tiempos de atención aceptables.
- Al implementar sesiones de prácticas en entorno real se alargan los tiempos necesarios para impartir los conocimientos. Sería conveniente determinar qué unidades didácticas se benefician más de este enfoque de trabajo.
- La propuesta de intervención sería conveniente probarla en el aula y llevar a cabo un estudio sobre su aceptación y los resultados obtenidos.
- Durante los primeros años de implementación de la propuesta, el profesor, además de su carga lectiva, debe dedicar mucho tiempo a la elaboración de materiales alternativos y vídeos.

Como futuras líneas de trabajo, se pueden considerar las siguientes propuestas:

- Ampliar la propuesta a otras unidades didácticas o bloques de conocimiento: Esto permitirá aprovechar los beneficios de la propuesta en diferentes áreas de estudio y enriquecer la experiencia de aprendizaje de los estudiantes en diversas materias.
- Diseñar prácticas conjuntas en entornos reales con otras asignaturas compatibles para crear bloques multidisciplinares: La integración de diferentes asignaturas en proyectos conjuntos proporciona a los estudiantes una visión más amplia y contextualizada de los contenidos.
- Aportar investigaciones sobre buenas prácticas y recomendaciones para elaborar vídeos para el aula: Los recursos audiovisuales, como vídeos, son una herramienta

efectiva para captar la atención de los estudiantes y aumentar su concentración. Es importante investigar y desarrollar pautas sobre cómo elaborar vídeos educativos que sean atractivos, claros y que fomenten el aprendizaje activo.

- Establecer las directrices a seguir para priorizar la formación docente en modelos innovadores: Es esencial proporcionar a los docentes la formación adecuada para implementar en el aula modelos pedagógicos innovadores. Esto implica ofrecer oportunidades de capacitación y actualización en metodologías educativas basadas en la integración de tecnología, enfoques activos de enseñanza-aprendizaje y estrategias pedagógicas centradas en el estudiante.

## 6. Referencias bibliográficas

- Advíncula-Clemente, E., Beteta-Salas, M., León-Ríos, J., Torres-Céspedes, I., y Montes, M. (2022). Conocimiento especializado del profesorado de matemática en formación inicial acerca de los polígonos. *UNICIENCIA*, 36(1), 1–17. Recuperado de: <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.7>
- Araya Chacón, A. M., Monge Sánchez, A., y Morales Quirós, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Actualidades investigativas en educación*, 7(2), 1-31. Recuperado de: [https://www.researchgate.net/publication/28173349\\_Comprension\\_de\\_las\\_razones\\_trigonometricas\\_Niveles\\_de\\_comprension\\_indicadores\\_y\\_tareas\\_para\\_su\\_analisis](https://www.researchgate.net/publication/28173349_Comprension_de_las_razones_trigonometricas_Niveles_de_comprension_indicadores_y_tareas_para_su_analisis)
- Artigue, V., de los Ángeles Fanaro, M., y Lacués, E. (2021). Estado del arte sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Fractal en la escuela secundaria. *Pensamiento matemático*, 11(2), 7. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8065034>
- Asunción, S. (2019). Metodologías Activas: Herramientas para el empoderamiento docente. *Revista Tecnológica-Educativa Docentes 2.0*, 7(1), 65–80. Recuperado de: <https://doi.org/10.37843/rted>
- Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. Holt, Rinehart and Winston.
- Ávila, O. R. y Garcés-Perdomo, F. A. (2020): Enseñar geometría desde la contextualización del entorno escolar y familiar, *Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo* (febrero 2020). Recuperado de: <https://www.eumed.net/rev/atlante/2020/02/ensenar-geometria-entorno.html>
- Beltrán, J. K., Acuña, L. P., y Duque, C. B. (2013). Talleres para potenciar el pensamiento numérico, métrico y geométrico en estudiantes de séptimo grado de educación básica secundaria. *Revista científica*, 293-297. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/6646/1/Bautista2013Talleres.pdf>

- Bernal, P. A. [@ProfrAlanBernal]. (2017, febrero 22). Matemáticas III 20 Aplicaciones de la semejanza de triángulos. Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=RlmgEXvUDHg>
- Bergman, J., y Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*. ISTE.
- Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., y Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain*. New York: David McKay Company.
- Briceño, E. C., y Alamillo, L. (2017). Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria. *IE revista de investigación educativa de la REDIECH*, 8(15), 111–131. Recuperado de: [https://doi.org/10.33010/ie\\_rie\\_rediech.v8i15.65](https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.65)
- Canal, U. S. B. [@canalusb]. (2019, enero 15). Aplicaciones de la trigonometría. Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=aGaJu5-Yljo>
- Carrillo, B (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. *Innovación y Experiencias Educativas*, 2-9. Recuperado de: [https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Nu\\_mero\\_16/BEATRIZ\\_CARRILLO\\_2.pdf](https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Nu_mero_16/BEATRIZ_CARRILLO_2.pdf)
- Etchepareborda, M. C., y Abad-Mas, L. (2005). Memoria de trabajo en los procesos básicos del aprendizaje. *Revista de neurología*, 40(1), 79-83. Recuperado de: [https://www.uma.es/media/files/Memoria\\_de\\_trabajo\\_en\\_los\\_procesos\\_basicos\\_de\\_l\\_aprendizaje.pdf](https://www.uma.es/media/files/Memoria_de_trabajo_en_los_procesos_basicos_de_l_aprendizaje.pdf)
- Gamboa, R. (2014). Relación entre la dimensión afectiva y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica Educare*, 18(2), 117–139. Recuperado de: <https://doi.org/10.15359/ree.18-2.6>
- García-Lázaro, D., y Martín-Nieto, R. (2023). Competencia matemática y digital del futuro docente mediante el uso de GeoGebra. *Alteridad*, 18(1), 85–98. Recuperado de: <https://doi.org/10.17163/alt.v18n1.2023.07>

- García-Rubio, J. (2018). Los objetivos en el currículum básico de matemáticas a la finalización de la Educación Secundaria Obligatoria. *ReiDoCrea*, 7, 260-268. Recuperado de: <https://www.ugr.es/~reidocrea/7-20.pdf>
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (1999). *El Aprendizaje Cooperativo en el Aula*. Paidós. Recuperado de: <https://www.ucm.es/data/cont/docs/1626-2019-03-15-JOHNSON%20El%20aprendizaje%20cooperativo%20en%20el%20aula.pdf>
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Smith, K. A. (2014). Cooperative learning: improving university instruction by basing practice on validated theory. *Journal on excellence in college teaching*, 25(3 y 4), 85-118. Recuperado de: [http://static.pseupdate.mior.ca.s3.amazonaws.com/media/links/Cooperative\\_learn\\_validated\\_theory.pdf](http://static.pseupdate.mior.ca.s3.amazonaws.com/media/links/Cooperative_learn_validated_theory.pdf)
- Krathwohl, D. R. (2002). *A revision of Bloom 's taxonomy: An overview. Theory into Practice*, 41(4), (pp. 212-218). Recuperado de: [https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104\\_2](https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_2)
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, a partir de ahora LOMCE. Boletín Oficial del Estado, 295, de 10 de diciembre de 2013. Recuperado de: <https://www.boe.es/buscar/pdf/2013/BOE-A-2013-12886-consolidado.pdf>
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, 340, de 30 de diciembre de 2020. Recuperado de: <https://www.boe.es/boe/dias/2020/12/30/pdfs/BOE-A-2020-17264.pdf>
- Martin, E., Ruiz, J. F., y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias Revista de investigación y experiencias didácticas*, 34(3), 51-71. Recuperado de: <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871>
- Mate, T. [@Tutomate]. (2016, mayo 10). Resolución de triángulos rectángulos 1. Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=1Udq4SEv68>

- Mate, T. [@Tutomate]. (2016a, mayo 10). Problemas de trigonometría 1. Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=1cZksKYds68>
- Mate, T. [@Tutomate]. (2016b, mayo 10). Problemas de trigonometría 2. Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=L7alwKQ3xd8>
- Mate, T. [@Tutomate]. (2016b, mayo 10). Resolución de triángulos rectángulos 2. Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=A2fkBsRWZoY>
- Mérida, J. A. M., y Jorge, M. L. M. (2009). Implicaciones de la psicología de Lév S. Vygotsky en la concepción de la inteligencia. *Revista de historia de la psicología*, 30(4), 87–102. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3130688>
- Monje Álvarez, CA. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica*. Universidad Surcolombiana.
- Morales, J. F., Arenas, F. Y., y Urrutia, E. L. (2013). Razones trigonométricas: una experiencia de aula. En S. de E. M. U. Semur (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (p. 12). SEMUR. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/19845/>
- NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.
- OCDE. (2019). *Programa para la evaluación internacional de los estudiantes. Informe español*. Madrid: Ministerio de Educación y Formación Profesional.
- Palmero, M. L. R. (2011). La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual. IN. *Investigació i Innovació Educativa i Socioeducativa*, 3(1), 29–50. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3634413>
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la ESO y el Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 25, de 29 de enero de 2015. Recuperado de: <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf>

- Parra, F. J. (2017). La taxonomía de Bloom en el modelo *Flipped Classroom*. *Publicaciones didácticas*, 86(1), 176-179. Recuperado de: <https://core.ac.uk/download/pdf/235855538.pdf>
- Piaget, J. (1972). *Psicología y Pedagogía*. Ediciones Morata.
- Profe, S. [@SusiProfe]. (2018, diciembre 16). Teorema de THALES SEMEJANZA de Triángulos. Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=eoSvj4BbC7U>
- Profe, S. [@SusiProfe]. (2018b, abril 8). Hallar RAZONES TRIGONOMÉTRICAS de un Triángulo Rectángulo Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=tTqDtsrKpCA&list=PLiWRH3aE37VLRV7FAP2A0I8ZdLMoD-Ood>
- Profe, S. [@SusiProfe]. (2019, junio 2). RAZÓN de SEMEJANZA Perímetro, Área y Volumen. Youtube. Recuperado de: [https://www.youtube.com/watch?v=nVxlwa\\_Co5s](https://www.youtube.com/watch?v=nVxlwa_Co5s)
- Profe, S. [@SusiProfe]. (2019c, agosto 11). TEOREMA de EUCLIDES del CATETO y la ALTURA. Recuperado de: Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=4d3L9GrLGJ4>
- Profe, S. [@SusiProfe]. (2022, febrero 9). Razones TRIGONOMÉTRICAS de Cualquier Ángulo con Circunferencia GONIOMÉTRICA. Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=bTcc8fQl-s0>
- Profe, S. [@SusiProfe]. (2023b, febrero 26). Teorema del COSENO Demostración y Ejercicio. Recuperado de: Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=xaPw1rKzWRA>
- Profe, S. [@SusiProfe]. (2023c, febrero 28). Teorema del SENOS Demostración y Ejercicio. Recuperado de: Youtube. [https://www.youtube.com/watch?v=MA\\_p9t5ZRTc](https://www.youtube.com/watch?v=MA_p9t5ZRTc)
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la ESO y Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3, de 3 de enero de 2015. Recuperado de: <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>
- Rojas, G. G. [@glesa2009]. (2011, abril 20). matemáticas III aplicación de las razones trigonométricas. Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=zRfjNykRoEA>



- Saldarriaga-Zambrano, P. J., Bravo-Cedeño, G. D. R., y Loo-Rivadeneira, M. R. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. *Domino de las Ciencias*, 2(3 Especial), 127-137. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5802932>
- Sánchez, V. (2022, abril 20). La pregunta en el aula de matemáticas. *Innovamat Blog*. Recuperado de: <https://blog.innovamat.com/es/pregunta-matematicas/>
- Sautu, R., Boniolo, P., Dalle, P. y Elbert, R. (2005). *Manual de metodología: construcción del marco teórico, formulación de los objetivos y elección de la metodología*. CLACSO.
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.
- Supo, J. (2015). *Cómo empezar una tesis*. Bioestadístico EIRL. Recuperado de: <https://bit.ly/3ZbsbyP>.
- Tajamar, F. [@Flippeando]. (2016, febrero 29). ¿ qué es él *Flipped Classroom* o clase invertida ? (4 min). Youtube. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=R16HT9oeg9I>
- Torrego, J. C. (2012). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo: Un modelo de respuesta educativa*. FSM. Recuperado de: <https://convivenciayaprendizajecooperativo.web.uah.es/wp/wp-content/uploads/2016/05/Alumnos-con-altas-capacidades-y-aprendizaje-cooperativo-Libro-Torrego.pdf>
- Torres, T. V. (2003). El aprendizaje verbal significativo de Ausubel. Algunas consideraciones desde el enfoque histórico cultural. *Universidades*, (26), 37-43. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/373/37302605.pdf>
- Tourón, J., y Santiago, R. (2014). *The Flipped Classroom: Cómo convertir la escuela en un espacio de aprendizaje*. Digital-Text. Recuperado de: [https://www.researchgate.net/publication/281098986\\_The\\_flipped\\_classroom\\_Como\\_convertir\\_la\\_escuela\\_en\\_un\\_espacio\\_de\\_aprendizaje](https://www.researchgate.net/publication/281098986_The_flipped_classroom_Como_convertir_la_escuela_en_un_espacio_de_aprendizaje)

Villamarín, D. (2015). Estado del Arte, Herramientas y Aplicaciones para Transformaciones geométricas 3D. *Congreso de Ciencia y Tecnología ESPE*, 10(1), 226–231. Recuperado de: <https://doi.org/10.24133/cctespe.v10i1.51>

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.

Yarin, Y., y Gamarra, H. E. (2023). La realidad virtual y su efecto en la habilidad espacial: un caso de estudio enfocado en la enseñanza de la geometría descriptiva. *RED*, 23(73). Recuperado de: <https://doi.org/10.6018/red.540091>

## 7. Anexo A. Evaluación

**Tabla 21. Rúbrica de prácticas y problemas.**

Criterio de Evaluación	0-Suspenso	5-Aprobado	8-Notable	10-Sobresaliente
Razonamiento (20%)	No plantea ningún razonamiento previo.	Esboza de forma esquemática el problema.	Razona el problema con los medios necesarios.	Razona el problema y escoge la mejor estrategia.
Planteamiento y resolución de las operaciones (20%)	Operaciones mal planteadas y soluciones erróneas.	De vez en cuando comete algún error en la resolución o planteamiento de operaciones.	Plantea y resuelve las operaciones con claridad.	Plantea, resuelve las operaciones y comprueba los resultados.
Presentación de los resultados y las soluciones (20%)	No indica claramente cuál es el resultado obtenido ni sus unidades.	A veces no indica las unidades apropiadas.	Indica y razona la respuesta de una forma clara y completa.	Indica la respuesta y razona utilizando lenguaje matemático.
Aspecto y orden del documento presentado (20%)	El documento presenta una estructura desordenada e ininteligible.	El documento está ordenado pero puede mejorar la presentación y la ortografía.	El documento está ordenado y presenta claridad y limpieza.	El documento es pulcro y ordenado. Utiliza estilos que facilitan la lectura.
Uso de las herramientas informáticas (20%)	No hace uso de herramientas informáticas recomendadas.	Hace un uso moderado de las TIC.	Tiene un gran dominio de las TIC.	Tiene un gran dominio de las TIC y aporta nuevas herramientas y conocimientos.

*Fuente: Elaboración propia.*

**Tabla 22. Rúbrica del documento y la exposición de la situación de aprendizaje.**

Criterio de Evaluación	0-Suspense	5- Aprobado	8- Notable	10- Sobresaliente
Contenido (30%)	El contenido es insuficiente o tiene errores y lagunas.	El contenido es suficiente para responder a las cuestiones planteadas.	El contenido es claro y coherente.	El contenido es claro y aporta ideas relevantes.
Estructura y presentación de los contenidos (20%)	Presentación desordenada y sin estructura.	Presentación estructurada y clara.	Presentación estructurada y clara. Con ayudas visuales.	Presentación estructurada, con ayudas visuales y animaciones.
Lenguaje y entonación (20%)	No se entiende y no utiliza vocabulario adecuado.	Se entiende pero a veces sus expresiones o vocabulario no son los adecuados. Tiene un ritmo pausado.	Se entiende claramente y utiliza expresiones adecuadas. Tiene un ritmo adecuado.	Se entiende claramente y utiliza un vocabulario adecuado. Mantiene la atención del público.
Tiempo (10%)	Menos de 5 minutos	Entre 5 y 10 minutos.	Entre 10 y 12 minutos	12 minutos.
Preguntas y respuestas (20%)	Le cuesta responder a las preguntas del público.	Contesta pero tímidamente y de forma poco clara.	Responde a las preguntas del público de forma clara y concisa.	Responde de forma clara y concisa apoyándose en sus materiales.

*Fuente: Elaboración propia.*

**Tabla 23. Escala de observación para la evaluación del trabajo en grupo.**

Indicadores (20% de la nota cada uno)	1	2	3	4	5
El alumno participa en la actividad propuesta y hace su parte					
El alumno apoya a otros alumnos durante las actividades					
El alumno asume su rol y las actividades que conlleva					
El alumno tiene un papel activo en la toma de decisiones del grupo					
El alumno es respetuoso con los demás miembros del equipo					

*Fuente: Elaboración propia.*

### Evaluación del proceso de aprendizaje.

Las siguientes preguntas realizadas a los alumnos ayudan a reflexionar críticamente sobre su proceso de aprendizaje, identificar sus fortalezas y debilidades, y establecer metas para continuar su aprendizaje en el futuro:

- ¿Qué habilidades o conocimientos nuevos has adquirido durante este proceso de aprendizaje?
- ¿Cómo has utilizado los recursos y materiales disponibles para apoyar tu aprendizaje?
- ¿Cómo te has enfrentado a los desafíos o dificultades que se han presentado durante el proceso de aprendizaje?
- ¿Cuál ha sido la actividad o tarea más útil o significativa para ti en este proceso de aprendizaje? ¿Por qué?
- ¿Cómo has trabajado con tus compañeros de clase para apoyar tu propio aprendizaje y el de ellos?
- ¿Qué habilidades o estrategias has utilizado para aprender de manera más efectiva?
- ¿Cómo has aplicado lo que has aprendido en situaciones reales o en otras áreas de tu vida?
- ¿Qué retroalimentación has recibido de tus profesores o tutores durante este proceso de aprendizaje? ¿Cómo has utilizado esta retroalimentación para mejorar tu aprendizaje?
- ¿Cuáles han sido los resultados de tu proceso de aprendizaje? ¿Cómo se comparan con tus objetivos y expectativas iniciales?

## 8. Anexo B. Situaciones de aprendizaje en entornos reales

En este apartado se presentan los enunciados y los diferentes instrumentos de medición recomendados para organizar las situaciones de aprendizaje reales donde los alumnos deberán aplicar todos los conocimientos adquiridos previamente.

**Tabla 24. Situación de aprendizaje: La semejanza en el patio.**

Situación de aprendizaje: La semejanza en el patio
<b>S1.</b> Calcula la altura de un árbol. Utiliza el gnomon (palo de altura conocida) y mide con la cinta métrica sus sombras.
<b>S2.</b> Calcula la altura de un edificio. Obtén el ángulo de incidencia de los rayos del Sol con el Plinto de Ptolomeo y mide la sombra del edificio. Utiliza una representación a escala del problema.
<b>S3.</b> Calcula la altura hasta una ventana. Utiliza la distancia hasta la pared, el cuadrante casero y una representación a escala del problema.
<b>S4.</b> Calcula el radio de la Tierra. Utiliza la carta solar que hay en la web <a href="http://sunearthtools">sunearthtools</a> para calcular el ángulo de elevación en Exeter, que se encuentra en la misma longitud que Madrid y busca la distancia entre las dos ciudades. Utiliza el Plinto de Ptolomeo para medir el ángulo de elevación del Sol cerca del mediodía solar, sobre las 14:00 h. Ahora calcula los ángulos complementarios y réstalos. Ya tienes el ángulo entre las dos ciudades y puedes calcular la longitud de la circunferencia de la Tierra aplicando proporcionalidad directa. <i>Sol: dist. Madrid - Exeter es de 1146 Km. Radio Tierra es de 6378 Km.</i>
<b>S5.</b> Nos han encargado medir el ancho de un río ficticio que marcaremos con piquetas en varios puntos del curso. Necesitamos calcular el ancho del río sin cruzarlo. Para ello, utilizando el palo con la escuadra láser hay que encontrar un método que nos permita medirlo. <i>Sol: Teorema de la altura. Vamos a la parte del río que queremos medir y colocamos el palo en la orilla, luego enfocamos uno de los láseres hacia la otra orilla. Ahora buscamos el puntero del otro láser que habíamos colocado a 90 y marcamos sobre el suelo. Después de medir la altura a la que sostenemos los punteros y la distancia de la base hasta el segundo puntero, tenemos los siguientes datos: <math>d = 5 \text{ cm}</math> y <math>h = 150 \text{ cm}</math>. Aplicando el teorema de la altura <math>D = 45 \text{ m}</math>.</i>
<b>S6.</b> Como exploradores vamos a construir una pasarela sobre un río ficticio sin poder acceder a la otra orilla. ¿Cómo se puede determinar el ancho del río? Esta vez disponemos del grafómetro casero, estacas e hilo. <i>Sol: Busca en la orilla opuesta dos árboles o puntos señalados A y B. Colocándote en tu orilla perpendicular a ellos, utiliza el grafómetro casero, estacas e hilo para marcar dos</i>

señales C y D, (Señal 1 y Señal 2), y mide la distancia entre C y D. Ahora mide el ángulo entre DA y DB desde el punto D de tu orilla y realiza una representación a escala del problema donde podrás medir los lados de tu triángulo. Por semejanza de triángulos calcula el ancho del río.

**AMPLIACIÓN 1:** Calcula la altura de un edificio de pie inalcanzable. Utiliza el cuadrante casero y una representación a escala del problema.

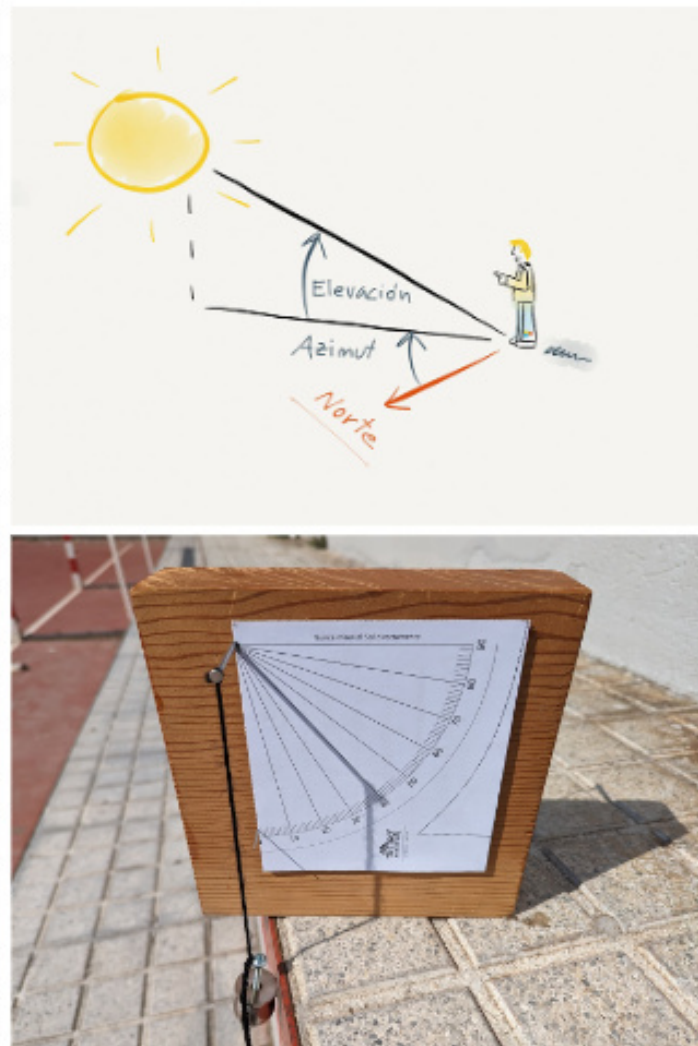
*Fuente: Elaboración propia.*

### Cómo medir el ángulo de elevación del Sol

A continuación se explica paso a paso cómo medir la altura del sol utilizando las cartas solares y el Plinto de Ptolomeo.

**Figura 10.** Plinto de Ptolomeo

Fecha:	31/05/2023   GMT0	
coordinar:	40.4167047, -3.7035825	
ubicación:	Madrid, Área metropolitana de Madrid y Corredor del Henares, Comunidad de Madrid, España	
hora	Elevación	Azimut
05:47:26	-0.833°	59.88°
6:00:00	1.25°	61.91°
7:00:00	11.73°	71.14°
8:00:00	22.78°	80.01°
9:00:00	34.14°	89.17°
10:00:00	45.51°	99.66°
11:00:00	56.46°	113.43°
12:00:00	65.96°	134.89°
13:00:00	71.31°	170.91°
14:00:00	68.95°	212.09°
15:00:00	60.71°	238.98°
16:00:00	50.18°	255.21°
17:00:00	38.92°	266.74°
18:00:00	27.52°	276.31°
19:00:00	16.32°	285.21°
20:00:00	5.58°	294.22°
20:37:57	-0.833°	300.25°



Fuente: Elaboración propia según sunearthtools.

En primer lugar es muy importante la orientación del Plinto de Ptolomeo, recuerda que debe colocarse orientado S-N y corregir el ángulo Azimut como podemos observar en la Figura 10. Por otro lado, la hora en la que se toman los datos. En el caso que se presenta se efectúa la medición al mediodía solar en Madrid. Dicha ciudad, al estar situada 3,7 grados hacia el Oeste, tendrá su mediodía solar 15 min más tarde del mediodía solar del meridiano que pasa por Castellón más dos horas en horario de verano o una en invierno. Recordar que 15° grados sobre cualquier paralelo de la esfera terrestre corresponden con una diferencia de una hora en la hora solar de cada sitio. En la tabla presentada para Madrid hay que sumar aproximadamente una hora y cuarto en horario de verano, pues presenta la hora GMT+1 como se ha comprobado.

### Cómo medir el radio de la Tierra

Una vez obtenido el ángulo de elevación del Sol de nuestra localización procedemos a escoger una localización del mismo trópico.

Como segunda localización se ha escogido Exeter, porque se encuentra situada a una distancia de 1150,23 km de Madrid en dirección Norte, de forma que comparten una latitud similar.

Una vez hemos obtenido  $x =$  ángulo de elevación del Sol en Exeter e  $y =$  ángulo de elevación del Sol en Madrid tomados a la misma hora. El ángulo entre estas dos localidades se corresponde a:

$$z = (90 - x) - (90 - y)$$

Con éste resultado se calcula la longitud de la circunferencia de la Tierra aplicando proporcionalidad directa.

*Solución: A las 13:00 el valor obtenido es  $z = 10,21^\circ$*

*Estimación Radio Tierra = 6454,7 Km*

*Radio Tierra = 6378 Km*

*Error = 76,78 Km*

**Figura 11.** Carta solar Exeter

Fecha:	31/05/2023   GMT0	
coordinar:	50.7255794, -3.5269497	
ubicación:	Exeter, Devon, Inglaterra, Reino Unido	
hora	Elevación	Azimut
05:07:34	-0.833°	52.67°
6:00:00	6.17°	62.63°
7:00:00	14.97°	73.6°
8:00:00	24.29°	84.59°
9:00:00	33.77°	96.26°
10:00:00	43.01°	109.58°
11:00:00	51.42°	125.99°
12:00:00	57.95°	147.4°
13:00:00	61.1°	174.33°
14:00:00	59.7°	202.57°
15:00:00	54.3°	226.3°
16:00:00	46.49°	244.47°
17:00:00	37.49°	258.8°
18:00:00	28.06°	270.99°
19:00:00	18.65°	282.16°
20:00:00	9.61°	293.08°
21:00:00	1.3°	304.28°
21:16:39	-0.833°	307.5°

Fuente: Elaboración propia según sunearthtools.



Para ampliar, como dato importante, la inclinación de la Tierra respecto al plano por el que circula en referencia al Sol es de  $23,5^\circ$  como se detalla en la Figura 12.

**Figura 12.** Inclinación de la Tierra respecto el plano de la eclíptica



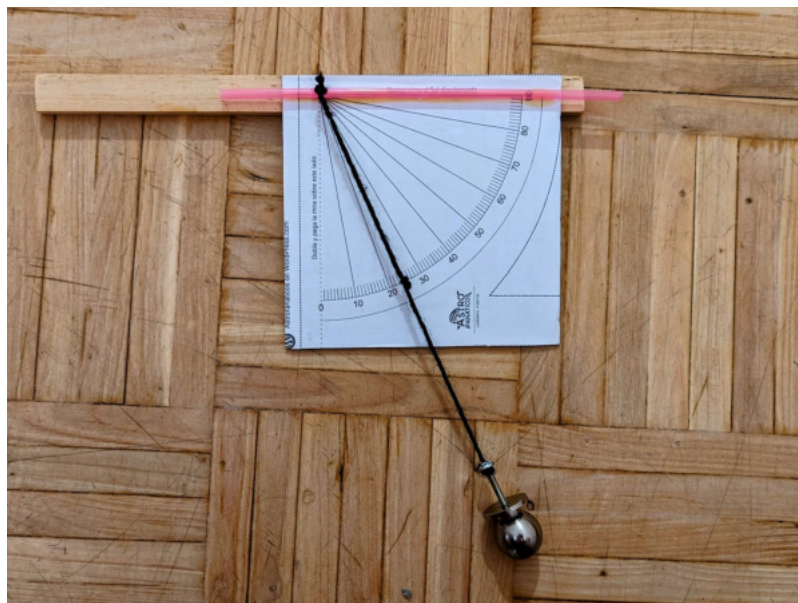
Fuente: Wikipedia.org

Por ello, la elevación solar en el solsticio de verano, día más largo del año, el día 21 de junio se corresponde con la fórmula:  $90 - L = \text{latitud} + 23,5^\circ$  y en el solsticio de invierno, día más corto del año, el día 21 de diciembre con la fórmula  $90 - L = \text{latitud} - 23,5^\circ$

### Cuadrante casero

El cuadrante casero es un instrumento de fabricación sencilla, construido a partir de materiales reciclados en este caso, que permite medir ángulos sobre el eje vertical:

**Figura 13.** Cuadrante casero



Fuente: Elaboración propia.

### Cómo medir el ancho de un río sin cruzarlo

Para aprovechar el teorema de la altura se ha construido el instrumento que hemos llamado escuadra láser con materiales caseros.

**Figura 14.** Escuadra láser



Este instrumento permite medir distancias desde nuestra posición hasta un punto inalcanzable. En este caso vamos a medir el supuesto ancho de un río.

Para ello enfocamos con la mirilla un objeto que se encuentre en la otra orilla. Manteniendo la vertical del palo respecto del suelo como muestra la plomada obtenemos un ángulo de inclinación en un sentido y en el otro proyectamos con el marcador láser un punto en el suelo. Con la ayuda de un compañero mediremos dicha distancia entre el punto del láser y la base del palo. Ahora podemos aplicar el teorema de la altura con los datos que tenemos:

Altura del palo  $h = 140$  cm

Marca láser  $m = 28$  cm

Fuente: Elaboración propia.

*Solución: Aplicando el teorema de la altura  $h^2 = m \times n$  obtenemos  $n = 700$  cm*

**Tabla 25. Situación de aprendizaje: La trigonometría en el patio.**

**Situación de aprendizaje: La trigonometría en el patio**

**T1.** Calcula la altura de un edificio. Obtén el ángulo de incidencia de los rayos del Sol con el Plinto de Ptolomeo y mide la sombra del edificio. Utiliza las razones trigonométricas.

**T2.** Calcula la altura hasta una ventana. Utiliza la distancia hasta la pared, el cuadrante casero y las razones trigonométricas. Recuerda que hay que tener en cuenta la altura del observador.

**T3.** En el patio hay una farola. Si conocemos la distancia "a" hasta su base. ¿Cuál es su altura?

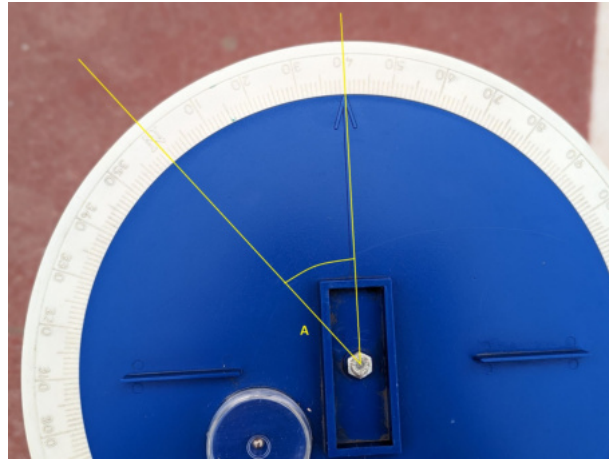
**Figura 15.** T3: Medir la altura de una farola



Fuente: Elaboración propia.

**T4.** En el patio hay dos estacas fijadas, una naranja y otra azul. Hay que calcular la distancia entre ellas sabiendo que la de color azul es inaccesible. Utiliza el teodolito o el grafómetro casero para medir los ángulos horizontales necesarios y la cinta métrica.

**Figura 16.** T4: Medir un ángulo horizontal



Fuente: Elaboración propia.

**T5.** Conociendo el ancho de la portería de fútbol “a”. ¿Cuál es la distancia “d” que va desde el centro de la portería hasta el centro del campo de fútbol? Utiliza las líneas marcadas de la pista.

**Figura 17.** T5: Medir distancia hasta la portería de fútbol



Fuente: Elaboración propia.



**T6.** Calcula la altura hasta una ventana del colegio de pie inaccesible. Para ello realiza dos mediciones con el cuadrante casero separadas una distancia “ $c$ ” como se propone en la Figura 18.

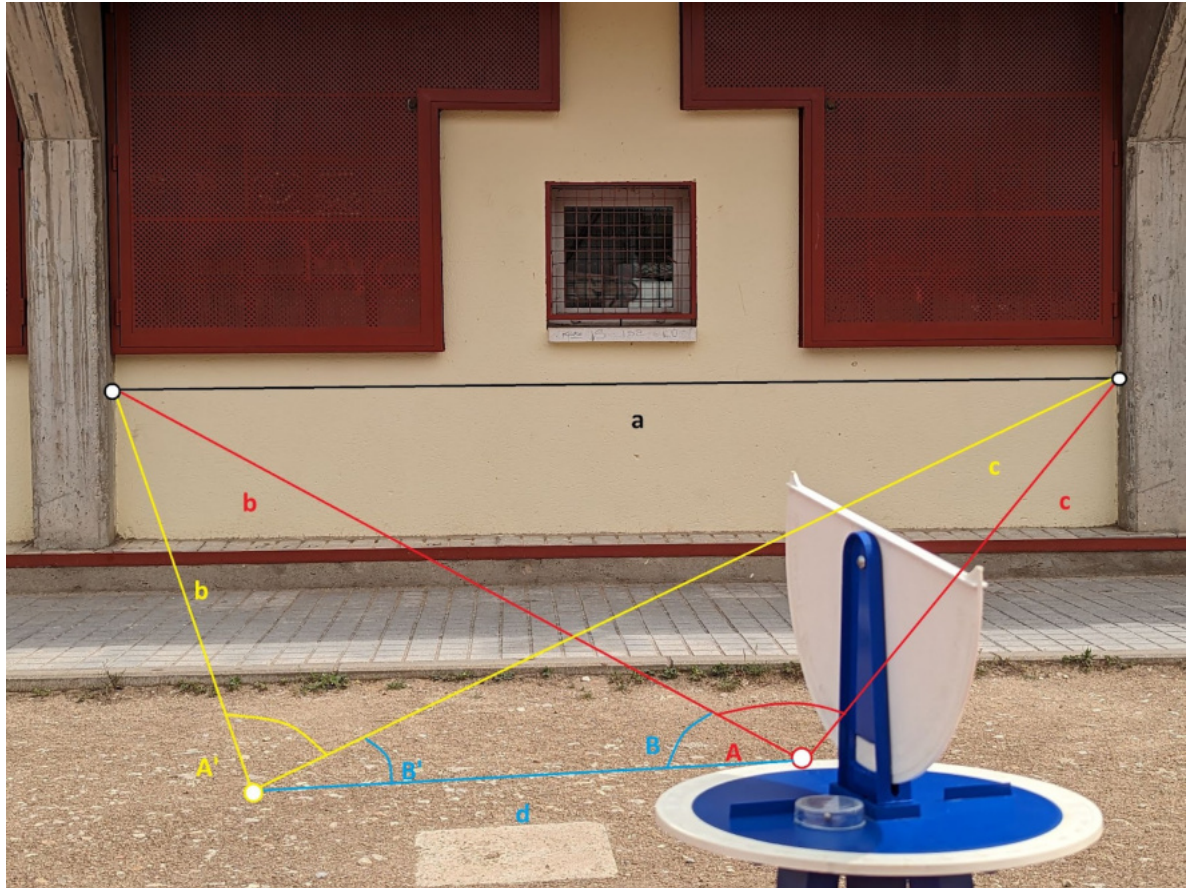
**Figura 18.** T6: Medir la altura de una ventana de pie inaccesible



Fuente: Elaboración propia.

**T7.** Calcula la distancia “ $a$ ” entre las dos columnas sabiendo que no podemos acceder a ellas. Disponemos de cinta métrica y un teodolito o grafómetro casero. Utiliza la técnica del doble punto de vista, tomando mediciones desde dos puntos separados una distancia conocida.

**Figura 19.** T7: Medir la distancia entre dos columnas a las que no podemos acceder



Fuente: Elaboración propia.

Fuente: Elaboración propia.

## 9. Anexo C. Enunciados de prácticas y problemas propuestos

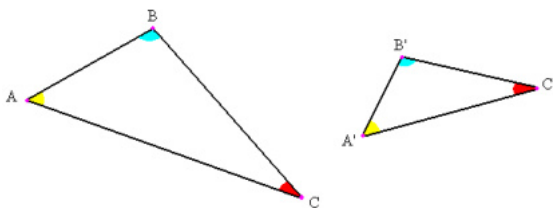
A continuación se presentan algunas prácticas y problemas a modo de ejemplo organizadas según los contenidos que tratan:

**Tabla 26. Test de conocimientos previos.**

### Test de conocimientos previos.

Algunos de los conceptos que vamos a ver en esta unidad ya los estudiaste el curso pasado. ¡Realiza rápidamente los siguientes ejercicios!

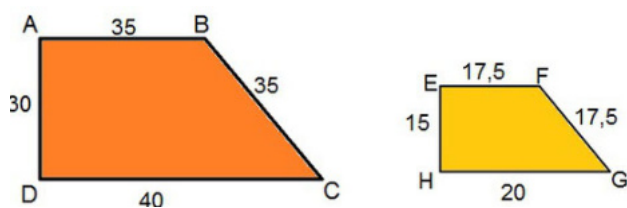
1. ¿Podrías decir si los siguientes triángulos son semejantes?



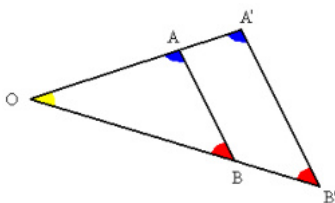
$$AB=8, BC=10, AC=14, A'B'=4, B'C'=5, A'C'=7$$

- Tienen los ángulos iguales
- Tienen los ángulos proporcionales
- Tienen los lados iguales
- Tienen los lados proporcionales

2. Estos dos polígonos son semejantes. Calcula la razón de semejanza (proporción entre sus lados).



3. Estos dos triángulos están en posición de ..... (Pitágoras, Thales o Aristóteles). Cumplen que sus ángulos son ..... (iguales o distintos) y sus lados son ..... (iguales, distintos o proporcionales).



4. Los triángulos rectángulos cumplen el teorema de Pitágoras, que dice que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la ..... de los cuadrados de los catetos. Calcula cuánto vale  $x$  en los siguientes casos:



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 27. Prácticas y problemas del bloque de Semejanza.

**C1 - Figuras semejantes. Razón de semejanza entre longitudes, áreas y volúmenes.**

1. Un televisor de 40 pulgadas cuesta aproximadamente cuatro veces más que uno de 20. Por extraño que parezca, el aumento de precio está justificado. ¿Puedes demostrarlo? El tamaño del televisor, indica la longitud de su diagonal en pulgadas.

Sol: Una longitud doble, implica un área cuatro veces mayor y por tanto necesita cuatro veces más componentes electrónicos.

2. La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y su masa es de 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

Sol: Como  $k=200$ , entonces altura = 1,5m.

**AMPLIACIÓN 1.** Uno de los problemas históricos de la Matemática es el de la duplicación de un cubo. En Atenas se desarrolló una tremenda peste que asolaba a la población. Incluso su gobernante, Pericles murió en el año 429 a. C. Consultado el oráculo de Apolo este dijo que se terminaría con la peste si se construía un altar que fuese doble del que había (que tenía forma de cubo). No se logró dar con la solución. Se debe buscar la razón de proporcionalidad entre los lados para que el volumen sea doble. La peste se terminó, pero el problema se quedó sin resolver durante siglos. ¡Ahora te toca a ti! ¿Presenta algún problema a la hora de fabricarlo?

Sol:  $K = \sqrt[3]{2}$

**C2 - El teorema de Thales. Triángulos en posición de Thales. Criterios de semejanza entre triángulos.**

1. Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de OBD es 20 cm, y OA mide 2 cm, AC mide 5 cm y OC mide 3 cm. Calcula las longitudes de los lados de OBD.

Sol:  $OB = 4\text{cm}$ ,  $OD = 6\text{cm}$  y  $BD = 10\text{cm}$ .

2. Tenemos un bastón que mide 1 m, si la sombra de un árbol mide 12 m, y la del bastón, mide 0,8 m, ¿cuánto mide el árbol?

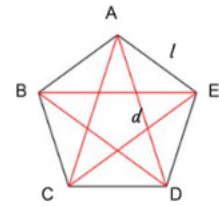


*Sol: altura árbol = 15m.*

**3.** Divide un segmento en 3 partes iguales con regla y compás. Divide otro segmento en 3 partes siendo la segunda el doble que la primera y la tercera el doble de la segunda.

**AMPLIACIÓN 1.** Halla la relación entre la diagonal  $d$  y el lado  $l$  de un pentágono regular siguiendo los pasos:

Demuestra que los triángulos  $ACD$  y  $AFE$  son semejantes (sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales). Para ello inscribe el pentágono en una circunferencia y utiliza el resultado de que los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan arcos iguales son iguales.



Si  $l = 1$ , calcula la proporción de los triángulos semejantes. Resuelve la ecuación en  $d$ . Te salen dos resultados, ¿con cuál de ellos te quedas? ¿por qué? ¿te recuerda a algo especial ese número?

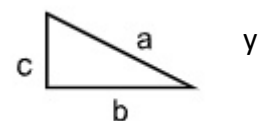
*Solución:  $d = \Phi \cdot l$*

### C3 - Relaciones de semejanza en triángulos rectángulos. Teorema del cateto, Teorema de la altura y Teorema de Pitágoras.

**1.** Calcula la medida de los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que:  
a) la altura sobre la hipotenusa mide 6 cm y la hipotenusa mide 13 cm.  
b) la proyección de uno de ellos sobre la hipotenusa es 4cm y la hipotenusa mide 6 cm.

**2.** Las casas de Antonio y Víctor se conectan siguiendo un camino recto. Todos los días van a un polideportivo que forma un triángulo rectángulo con los respectivos caminos que unen sus casas y el polideportivo. Observa la figura y responde:  
¿A qué distancia está la casa de Víctor del polideportivo?  
¿Qué distancia separa ambas casas?

**AMPLIACIÓN 1.** Demuestra el teorema de Pitágoras geoméricamente. Partimos del triángulo de la figura, de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ .



Ahora construimos dos cuadrados de lado  $b+c$



Dentro del primer cuadrado dibuja un cuadrado de lado  $b$ , otro cuadrado de lado  $c$  y cuatro triángulos como los de la figura de arriba.

Dentro del segundo cuadrado dibuja un cuadrado de lado  $a$  y cuatro triángulos como los de la figura de arriba (indicación: el cuadrado de lado  $a$  está "inclinado" dentro del cuadrado grande).

De los dibujos obtenemos los siguientes resultados:

- El área del cuadrado grande es igual a la suma del área del cuadrado de lado  $b$ , del cuadrado de lado  $c$  y de las áreas de los cuatro triángulos.
- El área del cuadrado grande es igual a la suma del área del cuadrado de lado  $a$  y de las áreas de los cuatro triángulos.

De donde deducimos que el área del cuadrado de lado  $a$  es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados  $b$  y  $c$ .

Fuente: Elaboración propia y extraídos de la web <https://apuntesmareaverde.org.es/>

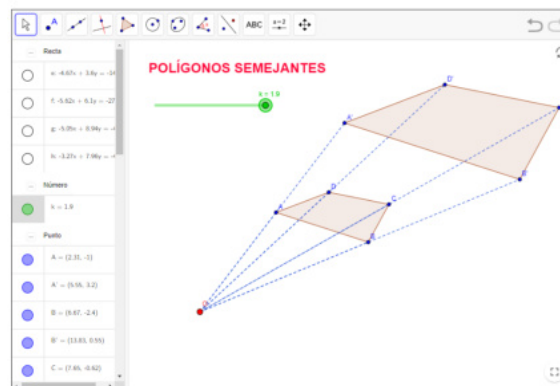
**Tabla 28. Práctica de Semejanza con GeoGebra.**

### Práctica de Semejanza con GeoGebra

Mediante el uso del editor GeoGebra online y utilizando el manual de la aplicación del [enlace](#) se crearán dos proyectos como los que aparecen en los ejemplos a continuación:

#### P1) [Creación de polígonos semejantes – GeoGebra.](#)

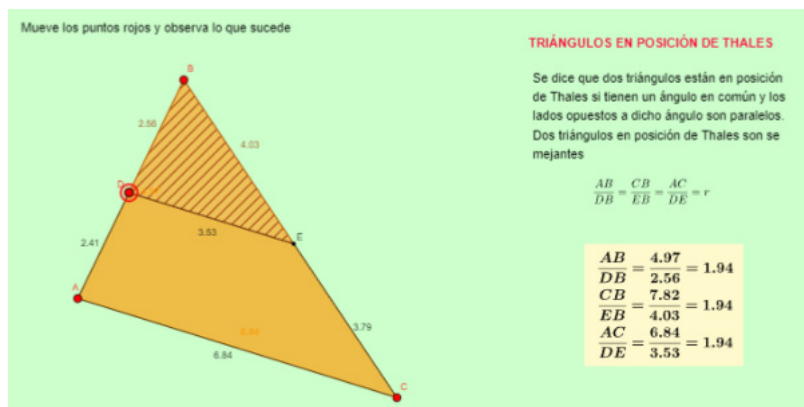
**Figura 20.** Homotecias con GeoGebra.



Fuente: Elaboración propia según GeoGebra.org.

En este proyecto el usuario final podrá manipular figuras semejantes creadas mediante una homotecia. Recordar que la homotecia requiere de un punto de origen y una razón de semejanza.

#### P2) [Triángulos en posición de Thales – GeoGebra](#)

**Figura 21.** Posición de Thales con GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia según GeoGebra.org.

El proyecto permite al usuario final observar cómo varía la razón de semejanza entre dos triángulos semejantes en posición de Thales según las longitudes de sus lados.

Fuente: Elaboración propia utilizando recurso online web <https://www.geogebra.org/>

**Tabla 29.** Prácticas y problemas del bloque de Trigonometría.

#### C4 - Medida de ángulos: sistema sexagesimal y en radianes.

1. Expresa en radianes las siguientes medidas:  $45^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $210^\circ$  y  $315^\circ$ .

2. Expresa en grados sexagesimales:  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{5}$  y  $\frac{3\pi}{8}$

#### C5 - Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

1. Sabiendo que  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , calcula las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente de  $\alpha$ .

#### C6 - Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

1. Sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo, el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:  $175^\circ$ ,  $-220^\circ$ ,  $316^\circ$  y  $4127^\circ$ .

#### C7 - Identidades trigonométricas.

1. Demuestra que  $\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cotan^2 \alpha$

### C8 - Resolución de triángulos rectángulos.

1. Resolver el triángulo ABC con ángulo recto en A en los dos casos siguientes:

a)  $\widehat{B} = 45^\circ$  y la hipotenusa  $a = 12\text{m}$ .

b) Los catetos miden 12 cm y 5 cm.

### C9 - Teorema del seno y teorema del coseno.

1. Resolver el siguiente triángulo  $B = 30^\circ$ ,  $a = 4\text{ cm}$  y  $b = 5\text{ cm}$ .

2. Resolver el siguiente triángulo del que conocemos  $B = 108^\circ$ ,  $c = 700\text{ m}$  y  $a = 1\ 200\text{ m}$ .

### C10 - Resolución de cualquier triángulo. Aplicaciones.

1. Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Si nos acercamos 50 m a la torre, ese ángulo se hace de  $60^\circ$ . Calcula la altura de la torre.

*Fuente: Elaboración propia y extraídos de la web <https://apuntesmareaverde.org.es/>*