



Universidad Internacional de La Rioja
Escuela Superior de Tecnología e Ingeniería

Máster Universitario en Astrofísica y Técnicas de Observación
en Astronomía

Modelo disipativo de la expansión del Universo: influencia del término de curvatura

Trabajo fin de estudio presentado por:	Alberto Daniel Fernández
Tipo de trabajo:	Iniciación a la investigación en Astronomía y Astrofísica
Línea de trabajo:	Cosmología y evolución del Universo
Director/a:	Jordi Gaset Rifa Roberto Baena Gallé
Fecha:	20/07/2023

Resumen

Se lleva a cabo la derivación de una versión modificada de las ecuaciones de Friedman, las cuales describen un universo en expansión con disipación de energía. La principal contribución radica en la inclusión de la curvatura k en estas ecuaciones. Para lograr esto, se propone un tensor de disipación que reemplaza al término de constante cosmológica en las ecuaciones de campo de Einstein.

Aunque la deducción se realiza de manera rigurosa, la prueba del modelo se lleva a cabo para casos discretos, imponiendo restricciones como la conservación del tensor energía-momento y la evolución del factor de escala a través de una ley de potencias del tipo $a = a_0(t/t_0)^\alpha$.

A partir de este modelo de prueba, se obtiene un comportamiento variable de la relación $\omega = P/\rho$, por lo que se observa el dominio de una u otra componente en el Universo, dependiendo de la época y del valor de α .

Palabras clave: gravedad modificada, ecuaciones de Friedman, cosmología, relatividad general

Abstract

The derivation of a modified version of the Friedman equations, which describe an expanding universe with energy dissipation, is carried out. The main contribution lies in the inclusion of the k -curvature in these equations. To achieve this, a dissipation tensor is proposed to replace the cosmological constant term in Einstein's field equations.

Although the derivation is performed in a rigorous way, the test of the model is carried out for discrete cases by imposing constraints such as conservation of the energy-momentum tensor and evolution of the scale factor through a power law of the type $a = a_0(t/t_0)^\alpha$.

From this test model, a variable behavior of the relation $\omega = P/\rho$ is obtained, so that the dominance of one or another component in the universe is observed, depending on the epoch and the value of α .

Keywords: modified gravity, Friedman equations, cosmology, general relativity.

Índice de contenidos

1. Introducción	8
1.1. Justificación.....	10
1.2. Notación utilizada	10
2. Estado del arte	12
2.1. Ecuaciones cosmológicas clásicas.....	12
2.1.1. Ecuaciones de campo de Einstein	12
2.1.2. Expansión del Universo y la constante cosmológica.....	13
2.1.3. La métrica FLRW	15
2.1.4. Ecuaciones de Friedman.....	15
2.2. Modelo de expansión del Universo con un modelo no conservativo	16
3. Objetivos de la investigación.....	20
4. Derivación de tensores comunes al modelo clásico	21
4.1. Cálculos a partir de la métrica	21
4.1.1. Componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico.....	21
4.1.2. Símbolos de Christoffel.....	22
4.1.3. Tensor de Ricci.....	23
4.1.4. Escalar de curvatura	25
4.2. Tensor energía-momento	26
5. Derivación de las nuevas ecuaciones cosmológicas	28
5.1. Términos de disipación	28
5.1.1. Derivadas covariantes de ψ_μ	28
5.1.2. Cálculo del tensor $\Psi_{\mu\nu}$	29
5.1.3. Cálculo del escalar Ψ	30
5.1.4. Tensor de disipación.....	30

5.2.	Ecuaciones modificadas de Friedman.....	31
5.2.1.	Solución para la coordenada temporal	31
5.2.2.	Solución para las coordenadas espaciales.....	32
5.3.	Identidad de Bianchi	33
5.4.	Forma final de las ecuaciones modificadas de Friedman.....	35
6.	Interpretación física	36
6.1.	Primera ecuación de Friedman modificada en un universo solo con curvatura.....	36
6.1.1.	Universo plano, $k = 0$	37
6.1.2.	Universo cerrado, $k = +1$	38
6.1.3.	Universo abierto, $k = -1$	38
6.2.	Modelo con disipación, curvatura y materia sujeta a una ley de potencias	39
6.2.1.	Condición de densidad positiva.....	41
6.2.2.	Valores asintóticos de la densidad	43
6.2.3.	Valores asintóticos de la presión.....	49
6.2.4.	Valores asintóticos de ω	54
7.	Conclusiones finales y trabajo futuro.....	62
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	64
Anexo A.	Cálculo de los símbolos de Christoffel.	67
Anexo B.	Componentes del Tensor de Ricci	71

Índice de figuras

Figura 1. Comportamiento de la densidad respecto a ζ , para $k = +1$ y $\alpha = 0.4$. Fuente: elaboración propia.....	42
Figura 2. Evolución de la densidad respecto al parámetro ζ para (a) $k = 0, \alpha = 2/3$ y (b) $k = +1, \alpha = 2$. Se observan solo valores positivos de ρ , así como una disminución respecto a ζ . Fuente: elaboración propia.	42
Figura 3. Evolución del parámetro ω respecto a ζ para (a) $\alpha = -2$, (b) $\alpha = -5$, (c) $\alpha = -20$ y (d) $\alpha = -60$. Línea roja: $k = 0$, línea azul: $k = +1$, línea verde: $k = -1$. Fuente: elaboración propia.....	58
Figura 4. Evolución del parámetro ω respecto a ζ para (a) $\alpha = 2$, (b) $\alpha = 5$, (c) $\alpha = 20$ y (d) $\alpha = 60$. Línea roja: $k = 0$, línea azul: $k = +1$, línea verde: $k = -1$. Fuente: elaboración propia.....	60

Índice de tablas

Tabla 1. Resumen de los resultados al evaluar los límites de densidad cuando $\zeta \rightarrow 0$ y $k = +1$ en las ecuaciones (114) y (115), para distintos rangos de α	45
Tabla 2. Resumen de los resultados al evaluar los límites de densidad cuando $\zeta \rightarrow 0$ y $k = -1$ en la ecuación (121), para distintos rangos de α	46
Tabla 3. Resumen de los resultados al evaluar los límites de presión cuando $\zeta \rightarrow 0$ y $k = +1$ en las ecuaciones (134) y (135), para distintos rangos de α	51
Tabla 4. Resumen de los resultados al evaluar los límites de presión cuando $\zeta \rightarrow 0$ en la ecuación (134) y el negativo de la ecuación (135), para distintos rangos de α	52

1. Introducción

El modelo estándar de Cosmología se fundamenta en la Relatividad General, formulada por Albert Einstein en 1915 (Einstein, 1915b). Sus ecuaciones de campo (Einstein, 1915a) establecen la relación entre la geometría del espacio-tiempo y el contenido de materia y energía dentro de él. Esta correspondencia implica que el contenido de materia y energía en una región del espacio-tiempo es la causa de la geometría, y, por lo tanto, de la curvatura de dicha región.

En este trabajo se utilizará la solución de las ecuaciones de campo conocida como métrica FLRW (Friedman-Lemaître-Robertson-Walker), la cual se apoya en el principio cosmológico¹ y considera un universo homogéneo, isótropo, con curvatura y en expansión (Weinberg, 2008). Dicha expansión es, en principio, variable con el tiempo.

La dinámica de expansión del Universo está descrita por las ecuaciones de Friedman, obtenidas al combinar las ecuaciones de campo de Einstein con la métrica FLRW, mencionadas en el párrafo anterior. De acuerdo al modelo que se adopte, se puede determinar si el Universo está en expansión y si dicha expansión es acelerada (Jones, 2017).

La expansión del Universo se ha verificado observacionalmente a lo largo de las últimas décadas. Ejemplos de publicaciones al respecto se encuentran en Astier & Pain (2012), Yunes, et. al. (2016) y Agrawal, et. al. (2023).

La gravedad modificada surge como un conjunto de teorías capaces de explicar el comportamiento del Universo a gran escala, argumentando que, si bien a pequeñas escalas (por ej., el Sistema Solar) la relatividad general es bastante exacta, pierde precisión a escalas más grandes, observándose desviaciones del modelo estándar. Dichas teorías postulan alternativas a la energía oscura que expliquen la expansión del Universo. Una revisión bastante completa de las teorías de gravedad modificada, se puede encontrar en Koyama (2016).

En el campo de las teorías de gravedad modificada, surge la derivación realizada por Paiva, Lazo y Zanchin (2022), quienes consideraron un modelo cosmológico con disipación de energía

¹ El principio cosmológico establece que, a escalas lo suficientemente grandes, el Universo espacialmente es homogéneo e isótropo.

en el Universo. Los autores obtuvieron una versión modificada de las ecuaciones de Friedman, ofreciendo una formulación alternativa a través de un término disipativo que, bajo ciertas condiciones, modela la constante cosmológica. Los autores plantearon un modelo *action-dependent*, donde el lagrangiano depende de la propia acción, acotando su modelo a un universo plano.

La motivación principal de este trabajo, en línea con el realizado por Paiva et. al. (2022), es ampliar las ecuaciones a un término de curvatura genérica, evitando restringirlas a un universo con geometría minkowskiana².

El apartado 2 de este trabajo establece la base teórica necesaria para el desarrollo matemático posterior. Se inicia con la presentación de las ecuaciones de campo de Einstein y la versión clásica de las ecuaciones de Friedman. Además, se exponen las ecuaciones cosmológicas derivadas por Paiva, et. al. (2022), con las características mencionadas anteriormente.

En el apartado 3, se definen los objetivos de la investigación, delineando los alcances y metas que se pretenden alcanzar mediante el estudio.

Posteriormente, en el apartado 4, se llevan a cabo cálculos clásicos de relatividad general para deducir las componentes tensoriales que se integrarán en las ecuaciones de campo.

La contribución de este trabajo se encuentra en los siguientes dos apartados. En el apartado 5, se desarrollan las ecuaciones cosmológicas que consideran tanto la expansión del Universo como su curvatura. Esta derivación representa una extensión de los resultados obtenidos por Paiva, et. al. (2022), como se mencionó anteriormente.

En el apartado 6 se hace una interpretación física de lo deducido en el apartado anterior, acotando el análisis a casos discretos para observar el comportamiento del Universo según la componente en distintas épocas.

² La geometría minkowskiana es una extensión de la geometría euclidiana (plana), que incluye una coordenada temporal, además de las coordenadas espaciales.

1.1. Justificación

Una vez derivadas las nuevas ecuaciones cosmológicas para un universo que considera disipación de energía, expansión, presencia de materia y curvatura, la pregunta a responder en el presente trabajo es: ¿cuál es la influencia de agregar el término de curvatura en las ecuaciones modificadas de Friedman? Con esto se obtendrá una descripción, al menos de forma cualitativa, de la evolución dinámica de dicho universo.

El trabajo propuesto busca contribuir al avance teórico en el campo de la gravedad modificada, proporcionando una base para el desarrollo de modelos matemáticos más refinados. Estos modelos podrían ofrecer una explicación alternativa al modelo cosmológico actual basado en la Relatividad General. Mediante este enfoque, se espera avanzar en la comprensión de la dinámica cosmológica y promover el desarrollo de teorías que expandan la visión actual del Universo.

1.2. Notación utilizada

La notación a utilizar en este texto será necesaria introducirla aquí debido a que se empleará a partir de desde la siguiente sección. Se harán algunos matices con la notación vectorial y tensorial tradicional

Durante todo el texto, se estará trabajando continuamente en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, en coordenadas esféricas, donde t será la coordenada temporal (tiempo comóvil) y la terna (r, θ, φ) serán las coordenadas espaciales, siendo r la coordenada radial, θ el ángulo polar y φ el ángulo azimutal³. Además, se asumirá en todo momento que el valor de la rapidez en el vacío es 1 año-luz/año, es decir, $c = 1$ (razón por la cual la coordenada temporal es t y no ct). No se asumirá ningún otro valor salvo aclaración explícita.

Para hacer la notación más intuitiva, las componentes de los vectores y tensores tendrán los índices t, r, θ y φ para referirse a tales coordenadas, en lugar de los típicos 0, 1, 2, 3. Así pues, un cuadvectores A tendrá componentes covariantes A_μ y componentes contravariantes A^μ dadas por:

³ En el presente texto, se diferenciarán los símbolos ϕ y φ . El primero adquirirá un significado específico en el siguiente apartado.

$$A_\mu = (A_t, A_r, A_\theta, A_\varphi) \quad A^\mu = (A^t, A^r, A^\theta, A^\varphi) \quad (1)$$

Análogamente, un tensor de la forma $P_{\mu\nu}$, tendrá las siguientes componentes:

$$P_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} P_{tt} & P_{tr} & P_{t\theta} & P_{t\varphi} \\ P_{rt} & P_{rr} & P_{r\theta} & P_{r\varphi} \\ P_{\theta t} & P_{\theta r} & P_{\theta\theta} & P_{\theta\varphi} \\ P_{\varphi t} & P_{\varphi r} & P_{\varphi\theta} & P_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (2)$$

En general se utilizarán índices libres griegos, pero en caso de aparecer índices latinos, no tendrán un significado especial. También se utilizará continuamente el convenio de suma de Einstein, el cual se puede consultar en la sección 2.4 de Dalarsson (2015) para más detalles.

Las derivadas parciales se denotarán como subíndices del símbolo ∂ , respecto a la variable a la que se esté derivando. Por ejemplo, las derivadas parciales de una función hipotética $N(t, r, \theta, \varphi)$ serían:

$$\partial_t N \equiv \frac{\partial N}{\partial t} \quad \partial_r N \equiv \frac{\partial N}{\partial r} \quad \partial_\theta N \equiv \frac{\partial N}{\partial \theta} \quad \partial_\varphi N \equiv \frac{\partial N}{\partial \varphi} \quad (3)$$

Por último, se utilizará la notación típica de ∇_μ para la derivada covariante.

2. Estado del arte

En este apartado se establece la base teórica del presente trabajo, se divide en dos secciones principales. En primer lugar, se presentan las ecuaciones que caracterizan el modelo cosmológico actual, las cuales brindan una explicación de la dinámica evolutiva del Universo. En segundo lugar, se introduce brevemente el marco conceptual necesario para modelar la evolución de un universo que considera la disipación de energía.

2.1. Ecuaciones cosmológicas clásicas

En esta sección se presentarán las ecuaciones cosmológicas en su versión original, partiendo de las ecuaciones de campo de la Relatividad General, y concretando progresivamente el marco conceptual hasta el caso específico a analizar.

2.1.1. Ecuaciones de campo de Einstein

En 1915, en la publicación de su Teoría General de la Relatividad, Albert Einstein dio a conocer sus ecuaciones de campo (Einstein, 1915a), las cuales, escritas en forma tensorial (en su versión final), tienen la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4)$$

En donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de curvatura o escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, G es la constante de gravitación universal de Newton, $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento⁴ y Λ es la constante cosmológica⁵. El lado izquierdo de la ecuación da una idea de la curvatura del espacio-tiempo, y el lado derecho da información sobre el contenido de materia y energía en dicho espacio-tiempo, causante de su geometría.

El tensor de Ricci y el escalar de curvatura dependen de los símbolos de Christoffel (que a su vez dependen del tensor métrico y de sus primeras derivadas), y también de las propias

⁴ En el siguiente epígrafe se darán las definiciones matemáticas de $g_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, R y $T_{\mu\nu}$, puesto que se utilizarán para realizar los cálculos posteriores. En esta sección se muestran estas magnitudes a modo de presentación.

⁵ En la sección 2.1.2 se darán más detalles acerca de la naturaleza de la constante cosmológica, y se explicará por qué no será tenida en cuenta como tal en los cálculos del presente texto.

derivadas de los símbolos de Christoffel. Se puede concluir que la ecuación (4) contiene al tensor métrico, así como a sus derivadas de primer y segundo orden (Janssen, 2013).

Por lo expuesto anteriormente, las ecuaciones de campo tienen un carácter fuertemente no lineal, es decir, la superposición de dos soluciones no es una nueva solución (Janssen, 2013). Dar una solución completa a estas ecuaciones de campo implica resolver un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden acopladas, algo que lo hace casi imposible de resolver analíticamente (Kotlařík & Kofroň, 2022).

Sin embargo, históricamente se han encontrado diversas soluciones exactas a estas ecuaciones para casos particulares, la primera de todas fue encontrada por Schwarzschild unos pocos meses después de la publicación de la Relatividad General, para un objeto estático de simetría esférica (Schwarzschild, 1916). La solución con la que se trabajará en este texto será la métrica FLRW, la cual se discutirá brevemente en la sección 2.1.3.

2.1.2. Expansión del Universo y la constante cosmológica.

En la década de 1920, el astrónomo estadounidense Edwin Hubble, en su estudio de galaxias, descubrió observacionalmente que estas se estaban alejando de la Vía Láctea, y alejándose entre sí. Adicionalmente, notó que cuanto mayor era la distancia entre una galaxia y la Vía Láctea, mayor era su velocidad de alejamiento (Kragh & Smith, 2003); la interpretación de este descubrimiento fue que el Universo se estaba expandiendo, y según observaciones actuales, lo está haciendo a un ritmo acelerado (Astier & Pain, 2012).

Una medida del ritmo de expansión del Universo es el parámetro de Hubble, dado por:

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (5)$$

En donde $a(t)$ es el factor de escala, que relaciona la distancia física con la distancia comóvil, y $\dot{a}(t)$ es su derivada temporal (Riddle, 2001).

Las mediciones actuales de la constante de Hubble $H_0 = H(t_0)$ (parámetro de Hubble evaluado en la época actual) se basan en dos métodos principales, que históricamente fueron reduciendo su barra de error, pero no convergen en el mismo valor (dicha discrepancia se conoce como la “tensión de Hubble”). Los métodos se basan en:

- La medición de anisotropías del fondo cósmico de microondas (CMB), realizada por la colaboración Planck, combinando información de temperatura, mapas de polarización y *lensing reconstruction*. Asumiendo el modelo Λ CDM, el valor obtenido fue de $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Planck Colaboration, 2020).
- Por observación de supernovas tipo Ia y cefeidas, combinando los datos del *Hubble Space Telescope (HST)* con estudios anteriores, se obtuvo un valor de $H_0 = 74.03 \pm 1.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Riess, et. al., 2019).

Recientemente se ha propuesto un tercer método, independiente de los citados anteriormente, basado en ondas gravitacionales con los datos obtenidos por LIGO y VIRGO (Abbott, et. al., 2021), pero como la cantidad de datos todavía no es suficiente para hacer un estudio estadístico robusto, las barras de error son aún mejorables. Sin embargo, el valor de la constante de Hubble reportado por los autores es de $H_0 = 69_{-8}^{+17} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

La expansión del Universo se tiene en cuenta en la ecuación (4) en el término Λ , la constante cosmológica. Es una constante real, originalmente introducida por Einstein en sus ecuaciones para permitir la descripción de un universo finito, cerrado y estático, en el cual, la geometría está determinada solo por la densidad de energía de la materia contenida en él (Padmanabhan, 2003).

Actualmente, en lugar de describir un universo con las características citadas anteriormente, se utiliza la constante cosmológica para describir un universo en expansión, causada por la llamada energía oscura o energía de vacío, de naturaleza aún desconocida.

Un tratamiento bastante completo acerca de la constante cosmológica se puede encontrar en la revisión hecha por Padmanabhan (2003), en donde el autor define una “constante cosmológica efectiva” en función a un potencial $V(\Phi)$ como $\Lambda_{eff} = \Lambda + 8\pi G V(\Phi_{\min})$, acota su valor en $\Lambda_{eff} < 10^{-56} \text{ cm}^2$, y escribe lo siguiente:

“Si las observaciones son correctas, entonces Λ_{eff} es una constante muy pequeña, no nula, y su valor está extremadamente bien ajustado sin razón aparente”.

En el presente trabajo, se analiza una propuesta alternativa al modelo estándar de Cosmología, reemplazando el término $\Lambda g_{\mu\nu}$ en las ecuaciones de campo por un término al que se le pueda atribuir un significado físico que tiene que ver con la disipación de la energía durante la expansión.

2.1.3. La métrica FLRW

Una métrica que describa el Universo, debe reunir características de homogeneidad e isotropía, como sugieren las observaciones actuales (Secrest, et. al., 2022). Según Janssen (2013), la invariancia bajo traslaciones en el espacio, es decir, $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0$, implica que no existe un punto especial en el espacio, pudiéndose elegir el origen del sistema de coordenadas arbitrariamente, y esto se conoce como homogeneidad del espacio. Así también, según el mismo autor, el hecho de que todas las direcciones del espacio sean equivalentes y en consecuencia que no exista una dirección privilegiada, se conoce como isotropía del espacio. Como se comentó en la sección 2.1.1, una de las soluciones dadas a la ecuación (4) es la métrica que se atribuye (en su versión final) a Friedman, Lemaître, Robertson y Walker (por las iniciales de los autores, es conocida como la métrica FLRW). Siendo $a(t)$ el factor de escala definido en la sección 2.1.2, y k la constante de curvatura del Universo, la métrica FLRW viene dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (6)$$

Esta métrica describe superficies maximalmente simétricas, con curvatura constante y secciones espaciales homogéneas e isótropas en todo momento. Todas las direcciones espaciales evolucionan de la misma manera y, por lo tanto, están multiplicadas por el mismo factor de escala, reproduciendo las características demandadas de un universo homogéneo e isótropo (Janssen, 2013).

En la ecuación (6), el término k describe la curvatura en un espacio tridimensional en un instante particular de tiempo. El valor $k = 0$ corresponde a un modelo de espacio plano, mientras que $k = +1$ (curvatura positiva) corresponde a un modelo de universo cerrado y el valor de $k = -1$ (curvatura negativa) corresponde a un modelo de universo abierto (Dalarsson & Dalarsson, 2015).

2.1.4. Ecuaciones de Friedman

Un esbozo de la derivación de las ecuaciones de Friedman consiste en (i) calcular los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura a partir de la métrica (6), (ii) calcular el tensor energía-momento en coordenadas comóviles y (iii) reemplazar los resultados,

componente a componente, en las ecuaciones de campo (4). La deducción completa se puede encontrar en Arnau Romeu (2014). En los siguientes párrafos se presentan los resultados finales.

Al reemplazar la componente tt de cada tensor, se obtiene la primera ecuación de Friedman⁶:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (7)$$

En donde se considera que el Universo está formado por un fluido en equilibrio térmico de densidad $\rho(t)$ y presión $p(t)$; ambas variables son funciones del tiempo (Weinberg, 2008). Análogamente, si se reemplazan las componentes rr , $\theta\theta$ y $\varphi\varphi$, reproducen en los tres casos exactamente la misma ecuación (lo cual evidencia la isotropía espacial), conocida como la segunda ecuación de Friedman⁷:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (8)$$

Las demás componentes, de índices $\mu\nu$ para $\mu \neq \nu$, reproducen soluciones triviales.

El sistema de ecuaciones (7) y (8) contienen tres funciones: $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$, y para resolverlas se necesita una tercera ecuación, particularmente una ecuación de fluido que relacione la densidad con la presión. Uzan y Lehoucq (2001) obtienen y analizan soluciones para distintos escenarios, como los universos EdS (universo plano sin constante cosmológica), AdS (universo plano con constante cosmológica positiva) y el de Milne (universo con curvatura hiperbólica sin constante cosmológica).

2.2. Modelo de expansión del Universo con un modelo no conservativo

El fundamento teórico que da origen a las ecuaciones de campo que se utilizarán en los siguientes apartados es el principio variacional de Herglotz, para una revisión se puede consultar Gaset, et. al. (2022).

⁶ La forma tradicional de expresar la ecuación de Friedman, sin asumir que $c = 1$, es $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - k\frac{c^2}{a^2}$

⁷ La forma tradicional de expresar la segunda ecuación de Friedman, sin asumir que $c = 1$, es $\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$

El presente trabajo está inspirado en el artículo publicado por Paiva, et. al. (2022). Los autores presentan una aplicación cosmológica del modelo variacional de Herglotz, en donde la función lagrangiana \mathcal{L} es dependiente de la propia acción $S(t)$.

En su versión mecánica, el problema consiste en determinar una curva $x(t)$ que extremice el valor de la acción $S(x)$ dada por:

$$S(b) = \int_a^b \mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t), S(t)) dt \quad (9)$$

Donde $a < b$, aplicando las siguientes condiciones de frontera:

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b \quad (10)$$

Recalcando que $S(x)$ es un funcional, dependiente de la función $x(t)$. La solución debe satisfacer la ecuación generalizada de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (11)$$

En el caso de que el lagrangiano no dependa de la acción, las ecuaciones (9) y (11) recuperan la formulación hamiltoniana clásica.

En la versión del principio variacional de Herglotz aplicada a teoría de campos, el lagrangiano pasa a ser función de las coordenadas (como el caso mecánico), pero también de la métrica y sus derivadas, y tiene la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \psi_\nu s^\nu \quad (12)$$

Donde:

$$\mathcal{L}_g(x^\mu, g_{\alpha\beta}, \partial_\mu g_{\alpha\beta}, \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (13)$$

Los autores mencionan que, debido a que \mathcal{L}_g es un invariante (densidad escalar), las ecuaciones de campo resultantes estarán dadas por una ecuación tensorial, a la cual no será necesaria asociarle un sistema de coordenadas preferencial.

Para un espacio-tiempo de n dimensiones definido por la variedad suave \mathcal{M} , se puede considerar un subespacio \mathcal{V} de frontera Ω , siendo esta frontera una superficie de Jordan con vectores normales n_μ . Entonces, análogamente a la ecuación (9), la acción adquiere la forma:

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} n_\mu s^\mu \sqrt{|h|} d^{n-1}x = \int_{\mathcal{V}} \nabla_\mu s^\mu d^n x \quad (14)$$

Cumpléndose que:

$$\nabla_\mu s^\mu = \mathcal{L}(x^\nu, g_{\alpha\beta}, \partial_\nu g_{\alpha\beta}, s^\nu) \quad (15)$$

En donde s^μ es un campo vectorial diferenciable correspondiente a la densidad de la acción y h es la métrica inducida. Además, los autores mencionan que, debido a que \mathcal{L}_g es función de las segundas derivadas de la métrica, será necesario imponer otras condiciones de frontera, además de las mencionadas en la ecuación (10). Dichas condiciones quedan implícitas en la ecuación (15), y consisten en que tanto la métrica $g_{\alpha\beta}$ como sus derivadas $\partial_\nu g_{\alpha\beta}$ queden restringidas a Ω .

Calculando la variación de S e igualándola a cero para cualquier \mathcal{V} , es decir, $\delta S(\Omega) = 0$, se obtienen las ecuaciones de campo generalizadas:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + J_{\mu\nu} = \frac{F}{2} T_{\mu\nu} \quad (16)$$

En donde $F = F(x)$. Para el caso de las ecuaciones de campo dadas por (4), $F = 16\pi G$, expresión que se utilizará en este trabajo, pero permitiendo que G varíe arbitrariamente con las coordenadas. El tensor de disipación $J_{\mu\nu}$ es definido como:

$$J_{\mu\nu} = \Psi_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Psi \quad (17)$$

Siendo $\Psi_{\mu\nu}$ un tensor simétrico dado por:

$$\Psi_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\nabla_\nu \psi_\mu + \nabla_\mu \psi_\nu) - \psi_\mu \psi_\nu \quad (18)$$

De traza $\Psi = \Psi_\mu^\mu = g^{\mu\nu} \Psi_{\mu\nu}$.

Siguiendo un proceso análogo al descrito en la sección 2.1.4, se obtienen las ecuaciones de Friedman modificadas para un espacio plano ($k = 0$). Siendo $\psi_\nu = (\phi(t), 0, 0, 0)$, en la coordenada temporal, la primera ecuación de Friedman modificada es:

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} = 8\pi G \rho \quad (19)$$

Para las tres coordenadas espaciales se obtiene el mismo resultado, recalando que la variedad es espacialmente isótropa. El resultado es la segunda ecuación de Friedman modificada:

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \dot{\phi}^2 - \ddot{\phi} = -8\pi G p \quad (20)$$

Tomando como punto de partida la ecuación (16), en el presente trabajo se busca derivar nuevas versiones de las ecuaciones (19) y (20), que contengan un término de curvatura k , evitando restringirlas a $k = 0$, para luego evaluar su comportamiento.

3. Objetivos de la investigación

Los objetivos generales del trabajo son dos: el primero es derivar la versión modificada de las ecuaciones de Friedman que incluyan el término de curvatura, y el segundo es realizar una interpretación física de las mismas.

Para ello, se establecen los siguientes objetivos específicos:

- Reproducir los cálculos de relatividad general, referentes tanto a la parte geométrica como a la parte del contenido de materia y energía del modelo estudiado.
- Deducir las componentes del tensor de disipación, generalizados para un término de curvatura genérico.
- Deducir las ecuaciones de Friedman modificadas, para un término de curvatura genérico, mediante el uso de las ecuaciones de campo.
- Realizar, analítica y gráficamente, el estudio del comportamiento de las funciones obtenidas.
- Asociar los resultados a distintos escenarios posibles del Universo.

4. Derivación de tensores comunes al modelo clásico

Los cálculos para obtener las ecuaciones de Friedman modificadas serán divididos en dos apartados. En este apartado se hará la derivación de los tensores que aparecen tanto en el modelo estándar como en el modelo modificado, reproduciendo cálculos clásicos de relatividad general, obteniendo expresiones para todos los tensores de la ecuación de campo (16), excepto el tensor de disipación. En el siguiente apartado se llevará a cabo la derivación de la contribución relacionada con la disipación de energía, llegando finalmente a las ecuaciones modificadas de Friedman.

4.1. Cálculos a partir de la métrica

En este apartado se hará la derivación de la parte de la ecuación (16) relacionada con la geometría del espacio-tiempo. La métrica (6) da información de las componentes del tensor métrico, y a partir de estas componentes, se calcularán las componentes del tensor de Ricci y el escalar de curvatura.

4.1.1. Componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico

Debido a que la métrica (6) está escrita de la forma $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ y no existen términos cruzados (por ejemplo, términos del tipo $dt dr$), se deduce que las componentes covariantes del tensor métrico son:

$$g_{tt} = -1 \quad (21.1) \qquad g_{\theta\theta} = a^2 r^2 \quad (21.3)$$

$$g_{rr} = \frac{a^2}{1 - kr^2} \quad (21.2) \qquad g_{\varphi\varphi} = a^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (21.4)$$

Donde, por simplicidad, el factor de escala $a(t)$ se denotó como a . Debido a que el tensor métrico se puede representar como una matriz diagonal, las componentes contravariantes, que responden a la inversa de dicha matriz, se obtienen simplemente de la inversa de cada componente, es decir, para cada componente $g_{\mu\nu}$, la componente contravariante correspondiente es:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}} \quad (22)$$

Explícitamente, las componentes son:

$$g^{tt} = -1 \quad (23.1)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2 r^2} \quad (23.3)$$

$$g^{rr} = \frac{1 - kr^2}{a^2} \quad (23.2)$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \quad (23.4)$$

4.1.2. Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel se calculan a partir de las componentes de la métrica, siguiendo la expresión general:

$$\Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\gamma} g_{\beta\lambda} + \partial_{\lambda} g_{\beta\gamma} - \partial_{\beta} g_{\gamma\lambda}) \quad (24)$$

Asumiendo que cada componente $\Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha}$ es simétrica respecto a los índices inferiores γ y λ , es decir, $\Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha} = \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha}$. Como ejemplo, para calcular el símbolo Γ_{rr}^t , en la ecuación (24), se reemplaza $\alpha = r$ y $\gamma = \lambda = r$, quedando:

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_r g_{\beta r} + \partial_r g_{\beta r} - \partial_{\beta} g_{rr}) \quad (25)$$

Para que $g^{t\beta}$ sea no nula, se debe cumplir que $\beta = t$, pues g^{tt} es la única componente no nula de la métrica (6) con al menos un índice igual a t . Luego, ya que g^{tt} es constante (ecuación (23.1)), su derivada respecto a cualquier coordenada son cero, lo cual anula los primeros dos términos de la ecuación. La ecuación (25) queda reducida a:

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (-\partial_t g_{rr}) \quad (26)$$

Y, reemplazando los valores de las componentes del tensor métrico dados por (23.1) y (21.2) en la ecuación (26), se sigue que:

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} (-1) \left[-\partial_t \left(\frac{a^2}{1 - kr^2} \right) \right] \quad (27)$$

Desarrollando la derivada temporal y reduciendo los términos se llega a:

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \quad (28)$$

Un cálculo detallado de todos los símbolos de Christoffel se muestra en el Anexo A, donde se observa que la mayoría de las componentes son nulas. A continuación, se resumen los valores de las componentes no nulas de los símbolos de Christoffel:

- Componentes que poseen índice superior t :

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \quad (29.1) \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2 \quad (29.2) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (29.3)$$

- Componentes que poseen índice superior r :

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \frac{\dot{a}}{a} \quad (30.1) \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - kr^2) \quad (30.3)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2} \quad (30.2) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2 \theta (1 - kr^2) \quad (30.4)$$

- Componentes que poseen índice superior θ :

$$\Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{\dot{a}}{a} \quad (31.1) \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \quad (31.2) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad (31.3)$$

- Componentes que poseen índice superior φ :

$$\Gamma_{t\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi t}^\varphi = \frac{\dot{a}}{a} \quad (32.1) \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} \quad (32.2) \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (32.3)$$

4.1.3. Tensor de Ricci

Las componentes del tensor de Ricci se calculan a partir de los símbolos de Christoffel siguiendo la expresión:

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \quad (33)$$

El mismo es simétrico respecto a los índices inferiores, es decir, $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$ (Dalarsson & Dalarsson, 2015). Un cálculo detallado de todas las componentes se da en el Anexo B. Las componentes $R_{\alpha\beta}$ con $\alpha \neq \beta$ son nulas.

Como ejemplo, se muestra el cálculo de la componente R_{tt} , para la cual, la ecuación (33) adquiere la forma:

$$R_{tt} = \partial_\lambda \Gamma_{tt}^\lambda - \partial_t \Gamma_{t\lambda}^\lambda + \Gamma_{tt}^\nu \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda - \Gamma_{t\lambda}^\nu \Gamma_{\nu t}^\lambda \quad (34)$$

Ningún símbolo de Christoffel no nulo (resultados de la sección 4.1.2) tiene componentes inferiores tt , por lo que el primer término y el tercer término de la ecuación son nulos, independientemente de los valores de λ y ν . Para el segundo término, los términos no nulos de la forma $\Gamma_{t\lambda}^\lambda$ corresponden a $\lambda = (r, \theta, \varphi)$, por lo que:

$$\Gamma_{t\lambda}^\lambda = \Gamma_{tr}^r + \Gamma_{t\theta}^\theta + \Gamma_{t\varphi}^\varphi \quad (35)$$

Según los resultados de la sección 4.1.2, $\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\varphi}^\varphi = \dot{a}/a$, por lo tanto, para la ecuación (35) se cumple que:

$$\Gamma_{t\lambda}^\lambda = 3 \frac{\dot{a}}{a} \quad (36)$$

En cuanto al último término de la ecuación (34), las componentes que cumplen las condiciones para los índices libres λ y ν son los que tienen la forma $\Gamma_{t\lambda}^\lambda$ en donde $\lambda = (r, \theta, \varphi)$, por lo que dicho término queda reducido a:

$$\Gamma_{t\lambda}^\nu \Gamma_{\nu t}^\lambda = (\Gamma_{tr}^r)^2 + (\Gamma_{t\theta}^\theta)^2 + (\Gamma_{t\varphi}^\varphi)^2 \quad (37)$$

Donde, según lo mencionado anteriormente, $\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\varphi}^\varphi = \dot{a}/a$, y la ecuación (37) queda:

$$\Gamma_{t\lambda}^\nu \Gamma_{\nu t}^\lambda = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad (38)$$

Introduciendo los resultados de las ecuaciones (36) y (38) en la ecuación (34):

$$R_{tt} = -3\partial_t \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad (39)$$

Finalmente, desarrollando la derivada temporal y reduciendo los términos, se llega a que $R_{tt} = -3 \ddot{a}/a$.

Las componentes no nulas del tensor de Ricci se resumen a continuación:

$$R_{tt} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (40.1) \quad R_{\theta\theta} = r^2(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k) \quad (40.3)$$

$$R_{rr} = \frac{2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k}{1 - kr^2} \quad (40.2) \quad R_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k) \quad (40.4)$$

4.1.4. Escalar de curvatura

La expresión general del escalar de curvatura es (Dalarsson & Dalarsson, 2015):

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (41)$$

Donde las componentes del tensor de Ricci son dadas en (40), y las componentes contravariantes del tensor métrico se obtienen de las ecuaciones (23). Desarrollando la ecuación anterior (41) componente a componente, se obtiene:

$$R = g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} \quad (42)$$

Donde, reemplazando los valores anteriormente mencionados:

$$R = 3 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1 - kr^2}{a^2} \left(\frac{2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k}{1 - kr^2} \right) + \frac{1}{r^2 a^2} \cdot r^2 (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k) \quad (43)$$

$$+ \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin^2 \theta (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k)$$

Finalmente, reduciendo los términos, se obtiene:

$$R = 6 \frac{\ddot{a}}{a} + 6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 6 \frac{k}{a^2} \quad (44)$$

4.2. Tensor energía-momento

En la sección anterior se obtuvieron ecuaciones para la parte geométrica del espacio-tiempo. Ahora se revisará la parte que responde a la causante de la curvatura de dicha geometría: el contenido de materia y energía, reflejado en el tensor energía-momento. La expresión general del tensor energía-momento viene dada por (Weinberg, 2008):

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (45)$$

En donde ρ representa la densidad, p la presión y u_μ las componentes de la cuadrivelocidad. Tomando un sistema de referencia comóvil, las componentes del vector u_μ valen (Dalarsson & Dalarsson, 2015):

$$u_\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (46)$$

Debido a que, según la ecuación anterior, $u_r = u_\theta = u_\phi = 0$, el primer término de la ecuación (45) se anula en estas coordenadas. Para la componente temporal T_{tt} , se tiene que:

$$T_{tt} = (\rho + p)u_t u_t + pg_{tt} \quad (47)$$

En tanto que, las expresiones para las componentes espaciales se reducen a:

$$T_{\lambda\lambda} = pg_{\lambda\lambda} \quad (48)$$

Donde $\lambda = (r, \theta, \phi)$. El siguiente paso es introducir, componente a componente, las ecuaciones (21) y (46) en las expresiones (46) y (47). Finalmente, las componentes del tensor $T_{\mu\nu}$ vienen dadas por:

$$T_{tt} = \rho \quad (49.1) \quad T_{\theta\theta} = pa^2 r^2 \quad (49.3)$$

$$T_{rr} = p \frac{a^2}{1 - kr^2} \quad (49.2) \quad T_{\phi\phi} = pa^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (49.4)$$

En el siguiente apartado se necesitará tener disponible las expresiones para el tensor energía-momento expresado como un tensor del tipo [1,1], es decir, de la forma T_μ^ν . Para subir uno de los índices, se usan las componentes contravariantes del tensor métrico, dados por las ecuaciones (23), mediante la operación:

$$T_{\mu}^{\nu} = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} \quad (50)$$

Como ambos tensores son tales que sus únicos términos no nulos cumplen que $\mu = \nu = \alpha$ en la ecuación (50), las componentes buscadas se reducen a $T_{\lambda}^{\lambda} = g^{\lambda\lambda} T_{\lambda\lambda}$ con $\lambda = (t, r, \theta, \varphi)$. Entonces, para la parte temporal se tiene que:

$$T_t^t = -\rho \quad (51)$$

Mientras que, para las componentes espaciales:

$$T_r^r = T_{\theta}^{\theta} = T_{\varphi}^{\varphi} = p \quad (52)$$

Todas las ecuaciones obtenidas en este apartado serán utilizadas en el siguiente para evaluar las ecuaciones de campo (16).

5. Derivación de las nuevas ecuaciones cosmológicas

En la primera parte de este apartado, se calculará la parte no conservativa de las ecuaciones de campo (16). Utilizando estos resultados junto con los del apartado anterior, en la segunda parte, se obtendrán las ecuaciones modificadas de Friedman.

5.1. Términos de disipación

Se procederá en orden inverso al orden de presentación de las ecuaciones en la sección 2.2, calculando primero las derivadas covariantes de la 1-forma ψ_μ , para luego calcular las componentes del tensor $\Psi_{\mu\nu}$, su traza Ψ y finalmente el tensor de disipación $\kappa_{\mu\nu}$.

5.1.1. Derivadas covariantes de ψ_μ

Según lo expresado en la sección 2.2, la 1-forma ψ_μ sigue la expresión:

$$\psi_\mu = (\phi(t), 0, 0, 0) \quad (53)$$

Será necesario aplicar la derivada covariante sobre la ecuación (53). Para una 1-forma, esta se calcula por:

$$\nabla_\nu \psi_\mu = \partial_\nu \psi_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \psi_\lambda \quad (54)$$

De acuerdo a (53), para que el primer término no se anule, tanto μ como ν deberán ser iguales a t , puesto que la única componente no nula de ψ_μ es la temporal, que a su vez es función exclusiva del tiempo. En cuanto al segundo término, este no se anula solo en el caso de $\lambda = t$, por lo que el símbolo de Christoffel debe tener la forma $\Gamma_{\mu\nu}^t$. De acuerdo a lo expuesto en la sección 4.1.2, los símbolos que cumplen esa condición son Γ_{rr}^t , $\Gamma_{\theta\theta}^t$ y $\Gamma_{\varphi\varphi}^t$. Por lo tanto, las únicas componentes no nulas de la ecuación (54) serán aquellas en que $\mu = \nu$.

Según lo expuesto en el párrafo anterior, la componente temporal tiene la forma $\nabla_t \psi_t = \partial_t \psi_t - \Gamma_{tt}^t \psi_t$, en donde $\Gamma_{tt}^t = 0$, mientras que las componentes espaciales tienen la forma $\nabla_\alpha \psi_\alpha = \partial_\alpha \psi_\alpha - \Gamma_{\alpha\alpha}^t \psi_t$, en donde $\partial_\alpha \psi_\alpha = 0$, para $\alpha = (r, \theta, \varphi)$. Por lo tanto, las componentes no nulas obtenidas de la ecuación (54) son:

$$\nabla_t \psi_t = \dot{\phi} \quad (55.1) \quad \nabla_\theta \psi_\theta = -a\dot{a}r^2 \phi \quad (55.3)$$

$$\nabla_r \psi_r = -\frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \phi \quad (55.2) \quad \nabla_\varphi \psi_\varphi = -a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \phi \quad (55.4)$$

5.1.2. Cálculo del tensor $\Psi_{\mu\nu}$

Con base en el resultado de la sección anterior, las componentes no nulas de la ecuación (18) aparecen cuando $\mu = \nu$, puesto que, para $\mu \neq \nu$, se deduce que $\nabla_\nu \psi_\nu = 0$, así como para $\mu \neq t$ o $\nu \neq t$, por la ecuación (53), $\psi_\mu = \psi_\nu = 0$. La componente temporal del tensor $\Psi_{\mu\nu}$ es:

$$\Psi_{tt} = \nabla_t \psi_t - \psi_t^2 \quad (56)$$

En tanto que las componentes espaciales se reducen a:

$$\Psi_{\alpha\alpha} = \nabla_\alpha \psi_\alpha \quad (57)$$

Para $\alpha = (r, \theta, \varphi)$. Por lo tanto, las componentes no nulas del tensor $\Psi_{\mu\nu}$ son:

$$\Psi_{tt} = \dot{\phi} - \phi^2 \quad (58.1) \quad \Psi_{\theta\theta} = -a\dot{a}r^2 \phi \quad (58.3)$$

$$\Psi_{rr} = -\frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \phi \quad (58.2) \quad \Psi_{\varphi\varphi} = -a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \phi \quad (58.4)$$

Al igual que ocurría con el tensor energía-momento, se necesitará expresar el tensor en su forma Ψ_ν^μ . Para subir uno de los índices del tensor y expresarlo de la forma [1,1], se utilizan las componentes contravariantes de la métrica, dadas por las ecuaciones dadas en (23):

$$\Psi_\nu^\mu = g^{\mu\alpha} \Psi_{\alpha\nu} \quad (59)$$

Donde, de nuevo, solo se encuentran componentes no nulas cuando $\mu = \nu = \alpha$. Para la coordenada espacial se tiene que:

$$\Psi_t^t = \phi^2 - \dot{\phi} \quad (60)$$

En tanto que para las coordenadas espaciales:

$$\Psi_r^r = \Psi_\theta^\theta = \Psi_\varphi^\varphi = -\frac{\dot{a}}{a} \phi \quad (61)$$

5.1.3. Cálculo del escalar Ψ

Según lo expresado en la sección 2.2, a la traza del tensor $\Psi_{\mu\nu}$ se la conoce como Ψ . Esta se calcula con las componentes contravariantes del tensor métrico, dadas por (23), mediante la relación:

$$\Psi = \Psi^\mu_\mu = g^{\mu\nu}\Psi_{\mu\nu} \quad (62)$$

Desarrollando el sumatorio:

$$\Psi = g^{tt}\Psi_{tt} + g^{rr}\Psi_{rr} + g^{\theta\theta}\Psi_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}\Psi_{\varphi\varphi} \quad (63)$$

Se reemplazan las funciones:

$$\begin{aligned} \Psi = & (-1)(\dot{\phi} - \phi^2) + \frac{1 - kr^2}{a^2} \left(-\frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \phi \right) + \frac{1}{a^2 r^2} (-a\dot{a}r^2 \phi) \\ & + \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} (-a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \phi) \end{aligned} \quad (64)$$

Para finalmente obtener:

$$\Psi = \phi^2 - \dot{\phi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\phi \quad (65)$$

5.1.4. Tensor de disipación

A partir de la ecuación (17) se obtienen las componentes del tensor $J_{\mu\nu}$, teniendo en cuenta que si $\mu \neq \nu$, tanto $g_{\mu\nu}$ como $\Psi_{\mu\nu}$ son nulos, y por lo tanto la componente $J_{\mu\nu}$ es nula. La expresión para las componentes no nulas se reduce a $J_{\lambda\lambda} = \Psi_{\lambda\lambda} - g_{\lambda\lambda}\Psi$, para $\lambda = (t, r, \theta, \varphi)$.

Por lo tanto, utilizando los valores obtenidos en las ecuaciones (58), (21) y (65) para evaluar la ecuación (17), componente a componente, se deduce que las componentes no nulas del tensor de disipación son:

$$J_{tt} = -3\frac{\dot{a}}{a}\phi = -3\frac{\dot{a}}{a}\phi \quad (66.1) \quad J_{\theta\theta} = r^2(2a\dot{a} - a^2\phi^2 + a^2\dot{\phi}) \quad (66.3)$$

$$J_{rr} = \frac{(2a\dot{a} - a^2\phi^2 + a^2\dot{\phi})}{1 - kr^2} \quad (66.2) \quad J_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta (2a\dot{a} - a^2\phi^2 + a^2\dot{\phi}) \quad (66.4)$$

5.2. Ecuaciones modificadas de Friedman

Para evaluar la ecuación (16), se utilizarán los siguientes resultados, obtenidos en secciones anteriores:

- Componentes del tensor de Ricci, de la sección 4.1.3
- Escalar de curvatura, de la sección 4.1.4
- Componentes covariantes del tensor métrico, sección 4.1.1
- Componentes del tensor de disipación, sección 5.1.4
- Componentes del tensor energía-momento, sección 4.2

También se utilizará el hecho de que $F = 16\pi G$, recordando que, a lo largo de todo el trabajo, se está adoptando que $c = 1$. Se evaluarán por separado la coordenada temporal y las coordenadas espaciales. Las únicas soluciones no triviales ocurren cuando los índices sean iguales, puesto que, para $\mu \neq \nu$, tanto $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$, $J_{\mu\nu}$ como $T_{\mu\nu}$ son nulos.

5.2.1. Solución para la coordenada temporal

Evaluando la ecuación (16) para $\mu = \nu = t$, esta se reduce a:

$$R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} R + J_{tt} = 8\pi G T_{tt} \quad (67)$$

Introduciendo los términos mencionados en la introducción a esta sección, resulta que:

$$-3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} (-1) \left[6 \frac{\ddot{a}}{a} + 6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 6 \frac{k}{a^2} \right] - 3 \frac{\dot{a}}{a} \phi = 8\pi G \rho \quad (68)$$

Y reduciendo los términos, se llega a:

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3 \frac{k}{a^2} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \phi = 8\pi G \rho \quad (69)$$

La cual constituye la primera ecuación de Friedman, en su versión modificada, la cual incluye el término de disipación ϕ y el término de curvatura k . Las funciones desconocidas en esta ecuación son el factor de escala a , el término de disipación ϕ , la función G^8 y la densidad ρ .

⁸ Según lo expresado en la sección 2.2, G es, en principio, una función de las coordenadas.

5.2.2. Solución para las coordenadas espaciales

A modo de ejemplo, para la coordenada r , se tiene que la ecuación (16) adopta la forma:

$$R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R + J_{rr} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{rr} \quad (70)$$

E introduciendo los resultados de las secciones mencionadas anteriormente, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k}{1 - kr^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{1 - kr^2}\right)\left[6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 6\frac{k}{a^2}\right] \\ & + \frac{1}{1 - kr^2}(2a\dot{a}\phi - a^2\phi^2 + a^2\dot{\phi}) = 8\pi Gp\frac{a^2}{1 - kr^2} \end{aligned} \quad (71)$$

Reduciendo los términos en la expresión anterior:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - 2\frac{\dot{a}}{a}\phi + \phi^2 - \dot{\phi} = -8\pi Gp \quad (72)$$

La cual representa la segunda ecuación de Friedman, en su versión modificada, que incluye los términos de disipación ϕ y curvatura k . Las funciones desconocidas en esta ecuación son el factor de escala a , el término de disipación ϕ , la función G^9 y la presión p .

Se puede comprobar que la coordenada θ reproduce también la ecuación (72) notando que las componentes de los tensores implicados en las ecuaciones de campo cumplen las siguientes relaciones:

$$R_{\theta\theta} = r^2(1 - kr^2)R_{rr} \quad (73.1) \quad J_{\theta\theta} = r^2(1 - kr^2)J_{rr} \quad (73.3)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2(1 - kr^2)g_{rr} \quad (73.2) \quad T_{\theta\theta} = r^2(1 - kr^2)T_{rr} \quad (73.4)$$

Análogamente, para la coordenada φ se puede demostrar que:

$$R_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta (1 - kr^2)R_{rr} \quad (74.1) \quad J_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta (1 - kr^2)J_{rr} \quad (74.3)$$

$$g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta (1 - kr^2)g_{rr} \quad (74.2) \quad T_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta (1 - kr^2)T_{rr} \quad (74.4)$$

⁹ Según lo expresado en la sección 2.2, G es, en principio, una función de las coordenadas.

La proporcionalidad entre las componentes hace que las coordenadas espaciales θ y φ también reproduzcan la ecuación (72), y esto se explica debido a que el espacio-tiempo considerado cumple las condiciones de isotropía, es decir, sus características son independientes de la dirección de observación.

5.3. Identidad de Bianchi

El tensor de Ricci y el escalar de curvatura tienen la propiedad de que sus derivadas covariantes valen cero. Aplicando la derivada covariante a ambos lados de las ecuaciones de campo (16), tal como se observa en Paiva, et. al. (2022), se obtiene la identidad de Bianchi:

$$\frac{1}{2} \nabla_\nu (F T_\mu^\nu) = \nabla_\nu \Psi_\mu^\nu - \delta_\mu^\nu \partial_\nu \Psi \quad (75)$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación:

$$\nabla_\nu (F T_\mu^\nu) = T_\mu^\nu \partial_\nu F + F \nabla_\nu T_\mu^\nu \quad (76)$$

En donde la derivada covariante del tensor energía momento es $\nabla_\nu T_\mu^\nu = \partial_\nu T_\mu^\nu + \Gamma_{\sigma\nu}^\nu T_\mu^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\beta T_\beta^\nu$. Tomando $\mu = t$, la ecuación (76) queda:

$$\nabla_\nu (F T_\mu^\nu) = T_t^\nu \partial_\nu F + F \left[\partial_\nu T_t^\nu + \Gamma_{\sigma\nu}^\nu T_t^\sigma - \Gamma_{t\nu}^\beta T_\beta^\nu \right] \quad (77)$$

En esta última ecuación se puede notar que:

- Los términos $T_t^\nu \partial_\nu F$ y $\partial_\nu T_t^\nu$ no serán nulos solo si $\nu = t$.
- Para que el término $\Gamma_{\sigma\nu}^\nu T_t^\sigma$, se debe cumplir que $\sigma = t$, pero se deja un índice libre ν . Revisando los valores de los símbolos de Christoffel en la sección 4.1.2, las componentes no nulas de la forma $\Gamma_{t\nu}^\nu$ son Γ_{tr}^r , $\Gamma_{t\theta}^\theta$ y $\Gamma_{t\varphi}^\varphi$.
- En el término $\Gamma_{t\nu}^\beta T_\beta^\nu$, la componente del tensor energía-momento no será nula si $\nu = \beta$. Imponiendo esto sobre el símbolo de Christoffel, se encuentra de nuevo la necesidad de utilizar los componentes de la forma $\Gamma_{t\nu}^\nu$, mencionados en el punto anterior.

Escribiendo la ecuación (77) tal que solo aparezcan las componentes no nulas, se tiene que:

$$\nabla_\nu (FT_\mu^\nu) = T_t^\nu \partial_\nu F + F [\partial_t T_t^t + T_t^t (\Gamma_{tr}^r + \Gamma_{t\theta}^\theta + \Gamma_{t\phi}^\phi) - (\Gamma_{tr}^r T_r^r + \Gamma_{t\theta}^\theta T_\theta^\theta + \Gamma_{t\phi}^\phi T_\phi^\phi)] \quad (78)$$

Introduciendo en la ecuación (78): (i) los valores de los símbolos de Christoffel (sección 4.1.2), (ii) las componentes del tensor energía-momento dadas por las ecuaciones (51) y (52), y (iii) admitiendo que $F = 16\pi G$, la expresión resultante simplificada queda:

$$\nabla_\nu (FT_t^\nu) = -16\pi \dot{G} \rho - 16\pi G \left[\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (p + \rho) \right] \quad (79)$$

En cuanto al lado derecho de la ecuación (75), y aplicando la derivada covariante sobre Ψ_μ^ν , se tiene:

$$\nabla_\nu \Psi_\mu^\nu - \delta_\mu^\nu \partial_\nu \Psi = \partial_\nu \Psi_\mu^\nu + \Gamma_{\sigma\nu}^\nu \Psi_\mu^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Psi_\beta^\nu - \delta_\mu^\nu \partial_\nu \Psi \quad (80)$$

Se toma también $\mu = t$, y se realiza un razonamiento parecido al hecho anteriormente para descartar las componentes nulas. La expresión queda expandida de la siguiente forma:

$$\nabla_\nu \Psi_t^\nu - \delta_t^\nu \partial_\nu \Psi = \partial_t \Psi_t^t + \Psi_t^t (\Gamma_{tr}^r + \Gamma_{t\theta}^\theta + \Gamma_{t\phi}^\phi) - (\Gamma_{tr}^r \Psi_r^r + \Gamma_{t\theta}^\theta \Psi_\theta^\theta + \Gamma_{t\phi}^\phi \Psi_\phi^\phi) - \delta_t^t \partial_t \Psi \quad (81)$$

Introduciendo los símbolos de Christoffel (sección 4.1.2) correspondientes, así como las componentes del tensor Ψ_t^t , obtenidas de las ecuaciones (60) y (61), y utilizando la expresión (65), se evalúa la ecuación (81). La expresión simplificada resultante es:

$$\nabla_\nu \Psi_t^\nu - \delta_t^\nu \partial_\nu \Psi = 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) \phi \quad (82)$$

Igualando los resultados obtenidos en las ecuaciones (79) y (82), y reordenando la expresión, se sigue que:

$$3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) \phi + 8\pi \dot{G} \rho = -8\pi G \left[\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (p + \rho) \right] \quad (83)$$

En donde el término entre corchetes representa la derivada covariante del tensor energía-momento, por lo que la ecuación anterior se puede escribir como:

$$3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) \phi + 8\pi \dot{G} \rho = -8\pi G \nabla_\nu T_\mu^\nu \quad (84)$$

5.4. Forma final de las ecuaciones modificadas de Friedman

Recuperando los resultados de la sección anterior, se repiten a continuación las versiones modificadas de las ecuaciones de Friedman:

Primera ecuación de Friedman modificada, ecuación (69):

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{k}{a^2} - 3\frac{\dot{a}}{a}\phi = 8\pi G\rho$$

Segunda ecuación de Friedman modificada, ecuación (72):

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - 2\frac{\dot{a}}{a}\phi + \phi^2 - \dot{\phi} = -8\pi Gp$$

Estas ecuaciones son los resultados más importantes de este trabajo, la primera ecuación se utilizará para obtener una función de densidad respecto al tiempo, mientras que de la segunda se obtendrá una función de la presión respecto al tiempo. En el siguiente apartado se realizará un estudio cualitativo en distintos escenarios de dichas ecuaciones.

6. Interpretación física

De acuerdo con Paiva, et. al. (2022), en un sistema se puede conservar el tensor energía-momento, aun cuando exista disipación de energía. Esta condición se impondrá mediante la condición $\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0$. Si además se considera que el parámetro G es constante, la ecuación (84) tiene la forma:

$$3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) \phi = 0 \quad (85)$$

En donde, aislando ϕ , se tienen dos soluciones. La primera es la solución trivial, $\phi = 0$. La segunda, que es la que se utilizará en los subapartados siguientes, está dada por:

$$\phi = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} \quad (86)$$

Cuya derivada de primer orden es:

$$\dot{\phi} = -\frac{a^{(3)}\dot{a} - \ddot{a}^2}{\dot{a}^2} \quad (87)$$

En donde $a^{(3)}$ es la derivada de tercer orden del factor de escala.

En este apartado se pondrá a prueba el modelo derivado en el apartado anterior. Lo primero será ver cómo responde la ecuación (69) a un modelo de universo cuyo único componente es la curvatura, y en la segunda parte de este apartado se agregará un segundo componente: la materia.

6.1. Primera ecuación de Friedman modificada en un universo solo con curvatura

Para un universo cuyo único componente es la curvatura, en la ecuación (69) se considera el valor de $\rho = 0$. Entonces:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}}{a} \phi \quad (88)$$

Esta ecuación tiene dos parámetros libres, ϕ y el factor de escala. Para tener una solución analítica se debe imponer una ecuación más, y será la dada por la ecuación (86). El resultado de hacer esto es:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \quad (89)$$

Si además se asume que el factor de escala sigue una ley de potencias, en donde $a(t_0) = a_0$, siendo t_0 el tiempo presente, se tiene que:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^\alpha \quad (90)$$

Cuya derivada de primer orden es:

$$\dot{a} = \frac{\alpha}{t} a \quad (91)$$

Y la de segundo orden:

$$\ddot{a} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{t^2} a \quad (92)$$

Calcular la derivada de tercer orden también será de utilidad en la siguiente sección, la misma viene dada por:

$$a^{(3)} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{t^3} a \quad (93)$$

Introduciendo las expresiones dadas por (90), (91) y (92) en la ecuación (89), se deduce que:

$$\frac{\alpha^2}{t^2} = -\frac{k}{a_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2\alpha} - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{t^2} \quad (94)$$

Para estimar un valor de α se considerarán tres casos, de acuerdo al valor que pueda tener el parámetro k :

6.1.1. Universo plano, $k = 0$

Imponiendo en la ecuación (94) el valor de $k = 0$, se tiene:

$$\frac{\alpha^2}{t^2} = -\frac{\alpha(\alpha - 1)}{t^2} \quad (95)$$

En donde, para cualquier valor de t , se tienen dos soluciones para α : la primera implica que $\alpha = 0$, es decir, $\alpha = a_0$; representa un universo estático, sin expansión, resultado lógico tras hacer cero su única componente, la curvatura, no existe causa que haga que se acelere. La segunda solución está dada por $\alpha = 1/2$. La ecuación del factor de escala viene dada por:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \quad (96)$$

Si se considera una ecuación de estado genérica $p = \omega\rho$, para $\alpha = 1/2$, el valor que adquiere el parámetro de la ecuación de estado ω es $1/3$, valor típico de la radiación (Riddle, 2001). Se tiene un universo plano sin materia, pero con disipación. La interpretación de este resultado es que la expansión de este universo, causada por la disipación, posee un comportamiento equivalente al de un universo cuyo único componente es la radiación.

6.1.2. Universo cerrado, $k = +1$

Imponiendo en la ecuación (94) el valor de $k = +1$, y tomando $a_0 = 1$, se tiene:

$$\frac{\alpha^2}{t^2} = - \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2\alpha} - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{t^2} \quad (97)$$

En donde, reordenando los términos:

$$\frac{\alpha - 2\alpha^2}{t^2} = \frac{t_0^{2\alpha}}{t^{2\alpha}} \quad (98)$$

Si ambas expresiones son iguales, al hacer una comparación del orden de cada miembro para t , se tiene que $t^2 \propto t^{2\alpha}$, es decir, $\alpha = 1$. Como condición adicional, $t_0^{2\alpha}$ debe ser positivo (exponente par), por lo tanto, la expresión $\alpha - 2\alpha^2$ también debe serlo, lo cual se cumple para $0 < \alpha < 1/2$. Esto es una contradicción para $\alpha = 1$, y no se analizará esta solución. Acorde con Steigman & Turner (1983), un universo con curvatura positiva no estará en expansión, y se necesita la presencia de otro componente. Se ha identificado la primera limitación del modelo.

6.1.3. Universo abierto, $k = -1$

En ese caso se impone en la ecuación (94) el valor de $k = -1$, con $a_0 = 1$, se tiene:

$$\frac{\alpha^2}{t^2} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2\alpha} - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{t^2} \quad (99)$$

Reordenando:

$$\frac{2\alpha^2 - \alpha}{t^2} = \frac{t_0^{2\alpha}}{t^{2\alpha}} \quad (100)$$

Análogamente al caso anterior, si ambas expresiones son iguales, $t^2 \propto t^{2\alpha}$, y $\alpha = 1$. En este caso, la condición de que $t_0^{2\alpha}$ sea positivo, conduce a que $2\alpha^2 - \alpha$ debe ser positivo, y por lo tanto que α debe ser mayor a $1/2$, lo cual es coherente con el resultado anterior de $\alpha = 1$. Bajo esta condición, se tiene que:

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (101)$$

Se trata de un universo cuya expansión ocurre a rapidez constante, sin acelerarse ni frenarse.

Los tres resultados obtenidos en esta sección coinciden con los obtenidos en un modelo que no considera disipación en las mismas condiciones, reproduciendo el modelo de Milne (E., 1935).

A falta de una descripción más amplia, en el siguiente apartado se considera un modelo de universo con disipación, curvatura y materia.

6.2. Modelo con disipación, curvatura y materia sujeta a una ley de potencias

Volviendo a las ecuaciones de Friedman modificadas, en la ecuación (69) se reemplazan la expresión de ϕ dada por las ecuaciones (86), obteniendo:

$$8\pi G\rho = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{k}{a^2} \quad (102)$$

La cual es una expresión de la densidad en función del factor de escala y sus derivadas. Si se tiene una función explícita del factor de escala, se podría expresar la evolución de la densidad con el tiempo. Se opta, de nuevo, por expresar el factor de escala como una ley de potencias de la forma $a(t) = a_0(t/t_0)^\alpha$, en donde $a(t_0) = a_0$. Reemplazando las expresiones (90), (91) y (92) en la ecuación (102) y simplificando, se obtiene:

$$8\pi G\rho(t) = \frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{t^2} + \frac{3k}{a_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2\alpha} \quad (103)$$

Definiendo el parámetro adimensional $\zeta = t/t_0$, cuya evolución es idéntica a la evolución del tiempo coordinado, la expresión anterior se convierte en:

$$8\pi G\rho(\zeta) = \frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{t_0^2 \zeta^2} + \frac{3k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \quad (104)$$

En este caso, ζ representaría la fracción de la edad del universo, respecto a su edad actual. Si $t = t_0$, $\zeta = 1$. Por ejemplo, $\zeta = 0.5$ representa a un universo que tiene la mitad de la edad que el actual. El comportamiento de la ecuación (104) se estudiará en las secciones siguientes.

Para obtener la evolución temporal de la presión, en la ecuación (72) se impone también la condición (86), que junto con la ecuación (87), dan las expresiones para ϕ y $\dot{\phi}$. La expresión simplificada viene dada por:

$$8\pi Gp(t) = - \left[\frac{a^{(3)}}{\dot{a}} + 4 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (105)$$

Y, de nuevo, imponiendo que el factor de escala siga una ley exponencial, se utilizan las ecuaciones (90), (91), (92) y (93) para expresar la presión, dada por la ecuación anterior, como función explícita del tiempo:

$$8\pi Gp(t) = \frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t^2} - \frac{k}{a_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2\alpha} \quad (106)$$

Introduciendo también el parámetro ζ , se obtiene:

$$8\pi Gp(\zeta) = \frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t_0^2 \zeta^2} - \frac{k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \quad (107)$$

Cuyo comportamiento también se analizará en las secciones siguientes.

Argumentando de nuevo que la componente dominante del universo sigue una ecuación de estado de la forma $p = \omega\rho$, la expresión de ω , teniendo en cuenta las ecuaciones (104) y (107) será:

$$\omega(\zeta) = \frac{\frac{\alpha(7-6\alpha)-2}{t_0^2 \zeta^2} - \frac{k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}}}{\frac{3\alpha(2\alpha-1)}{t_0^2 \zeta^2} + \frac{3k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}}} \quad (108)$$

Donde, por conveniencia, el término $\zeta^{-2\alpha}$ se expresó como $(1/\zeta)^{2\alpha}$.

6.2.1. Condición de densidad positiva

Se considera que la densidad, por motivos físicos, solo admite valores positivos, pues nunca se ha observado densidades negativas. Por la forma de la ecuación (104), analíticamente se espera un cambio de signo en la densidad, por lo tanto, existe un valor crítico de ζ en donde se observa dicho cambio. Imponiendo la condición $\rho = 0$ en dicha ecuación, resulta:

$$\zeta_{crit} = \left[\frac{a_0^2}{k t_0^2} \alpha(1 - 2\alpha) \right]^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} \quad (109)$$

Que el signo de la densidad pase de positivo a negativo o viceversa en $\zeta = \zeta_{crit}$, dependerá del valor de α considerado en la ecuación (104). Por ejemplo, para $k = +1$ y $\alpha = 0.4^{10}$, se observa que la densidad pasa de un valor negativo a un valor positivo en $\zeta \approx 0.12$, como se muestra en la Figura 1. Por lo mencionado antes, dicho comportamiento no es el esperado para la densidad.

Dos ejemplos en donde la densidad admite solo valores positivos se muestran en la Figura 2, correspondientes a $k = 0$ y $k = +1$, respectivamente. La disminución de la densidad con el tiempo (representado por ζ) también parece lógica (Jones, 2017). Para $k = -1$, la densidad posee valores negativos, por lo menos en algún tramo del dominio de α .

¹⁰ Para los gráficos mostrados en el trabajo, se asumieron los valores de $a_0 = 1$ y $t_0 = 1$.

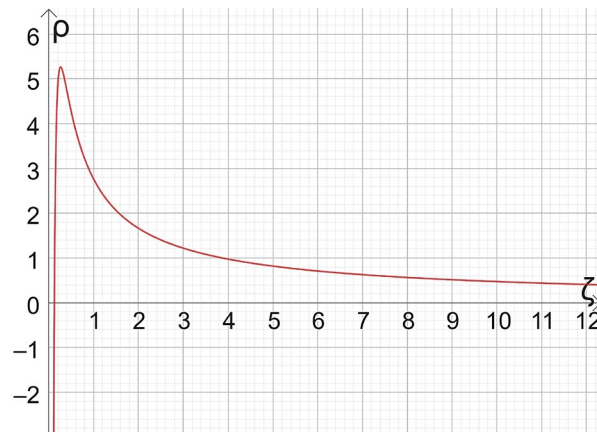


Figura 1. Comportamiento de la densidad respecto a ζ , para $k = +1$ y $\alpha = 0.4$. Fuente: elaboración propia.

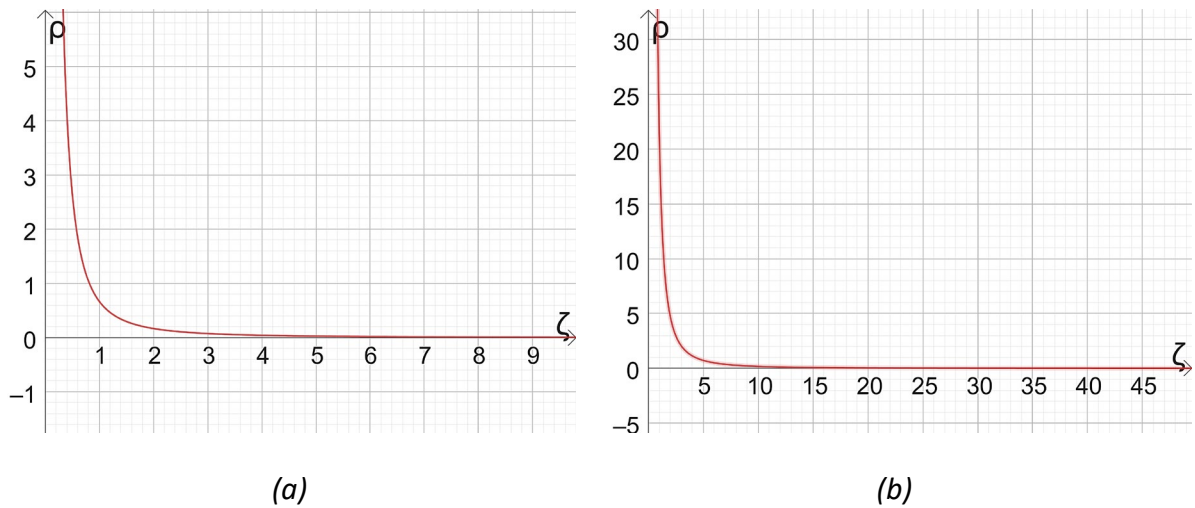


Figura 2. Evolución de la densidad respecto al parámetro ζ para (a) $k = 0, \alpha = 2/3$ y (b) $k = +1, \alpha = 2$. Se observan solo valores positivos de ρ , así como una disminución respecto a ζ . Fuente: elaboración propia.

Por lo tanto, la condición de densidad positiva serán aquellos valores de α para los cuales la ecuación (109) reproduzca analíticamente un valor de $\zeta_{crit} < 0$, o bien para los cuales no tenga un valor posible de ζ_{crit} . El análisis detallado de dichos valores queda fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, en las secciones siguientes, se evaluarán los valores asintóticos que puedan tener las funciones de densidad, presión y el parámetro de ecuación de estado ω .

6.2.2. Valores asintóticos de la densidad

Para determinar los valores asintóticos de la ecuación (104), el análisis matemático se hará sobre sus dos términos por separado, y de acuerdo al valor de la curvatura k , se sumarán dichos términos.

Debido a la relación entre ζ y t definida al inicio de esta sección, se puede concluir que, cuando $t \rightarrow 0$, ζ también lo hace, así como cuando $t \rightarrow \infty$, $\zeta \rightarrow \infty$. Por lo tanto, si una función se puede expresar tanto como $f(t)$ y $g(\zeta)$, se cumple que, cuando $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} g(\zeta) \quad (110)$$

Y, análogamente, cuando $t \rightarrow \infty$, se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} g(\zeta) \quad (111)$$

En este caso, $f(t)$ representa a la ecuación (103) y $g(\zeta)$ a la ecuación (104).

6.2.2.1. Límite cuando $t \rightarrow 0$

Bajo la condición (81), se aplica el límite cuando $\zeta \rightarrow 0$ sobre la ecuación (104):

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{\zeta^2 t_0^2} + \frac{3k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right] \quad (112)$$

En cuanto al primer término de la expresión, el signo del numerador determinará si el resultado del límite es $+\infty$ o $-\infty$. Para que el numerador sea positivo, se debe cumplir que 3α y $2\alpha - 1$ sean del mismo signo. Si ambas expresiones son positivas, se requiere que $\alpha > 1/2$, en cambio, si ambas expresiones son negativas, la condición necesaria es que $\alpha < 0$. Para los valores de $\alpha = 0$ y $\alpha = 1/2$ la expresión $3\alpha(2\alpha - 1)$ es exactamente 0, por lo que el valor del límite también es 0 en dichos casos. Tras aplicar el límite con estas observaciones, se obtiene que:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{\zeta^2 t_0^2} = \begin{cases} \infty & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{si } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha < \infty \end{cases} \quad (113)$$

En cuanto al segundo término, el valor del límite dependerá del signo del exponente -2α . El cambio de signo se da en $\alpha = 0$, donde el valor del límite es $3k/a_0^2$. Al aplicar el límite:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{3k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ \frac{3k}{a_0^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ \infty & \text{si } 0 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (114)$$

Para un universo plano, $k = 0$, y el segundo término desaparece; por lo tanto, el límite sobre la densidad será el mismo que el obtenido en el primer término:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = \begin{cases} \infty & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{si } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha < \infty \end{cases} \quad (115)$$

Donde se evidencia otra debilidad del modelo, al reproducir densidades negativas.

Para un universo de curvatura positiva, se tiene que $k = +1$. Aplicando las propiedades de los límites sobre la ecuación (112):

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{\zeta^2 t_0^2} \right] + \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{3}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right], \quad k = 1 \quad (116)$$

Y, por lo tanto, se deduce que el límite de la densidad estará dado por las contribuciones de los resultados (113) y (114). Analizando la función por tramos, los resultados se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Resumen de los resultados al evaluar los límites de densidad cuando $\zeta \rightarrow 0$ y $k = +1$ en las ecuaciones (114) y (115), para distintos rangos de α

Intervalo	$-\infty < \alpha < 0$	$\alpha = 0$	$0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \alpha < \infty$
Contribución del primer término	∞	0	$-\infty$	0	∞
Contribución del segundo término	0	$\frac{3}{a_0^2}$	∞	∞	∞

Fuente: elaboración propia.

Para levantar la discontinuidad del tipo $\infty - \infty$ del intervalo $0 < \alpha < 1/2$, se multiplica la ecuación (112) por ζ^2/ζ^2 , obteniendo:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\frac{3\alpha(2\alpha-1)}{t_0^2} + \frac{3k}{a_0^2} \zeta^{2(1-\alpha)}}{\zeta^2} \quad (117)$$

Tras aplicar la regla de L'Hôpital y reducir los términos, se llega a:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{3}{a_0^2} (1 - \alpha) \zeta^{-2\alpha} \quad (118)$$

El único término susceptible de ser negativo en la expresión es $(1 - \alpha)$, el cual para los valores considerados de α , no lo es. Así también, el exponente -2α es siempre negativo para el intervalo considerado. Se deduce entonces que, para $0 < \alpha < 1/2$:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = \infty \quad , \quad 0 < \alpha < 1/2 \quad (119)$$

Entonces, para un universo de curvatura positiva, se deduce que:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = \begin{cases} \infty & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ \frac{3}{a_0^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ \infty & \text{si } 0 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (120)$$

Considerando que en un universo temprano toda la materia estaba concentrada en un espacio reducido, con densidades estimadas en el orden de 10^{27} g/cm^3 (Jones, 2017), el resultado

parece lógico. También se reafirma lo mencionado en la sección 6.1.2, que un universo cerrado en expansión necesita al menos un componente más para reproducir un modelo de expansión dinámico (en este caso, la materia y la disipación). El único caso en donde no se encuentra un límite infinito de densidad en el caso de un universo estático, es decir, $\alpha = 0$.

Para un universo abierto, $k = -1$. Se seguirá un procedimiento análogo, aplicando propiedades de límites a la ecuación (112):

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{\zeta^2 t_0^2} \right] + \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[-\frac{3}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right], \quad k = -1 \quad (121)$$

Las contribuciones de los dos términos se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2. Resumen de los resultados al evaluar los límites de densidad cuando $\zeta \rightarrow 0$ y $k = -1$ en la ecuación (121), para distintos rangos de α

Intervalo	$-\infty < \alpha < 0$	$\alpha = 0$	$0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \alpha < \infty$
Contribución del primer término	∞	0	$-\infty$	0	∞
Contribución del segundo término	0	$-\frac{3}{a_0^2}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Fuente: elaboración propia

En este caso, la discontinuidad se presenta en $\alpha > 1/2$. La expresión que se obtiene luego de levantar la indeterminación en la ecuación (121) por un procedimiento análogo al anterior es:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = -\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{3}{a_0^2} (1 - \alpha) \zeta^{-2\alpha} \quad (122)$$

El término $(1 - \alpha)$ introduce un cambio de signo en $\alpha = 1$, así como un valor del límite igual a 0 en dicho punto, por lo tanto, resolviendo la ecuación anterior, se obtiene, para el intervalo considerado:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[-\frac{3}{a_0^2} (1 - \alpha) \zeta^{-2\alpha} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha = 1 \\ \infty & \text{si } 1 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (123)$$

Reuniendo la información de la Tabla 2 y la ecuación (123), se concluye que:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = \begin{cases} \infty & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ -\frac{3}{a_0^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha = 1 \\ \infty & \text{si } 1 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (124)$$

Donde, de nuevo, el modelo reproduce densidades negativas.

6.2.2.2. Límite cuando $t \rightarrow \infty$

Ahora se evalúa el siguiente límite para la ecuación (104):

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 8\pi G\rho = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{\zeta^2 t_0^2} + \frac{3k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right] \quad (125)$$

La cual, al igual que en el caso anterior, utilizando propiedades de los límites, se puede escribir como:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 8\pi G\rho = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{\zeta^2 t_0^2} \right] + \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\frac{3k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right] \quad (126)$$

En este caso, el primer término de la función no presenta discontinuidades, entonces:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{\zeta^2 t_0^2} \right] = 0 \quad \forall \alpha \quad (127)$$

En cuanto al segundo término, en $\alpha = 0$ el valor del límite tiende a $3k/a_0^2$ cuando $\zeta \rightarrow \infty$. Luego, el valor del límite depende del signo de α :

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\frac{3k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right] = \begin{cases} \infty & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ \frac{3k}{a_0^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (128)$$

Para un universo plano ($k = 0$), el valor del límite de densidad obedece exactamente al límite del primer término, entonces:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 8\pi G\rho = 0 \quad \forall \alpha \quad (129)$$

Se observa que a medida que transcurre el tiempo, la densidad va reduciéndose, entendiéndose como que la misma cantidad de materia se diluye en un espacio-tiempo que va expandiéndose, haciendo tender la densidad a cero.

Para el caso de un universo cerrado ($k = +1$), el límite se calcula sumando las contribuciones de las ecuaciones (127) y (128). Debido a que la primera de las ecuaciones es siempre 0, el resultado será idéntico a la segunda contribución, generando los siguientes valores:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 8\pi G\rho = \begin{cases} \infty & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ \frac{3}{a_0^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (130)$$

Para un $\alpha > 0$, se podría inferir una conclusión similar al caso anterior, sin embargo, para valores negativos de α , lo cual representaría un universo en contracción, se observa que el espacio-tiempo se comprime, haciendo que el contenido de materia colapse hasta que la densidad se haga infinita¹¹. Esta contracción va en desacuerdo a las observaciones actuales (Astier & Pain, 2012). También se observa que para un universo estático ($\alpha = 0$), el valor límite de la densidad depende de a_0 .

Por último, para un universo abierto ($k = -1$), las contribuciones se obtienen restando los resultados obtenidos en las ecuaciones (127) y (128), resultando en:

¹¹ Matemáticamente esto es coherente, sin embargo, como se mencionó, esto contradice las observaciones.

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 8\pi G\rho = \begin{cases} -\infty & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ -\frac{3}{a_0^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (131)$$

Se obtienen valores lógicos para $\alpha > 0$, pudiendo llegar a una conclusión similar a la de los casos anteriores. De nuevo, para $\alpha < 0$, se tiene un universo en contracción, sin embargo, en este caso la densidad disminuye indefinidamente, tomando valores negativos, los cuales no son posibles. Para un universo estático ($\alpha = 0$), la densidad límite también resulta negativa.

6.2.3. Valores asintóticos de la presión

Análogamente al procedimiento de la sección anterior, se evaluarán los límites cuando $t \rightarrow 0$ y $t \rightarrow \infty$ para la ecuación (107), haciendo consideraciones similares a las expresadas en las igualdades (110) y (111): cuando t tiende a alguno de estos dos valores, ζ también lo hace.

6.2.3.1. Límite cuando $t \rightarrow 0$

Aplicando el límite a la ecuación (107):

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi Gp = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t_0^2 \zeta^2} - \frac{k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right] \quad (132)$$

Y utilizando las propiedades de los límites, se tiene que:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi Gp = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t_0^2 \zeta^2} \right] + \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[-\frac{k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right] \quad (133)$$

En donde el segundo término mantuvo el signo negativo dentro del límite, para facilitar el análisis posterior.

En cuanto al primer término, se obtiene un valor de 0 si α adquiere los valores de $\alpha = 1/2$ o $\alpha = 2/3$ y $\zeta \rightarrow 0$. Para el resto del dominio, el valor del límite depende del signo del numerador, el cual es positivo si $1/2 < \alpha < 2/3$. Entonces:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t_0^2 \zeta^2} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } -\infty < \alpha < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3} \\ 0 & \text{si } \alpha = \frac{2}{3} \\ -\infty & \text{si } \frac{2}{3} < \alpha < \infty \end{cases} \quad (134)$$

En cuanto al segundo término, el signo del exponente -2α determinará el valor del límite, obteniéndose el valor de $-k/a_0^2$ cuando $\alpha = 0$ y $\zeta \rightarrow 0$. Entonces:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[-\frac{k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ -\frac{k}{a_0^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{si } 0 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (135)$$

Se analizarán de nuevo los tres casos, de acuerdo a los valores posibles de la curvatura k :

Para un universo plano ($k = 0$), el segundo término se anula, y el límite estará dado exclusivamente por el primer término, es decir:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G p = \begin{cases} -\infty & \text{si } -\infty < \alpha < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3} \\ 0 & \text{si } \alpha = \frac{2}{3} \\ -\infty & \text{si } \frac{2}{3} < \alpha < \infty \end{cases} \quad (136)$$

Los valores negativos de presión se suelen atribuir a la presencia de la energía de vacío, responsable de la expansión acelerada del Universo (Padmanabhan, 2003), sin embargo, no resulta lógico que esta domine cuando $\zeta \rightarrow 0$.

Para un universo cerrado ($k = +1$), el límite se calcula sumando las contribuciones dados por (134) y (135). Los valores de estas contribuciones se resumen en la Tabla 3.

Tabla 3. Resumen de los resultados al evaluar los límites de presión cuando $\zeta \rightarrow 0$ y $k = +1$ en las ecuaciones (134) y (135), para distintos rangos de α

Intervalo	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$	$\alpha = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < \alpha$
Contribución del primer término	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	∞	0	$-\infty$
Contribución del segundo término	0	$-\frac{1}{a_0^2}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Fuente: elaboración propia.

Donde la indeterminación a levantar queda en el intervalo $1/2 < \alpha < 2/3$. Para ello, en la ecuación (132) se sustituye $k = +1$ y se multiplica por ζ^2/ζ^2 , obteniendo:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G p = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha(7-6\alpha)-2}{t_0^2} - \frac{1}{a_0^2} \zeta^{2(1-\alpha)}}{\zeta^2} \quad (137)$$

La cual, resolviendo por la regla de L'Hôpital y reduciendo los términos, queda:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G p = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(-\frac{1-\alpha}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right) \quad (138)$$

Para el intervalo considerado, α solo adquiere valores positivos, por lo que el resultado del límite es:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G p = -\infty \quad \text{si } \frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3} \quad (139)$$

Resumiendo los resultados de la Tabla 3 y la ecuación (139) se tiene que, para $k = +1$:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G p = -\infty \quad \forall \alpha \quad (140)$$

Este último resultado muestra que la presión adquiere valores arbitrariamente pequeños cuando $\zeta \rightarrow 0$. No parece lógico bajo la suposición de que un universo temprano se encontraba tan comprimido en épocas tempranas (Jones, 2017).

Para un universo abierto ($k = -1$), se suman las contribuciones de lo obtenido en (134) y el negativo de los resultados obtenidos en (135); se presenta un resumen en la Tabla 4.

Tabla 4. Resumen de los resultados al evaluar los límites de presión cuando $\zeta \rightarrow 0$ en la ecuación (134) y el negativo de la ecuación (135), para distintos rangos de α .

Intervalo	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$	$\alpha = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < \alpha$
Contribución del primer término	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	∞	0	$-\infty$
Contribución del negativo del segundo término	0	$\frac{1}{a_0^2}$	∞	∞	∞	∞	∞

Fuente: elaboración propia.

Donde se observan indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$ para los rangos $0 < \alpha < 1/2$ y $2/3 < \alpha < \infty$. Tras operar la ecuación (132) reemplazando el valor de $k = -1$, multiplicando por ζ^2/ζ^2 y aplicando L'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G p = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \alpha}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right) \quad (141)$$

La cual, para el intervalo $0 < \alpha < 1/2$ es siempre positiva, puesto que $(1 - \alpha)$ es positivo en ese intervalo. Entonces:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \alpha}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right) = \infty \quad \text{si } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \quad (142)$$

No obstante, el intervalo $2/3 < \alpha < \infty$ presenta el valor de 0 cuando $\alpha = 1$ y $\zeta \rightarrow 0$, lo cual induce un cambio de signo en el valor del límite:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \alpha}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right) = \begin{cases} \infty & \text{si } \frac{2}{3} < \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{si } 1 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (143)$$

Reuniendo los resultados de la Tabla 4 y las ecuaciones (142) y (143), el límite cuando $k = -1$ viene dado por:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} 8\pi G\rho = \begin{cases} -\infty & \text{si } -\infty < \alpha \leq 0 \\ \infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{si } 1 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (144)$$

Para un universo temprano tan comprimido (Jones, 2017), los resultados en el intervalo $0 < \alpha < 1$, parecen lógicos.

6.2.3.2. Límite cuando $t \rightarrow \infty$

Como se mencionó al inicio de la sección, el límite $t \rightarrow \infty$ es equivalente a $\zeta \rightarrow \infty$. Tomando este último límite a la ecuación (107):

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 8\pi G\rho = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t_0^2 \zeta^2} - \frac{k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right] \quad (145)$$

Y aplicando propiedades de límites:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 8\pi G\rho = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t_0^2 \zeta^2} \right] + \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[-\frac{k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right] \quad (146)$$

Donde, de nuevo, el signo negativo se conservó en el segundo término, para un mejor análisis posterior.

Para el primer término no se tendrá en cuenta el cambio de signo, pues el límite en todo dominio es cero; entonces:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t_0^2 \zeta^2} \right] = 0 \quad \forall \alpha \quad (147)$$

En cuanto al segundo término, se encuentra el valor de $-k/a_0^2$ en $\alpha = 0$ cuando $\zeta \rightarrow \infty$, así como un cambio de signo del exponente alrededor de este valor, entonces:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[-\frac{k}{a_0^2} \zeta^{-2\alpha} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ -\frac{k}{a_0^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (148)$$

De nuevo, el análisis se realizará de acuerdo al valor de k .

Un universo plano ($k = 0$), anula el segundo término, y sigue la tendencia del primer término:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 8\pi G p = 0 \quad \forall \alpha \quad (149)$$

Modela un universo que presenta una presión nula para tiempos arbitrariamente grandes. El contenido de este universo estará distribuido en espacio-tiempo tan grande, que la presión que ejerza será despreciable.

Para un universo cerrado ($k = +1$), se suman las contribuciones de ambos términos, dadas por las ecuaciones (147) y (148), dando como resultado:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 8\pi G p = \begin{cases} -\infty & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ -\frac{1}{a_0^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (150)$$

Lo cual describe, para tiempos grandes, una presión arbitrariamente pequeña para un universo en contracción, una presión límite de $-1/a_0^2$ para un universo estático y una presión nula para un universo en expansión.

Finalmente, para un universo abierto ($k = -1$), se suma la contribución de los valores dados por (147) y el negativo de los dados por (148), resultando en:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} 8\pi G p = \begin{cases} \infty & \text{si } -\infty < \alpha < 0 \\ \frac{1}{a_0^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (151)$$

Para un universo en contracción ($\alpha < 0$), este se compacta tanto que al final la presión que se ejerce es infinita, para un universo con estático, la presión límite es $1/a_0^2$, y para un universo en expansión, la presión se anula en tiempos grandes.

6.2.4. Valores asintóticos de ω

El análisis de las asíntotas de la ecuación (108) se encara de la siguiente forma: ζ aparece con dos exponentes, ζ^{-2} y $\zeta^{-2\alpha}$, entonces, el valor de α determinará qué término cambia con mayor rapidez. Para $\alpha = 1$, ambos términos varían del mismo modo, y dicha ecuación se simplifica a:

$$\omega(\zeta) = -\frac{1}{3} \quad , \quad \alpha = 1 \quad (152)$$

Este valor es independiente de ζ y k , y ambos límites, tanto cuando $\zeta \rightarrow 0$ como cuando $\zeta \rightarrow \infty$, convergen a $\omega = -1/3$. Un universo con expansión lineal ($\alpha = 1$) se comporta de manera equivalente a uno dominado por curvatura.

Para valores de α distintos a 1, el análisis se hará por inspección, puesto que, al hacerlo analíticamente, todos los casos conducen a un mismo asintótico, y esta situación no se ve reflejada en las gráficas que se mostrarán posteriormente. Cada análisis considerará primero un universo plano ($k = 0$), luego se analizarán los universos abierto y cerrado ($k = \pm 1$) conjuntamente.

6.2.4.1. Primer caso: $\alpha < 1$

Al sustituir el valor de $k = 0$ en la ecuación (108), se observa que desaparece la dependencia con ζ :

$$\omega = \frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{3\alpha(2\alpha - 1)} \quad , \quad k = 0 \quad (153)$$

Por lo tanto, para cada α , el valor de ω será constante. Al calcular los límites, como es de esperarse, se obtiene que:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \omega(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \omega(\zeta) = \frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{3\alpha(2\alpha - 1)} \quad , \quad k = 0 \quad (154)$$

Lo cual reproduce los resultados de Paiva, et. al. (2022). Con los resultados que serán obtenidos en las siguientes ecuaciones, se enunciará una conclusión general que incluya lo obtenido en la ecuación (154).

En cuanto a los valores de $k = \pm 1$, al tomar el límite cuando $\zeta \rightarrow 0$ en la ecuación (108):

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \omega(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha(7-6\alpha)-2}{t_0^2 \zeta^2} - \frac{k}{a_0^2 \zeta^{2\alpha}}}{\frac{3\alpha(2\alpha-1)}{t_0^2 \zeta^2} + \frac{3k}{a_0^2 \zeta^{2\alpha}}} \quad (155)$$

Se observa que, para un valor pequeño de ζ , cuando $\alpha < 1$, se cumple que $\zeta^{-2} > \zeta^{-2\alpha}$, haciendo que, tanto en el numerador como en el denominador, el primer término predomine sobre el segundo. Realizando sobre el numerador la siguiente aproximación, para valores pequeños de ζ :

$$\frac{\alpha(7-6\alpha)-2}{t_0^2 \zeta^2} - \frac{k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \approx \frac{\alpha(7-6\alpha)-2}{t_0^2 \zeta^2}, \quad \zeta \text{ pequeño} \quad (156)$$

Mientras que en el denominador:

$$\frac{3\alpha(2\alpha-1)}{t_0^2 \zeta^2} + \frac{3k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \approx \frac{3\alpha(2\alpha-1)}{t_0^2 \zeta^2}, \quad \zeta \text{ pequeño} \quad (157)$$

El límite se puede aproximar por:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \omega(\zeta) = \frac{\alpha(7-6\alpha)-2}{3\alpha(2\alpha-1)}, \quad k = \pm 1 \quad (158)$$

Esto hace que el límite se haga independiente de k pero dependiente de α , y coincide con el resultado de la ecuación (154).

Esto implica que tanto si el universo es plano, abierto o cerrado, el límite para ω cuando $\zeta \rightarrow 0$ viene dado por la ecuación (158). Según este modelo, si se conoce el ritmo de expansión del universo, dado por α , se podrá determinar cuál es el componente dominante cuando este tenía una edad temprana.

Por otro lado, al tomar el límite cuando $\zeta \rightarrow \infty$ en la ecuación (108):

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \omega(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha(7-6\alpha)-2}{t_0^2 \zeta^2} - \frac{k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}}}{\frac{3\alpha(2\alpha-1)}{t_0^2 \zeta^2} + \frac{3k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}}} \quad (159)$$

Se observa el comportamiento inverso: para valores grandes de ζ , se tiene que $\zeta^{-2} < \zeta^{-2\alpha}$, y ahora es el segundo término el que gana importancia, tanto en el numerador como en el denominador. La aproximación que se hace para el numerador es:

$$\frac{\alpha(7-6\alpha)-2}{t_0^2 \zeta^2} - \frac{k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \approx -\frac{k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}}, \quad \zeta \text{ grande} \quad (160)$$

Mientras que para el denominador:

$$\frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{t_0^2 \zeta^2} + \frac{3k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \approx \frac{3k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \quad , \quad \zeta \text{ grande} \quad (161)$$

Por lo tanto, el valor del límite se aproxima por:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \omega(\zeta) = -\frac{1}{3} \quad , \quad k = \pm 1 \quad (162)$$

El resultado es independiente tanto de k (siempre que $k \neq 0$) y de α . En este caso, el resultado difiere del dado por un universo plano.

Para el modelo de este trabajo se cumple que, tanto si el universo es cerrado como si es abierto, independientemente de su ritmo de expansión, tendrá un valor límite de $\omega = -1/3$ para valores grandes del tiempo coordinado. Dicho valor de ω corresponde a la componente de curvatura (Jones, 2017), la cual será la componente dominante en las condiciones mencionadas.

En la Figura 3 se muestra el comportamiento del parámetro ω respecto a ζ para distintos valores del ritmo de expansión α . En cada gráfico, se observa el primer valor asintótico común para cada valor de curvatura k , cuando $\zeta \rightarrow 0$, como lo predice la ecuación (158). El valor límite depende de α , aumentando cada vez más hasta $\alpha = -1$ cuando $|\alpha|$ aumenta (es decir, cuando α se hace más negativo).

En la misma figura, para $k = 0$ (línea roja), se puede observar que ω tiene un valor constante. Para $k = \pm 1$, se observa una región de transición entre uno y otro componente dominante, en donde, si el ritmo de expansión α se hace más negativo, esta transición ocurre más rápidamente. Para $k = +1$ (línea azul) se observa una transición suave, mientras que para $k = -1$ (línea verde), esta transición se traduce en una discontinuidad.

Finalmente, también en la Figura 3, cuando $\zeta \rightarrow \infty$, se observa que si $k = 0$, ω sigue manteniendo su valor constante, mientras que cuando $k = \pm 1$, ω tiende a $-1/3$, como predice la ecuación (162).

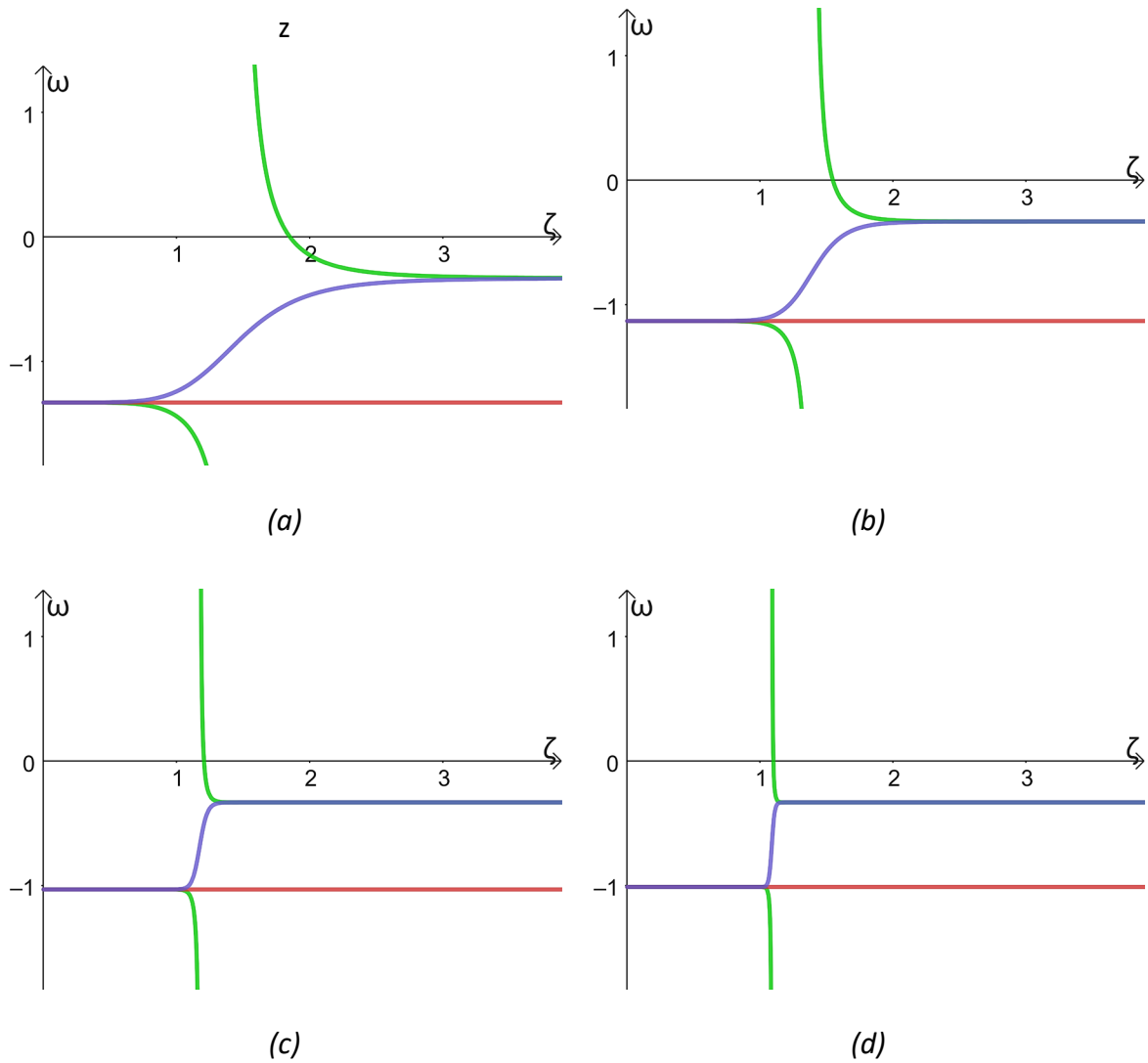


Figura 3. Evolución del parámetro ω respecto a ζ para (a) $\alpha = -2$, (b) $\alpha = -5$, (c) $\alpha = -20$ y (d) $\alpha = -60$. Línea roja: $k = 0$, línea azul: $k = +1$, línea verde: $k = -1$. Fuente: elaboración propia.

6.2.4.2. Segundo caso: $\alpha > 1$

Para un universo plano ($k = 0$) con $\alpha > 1$, el resultado es exactamente el mismo que el que se muestra en la ecuación (154), debido a que también se cancelan los términos que incluyen a ζ . De nuevo se concluye que, en un universo plano, ω es constante en el tiempo si α es conocida. Se recupera el resultado de Paiva, et. al. (2022), y se analizará este resultado en conjunto con los siguientes.

En cuanto a los universos con valores de $k = \pm 1$, el análisis es inverso al anterior, por un lado, para valores pequeños de ζ , la función ζ^{-2} es mayor que $\zeta^{-2\alpha}$, en la ecuación (155) predomina el segundo término, tanto en el numerador como en el denominador. La aproximación que se aplica para el numerador es:

$$\frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t_0^2 \zeta^2} - \frac{k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \approx -\frac{k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \quad , \quad \zeta \text{ pequeño} \quad (163)$$

En tanto que para el denominador:

$$\frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{t_0^2 \zeta^2} + \frac{3k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \approx \frac{3k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \quad , \quad \zeta \text{ pequeño} \quad (164)$$

Por lo tanto, el valor del límite se aproxima por:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \omega(\zeta) = -\frac{1}{3} \quad , \quad k = \pm 1 \quad (165)$$

En este caso, el resultado no depende de k (siempre que $k \neq 0$), ni del ritmo de expansión, y es en este límite donde el comportamiento difiere al obtenido para un universo plano.

Según este modelo, el término de curvatura ($\omega = -1/3$) es el predominante en edades tempranas del Universo, tanto si este es geoméricamente abierto o cerrado, siempre que se cumpla que $\alpha > 1$.

Por otro lado, tomando el límite cuando $\zeta \rightarrow \infty$ para las condiciones estudiadas, de nuevo la función ζ^{-2} es mayor que $\zeta^{-2\alpha}$, y en la ecuación (155) predomina el primer término, tanto en el numerador como en el denominador, la aproximación que se aplica para el numerador es:

$$\frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t_0^2 \zeta^2} - \frac{k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \approx \frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{t_0^2 \zeta^2} \quad , \quad \zeta \text{ grande} \quad (166)$$

En tanto que para el denominador:

$$\frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{t_0^2 \zeta^2} + \frac{3k}{a_0^2} \frac{1}{\zeta^{2\alpha}} \approx \frac{3\alpha(2\alpha - 1)}{t_0^2 \zeta^2} \quad , \quad \zeta \text{ grande} \quad (167)$$

Por lo tanto, el valor del límite se aproxima por:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \omega(\zeta) = \frac{\alpha(7 - 6\alpha) - 2}{3\alpha(2\alpha - 1)} \quad , \quad k = \pm 1 \quad (168)$$

El resultado es independiente de k , incluso si el universo es plano, puesto que coincide con el obtenido en la ecuación (154). Por lo tanto, acorde con este modelo, si el ritmo de expansión α es mayor que 1, el componente dominante en edades grandes del universo viene determinado matemáticamente por el ritmo de expansión. Si se puede determinar el valor de α , se podrá determinar el respectivo ω correspondiente al componente dominante en estas condiciones.

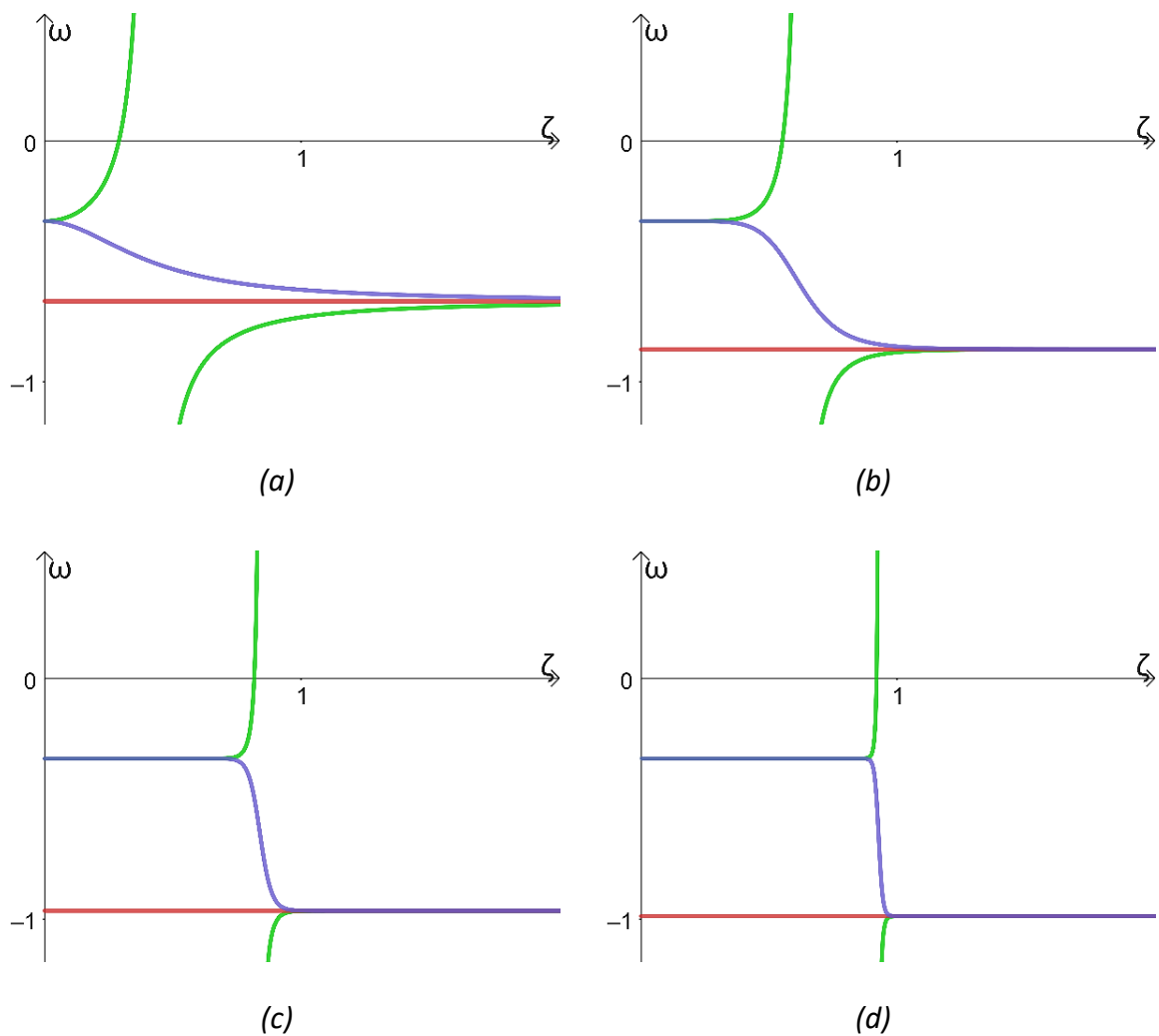


Figura 4. Evolución del parámetro ω respecto a ζ para (a) $\alpha = 2$, (b) $\alpha = 5$, (c) $\alpha = 20$ y (d) $\alpha = 60$. Línea roja: $k = 0$, línea azul: $k = +1$, línea verde: $k = -1$. Fuente: elaboración propia.

En la Figura 4 se muestra el comportamiento del parámetro ω respecto a ζ para $\alpha > 1$. En cada gráfico, se observa que para $k = 0$ (curva roja), el valor de ω permanece constante si se fija α , tal como lo predice la ecuación (154). Cuando $\zeta \rightarrow 0$, se observa que $\omega = -1/3$ cuando $k = +1$ (curva azul) y cuando $k = -1$ (curva verde), como lo predice la ecuación (165).

Tal como ocurría en el caso de $\alpha < 0$, se observa una región de transición en $k = \pm 1$, y cuando α adquiere valores cada vez mayores, el tiempo que demora esta transición se hace menor. También se observa que para $k = +1$ esta transición es suave, mientras que para $k = -1$, se detecta una discontinuidad.

Cuando $\zeta \rightarrow \infty$, también en la Figura 4, se observa un valor límite común para los tres valores de k , que depende de α , como se predijo en la ecuación (168). Para valores de α cada vez mayores, el valor de este límite disminuye, acercándose a $\alpha = -1$.

7. Conclusiones finales y trabajo futuro

En concordancia con los objetivos planteados en el apartado 3, se realizó la derivación de las ecuaciones modificadas de Friedman, las cuales describen la evolución de la densidad y la presión en un universo en expansión con disipación de energía, que posee curvatura y materia. La deducción fue realizada de manera rigurosa utilizando las ecuaciones de campo de Einstein, análogamente a como se dedujeron las ecuaciones (originales) de Friedman. En la versión modificada de las ecuaciones, se agrega un término ϕ , el cual representa la disipación en el modelo propuesto.

Además de lo mencionado en el párrafo anterior, en el apartado 6 se pudo realizar un estudio cualitativo, para distintos escenarios, del comportamiento de las funciones de presión, densidad y parámetro de estado ω imponiendo la conservación del tensor energía-momento y asumiendo que la *constante* de gravitación G no sea función de las coordenadas, puesto que, en la derivación original, se permitía esta variación.

La principal limitación del modelo descrito en este trabajo, es exigir que el factor de escala siga un monomio fijo expresado como una ley de potencias, $a = a_0(t/t_0)^\alpha$, forzando a las ecuaciones de densidad, presión y parámetro de estado ω a que respondan en función a esta forma de la ecuación y reproduciendo, en ciertos casos, resultados ilógicos.

Unido con lo anterior, la otra limitación del modelo es que arroja densidades negativas, independientemente del valor asumido de la curvatura k . Un modelo realista arrojaría valores de densidad siempre positivos, decreciendo con el tiempo de acuerdo al ritmo de expansión.

También se puede mencionar que en los límites de $t \rightarrow 0$ y $t \rightarrow \infty$, los valores asintóticos de ω que son dependientes del ritmo de expansión α , no responden a cantidades conocidas en todos los casos, por ejemplo, no se detectaron fácilmente valores de $\omega = 0$ (correspondiente al dominio de materia fría) (Jones, 2017).

Una fortaleza del modelo propuesto es que, de cierta forma, describe cualitativamente una transición adecuada en el dominio de un primer componente dominante en tiempos cercanos al origen del Universo, y el de un segundo componente para valores grandes de tiempo. También, para ciertos valores del ritmo de expansión, la densidad, la presión y el parámetro de estado ω se comportan de forma esperada.

Como trabajo futuro se plantea buscar una forma más general de la función ϕ , a partir de la derivada de Lie, lo cual permitirá resolver el sistema de una forma más completa. Así también, se podría buscar resolver de ecuaciones de densidad y presión, junto con una ecuación de estado genérica, para encontrar una función del factor de escala, evitando así imponer una forma determinada a dicho factor. Una vez obtenidas estas expresiones, una aplicación interesante sería derivarlas en función al *redshift*, para así poder tener una forma de contrastar las predicciones con las mediciones observacionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abraham, S., Acernese, F., Ackley, K., . . . Allocca, A. Z. (2021). A Gravitational-wave Measurement of the Hubble Constant Following the Second Observing Run of Advanced LIGO and Virgo. *The Astrophysical Journal*, 909 - 218. DOI: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/abdc7>.
- Agrawal, A., Mishra, B., & Tripathy, S. (2023). Observationally constrained accelerating cosmological model with higher power of non-metricity and squared trace. *Journal of High Energy Astrophysics*, 41-48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jheap.2023.04.001>.
- Arnau Romeu, J. (2014). Derivation of Friedmann equations. *Universitat de Barcelona [Trabajo de Fin de Grado]*.
- Astier, P., & Pain, R. (2012). Observational evidence of the accelerated expansion of the universe. *Comptes Rendus Physique*, 521-538. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2012.04.009>.
- Dalarsson, M., & Dalarsson, N. (2015). *Tensors, Relativity and Cosmology (2da Ed.)*. ELSIEVER.
- E., A. S. (1935). Relativity, Gravitation and World-Structure. *Nature*, Vol. 135, 635–636.
- Einstein, A. (1915a). Feldgleichungen der Gravitation. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 844-847.
- Einstein, A. (1915b). Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 778-801.
- Gaset, J., Lainz, M., Mas, A., & Rivas, X. (2022). The Herglotz variational principle for dissipative field theories. *arXiv*, arXiv:2211.17058v1.
- Janssen, B. (2013). *Relatividad General*. Granada, España: CC-BY-NC.
- Jones, B. J. (2017). *Precision Cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kotlařík, P., & Kofroň, D. (2022). Black Hole Encircled by a Thin Disk: Fully Relativistic Solution. *The Astrophysical Journal*, DOI: 10.3847/1538-4357/ac9620.
- Koyama, K. (2016). Cosmological tests of modified gravity. *IPO Publishing*, DOI:10.1088/0034-4885/79/4/046902.

- Kragh, H., & Smith, R. W. (2003). Who discovered the expanding universe? *History of Science, Vol. 41*, 141-162. DOI: <https://doi.org/10.1177/007327530304100202>.
- Padmanabhan, T. (2003). Cosmological constant—the weight of the vacuum. *Physics Reports* 380, 235 - 320. DOI:10.1016/S0370-1573(03)00120-0.
- Paiva, J. A., Lazo, M., & Zanchin, V. T. (2022). Generalized nonconservative gravitational field equations from Herglotz action principle. *PHYSICAL REVIEW D*, 124023. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.124023>.
- Planck Colaboration. (2020). Planck 2018 results. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, A6 (1 - 67). DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>.
- Riddle, A. R. (2001). Acceleration of the Universe. *New Astronomy Reviews Vol. 45*, 235 - 253. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1387-6473\(00\)00146-9](https://doi.org/10.1016/S1387-6473(00)00146-9).
- Riess, A. G., Casertano, S., Yuan, W., Macri, L. M., & Scolnic, D. (2019). Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM. *The Astrophysical Journal Vol. 876*, 85 - 97. DOI: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab1422>.
- Schwarzschild, K. (1916). On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 189-196.
- Secrest, N. J., von Hausegger, S., Rameez, M., Mohayaee, R., Sarkar, S., & Colin, J. (2022). A Test of the Cosmological Principle with Quasars. *The Astrophysical Journal*, DOI: 10.3847/1538-4357/ac9620.
- Steigman, G., & Turner, M. S. (1983). INFLATION IN A SHEAR- OR CURVATURE-DOMINATED UNIVERSE. *Physics Letters*, 295-298. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)90263-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90263-0).
- Uzan, J.-P., & Lehoucq, R. (2001). A dynamical study of the Friedmann equations. *European Journal of Physics*, 371-384. DOI: 10.1088/0143-0807/22/4/312.
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. New York: Oxford.

Yunes, N., Yagi, K., & Pretorius, F. (2016). Theoretical physics implications of the binary black-hole mergers GW150914 and GW151226. *PHYSICAL REVIEW*, DOI: 10.1103/PhysRevD.94.084002.

ANEXO A. CÁLCULO DE LOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL.

Los símbolos de Christoffel que presentan a la coordenada t en el índice superior se calculan a continuación:

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_t g_{\beta t} + \partial_t g_{\beta t} - \partial_\beta g_{tt}) = 0$$

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_t g_{\beta r} + \partial_r g_{\beta t} - \partial_\beta g_{tr}) = 0$$

$$\Gamma_{t\theta}^t = \Gamma_{\theta t}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_t g_{\beta\theta} + \partial_\theta g_{\beta t} - \partial_\beta g_{t\theta}) = 0$$

$$\Gamma_{t\varphi}^t = \Gamma_{\varphi t}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_t g_{\beta\varphi} + \partial_\varphi g_{\beta t} - \partial_\beta g_{t\varphi}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_r g_{\beta r} + \partial_r g_{\beta r} - \partial_\beta g_{rr}) = \frac{1}{2} g^{tt} (-\partial_t g_{rr}) = \frac{1}{2} (-1) \left[-\partial_t \left(\frac{a^2}{1 - kr^2} \right) \right] \\ &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{r\theta}^t = \Gamma_{\theta r}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_r g_{\beta\theta} + \partial_\theta g_{\beta r} - \partial_\beta g_{r\theta}) = 0$$

$$\Gamma_{r\varphi}^t = \Gamma_{\varphi r}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_r g_{\beta\varphi} + \partial_\varphi g_{\beta r} - \partial_\beta g_{r\varphi}) = 0$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_\theta g_{\beta\theta} + \partial_\theta g_{\beta\theta} - \partial_\beta g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} g^{tt} (-\partial_t g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} (-1) [-\partial_t (a^2 r^2)] = a\dot{a} r^2$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^t = \Gamma_{\varphi\theta}^t = \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_\theta g_{\beta\varphi} + \partial_\varphi g_{\beta\theta} - \partial_\beta g_{\theta\varphi}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= \frac{1}{2} g^{t\beta} (\partial_\varphi g_{\beta\varphi} + \partial_\varphi g_{\beta\varphi} - \partial_\beta g_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{2} g^{tt} (-\partial_t g_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{2} (-1) [-\partial_t (a^2 r^2 \sin^2 \theta)] \\ &= a\dot{a} r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Los símbolos de Christoffel que presentan a la coordenada r en el índice superior se calculan a continuación:

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_t g_{\beta t} + \partial_t g_{\beta t} - \partial_\beta g_{tt}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_t g_{\beta r} + \partial_r g_{\beta t} - \partial_\beta g_{tr}) = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_t g_{rr}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - kr^2}{a^2} \right) \left[-\partial_t \left(\frac{a^2}{1 - kr^2} \right) \right] = \frac{\dot{a}}{a}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{t\theta}^r = \Gamma_{\theta t}^r = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_t g_{\beta\theta} + \partial_\theta g_{\beta t} - \partial_\beta g_{t\theta}) = 0$$

$$\Gamma_{t\varphi}^r = \Gamma_{\varphi t}^r = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_t g_{\beta\varphi} + \partial_\varphi g_{\beta t} - \partial_\beta g_{t\varphi}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_r g_{\beta r} + \partial_r g_{\beta r} - \partial_\beta g_{rr}) = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_r g_{rr}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - kr^2}{a^2} \right) \left[\partial_r \left(\frac{a^2}{1 - kr^2} \right) \right] \\ &= \frac{kr}{1 - kr^2}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_r g_{\beta\theta} + \partial_\theta g_{\beta r} - \partial_\beta g_{r\theta}) = 0$$

$$\Gamma_{r\varphi}^r = \Gamma_{\varphi r}^r = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_r g_{\beta\varphi} + \partial_\varphi g_{\beta r} - \partial_\beta g_{r\varphi}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_\theta g_{\beta\theta} + \partial_\theta g_{\beta\theta} - \partial_\beta g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} g^{rr} (-\partial_r g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - kr^2}{a^2} \right) [-\partial_r (a^2 r^2)] \\ &= -r(1 - kr^2)\end{aligned}$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^r = \Gamma_{\varphi\theta}^r = \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_\theta g_{\beta\varphi} + \partial_\varphi g_{\beta\theta} - \partial_\beta g_{\theta\varphi}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\varphi\varphi}^r &= \frac{1}{2} g^{r\beta} (\partial_\varphi g_{\beta\varphi} + \partial_\varphi g_{\beta\varphi} - \partial_\beta g_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{2} g^{rr} (-\partial_r g_{\varphi\varphi}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - kr^2}{a^2} \right) [-\partial_r (a^2 r^2 \sin^2 \theta)] = -r \sin^2 \theta (1 - kr^2)\end{aligned}$$

Los símbolos de Christoffel que presentan a la coordenada θ en el índice superior se calculan a continuación:

$$\Gamma_{tt}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_t g_{\beta t} + \partial_t g_{\beta t} - \partial_\beta g_{tt}) = 0$$

$$\Gamma_{tr}^\theta = \Gamma_{rt}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_t g_{\beta r} + \partial_r g_{\beta t} - \partial_\beta g_{tr}) = 0$$

$$\Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_t g_{\beta\theta} + \partial_\theta g_{\beta t} - \partial_\beta g_{t\theta}) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_t g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2} \right) [\partial_t (a^2 r^2)] = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Gamma_{t\varphi}^{\theta} = \Gamma_{\varphi t}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_t g_{\beta\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\beta t} - \partial_{\beta} g_{t\varphi}) = 0$$

$$\Gamma_{rr}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_r g_{\beta r} + \partial_r g_{\beta r} - \partial_{\beta} g_{rr}) = 0$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_r g_{\beta\theta} + \partial_{\theta} g_{\beta r} - \partial_{\beta} g_{r\theta}) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2} \right) [\partial_r (a^2 r^2)] = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{r\varphi}^{\theta} = \Gamma_{\varphi r}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_r g_{\beta\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\beta r} - \partial_{\beta} g_{r\varphi}) = 0$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_{\theta} g_{\beta\theta} + \partial_{\theta} g_{\beta\theta} - \partial_{\beta} g_{\theta\theta}) = 0$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^{\theta} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_{\theta} g_{\beta\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\beta\theta} - \partial_{\beta} g_{\theta\varphi}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} &= \frac{1}{2} g^{\theta\beta} (\partial_{\varphi} g_{\beta\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\beta\varphi} - \partial_{\beta} g_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-\partial_{\theta} g_{\varphi\varphi}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2} \right) [-\partial_{\theta} (a^2 r^2 \sin^2 \theta)] = -\sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Los símbolos de Christoffel que presentan a la coordenada φ en el índice superior se calculan a continuación:

$$\Gamma_{tt}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\beta} (\partial_t g_{\beta t} + \partial_t g_{\beta t} - \partial_{\beta} g_{tt}) = 0$$

$$\Gamma_{tr}^{\varphi} = \Gamma_{rt}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\beta} (\partial_t g_{\beta r} + \partial_r g_{\beta t} - \partial_{\beta} g_{tr}) = 0$$

$$\Gamma_{t\theta}^{\varphi} = \Gamma_{\theta t}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\beta} (\partial_t g_{\beta\theta} + \partial_{\theta} g_{\beta t} - \partial_{\beta} g_{t\theta}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{t\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi t}^{\varphi} &= \frac{1}{2} g^{\varphi\beta} (\partial_t g_{\beta\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\beta t} - \partial_{\beta} g_{t\varphi}) = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (\partial_t g_{\varphi\varphi}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) [-\partial_t (a^2 r^2 \sin^2 \theta)] = \frac{\dot{a}}{a} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{rr}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\beta} (\partial_r g_{\beta r} + \partial_r g_{\beta r} - \partial_{\beta} g_{rr}) = 0$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\varphi} = \Gamma_{\theta r}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\beta} (\partial_r g_{\beta\theta} + \partial_{\theta} g_{\beta r} - \partial_{\beta} g_{r\theta}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} &= \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\beta} (\partial_r g_{\beta\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\beta r} - \partial_{\beta} g_{r\varphi}) = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (\partial_r g_{\varphi\varphi}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) [\partial_r (a^2 r^2 \sin^2 \theta)] = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\beta} (\partial_{\theta} g_{\beta\theta} + \partial_{\theta} g_{\beta\theta} - \partial_{\beta} g_{\theta\theta}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} &= \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\beta} (\partial_{\theta} g_{\beta\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\beta\theta} - \partial_{\beta} g_{\theta\varphi}) = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (\partial_{\theta} g_{\beta\varphi}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) [\partial_{\theta} (a^2 r^2 \sin^2 \theta)] = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\beta} (\partial_{\varphi} g_{\beta\varphi} + \partial_{\varphi} g_{\beta\varphi} - \partial_{\beta} g_{\varphi\varphi}) = 0$$

ANEXO B. COMPONENTES DEL TENSOR DE RICCI

Las componentes de la forma $R_{t\alpha}$, para $\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$, se calculan a continuación:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \partial_j \Gamma_{tt}^j - \partial_t \Gamma_{tj}^j + \Gamma_{tt}^p \Gamma_{pj}^j - \Gamma_{tj}^p \Gamma_{pt}^j = -\partial_t \Gamma_{tr}^r - \partial_t \Gamma_{t\theta}^\theta - \partial_t \Gamma_{t\varphi}^\varphi - (\Gamma_{tr}^r)^2 - (\Gamma_{t\theta}^\theta)^2 - (\Gamma_{t\varphi}^\varphi)^2 \\ &= -3\partial_t \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \end{aligned}$$

$$R_{tr} = R_{rt} = \partial_j \Gamma_{tr}^j - \partial_r \Gamma_{tj}^j + \Gamma_{tr}^p \Gamma_{pj}^j - \Gamma_{tj}^p \Gamma_{pr}^j = 0$$

$$R_{t\theta} = R_{t\theta} = \partial_j \Gamma_{t\theta}^j - \partial_\theta \Gamma_{tj}^j + \Gamma_{t\theta}^p \Gamma_{pj}^j - \Gamma_{tj}^p \Gamma_{p\theta}^j = 0$$

$$R_{t\varphi} = R_{\varphi t} = \partial_j \Gamma_{t\varphi}^j - \partial_\varphi \Gamma_{tj}^j + \Gamma_{t\varphi}^p \Gamma_{pj}^j - \Gamma_{tj}^p \Gamma_{p\varphi}^j = 0$$

Las componentes de la forma $R_{r\alpha}$, para $\alpha = (r, \theta, \varphi)$ se calculan a continuación:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \partial_j \Gamma_{rr}^j - \partial_r \Gamma_{rj}^j + \Gamma_{rr}^p \Gamma_{pj}^j - \Gamma_{rj}^p \Gamma_{pr}^j \\ &= \partial_t \Gamma_{rr}^t - \partial_r \Gamma_{r\theta}^\theta - \partial_r \Gamma_{r\varphi}^\varphi + \Gamma_{rr}^t (\Gamma_{t\theta}^\theta + \Gamma_{t\varphi}^\varphi) + \Gamma_{rr}^r (\Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\varphi}^\varphi) - \Gamma_{tr}^r \Gamma_{rr}^t \\ &\quad - (\Gamma_{r\theta}^\theta)^2 - (\Gamma_{r\varphi}^\varphi)^2 \\ &= \partial_t \left(\frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \right) - 2\partial_r \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \cdot 2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{kr}{1-kr^2} \frac{2}{r} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} - \frac{2}{r^2} \\ &= \frac{2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k}{1-kr^2} \end{aligned}$$

$$R_{r\theta} = R_{\theta r} = \partial_j \Gamma_{r\theta}^j - \partial_r \Gamma_{\theta j}^j + \Gamma_{r\theta}^p \Gamma_{pj}^j - \Gamma_{rj}^p \Gamma_{p\theta}^j = 0$$

$$R_{r\varphi} = R_{\varphi r} = \partial_j \Gamma_{r\varphi}^j - \partial_\varphi \Gamma_{rj}^j + \Gamma_{r\varphi}^p \Gamma_{pj}^j - \Gamma_{rj}^p \Gamma_{p\varphi}^j = 0$$

Las componentes de la forma $R_{\theta\alpha}$, para $\alpha = (\theta, \varphi)$ se calculan a continuación:

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= \partial_j \Gamma_{\theta\theta}^j - \partial_\theta \Gamma_{\theta j}^j + \Gamma_{\theta\theta}^p \Gamma_{pj}^j - \Gamma_{\theta j}^p \Gamma_{p\theta}^j \\ &= \partial_t \Gamma_{\theta\theta}^t + \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi + \Gamma_{\theta\theta}^t (\Gamma_{tr}^r + \Gamma_{t\varphi}^\varphi) + \Gamma_{\theta\theta}^r (\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\varphi}^\varphi) - \Gamma_{\theta\theta}^t \Gamma_{t\theta}^\theta \\ &\quad - \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{r\theta}^\theta - (\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi)^2 \\ &= \partial_t (a\dot{a}r^2) + \partial_r [-r(1-kr^2)] - \partial_\theta \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + a\dot{a}r^2 \cdot 2 \frac{\dot{a}}{a} \\ &\quad - r(1-kr^2) \left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{1}{r} \right) - a\dot{a}r^2 \cdot \frac{\dot{a}}{a} + r(1-kr^2) \frac{1}{r} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= r^2(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k) \end{aligned}$$

$$R_{\theta\varphi} = R_{\varphi\theta} = \partial_j \Gamma_{\theta\varphi}^j - \partial_\varphi \Gamma_{\theta j}^j + \Gamma_{\theta\varphi}^p \Gamma_{pj}^j - \Gamma_{\theta j}^p \Gamma_{p\varphi}^j = 0$$

Finalmente, la componente $R_{\varphi\varphi}$ se calcula por:

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi} &= \partial_j \Gamma_{\varphi\varphi}^j - \partial_\varphi \Gamma_{\varphi j}^j + \Gamma_{\varphi\varphi}^p \Gamma_{pj}^j - \Gamma_{\varphi j}^p \Gamma_{p\varphi}^j \\ &= \partial_t \Gamma_{\varphi\varphi}^t + \partial_r \Gamma_{\varphi\varphi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta + \Gamma_{\varphi\varphi}^t \Gamma_{t\varphi}^\varphi + \Gamma_{\varphi\varphi}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \\ &= \partial_t (a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta) + \partial_r [-r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] + \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{\dot{a}}{a} - r \sin^2 \theta (1 - kr^2) \frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\sin \theta} \\ &= r^2 \sin^2 \theta (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k) \end{aligned}$$