



**Universidad Internacional de La Rioja**

**Facultad de Educación**

**Trabajo fin de máster**

---

Enseñanza de sucesiones  
basada en la teoría APOE con  
la metodología de  
Aprendizaje Basado en  
Problemas para 3° ESO

---

**Autor:** Alejandra Natalia Regalado Bonilla

**Titulación:** Máster Universitario en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato

**Tipo de Trabajo:** Propuesta de intervención didáctica

**Director/a:** Beatriz Marcos Ramiro

**Ciudad:** Apopa

**Fecha de depósito:** 23/07/2020

## Resumen

Los pobres resultados en pruebas internacionales y la alta tasa de abandono escolar son deficiencias comunes del sistema educativo tanto español como de países latinoamericanos. Estos problemas se achacan al uso generalizado de metodologías didácticas desfasadas, como la lección magistral.

En respuesta a esta problemática, en la presente propuesta de intervención se ha planteado el objetivo de diseñar una unidad didáctica para explicar los contenidos referentes a las sucesiones numéricas, donde la secuencia está definida por la descomposición genética que se realiza para aplicar la teoría APOE y las actividades que se proponen en cada sesión se realizan con base a la metodología activa de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). La característica principal de la teoría APOE es que permite desarrollar contenidos tomando en cuenta el método genético, el cuál propone que para aprender es necesario exponer a los estudiantes a situaciones que corresponden a la formación misma del objeto matemático en cuestión. Por otro lado, el Aprendizaje Basado en Problemas proporciona al estudiante el espacio para responsabilizarse de su propio aprendizaje, además de propiciar el análisis crítico y el aprendizaje significativo.

Con esta teoría y metodología se presenta una propuesta de intervención didáctica, que busca mejorar el aprendizaje de las sucesiones, así como identificar y solventar las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes sobre todo al momento de generalizar.

Se concluye con la importancia de utilizar el método genético en el estudio de un objeto matemático, tomando como base el desarrollo cognitivo del estudiantado y que la combinación de la teoría APOE y la metodología ABP conforman una base fundamental que permite desarrollar unidades didácticas basadas en ellas para asumir los retos del desarrollo cognitivo y las exigencias de la sociedad hacia los estudiantes.

**Palabras clave:** Aprendizaje basado en problemas, descomposición genética, sucesiones, teoría APOE, 3º ESO.

## **Abstract**

The poor results in international tests and the high dropout rate are common deficiencies in the educational system both in Spain and in Latin American countries. These problems are attributed to the widespread use of outdated teaching methodologies, such as the master class.

In response to this problem, in this intervention proposal the objective of designing a didactic unit to explain the contents has been raised referring to numerical sequences where the sequence is defined by decomposition genetics that is done to apply the APOS theory. The activities proposed in each session are carried out based on the active methodology of Problem Based Learning (PBL). The main characteristic of the APOS theory is that it allows the development of contents accounting the genetic method, which proposes that students should be exposed to situations in order to learn the formation of the mathematical object in question. On the other hand, Problem Based Learning provides the student with the space to take responsibility for their own learning, in addition to promoting critical analysis and meaningful learning.

With this theory and methodology a proposal is presented, which seeks to improve the learning of sequences, as well as identify and solve the difficulties face by students, especially during generalizing process.

It concludes with the importance of using the genetic method in the study of a mathematical object, based on the cognitive development of the student body and the combination of APOS theory and BPL methodology form a fundamental base that allows to develop didactic units based on them basis to take on the challenges of cognitive development and the demands of society on students.

**Keywords:** Problem-based learning, genetic decomposition, sequences, APOS theory, 3° ESO.

# Índice

1. Introducción.....	1
1.1. Justificación y planteamiento del problema.....	1
1.2. Objetivos.....	3
2. Marco teórico .....	4
2.2. Dificultades en el aprendizaje de sucesiones .....	5
2.3. Consideraciones en la enseñanza de las sucesiones.....	6
2.4. Teoría APOE .....	9
2.5. Metodología basada en Aprendizaje Basado en Problemas .....	13
2.5.1. Generalidades del ABP.....	13
2.5.2. Características .....	14
2.5.3. Rol del docente en ABP.....	16
2.5.4. Rol del estudiante en ABP.....	17
2.5.5. Ventajas y desventajas del ABP.....	18
2.5.6. Fases del ABP.....	19
2.4.6 Evaluación en ABP .....	21
3. Propuesta de intervención didáctica .....	22
3.1. Contextualización .....	22
3.2. Objetivos.....	23
3.3. Competencias clave.....	24
3.4. Contenidos.....	25
3.4.1. Descomposición genética .....	26
3.5. Metodología.....	28
3.6. Temporalización .....	28
3.7. Actividades.....	32
3.7. Recursos.....	49
3.8. Evaluación.....	49
3.9. Evaluación de la propuesta.....	50
4. Conclusiones .....	52
5. Limitaciones y prospectiva.....	53

## Índice de tablas

<i>Tabla 1 Acciones a realizar con los términos de una sucesión</i> .....	9
<i>Tabla 2 fases del ABP</i> .....	20
<i>Tabla 3 Objetivos</i> .....	23
<i>Tabla 4 Relación entre los elementos didácticos que componen la UD</i> .....	27
<i>Tabla 5 Temporalización de las actividades.</i> .....	29
<i>Tabla 6 sesión 1</i> .....	32
<i>Tabla 7 sesión 2 y 3</i> .....	34
<i>Tabla 8 sesión 4</i> .....	35
<i>Tabla 9 sesión 5</i> .....	36
<i>Tabla 10 sesión 6</i> .....	37
<i>Tabla 11 sesión 7</i> .....	38
<i>Tabla 12 sesión 8</i> .....	40
<i>Tabla 13 sesión 9 y 10</i> .....	41
<i>Tabla 14 sesión 11</i> .....	42
<i>Tabla 15 sesión 12</i> .....	43
<i>Tabla 16 sesión 13</i> .....	44
<i>Tabla 17 sesión 14</i> .....	45
<i>Tabla 18 sesión 15 y 16</i> .....	46
<i>Tabla 19 sesión 17</i> .....	47
<i>Tabla 20 sesión 18</i> .....	48
<i>Tabla 21 Matriz DAFO para evaluar la unidad didáctica</i> .....	51
<i>Tabla 22 Anexo 2 Distribución de puntos por sesión</i> .....	63
<i>Tabla 23 Anexo 3 Autoevaluación</i> .....	63
<i>Tabla 24 Anexo 4 Coevaluación</i> .....	64
<i>Tabla 25 Anexo 5 Evaluación del trabajo realizado en el grupo</i> .....	64
<i>Tabla 26 Anexo 6 Evaluación del docente sobre el trabajo en clase</i> .....	65
<i>Tabla 27 Anexo 7 Evaluación del docente a la guía de trabajo realizada por los estudiantes</i> .....	66
<i>Tabla 28 Anexo 8 Evaluación del estudiante</i> .....	66

## Índice de Figuras

<i>Figura 1: Representación continua del término general de una sucesión</i> .....	6
<i>Figura 2: Patrón puntual</i> .....	7
<i>Figura 3: Números figurados</i> .....	7
<i>Figura 4: Distribución del tiempo según las fases del proceso de enseñanza-aprendizaje.</i> 19	
<i>Figura 5: Conjuntos A, B, C y D para introducción de patrones</i> .....	32
<i>Figura 6: Grupos B1 y B2 para representación de patrones</i> .....	33
<i>Figura 7: Cálculo del término de una sucesión</i> .....	39

# 1. Introducción

## 1.1. Justificación y planteamiento del problema

En El Salvador en el año 2018 se tuvo la segunda cifra menor de deserción escolar en educación media en los últimos cinco años, siendo aun así un 6.1% de 71,809 a nivel público, lo que supone la mayor cifra de abandono escolar de todos los niveles educativos, en el mismo año. Además, la tasa de repetición en el mismo nivel es del 4.09%. A estos problemas, se suman los pobres resultados de los estudiantes en la prueba estandarizada nacional, Prueba de Aprendizaje y Aptitudes para egresados de Educación Media (PAES), que tuvo un puntaje global del 5.66 sobre 10. En matemática el promedio alcanzado fue de 5.22, donde un 40.63% de los estudiantes tiene un nivel básico de logros, es decir, una puntuación entre el 0.0 y 3.75. Una de las habilidades evaluadas dentro de la prueba corresponde a establecer la diferencia entre una sucesión geométrica y una aritmética, el porcentaje de éxito en este aspecto fue del 60%, mientras que identificar el término general de una sucesión aritmética o geométrica tuvo un porcentaje de éxito del 44% (MINED, 2019). Estos resultados evidencian que los contenidos de sucesiones no son aprendidos y comprendidos de la manera correcta por alrededor de la mitad de los estudiantes. En el caso de España la deserción de estudiantes que no finalizan la educación secundaria en el 2018 fue del 17.9 %, en promedio el porcentaje de estudiantes que repiten alguno de los cuatro cursos de la secundaria obligatoria es de 11.45 % (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2020). España participa en el *Programme for International Student Assessment* (PISA) desde sus inicios, en el 2018 participaron alrededor de 36,000 estudiantes de 15 años alcanzando una media de puntos de 481 en matemática, sufriendo un leve descenso de 5 puntos respecto al 2015 y es significativamente menor al puntaje promedio obtenido por la Unión Europea de 494, además está por debajo de la mediana de los países participantes. Esto pone de manifiesto la importancia de continuar con el estudio y mejora de los aprendizajes en matemática en los diferentes contenidos y niveles educativos de ambos países (Instituto de Evaluación Educativa, 2019).

La presente propuesta se basa en la enseñanza de las sucesiones. Se consideró el tema de sucesiones por su particular relación con las funciones, siendo este último un contenido primordial para las matemáticas superiores. Además, las sucesiones permiten desarrollar las habilidades algebraicas y conforman un paso previo para la generalización matemática.

La generalización es la base para la construcción de modelos matemáticos que describen fenómenos y esta es una de las principales actividades de la matemática, sin embargo, la transición del trabajo con cantidades conocidas a un trabajo con reglas generales que describan modelos, es uno de los más complejos para los estudiantes.

Parte de los problemas que conllevan un manejo inadecuado de las sucesiones inicia con la identificación de patrones, los cuales dependiendo de su construcción y propósito pueden trasladarse a situaciones numéricas, en donde se desea encontrar reglas para la formación de otros elementos con las mismas características básicas; describir estas reglas es uno de los grandes objetivos del estudio de sucesiones, pero presenta grandes retos como se menciona en Cañadas (2007, p. 152) “Hay estudiantes que encuentran dificultades en las tareas de generalización en las que se requiere la visualización del patrón”. Esto pone de manifiesto la importancia del estudio de sucesiones y las representaciones con las que se desea que el estudiante adquiriera los conocimientos.

Lo anterior demuestra la importancia de presentar una secuencia adecuada y recursos idóneos para la construcción del objeto matemático sucesiones. Con este fin se propone seguir la teoría APOE, utilizando su método genético para proporcionar a los estudiantes un camino cognitivo que permita solventar algunas de las dificultades a las que se enfrentan, en los casos en donde los estímulos no son apropiados.

La teoría APOE es una herramienta potente que ha tenido la oportunidad de demostrar su efectividad en educación superior, con otros contenidos relacionados como lo son derivadas, límites, integrales y el objeto matemático serie, el cual está directamente relacionado con sucesiones. En ese sentido esta propuesta de intervención didáctica tiene interés en ampliar los horizontes aplicandola en 3° de la ESO (Bachillerato en el Programa de Estudio de El Salvador).

Otra de las situaciones que dificulta el aprendizaje de los alumnos de forma general es la metodología utilizada para presentar los contenidos. Históricamente la Matemática

ha llegado a los estudiantes como procesos a memorizar o fórmulas para aplicar, como resultado se ha limitado el desarrollo cognitivo, la capacidad de análisis y la creación de estrategias de resolución de problemas que enfrentan las sociedades actuales y "una parte de la esencia de las matemáticas es la actividad de resolución de problemas" (González, Medina, Vilanova, y Astiz, 2011, sp.), por lo que es preciso cuidar el trabajo que se realiza con los estudiantes.

En particular limitar las actividades donde el estudiante proponga las acciones y estrategias para resolver las situaciones que se proponen, puede causar dificultad en comprender los procesos de generalización o la identificación de patrones, así como en la generación de la imagen adecuada de los conceptos y procesos involucrados tal como se cita en Velásquez (2012, p. 6): "A los estudiantes de cálculo integral se les dificulta la solución de algunos problemas que tienen que ver con sucesión y series; una posible razón es que no exploramos otras alternativas de solución de estos u otros problemas similares". Para disminuir esta dificultad, en esta propuesta se propone trabajar con el Aprendizaje Basado en Problemas, puesto que esta metodología permite la participación activa de los estudiantes, convirtiéndose su aprendizaje en activo. Esta forma de trabajo está orientada a la comprensión del contenido, pero al mismo tiempo genera el espacio para que se aplique lo aprendido (Bueno, 2018).

Con esto, se pretende solventar la dificultad de la identificación de patrones y generalizar las reglas para generarlos o que los describan. Se espera además que pueda retomarse la teoría APOE en otros niveles educativos para apoyar en el proceso de adquisición de otros contenidos, tal como lo han hecho los niveles de Van Hiele. Por otro lado, se desea ejemplificar una forma de trabajar conceptos, procesos y contenidos completos utilizando Aprendizaje Basado en Problemas, algo que tradicionalmente no se ha considerado en Matemáticas.

## 1.2. Objetivos

- **Objetivo general**
  - Diseñar una propuesta de intervención utilizando la teoría APOE, con el contenido de sucesiones numéricas, sucesiones recurrentes y progresiones aritméticas para 3° de ESO, aplicando la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas.



- **Objetivos específicos**

- 1) Analizar las dificultades en el aprendizaje de sucesiones como paso previo a la generalización matemática.
- 2) Presentar los fundamentos de la teoría APOE y la descomposición genética de algunos conceptos, así como la importancia de esta en el desarrollo y comprensión de los procesos para que los estudiantes asimilen ciertos contenidos.
- 3) Presentar los fundamentos de la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas y la importancia en el desarrollo del pensamiento crítico del estudiante.
- 4) Desarrollar actividades utilizando la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas enlazada a la descomposición genética para sucesiones.

## 2. Marco teórico

### 2.1. Metodología

La búsqueda de material bibliográfico incluye consultas en la Biblioteca Virtual de la UNIR, así como una extensa búsqueda en Google Académico. Los autores más consultados fueron Manuel Cañadas y Encarnación Castro, quienes han estudiado a profundidad diferentes aspectos de las sucesiones y Ed Dubinsky quien estructuró la teoría APOE, así como la elaboración de varias descomposiciones genéticas para otros objetos matemáticos.

En la revisión bibliográfica se encontró que los principales contenidos trabajados por la descomposición genética están referidos al cálculo diferencial e integral, así como en series, esta última área tiene como base las sucesiones, sin embargo, en los documentos estudiados no se encontró una descomposición para estas.

Respecto a la teoría acerca de Aprendizaje Basado en Problemas, los principales autores estudiados fueron Luis Branda, Felipe Sánchez y Gabriela Mora, algunos de ellos han asociado directamente la metodología con el aprendizaje de las sucesiones.

A continuación, basada en esta revisión teórica, se propone una unidad didáctica que explica los contenidos de sucesiones a través de la teoría APOE y el Aprendizaje Basado en Problemas para 3º de la ESO.

## 2.2. Dificultades en el aprendizaje de sucesiones

Se define sucesión según la Real Academia de lengua Española como un conjunto ordenado de términos que cumplen una ley determinada.

En el caso de los números naturales, la ley determinada para construir los números se reduce a agregar uno o disminuir uno, este proceso puede ser finito o infinito, es decir la idea de agregar y disminuir es natural, sin embargo, no es la primera idea con la que se trabaja sucesiones, esto debido a que la regla es una particularidad que, si bien contiene riqueza en sí misma, didácticamente puede no ser lo suficiente sugerente para encontrar leyes debido al uso continuo. En otras palabras, no es representativo observar el conjunto de números: 1, 2, 3, 4... y pensar en él como una sucesión, de manera que quizás como un primer problema no sea de gran ayuda a la comprensión del significado de sucesiones (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Por otro lado, los estudiantes presentan dificultades en identificar las leyes de disminución o aumento con las sucesiones representadas con figuras, no siempre identifican la regularidad entre la secuencia de figuras, esto a su vez impide que logren el proceso de generalizar y completar las sucesiones (Osorio, 2014).

Cuando se trata de sucesiones, no sólo se habla de un proceso de abstracción, sino también de un proceso de generalización de una regla de adición o sustracción, en este caso particular, como en el caso de los naturales ya no bastaría observarlos sino describirlos (Cañadas, 2007). Esta descripción es a lo que se le llama generalización y es el paso más importante dentro del razonamiento inductivo y al mismo tiempo es el que más dificultad genera al estudiante (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

El proceso de generalización es uno de los más fuertes cognitivamente, es el paso a las matemáticas de predicciones, genera dificultades para lograr el aprendizaje significativo ya que normalmente se recurre a la regla desde el inicio o porque los pasos previos no son secuenciados ni analizados lo suficiente. Por eso se recomienda presentar la mayor cantidad de representaciones, para que los estudiantes recurran a ellas dependiendo del contexto, utilizando casos particulares y apoyos visuales,

además de la expresión lingüística del término general de una sucesión (Cañadas, Castro y Castro, 2012).

Además, se pueden incluir dentro de los problemas en el estudio de sucesiones, la débil representación de los números que cumplen ciertas reglas, se tiende a identificar aquellas que se presentan como conjuntos. Esto genera una separación entre las funciones y las sucesiones, no se concibe la idea de una función de dominio y rango discreto, sin mencionar que se tiene problemas en graficar funciones (Cañadas, 2007), por la misma razón no se identifica el rol de la posición y el valor que se obtiene luego de aplicar la regla.

Cuando en la generalización se trata de responder a la pregunta ¿Cómo se escribe el término que ocupa el lugar  $n$ -ésimo? Sucede que, si se ha representado de forma geométrica, es común que se emplee un espacio vacío o puntos suspensivos para dar paso al término en la posición  $n$ . Entonces aparece otra dificultad, ese espacio lleva a que algunos estudiantes utilicen modelos continuos para el término general, así, por ejemplo, la Figura 1, sería la propuesta de la expresión gráfica del término general de la sucesión que se forma al construir un cuadrado con una configuración puntual (Rico, Castro y Romero, 2000).

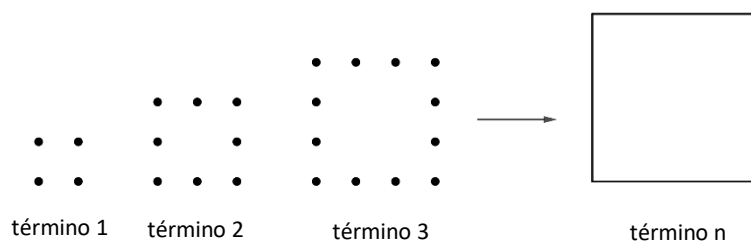


Figura 1. Representación continua del término general de una sucesión. Fuente: elaboración propia.

### 2.3. Consideraciones en la enseñanza de las sucesiones

La primera de las formas para trabajar sucesiones por su simplicidad para la representación, son los patrones puntuales que pueden representar un modelo o crear una figura, tales como la Figura 2.

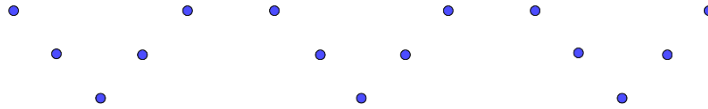


Figura 2. Patrón puntual. Fuente: elaboración propia.

Otra de las representaciones son los números figurados (Figura 3), la ventaja es que permite observar formas que se mantienen y cuyas dimensiones aumentan, por lo que permite evidenciar la estructura de la figura siguiente, aunque no necesariamente proporcione el valor que le corresponderá. La Figura 3 presenta los segmentos de recta que unen los puntos, pero estos son con fines ilustrativos para evidenciar la forma de la construcción, ya que de lo contrario se recaería en el error presentado en la Figura 1.

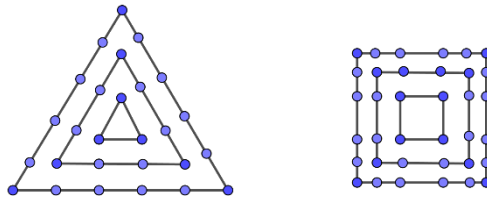


Figura 3. Números figurados. Fuente: elaboración propia

En Castro (2013) aparecen algunas ventajas de la utilización de estas representaciones:

- Posee una componente afectiva, en el sentido que a los alumnos le parece agradable y gratificante utilizarlos.
- Conduce a realizar verdaderos descubrimientos sobre las relaciones y propiedades de los números.

Para generalizar y presentar el término general de una sucesión es necesario tener claro el desarrollo aritmético de cada término, utilizando como base las representaciones puntuales y otras que sea posible utilizar. En Rico y colaboradores (Rico et al., 2000) se describe que algunas acciones como organizar representaciones geométricas de las unidades que componen un número, permite obtener el análisis aritmético del número, esto evidencia algunas propiedades que promueven la relación con otros números, en el caso de las sucesiones se refiere a la relación de dos números generados por la misma regla.

La regla o término general, es el que caracteriza a la sucesión, se define como: la expresión algebraica de la ley que satisfacen todos los términos, en función del ordinal correspondiente (Rico et al, 2000).

La construcción del término general es el objetivo principal en el estudio de sucesiones, este proceso tiene su propia dificultad y sus propias consideraciones para el aprendizaje, los cuales pueden resumirse en siete pasos (Cañadas et al., 2012) de los cuales solo se retoman los primeros seis:

- Trabajo con casos particulares
- Organización de casos particulares
- Identificación de patrón
- Formulación de conjetura
- Generalización
- Demostración

La generalización en este caso puede partir desde dos análisis, el primero se basa en iniciar con el estudio de casos particulares, de forma que se evidencien las propiedades de los elementos y de cierta manera exista una comprobación de las conjeturas. El segundo análisis hace referencia a un ejemplo genérico y esto hace que esta forma necesite un nivel de abstracción mayor, razón por la cuál es importante utilizar la primera forma.

Además, las situaciones que se propongan para el estudio de sucesiones requieren de formas de representación, las cuales permiten describir el término general y son como se citó en Cañadas y colaboradores (Cañadas et al., 2012):

- Numérica: requiere del uso de símbolos, como puede ser la posición del término general y mediante el cual al realizar una sustitución por números particulares se pueden encontrar los demás.
- Verbal: se requiere del lenguaje verbal para expresar o describir el término general, este puede utilizarse como confirmación o consolidación del dominio del lenguaje matemático.
- Representación gráfica.

Una vez obtenido el término general, es preciso completar el análisis con tareas que incluyan el proceso de manipulación del término obtenido. Con este propósito se tiene en cuenta la siguiente tabla que relaciona los términos  $k$ -ésimos y el término general, extraída de Cañadas y Castro (2006).

Tabla 1

Acciones a realizar con los términos de una sucesión

<b>Relaciones entre</b>	<b>Tareas</b>
Términos k-ésimos consecutivos	Continuar la sucesión
Términos k-ésimos no consecutivos	Extrapolar términos
Términos k-ésimos y término general	Encontrar el término general Obtener casos particulares conociendo el término general

Fuente: Cañadas et al., 2006, p. 15.

## 2.4. Teoría APOE

La teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas) nace de la necesidad de centrarse en el desarrollo cognitivo, en la forma en que se aprende cierto contenido. Fue construida con las ideas de Piaget las cuales fueron traducidas desde la perspectiva del matemático Edward Dubinsky. Sus estudios ponen de manifiesto la importancia de que los matemáticos se involucren en la enseñanza de esta ciencia, pues son los que de alguna forma tienen más claridad de hacia dónde y cómo se deben comprender las ideas, pone además sobre la mesa que la Matemática no es solo cálculo sino un conjunto de razonamientos e ideas que se interconectan con diferentes experiencias, que se concretan en un aprendizaje significativo y no una mera repetición de procesos (Dubinsky E. , 2000).

Es importante enfatizar que esta teoría surgió para mejorar la comprensión de conceptos de matemática avanzada, es decir, cursos para estudiantes universitarios. Eso explicaría en parte por qué existe poca intervención en cursos para estudiantes de educación media y tercer ciclo (ESO y Bachillerato). Dubinsky (2000) expresa que luego de un exhaustivo estudio sobre el trabajo de Piaget y en particular sobre el mecanismo de abstracción reflexiva, realiza una reformulación que se traduce en la teoría APOE.

La teoría APOE, o APOS por sus siglas en inglés, es una descripción de “las acciones, los procesos, los objetos y los esquemas” (Dubinsky, 2000, p. 60). Estos son los cuatro puntos que conllevan a la cristalización de los razonamientos y estructuras mentales, que se convierten en un aprendizaje significativo y correcto. Dubinsky los describe

como los mecanismos para las construcciones mentales los cuales nombra como abstracciones reflexivas. Para cristalizar estas reflexiones es necesario realizar repeticiones, las que tradicionalmente se llegan a traducir con la resolución de problemas que son del mismo tipo. Es decir que al inicio debe asegurarse la comprensión y manejo de los análisis aritméticos de los números que cumplen cierta regla, a partir de este punto debe retomarse la construcción del objeto, como si se tratara de un viaje en el tiempo (Dubinsky E. , 2000).

La creación y desarrollo de un concepto matemático tiene tras de sí una historia, un proceso que se marca por un largo recorrido, por lo que, si se toma en cuenta este proceso puede describirse la forma en la que un estudiante adquiere el concepto y al mismo tiempo crear una metodología que sirva como medio para esta adquisición, justamente esta es la forma en la que la teoría APOE logra mediar entre el concepto y la pedagogía que se requiere para aprenderlo.

Para aplicar la teoría APOE, se inicia desde las acciones que se diseñaron para los objetos matemáticos conocidos, dicho de otra forma, podrían ser desde un punto de vista “simple” la aplicación de conocimientos previos, “operaciones” para las cuales se tiene claridad sobre su funcionamiento. Codes y González (2017, p. 92) lo describen como:

Se hace referencia a transformaciones de objetos matemáticos percibidas por el individuo como algo externo a él. Una acción, por ejemplo, puede ser la aplicación de un algoritmo, la ejecución mecánica de unos pasos que no conllevan una reflexión sobre el significado y el alcance de estos.

En el caso de las sucesiones, en el inicio esto se traduce en el manejo del análisis aritmético, que no es más que la reescritura de un número con suma y producto de números menores, que de alguna forma se consideran más sencillos en el sentido de que su análisis aritmético es menor, dado que puede contener menos representaciones. Pero en un determinado momento esta acción puede ser la aplicación de la regla, es decir el estado de un objeto se modifica a medida que se interna en su desarrollo. Por lo que un primer momento del trabajo de sucesiones incluye el manejo aritmético de las representaciones, esto sería el principio de la generación de algún tipo de regla (Codes et al., 2017).

Una vez que el individuo logra a partir de la repetición de acciones, el segundo momento es manipular las acciones de una forma proyectada hacia el futuro, prediciendo de alguna forma sus resultados sin necesidad de realizar cada cálculo, cuando comprende de forma abierta las acciones realizadas y ya no precisa de seguir aquellas estructuras sin las que en principio lograría obtener respuestas, en este momento se dice que domina el nivel de proceso. Esto se describió en como (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011, p. 87):

Cuando el individuo reflexiona sobre estas acciones, puede generalizarlas, coordinarlas e interiorizarlas en un proceso, es decir, puede hacer cálculos simbólicos y mentales, así como representaciones gráficas [...] sin necesidad de seguir reglas memorizadas o algoritmos específicos.

Es decir que para encontrar uno de los términos a partir del inicial es necesario realizar una suma reiterada, por ejemplo,  $f(10) = f(1) + d + d + \dots$ , pero una vez reflexionado el proceso basta con conocer el término anterior, es decir ya no es necesario utilizar el primer término, por ejemplo  $f(10) = f(9) + d$ .

Una vez se ha logrado completar los procesos, comprendiendo que cualquiera de ellos es válido, se logra tratarlo como uno solo, formando así los objetos sin la representación. La formación del objeto es el tercer momento, donde el objeto formulado también puede manipularse y realizar acciones sobre él, descubrir propiedades; al realizar esta manipulación se está “encapsulando” el objeto. Puede inversamente desencapsularse el objeto, regresando a los procesos anteriormente mencionados. Puede diferenciarse en un individuo las acciones de los procesos cuando ya no requiere seguir una serie de pasos estructurados (Trigueros et al., 2011).

Otro de los momentos que considera la teoría APOE es el esquema, el cuál puede considerarse como la colección de las acciones, de los procesos y los objetos adquiridos, estos también pueden incluir otros esquemas, constituyen una estructura que permite resolver problemas, tomando decisión dentro del conjunto de conocimientos. Los esquemas son el resultado de los tres niveles:

- Intra: el individuo se concentra en la repetición de una acción y reconoce algunas relaciones o transformaciones entre acciones sobre diferentes elementos del esquema.



- Inter: está caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y objetos que componen el esquema.
- Trans: “toma conciencia de las relaciones y transformaciones posibles en el esquema y les da coherencia.” (Badillo, Trigueros y Font, 2015, p. 3).

Dicha estructura da coherencia al esquema mediante la posibilidad de decidir qué pertenece al ámbito del esquema y qué no (Dubinsky & McDonald, 2001 recuperado de Trigueros et al., 2011).

Para definir los momentos para las acciones, procesos, objetos y esquemas, es necesario realizar los análisis mencionados anteriormente, que corresponden a la forma, a los procesos cognitivos que permiten que un estudiante logre la comprensión de un determinado concepto. Para este propósito se realiza una descomposición genética del concepto, este incluye todos los momentos, esta no es única y puede variar dependiendo de la concepción del concepto de quien la elabore.

Por lo tanto, la descomposición genética es considerada como la combinación de la forma en la que un estudiante aprende y la construcción de objeto matemático como tal, es decir, es una descripción detallada del desarrollo cognitivo del estudiante visto de forma general sin adecuaciones pedagógicas, y como él construye sus ideas matemáticas, estas ideas se han clasificado en acciones, procesos, objetos y esquemas cognitivos (Trigueros et al., 2011). De forma que la descomposición genética es la base sobre la que se construirán las actividades didácticas que permitirán la adquisición de este nuevo concepto, esto porque se considera que equilibra la relación de contenido-estudiante.

Cabe aclarar que la descomposición genética da las pautas del contenido o teoría que se trabajará en cada actividad, pero las actividades estarán planteadas en base a otra metodología constructivista, el Aprendizaje Basado en Problemas.

## 2.5. Aprendizaje Basado en Problemas

### 2.5.1. Generalidades del ABP

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) tiene sus orígenes en la universidad de McMaster, Canadá, específicamente en el área de Medicina, implementándose principalmente en grupos de 6 a 8 personas. El objetivo es la búsqueda de la solución a un problema propuesto y que esta sea viable (Mora, 2010).

Con esta forma de trabajo se busca cambiar el proceso de aprendizaje memorístico, ya que al no presentar desafío para el estudiante, no se desarrolla el sentido crítico que es vital para el desarrollo de los ciudadanos y su correcta inclusión dentro de las actividades de la sociedad en la que se encuentran, si bien la memorización es parte del aprendizaje que se ve asociado a la teoría y por tanto necesario, se busca más bien el equilibrio entre la práctica y la teoría.

Con base a lo anterior puede decirse que el aprendizaje basado en problemas es una estrategia de enseñanza y aprendizaje que permite adquirir los conocimientos y al mismo tiempo potencia las habilidades requeridas para completar ciertas tareas, pero, también se toman en cuenta las actitudes frente a los problemas propuestos (Mora, 2010).

Pueden definirse como los principales objetivos de proceso del ABP según Branda (2013, p. 1):

- Utilizar estrategias de razonamiento para combinar y sintetizar datos/información en una o más hipótesis explicativas del problema o situación.
- Identificar necesidades de aprendizaje (incluyendo conocimientos y habilidades).

En cuanto a la definición de problemas existe una diversidad de criterios, sin embargo, para la metodología de ABP se requiere que existan ciertas condiciones, para categorizar la situación como un problema, las cuales pueden distinguirse en tres (Ortega, Pecharromás, y Sosa, 2011):

- Aceptación: los involucrados deben aceptar que existe una situación que requiere acciones y deben de adquirir el compromiso de solventarla. Por lo

tanto, si no existe ninguna motivación para trabajar en ello no puede decirse que exista un problema.

- Bloqueo: la solución y el proceso para resolver la situación no deben ser evidentes, las estrategias aprendidas con anterioridad deben ser de utilidad, pero no suficientes para enfrentar el problema.
- Exploración: ya sea de forma individual o en grupo deben buscarse nuevas estrategias para atacar el problema.

El problema que se propone tiene un proceso de solución de carácter abierto, con lo que se pretende que exista mayor comunicación entre los implicados. El objetivo principal no es encontrar la solución, sino que el problema sirva como base para identificar los contenidos o necesidades de aprendizaje, en otras palabras, el problema permite identificar los elementos que se requieren para dar respuesta y por tanto, posibilitan el estudio individual o grupal de los temas requeridos. Esto posibilita las actitudes de responsabilidad en el aprendizaje propio y fomenta la confianza en el trabajo del equipo, permitiendo así la auto crítica y la aceptación de las críticas ajenas de forma que se mejora el desempeño y la habilidad para trabajar en grupos (Mora, 2010).

Por lo tanto, se puede definir el aprendizaje en problemas como se hizo en Montes de Oca y Machado (2011, p. 485):

Un método de trabajo activo, centrado en el aprendizaje, en la investigación y la reflexión para llegar a la solución de un problema planteado, donde los alumnos participan constantemente en la adquisición del conocimiento, la actividad gira en torno a la discusión y el aprendizaje surge de la experiencia de trabajar sobre la solución de problemas que son seleccionados o diseñados por el profesor.

En concreto se requiere de habilidades y actividades propias para cada uno de los involucrados, además de una elección adecuada de las situaciones, esto con el fin de mantener la motivación, el trabajo en equipo y alcanzar los objetivos.

### 2.5.2. Características

Entre las principales características del ABP se destaca el trabajo del estudiante como el principal actor en la creación de su propio conocimiento y las habilidades que este adquiere para enfrentarse a distintas situaciones con un pensamiento crítico, todo esto

en trabajo principalmente grupal, de aquí que se trabaje en la adquisición de habilidades como la comunicación y la imaginación para enfrentar las situaciones (Macías, 2010).

Se puede decir que el Aprendizaje Basado en Problemas reúne dos componentes necesarios en la participación de los estudiantes como ciudadanos activos: el conocimiento y la reflexión sobre lo realizado. Es decir, ya no solo se hace énfasis en la adquisición del conocimiento, sino también en cómo se adquiere ese conocimiento, los procesos llevados a cabo no se encierran en la imitación como tal, pues tratan de fomentar procesos de pensamiento que adquieren cierta complejidad a medida se avanza en las tareas.

Es así como en comparación con la metodología tradicional el ABP mejora aspectos de la enseñanza como se cita en Sánchez (2016, p. 16):

1. Favorece la asimilación de los aprendizajes para la solución de problemas.
2. Hay un aumento en las habilidades de auto aprendizaje.
3. Se profundizan las aptitudes intelectuales, sociales y afectivas.
4. Continúa un perfeccionamiento en el aprendizaje.
5. Se obtiene los conocimientos necesarios.

El aprendizaje basado en problemas, además de lograr su cometido de adquirir cierto contenido, también influye en una de las principales competencias como es aprender a aprender, esto como parte del proceso de la secuencia que el docente proponga, donde permita el descubrimiento, así como la construcción del mismo y las instrucciones para trabajar en la resolución de problemas, ya que con esto cada integrante del grupo puede de forma individual analizar la situación, crear sus propias estrategias y contrastarla con la de sus compañeros, analizando de forma crítica las opciones más viables para resolver la situación propuesta (Gómez, 2005).

Por otro lado, promueve el aprendizaje autorregulado, esto con base en el hecho de que es el estudiante quien identifica las necesidades y comprende que es necesaria su intervención. Esto pone de manifiesto que es un trabajo interdisciplinar dependiendo de los problemas que se propongan, ya que en general se busca preparar al estudiante para resolver problemas de la vida real y al mismo tiempo que adquiera la responsabilidad de asumir retos (Solaz-Portolés, López y López, 2011).

De forma que, la elección de la situación que se le presente a los estudiantes y que permita desarrollar las habilidades necesarias debe tener ciertas características, mencionándose en Gómez (2005) tres principales:

- **Relevancia:** los estudiantes deben comprender la importancia que tiene este problema en los diferentes ámbitos de su desarrollo, como lo puede ser el profesional. El problema debe responder a un contenido específico.
- **Cobertura:** el problema debe ser el que guíe las actividades de búsqueda, descubrimiento y análisis del objeto de estudio. Es decir, en el proceso de la búsqueda de la respuesta debe surgir el conocimiento que se busca adquirir, no se trata de una aplicación de aquello que se quiere descubrir.
- **Complejidad:** la situación propuesta debe generar en el estudiante esfuerzo para resolver, por tanto, la solución o forma de resolver no debe ser única.

De forma que el ABP convierte al profesor en un facilitador o mediador del conocimiento y no en el protagonista de la clase. El trabajo fuerte del profesor se realiza al momento de seleccionar la situación a proponer, donde se cumpla con las características mencionadas anteriormente (Mora, 2010).

### 2.5.3. Rol del docente en ABP

Dado que el ABP es un aprendizaje centrado en el estudiante, existen cambios marcados en el rol de los involucrados. Por ejemplo, el profesor cambia a un rol de tipo tutor, donde no se presenta como un experto en el área y por tanto sus clases no son expositivas, es decir, no es quien transmite el conocimiento. El papel del docente se centra en apoyar al estudiante en el proceso de solución a la situación problema, ayuda a reflexionar sobre los aspectos importantes, así como a identificar la información que se requiere para poner en marcha las estrategias de solución. Uno de los aspectos más importantes es la motivación que debe proporcionar el docente, buscando las estrategias que permitan alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos y resolver el problema en cuestión (Mora, 2010).

El docente no es un agente pasivo, no puede limitarse a ser un observador, debe orientar el proceso, mantenerse cerca de los grupos involucrándose cuando sea necesario, debe asegurarse que las acciones y decisiones tomadas estén alineadas con el objetivo, que los temas identificados como la clave para resolver el problema estén

bien enfocados. El docente debe brindar apoyo en la búsqueda de información y de los recursos necesarios, siempre enfocándose en desarrollar dichas destrezas de crecimiento personal y de cada grupo (Mora, 2010).

Con lo anteriormente descrito, puede evidenciarse que una de las principales características del profesor, es la capacidad de cuestionamiento a los estudiantes, de forma que sus preguntas guíen el camino, esto sin tener que coartar la libertad de decisión del grupo. En el trabajo del docente como tutor es de vital importancia la habilidad de identificar el momento adecuado para realizar las preguntas y así mantener el interés de los participantes en la actividad propuesta, por otro lado, también debe asegurar que la información recopilada sea adecuada (Mora, 2010).

#### 2.5.4. Rol del estudiante en ABP

Dado que la metodología ABP está centrada en el estudiante, las acciones realizadas son diferentes a las del método tradicional, principalmente en la conducta y la forma en la que se involucra en las actividades de aprendizaje, de forma que la motivación por aprender es fundamental que se tenga o se adquiera a lo largo del proceso.

Como se ha mencionado con anterioridad, la mayor parte del trabajo se realiza de forma grupal, por lo que debe existir disposición para trabajar en el grupo activamente, lo que requiere de la puesta en práctica de valores éticos y morales, así como de la capacidad para aceptar críticas. Deben poseer además habilidades para interactuar a nivel personal siendo empático y con disposición para apoyar a otros a enfrentar las situaciones a las que son expuestos, por otro lado, se espera que el estudiante pueda interactuar de forma intelectual, proponiendo soluciones acordes a las necesidades y al nivel educativo correspondiente, en caso de no tener estas características debe estar dispuesto a adquirirlas, mejorarlas o desarrollarlas según sea el caso (Mora, 2010).

Aunque una de las habilidades que se desean desarrollar es la de resolver problemas, también se espera que se tenga un mínimo de criterio, de forma que debe ser capaz de expresar sus estrategias e ideas que permitan lograr el objetivo, la comunicación es un factor fundamental en esta metodología. El pensamiento crítico es una cualidad principal que se espera, aunque es una habilidad a desarrollar (Mora, 2010).

Con respecto a la adquisición del contenido el estudiante debe cumplir con los objetivos de aprendizaje, uno de estos objetivos está relacionado con la de adquirir la

capacidad para organizar la información del problema, la que generalmente se presenta de forma desorganizada y debe además dotarla de estructura (Branda, 2013).

#### 2.5.5. Ventajas y desventajas del ABP

Entre las ventajas del aprendizaje basado en problemas pueden encontrarse los siguientes aspectos (Solaz-Portolés et al., 2011):

- Se mejora la implementación de estrategias para la resolución de problemas y esto trae consigo la habilidad de obtención e interpretación de la información, así como en los procesos de búsqueda de la misma.
- El estudiante comprende la importancia de la asignatura y la importancia de la misma para resolver problemas, sobre todo identificando las diferentes aplicaciones que esta puede tener en la vida cotidiana. Esto influye en gran medida en la motivación por aprender e incluirse en el trabajo grupal.

La metodología está íntimamente relacionada con la competencia aprender a aprender, trabajándose directamente. Esto fomenta el pensamiento crítico y un sentido de pertenencia y responsabilidad de trabajo cooperativo.

En cuanto a las desventajas, son (Solaz-Portolés et al., 2011; Poot-Delgado, 2013).

- La implementación requiere de más tiempo, ya que los estudiantes precisan de un mayor espacio para analizar y buscar la información que les permita resolver, esto a su vez necesita de la motivación por parte de los estudiantes, en algunos casos puede complicarse ya que uno o varios de ellos pueden distraer al grupo.
- Al inicio puede existir inseguridad de parte de los estudiantes sobre si realmente están aprendiendo, así como inseguridad sobre si el trabajo que realizan los llevará a conseguir el objetivo, en general se tienen dificultades en encontrar el camino a seguir para resolver el problema.
- El trabajo en equipo puede no ser armonioso entre los integrantes del equipo.
- Puede dificultarse identificar a los estudiantes con problemas para comprender los contenidos, ya que el equipo puede llegar a solventar las carencias en el

trabajo realizado, pero no en relación al estudiante, de forma que no se puede tener el control del avance de forma individual.

- Dependiendo de las actividades que se propongan, los materiales que se requieren pueden ser costosos o de difícil acceso, además de necesitar de más recursos humanos. Esto también está relacionado con el espacio adecuado para realizar las actividades.
- Está orientado más al trabajo práctico que al teórico, esto puede dificultar su uso en algunas asignaturas.
- Es necesario realizar modificaciones del currículum, sobre todo si se pretende trabajar de forma multidisciplinar, ya que es necesario identificar de la mejor forma la relación entre las diferentes temáticas.
- El docente puede carecer de la habilidad para facilitar, esto dificulta el desarrollo de las diferentes actividades y el apoyo proporcionado no es el adecuado a las necesidades.

#### 2.5.6. Fases del ABP

Como se ha comentado en el apartado anterior, el factor tiempo es un aspecto importante a considerar, ya que el trabajo por parte del estudiante no es una variable conocida. En principio esta metodología requiere de más tiempo para generar el conocimiento buscado y al no ser una situación donde el docente esté en total control, se requiere de una distribución del tiempo que permita al estudiante un espacio suficiente para trabajar y contrastar su solución con la de los compañeros. Por esta razón en Navarro (2006) se ilustra una forma de distribución de tiempo, que responde a cuatro momentos en los que se divide el trabajo, ya sea en una sesión o en el desarrollo de una asignatura (Figura 4).

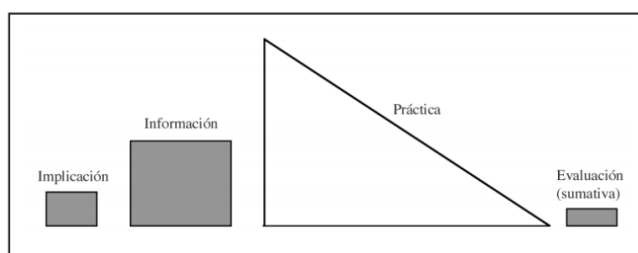


Figura 4. Distribución del tiempo según las fases del proceso de enseñanza-aprendizaje

Fuente: McAlpine, 2004. Recuperado de Navarro, 2006, p. 127.



Las fases según el tiempo invertido en la implicación son referidas a la concientización sobre la importancia de la situación propuesta en el contexto del estudiante, es decir hacia el papel de la motivación, algunas de las acciones que pueden realizarse son: comunicar a los estudiantes el producto esperado, es decir el aprendizaje que se va a adquirir al finalizar el proceso; la relación por parte de los estudiantes con los conocimientos previos, es decir enlazar lo trabajado en clases anteriores y como estas apoyan la tarea actual.

La fase de la información es el momento en el que el docente proporciona a los estudiantes el contenido necesario para el desarrollo, este puede darse fuera de la clase, en forma oral o escrita, si bien esta fase es importante, no se trata de proporcionar más información de la necesaria, sino más bien las instrucciones para realizar la tarea o ideas clave, por esta razón no se le destina largo tiempo. La práctica como su nombre lo indica, es el momento en el que los estudiantes construyen e integran los conocimientos adquiridos para resolver lo planteado, por lo tanto, esta fase es la principal y requiere de tiempo suficiente para que se lleven a cabo los procesos que permitan al estudiante alcanzar los objetivos propuestos.

Finalmente, la evaluación sumativa, es el último momento y se pretende sondear los conocimientos adquiridos, el grado en el que se lograron los objetivos y competencias establecidas al inicio (Navarro, 2006).

De forma que para trabajar con ABP, los puntos de atención serán el factor tiempo en el que se distribuyen las actividades y las acciones a realizar para resolver el problema, porque se definirán las fases de aplicación de la metodología según las variables anteriores (Villalobos, Ávila, Olivares y Lizett, 2016). Aunque pueden encontrarse hasta nueve fases para la aplicación, estas pueden resumirse de forma un poco más general como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2

*Fases del ABP*

Fase	Actividades del docente	Actividades de los estudiantes
Activación	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presentación del problema</li> <li>• Activación de los equipos</li> <li>• Supervisión de su plan de trabajo</li> </ul>	Forman equipos de trabajo <ul style="list-style-type: none"> <li>• Activación del conocimiento</li> <li>• Identificación de puntos clave</li> <li>• Establecimiento de hipótesis</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Selección de puntos clave y conceptos</li> <li>• Análisis mediante lluvia de ideas</li> </ul>
Investigación	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Evalúa la pertinencia de los recursos o dirige hacia ellos</li> <li>• Proporciona retroalimentación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilización de puntos clave para orientar su búsqueda de información</li> <li>• Organización de la información</li> <li>• Emisión de pre-reporte</li> </ul>
Resolución	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pide soluciones</li> <li>• Reconduce a los desorientados</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Discusión y búsqueda con base en retroalimentación</li> <li>• Diseño de soluciones</li> <li>• Emisión de Reporte final</li> </ul>
Evaluación	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dirige discusión y reflexión grupal</li> <li>• Evalúa el desempeño de competencias</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presentación de soluciones al grupo y discusión de la pertinencia de las mismas</li> <li>• Evaluación entre compañeros</li> <li>• Evaluación de la actividad</li> </ul>

Fuente: Villalobos et al., 2016, p. 569.

#### 2.4.6 Evaluación en ABP

La puesta en marcha del aprendizaje basado en problemas requiere de cambios en los aspectos de la evaluación, ya que las actividades y habilidades adquiridas conforman un rango más amplio, por lo que se necesita mejorar la forma de evaluación respecto a la tradicional. Es necesario buscar nuevas estrategias y volver la evaluación parte del proceso de aprendizaje, no como una actividad diferente, tanto así que los instrumentos utilizados se vuelven parte del proceso de aprendizaje. El examen tradicional no se corresponde con la metodología activa, por lo que puede generar efectos contraproducentes y no medir si se han alcanzado los objetivos. Con base en eso los aspectos mínimos de evaluación aparte del conocimiento son los aportes realizados en la búsqueda de soluciones al problema y las interacciones con el grupo (Poot-Delgado, 2013).

Por otro lado, es necesario incluir el aspecto de auto evaluación, donde se evidencie la valorización del trabajo realizado y una reflexión sobre las habilidades adquiridas, así como las actitudes al enfrentar el proceso de aprendizaje. Además, debe incluirse la evaluación del trabajo grupal, esto con el propósito de mejorar habilidades de socialización y coordinación de las tareas correspondientes asegurando que todos los miembros realicen aportes. A diferencia de las metodologías tradicionales, en ABP se

incluye la evaluación al trabajo del tutor, así como a la actividad realizada, a la clase, lo que permite que tanto el estudiante como el docente mejoren sus habilidades (Poot-Delgado, 2013). Es decir, ABP tiene un sistema de evaluación formativo.

El propósito de la evaluación es realizar una retroalimentación pertinente a las necesidades específicas de las fortalezas y debilidades, ya que se realiza dentro del proceso de aprendizaje, permite rectificar y solventar las deficiencias.

Algunos de los métodos de evaluación que se pueden utilizar son: exámenes escritos, examen práctico y oral, mapas conceptuales, reportes escritos, listas de cotejo, entre otros.

### 3. Propuesta de intervención didáctica

<b>Tema:</b> Sucesiones	<b>Tipo de unidad didáctica:</b> Disciplinar	<b>Asignatura:</b> Matemática
<b>Bloque:</b> Análisis	<b>Nivel:</b> 3° ESO	<b>N° sesiones:</b> 18

#### 3.1. Contextualización

Esta propuesta de intervención está elaborada para estudiantes de 3° ESO, según la correspondencia de los temas. En ese sentido, las edades de los estudiantes oscilan entre 13 y 15 años de edad. Esta franja de edad es particularmente importante debido al cambio biológico con el paso de la pubertad, así como la formación de la personalidad, razón por la cual es importante la socialización entre iguales para formar personas íntegras.

Al mismo tiempo que se realiza un cambio biológico, se produce un avance en el proceso cognitivo, ya que se realiza el paso del trabajo con objetos conocidos, procesos que involucran cantidades conocidas, a un trabajo de matemática más formal y rigor. Además, se necesita que el estudiante sea capaz de expresar sus ideas y fundamentar procedimientos, esta es una situación que ha sido trabajada con anterioridad pero desde un punto de vista apegado a la cotidianidad, de forma que las habilidades adquiridas se relacionaban con aspectos conocidos, donde podía corroborarse la veracidad de los resultados y de alguna forma interpretarse.

El centro ideal para implementar esta propuesta es un centro urbano con todos los niveles educativos, es decir, desde primaria hasta bachillerato. Dado que requiere en algunas sesiones el uso de ordenadores o similares, es importante que el centro educativo cuente con el recurso y se realice de forma previa una agenda de las fechas requeridas. Respecto a la clase ideal para implementar esta propuesta, sería un grupo de 24 número de alumnos de 3º de la ESO, con proporción uno a uno de chicos y chicas con edades similares entre los 13 y 14 años, sin estudiantes repetidores y sin necesidades específicas. Además, para un adecuado desarrollo de la propuesta, los alumnos deben tener los siguientes conocimientos previos:

- Operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división.
- Uso de cantidades variables.
- Ubicación de puntos en el plano cartesiano.
- Manejo de Geogebra.

Respecto a la contextualización legislativa, las leyes educativas españolas que se han tenido en cuenta para la elaboración de esta propuesta han sido ECD/65/2015 (BOE 25, 2015), por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato y el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre (BOE 3, 2015), por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

### 3.2. Objetivos

Los objetivos de esta UD son:

Tabla 3

*Objetivos de la UD*

Objetivos generales	Objetivos específicos
✓ Identificar regularidades en figuras y listas de números.	Ob1. Construir figuras identificando el patrón de generación.
✓ Construir configuraciones respetando el patrón mostrado.	Ob2. Identificar la figura anterior en la dada.
✓ Identificar propiedades en conjuntos de números.	Ob3. Escribir el número relacionado a la figura y dibujar la configuración puntual.
	Ob4. Introducir la notación de sucesión utilizando el nombre y la posición.
	Ob5. Asociar las diferentes formas de representar sucesiones.

<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Describir una sucesión en todas sus formas de representación.</li> <li>✓ Calcular del término general de una sucesión.</li> <li>✓ Encontrar términos de una sucesión dada la constante <math>k</math> o el término general.</li> </ul>	<p>Ob6. Describir las diferencias entre cada representación y la información que esta proporciona.</p> <p>Ob7. Calcular la constante <math>k</math>, como la diferencia de dos términos consecutivos.</p> <p>Ob8. Manipular las diferentes representaciones del término y sustituir según sea la necesidad.</p> <p>Ob9. Calcular términos anterior y posterior de una sucesión dado un término y la constante <math>k</math>.</p> <p>Ob10. Interpolan términos dados los dos contiguos.</p> <p>Ob11. Identificar si un conjunto de valores forma una sucesión lineal.</p> <p>Ob12. Generar sucesiones a partir del primer término y la constante <math>k</math>.</p> <p>Ob13. Relacionar la cantidad de <math>k</math> necesaria para calcular un término con la posición de ocupa.</p> <p>Ob14. Deducir la forma del término general de una sucesión aritmética.</p> <p>Ob15. Calcular términos de una sucesión dado el término general.</p> <p>Ob16. Calcular términos de una sucesión dada la forma general y la posición del término buscado.</p> <p>Obj17. Encontrar la posición de un término dado el término y la forma general.</p> <p>Ob18. Reescribir el término general de una sucesión utilizando la posición actual.</p> <p>Ob19. Utilizar GeoGebra para graficar sucesiones.</p> <p>Ob20. Deducir la relación uno a uno entre posición y término de una sucesión.</p> <p>Ob21. Identificar la cardinalidad de la sucesión según el conjunto de dominio.</p> <p>Ob22. Calcular nuevas sucesiones por suma o resta de dos.</p> <p>Ob23. Calcular la suma de los primeros <math>n</math> términos.</p> <p>Ob24. Conocer otras sucesiones de tipo lineal y donde se evidencian.</p> <p>Ob25. Utilizar la papiroflexia para identificar la curva de Fibonacci.</p>
---	---

Fuente: elaboración propia.

### 3.3. Competencias clave

La unidad didáctica está regida por las normas del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (Real Decreto 1105/2014, BOE 3, 2015) (ECD/65/2015, 2015), la cual establece los contenidos, los estándares de aprendizaje y los criterios de evaluación que se retoman al largo de la unidad.

Las competencias claves que se trabajarán son las especificadas en la Orden ECD/65/2015 (BOE 25, 2015) (ECD/65/2015, 2015), las cuales se detallan a continuación:

**Competencia en comunicación lingüística (CL):** en todas las sesiones se precisa que el estudiante exprese sus opiniones ya sea con el grupo de trabajo o en plenaria, así como de redactar y explicar los procesos realizados para resolver las situaciones planteadas.

**Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT):** además de aprender nuevo contenido, se precisará describir en lenguaje algebraico los procesos y los términos generales de las sucesiones, se utilizará el software Geogebra que permitirá evidenciar algunas características.

**Competencia para aprender a aprender (CAA):** tomando en cuenta que la metodología a trabajar es el aprendizaje basado en problemas, se puede decir que de forma implícita se trabaja esta competencia.

**Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE):** algunas actividades pretenden desarrollar en los estudiantes la habilidad de identificar sus cualidades dentro del equipo, entre ellas la toma de iniciativas y decisiones que permitan alcanzar los objetivos que se proponen.

**Conciencia y expresiones culturales (CEC):** el estudiante mediante investigación conocerá el avance de las matemáticas, en especial de las sucesiones, observarán piezas de arte donde se presenta la curva de Fibonacci, ya sea pintura, música o la naturaleza misma.

**Competencias sociales y cívicas (CSC):** el trabajo en grupos implica comprender la importancia y aplicar los códigos de conducta, para un trabajo armonioso dentro del aula y participar activamente en el trabajo respetando las diferencias de pensamiento.

### 3.4. Contenidos

Los contenidos que se trabajarán en esta propuesta de intervención, para la asignatura de matemática, en el bloque de análisis de 3º ESO, se detallan a continuación (Real Decreto 1105/2014, BOE 3, 2015, p. 393):

- ✓ Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.
- ✓ Expresión usando lenguaje algebraico.
- ✓ Sucesiones numéricas.
- ✓ Sucesiones recurrentes.
- ✓ Progresiones aritméticas.

Esta unidad servirá de base en los siguientes niveles educativos para comprender mejor otros objetos matemáticos como funciones. Para que los estudiantes logren comprender los contenidos mencionados anteriormente, se ha realizado una descomposición genética del concepto de sucesiones, atendiendo a la teoría APOE, los pasos de la descomposición serán agrupados en algunas sesiones y en otras solo uno, dependiendo de la complejidad de las acciones, procesos u objetos que estén trabajándose, estos pasos se corresponden con los objetivos específicos descritos.

#### 3.4.1. Descomposición genética

Para el desarrollo de las actividades de la unidad didáctica se requiere la dosificación de los contenidos, con ese propósito se presenta la descomposición genética que servirá de guía.

Este apartado tiene los siguientes objetivos:

##### **Objetivos:**

- Presentar la descomposición genética de la formación del objeto matemático sucesiones aritméticas.
- Segmentar a partir de la descomposición genética los contenidos a desarrollar en cada sesión
- Describir los objetivos didácticos que se alcanzan en cada sesión asociados a la descomposición

La descomposición genética se presenta paso a paso en el Anexo 1.

A continuación, la siguiente tabla 4 muestra todos los elementos de la UD y la relación entre ellos:

Tabla 4

Relación entre los elementos didácticos que componen la UD

<b>TÍTULO DE LA UD: Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno</b>				
<b>OBJETIVOS</b>	<b>CONTENIDOS</b>	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	<b>ESTÁNDARES EVALUABLES</b>
Ob1,Ob2, Ob3, Ob4, Ob5, Ob6, Ob7, Ob8, Ob9, Ob10, Ob11, Ob12, Ob13, Ob14, Ob15, Ob16, Ob17, Ob18, Ob19, Ob20, Ob21, Ob22, Ob23, Ob24, Ob25	Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.  Expresión usando lenguaje algebraico.  Sucesiones numéricas.  Sucesiones recurrentes Progresiones aritméticas y geométricas.	CL CMCT CAA SIEE CEC CSC	2. Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos.  3. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.	2.1. Calcula términos de una sucesión numérica recurrente usando la ley de formación a partir de términos anteriores.  2.2. Obtiene una ley de formación o fórmula para el término general de una sucesión sencilla de números enteros o fraccionarios.  2.3. Identifica progresiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma de los “n” primeros términos, y las emplea para resolver problemas.  2.4. Valora e identifica la presencia recurrente de las sucesiones en la naturaleza y resuelve problemas asociados a las mismas.

Fuente: elaboración propia en base a lo establecido en el Real Decreto 1105/2014 (BOE 3, 2015, p. 393).



### 3.5. Metodología

El desarrollo de la unidad didáctica se realizará utilizando la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas, utilizando las cuatro fases presentadas en la tabla 2, es decir: activación, investigación, resolución y evaluación, según lo establecido por Villalobos y colaboradores (2016), con la salvedad de que las fases se desarrollarán en su mayoría por cada sesión y no por unidad, es decir, en cada clase se evidenciarán la activación, investigación, resolución y evaluación. En algunos casos el trabajo se realizará de forma individual y otras de forma grupal, pero siempre siguiendo la misma secuencia de actividades.

Las actividades grupales se realizan con un mínimo de tres estudiantes y máximo de cuatro, en los casos en los que se requiera un reporte se asignará un estudiante con el rol de secretario, si se precisa de un representante de grupo se elegirá un portavoz de las ideas, estos dos roles los desempeñarán integrantes diferentes y se pretende que se haga una rotación con el propósito de que se potencien las habilidades de expresión y redacción en todos los estudiantes. En el caso de trabajo individual, podrán conversar e intercambiar ideas con los compañeros ya sea los cercanos o lo expresado en plenaria, pero el reporte será escrito de forma individual y con palabras propias.

Además, se realizará una modificación a la fase de resolución de la metodología ABP donde en algunos casos se incluye la parte de ejercitación, básicamente sería la fijación de la estrategia o regla encontrada por medio del problema propuesto. En este caso, los criterios corresponderán a la correcta resolución del ejercicio propuesto, tomando en cuenta el proceso, no solo respuesta.

### 3.6. Temporalización

La propuesta de intervención correspondiente, tiene como temas precedentes, según la programación y niveles de conocimiento los temas:

1. Fracciones
2. Potencias
3. Expresiones algebraicas
4. Ecuaciones de primer y segundo grado
5. Sistemas de ecuaciones

Con base en ello, se considera que la unidad se podría trabajar entre los meses de enero y abril, es decir que las sucesiones corresponden al segundo bloque de contenidos para 3° de la ESO (octubre para 1° año de Bachillerato en El Salvador). La sesión tiene una duración de 18 sesiones de 45 minutos cada una.

Tabla 5

*Distribución temporal de las actividades de la unidad didáctica.*

Sesión	Actividad	Duración (minutos)
1	Fase de activación Representación e identificación de figura con material manipulativo.	5
	Fase de investigación Cálculo de la cantidad de puntos a partir de la formación de figuras.	20
	Fase de resolución Análisis de los grupos A1 y B1 verificando si cumple las mismas propiedades y describiendo esas propiedades en consenso grupal.	10
	Fase de evaluación Puesta en común de los resultados de la fase de resolución.	10
2	Fase de activación Ordenar figuras según la regla dada.	5
	Fase de investigación Nombrar las figuras según el criterio propio.	10
	Fase de resolución Puesta en común de nombres de las sucesiones y las formas de identificar los términos de cada sucesión.	20
3	Plenaria Analizar y expresar la forma de diferenciar el término, enfatizando que la sucesión con la configuración da toda la información, el número solo la cantidad de puntos y la notación de nombre solo a la sucesión que pertenece y la posición de cada término	15
	Grupal Juego de bingo de sucesiones	20
	Individual Escribir en portafolio lo aprendido en la sesión 2 y 3	10
4	Fase de activación Recordatorio de acciones realizadas, significado del subíndice, nombre de los términos de una sucesión.	5
	Fase de investigación Encontrar el término anterior y reescribir el valor del término utilizando el anterior y lo agregado.	10
	Fase de resolución Dado un término encontrar el anterior y el siguiente, utilizando la descomposición aritmética.	15
	Fase de evaluación Puesta en común sobre como calcular algunos términos y el uso de k.	15
5	Fase de activación Encontrar 6 términos de la sucesión correspondiente.	10
	Fase de investigación Identificar el término faltante en la sucesión propuesta por el compañero.	15
	Fase de resolución Creación de una estrategia para calcular un término (interpolación)	15
	Fase de evaluación Comparar las sucesiones y términos con los mostrados por el docente.	5

6	Fase de activación Creación de sucesiones decidiendo el término inicial y el valor de k.	10
	Fase de investigación Reconocimiento por medio de las posiciones de cuántos términos están en el intermedio y con ello el valor de k que les permitirá evidenciar cada uno.	15
	Fase de resolución Cálculo de los términos faltantes en las sucesiones y socialización de la estrategia para encontrarlos.	15
	Fase de evaluación Autoevaluación y coevaluación de los equipos.	5
7	Fase de activación Identificación de la cantidad de veces que se debe agregar k para encontrar un término determinado.	5
	Fase de investigación Representación del término sin colocar todas las k necesarias para calcularlo a partir del término inicial.	20
	Fase de resolución Relación de la posición del término y la cantidad de veces que se debe agregar k.	15
	Fase de evaluación Verificación de resultados con los del compañero y el docente.	5
8	Fase de activación Identificar como se relaciona la cantidad de k con la posición del término.	10
	Fase de investigación Reescribir los términos de una sucesión como $a_1 + d k$ .	15
	Fase de resolución Concretar la escritura del término general como $a_n = a_1 + (n - 1) k$ .	10
	Fase de evaluación Calcular un término en una posición 1,000 o 10,000 utilizando lo aprendido.	10
9	Fase de activación Calcular el término general de las sucesiones trabajadas en sesiones anteriores.	15
	Fase de investigación Creación de una máquina que simule el proceso del cálculo del término de una sucesión.	30
10	Fase de resolución Asignación de roles dentro de la maquina y presentación de la máquina a la plenaria. Identificar que sucede al hacer el proceso inverso de máquina.	20
	Fase de evaluación Calcular términos de las sucesiones propuestas o de una posición en específico.	25
11	Fase de activación Calcular el término general de las sucesiones dadas.	10
	Fase de investigación Cálculo de la descomposición aritmética de cada término y las acciones necesarias de suma y multiplicación.	15
	Fase de resolución Escribir los términos generales de las sucesiones dadas.	10
	Fase de evaluación Verificación de la regla del término general para los términos de una sucesión y graficar los puntos en el plano.	10
12	Fase de activación Cálculo del término general de dos formas diferentes.	5
	Fase de investigación Identificar que, aunque dos sucesiones tengan diferentes formas del término general representan los mismos puntos en el plano.	25
	Fase de resolución Verificar la unicidad de cada término y la diferencia entre sucesiones finitas e infinitas.	10
	Fase de evaluación	5

	Completar la autoevaluación.	
13	Fase de activación Realizar sumas de términos de sucesiones según lo observado en el video.	5
	Fase de investigación Identificar que sucede con los términos generales al realizar una suma de sucesiones.	20
	Fase de resolución Analizar el cambio que se realiza para obtener la nueva k en la suma de las sucesiones.	15
	Fase de evaluación Verificación de resultados entre compañeros y docente.	5
14	Fase de activación Calcular por primeros 6 términos. Identificar como pueden agruparse de forma que se facilite el cálculo de la suma.	5
	Fase de investigación Identificar que para calcular la suma es más efectivo sumar los extremos correspondientes de los términos. E identificar cuantas parejas pueden formarse.	15
	Fase de resolución Generalizar la suma de los términos de una sucesión como $(a_1 + a_n) \frac{n}{2}$	20
	Fase de evaluación Comparación de respuestas con las proporcionadas por el docente.	5
15	Fase de activación Explicación de la actividad y distribución de roles para la investigación	15
	Fase de investigación Búsqueda de información sobre la sucesión de Fibonacci en diferentes contextos.	30
16	Fase de resolución Redacción de informe y exposición de resultados.	30
	Fase de evaluación Completar autoevaluación y coevaluación.	15
17	Fase de activación Identificar en los elementos del cubo como las aristas, área, volumen dónde se encuentran las sucesiones.	5
	Fase de investigación Cálculo de volúmenes y áreas para identificar la sucesión de Fibonacci.	25
	Fase de resolución Compartir en plenaria los elementos que permitieron formas sucesiones de Fibonacci y observar la espiral formada	10
	Fase de evaluación Verificar si lo realizado cumple para cualesquiera dimensiones del papel inicial	5
18	Evaluación	45







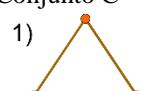
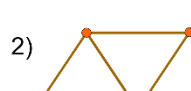

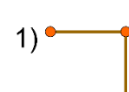


Fuente: elaboración propia.

### 3.7. Actividades

A CONTINUACIÓN, SE DESCRIBEN EN DETALLE LAS SESIONES, SUS ELEMENTOS DIDÁCTICOS Y LAS ACTIVIDADES QUE SE LLEVARÁN A CABO EN CADA UNA (TABLAS DE 5 A 19):

Tabla 6.

Descripción de la *sesión 1*.

Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno							Sesión
Generación de figuras siguiendo un patrón							1
Objetivos							Contenidos
Ob1, Ob2 y Ob3							<ul style="list-style-type: none"> <li>• Generación de términos de una sucesión.</li> <li>• Relación entre dos términos de una sucesión.</li> </ul>
Competencias trabajadas							
CL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC	
X	X		X				
Actividad							
Previamente se ha elaborado material para representar de conjuntos de figuras.							
<p>Conjunto A</p> <p>1) </p> <p>2) </p> <p>3) </p>				<p>Conjunto B</p> <p>1) </p> <p>2) </p> <p>3) </p>			
<p>Conjunto C</p> <p>1) </p> <p>2) </p> <p>3) </p>				<p>Conjunto D</p> <p>1) </p> <p>2) </p> <p>3) </p>			
<p>Figura 5. Conjuntos A, B, C y D para introducción de patrones. Fuente: propia.</p> <p><b>Problema: ¿Cómo calcular la cantidad de puntos de la figura siguiente a partir de una dada?</b></p> <p><b>Fase de activación (5 min)</b></p>							

El docente organiza la sección en grupos de no más de cuatro estudiantes y entrega una caja de fósforos y una bolsa con fichas y explica la actividad a realizar.

Las instrucciones son:

- Representar las dos figuras siguientes para cada conjunto.
- Identificar la figura anterior en la actual
- Realizar las mismas actividades para las siguientes configuraciones, excepto que ahora deben identificarse los fósforos utilizados en la figura anterior.

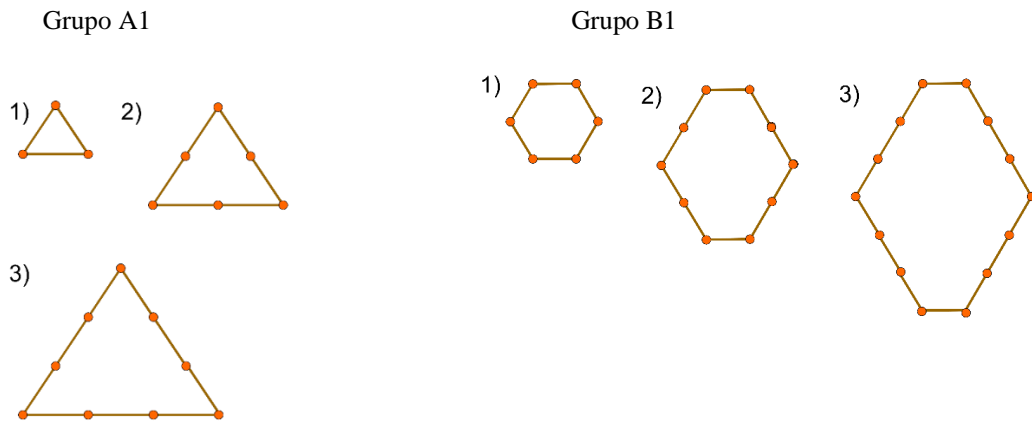


Figura 6. Grupos B1 y B2 para representación de patrones.

Fuente: propia.

### Fase de investigación (20 min)

Dada la organización los equipos construyen sus figuras con el material y realizan las acciones de identificar las figuras o la cantidad de puntos según el grupo de figuras.

Con los datos preliminares de los grupos A, B, C y D, del conteo de puntos de cada figura y completar una tabla para cada uno.

Posición	1°	2°	3°	4°	5°
Figura					
Cantidad de puntos					
Cantidad de puntos tomando en cuenta los anteriores					

### Fase de resolución (10 min)

Análisis de los grupos A1 y B1 verificando si cumple las mismas propiedades y describiendo esas propiedades en consenso grupal.

### Fase de evaluación (10 min)

Reflexión en plenaria resumiendo el análisis grupal sobre la característica observada en la cantidad de puntos y descripción de cómo encontrar la cantidad de puntos de la figura siguiente.

Espacio y agrupamiento	Recursos	Temporalización
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividad grupal en aula</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Carteles para docente</li> <li>• Cuaderno</li> <li>• Fichas</li> <li>• Fósforos</li> </ul>	45 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		

- Rúbrica de trabajo en equipo (Anexo 3)
- Rúbrica de solución de problemas en la clase (Anexo 5)
- Portafolio de toda la unidad

Fuente: elaboración propia.

Tabla 7

Descripción de la *sesión 2 y 3*.

Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno							Sesión
Formas de representar una sucesión							2 y 3
Objetivos				Contenidos			
Ob4, Ob5 y Ob6				<ul style="list-style-type: none"> <li>• Notación de la sucesión</li> <li>• Asociación de regla y término</li> </ul>			
Competencias trabajadas							
CL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC	
X	X		X	X			
Actividad							
<p><b>Problema: ¿Cómo nombrar mi configuración puntual e identificar cada término de forma que todos hablemos el mismo idioma en el aula?</b></p> <p><b>Fase activación (15 min)</b></p> <p>Dadas las configuraciones puntuales ordenarlas según la regla.</p> <p><b>Fase de investigación (individual) (10 min)</b></p> <p>Cada estudiante decide nombrar la sucesión según su criterio (puede ser por figura formada: sucesión triángulo, cuadrado...) y de forma similar para cada término (triángulo 1, triángulo 2...)</p> <p><b>Fase de resolución (plenaria) (20 min)</b></p> <p>Mostrar en pizarra el ejemplo de algún estudiante y comparar el nombre proporcionado individualmente, evidenciando la importancia de nombrarlas y de una forma de identificar el término de una sucesión para no confundir el término en la misma posición, pero de otra sucesión, o confundir entre términos. El aula toma acuerdo de como nombrarla y el docente posteriormente expresa la forma matemática de denotar las sucesiones y los términos.</p> <p>Como una forma de resumen de la configuración escribir la cantidad de puntos que posee en lugar de dibujarla por completo, colocando esta información en una tabla donde se indique el nombre de cada término, es decir letra y subíndice</p> <p><b>Fase de evaluación (45 min)</b></p> <p>Plenaria (15 min)</p> <p>Analizar y expresar cual es la información que nos da cada forma de diferenciar el término, enfatizando que la sucesión con la configuración da toda la información, el número solo la cantidad de puntos y la notación de nombre solo a la sucesión que pertenece y la posición de cada término.</p>							

<p>Grupal (20 min)</p> <p>En grupos de 4 se entregará juego de bingo que contendrá la configuración puntual, el término y la notación del término. El docente presentará una forma de la sucesión como lo puede ser la configuración puntual y los estudiantes identificará el correspondiente, ya sea <math>a_i</math> o la cantidad de puntos.</p> <p>Individual (10 min)</p> <p>En el portafolio los estudiantes escribirán un pequeño resumen de lo aprendido ese día, enfatizando la relación entre configuración puntual, número y notación.</p>		
<b>Espacio y agrupamiento</b>	<b>Recursos</b>	<b>Temporalización</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Actividad individual y grupal en el aula</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tarjetas con la configuración puntual</li> <li>Juego de bingo</li> </ul>	90 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>Rúbrica de trabajo en clase (Anexo 4)</li> <li>Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5)</li> <li>Portafolio de toda la unidad</li> </ul>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 8

Descripción de la *sesión 4*

<b>Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno</b>							<b>Sesión</b>
La constante de recursividad y sus usos							4
<b>Objetivos</b>				<b>Contenidos</b>			
Ob7, Ob8 y Ob9				<ul style="list-style-type: none"> <li>Constante de recursividad</li> <li>Cálculo de términos de una sucesión</li> </ul>			
<b>Competencias trabajadas</b>							
CL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC	
X	X		X				
<b>Actividad</b>							
<p><b>Problema: ¿Cómo escribo un término cualquiera utilizando <math>a_i</math> y un valor que se esconde en los términos de la sucesión? ¿Qué puedo encontrar si conozco un término y ese número escondido?</b></p> <p><b>Fase de activación (5 min)</b></p> <p>Preguntar cuáles han sido las acciones realizadas en las sesiones anteriores y recordar cómo se nombran los términos de la sucesión y el significado del sub índice, indicando que esas son las pistas para resolver.</p> <p><b>Fase de investigación (10 min)</b></p> <p>El estudiante deberá indagar que, dado un conjunto de sucesiones con su configuración puntual, debe encerrar el término anterior y reescribir el valor del término utilizando el anterior y lo agregado (descomposición aritmética)</p>							



<p><b>Fase de resolución (15 min)</b></p> <p>El estudiante reescribe cada descomposición aritmética utilizando la notación <math>a_i</math> del término anterior.</p> <p>Analiza que el valor encontrado en todos los términos después de utilizada la notación puede utilizarse para:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Dado un término encontrar el siguiente</li> <li>✓ Dado un término encontrar el anterior (puede realizarlo junto con el anterior)</li> </ul> <p><b>Fase de evaluación (15 min)</b></p> <p>Se comparte en plenaria y se abre un pequeño debate con las opiniones de los estudiantes sobre el descubrimiento realizado, describiendo en sus propias palabras como puede encontrarse y para qué considera que sirve.</p> <p>En el portafolio describir cuales son los usos de k</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Puede dejarse tarea donde dada la sucesión calcular el valor de k, en las tres formas de representación.</li> </ul>		
<b>Espacio y agrupamiento</b>	<b>Recursos</b>	<b>Temporalización</b>
• Actividad individual en el aula	Cuaderno	45 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rúbrica de solución de problemas (Anexo 5)</li> <li>• Portafolio de toda la unidad</li> </ul>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 9

Descripción de la *sesión 5*

<b>Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno</b>							<b>Sesión</b>
Utilizando k e interpolando							5
<b>Objetivos</b>					<b>Contenidos</b>		
Ob10 y Ob11					<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpolación de términos de una sucesión</li> <li>• Cálculo de términos de una sucesión dado el inicial y la constante k</li> <li>• Cálculo de términos no necesariamente contiguos</li> </ul>		
<b>Competencias trabajadas</b>							
CL	CMCT	CD	CAA	CSC			
X	X		X	X			
<b>Actividad</b>							
<p><b>Problema: ¿Cómo saber si dado un conjunto de términos todos son consecutivos o si falta alguno intermedio? ¿Cómo determinar el término que hace falta?</b></p> <p><b>Fase de activación (10 min)</b></p> <p>De forma individual el docente entrega un término inicial y el valor de k, para que cada estudiante encuentre los siguientes 6 términos de la sucesión (siempre tomando en cuenta que para encontrar un término se hace sumando la constante al término anterior).</p>							

<p><b>Fase de investigación (15 min)</b></p> <p>En pareja mostrar las sucesiones de cada uno, quitando o no algún término y el otro compañero deberá identificar si le faltan o no términos, en caso de faltar encontrar el término faltante.</p> <p>El estudiante basado en las acciones previas podrá identificar que la clave es el valor k, particularmente sumando este valor para saber si los términos están en el orden correcto.</p> <p><b>Fase de resolución (15 min)</b></p> <p>Se encontrarán el o los términos faltantes, verificando con el compañero si en efecto el encontrado es el que se había omitido o si la sucesión estaba completa. En conjunto discutir y concretar la estrategia para encontrar el término.</p> <p>Algunas parejas comparten su estrategia en plenaria y se estructura una estrategia en conjunto, la cual aplicarán para interpolar términos como se solicita a continuación:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- En pareja se propone encontrar los términos intermedios de una sucesión dado el inicial y otro en una posición de 4 a 10</li> </ul> <p>Identificar la cantidad de términos que debería estar entre dos utilizando el valor de k.</p> <p><b>Fase de evaluación (5 min)</b></p> <p>Revisión entre compañeros las soluciones a los problemas propuestos, comparando con la proporcionada por el docente.</p>		
<b>Espacio y agrupamiento</b>	<b>Recursos</b>	<b>Temporalización</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividad individual</li> <li>• Actividad en pareja en el aula</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cuaderno</li> </ul>	45 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rúbrica de trabajo en clase (Anexo 4)</li> <li>• Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5)</li> </ul>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 10

Descripción de la *sesión 6*

<b>Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno</b>							<b>Sesión</b>		
Creando sucesiones							6		
<b>Objetivos</b>					<b>Contenidos</b>				
Ob12					<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formación de sucesiones dado dos términos y las posiciones correspondientes</li> </ul>				
<b>Competencias trabajadas</b>									
CL	CMCT	CD	CAA	CSC				SIEE	CEC
X	X		X	X					
<b>Actividad</b>									
<p><b>Problema: Si solo se conocen dos términos y sus posiciones ¿cómo calculo los términos intermedios? ¿cuántos términos son?</b></p> <p><b>Fase de activación (10 min)</b></p>									

<p>En equipos de tres se propone que creen sus propias sucesiones, decidiendo el término inicial y el valor de <math>k</math>, tomando en cuenta las tres representaciones, configuración puntual, valor numérico y en notación de sucesión (con <math>a_i</math> y <math>k</math>).</p> <p>Cada equipo propone una de sus sucesiones, dando solo dos términos y la posición de ellos, para que los demás equipos ideen una estrategia para calcular los términos intermedios.</p> <p><b>Fase de investigación (15 min)</b></p> <p>Los estudiantes reconocerán por medio de las posiciones cuántos términos están en el intermedio y con ello el valor de <math>k</math> que les permitirá evidenciar cada uno.</p> <p><b>Fase de resolución (15 min)</b></p> <p>Después de emitir acuerdos entre los grupos se comparte la estrategia y se verifica que los términos encontrados coinciden con los propuestos por los compañeros, se presentan además los términos en los tres tipos de representación.</p> <p>Con las sucesiones que aún no se han mostrado, por turnos en equipo se realizan las siguientes actividades:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Muestra una de sus sucesiones en configuración puntual o los valores y el equipo más rápido escribe en pizarra el valor de <math>k</math></li> <li>✓ Dados dos términos de una sucesión realizar interpolación de un término.</li> <li>✓ Dado un término inicial y el valor de <math>k</math> encontrar otros términos.</li> </ul> <p>Las actividades se rotan, es decir un equipo propone sucesión luego otro la interpolación y otro el cálculo de términos.</p> <p><b>Fase de evaluación (5 min)</b> Utilizando las rúbricas propuestas los estudiantes realizan auto evaluación y coevaluación.</p>		
<b>Espacio y agrupamiento</b>	<b>Recursos</b>	<b>Temporalización</b>
• Actividad grupal en el aula	Páginas de papel bond	45 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rúbrica para autoevaluación y coevaluación (Anexo 1 y 2)</li> <li>• Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5)</li> </ul>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 11

Descripción de la sesión 7

Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno							Sesión
Deducción de regla general de la formación de una sucesión aritmética							7
Objetivos							Contenidos
Ob13							
Competencias trabajadas							
CL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC	
X	X		X				
<b>Actividad</b>							

**Problema: Tomando en cuenta la posición de un término ¿cómo puedo representarlo utilizando el primer término y k?**

**Fase de activación (5 min)**

Observando la tabla completar los valores faltantes y analizar el significado de la k, identificando la cantidad de k necesarias para llegar del primer término al solicitado.

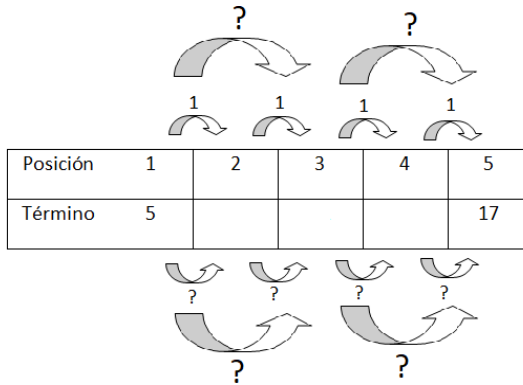


Figura 7. Cálculo de términos de una sucesión.

Fuente: elaboración propia.

**Fase de investigación (20 min)**

Buscar una estrategia que permita escribir el término actual solo mostrando el primero y evidenciando la cantidad de k, para esto el estudiante se guiará con la tabla, parte de la estrategia será dejar indicada la suma de las k las veces necesarias.

**Fase de resolución (15 min)**

Para la sucesión dada se escribirá el término en la posición 5, utilizando el primer término y el valor de k correspondiente, es decir de la forma  $5+3+3+3+3$ . Posteriormente para la generalización del término en caso de no haber concluido completamente, el docente guiará con las siguientes preguntas.

- ✓ ¿Cómo se relaciona la cantidad de k con la posición del término?
- ✓ Si estoy en la posición 2, 4, 7, 210, ¿cuántas veces se ha sumado k al término 1?
- ✓ Si conozco el primer término y el valor de k, ¿cuál es el término 11, 26, 32?

Para dos sucesiones proporcionar el primer término y el valor de k y solicitar el valor del término en una determinada posición.

**Fase de evaluación (5 min)**

Intercambiar cuaderno de trabajo y verificar si los resultados escritos por el compañero son los adecuados, contrastando con la respuesta expresada por el docente.

Espacio y agrupamiento	Recursos	Temporalización
• Actividad individual en el aula	• Cuaderno	45 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
• Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5).		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 12

Descripción de la sesión 8

Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno							Sesión			
Término general de una sucesión							8			
Objetivos				Contenidos						
Ob14 y Ob15				Término general de una sucesión aritmética						
Competencias trabajadas										
CL	CMCT	CD	CAA					CSC	SIEE	CEC
X	X	X								
Actividad										
<p><b>Problema: ¿Cómo se puede escribir el término en la posición n, dado el término inicial y el valor de k, sin tener que dejar expresada la suma de todas las k?</b></p> <p><b>Fase de activación (10 min)</b></p> <p>Dados los términos de una sucesión de la forma</p> $a_1 =$ $a_1 + k =$ $a_1 + k + k =$ <p>Responder</p> <p>Al reescribir cada término de una forma más simple, sin tener que evidenciar todas las k ¿Cómo se relaciona el número encontrado en cada caso con la posición del término reescrito? Para ello realiza lo siguiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reescribir todos los términos de las sucesiones trabajadas anteriormente.</li> <li>- Buscar una forma de escribir el término en la posición n, dado el inicial y el valor de k</li> </ul> <p><b>Fase de investigación (15 min)</b></p> <p>Después de recolectar todas las sucesiones trabajadas anteriormente y de reescribir los términos como <math>a_1 + d k</math>, donde d es una posición en particular, el estudiante relacionará la d con el número de la posición anterior. Es decir, identificar que a la posición actual se le debe restar 1.</p> <p><b>Fase de resolución (10 min)</b></p> <p>Se concretará la escritura del término general como <math>a_n = a_1 + (n - 1) k</math></p> <p><b>Fase de evaluación (10 min)</b></p> <p>Para verificar si el término general escrito de las sucesiones trabajadas es el adecuado se aplicará la regla.</p> <p>Finalmente, en coro responder, ¿Si se desea el término en la posición 1,000 o 1,000,000 que debería hacer?</p>										
Espacio y agrupamiento				Recursos		Temporalización				
• Actividad individual en el aula				Cuaderno		45 min				
Instrumentos de evaluación										
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5)</li> <li>• Trabajo en el portafolio.</li> </ul>										

Fuente: elaboración propia.

Tabla 13

Descripción de la sesión 9 y 10

Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno							Sesión			
Cálculo de términos utilizando la forma general							9 y 10			
Objetivos				Contenidos						
Ob16 Y Ob17				Cálculo de posiciones y término de una sucesión dado el término general.						
Competencias trabajadas										
CL	CMCT	CD	CAA					CSC	SIEE	CEC
X	X		X	X						
Actividad										
<p><b>Problema: Crear una máquina que permita encontrar los términos de una sucesión, la posición ya que el término inicial y k serán fijos, si la máquina realiza el proceso inverso ¿Qué papel juega el valor encontrado en la sucesión?</b></p> <p><b>Fase de activación (15 min)</b></p> <p>Los estudiantes se organizan en grupos, deciden el nombre insignia de su máquina y eligen un espacio en cual trabajar.</p> <p>En grupos calcular el término general de las sucesiones trabajadas en sesiones anteriores y para ellas simular la máquina.</p> <p><b>Fase de investigación (30 min)</b></p> <p>Para cada una de las sucesiones entregadas anteriormente, crear una máquina que simule el proceso del cálculo del término. A partir de la solución los estudiantes identificarán las acciones que la máquina deberá realizar, para este fin cada estudiante será ya sea una operación o una constante o la posición.</p> <p><b>Fase de resolución (20 min)</b></p> <p>Cada grupo asigna las acciones de cada participante, una vez verificado que cumple proceden a realizar el proceso inverso para analizar el resultado.</p> <p>Posteriormente se reúnen nuevamente en el aula y cada grupo presenta su máquina humana para calcular los términos, el docente propone un término y pide a los estudiantes realizar el proceso inverso, y lanza la pregunta ¿qué es lo que se encuentra? ¿qué indica ese valor encontrado? Entre todos concluyen que dado un término al realizar el proceso inverso en la máquina se encuentra la posición en la que se encuentra.</p> <p><b>Fase de evaluación (25 min)</b></p> <p>Una vez puesto en común los dos procesos realizados por la máquina, se propone calcular términos de una sucesión o posición de un término en específico.</p> <p>Finalmente se realiza la evaluación del trabajo en equipo.</p>										
Espacio y agrupamiento				Recursos		Temporalización				
<ul style="list-style-type: none"> <li>Actividad grupal</li> </ul>				<ul style="list-style-type: none"> <li>Cuaderno</li> </ul>		90 min				
Instrumentos de evaluación										
<ul style="list-style-type: none"> <li>Rúbrica de trabajo en clase (Anexo 4).</li> </ul>										

- Rúbrica para el trabajo en equipo (Anexo 3).
- Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5)

Fuente: elaboración propia.

Tabla 14

Descripción de la sesión 11

Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno							Sesión			
Término general como función de la posición actual							11			
Objetivos				Contenidos						
Ob18				<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sucesión como función lineal con dominio discreto.</li> </ul>						
Competencias trabajadas										
CL	CMCT	CD	CAA					CSC	SIEE	CEC
X	X		X							
Actividad										
<p><b>Problema: Dado el grupo de sucesiones, escribir su término general utilizando solo operación suma y en términos de la posición actual, tomando en cuenta que esta vez para la posición 1 debe hacerse énfasis como parte del término general.</b></p> <p><b>Fase de activación (10 min)</b></p> <p>Dado el grupo de términos calcular el término general de las sucesiones.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 4, 5, 6, 7 ...</li> <li>- 6, 12, 18, 24 ...</li> <li>- 5, 7, 9, 11 ...</li> </ul> <p>Las consideraciones son que al escribir la regla o término general y sustituir la posición debe encontrarse el término, cualquiera de ellos incluyendo el término inicial.</p> <p>Graficar en el plano cartesiano los puntos (posición, término)</p> <p><b>Fase de investigación (15 min)</b></p> <p>Se buscará separar cada posición en la descomposición aritmética de cada término y a partir de ahí identificar las acciones necesarias de suma y multiplicación cuando sea necesario.</p> <p><b>Fase de resolución (10 min)</b></p> <p>Escribir los términos generales correspondientes</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>n + 3</math></li> <li>- <math>6 \times n</math></li> <li>- <math>2 \times n + 3</math></li> </ul> <p><b>Fase de evaluación (10 min)</b></p> <p>Una vez encontrado los términos generales, verificar que cumple para todos los términos presentados al inicio y graficar en el plano los puntos que corresponden a la posición y al término en esa posición.</p>										

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Puede dejarse tarea, analizar los casos anteriores explicar porque no apareció el caso <math>n + d \times n</math></li> </ul>		
<b>Espacio y agrupamiento</b>	<b>Recursos</b>	<b>Temporalización</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividad individual en el aula</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cuaderno</li> </ul>	45 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5)</li> <li>• Portafolio</li> </ul>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 15

Descripción de la sesión 12

<b>Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno</b>							<b>Sesión</b>		
Gráfica de sucesiones en GeoGebra							12		
<b>Objetivos</b>					<b>Contenidos</b>				
Ob19, Ob20 y Ob21					<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sucesiones como función lineal</li> </ul>				
<b>Competencias trabajadas</b>									
CL	CMCT	CD	CAA	CSC				SIEE	CEC
X	X	X	X						
<b>Actividad</b>									
<b>Problema: ¿Puede observarse el último término de todas las sucesiones?</b>									
<b>Fase de activación (5 min)</b>									
<p>Luego de formar parejas se proporciona un conjunto de términos de una sucesión, algunos identificados con puntos suspensivos. Por ejemplo: 2, 4, 6, 8, 10 y 2, 4 6, 8, 10 ...</p> <p>Se solicita calcular de dos formas el término general y graficarlos en Geogebra los valores correspondientes.</p>									
<b>Fase de investigación (25 min)</b>									
<p>Luego de escribir de dos formas el término general de las sucesiones, observar los puntos en el plano identificarán que algunas sucesiones al escribir su término general es el mismo, pero que algunas tienen puntos suspensivos y otros no, para ello se utilizarán deslizadores.</p>									
<b>Fase de resolución (10 min)</b>									
<p>Movilizándose por la vista gráfica observarán que no en todos los casos se observa el último término.</p> <p>Luego analizando las gráficas responder</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Es posible encontrar para una misma posición términos diferentes respecto a la misma sucesión?</li> <li>✓ ¿Un mismo término puede estar en dos posiciones diferentes?</li> <li>✓ ¿Se obtienen valores diferentes para una misma posición si se utiliza formas diferentes del término general?</li> </ul>									



<b>Fase de evaluación (5 min)</b>		
Se entrega a los estudiantes una lista de cotejo para su autoevaluación.		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Observar el vídeo (Ahoraloentiendo, 2013) para la siguiente clase. Duración 6 minutos 25 segundos</li> </ul>		
<b>Espacio y agrupamiento</b>	<b>Recursos</b>	<b>Temporalización</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividad en parejas en centro de cómputo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cuaderno</li> </ul>	45 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5).</li> <li>• Rúbrica para autoevaluación (Anexo 1).</li> </ul>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 16

Descripción de la sesión 13

<b>Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno</b>							<b>Sesión</b>
Cálculo de nuevas sucesiones y suma de primeros términos							13
<b>Objetivos</b>					<b>Contenidos</b>		
Ob22					<ul style="list-style-type: none"> <li>• Operaciones con sucesiones</li> </ul>		
<b>Competencias trabajadas</b>							
CL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC	
X	X		X				
<b>Actividad</b>							
<b>Problema: Al sumar dos sucesiones y calcular el nuevo término general ¿cómo se modifica k?, donde k es la diferencia entre dos términos consecutivos.</b>							
<b>Fase de activación (5 min)</b>							
Luego de observar el video en casa sobre suma y resta de sucesiones, dadas las sucesiones completar la tabla con la suma y resta de ellas término a término y manipular el término general de cada una para escribir el término de la suma o resta de ellas.							
Por ejemplo:							
Sucesión	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_n$		
1	2	4	6			$2 \times n$	
2	5	6	7			$n + 4$	
suma	7						
<b>Fase de investigación (20 min)</b>							

<p>Luego de calcular la suma de los términos, los estudiantes comprenderán que los términos generales también deben ser sumados, tratando además de observar que la diferencia entre dos términos está relacionada con los valores que acompañan a <math>n</math>.</p> <p><b>Fase de resolución (15 min)</b></p> <p>Después de indicar la suma de los términos se deberán reducir las <math>n</math> a <math>3 \times n + 4</math> e identificar que en este caso la <math>k</math> se modifica con los valores que acompañan a la posición, se modifican sumándose con las <math>k</math> de las sucesiones originales u otra operación realizada con los términos.</p> <p><b>Fase de evaluación (5 min)</b></p> <p>Los grupos intercambian las guías y contrastan las soluciones con las proporcionadas por el docente.</p>		
<b>Espacio y agrupamiento</b>	<b>Recursos</b>	<b>Temporalización</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Actividad grupal en el aula</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Guía</li> </ul>	45 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5)</li> <li>Rúbrica para autoevaluación (Anexo 1)</li> </ul>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 17

Descripción de la *sesión 14*

Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno							Sesión
Suma de los primeros términos de una sucesión aritmética							14
<b>Objetivos</b>						<b>Contenidos</b>	
Ob23						<ul style="list-style-type: none"> <li>Suma de términos</li> </ul>	
<b>Competencias trabajadas</b>							
CL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC	
X	X		X				
<b>Actividad</b>							
<p><b>Problema: Dado los primeros términos de una sucesión, ¿Cómo calcular la suma de ellos sin necesidad de realizar la suma uno a uno?</b></p> <p><b>Fase de activación (5 min)</b></p> <p>Dados los términos generales de una sucesión calcular por primeros 6 términos. Identificar como pueden agruparse de forma que se facilite el cálculo de la suma, tratando de encontrar un patrón en las agrupaciones.</p> <p><b>Fase de investigación (15 min)</b></p> <p>Luego de calcular los términos los estudiantes realizarán distintas agrupaciones de los términos hasta identificar que la suma de los extremos o en simetría al centro es siempre la misma, por lo que habrá que caracterizar la relación que hay de la cantidad de términos con la cantidad de parejas que se pueden hacer.</p>							

<b>Fase de resolución (20 min)</b>		
Se concretará escribiendo en propias palabras la suma $(a_1 + a_n) \frac{n}{2}$ en el caso que n sea par o tomar la consideración cuando n es impar.		
Posteriormente se realizan las sumas de los 6 términos de cada una de las sucesiones propuestas y se compara con lo dado por la fórmula.		
Dadas algunas sucesiones calcular la suma de los primeros 10 términos.		
<b>Fase de evaluación (5 min)</b>		
Los integrantes del grupo comparan sus respuestas con base a las proporcionadas por el docente.		
<b>Espacio y agrupamiento</b>	<b>Recursos</b>	<b>Temporalización</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Actividad grupal en el aula</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Guía</li> </ul>	45 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5)</li> </ul>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 18

Descripción de la *sesión 15 y 16*

<b>Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno</b>							<b>Sesión</b>		
Exposición de otros tipos de sucesiones							15 y 16		
<b>Objetivos</b>					<b>Contenidos</b>				
Ob24					<ul style="list-style-type: none"> <li>Sucesiones lineales no aritméticas</li> </ul>				
<b>Competencias trabajadas</b>									
CL	CMCT	CD	CAA	CSC				SIEE	CEC
X	X	X	X						
<b>Actividad</b>									
<b>Problema: ¿Cómo es la sucesión de Fibonacci y como se evidencia en otras áreas?</b>									
<b>Fase de activación (15 min)</b>									
Se explican las actividades a realizar. La idea es buscar información sobre la sucesión de Fibonacci y algunas situaciones en las que es posible observar este tipo de patrón.									
Se reúnen en grupos y distribuyen los roles de cada estudiante.									
<b>Fase de investigación (30 min)</b>									
Utilizando una computadora proporcionada por el docente los estudiantes realizan la búsqueda de información de acuerdo al tema, ya sea en plantas, fenómenos naturales, arte, entre otros.									
<b>Fase de resolución (30 min)</b>									
Se redacta un reporte sobre la investigación realizada y se elaboran los recursos necesarios para exponer la información.									
Posteriormente se realiza una breve exposición de la investigación a los demás grupos.									

<b>Fase de evaluación (15 min)</b>		
Se proporcionan las rúbricas de auto evaluación y coevaluación.		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Observar el video (Pivaral, 2018) duración 10 minutos 58 segundos y realizar cuatro cubos Sonobe para la siguiente clase, el segundo cubo se elabora con el sobrante del primero y el tercer cubo se realiza con el sobrante del segundo y así sucesivamente. Medidas iniciales de la página <math>17 \times 27.5 \text{ cm}</math></li> </ul>		
<b>Espacio y agrupamiento</b>	<b>Recursos</b>	<b>Temporalización</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividad grupal en el aula y centro de cómputo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recursos audiovisuales</li> </ul>	90 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rúbrica de autoevaluación y coevaluación (Anexo 1 y 2)</li> <li>• Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5)</li> </ul>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 19

Descripción de la *sesión 17*

<b>Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno</b>							<b>Sesión</b>		
Sucesiones con papiroflexia							17		
<b>Objetivos</b>					<b>Contenidos</b>				
Ob25					<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sucesión utilizando la proporción aurea</li> </ul>				
<b>Competencias trabajadas</b>									
CL	CMCT	CD	CAA	CSC				SIEE	CEC
X	X		X						
<b>Actividad</b>									
<b>Problema: ¿En los cubos Sonobe elaborados, dónde se puede observar figura de las secuencias de Fibonacci?</b>									
<b>Fase de activación (5 min)</b>									
Luego de ver el video de cómo elaborar el cubo de Sonobe y realizar al menos cuatro cubos con las medidas indicadas, identificar en los elementos del cubo como las aristas, área, volumen dónde se encuentran las sucesiones.									
<b>Fase de investigación (25 min)</b>									
Para identificar las sucesiones se tomarán medidas y se realizarán cálculos de volúmenes de los cubos, así como también es posible desarmarlos y por cada unidad modular encontrar el área del papel utilizado.									
Algunas preguntas que pueden guiar									
<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Cuál es la relación entre el tamaño de las páginas utilizadas al sobre ponerlas?</li> <li>✓ Dibujar en cada hoja la espiral indicada y observar que se mantiene la forma, aunque el tamaño es diferente.</li> </ul>									
<b>Fase de resolución (10 min)</b>									

Se comparte en plenaria los elementos que permitieron formas sucesiones de Fibonacci y observar la espiral formada.		
<b>Fase de evaluación (5 min)</b>		
Verifican si lo realizado cumple para cualesquiera dimensiones del papel inicial.		
<b>Espacio y agrupamiento</b>	<b>Recursos</b>	<b>Temporalización</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Actividad grupal en el aula</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Páginas de papel bond de colores</li> </ul>	45 min
<b>Instrumentos de evaluación</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>Rúbrica de trabajo en clase (Anexo 3)</li> <li>Rúbrica de solución de problemas en clase (Anexo 5)</li> </ul>		

Fuente: elaboración propia.

Tabla 20

Descripción de la *sesión 18*

<b>Sucesiones aritméticas y otras sucesiones en el entorno</b>							<b>Sesión</b>		
Evaluación							18		
<b>Objetivos</b>					<b>Contenidos</b>				
<ul style="list-style-type: none"> <li>Identificar el grado de alcance de los conocimientos adquiridos sobre las sucesiones aritméticas</li> </ul>					<ul style="list-style-type: none"> <li>Toda la unidad</li> </ul>				
<b>Competencias trabajadas</b>									
CL	CMCT	CD	CAA	CSC				SIEE	CEC
X	X								
<b>Actividad</b>									
Realización del test donde se proponen cálculo de términos generales de sucesiones, cálculo de términos dados los iniciales y k.									
<b>Espacio y agrupamiento</b>				<b>Recursos</b>		<b>Temporalización</b>			
<ul style="list-style-type: none"> <li>Actividad individual en el aula</li> </ul>				<ul style="list-style-type: none"> <li>Examen (anexo 6)</li> </ul>		45 min			
<b>Instrumentos de evaluación</b>									
<ul style="list-style-type: none"> <li>Examen</li> </ul>									

Fuente: propia

### 3.7. Recursos

Los recursos a utilizar en las actividades son:

- Pizarra de plumón: este recurso será utilizado para presentar las generalidades de las actividades, así como para compartir los descubrimientos de los estudiantes.
- Computadoras: Según sea el caso, se utilizarán dentro del centro de cómputo de la institución o puede ser como actividad para casa, donde tendrán que buscar información u observar vídeos.
- Papelería: este material complementará las actividades, en la construcción del cubo Sonobe entre otras.

### 3.8. Evaluación

La unidad didáctica será evaluada de forma continua, con base a las actividades realizadas en cada sesión, las actitudes observadas en los trabajos grupales e individuales donde se tendrá autoevaluación y coevaluación. Este proceso pretende mejorar en el estudiante la autocrítica y responsabilidad de mejora en sus actuaciones, así como valorar el esfuerzo de su trabajo y el de sus compañeros.

Se incluye una prueba final de tipo test, donde se valorará el nivel de comprensión del contenido. En el caso de estudiantes con adecuaciones curriculares, se realizarán modificaciones a las evaluaciones. El docente también participará dentro de la evaluación mediante la observación del avance de cada estudiante y el compromiso que se tenga con el aprendizaje. Otro punto importante de mencionar, es que se enfatizará en el lenguaje matemático al momento de comunicarse en la clase.

Para cada tipo de actividad se detalla la rúbrica a emplear, en este caso se presentan cinco tipos (véanse en los anexos 3, 4, 5, 6 y 7): autoevaluación, coevaluación, evaluación del grupo en el trabajo en equipo, evaluación del docente respecto al desempeño de los estudiantes en la clase y la evaluación de los resultados del trabajo ya sea en reporte externo o en el cuaderno. Con estos instrumentos se identificarán los puntos ganados según los porcentajes globales de cada tipo de actividad, según se detalla a continuación:

Actividades de clase 40% (cuaderno, trabajo de investigación)

Portafolio 10 %

Evaluación formativa 30% (trabajo en clase, trabajo en grupo, autoevaluación y coevaluación)

Examen de unidad 20%

Según el detalle anterior, el mayor porcentaje corresponde al trabajo en clase, así parte de la evaluación se realizará mediante la observación y otra en base al producto final entregado en cada sesión, donde los estudiantes serán parte de esta evaluación, realizando una revisión previa al trabajo de los compañeros. Además, para permitir que el conocimiento sea acumulativo se utilizará un portafolio, esto servirá para que el estudiante reconozca su nivel de avance y evidencie los conocimientos adquiridos, además de mejorar aspectos débiles, se empleará en todas las actividades, aunque en algunas se menciona de forma explícita que se incluirá.

Los puntos se distribuirán en las sesiones según anexo 2.

Aclarando que el punto faltante se obtiene con el portafolio, el cual se completaría durante toda la propuesta de intervención, por lo que este se tomaría en cuenta hasta el final.

Los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje basados en el Real Decreto 1105/2014 (BOE 3, 2015, p. 399) son los que se indican en la tabla 4.

### 3.9. Evaluación de la propuesta

En este apartado se presentan algunos aspectos que se consideran como los puntos fuertes y débiles de esta propuesta de intervención a criterio del autor, expresados en forma de matriz DAFO (tabla 21).

Tabla 21

*Matriz DAFO para evaluar la unidad didáctica*

<b>FACTORES INTERNOS</b>	
<b>Debilidades</b>	<b>Fortalezas</b>
<p>Está diseñada en base a tiempo de clase limitado, luego es una adaptación del ABP en el sentido de ajustar los problemas al tiempo de que se dispone en el aula.</p> <p>Dependencia de que el trabajo en grupos, requiere que este se desarrolle de manera óptima para que tenga éxito.</p> <p>Incluye pocas situaciones asociadas a la vida real.</p>	<p>Se fomenta la interpretación de la información y el significado de los elementos del término general de la sucesión.</p> <p>Los objetivos a lograr se establecen por sesión y se corresponden con la descomposición genética, lo que permitiría evaluar si las acciones, objetos, procesos y esquemas son los adecuados.</p>
<b>FACTORES EXTERNOS</b>	
<b>Amenazas</b>	<b>Oportunidades</b>
<p>Falta de formación del docente, la mayor parte no están debidamente capacitados para trabajar con ABP.</p> <p>Dificultades en la elaboración de la descomposición genética.</p>	<p>Permite la revisión de programas de estudio y reivindicación de la importancia de las sucesiones como paso previo a la generalización matemática.</p> <p>Abre espacios para la formación continua de los docentes en base a la importancia de la implementación de diferentes metodologías.</p>

*Fuente: Elaboración propia.*

Uno de los aspectos débiles de la unidad didáctica es incluir pocas situaciones asociadas al contexto en el que se desenvuelven los estudiantes, ya que la mayoría de situaciones son apoyadas únicamente desde el punto de vista matemático y solo en una sesión se pone de manifiesto la existencia de otro tipo de sucesiones. Además, se hace poca referencia a la formación de sucesiones en la naturaleza, arte entre otras. Así mismo, no se pone de manifiesto la utilidad del objeto matemático sucesiones en aspectos profesionales, es decir áreas de trabajo donde se apliquen o sean necesarias, aun cuando no se haga de forma implícita.

Por otro lado, aunque la cantidad de sesiones propuestas es considerable, no existe una correspondencia directa entre la cantidad de horas disponibles para trabajar sucesiones en el aula de acuerdo al Programa de Estudio de El Salvador ni en el Real Decreto 1105/2014 en España, lo que podría volver la propuesta completa poco viable para trabajar en el aula tal cual se presenta, sin embargo como se mencionó, una de las debilidades encontradas es la poca importancia que se le brinda al contenido.



Dentro de los puntos fuertes, se considera la elaboración propia de una descomposición genética específica para el tema abordado, la cual permite ejemplificar cómo trabajar para temas en niveles básico y medio, esto puede dar lugar a analizar lo presentado y expandir la descomposición actual o crear las homólogas para otro tipo de sucesiones u otros temas de interés.

Además, se observa como punto fuerte la asociación de los objetivos de cada clase, con lo presentado dentro de la descomposición, esto permite evidenciar los alcances de cada uno de los pasos. Por otro lado, permitirá en el futuro si se pone en práctica conocer si la descomposición permite alcanzar los objetivos para la comprensión del contenido.

Finalmente, otro de los puntos fuertes es el trabajo con el Aprendizaje Basado en Problemas, identificando con claridad las preguntas asociadas a los problemas que deberán enfrentar los estudiantes. Esto permite que cada sesión sea coherente con respecto a lo que cada estudiante aprenderá, además de ser una indicación clara para el producto buscado, es decir, no requiere que el docente dirija paso a paso los procesos, ni que se cambie la pregunta en el medio de una sesión. Para el estudiante está claro cuál es la meta, pero con la libertad suficiente para que cada uno escoja una estrategia para resolver.

## 4. Conclusiones

Tras la elaboración de este TFM, las conclusiones a las que se han llegado son:

- Las dificultades en el aprendizaje de las sucesiones, son variadas y algunas asociadas a las generalizaciones, como la visualización de patrones en diferentes contextos o en diferentes representaciones, el uso de las reglas generales que describen modelos, así como la deducción de dichas reglas a partir de patrones numéricos o de sus representaciones. También se observan dificultades en la comprensión de la relación entre la posición de un término y el valor del término. Estas dificultades influyen en temas posteriores que se relacionan de forma directa como son series, pero existen otras como las funciones. Podría pensarse que no existe una influencia considerable, pero esto

permite evidenciar la importancia de trabajar sucesiones dentro del currículo tanto como se hace con las funciones.

- La teoría APOE es aplicable a diversos niveles educativos y permite desarrollar los contenidos enfatizando el proceso cognitivo que llevan a cabo los estudiantes al momento de adquirir el conocimiento, esto mejoraría significativamente el aprendizaje y minimizaría las deficiencias que puedan acumular a lo largo del proceso de construcción de los objetos matemáticos.
- El Aprendizaje Basado en Problemas es una metodología de aprendizaje activa que utiliza estrategias de razonamiento para combinar y sintetizar datos/información en una o más hipótesis explicativas de un problema y que permite generar habilidades de razonamiento y pensamiento crítico. Además de permitir desarrollar contenidos de matemática, posibilita generar actividades donde el estudiante se responsabilice de su propio aprendizaje, esto tiene como principal efecto que cada actividad se convierta en aprendizaje significativo y por tanto permite que la construcción de nuevos objetos matemáticos se fundamente correctamente y con mayor facilidad.

Como conclusión general de este TFM, se puede afirmar que la base teórica existente acerca de la teoría APOE y la metodología ABP es lo suficientemente amplia y sólida como para permitir el desarrollo de unidades didácticas innovadoras que las pongan en práctica, como es el caso de la UD expuesta para explicar los contenidos de sucesiones numéricas para alumnos de 3º de la ESO.

## 5. Limitaciones y prospectiva

Entre los puntos débiles de esta propuesta, el principal es que no se implementó en el aula de clases, de forma que muchos de los aspectos presentados no han sido verificados con al menos un grupo particular de estudiantes. Esto podría llegar a limitar si la descomposición genética, las actividades o los objetivos están debidamente analizados, así como los recursos utilizados. Por lo que se sugiere que se analice la propuesta en otros futuros trabajos.

Con base en lo anterior y respecto a la prospectiva, la propuesta se enriquecería con los resultados de la aplicación en el aula, analizando los resultados y efectos que esta

pueda tener en el aprendizaje de los estudiantes. Además, la inclusión de situaciones donde se involucra el contexto de los estudiantes o en el contexto laboral les proporcionaría mayor interés sobre la temática. Por otro lado, es necesario considerar la inclusión de más sesiones donde se utilice software para visualizar mejor las propiedades o tendencias que presentan los términos. Un aspecto que podría incluirse para comprender o apropiarse mejor de lo que significa el término general de una sucesión, sería incluir al menos una sesión con algún lenguaje de programación donde el estudiante deberá crear la regla y elaborar el código que genere los términos de una sucesión mediante el programa.

## 6. Referencias bibliográficas

- Ahoraloentiendo, C. (27 de febrero de 2013). *Operaciones con sucesiones*. Youtube. Obtenido de: [https://www.youtube.com/watch?v=\\_pJ81k1TZZQ&feature=youtu.be](https://www.youtube.com/watch?v=_pJ81k1TZZQ&feature=youtu.be)
- Badillo, E., Trigueros, M., y Font, V. (2015). Capítulo 2: Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático: APOE y EOS. *Servicio de Publicaciones de La Universidad de La Laguna*, 31-51.
- Bolívar, A. (2016). Educar democráticamente para una ciudadanía activa. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social (RIEJS)*, 5(1), 69-87.
- Branda, L. A. (2013). 1. El abc del ABP—Lo esencial del aprendizaje basado en problemas. *Quaderns de la Fundació Dr. Antoni Esteve*, 27, 79-101.
- Bueno, P. M. (2018). Aprendizaje basado en problemas (ABP) y habilidades de pensamiento crítico ¿una relación vinculante? *Revista electrónica Interuniversitaria de formación del profesorado*, 21(2), 91-108.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Granada, España: Editorial de la Universidad de Granada.
- Cañadas, M. C., y Castro, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa*, 4, 13-24.
- Cañadas, M. C., Castro, E., y Castro, E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *La Gaceta de la RSME*, 15, 561-573.
- Castro, E. (2005). Configuraciones puntuales. Sistema de representación idóneo para las sucesiones de números naturales. *V CIBEM Conferências*, 251-264.
- Castro, E. (2013). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años) Universidad de Granada. (Tesis doctoral).
- Castro, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO* 54, 55-67.
- Codes, M., y González, A. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las ciencias*, 35 (1), 87-110.
- Dubinsky, E. (2000). De la investigación en Matemática teórica a la investigación en la Matemática Educativa: Un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1), 47-70.

- Dubinsky, E., y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level*. Springer, Dordrecht., 275-282.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2020). Estadísticas de la Educación. [educacionyfp.gob.es](http://www.educacionyfp.gob.es). Obtenido de <http://www.educacionyfp.gob.es/servicios-al-ciudadano/estadisticas.html>
- Giné, N., Parcerisa, A., Llena, A., París, E., y Quinquer, D. (2006). *Planificación y análisis de la practica educativa*. Barcelona: GRAÓ.
- Gómez, B. R. (2005). Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y educadores*, 8, 9-20.
- Gonzalez, J., Medina, P., Vilanova, S., y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de educación matemática, Número especial: Trabajos de Investigación y Propuestas de Enseñanza – 2010*.
- Hah Roh, K. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69(3), 217.
- Instituto Nacional de Evaluación Educativa (Diciembre de 2019). *PISA 2018 (I). Resultados en matemática y ciencias*. Educainee, Boletín de Educación, 57. Obtenido de [educacionyfp: https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:872f90d0-5fb3-4d07-ae71-6ad3e8d88724/bolet-n-educainee--57.pdf](https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:872f90d0-5fb3-4d07-ae71-6ad3e8d88724/bolet-n-educainee--57.pdf)
- Macías, R. U. (2010). Aprendizaje basado en problemas. *Unidad de formación Académica de Profesores*.
- MINED (2019). Ministerio de Educación de El Salvador. [mined.gob.sv](https://www.mined.gob.sv). Recuperado de <https://www.mined.gob.sv/estadisticas-educativas.html>
- Montes de Oca, R., & Machado, E. (2011). Estrategias docentes y métodos de enseñanza-aprendizaje en la Educación Superior. *Humanidades Médicas*, 11(3), 475-488.
- Mora, G. G. (2010). Aprendizaje basado en problemas como técnica didáctica para la enseñanza del tema de la recursividad. *InterSedes*, 11(20), 154-182.
- Navarro, L. P. (2006). Aprendizaje activo en el aula universitaria: el caso del aprendizaje basado en problemas. *Miscelánea Comillas. Revista de Ciencias Humanas y Sociales* 64 (124) , 173-196.
- Orden ECD/65/2015, (2015). *por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria y el bachillerato*. Boletín Oficial del Estado 25, pp. 1-18, de 29 de enero de 2015.
- Ortega, T., Pecharromán, C., y Sosa, P. (2011). La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 99-116.

- Osorio, J. C. (10 de Junio de 2014). Procesos de generalización que intervienen en el aprendizaje del alumno al hacer uso de sucesiones. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 75-83). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Obtenido de funes.uniandes.edu.c: <http://funes.uniandes.edu.co/4132/>
- Pivaral, A. (24 de febrero de 2018). Aronny Pivaral *Youtube*. Obtenido de Youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=tuAkF9sBEi8&feature=youtu.be>
- Poot-Delgado, C. A. (2013). Retos del aprendizaje basado en problemas. *Enseñanza e investigación en psicología*, 18(2), 307-314.
- Real Decreto 1105/2014 (2015). *por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado 3, pp. 169-546, 3 de enero de 2015.
- Rico, L., Castro, E., y Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. En Beltrán, J.; Autores, Más (Eds.), *Intervención psicopedagógica y currículum escolar* (pp. 153-182). Madrid: Pirámide. Obtenido de funes.uniandes.edu.co: <http://funes.uniandes.edu.co/470/>
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- Rodríguez, M. E. (2017). Currículum, educación y cultura en la formación docente del siglo XXI desde la complejidad. *Educación y Humanismo*, 19(33), 425-440.
- Sánchez, F. L. (2016). ABP como estrategia para desarrollar el pensamiento lógico matemático en alumnos de educación secundaria. *Sophia: Colección de Filosofía de la Educación*, 21, 209-224.
- Solaz-Portolés, J., López, V., y López, Á. G. (2011). Aprendizaje basado en problemas en la Educación Superior: una metodología necesaria en la formación del profesorado. *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*, 25, 177-186.
- Trigueros, M., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. *Un panorama de la TAD 10*, 77-116.
- Velásquez, F. D. (2012). *El estudio de las sucesiones y series desde la teoría del aprendizaje significativo*. Universidad Nacional de Colombia [Trabajo Fin de Grado].
- Villalobos, V., Ávila, J., Olivares, O., y Lizett, S. (2016). Aprendizaje basado en problemas en química y el pensamiento crítico en secundaria. *Revista mexicana de investigación educativa*, 21(69), 557-581.

# **ANEXOS**

## Anexo 1 Descomposición genética

1. Acciones de:

- Encontrar la figura siguiente agregando la cantidad de puntos según lo observado
- Encontrar la figura siguiente mediante la ampliación de la figura formada.

1b. Acciones de:

- Encerrar en la figura anterior en la actual en agregar
- . Encerrar en la figura anterior en la actual en ampliación

2ª. Interiorización de que se puede encontrar la figura siguiente observando la construcción.

2b. Interiorización de la formación de las figuras utilizando la anterior, reflexionando sobre la construcción.

3. Acciones de:

- Conteo de la cantidad de puntos de la figura formada-
- Asociación de la figura con el número de puntos de cada figura: 4, 7, 10...

4. Acciones de escritura de la cantidad de puntos utilizando la formación de la figura anterior: 4, 4+3, 7+3 ...

5. Interiorización del cálculo de la cantidad de puntos de la figura siguiente utilizando los puntos de la anterior

6. Acciones de:

- Acciones de asociación de cada configuración con la posición que ocupa dentro de todas las configuraciones al llevar un orden creciente de formación
- Acciones de asociación de nombre(letra) y posición a cada configuración, agregando subíndice a cada letra.
- Acciones de asignación del término con la cantidad de puntos que le corresponden

7. Interiorización de la relación del cardinal de puntos de cada figura con la notación de término  $a_1, a_2, a_3 \dots$  donde el sub índice indica la posición.



8. Encapsular la forma de describir cualquier término con la letra y el subíndice indicando la posición.

9. Acciones de

-Identificar el valor que le corresponde dado el término

-Acciones identificar escribir término dado el valor

10. Interiorizar la relación entre la configuración puntual, el cardinal y el término

11. Encapsular imagen, número y representación del término como un mismo objeto.

12. Acciones de escribir el cardinal de la configuración utilizando la notación de los términos anteriores en relación a 4:  $a_1$ ,  $a_2 = a_1 + k$ ,  $a_3 = a_2 + k \dots$

13. Reflexionar sobre el significado de la constante encontrada ( $k$ ), es decir la diferencia entre dos términos contiguos.

14. Acciones de

-Encontrar el término siguiente encontrando el valor de la constante  $k$

-Encontrar el término anterior dado el valor de  $k$

-Cálculo de la constante  $k$  de una sucesión dada

-Verificación mediante la constante  $k$ , si una secuencia numérica es o no sucesión, identificando el cambio en la posición y en el término (tabla).

15. Interiorización del significado de  $k$ , como el valor para la recurrencia e identificación si es o no una sucesión.

16. Encapsulación de la regla de formación de una sucesión mediante la verificación de la constante  $k$  como diferencia entre dos términos.

17. Acciones de

-Formar una sucesión dado el primer término y la constante.

-Identificar la ausencia de algún término dada una parte de la sucesión, utilizando el valor de  $k$

-Interpolación de un término entre dos contiguos al faltante.

-Cálculo de la constante  $k$ , cuando se desean interpolar uno o más términos de una sucesión.

-Calcular un término dado uno dos o más posiciones antes que el buscado, dado  $k$

-Calcular un término dado uno dos o más posiciones después que el buscado, dado  $k$

18. Interiorización del proceso de suma o resta reiterada de la constante  $k$  según el término buscado.

19. Acciones de

-Detallar la cantidad de  $k$  necesarias para formar un término determinado observando una tabla.

-Escribir los términos de la sucesión utilizando el primer término:  $a_1$ ,  $a_2 = a_1 + k$ ,  $a_3 = a_1 + k + k \dots$  dejando representada todas las sumas iteradas de  $k$

-Contar la cantidad de  $k$  e identificar su relación con la posición del término

20. Interiorizar la relación de la cantidad de  $k$  con la posición del término

21. Acciones de calcular el término de una determinada posición dado el inicial y la constante  $k$

22. Acciones de

-Escribir los términos cambiando la suma iterada por multiplicación relacionando el multiplicador con la posición

-Escribir un determinado dado término el inicial, la posición y la constante

-Describir cualquier término utilizando solo el primero y la constante (recursividad):

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times k$$

23. Acciones de calcular un término realizando la sustitución de  $n$  por la posición dada.

24. Interiorización de la relación de la cantidad de  $k$  con la posición quitando 1, diferenciando  $n$  como posición y la aplicación de la regla como el término.

25. Encapsular la forma de describir cualquier término con el de  $a_n$ , retomando que  $n$  se refiere a la posición del término, donde  $n$  puede ser tan grande como se desee.

26. Proceso de encontrar el término en la posición  $m$  dado el término general.

27. Proceso de encontrar la posición correspondiente al término  $a_k$ .
28. Interiorización de 26 y 27, donde para cada posición hay un único término y para un término hay una única posición (para este tipo de sucesiones, no se cumple en otros casos).
29. Encapsulación de la sucesión como una función en términos de una posición.
30. Interiorizar las acciones de evaluar  $a_n = f(n)$  en un proceso
31. Encapsulación de una sucesión como el término general que describe todos los términos implícitamente,  $f(n)$  en el objeto  $\{f(1), f(2), \dots\}$ .
33. Des encapsulación del objeto término general de una sucesión, para análisis de términos generales
- Transformar el término general en un equivalente en términos de posición actual.
34. Acciones de
- Asociar término y posición.
  - Describir si es sucesión aritmética basado en la unicidad de posición y término
35. Acciones de identificación de cardinalidad de términos de sucesiones, identificando la cantidad de posiciones dadas.
36. Realizar sumas y restas término a término de dos sucesiones con las mismas características y describir los términos de la nueva sucesión utilizando los términos originales.
37. Cálculo del nuevo término general, tomando en cuenta que es una sola posición.
38. Tematización del esquema de sucesión, con las operaciones suma y resta.

Tabla 22 Anexo 2 distribución de puntos por sesión

Sesión	1	2 y 3	4	5	6	7	8	9 y 10	11	12	13	14	15 y 16	17	18	Total
Métodos de evaluación utilizados	4 y 6	2, 4, 5 y 6	6	5 y 6	2, 3 y 6	2 y 6	6	3, 4, 5 y 6	6	2, 4, 5 y 6	2 y 6	3 y 6	2, 3, 5 y 6	4 y 6	7	
Anexo 6	0.2	0.4	0.2	0.2	0.2	0.4	0.4	0.4	0.2	0.2	0.2	0.4	0.4	0.2		4
Anexos 2, 3, 4 y 5	0.15	0.45	0	0.15	0.3	0.15		0.45		0.45	0.15	0.15	0.45	0.15		3
Examen															2	
Puntos por sesión	0.35	0.85	0.2	0.35	0.5	0.55	0.4	0.85	0.2	0.65	0.35	0.55	0.85	0.35	2	9

Fuente: elaboración propia.

Tabla 23 Anexo 3 autoevaluación

Categoría	4	3	2	1
<b>Mi compromiso con el trabajo grupal</b>	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo
<b>Mi actitud y apoyo a los compañeros</b>	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo
<b>La organización de mi tiempo y tareas</b>	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo
<b>Mi capacidad para comunicar mis ideas con respeto y aceptar otras ideas diferentes a las mías.</b>	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo

Fuente: elaboración propia.

Tabla 24 Anexo 4 coevaluación

Categoría	4	3	2	1
<b>Contribución Participación</b>	Propone ideas y sugerencias de mejora. Se esfuerza por alcanzar los objetivos del grupo.	Propone ideas y pero pocas veces realiza sugerencias de mejora. Se esfuerza por alcanzar los objetivos del grupo.	Propone ideas, pero no sugerencias de mejora. Contribuye en el alcance de los objetivos.	No propone ideas ni sugerencias de mejora, ni participa activamente en el alcance de los objetivos.
<b>Actitud</b>	Escucha y respeta la opinión de sus compañeros aunque no la comparta. Busca mantener la integración de grupo.	Escucha y respeta la opinión de sus compañeros aunque no la comparta, pero no promueve la integración del grupo.	Escucha la opinión de sus compañeros, pero no la valora. No le interesa la unión del grupo.	No escucha la opinión de sus compañeros e irrespeto sus ideas. No le interesa la unión del grupo.
<b>Responsabilidad</b>	Finaliza y entrega en orden las actividades asignadas en el tiempo establecido. Apoya a los compañeros con dificultades.	Finaliza y entrega en orden las actividades asignadas en el tiempo establecido. No apoya a los compañeros con dificultades.	Finaliza con retraso sus actividades y las entrega con poco orden.	No entrega las actividades asignadas.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 25 Anexo 5 evaluación del trabajo realizado en el grupo

Categoría	4	3	2	1
<b>Integración de los compañeros en el trabajo para conseguir los objetivos</b>	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo
<b>Capacidad del grupo para aprovechar las ideas, conocimientos y habilidades de los integrantes.</b>	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo
<b>Organización del tiempo y tareas de los integrantes</b>	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo
<b>Ambiente de trabajo en el grupo.</b>	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo

Fuente: elaboración propia.

Tabla 26 Anexo 6 Evaluación del docente sobre el trabajo en clase

Categoría	4	3	2	1
<b>Esfuerzo</b>	Se esfuerza por resolver los problemas propuestos, solicita apoyo a sus compañeros o al docente en caso de dificultades.	Se esfuerza por resolver los problemas propuestos, pero no solicita apoyo en caso de necesidad.	Resuelve solo la parte que comprende y no solicita apoyo en los puntos de dificultad.	No trabaja en clase
<b>Espíritu de cooperación</b>	Apoya a sus compañeros en caso de dificultad, explicando los conceptos o procesos.	Apoya a sus compañeros pero solo proporciona respuestas.	No apoya a sus compañeros aún si ellos lo solicitan.	Obstaculiza el trabajo de sus compañeros con distracciones
<b>Comunicación</b>	Expresa sus ideas y son acordes a la temática. Utiliza lenguaje matemático.	Expresa sus ideas y son acordes a la temática. Utiliza lenguaje matemático con dificultad.	Expresa sus ideas y son poco acordes a la temática. No utiliza lenguaje matemático.	Expresa ideas no acordes a la temática o no participa.
<b>Comprensión del contenido</b>	Siempre resuelve los problemas sin intervención del docente.	Resuelve todos los problemas con intervención del docente	Resuelve algunos problemas, sin intervención del docente.	Resuelve algunos problemas con intervención del docente.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 27 Anexo 7 evaluación del docente a la guía de trabajo realizada por los estudiantes

Categoría	4	3	2	1
<b>Explicación</b>	La explicación es detallada y clara.	La explicación es clara.	La explicación es un poco difícil de entender, pero incluye componentes críticos.	La explicación es difícil de entender y tiene varios componentes ausentes o no fue incluida.
<b>Actitud</b>	La explicación demuestra completo entendimiento del concepto matemático usado para resolver los problemas.	La explicación demuestra entendimiento sustancial del concepto matemático usado para resolver los problemas.	La explicación demuestra algún entendimiento del concepto matemático necesario para resolver los problemas.	La explicación demuestra un entendimiento muy limitado de los conceptos subyacentes necesarios para resolver problemas o no está escrita.
<b>Estrategia/Procedimientos</b>	Por lo general, usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas.	Por lo general, usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver problemas, pero no lo hace consistentemente.	Raramente usa una estrategia efectiva para resolver problemas.
<b>Razonamiento Matemático</b>	Usa razonamiento matemático complejo y refinado.	Usa razonamiento matemático efectivo.	Alguna evidencia de razonamiento matemático.	Poca evidencia de razonamiento matemático.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 28 Anexo 8 evaluación del estudiante

<p><b>Prueba final de la unidad de sucesiones</b></p> <p><b>Nombre:</b></p> <p>Indicaciones: lea con atención cada ejercicio, deje constancia de los procesos realizados, utilice lapicero para escribir la respuesta.</p> <p>1. Utilizando el término general <math>a_n = 2 + (n - 1) \times 5</math>.</p> <p>a. (1.5 puntos) Calcule el término en la posición 8.</p> <p>b. (1.5 puntos) Encuentre la posición que ocupa el término 27.</p> <p>2. (2 puntos) Si 6 es el tercer término de una sucesión y el valor de k es 2, encuentre el término en la posición 7.</p>
---

3. (1.5 puntos) Escriba los términos que hacen falta

4,     ,     ,     , 16  
  ↑                                  ↑  
n=2                                  n=6

4. (2 puntos) Encuentre el término general de la sucesión: 3, 10, 17, 24, ...

5. (1.5 puntos) Calcule la suma de los primeros 20 término de la sucesión  
 $2 \times n$

Fuente: elaboración propia.