UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA unir

Máster Universitario en Didáctica de la Matemática en Educación Infantil y Primaria.

Propuesta didáctica para trabajar el pensamiento algebraico en el Segundo Ciclo de Educación Infantil usando Regletas de Cuisenaire

Trabajo fin de máster presentado por: Mª Lourdes Anglada Pozo.

Titulación: Master en Didáctica de la Matemática en Educación Infantil y Primaria.

Modalidad: Propuesta de intervención educativa.

Director/a: D. Francisco Soler Flores

Antequera, septiembre 2017

RESUMEN

Iniciativas recientes apuestan por una enseñanza del álgebra desde Educación Infantil fomentando el modo algebraico de pensar y de actuar con objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas. Este movimiento se conoce como Early Algebra o Razonamiento Algebraico Elemental.

Existen claras evidencias de que los alumnos desde edades muy tempranas pueden pensar algebraicamente. Por ejemplo, pueden trabajar con patrones, desarrollar un aprendizaje relacional del signo igual, generalizar algunas propiedades aritméticas y establecer sencillas relaciones funcionales (Stephens, Blanton, Knuth, Isler, y Gardiner, 2015).

Desarrollar el pensamiento algebraico desde Educación Infantil no solo preparara a los alumnos para el álgebra en etapas posteriores, sobre todo, les ayuda desde muy pequeños a estructurar su pensamiento y a desarrollar su capacidad de razonar (Alsina, 2017)

El principal objetivo de este Trabajo Fin de Master ha sido desarrollar una propuesta de intervención con alumnos del segundo ciclo de Educación Infantil en la que se pretende trabajar el pensamiento algebraico sin pasar por la aritmética. Davydov (1972, en Mason, 2006) sostiene que los niños muy pequeños pueden trabajar con relaciones sin pasar por las cantidades y que estos poseen el poder de pensar y articular abstracciones y generalidades independientes de los números.

Las actividades que se proponen se basan en el uso de las Regletas de Cuisenaire, material que por su propia naturaleza permite establecer relaciones, pasar de lo particular a lo general, descubrir estructuras y utilizar un lenguaje algebraico. Como afirma Fernández Bravo (1990) "permite manejar el álgebra desde las primeras edades sin reservar este aprendizaje a los últimos años de escolarización"(p. 4).

Palabras clave: Pensamiento algebraico, Early-Algebra, Razonamiento algebraico elemental.

ABSTRACT

Recent initiatives support the learning of Algebra in Kindergarten in order to encourage algebraic reasoning in terms of interaction with objects , establishment of relations, and mathematical situations. This movement is also known as Early Algebra or Basic Algebraic Reasoning. There are clear evidences which demonstrate the capacity of developing this type of reasoning at a very young age. Therefore, pupils can work on patterns, carrying out related learnings with mathematical elements and concepts such as the equal sign, or even apply some arithmetic properties by forming simple funcional relations (Stephens, Blanton, Knuth, Isler and Gardiner, 2015). Developing algebraic reasoning in Kindergarten is not only a way to prepare young learners for future contents but also to structure their thinking and cognitive progress (Alsina 2017).

The main aim of this master degree final project is the generation of an intervention proposal with kindergarten pupils who work on algebraic reasoning without any arithmetic elements. Davydov (1972, in Mason, 2006) upholds the idea that very young kids can operate with relations in the absence of quantities because they already have the capacity of thinking and creating abstractions through basic concepts which are absolutely independent of the numbers and their representation. The activities here proposed, are based on the use of the Cuisenaire Rods, which by their nature, give the chance to establish relations from the particular to the general, discovering structures and using a proper algebraic language. In the words of Fernàndez Bravo (1990) , “ it promotes algebra from an early age without keeping it for later stages of schooling”.

Keywords : algebraic reasoning, Early Algebra, Basic Algebra Reasoning, Cuisenaire Rods.

ÍNDICE

RESUMEN **2**

ABSTRACT **2**

1. INTRODUCCIÓN **8**

1.1 Justificación y planteamiento del problema **8**

1.2 Objetivos **9**

1.2.1 Objetivo General 9

1.2.2 Objetivos específicos 10

2. MARCO TEÓRICO **10**

2.1 Álgebra y Pensamiento algebraico **10**

2.2 Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar **12**

2.3. Principios y estandares de la NCTM **15**

2.4 Álgebra vs Aritmética **17**

2.5 Componentes del álgebra en Educación Infantil **18**

2.5.1. Patrones 18

2.5.2. Situaciones matemáticas y estructuras 23

2.5.2.1. Equivalencias y uso del signo igual 23

2.5.2.1.1 Definición de igualdad 23

2.5.2.1.2. Principales errores en el uso del signo igual 24

2.5.2.1.3. La igualdad en E. Infantil 25

2.5.2.1.4. Balanzas 25

2.5.3. Pensamiento Funcional 27

2.6 Regletas de Cuisenaire **29**

2.6.1 Qué son las regletas de Cuisenaire 29

2.6.2 Un poco de historia 29

2.6.3 Interés didáctico de las regletas de Cuisenaire 30

3. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EDUCATIVA **31**

3.1 Marco legislativo **31**

3.2 Población **32**

3.3 Objetivos **32**

3.4. Metodología **32**

3.5 Actividades **35**

3.5.1 Patrones 35
3.5.2 Situaciones matemáticas y relaciones 42
3.5.2.1.Haciendo sándwiches 42
3.5.2.2. Balanzas 45
3.5.2.3.Uso del signo igual. 47
3.5.3 Relaciones funcionales 50
3.6 Recursos 53
3.7 Evaluación 54
4. CONCLUSIONES 54
5. LIMITACIONES Y PROSPECCIÓN 56
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 57

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Rasgos característicos de los niveles de razonamiento elemental. p.15
Tabla 2. Elementos de álgebra Pre K-2. p.16

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ejemplos de series progresivas gráficas. p.18
Figura 2. Ejemplo de serie simétrica. p.19
Figura 3. Ejemplo de patrones por repetición. P.19
Figura 4. Serie libre. p.19
Figura 5. Ejemplo de serie incompleta. p.21
Figura 6. Análisis y representación de patrones. p.21
Figura 7. Representación de la suma con regletas. p.24
Figura 8. Representación del equilibrado de la balanza. p.26
Figura 9. Representación del equilibrado de la balanza. p.26
Figura 10. Representación de "busca la bolsa que falta". p.26
Figura 11. Representación de "busca la bolsa que falta". p.27
Figura 12. Ejemplo actividad de relación funcional. p.27
Figura 13. Niños jugando a carreras en grupo. p.28
Figura 14. Tabla para la actividad de relación funcional. p.28

Figura 15. Regletas de Cuisenaire. p.29
Figura 16. Serie para reproducir. p.36
Figura 17. Serie creciente. p.37
Figura 18.Serie decreciente. p.37
Figura 19.Serie progresiva. p.38
Figura 20. Serie simétrica. p.38
Figura 21. Serie por aplicación p.39
Figura 22.Serie incompleta. p.41
Figura 23. Análisis de patrones. p.42
Figura 24. Sándwich de regletas. p.43
Figura 25. Sándwich de regletas incompleto. p.45
Figura 26. Representación de equilibrado de la balanza con regletas p.46
Figura 27. Adaptación de la balanza numérica para trabajar con regletas. p.47
Figura 28. Material complementario para trabajar equivalencias con regletas. p.48
Figura 29.Representación de equivalencia con regletas. p.49
Figura 30. Buscando el sumando que falta. p.51
Figura 31. Tabla de actividad 1 de relaciones funcionales. p.52
Figura 32. Adivina qué regleta se esconde dentro del cofre p.54

A mi gran Maestro, mi padre. In Memoriam.

"La Matemática es una actividad mental. Hacer matemáticas implica establecer relaciones".

(Fernández Bravo, 2006a, p.13)

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Justificación y planteamiento del problema

"El álgebra ha sido desde siempre el punto de inflexión en el que muchos alumnos deciden que "no se les dan las matemáticas", es la piedra con la que chocan al llegar a secundaria. (Mason,2006 p.589)". Investigaciones realizadas durante los años setenta y ochenta señalaron algunas de las dificultades que los estudiantes estaban encontrando con este tema (Kieran, 2004) , numerosos autores (Wagner & Kieran, 1989; Usiskin, 1988; Kieran, 1992; Bednarz, Kieran, & Lee, 1996; Kaput, 1998) dieron la voz de alarma y plantearon la necesidad de introducir el álgebra en el curriculum desde edades tempranas.

Tradicionalmente, por considerarla demasiado abstracta, el estudio del álgebra comenzaba una vez que los estudiantes habían adquirido una formación en aritmética, esto es, alrededor de los 12 años. A finales del siglo XX este enfoque empieza a cambiar, en 1989 en E.E.U.U. el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) establece el álgebra como un bloque de contenidos, para estudiantes en los grados K-12 , es decir, desde los 4 a los 17 años ; posteriormente, en el año 2000 reitera la necesidad de extender el estudio del álgebra a todos los niveles de enseñanza. Otras iniciativas recientes como las de la Common Core State Standars for Mathematics (CCSSM) (CCSSI 2010) llaman la atención sobre la necesidad de que la educación en el pensamiento algebraico comience en la Educación Infantil. Argumentan que al contrario de como se pensaba tradicionalmente, la aritmética no es anterior al álgebra. "La idea es que primero es la aritmética y más tarde el álgebra, pero la verdad no es tan simple. Algunas nociones algebraicas surgen de manera natural antes de que los niños aprendan aritmética" (Stephens et al., 2015 p. 93). Esta propuesta de introducción temprana del álgebra en el currículum de matemáticas es lo que se conoce como Early álgebra[1] o Razonamiento[2] algebraico elemental.

---

[1] Godino, Castro, Aké y Wheler (2012) traducen la expresión Early Algebra cono Razonamiento Algebraico Elemental

Como afirman Godino y Font (2003), ciertamente no se trata de impartir un curso de álgebra a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo del periodo que se inicia en la Educación Infantil hasta el Bachillerato . Lo que se pretende es fomentar el modo algebraico de pensar y de actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, que el álgebra sea una guía para la enseñanza de las matemáticas por comprensión (Kaput, 1995, Blanton y Kaput 2005; Tailor-Cox 2003; Molina, 2007

Para llevar a cabo esta propuesta lo primero que hay que hacer es ampliar la definición de álgebra y pensamiento algebraico. En el pasado la enseñanza del álgebra se reducía exclusivamente a la manipulación de símbolos; en cambio ahora, podríamos comenzar en Infantil enfocando su enseñanza en el desarrollo de ciertos conceptos clave y en el razonamiento algebraico.

También es importante establecer una relación clara entre el álgebra y la aritmética, debemos tener claro que el álgebra no solo es una generalización de la aritmética, sino que, el álgebra o el pensamiento algebraico subyace a la aritmética: "la aritmética necesita del pensamiento algebraico" (Mason et al., 2005, citado en Molina 2009, p.). La razón de estas afirmaciones es que la aritmética consiste en el aprendizaje de métodos (generalidades) para hacer cálculos aritméticos.

Teniendo en cuenta lo anterior y conscientes de que las prácticas matemáticas infantiles se caracterizan por una presencia considerable de actividades algebraicas, vamos a realizar una propuesta didáctica para trabajar el pensamiento algebraico en Educación Infantil previa al inicio de la aritmética. Vamos a basarnos en el uso de un material que permite esto, las regletas de Cuisenaire

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

El objetivo principal de este trabajo es elaborar una propuesta didáctica para trabajar el pensamiento algebraico con alumnos de segundo ciclo de Educación Infantil, utilizando las regletas de Cuisenaire.

[2] Aunque algunos autores distinguen "pensamiento algebraico" de "razonamiento algebraico", en este trabajo se consideran lo mismo.

1.2.2 Objetivos específicos

Objetivo 1: Cconcretar qué entendemos por álgebra y pensamiento algebraico.

Objetivo 2: Identificar qué contenidos algebraicos pueden trabajarse en Educación Infantil y cómo pueden integrarse con los contenidos del actual curriculum.

Objetivo 3: Descubrir la relación entre la Aritmética y el Álgebra.

Objetivo 4: Analizar qué recursos didácticos y cómo, pueden ayudar a los niños a desarrollar modos algebraicos de pensamiento, especialmente las regletas de Cuisenaire.

Objetivo 5: Diseñar actividades, usando el material de Cuisenaire, que permitan trabajar álgebra en el segundo ciclo de Educación Infantil.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Álgebra y Pensamiento algebraico

Uno de los problemas que encuentra la Early Algebra es la falta de acuerdo sobre lo que es exactamente el pensamiento algebraico. La introducción del álgebra desde Educación Infantil requiere precisar qué se entiende por álgebra, en la propuesta de Early Algebra se amplia la lista de elementos que forman parte del álgebra permitiendo así adelantar su enseñanza a los primeros niveles (Castro y Molina, 2007). Diversos autores han reflexionado acerca de los rasgos que caracterizan el álgebra escolar en esta nueva concepción; a continuación, hacemos un recorrido por algunas de sus principales aportaciones:

- Gattegno, (1970) Veía el álgebra como operaciones de tensión (combinar, distribuir, dividir, permutar) y, por consiguiente, ignorar los objetos (números), que están siendo tratados de manera generalizada y denotados por letras. Esto lo llevó a definir el álgebra como el "estudio de la dinámica de la mente".
- Love (1986, en Kieran y Filoy, 1989) da la siguiente definición: "Hoy en día el álgebra no es meramente "dar significado a los símbolos" sino otro nivel más allá´ de eso; que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos, por ejemplo, manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos. (p. 49)
- Usiskin (1988) Considera cuatro concepciones del álgebra: como aritmética generalizada, como conjunto de procedimientos utilizados para resolver ciertos

problemas, como el estudio de las relaciones entre las cantidades y el estudio de las estructuras.

- Para Kieran y Yagüe (1989) el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética. Aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones.
- Usiskin (1995) : El álgebra es el lenguaje de la generalización, es el lenguaje mediante el cual describimos patrones.
- Kieran (1996) clasificó el álgebra escolar de acuerdo con las actividades que normalmente realizan los estudiantes: actividades generacionales, actividades transformacionales y actividades globales de meta-nivel.
- Kaput (2000, citado en Castro, E., & Molina, M. 2007, p.70) señalan como principales componentes de la actividad algebraica: el estudio de funciones y relaciones; la generalización de patrones y relaciones; el manejo de lenguajes de modelización y control de fenómenos y el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones la transformación sintáctica guiada de formalismos.
- Godino y Font (2003) atribuyen al álgebra el estudio de los patrones numéricos y geométricos, la determinación de reglas generales y el reconocimiento de estructuras isomorfas.
- Stacey, Chick y Kendal (2004, citado en Leung, Clarke, Holton y Park, 2014) definen el álgebra como :"un modo de expresar generalidades; un estudio de manipulación de signos y resolución de ecuaciones; un estudio de funciones; un camino para resolver cierto tipo de problemas; y un sistema formal que implica la teoría de conjuntos, la lógica y las operaciones en entidades distintas de los números reales" (p. 2)
- Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005, en Godino et al. 2012) señalan asimismo que el razonamiento algebraico implica también:

    - Desarrollar un pensamiento relacional, es decir, apreciar relaciones numéricas entre los términos de una expresión y entre distintas expresiones o ecuaciones.
    - Transformar expresiones matemáticas, sin restringirse al cálculo de una respuesta concreta.

- Desarrollar un conocimiento sobre conjuntos de objetos matemáticos (números o variables), de operaciones entre ellos, de propiedades de estos objetos y sus operaciones (ej., asociativa, conmutativa, distributiva), y de las propiedades de relaciones cuantitativas (ej., transitividad e igualdad).

Parece haber consenso en que un rasgo característico de la actividad algebraica lo constituyen los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones donde se pasa de considerar casos particulares de objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, etc.), a clases o tipos de tales objetos (Carraher y Schliemann, 2007, citado en Godino et al. 2015). Otros autores relacionan el álgebra con el tratamiento de objetos de naturaleza indeterminada, como incógnitas, variables y parámetros.

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de la matemática. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento funcional está en el corazón de las matemáticas concebidas como la ciencia de los patrones y el orden, ya que los procesos de formalización y generalización son procesos centrales de la matemática.

De las anteriores descripciones se puede concluir que la consideración de una actividad como algebraica tiene contornos difusos. Por ello Godino et al. (2014) proponen un modelo para caracterizar el Razonamiento Algebraico Elemental en el que distinguen cuatro niveles de algebrización, teniendo en cuenta los objetos[3] y procesos que intervienen en la actividad matemática.

2.2 Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar

Para que una práctica matemática[4] pueda considerarse de naturaleza algebraica debe tener ciertas características; Godino, Aké , Gonzato y Wilhelmi (2014) establecen cuatro

---

3 Objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Sobre estos **objetos** actúa (sobre todo) **la faceta extensivo / intensivo** (ejemplar / tipo; singular/general; concreto / abstracto) (Godino y Font 2007)

4 Consideramos práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

niveles de algebrización de la actividad matemática . En el nivel 0 la actividad matemática no incorpora ningún rasgo algebraico, mientras que el nivel 3 es claramente algebraico, y los niveles 1 y 2, o niveles incipientes de algebrización, ponen en juego algunos objetos y procesos de índole algebraica. Concretamente, Godino *et al.* (2014) proponen los siguientes rasgos característicos de los niveles de algebrización:
En esta clasificación debemos tener en cuenta que una tarea no se engloba dentro de un nivel, "es el pensamiento que es algebraico, o no, no la tarea." (Mason, 1979) lo que permite asignar un nivel es la actividad realizada. Por ejemplo, si la tarea consiste en comprobar si la igualdad 23 + 15 = 15 + 23 puede resolverla haciendo los cálculos de las dos sumas y comprobando el resultado o bien afirmar que es cierta por la propiedad conmutativa de la suma; en el primer caso no habría actividad algebraica y en el segundo sí.
Estos niveles son los siguientes (Godino et al. , 2014; Aké 2017):

Nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico)

- Las prácticas matemáticas de nivel 0 son aquellas que no incluyen características algebraicas, se caracterizan por lo siguiente:
- Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual.
- Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares.
- En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.
- En el aspecto estructural no se reconocen propiedades y se utiliza al signo igual en su acepción de resultado de operaciones.

- **Nivel 1 de algebrización** (nivel incipiente de algebrización)

Las prácticas algebraicas de este nivel se caracterizan por:

- Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual.
- Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos conocidos, pero sin operar con dichos objetos.

- En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. Se reconoce el significado relacional del signo igual por lo que el concepto de equivalencia emerge.
- En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

Son actividades propias de este nivel la aplicación de propiedades de las operaciones con números naturales, expresadas con lenguaje numérico y natural y el uso de materializaciones simbólicas (__, …, [ ],) para cantidades desconocidas siempre y cuando la determinación del valor desconocido no se haga mediante la mera asignación del resultado de una operación sobre objetos particulares. Otra tarea de este nivel es la generalización del patrón que sigue una secuencia expresado con lenguaje natural.

- **Nivel 2 de algebrización** (nivel intermedio de algebrización)

Las actividades algebraicas de este nivel se caracterizan por:

- Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal.
- En tareas estructurales se comienzan a utilizar propiedades de las operaciones, se utiliza el significado relacional del signo igual.
- En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- Lo que hace distintivo al nivel 2 es el lenguaje, que, aunque puede ser de índole numérico, icónico, verbal, necesariamente comienza a familiarizarse a los niños con el uso de símbolos , sin embargo, los procedimientos utilizados no indican que se opera con la incógnita (las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$)

- **Nivel 3 de algebrización** (nivel consolidado de algebrización)

Este nivel puede ser descrito de la siguiente forma:

- Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia.

- Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo Ax±B= Cx±D , y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Para situar una actividad dentro de un nivel podemos utilizar tres criterios (Tabla 1):

1. La presencia de objetos algebraicos intensivos.
2. El tratamiento que se aplica a dichos objetos: operaciones o transformaciones basadas en propiedades estructurales.
3. Tipo de lenguajes usados.

Tabla 1: Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	No intervienen objetos intensivos. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con objetos extensivos	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos
1	En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales se reconocen los intensivos	En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos
2	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal
3	Intervienen indeterminadas o variables	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal ; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto

Godino et al. 2014, p. 16

2.3. Principios y estandares de la NCTM

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del NCTM, (1998, 2000) se propone el Álgebra como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad, con la particularidad de que el bloque de Álgebra se debe desarrollar, no sólo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde los primeros años de escolarización.

En el bloque de Álgebra, los programas educativos deben posibilitar a los alumnos desde Infantil hasta terminar Bachiller (K-12):

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Analizar cambios en distintos contextos.

En la tabla 2 se recogen los estándares para Pre-K-2 (3 a 8 años) establecidos por la NCTM (2003)

Tabla 2. Estándares de álgebra Pre-K-2.

ESTÁNDARES DE ÁLGEBRA PRE-K-2 NCTM	
Comprender patrones, relaciones y funciones	Organiza, clasifica y ordena objetos por tamaños, número, y otras propiedades. Reconoce, describe y continúa patrones como secuencias de sonidos, formas o series numéricas simples y pasar de una representación a otra. Analiza cómo se generan las series periódicas y las sucesiones.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas con símbolos apropiados.	Ilustrar principios generales y propiedades de las operaciones, como la conmutativa, usando números concretos. Usar representaciones concretas, gráficas y verbales para desarrollar el uso de signos tanto inventados como notaciones convencionales.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.	Modelizar situaciones que supongan la adición y sustración de números, usando objetos, dibujos y símbolos.
Analizar cambios en distintos contextos.	Describe cambios cualitativos, como el aumento de estatura de un alumno. Describe cambios cuantitativos, como los centímetros que ha crecido un alumno en un año.

NCTM (2003)

2.4 Álgebra vs Aritmética

Tradicionalmente, el estudio del álgebra comenzaba una vez que los estudiantes habían adquirido una formación en aritmética, esto es, alrededor de los 12 años. El álgebra era concebida como una generalización de la aritmética ya que esta formaliza las relaciones aritméticas. En efecto, el álgebra ofrece una forma de representar relaciones entre cantidades, describir propiedades de las operaciones y describir patrones. El álgebra proporciona reglas para manipular símbolos. En este sentido, la aritmética debía enseñarse antes que el álgebra.

Sin embargo, el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética, no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones (Greenes, 2003)

Autores como Hewitt(1999) o Manson (2006) proponen una visión diferente de la conexión entre álgebra y aritmética, afirmando que el álgebra o pensamiento algebraico subyace a la aritmética: "la aritmética necesita del pensamiento algebraico" (Mason, Graham y Johnston-Wilder , 2005, p.59)

Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow y Peled,. (2003, citado en Trujillo, , Castro y Molina , 2003) consideran en sus trabajos el álgebra como una aritmética de números y cantidades generalizada .

"En lugar de ver la aritmética como el requisito previo necesario para el álgebra como aritmética generalizada, es posible, y pedagógicamente efectivo, ver a ambas como surgiendo a la vez para el desarrollo de las mismas capacidades"(Mason, 2006, p. 58). Se trata de aprender aritmética utilizando el pensamiento algebraico para darle sentido, esto es, usando las capacidades asociadas a la generalización.

> Los estudiantes que operan en un marco aritmético de referencia tienden a no ver los aspectos relacionales de las operaciones; su foco está en el cálculo. Por lo tanto, se requiere un ajuste considerable en el desarrollo de un modo de pensar algebraico, que incluye, pero no se limita a:
>
> 1. Un enfoque en las relaciones y no meramente en el cálculo de una respuesta numérica;
> 2. Un enfoque en las operaciones así como sus inversas, y en la idea relacionada de hacer / deshacer;
> 3. Un enfoque en representar y resolver un problema en lugar de simplemente resolverlo;
> 4. Un enfoque en los números y las letras, en lugar de en los números solo. Esto incluye:
>
> (i) trabajar con letras que a veces pueden ser desconocidas, variables o parámetros;

(ii) aceptar expresiones literales no cerradas como respuestas;

(iii) comparar expresiones de equivalencia basadas en propiedades más que en la evaluación numérica;

5.Una reorientación del significado del signo igual. (Kieran 2014, pp. 140-141

2.5 Componentes del álgebra en Educación Infantil

Visto lo anterior, dentro de los componentes del álgebra en Educación Infantil vamos a seleccionar los siguientes: patrones; situaciones matemáticas y estructuras y relaciones funcionales. A continuación continuación se desarrollan cada uno de ellos concretando en qué consisten y cómo se pueden trabajar en Educación Infantil.

2.5.1. Patrones

En matemáticas el concepto de patrón es muy amplio, lo podemos encontrar en la misma base de su definición, de hecho la Matemática tiene sentido porque sus patrones nos permiten generalizar nuestra comprensión (Brownell, Chen y Ginet, 2014). Sin embargo, en este trabajo, al hablar de patrones hacemos referencia a los patrones seriales o secuencias lógicas. Copley (2000; citado en Notari-Syverson, y Sadler, 2008), patrones son disposiciones de objetos, números, formas, sonidos y movimientos caracterizados por repeticiones y secuencias. Según Fernández Bravo (2012, p. 203) "podemos entender por seriaciones las secuencias lógicas que se establecen mediante un criterio dado, o , de igualdad o diferencia de atributos".

Vamos a distinguir dos tipos básicos de patrones: los patrones de crecimiento y decrecimiento (ordenaciones) y los patrones por repetición.

Patrones de crecimiento o decrecimiento: se establece entre los elementos de un conjunto una relación de orden atendiendo a una variable: altura, grosor, tamaño, peso, longitud, duración...

Son casos particulares las series progresivas y las simétricas. En las progresivas alguno de los elementos crecen o decrecen, y alguno se mantiene constante como se puede observar en la figura 1.

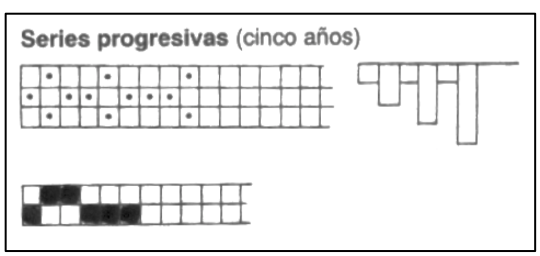


Figura 1. Ejemplos de series progresivas gráficas. Extraida de Boule (1995, p149).

Las simétricas están formadas por una serie creciente y una decreciente de forma simétrica (fig. 2):

Figura 2. Ejemplo de serie simétrica. Elaboración propia.

Patrones por repetición: Dos o más elementos o características se van repitiendo periódicamente. A la secuencia de elementos que se repiten se les llama patrón. En la figura 3 el patrón aparece sombreado. A este tipo de series se les llama de alternancia.

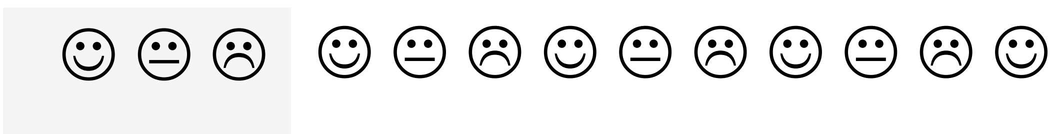


Figura 3. Ejemplo de patrones por repetición. Elaboración propia.

Fernández Bravo (2012) establece tres tipos de series atendiendo a la información que se tiene sobre su criterio de formación:

Series libres.: ante la consigna "sigue tú", el niño elige libremente un criterio y lo razona (fig. 4).

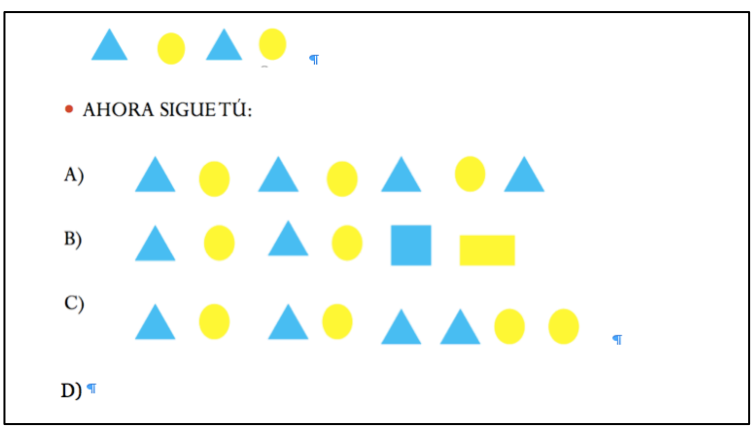


Figura 4. Series libres. Fernández Bravo, 2012, p.203

Al no tener el niño conocimiento del criterio que debe utilizarse, debe dar por válida toda acción siempre y cuando la pueda explicar; no se persigue que el alumno adivine el criterio, sino que razone el criterio.

Series por aplicación: El niño construye una serie a partir de un criterio dado con claridad y sin ambigüedad alguna.

Series por descubrimiento: El niño descubre el criterio y lo aplica. Es en este tipo de series en las que el niño debe llegar a una generalización (p.203).

El reconocimiento, la comparación y el análisis de patrones son componentes importantes del desarrollo intelectual de los alumnos. (NCTM, 2000). Buscar patrones abre la posibilidad de prever y de anticiparse a lo que va a suceder. Trabajar con patrones posibilita la generación de ideas y el desarrollo de procesos fundamentales matemáticos: la **recurrencia** aparece cuando buscan la estructura de repetición que tiene una serie; la **inducción** se da cuando se les pide que continúen una serie; la **conjeturación** aparece cuando anticipan cual será la última pieza que tendrán que colocar; y la **comunicación de ideas** y la **representación simbólica** les ayuda a darse cuenta que cuando dos cosas aparentemente diferentes se pueden representar de una misma manera es porque tienen alguna cosa en común (Torra, 2007; Alsina 2017).

Desde muy pequeños los niños aprenden ritmos, canciones repetitivas, retahilas , poemas o juegos con los dedos (fingerplays) en los que están desarrollando aspectos seriales. En su día a día los niños reconocen patrones de forma natural, aunque no sean capaces de identificarlos o nombrarlos como patrones (Copley, 2000). Usiskin (1995, citado en Molina, 2015) decía que “si haces algo una sola vez, probablemente no necesites el álgebra. Pero si haces un proceso repetidamente, el álgebra te facilita un lenguaje muy simple para lo que estás haciendo”(p. 2) este sería el caso de las rutinas: acciones que hacemos durante el día, días de la semana, horario escolar…
Algunas actividades que pueden realizar los alumnos de E. Infantil son las siguientes:

a. Reproducir una serie a partir de un modelo dado.
b. Ordenar elementos de forma creciente o decreciente atendiendo a un criterio dado.
c. Realizar una serie dada una consigna.

d. Continuar una serie ya empezada descubriendo el criterio seguido. En este caso, hay que tener en cuenta que la dificultad varía si el primer elemento que debe poner comienza el patrón o no.

e. Completar una serie, es decir, presentamos una serie en la que faltan elementos que hay que completar. Podemos ir haciéndola, que él vea como se hace y luego quitar las piezas o directamente mostrársela incompleta (fig.5).

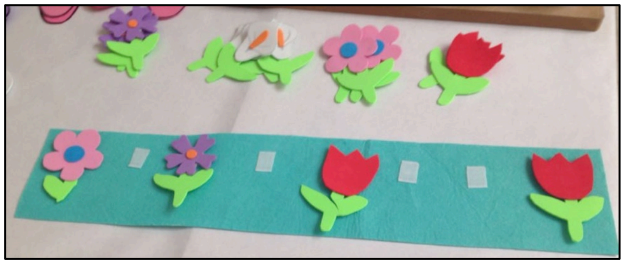


Figura 5. Ejemplo de serie incompleta. Elaboración propia.

f. Dadas diferentes series, pero que siguen un mismo patrón, por ejemplo, AABAAB… descubrir la existencia de este patrón y representarlo. (Araújo, Palhares y Giménez ,2008; Torra 2007; Alsina 2017). Series como de pié – agachado - de pié - agachado…; aplauso fuete - aplauso suave - aplauso fuerte suave…; torre de bloques azul-rojo-azul-rojo… En la figura 6 podemos ver un ejemplo de cómo unos niños de E. Infantil han clasificado distintos patrones y posteriormente los han representado. En este caso hay una importante actividad algebraica, situaciones distintas pueden atender a un mismo patrón.

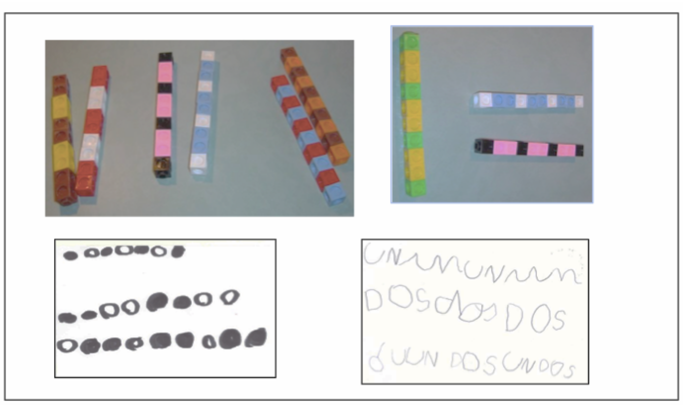


Fig 6. Análisis y representación de patrones . Extraido de Torra (2007, citado en Alsina 2017 p. 118)

g. Crear sus propias series. Una vez creadas es importante que sepa explicar al resto de la clase el criterio que ha seguido, bien utilizando el lenguaje natural o una representación gráfica.
h. Trabajar en grupo, de forma que un grupo proponga una serie y el otro deba descubrir cuál es el patrón seguido.
i. Por parejas, uno construye una serie y sin que el otro la vea; este debe explicar a su compañero verbalmente o mediante una representación el criterio seguido para que pueda reproducir la misma serie.

Atendiendo a los niveles de algebrización establecidos por Godino et al. (2014) las actividades d, e, f, h, i; por la actuación que requiere de los alumnos, se podría encontrar en un nivel 1 de algebrización.

Debemos proporcionar a los niños muchas oportunidades de descubrir y hablar acerca de patrones en matemáticas. Es importante provocar discusiones, hacerle preguntas adecuadas, debemos tratar de no tener ideas preconcebidas de lo que tienen que hacer y preveer que hay que dejarles tiempo para hacerlo, (Coopley, 2000; Torra, 2007). Con el trabajo en grupo, dialogando y negociando pueden alcanzar grados progresivos de generalización. Podemos animarlos haciendo preguntas del tipo:

- ¿Ves aquí una serie? Háblame sobre ella.
- ¿Qué es lo que viene a continuación?
- ¿Podrías hacer tú una serie con estos materiales?
- ¿Cómo podríamos acordarnos mañana de cómo era esta serie?¿podemos hacer un dibujo?

También hay que prestar atención a los materiales utilizados proporcionando gran variedad de materiales y situaciones para trabajar con patrones, es fundamental que los niños construyan series que sigan el mismo patrón con elementos diferentes, observando que las estructuras no dependen de los materiales o situaciones concretas. Es esencial seleccionar bien los materiales, por ejemplo, si queremos que el niño haga una serie atendiendo solo a una variable podemos restringir el material (Araújo, Palhares y Giménez ,2008).

Podemos trabajar patrones desde una variedad perceptiva y usando diferentes materiales, podemos hacer series: con sonidos (palmadas, palillos, instrumentos, sonidos variados en modulación, timbre y altura, ...); con posiciones del cuerpo; gestos de la cara; acciones (paso adelante, paso atrás,...); dibujando en una cuadrícula (coloreando); usando barajas de cartas; con materiales de uso cotidiano: lápices, gomas, cubiertos, juguetes...o materiales del entorno: piedras, hojas...; mediante recortes, estampaciones, mosaicos; con cubos encajables; regletas de Cuisenaire; bloques lógicos de Dienes; con el material Montessori (Cilindros, torre rosa, escalera marrón y varas de longitud) y a través de recursos TIC.

2.5.2. Situaciones matemáticas y estructuras

Según Kieran (1992) la manera tradicional de introducir la aritmética no ha sido eficaz en el desarrollo de las habilidades de los alumnos para conocer y usar la estructura matemática. Liebenberg, Sasman y Olivier (1999, en Castro y Molina, 2007) han observado que los alumnos de últimos cursos de Educación Primaria, incluso algunos de Educación Secundaria, no poseen la capacidad de juzgar la equivalencia entre expresiones numéricas sin la realización del cálculo de las operaciones implicadas, como consecuencia de su falta de conocimiento de la estructura aritmética (Castro y Molina, 2007). En Educación Infantil se pueden trabajar estructuras aritméticas importantes, por ejemplo, la propiedad conmutativa de la suma, el elemento neutro y otras como que añadir algo a un número y sustraerlo de otro deja la suma invariante o añadir el mismo número a ambas partes de la diferencia la deja invariante.

Una de la principales cuestiones para solventar este problema es que desde el principio el niño comprenda el carácter relacional del signo igual.

2.5.2.1. Equivalencias y uso del signo igual

2.5.2.1.1 Definición de igualdad

Decimos que A es igual a B , cuando entre A y B no hay ninguna diferencia. A es equivalente a B cuando A se relaciona con B mediante una relación de equivalencia, es decir, si definimos un criterio que da lugar a una partición de un conjunto en clases de equivalencia A y B pertenecen a la misma clase, por ejemplo, la relación “tener la misma longitud” es una relación de equivalencia.

Según esta definición decir, por ejemplo, que una regleta amarilla es igual una rosa junto a una blanca no sería correcto, podemos decir que son equivalentes puesto que corresponden a la misma longitud, también podríamos decir que son iguales en longitud.

En cambio, llegamos a la convención de usar el signo igual entre dos expresiones aritméticas o algebraicas equivalentes. Así podemos expresar: $2 + 3 = 5$; $2 + 3 = 1 + 4$;

2x + 1 =4; incluso, en el caso de trabajar con regletas, antes de usar los símbolos numéricos, podemos colores, como vemos en la figura 7, o utilizar las iniciales de los colores de las regletas: r + a = A[5]

Figura 7. Representación de la suma con regletas. Elaboración propia.

> Como todo símbolo matemático, el signo igual es la representación de un concepto o idea matemática. Se utiliza para indicar una relación de igualdad entre dos expresiones matemáticas que se escribe en a ambos lados de dicho signo. Normalmente , la igualdad de dichas expresiones no tienen por qué apreciarse a simple vista, al ser reprerentaciones diferentes de un mismo objeto matemático. (Castro y Molina, 2007 p. 71)

2.5.2.1.2. Principales errores en el uso del signo igual

Una de las principales fuentes de errores en el paso de la aritmética al álgebra, y que los estudiantes arrastran en niveles superiores, es la noción de igualdad y el uso del signo igual (Kieran 1981; Mevarech y Yitschak , 1983;). La dificultad radica en que en aritmética el signo igual anuncia un resultado, mientras que en álgebra el signo igual representa equivalencia.

La mayoría de los estudiantes interpretan el signo igual como un símbolo que significa: "da la respuesta", como una señal de hacer algo (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001 citado en Kieran 2014; Stephens et al., 2015)

Así nos encontramos errores como los siguientes:

- 7 + 3 = _____ + 4 suelen poner 10 en el hueco.
- Al preguntar si la expresión 57 +22 = 58 + 21 es correcta, responden que no, ya que 57 + 22 es 79, no 58. (Stephens et al., 2015)
- Al hacer una secuencia de cálculos, los estudiantes a menudo tratan el signo igual como una señal direccional de izquierda a derecha8, así, al representar enunciados como "Tengo 9 €, mi hermana me devuelve 3 € que me debía y me gasto 11 en un libro" lo hacen de la siguiente forma:

  9 + 3 = 12 – 11=

[5] Podemos llegar a la convención de simbolizar las regletas de la siguiente forma: blanca = b; roja = r; verde claro = v; rosa= R; amarillo= a; verde oscuro = V; negro = n; marrón = m; azul = A y naranja = N.

2.5.2.1.3. La igualdad en E. Infantil

"La igualdad es un concepto algebraico importante que los estudiantes deben encontrarse y comenzar a entender en los grados inferiores" (NCTM 2000, p.94). Si los niños experimentan y empiezan a entender la igualdad adecuadamente desde edades tempranas, podrán evitarse dificultades y errores. (Taylor-Cox, 2003)

> Los niños necesitan muchas experiencias con situaciones matemáticas y estructuras a través de representaciones y análisis de igualdades. Son muchas las situaciones matemáticas que hacen hincapié en la igualdad, sabemos que los niños a menudo dicen cosas como: "Ella tiene más que yo" o "No tengo suficiente, no es justo", en lugar de concentrarnos sólo en las implicaciones sociales de estas afirmaciones, podemos centrarnos en las matemáticas preguntando cuántos son necesarios para hacer las cantidades iguales o la situación justa, incorporamos el concepto de igualdad, haciendo que el pensamiento algebraico forme parte de la vida cotidiana (Tailor-Cox, 2003, p.17)

La manipulación y la experimentación nos permiten que los niños construyan desde el principio un concepto adecuado del signo igual. Intentaremos que el niño desde el principio interprete el signo "=" como "el mismo valor que". Una de las situaciones que nos permiten esto es el trabajo con balanzas y situaciones de equilibrio.

2.5.2.1.4. Balanzas

Las experiencias con balanzas de platillos nos permiten ajustar el punto de vista de lo que significa el signo igual y pensar en términos de equilibrio. En el modelo de equilibrio, el signo igual se toma para representar el pivote del equilibrio (Anthony y Burgues, 2014).

> Los niños pequeños necesitan usar balanzas y básculas. Necesitan usar los términos: iguales / no iguales, iguales / diferentes, más / menos, y equilibrados / desequilibrados. Es a través del diálogo auténtico que los niños construyen significados relacionados con el concepto de igualdad algebraica. Los niños pueden manipular las escalas con objetos cotidianos para mostrar la igualdad a través de la idea de equilibrio. Joey, un alumno de Prekindergartner explica: "Sabes que está equilibrado cuando es realmente recto." "Sí," agrega Robert, "no va a un lado, y eso es lo que es equilibrio" (Tailor-Cox, 2003 p. 17)

Debemos crear situaciones de aprendizaje en las que los niños reconozcan y definan la igualdad a través de esta idea de equilibrio. Podemos comenzar usando el balancín, subiendo parejas de niños les animaremos a establecer comparaciones preguntando ¿qué ocurre?, ¿qué pasará si cambio a los dos niños de sitio?. Después de estas experiencias, vamos nombrando parejas de alumnos y todos deben representar gráficamente qué creen que pasaría si se subieran en el balancín. Estableciendo un diálogo y respetando su propio vocabulario, pueden llegar a la conclusión de que cuando pesan lo mismo "está recto".

Podríamos pasar a jugar libremente con balanzas equilibrándolas con objetos de la clase, después haríamos preguntas adecuadas para provocar el diálogo y la discusión.

Pasaríamos a una fases siguiente en la que podríamos trabajar con sacos de colores, de forma que cada color tenga un peso distinto. Trabajarían por parejas con el objetivo de conseguir equilibrar la balanza, luego deberían representar gráficamente su experiencia. Después de estas representaciones libres podemos darles un modelo para rellenar usando solo puntos de colores que simbolicen los sacos como se muestra en la figura 8.

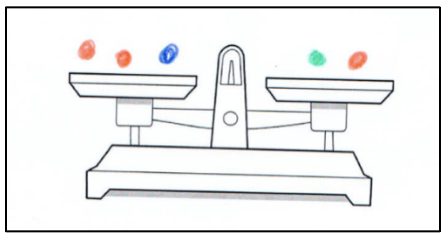


Figura 8 . Representación de equilibrado de balanza . Elaboración propia.

Pasando a un grado más de abstracción pedimos que lo represente prescindiendo del dibujo de la balanza (fig.9):

Figura 9, Representación del equilibrado de la balanza. Elaboración propia.

Podemos proponer un trabajo por grupos en el que un grupo da una representación gráfica y otro grupo debe comprobar con la balanza si es cierto o no.

Otra actividad consiste en "buscar la bolsa que falta", le damos al niño la balanza con bolsas en los dos platillos de forma que esté desequilibrada y debe buscar una bolsa que lo equilibre. Posteriormente sólo le daremos una representación como la de la figura 10 solo con puntos de colores:

Figura 10. Representación de "busca la bolsa que falta". Elaboración propia.

O bien, usando además los símbolos "+" e "=" como en la figura 11.

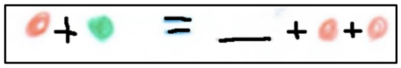


Figura 11. Representación de "busca la bolsa que falta". Elaboración propia.

2.5.3. Pensamiento Funcional

Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.

Uno de los enfoques para introducir el pensamiento algebraico en niveles elementales es el pensamiento funcional, esto es, descubrir como dos cantidades varían relacionándose una con otra. "Esta parte del álgebra recibe poca atención antes de la Educación Secundaria ya que se piensa que es propia de estos niveles, pero con una enseñanza adecuada los jóvenes estudiantes pueden reconocer y expresar relaciones funcionales". Stephens et al.(2015, p. 96). Usiskin (1999) dentro de este enfoque propone que los niños de infantil y primaria establezcan relaciones funcionales de forma intuitiva.

En la figura 6 podemos ver un ejemplo de actividad de pensamiento relacional, es una actividad diseñada para alumnos de 9 años; pero, al menos una parte, y usando material manipulativo, se podría adaptar a Educación Infantil.

Brady está organizando una fiesta de cumpleaños y quiere invitar a todos sus amigos. Quiere asegurarse de que tiene un asiento para todos.

Tiene mesas cuadradas. Puede sentar a 4 personas en una mesa cuadrada de esta manera:

Si se une a otra mesa cuadrada a la primera, puede sentar a 6 personas:

No. of tables	No. of people
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

1. Si Brady continúa uniendo mesas de esta forma: ¿Cuántas personas pueden sentarse en 3 mesas? ¿En 4 mesas? ¿En 5 mesas? Completa la tabla:.
2. ¿Ves algún patrón en la tabla? Descríbelo.
3. Encuentra una regla que defina la relación entre el número de mesas y el número de personas que pueden sentarse. Describe esta regla con palabras.
4. Describe esta relación usando variables, ¿qué representan las variables?
5. Si Brandy tiene 10 mesas, ¿cuánta gente puede sentarse? Di cómo llegas a la solución.

Figura 12. Ejemplo de actividad de pensamiento funcional. Extraido de Stephens et al.(2015, p. 95)

Podemos establecer numerosas situaciones s matemáticas en las que intervenga el pensamiento relacional:

- Repartos: Tenemos 20 caramelos ¿cómo podremos repartirlos entre 2 niños? ¿Y entre 3? ¿Y entre cuatro?...Podemos ir representando este reparto y podemos completar una tabla.
- Hacemos carreras con niños agrupados de dos en dos unidos por una pierna con un pañuelo. ¿Cuántos pañuelos necesitamos para unir a tres niños? ¿Y a cuatro? (figura 13)

Figura 13 . Niños jugando a carreras en grupo. Elaboración propia

Y completaríamos la siguiente tabla (figura 14):

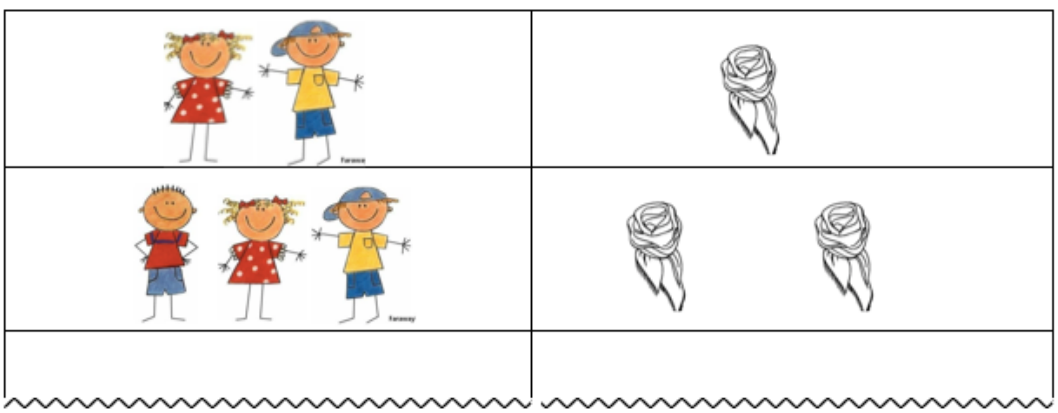


Figura 14. Tabla para actividad de relación funcional. Elaboración propia.

- Situaciones multiplicativas, por ejemplo: un niño → 2 orejas; dos niños → 4 orejas...

2.6 Regletas de Cuisenaire

2.6.1 Qué son las regletas de Cuisenaire

Las regletas de Cuisenaire , conocidas también como Números en Color[6] o simplemente regletas, es un material manipulativo empleado en el área de Matemáticas fundamentalmente en educación Infantil y Primaria, aunque puede ser empleado en otros niveles educativos. Este material consiste en una colección de prismas de colores de diferente longitud, que guardan entre sí relaciones algebraicas y de equivalencia.

Cada regleta es un prisma cuadrangular de un centímetro cuadrado de sección y de diferentes longitudes que van del centímetro a los diez centímetros, siendo las regletas de la misma longitud, del mismo color. En Educación Infantil podemos simbolizar las regletas utilizando manchas o círculos de colores, permitiendo la representación de relaciones.

Es importante observar que las regletas no tienen marcadas las unidades , considerando así el número en su totalidad, no como una adición de unidades.

Figura15. Regletas de Cuisenaire. Extraido de: goo.gl/rZhrnb

2.6.2 Un poco de historia

Los Números en Color fueron inventados en 1945 por el profesor Belga Georges Cuisenaire, él era consciente de que los niños no disfrutaban de las matemáticas y como profesor de música también observó que el aprendizaje matemático carecía de la experiencia sensorial que da el aprender música con un instrumento. Su idea fue proporcionar a los niños unas regletas de diferentes longitudes y colores para establecer propiedades numéricas" (Ollerton, Gregg y Williams, 2017, p. 4).

---

[6] Gattegno propuso cambiar este nombre del material, pero su inventor se negó, insistiendo en que se llamaran "números en color"

Los colores utilizados son intencionados, se ha tenido en cuenta que las regletas correspondientes a números con relación múltiplo- divisor tuviesen colores relacionados:

• Rojo, rosa y marrón (familia del rojo)
• Amarillo y naranja (colores cálidos)
• Verde claro, verde oscuro y azul (colores frios)
• El blanco es la afirmación de todos los colores. Equivale un número exacto de veces a todas las demás regletas.
• El negro es la negación del color, no equivale un número exacto de veces a ninguna otra regleta. (Fernández Bravo, 2012, p. 93).

Aunque Cuisenaire lo inventó, fue el matemático y pedagogo Caleb Gattegno al que le debemos el conocimiento de los "Números en color". A través de unos cursillos celebrados en Madrid en 1956 Caleb Gattegno en colaboración con el profesor español de Secundaria y Escuelas de Ingenieros, D. Pedro Puig Adam, dió a conocer el material Cuisenaire. Este se encarga de divulgar las posibilidades de este material y estudiar hasta dónde sería posible llevar las aplicaciones fuera de los primeros grados escolares, a los que, hasta entonces, se había dedicado Cuisenaire. Descubrió multitud de recursos matemáticos de este material, especialmente en el álgebra. El profesor Gattegno, a través del material, ayudó a poner a disposición del alumno: autonomía, observación y crítica.

Poco tiempo se necesitó para que los Números en Color se reconociesen como un material didáctico eficaz para la enseñanza de la matemática. En España debemos su difusión a los profesores P.Puig Adam y Concepción Sánchez.

2.6.3 Interés didáctico de las regletas de Cuisenaire

Este material permite establecer multitud de relaciones matemáticas, siendo el niño el único protagonista de este hacer. Podemos trabajar con este material todos los bloques de matemáticas, aunque se usa principalmente para aritmética, podemos trabajar contenidos de álgebra, medida, geometría y estadística y probabilidad.

En álgebra tiene un gran potencial, por ejemplo, una misma regleta pueda tomar distintos valores y pueda representar cosas muy diferentes, la regleta blanca puede representar, por ejemplo, "el queso" si hacemos "sándwiches" con regletas o puede ser un personaje del cuento" Los animales que se escaparon del Circo" (Fernández Bravo,2006b) en el que se trabaja el concepto de altura con animales de distinta altura, pudiendo representar a cada animal por una regleta... Este aspecto es sumamente importante ya que nos da una idea intuitiva de lo que es una variable. Además, en aritmética nos permitirá reconocer que el valor numérico de una regleta va a depender de a qué regleta le llamemos uno.

> Lo que tiene valor para el niño, ayudado por lo percibido y descubierto a través de los Números en Color, es crear en su mente nuevas estructuras que le permitan seguir trabajando y descubriendo nuevas relaciones sin tener ya el material delante.
>
> Si los alumnos se desorientan sin el material es que no captaron correctamente lo descubierto en la experiencia con las regletas (..)"(Fernández Bravo " , Págs. 20-21)

3. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EDUCATIVA

3.1 Marco legislativo

La norma jurídica con mayor rango que regula el actual sistema educativo español es la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (2014) que, en su entrada en vigor, no derogó a la Ley Orgánica de Educación (2006). A pesar de que son ambas leyes las que conjuntamente regulan la Educación Infantil en España, sustancialmente la LOMCE (2014) no ha modificado la etapa, continúa en vigor el REAL DECRETO 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación infantil, y, por ese mismo motivo, las comunidades autónomas no han modificado tampoco sus decretos del Curriculum.

En este RD (2006) se considera como una de las finalidades de esta etapa contribuir al desarrollo intelectual de los niños y es patente la importancia que concede la legislación a la comprensión de las relaciones lógicas y matemáticas que emanan de la realidad más próxima del niño.

Las directrices curriculares españolas no hacen alusión explícita a las relaciones algebraicas hasta la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, podemos, sin embargo, destacar en el RD (2006) los siguientes objetivos y contenidos para Educación Infantil relacionados con el pensamiento algebraico:

- Objetivos del área El Conocimiento del Entorno:

  1. Observar y explorar de forma activa su entorno, generando interpretaciones sobre algunas situaciones y hechos significativos y mostrando interés por su conocimiento.

  4. Iniciarse en las habilidades matemáticas, manipulando funcionalmente elementos y colecciones, identificando sus atributos y cualidades y estableciendo relaciones de agrupamientos, clasificación orden y cuantificación.

- Contenidos del área El Conocimiento del Entorno. Bloque1: Médio Físico: Elementos, Relaciones y Medida:
  Percepción de atributos y cualidades de objetos y materias. Interés por la clasificación de elementos y por explorar sus cualidades y grados. Uso contextualizado de los primeros números ordinales.

En los Decretos que ordenan las enseñanzas para la Educación Infantil de diversas CCAA se hace referencia explícita a objetivos y contenidos relacionados con los patrones, que constituyen una de las actividades algebraicas más significativas.

3.2 Población

La propuesta está dirigida alumnos del Segundo Ciclo de Educación Infantil, las actividades no están secuenciadas por edades puesto que la mayoría pueden adaptarse según el grupo de alumnos. Se ha intentado en cada una de las actividades indicar las variables que la pueden hacer más simples o aumentar su dificultad.

3.3 Objetivos

Los objetivos que se persiguen con esta propuesta son los siguientes:

Objetivo 1: Fomentar el modo algebraico de pensar y de actuar con objetos, estructuras y situaciones matemáticas.

Objetivos 2: Permitir al alumno descubrir, crear, expresar y representar patrones.

Objetivo 3: Que el alumno perciba los aspectos relacionales de las operaciones y sepa expresarlos adecuadamente.

Objetivo 4: Interpretar el signo igual como "el mismo valor que".

Objetivo 5: Trabajar álgebra previamente a la aritmética usando las regletas de Cuisenaire.

3.4. Metodología

La planificación y la gestión docente es un aspecto clave. La propuesta Early-Algebra considera que los profesores de todos los niveles deben promover el pensamiento algebraico, ayudando a los alumnos a prestar atención a las propiedades, relaciones y patrones involucrados en todo tipo de actividades matemáticas. El objetivo es fomentar el modo de pensar algebraico más que el desarrollo de las habilidades necesarias para lidiar con los procedimientos de esta rama de la materia. Es importante dotar a los niños de experiencias que les permitan descubrir estructuras matemáticas. Experiencias que ayuden a los niños a reconocer y articular estructuras matemáticas y relaciones. (Castro y Molina 2007)

> El profesor responsable de desarrollar el pensamiento matemático , permitirán que sus alumnos establezcan relaciones encaminará sus estrategias didácticas hacia la comprensión, desde la realidad mental y la evidencia lógica. Formulará preguntas que provoquen claros desafíos al pensamiento. Favorecerá creativamente la discusión y el diálogo dirigido a la investigación "qué pasaría si", "supongamos que " y pondrán todo momento a disposición del alumno mecanismos válidos de autocorrección. (Fernández Bravo, 2008, p. 14)

"Es importante proporcionar a los niños oportunidades para hablar acerca de o que han hecho y considerar y decir por qué lo han hecho y utilizar información obtenida de la experiencia para tomar decisiones" (Greenes, Grinsburg y Balbanz, 2004, p. 161). "Los profesores de Infantil que hablan con frecuencia con los niños acerca de conceptos matemáticos durante las actividades diarias ayudan a los niños a desenvolverse mejor en el conocimiento matemático" (Klibanoff el al., 2006 citado en Notari-Syverson y Sadler, p.8)

La comunicación centrada en las ideas matemáticas estimula a los niños a extender su pensamiento y fomenta el desarrollo de una comunidad de estudiantes de matemáticas. Además, la metacognición matemática -aprendiendo a pensar y expresar el pensamiento- es de importancia crítica en el contexto del aprendizaje matemático (Greenes el al. 2004).

Podemos incitarlos utilizando varios tipos de preguntas:

- Preguntas que pidan información sobre algo:

- Hablame sobre...
- ¿Me puedes decir algo más?
- ¿Por qué lo has hecho de esta manera?
- Preguntas que cuestionan sobre una reconsideración:
- ¿Lo harías de nuevo?
- ¿Lo quieres repetir?
- ¿Qué cambiarías de lo que has hecho?

- - Preguntas que especulan sobre algo:

- ¿Qué piensas que va a ocurrir a continuación?
- ¿Cómo crees que debe ser la siguiente pieza?

- - Preguntas que ayudan a detectar errores y ayudan a corregirlos:

- ¿Qué error encuentras en esta imagen?

- ¿Cómo lo podrías arreglar?
    - - Y preguntas orientadas a seguir e interpretar otra línea de razonamiento y se le hacen a otros compañeros
- ¿Qué piensas sobre esto?
- ¿Qué tienes pensado hacer?

Es interesante el uso de "Prompts"[7] que son un estímulo para seguir pensando, hablando y resolviendo. "Sí." "Dime más." "¿Y?" "¿Y?" "Dime lo que ves". Las indicaciones también incluyen asentimientos o gestos de apoyo.

Es importante dotar a los niños de herramientas para mejorar la participación y la discusión, los niños deben aprender a escuchar a sus compañeros , seguir y comentar razonamientos distintos de los suyos y formular preguntas. (Greenes, 2003)

Respecto al uso de las regletas de Cuisenaire podemos seguir las indicaciones del profesor Fernández Bravo (2008,pp. 7-8)

> El profesor debe exponer lo menos posible, haciendo que, mediante sus preguntas, el niño llegue a descubrir el concepto. Esas preguntas deben ser un desafío a su inteligencia (...).
>
> - Crear actividades donde se pueda emplear la autocorrección.
> - Cuando se hayan sacado conclusiones válidas se debe seguir trabajando matemáticamente sin el material.
> - Se obtendrá un mayor rendimiento del material si el profesor, padre, pedagogo, psicólogo conoce todas sus posibilidades, independientemente de la edad del niño con el que se esté trabajando.
> - No pasar a un nuevo concepto sin que se domine aquél que se estaba tratando.
> - Se ha creído, erróneamente, que no se podía utilizar el material más que con aquellos niños que lo habían usado en su iniciación matemática. Se puede empezar con el material a cualquier edad. De igual modo se hace un uso casi general en edades comprendidas entre los cuatro y ocho años y se va prescindiendo de él a medida que aumentan las edades. También esta postura la considero errónea: "La mano desasistida y el entendimiento por sí solos apenas tienen fuerza. Los efectos se producen por medio de instrumentos y auxilios, de los que el entendimiento no precisa menos que la mano" (F. Bacon).
> - Cada niño debe llegar a la asimilación del concepto por sus propios medios y no necesariamente todos a la vez.

[7] Se deja la palabra inglesa por no existir una traducción de la misma adecuada a este contexto.

● Favorecer la discusión entre los alumnos y entre éstos y el profesor. Esta discusión debe ser posterior a una reflexión individual que haya permitido la necesaria prioridad de respetar las iniciativas personales de cada educando.

3.5 Actividades

Lo primero que deben hacer los niños con las regletas es jugar con ellas libremente, en esta primera manipulación ya pueden ir descubriendo propiedades y estableciendo relaciones, además, se pueden generar situaciones de interés matemático que podremos aprovechar. Después de que manipulen libremente el material será el momento de realizar actividades para el reconocimiento de las regletas. En esta propuesta partimos de que los niños ya conocen las regletas y que han jugado suficientemente con ellas.

A continuación proponemos actividades que hemos agrupado según el contenido algebraico que se trabaja en ellas de la siguiente forma:

- **Patrones** (actividades 1 – 6): Se trabajan todos los tipos de patrones seriales, tanto los de crecimiento y decrecimiento como los patrones de repetición. Se trabajan las series libres, de aplicación y por descubrimiento. Se tiene muy en cuenta la importancia de la discusión en clase y del diálogo y de las distintas formas de representación.
- **Situaciones matemáticas y relaciones** (actividades 7-13): Trabajamos equivalencias y el uso del signo igual con el significado de equivalencia.
- **Relaciones funcionales** (actividades 14-15): Es importante que el niño observe la relación entre dos cantidades que varían, de manera que al cambiar el valor de una cambia el de la otra. Iniciamos al niño a la construcción e interpretación de tablas.

3.5.1 Patrones

<table>
<tr><th colspan="2">Actividad 1: Reproducir una serie a partir de un modelo dado</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Identificar que los elementos siguen un orden y establecer entre los elementos de la serie una relación respondiendo a la pregunta: ¿Cuál viene después?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desarrollo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mostramos al niño una serie hecha con regletas y le pedimos que realice una igual.</td></tr>
<tr><td>Edad</td><td>3 – 4 años</td></tr>
<tr><td>Agrupaciones</td><td>Pueden realizarla la primera vez entre todos los alumnos de la clase, luego pueden trabajar en pequeños grupos y luego individualmente.</td></tr>
</table>

Materiales	Regletas Cuisenaire

Variables

- Que la serie la tengan delante y puedan reproducirla debajo o a un lado.
- Que el modelo lo puedan ver pero no puedan construir la serie junto a ella, por ejemplo, que esté proyectada en la pizarra digital.
- El modelo esté al fondo de la clase de forma que para hacer la serie tengan que levantarse , pudiendo limitar el numero de veces que pueden levantarse (4 años)
- Trabajando en grupo y con la serie al fondo de la clase un alumno del grupo pueda ir y copiarla en un papel y luego la lleva a su grupo para reproducirla (4 años)
- Que deban hacer un dibujo para pedir a la profesora las regletas que van a necesitar (4 años)

Evaluación

Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Reproduce las series	Responde adecuadamente a la pregunta cuál es el siguiente	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Observaciones
Alumno 1				
Alumno 2				

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

Observaciones

Un caso particular es la actividad inspirada en la actividad "Tiras amontonadas de Boule (1995), esta consiste en que el profesor va poniendo regletas una encima de otra y va diciendo sus nombres y el niño, a continuación debe reproducirla (fig 16).

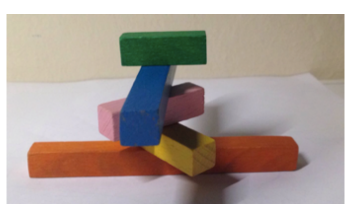


Figura 16. Serie para reproducir. Elaboración propia

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 2: Series crecientes y decrecientes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Establecer entre los elementos de un conjunto una relación de orden siguiendo un criterio dado y ordenarlos.
- Identificar la relación entre dos elementos de una serie identificando cuál viene después.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desarrollo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Le damos a los niños un conjunto de regletas y les pedimos que las ordenen siguiendo un criterio, de forma creciente o decreciente.</td></tr>
<tr><td>Edad</td><td>3 – 5 años</td></tr>
<tr><td>Agrupaciones</td><td>Pueden realizarla la primera vez entre todos los alumnos de la clase, luego pueden trabajar en pequeños grupos y luego individualmente.</td></tr>
<tr><td>Materiales</td><td>Regletas Cuisenaire</td></tr>
<tr><td colspan="2">Variables</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Que en vez de ordenar regletas, ordenen construcciones que deben ir haciendo con regletas(fig.17 y 18) (5 años).

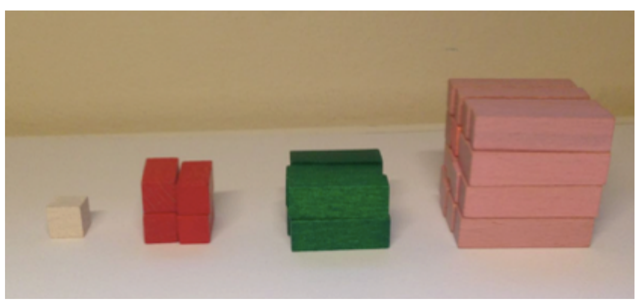



Figura 17. Serie creciente. Elaboración propia

Figura 18. Serie decreciente. Elaboración propia</td></tr>
</table>

Evaluación

Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Ordena regletas siguiendo el criterio dado	Responde adecuadament e a la pregunta cuál es el siguiente	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Participa cuando trabaja toda la clase.	Observaciones
Alumno 1					
Alumno 2					

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

Observaciones

Casos particulares son las series progresivas y las simétricas (fig. 19 y 20)

Figura 19. Serie progresiva. Elaboración propia.

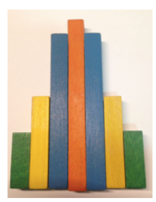


Figura 20. Serie simétrica. Elaboración propia.

Actividad 3: Series de alternancia por aplicación	
Objetivo	
Construir o continuar una serie de alternancia sabiendo cual es el patrón de repetición.	
Desarrollo	
Dado un patrón de repetición le pedimos al niño que construya o que siga una serie.	
Edad	3 – 5 años
Agrupaciones	Pueden realizarla la primera vez entre todos los alumnos de la clase, luego pueden trabajar en pequeños grupos y luego individualmente.
Materiales	Regletas Cuisenaire

Variables

- Que el patrón de repetición se refiera a una o más variables, por ejemplo con las regletas pueden intervenir: color, posición de las regletas y número de regletas. (Con 3 años solo el color y con 4 sólo una variable)
- La consigna se puede dar verbalmente, por ejemplo diciendo: "el patrón a seguir es primero amarilla, después verde claro y después rosa" o bien mediante etiquetas de colores como en la figura 21.

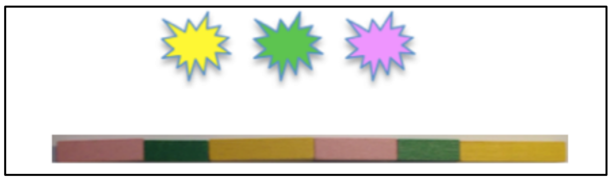


Figura 21. Serie por aplicación. Elaboración propia.

- Que los alumnos creen sus propias series, de forma que una vez creadas sepa explicar al resto de la clase el criterio que ha seguido, bien utilizando el lenguaje natural o una representación gráfica (4-5 años).

  Por parejas, uno construye una serie y sin que el otro la vea; este debe explicar a su compañero verbalmente o mediante una representación el criterio seguido para que pueda reproducir la misma serie (4-5 años).

Evaluación

Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Es capaz de realizar o continuar la serie dado un patrón	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Participa cuando trabaja toda la clase.	Observaciones
Alumno 1				
Alumno 2				

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

Actividad 4: Serie por descubrimiento

Objetivo

Descubrir el criterio que sigue una serie creciente o decreciente o el patrón de repetición de una serie de alternancia que se le da para continuarla.

Desarrollo

Mostramos al niño una serie hecha con regletas y le pedimos que la continúe, para lo que debe descubrir el criterio que sigue dicha serie.

Edad	3 – 5 años
Agrupaciones	Pueden trabajar el grupo clase, en pequeños grupos e individualmente.
Materiales	Regletas Cuisenaire

Variables

- En el caso de series de alternancia, que el patrón de repetición se refiera a una o más variables (4 años una sola variable)
- Que además de continuarla sean capaces de justificar por qué lo hacen.
- Trabajar en grupo, de forma que un grupo proponga una serie y el otro deba descubrir cuál es el patrón seguido.

Evaluación

Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Continua una serie creciente o decreciente descubriendo el criterio seguido.	Reconoce el patrón de una serie de alternancia.	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Participa cuando trabaja toda la clase.	Observaciones
Alumno 1					
Alumno 2					

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

Actividad 5: Buscar la regleta que falta

Objetivo

Identificar elementos que faltan en una serie incompleta y justificar por qué.

Desarrollo

Mostramos al niño una serie hecha con regletas en la que faltan elementos y le pedimos que encuentre los que faltan y diga por qué elige ese y no otro (fig.22).

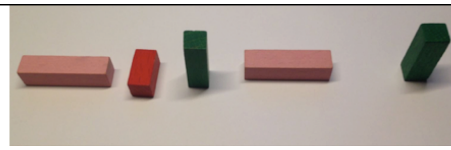


Figura 22. Serie incompleta. Elaboración propia

Edad	3 – 5 años
Agrupaciones	Pueden discutir cuál es el elemento que falta todo el grupo clase , trabajar en pequeños grupos o individualmente.
Materiales	Regletas Cuisenaire

Variables

- La dificultad estaría en el tipo de serie de que se trate; si es una ordenación o una serie de alternancia y el número de variables que intervienen.
- Que conozcan el criterio que se ha seguido o que deban descubrirlo.
- Que primero la vean completa, cierren los ojos y vuelvan a mirar.

Evaluación

Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Descubre qué regleta falta.	Argumenta su elección.	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Participa cuando trabaja toda la clase.	Observaciones
Alumno 1					
Alumno 2					

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

Actividad 6: Analizando patrones
Objetivo
Descubrir patrones generales que siguen series distintas y expresarlo verbal y gráficamente.
Desarrollo
Dadas diferentes series, pero que siguen un mismo patrón, por ejemplo, ABCABC... (fig 23) descubrir la existencia de este patrón y expresarlo verbalmente o representarlo.

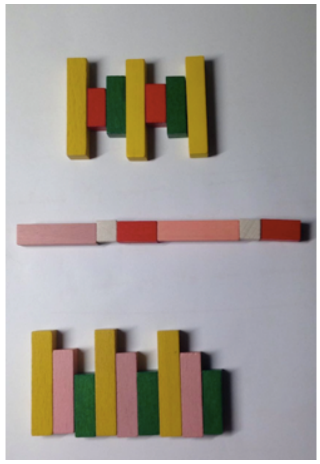


Fig 23. Análisis de patrones . Elaboración propia

Edad	5 años
Agrupaciones	Grupo clase.
Materiales	Regletas Cuisenaire

Variables

- El patrón, el más sencillo sería ABAB; luego podríamos dar patrones como: AABAAB; ABCABCABC...
- Pedir que construyan otra serie que siga el mismo patrón que las demás.
- Trabajar en pequeños grupos o de forma individual.

Evaluación

Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Pone atención e interés en la realización de la actividad	Expresa su opinión y respeta la de los demás.	Argumenta sus aportaciones.	Observaciones
Alumno 1				
Alumno 2				

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

3.5.2 Situaciones matemáticas y relaciones

3.5.2.1.Haciendo sándwiches

Estas actividades están inspiradas en una experiencia con alumnos de 5 años recogida por Ollerton et al. (2017), en esta durante el juego libre con regletas, una niña hace un sándwich con regletas y le pone nombre a cada regleta, de forma que la naranja es el pan, la blanca el queso.., como veremos a continuación esta idea tiene un gran potencial matemático.

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 7: Hacemos sándwiches.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Establecer equivalencias entre las regletas.
- Representar objetos y situaciones usando regletas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desarrollo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Les enseñamos una construcción como la de la figura 24 y le preguntamos qué ven, pueden decir cualquier cosa, si sale la palabra sándwich bien, si no orientaremos la actividad a lo que ellos propongan. Supongamos que le llamamos sándwich, entonces vamos sacando las regletas que lo forman y preguntamos qué ingredientes son:
Enseñando la naranja - ¿Cuál es este ingrediente?
Enseñando la blanca - ¿Y esta?...
Así, en asamblea, iremos poniendo nombre de un ingrediente a cada regleta.
Ahora les decimos que cada uno debe hacer un sándwich y nos debe explicar qué ingredientes ha usado.

Figura 24. “Sándwich de regletas”. Elaboración propia.</td></tr>
<tr><td>Edad</td><td>3 – 4 años</td></tr>
<tr><td>Agrupaciones</td><td>El grupo clase decide cómo llamar a cada regleta y después cada uno construye su sándwich individualmente y lo explica al resto.</td></tr>
<tr><td>Materiales</td><td>Regletas Cuisenaire</td></tr>
<tr><td colspan="2">Variables</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Que los ingredientes puedan “sobresalir del pan”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:</td></tr>
</table>

	Construye su sándwich estableciendo equivalencias entre regletas.	Asocia cada regleta con un objeto, una vez que se ha establecido la asociación entre toda la clase.	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Participa cuando trabaja toda la clase	Observaciones
Alumno 1					
Alumno 2					

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

Actividad 8: Recetas.	
Objetivo	
Representar gráficamente las regletas y las equivalencias entre ellas.	
Desarrollo	
Una vez que tienen cada uno su sándwich le planteamos el problema de qué harían para mañana acordarse y poder hacer el mismo que tienen ahora.	
Edad	4 años
Agrupaciones	Individual
Materiales	Regletas Cuisenaire
Variables	
- Podrían representarlo libremente o usando hojas de cuadros de 1cm de lado.	
Evaluación	
Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:	

	Representa gráficamente su sándwich en una hoja en blanco	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Observaciones
Alumno 1			
Alumno 2			

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

<table>
<tr><th colspan="2">Actividad 9: ¿Qué falta en el sándwich?.</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Establecer equivalencia entre regletas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desarrollo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Presentamos a los niños un sándwich incompleto como el de la figura 25 y les dejamos que discutan sobre qué ingredientes le pueden faltar. Después de discutirlo van comprobándolo.

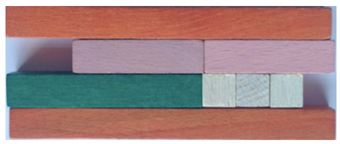


Figura 25. “Sándwich de regletas incompleto”. Elaboración propia.</td></tr>
<tr><td>Edad</td><td>4 años</td></tr>
<tr><td>Agrupaciones</td><td>Pequeño grupo e individual.</td></tr>
<tr><td>Materiales</td><td>Regletas Cuisenaire</td></tr>
<tr><td colspan="2">Variables</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Podríamos darle una representación gráfica, que estimen qué falta y que luego construyan y comprueben.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:
<table>
<tr><th></th><th>Completa el sándwich estableciendo equivalencias.</th><th>Pone atención e interés en la realización de la actividad.</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>Alumno 1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Alumno 2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.</td></tr>
</table>

3.5.2.2. Balanzas

Suponemos que el niño ha jugado previamente con las balanzas y ha realizado actividades de equilibrado con otros materiales.

<table>
<tr><th colspan="2">Actividad 10: Pesando regletas.</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Reconocer equivalencias mediante el equilibrado de una balanza, reconociendo el sentido del signo igual como equivalencia.
- Representar equivalencias entre regletas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desarrollo</td></tr>
<tr><td colspan="2">La actividad consiste en equilibrar la balanza utilizando regletas y una vez equilibrada la balanza se les pide que cuenten el resultado obtenido y que lo representen (fig. 26).

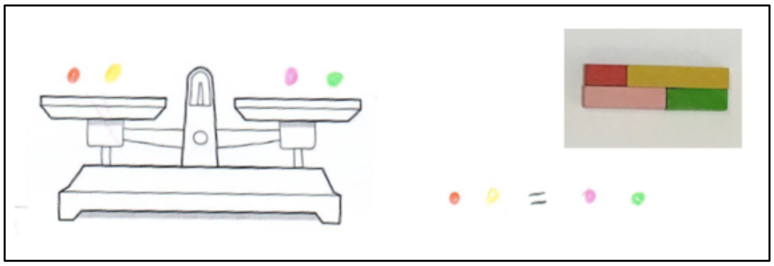



Figura 26. Representación de equilibrado de balanza con regletas. Elaboración propia.</td></tr>
<tr><td>Edad</td><td>4-5 años</td></tr>
<tr><td>Agrupaciones</td><td>Pequeños grupos e individual.</td></tr>
<tr><td>Materiales</td><td>Regletas Cuisenaire
Balanza de platillos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Variables</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Hacer la actividad contraria, dada la representación, que la comprueben utilizando las regletas y la balanza.
- Podemos proponer un trabajo por grupos en el que un grupo da una representación gráfica y otro grupo debe comprobar con la balanza si es cierta o no.
- Otra actividad consiste en “buscar la regleta que falta”, le damos al niño la balanza con regletas en los dos platillos de forma que esté desequilibrada y debe buscar una regleta que lo equilibre. figura 10 solo con puntos de colores:
- Una vez que han manipulado suficientemente con la balanza de platillos, podríamos adaptar la balanza numérica pegando puntos de colores en los números correspondientes (figura 27) y trabajar de la misma forma que lo hemos hecho con la balanza de platillos</td></tr>
</table>

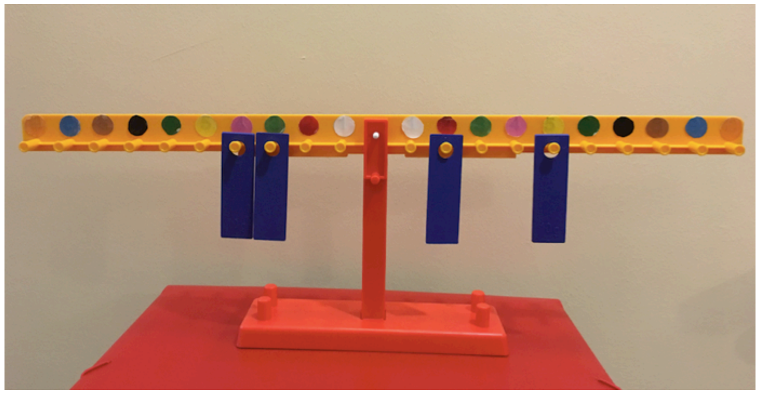


Figura 27. Adaptación de la balanza numérica para trabajar con regletas. Elaboración propia

Evaluación
Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Establece equivalencias entre regletas mediante el uso de la balanza.	Representa las equivalencias.	Comunica sus experiencias.	Observaciones
Alumno 1				
Alumno 2				

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

3.5.2.3.Uso del signo igual.

Actividad 11: Juntando regletas	
Objetivos	
- Establecer equivalencia entre regletas.	
Desarrollo	
Tomando dos regletas las unimos una detrás de otra y consensuamos con los niños el nombre de esa acción, supongamos que le llamemos "juntar". Juntamos dos regletas y buscamos una equivalente a esas dos. A continuación, podemos representar esto con puntos de colores.	
Edad	4 años
Agrupaciones	Gran grupos e individual.
Materiales	Regletas Cuisenaire.

Variables

- Podemos dar una regleta y pedir que encuentren dos regletas que al juntarlas equivalgan a la primera.
- Dadas dos regletas preguntamos qué regleta junto a la más pequeña equivalen a la mayor, haremos preguntas como:
    - Qué regleta juntarías con la rosa para obtener la negra.
    - Qué regleta juntarías con la amarilla para obtener la marrón.
    - Qué regleta juntarías con la roja para obtener la roja.
    - Qué regleta juntarías con la blanca y la rosa para obtener la negra.

Evaluación

Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Establece equivalencia “juntando” regletas	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Observaciones
Alumno 1			
Alumno 2			

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

Observaciones

El material de la figura 28 complementa este trabajo con las regletas.

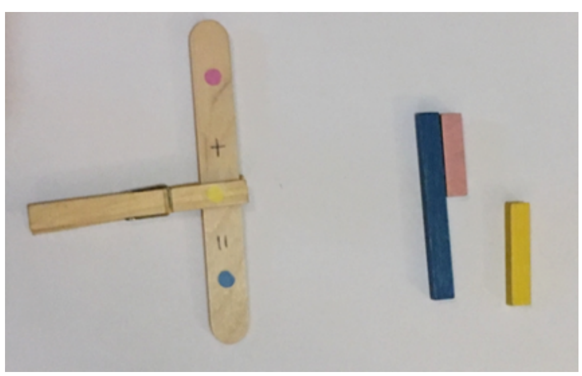


Figura 28.Material complentario para trabajar equivalencias con regletas. Elaboración propia

Actividad 12: Representamos equivalencias	
Objetivo	
Representar equivalencias entre una regleta y dos o más regletas .	
Desarrollo	
Sobre el dibujo de una regleta deben dibujar puntos de colores de dos o más regletas de forma que equivalgan a la primera (fig. 29).  *Figura 29. Representación de equivalencia con regletas. Elaboración propia* A continuación damos la representación y pedimos que comprueben la equivalencia usando regletas.	
Edad	4-5 años
Agrupaciones	Individual
Materiales	Regletas Cuisenaire
Evaluación	
Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:	

	Representa una equivalencia entre una regleta y dos o más regletas.	Dada la representación comprueba la equivalencia usando regletas.	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Observaciones
Alumno 1				
Alumno 2				

Actividad 13: Encontramos la regleta que falta.
Objetivo
Encontrar un elemento desconocido en una igualdad argumentando por qué se elige ese y no otro.
Desarrollo
Le presentamos una equivalencia entre regletas, mediante una representación gráfica, en la que falta una regleta y deben buscarla (fig 30).

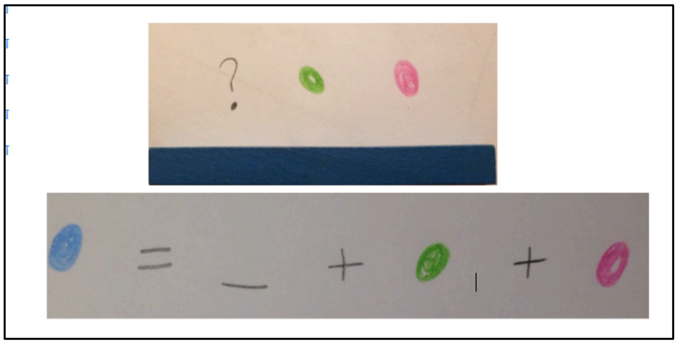


Figura 30. Buscando el sumando que falta. Elaboración propia

Edad	4 – 5 años
Agrupaciones	Individual
Materiales	Regletas Cuisenaire

Variables

- Usar o no los símbolos + e =.

Evaluación

Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Encuentra el elemento de la igualdad que falta.	Argumenta por qué ha elegido ese elemento.	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Observaciones
Alumno 1				
Alumno 2				

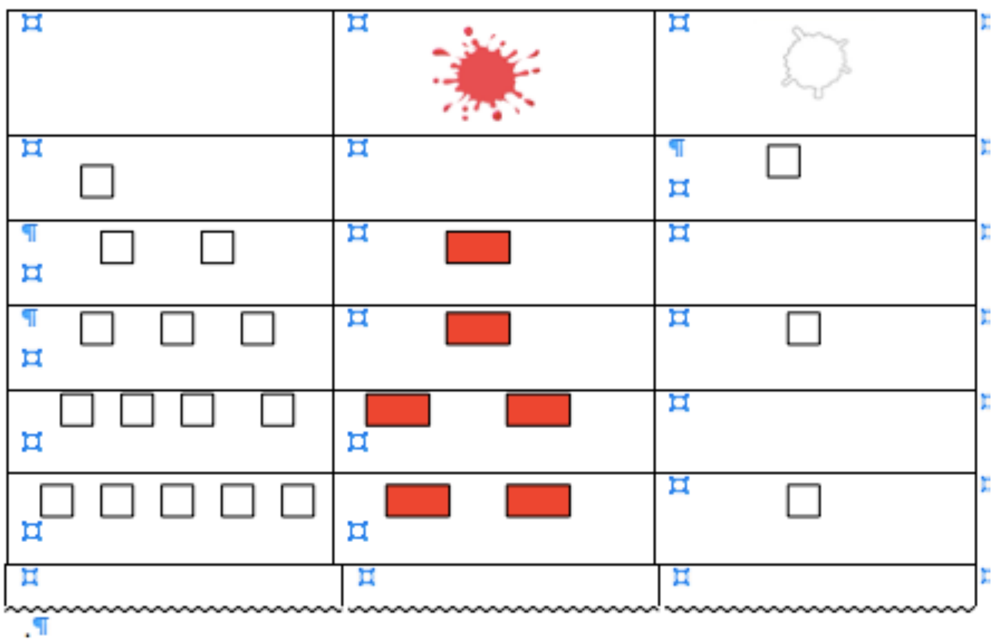
Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

3.5.3 Relaciones funcionales

Actividad 14: El banquero

Objetivos

- Descubrir una relación funcional entre dos variables observando como varía una al variar la otra.
- Resolver un problema con todos sus compañeros de clase aportando ideas y argumentándolas.
- Completar una tabla que recoja esta relación
-

Desarrollo
Los niños han observado previamente la equivalencia entre dos regletas blancas y una roja. El juego consiste en lo siguiente: Un niño es "el banquero" y tiene regletas rojas, el resto va tirando por turnos un dado numerado del uno al tres y coge tantas regletas blancas como indique el dado y cada vez que tenga dos blancas debe ir al banquero a cambiarlas por una roja. El juego se repite varias veces. Pasaremos a trabajar con toda la clase haciendo preguntas: - Si tengo dos regletas blancas ¿cuántas rojas puedo conseguir? ¿me sobra alguna blanca? - Si tengo tres regletas blancas ¿cuántas rojas puedo conseguir? ¿me sobra alguna blanca?... Después de esta actividad, pondríamos en el suelo una tabla como la que aparece en la figura 31 que iran completando entre todos usando las mismas regletas.  *Figura 31. Tabla de la actividad 1 de relaciones funcionales. Inspirada en Stephens et al (2015, p.97)* Observando esta tabla los niños pueden ir sacando conclusiones como: - "sobra una, ninguna, una, ninguna..." - "si con blancas puedo hacer parejas no sobra"...

Edad	5 años
Agrupaciones	Grupo clase y pequeño grupo.
Materiales	Regletas Cuisenaire Dado con números del 1 al 3
Variables	
- Damos la tabla con algunas celdas vacías y pedimos que la completen	
Evaluación	

Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Descubre una relación funcional entre dos cantidades:. regleta fuera del cofre y regleta dentro del cofre.	Completa una tabla que recoge esta relación.	Participa cuando trabaja toda la clase y aporta ideas argumentándolas.	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Observaciones
Alumno 1					
Alumno 2					

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

Actividad 15: ¿Qué regleta hay dentro del cofre?
Objetivos
- Descubrir una relación funcional entre dos variables observando como varía una al variar la otra. - Resolver un problema con todos sus compañeros de clase aportando ideas y argumentándolas. - Completar una tabla que recoja esta relación.
Desarrollo
. Le planteamos a los niños el siguiente reto: Dentro del cofre siempre hay una regleta mayor que la de fuera y que se diferencia con ella en dos unidades (fig. 32). Buscarían la regleta correspondiente variando la de fuera del cofre y comprobarían. A continuación podrán hacer una tabla que refleje esta relación funcional.

Figura 32. Adivina qué regleta hay dentro del cofre

Edad	5 años
Agrupaciones	Gran grupo e individual.
Materiales	Regletas Cuisenaire Cofre

Variables. Establecer otro criterio, por ejemplo, que la regleta de fuera y la de dentro siempre equivalen a la naranja.

- Una variante sería decirle que la de fuera junto a la de dentro siempre equivalen, por ejemplo, a la naranja.

Evaluación

Evaluaríamos a través de la observación y registraríamos los resultados en una rejilla como la siguiente:

	Descubre una relación funcional entre dos cantidades:. regleta fuera del cofre y regleta dentro del cofre.	Completa una tabla que recoge esta relación.	Participa cuando trabaja toda la clase y aporta ideas argumentándolas.	Pone atención e interés en la realización de la actividad.	Observaciones
Alumno 1					
Alumno 2					

Si cambian algunas variables puede que sea necesario revisar la rejilla.

3.6 Recursos

Los recursos necesarios para llevar a cabo esta propuesta son: regletas de Cuisenaire, balanzas de platillos, balanza numérica, dado del 1 al 3 y cofre pequeño o similar (puede servir una taza).

3.7 Evaluación

La evaluación es una parte fundamental de la propuesta didáctica ya que nos permite ir rediseñando las actividades y adaptarnos a los intereses y necesidades del niño.

Debemos hacer una doble evaluación, por un lado evaluaremos el aprendizaje de los alumnos y por otro el proceso de enseñanza.

Para evaluar el aprendizaje utilizaremos la observación y llevaremos un registro en las rejillas que se han incluido para cada actividad. En cada actividad se evalúa si se alcanzan los objetivos didácticos haciendo especial hincapié el grado de participación, la capacidad de dar su opinión y oir la de los dem

4. CONCLUSIONES

Tras realizar este trabajo destacaría el papel fundamental de la planificación y gestión del docente como promotor del pensamiento algebraico, es crucial que dote a los niños de experiencias que les permitan descubrir y utilizar estructuras matemáticas y relaciones. Haciendo preguntas adecuadas debe conseguir que los niños hablen acercan de lo que hacen, fomentando el diálogo, la participación y la discusión.

"El álgebra en los primeros años establece el terreno necesario para el aprendizaje continuo y futuro de las matemáticas" (Taylor-cox, 2003, p.14) y la propia naturaleza del razonamiento algebraico y los conceptos algebraicos mejora el aprendizaje de otros bloques de contenidos de la matemática, especialmente números y operaciones, medida y probabilidad, y también contribuyen a una mejor comprensión en otras áreas.

Las actividades se han diseñado teniendo en cuesta experiencias recogidas por numerosos autores y teniendo en cuenta las características propias de los alumnos de Educación Infantil, se han propuesto de forma general de forma que se puedan adaptar a los distintos niveles por lo que no se indican en las actividades a qué edad van dirigidas. La edad a la que planteemos una actividad depende también de la experiencia previa que el niño tiene con el material, así, actividades como la actividad 7 que en principio está prevista para 3 o 4 años deberá realizarse con niños de más edad si estos no han tenido experiencias previas con las regletas.

Para evaluar nuestra propuesta, a continuación, vamos a ir analizando cada uno de los objetivos específicos propuestos:

- Objetivo 1: Concretar qué entendemos por álgebra y pensamiento algebraico.

Trabajar el pensamiento algebraico a edades tempranas requiere un replanteamiento de qué entendemos por álgebra. Se han recogido aportaciones de distintos autores relevantes desde los años setenta a la actualidad, llegando a una idea clara de lo que se entiende por álgebra. También es muy interesante el estudio realizado de los niveles de algebrización de las actividades matemáticas escolares.

- Objetivo 2: Identificar qué contenidos algebraicos pueden trabajarse en Educación Infantil y cómo pueden integrarse con los contenidos del actual curriculum.

En este sentido considero que han quedado bastante claros los componentes del álgebra y cuales se pueden trabajar en Educación Infantil.

- Objetivo 3: Descubrir la relación entre la Aritmética y el Álgebra.

En este objetivo se pretendía confirmar que se puede trabajar álgebra sin recurrir a la aritmética, es decir, el álgebra es más que una generalización de la aritmética, que para hacer aritmética previamente debemos hacer álgebra.

Objetivos 4 y 5 : Analizar qué recursos didácticos y cómo, pueden ayudar a los niños a desarrollar modos algebraicos de pensamiento, especialmente las regletas de Cuisenaire y Diseñar actividades, usando el material de Cuisenaire, que permitan trabajar álgebra en el segundo ciclo de Educación Infantil.

Estos dos objetivos se han alcanzado plenamente; las balanzas constituyen un material esencial para la comprensión correcta del signo de igualdad y el estudio de equivalencias, en las regletas he encontrado un material polivalente que por su misma estructura tiene carácter algebraico, este material, siempre y cuando se use adecuadamente, permite al niño establecer relaciones, generar ideas y como pretendíamos, trabajar álgebra previamente a la aritmética e incluso al concepto de número.

Al considerarse conseguidos estos objetivos , se considera que el objetivo general: “elaborar una propuesta didáctica para trabajar el pensamiento algebraico con alumnos de segundo ciclo de Educación Infantil, utilizando las regletas de Cuisenaire” es un objetivo cumplido. Sin embargo, el no haberse llevado a la práctica limita el asegurar su viabilidad, aunque las bases teóricas de su metodología y propuestas de actividades esté justificada.

5. LIMITACIONES Y PROSPECCIÓN

La primera limitación para realizar este trabajo era dejar claro lo que se entiende por álgebra y qué contenidos se podían trabajar en educación Infantil; aunque creo que esto ha quedado claro en el trabajo, no siempre lo he tenido así de claro puesto que había algunas discrepancias entre distintos autores sobre cuando considerar que un contenido es o no algebraico.

La forma de trabajar álgebra en Educación Infantil es mediante la manipulación, esto hace que la elección de los materiales a utilizar sea tan importante, aunque fue el primer reto, rápidamente encontramos en las regletas Cuisenaire que es un material adecuado.

Establecer la edad adecuada de los alumnos para cada actividad ha supuesto una dificultad ya que están desarrolladas de forma general y se pueden ntroducir bastantes variables en ellas.

Un problema bastante serio a la hora de llevar a la práctica esta propuesta, es la escasa formación en este tema de profesores y futuros profesores. Tanto el contenido como la metodología requieren una buena formación pedagógica y matemática.

Después de realizar este trabajo, me planteo como línea de investigación futura llevar esta propuesta a la práctica e investigar cómo realizan los niños estas actividades y el grado de algebrización que se alcanza en cada una. No se han podido especificar en las actividades el nivel de algebrización que se desarrollaría con ellas al no llevarlas a la práctica, ya que como hemos dicho, el nivel no lo marca la tarea, sino cómo la aborda el niño. Otra investigación, a largo plazo, que podría arrojar mucha luz sobre el tema es observar si realmente los alumnos que trabajan el pensamiento algebraico desde Educación Infantil tienen menos dificultades en las matemáticas de niveles superiores.

Además considero interesante investigar en otros ámbitos, por ejemplo, cómo se aborda el álgebra en los curriculum de diversos países , el uno de recursos TIC en la enseñanza aprendizaje del álgebra y por último, pero no menos importante la formación de los docentes y de los futuros profesores.

El tema de este TFM permite investigar en muchos aspectos ya que como afirman Carraher y Schliemann (2007) aunque existe cierto acuerdo general en la comunidad investigadora internacional en que el álgebra tiene un lugar muy reducido en el currículo de la educación infantil, la investigación sobre la integración del álgebra en el currículo escolar está todavía emergiendo, se conoce aún poco y está lejos de ser consolidada. Nos queda, por tanto, mucho camino por recorrer .

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, Á., & Giralt, I. (2017). Introducción al álgebra en educación infantil: un itinerario didáctico para la enseñanza de los patrones. *Didácticas Específicas* núm. 16, p. 113-129.

Anthony, G. y Burgess, T. (2014). Solving Linear Equations: A Balanced Aproach. En F. Leung, D. Clarke, D. Holton y K. Park, (Eds.), *Algebra Teaching around the World* (pp. 17-37). Sense Publishers.

Araújo E., Palhares P. y Giménez J. (2008). Niños de cuatro años investigan con patrones. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 47, 54-66.

Boule, F. (1995). Manipular, organizar, representar: iniciación a las matemáticas. Narcea.

Brownell, J. O. N., Chen, J. Q., & Ginet, L. (2014). *Big ideas of early mathematics: What teachers of young children need to know*. Pearson.

Castro, E. y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática* vol. 19, núm. 2 pp. 67-94

Castro, E., & Molina, M. (2007). *Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica*. Recuperado de: *http://hdl.handle.net/10481/4720*

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester *(Ed.), Handbook of research in mathematics education (pp. 669–705). Greenwich: Information Age Publishing*.

Copley, J. V. (2000). The Young Child and Mathematics. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.

Fernández Bravo, J. A. (1989).*Los números en color de G. Cuisenaire*. Madrid. Seco-Olea..

__________________. Los Números en Color de Cuisenaire .*Comunidad Educativa* ICCE, Marzo-1990, Núm. 177, 6-9 Recuperado de http://www.grupomayeutica.com/documentos/1.Los%20Numeros%20en%20Color%20de%20Cuisenaire.pdf

___________________ (2006a). Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil . Madrid. Grupo Mayeútica.

__________________. (2006b).*Los animales que se escaparon del circo*. Madrid. CCS..

___________________ (2012). Desarrollo del pensamiento lógico y matemático. El concepto de número y otros conceptos. 2ª Edición. Madrid. Grupo Mayeútica Educación.

Gattegno, C. (1974). *The common sense of teaching mathematics*. Educational Solutions World.

Greenes, C., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C. y Small, M. (2001). *Navigating through Algebra in Prekindgarten-Grade 2. Reston* VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Greenes, C. (2003). *Algebra for all ages*. Boston. MA: Houghton Mifflin. Recuperado de https://math.berkeley.edu/~giventh/greenes.pdf

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/

_____________________. (2007). Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas. Recuperado de: http://www. ugr. es/~ jgodino/indice_eos. htm.

Godino, J. D., Castro W. F, Aké, L. P. y Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática*, *26*(42 B). Recuperado de :http://www.redalyc.org/html/2912/291223574005/

Godino J. D.,Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(1), 199-219

Greenes, C., Ginsburg, H. P., & Balfanz, R. (2004). Big math for little kids. Early childhood research quarterly, 19(1), 159-166. Recuperado de goo.gl/sM6FTK

Herbert, K., y Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, *3*, 340-345.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, C., & Yagüe, E. F. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *7*(3), 229-240.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1) pp.139-151.

Kriegler, S. (2008). *Just what is algebraic thinking*. UCLA: Department of Mathematis.

Ley orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) (Ley Orgánica 8/2013, 9 de diciembre). BOE, nº 295, 2013, 10 diciembre.

Ley orgánica de educación (LOE) (Ley Orgánica 2/2006, 3 de mayo). BOE, nº106, 2006, 4 mayo.

Mason, J. (2006). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J.J. Kaput , D.W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*, 57-94. Lawrence Erlbaum.

Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.(Tesis doctoral). Universidad de Granada. Recuperado dehttp://digibug.ugr.es/bitstream/10481/1402/1/16546167.pdf

_________ (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.*

Notari-Syverson, A., & Sadler, F. H. (2008). Math is for everyone: Strategies for supporting early mathematical competencies in young children. *Young Exceptional Children*, *11*(3), 2-16.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Thales

Ollerton,M.; Gregg, S. Y y Williams, H (.2017). *Cuisenaire-from Early Years to Adult*. Association of Teachers of Mathematics.

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I., & Gardiner, A. M. (2015). Just Say Yes to Early Algebra!. *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92-101.

Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years. *Young Children*, *58*(1), 14-21.

Torra, M. (2007). Les sèries, els patrons, una oportunitat per a l'educació matemàtica a Educació Infantil. *Escola catalana*, 42, 34-36. Recuperado de http://apliense.xtec.cat/arc/sites/default/files/Series_Patrons_EI.pdf

Trujillo, P., Castro, E. y Molina, M. (2010). *Generalización desde tareas aritméticas desempeño de una pareja de profesores de educación primaria en formación*. Comunicación presentada en 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa (7 al 9 de Octubre de 2010). Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, *8*, 19.

_________ (1995). Why is algebra important to learn. *American Educator*, *19*(1), 30-37.