

Universidad Internacional de la Rioja (UNIR)

Escuela Superior de Ingeniería y
Tecnología

Máster Ingeniería Matemática y Computación

Estudio de regiones de es-
tabilidad para Troyanos y
otras partículas

Trabajo Fin de Máster

presentado por: R. Medina, P. Rojas, C. Romero

Dirigido por: Dr. Marc Jorba Cuscó - UNIR, Dr. Daniel Pérez Palau - UNIR, Dr.
Juan Magaña Zapata - Universidad Central de Chile

Ciudad: LATAM

Fecha: July 20, 2022

Índice de Contenidos

Resumen	XII
Abstract	XIII
1. Introducción	1
2. Contexto y Estado del Arte	3
2.1. Principios Básicos de la Mecánica Clásica	3
2.1.1. Mecánica Newtoniana	3
2.2. Planteamiento del Problema Restringido Circular de los Tres Cuerpos: . . .	5
2.3. Ecuaciones del movimiento	8
2.4. Superficie de energía y zonas de movimiento posible	14
2.5. Ubicación de los puntos de equilibrio	18
2.6. Linealización cerca de los Equilibrios Colineales	21
2.7. Geometría de Soluciones cerca del equilibrio	23
2.8. Asteroides Troyanos	27
3. Objetivos	29
4. Metodología de trabajo	30
4.1. Puntos de estabilidad alrededor de L4	31
4.2. Librería de Python Heyoka	33
4.3. Método numérico Runge Kutta	35
4.3.1. Método numérico Runge Kutta de orden 4	36
4.3.2. Método numérico Runge Kutta de orden 5	36
4.3.3. Método numérico Runge Kutta de orden 6	37
4.4. Cálculo de error de integración	38

5. Regiones de Estabilidad para Troyanos en L4	41
5.1. SISTEMA SOLAR	41
5.1.1. Sol- Mercurio	42
5.1.2. Sol- Venus	43
5.1.3. Sol- Tierra	43
5.1.4. Sol-Marte	45
5.1.5. Sol- Júpiter	46
5.1.6. Sol-Saturno	47
5.1.7. Sol-Urano	49
5.1.8. Sol-Neptuno	49
5.2. SISTEMA PLANETA - SATÉLITES NATURALES	51
5.2.1. Satélite natural de la Tierra.	52
5.2.2. Satélites naturales de Marte.	52
5.2.3. Satélites naturales de Júpiter.	54
5.2.4. Satélites naturales de Saturno.	63
5.2.5. Satélites naturales de Urano.	69
5.2.6. Satélites naturales de Neptuno.	74
5.2.7. Satélites naturales de Plutón.	83
5.3. SISTEMA EXTRASOLAR TRAPPIST-1	88
5.3.1. El planeta Trappist1-B	89
5.3.2. El planeta Trappist1-C	90
5.3.3. El planeta Trappist1-D	91
5.3.4. El planeta Trappist1-E	92
5.3.5. El planeta Trappist1-F	93
5.3.6. El planeta Trappist1-G	94
5.3.7. El planeta Trappist1-H	96
6. Conclusiones y Trabajo Futuro	97
A. Programa en Phyton	103
A.1. Implementación del Método numérico Runge Kutta de Orden 6	103
A.1.1. Librerías utilizadas	103
A.1.2. Algoritmo de RK6	104
A.1.3. Función de malla	105

A.1.4. Programa principal 105

Índice de Ilustraciones

2.1. Ubicación de las partículas en el espacio, con m_3 infinitesimal. Fuente: Propia.	7
2.2. Posiciones de m_1 y m_2 en función de μ . Fuente: Propia.	7
2.3. Marco referencial inercial y marco giratorio	8
2.4. Marco referencial giratorio del P3CBR	10
2.5. Gráfica del potencial efectivo $\bar{U}(x, y)$ para $\mu = 0,3$.	16
2.6. Reinos de movimiento posible.	17
2.7. Los gráficos de E_i como función de μ	18
2.8. Puntos de equilibrio del problema restringido de tres cuerpos en el plano	19
2.9. Gráfica de $\bar{U}(x, 0)$ para $\mu = 0,1$.	21
2.10. Gráfica de la proyección del plano $\eta - \epsilon$	26
2.11. Gráfica de la representación de las regiones de equilibrio de McGehee	27
4.1. Malla alrededor de L4 de 20×20	31
4.2. Diagrama de Metodología. Fuente: Propia	32
4.3. Algoritmo de localización para regiones de estabilidad. Fuente: Propia	33
4.4. Comportamiento de una masa despreciable, respecto a dos masas principales, para $\mu = 0,01$. Fuente: Propia.	34
4.5. Comportamiento del error relativo de la constante de Jacobi 2.13, respecto a las condiciones iniciales, para $\mu = 0,01$. Fuente: Propia.	34
4.6. Órbita de la mesa despreciable, después de la integración, para $\mu = 0,01$. Fuente: Propia.	35
4.7. Conservación de la constante de Jacobi, para $\mu = 0,01$. Fuente: Propia.	35
4.8. Runge Kutta orden 4. Comparación de errores, en función del tiempo final de integración.	37

4.9. Método numérico Runge Kutta orden 5. Comparación de errores, en función del tiempo final de integración.	37
4.10. Método numérico Runge Kutta orden 6. Comparación de errores, en función del tiempo final de integración.	38
4.11. Simulación del P3BCR para $\mu = 0,01$, el círculo en naranja es m_1 , el círculo rosado es m_2 y el triángulo rojo es L4	39
4.12. Cálculo de los errores relativos, la integral de Jacobi.	39
4.13. Cálculo de los errores relativos, la integral de Jacobi.	40
5.1. El Sistema Solar.Fuente: Wikimedia Commons.	42
5.2. Interacción entre el Sol y Mercurio $\mu = 1,65158 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$	43
5.3. Interacción entre el Sol y Venus $\mu = 2,446952 \times 10^{-6}$ $t_f = 500$	44
5.4. Interacción entre el Sol y la Tierra $\mu = 3,006526 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$	45
5.5. Interacción entre el Sol y Marte $\mu = 3,22699 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$	46
5.6. Interacción entre el Sol y Júpiter $\mu = 0,00095484$, $t_f = 500$	47
5.7. Interacción entre el Sol y Saturno $\mu = 0,00028589$, $t_f = 500$	49
5.8. Interacción entre el Sol y Urano $\mu = 4,366827 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$	50
5.9. Interacción entre el Sol y Neptuno $\mu = 5,1711755 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$	51
5.10. Tierra - Luna.Fuente:Wikipedia	52
5.11. Interacción Tierra-Luna. $\mu = 0,01215$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	53
5.12. Marte y sus satélites.Fuente:Propia	54
5.13. Interacción Marte-Fobos. $\mu = 1,67 \times 10^{-8}$. $t_f = 500$ Fuente: Propia	54
5.14. Interacción Marte-Deimos. $\mu = 3,496 \times 10^{-9}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	55
5.15. Jupiter y sus Satélites Naturales	56
5.16. Interacción Júpiter-Io. $\mu = 4,6839 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$ Fuente: Propia	57
5.17. Interacción Júpiter-Europa. $\mu = 2,5262 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	57
5.18. Interacción Júpiter-Ganímedes. $\mu = 7,8941 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	58
5.19. Interacción Júpiter-Calisto. $\mu = 5,7891 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	59
5.20. Comportamiento interacción Júpiter-Metis. $\mu = 6,3157 \times 10^{-11}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	59
5.21. Comportamiento interacción Júpiter-Adrastea. $\mu = 3,9473 \times 10^{-12}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	61

5.22. Comportamiento interacción Júpiter-Amaltea. $\mu = 1, 1052 \times 10^{-9}$. $t_f = 500$.	
Fuente: Propia	62
5.23. Comportamiento interacción Júpiter-Tebe. $\mu = 7, 8947 \times 10^{-10}$. $t_f = 500$.	
Fuente: Propia	63
5.24. Saturno y sus Satélites Naturales	64
5.25. Interacción Saturno-Rea. $\mu = 4, 0787 \times 10^{-6}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . . .	65
5.26. Comportamiento interacción Saturno-Hiperión. $\mu = 9, 9964 \times 10^{-11}$. $t_f =$ 500. Fuente: Propia	65
5.27. Interacción Saturno-Jápeto. $\mu = 3, 4686 \times 10^{-6}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	66
5.28. Interacción Saturno-Titán. $\mu = 0, 2364 \times 10^{-3}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	67
5.29. Interacción Saturno-Mimas. $\mu = 3, 0748 \times 10^{-8}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	68
5.30. Interacción Saturno-Encélado. $\mu = 1, 8991 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	69
5.31. Interacción Saturno-Tetis. $\mu = 1, 0855 \times 10^{-6}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	70
5.32. Comportamiento interacción Saturno-Dione. $\mu = 1, 8991 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	71
5.33. Urano y sus Satélites Naturales	72
5.34. Interacción Urano-Titania. $\mu = 4, 06039 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	73
5.35. Interacción Urano-Oberón. $\mu = 3, 4698 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	73
5.36. Interacción Urano-Umbriel. $\mu = 1, 3492 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	74
5.37. Interacción Urano-Ariel. $\mu = 1, 5542 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . . .	75
5.38. Interacción Urano-Miranda. $\mu = 7, 5869 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	76
5.39. Neptuno y sus Satélites Naturales	77
5.40. Interacción Neptuno-Náyade. $\mu = 1, 9531 \times 10^{-9}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	78
5.41. Interacción Neptuno-Despina. $\mu = 1, 9531 \times 10^{-8}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	79
5.42. Interacción Neptuno-Galatea. $\mu = 3, 9062 \times 10^{-8}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	79
5.43. Interacción Neptuno-Larisa. $\mu = 4, 8828 \times 10^{-8}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	80
5.44. Interacción Neptuno-Proteo. $\mu = 4, 8828 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	81
5.45. Interacción Neptuno-Tritón. $\mu = 0, 2089 \times 10^{-3}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	82
5.46. Interacción Neptuno-Nereida. $\mu = 2, 9296 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . .	83
5.47. Plutón y sus satélite. Fuente: Propia.	84
5.48. Interacción Plutón-Caronte. $\mu = 0, 1084$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	85
5.49. Interacción Plutón-Nix. $\mu = 4 \times 10^{-6}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	86
5.50. Interacción Plutón-Cerbero. $\mu = 1, 32 \times 10^{-6}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia . . .	86

5.51. Interacción Plutón-Estigia. $\mu = 6 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia	87
5.52. Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-B. $\mu = 0,0000515$. Fuente: Propia	90
5.53. Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-C. $\mu = 0,000049$. Fuente: Propia	91
5.54. Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-D. $\mu = 0,00001456$. Fuente: Propia	92
5.55. Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-E. Malla 100x100. $\mu = 0,00002597$ Fuente: Propia	93
5.56. Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-F. Malla 100x100. $\mu = 0,00003899$ Fuente: Propia	94
5.57. Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-G. Malla 100x100. $\mu = 0,00004957$ Fuente: Propia	95
5.58. Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-H. Malla 100x100. $\mu = 0,00001223$ Fuente: Propia	96

Índice de Tablas

5.1. Tabla Sistema: Sol-Mercurio	42
5.2. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y el área que representa. Sistema: Sol-Venus, $\mu = 2,446952 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$	44
5.3. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y ártea que representa en km^2 . Sistema: Sol-Tierra, $\mu = 3,006526 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$	45
5.4. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Sol-Marte, $\mu = 3,22699 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$	47
5.5. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Sol-Júpiter, $\mu = 0,00095484$, $t_f = 500$	48
5.6. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Sol-Saturno, $\mu = 0,00028589$, $t_f = 500$	48
5.7. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Sol-Urano, $\mu = 4,366827 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$	50
5.8. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Sol-Neptuno, $\mu = 5,1711755 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$	51
5.9. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Tierra-Luna, $\mu = 0,01215$, $t_f = 500$, $d_{TL} = 384.400Km$	53
5.10. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Marte-Fobos, $\mu = 1,67 \times 10^{-8}$, $t_f = 500$, $d_{MF} = 9.377Km$	55
5.11. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Marte-Deimos, $\mu = 3,496 \times 10^{-9}$, $t_f = 500$, $d_{MD} = 23.460Km$	56
5.12. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Júpiter-Io, $\mu = 4,6839 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{JI} = 628,3 \times 10^6Km$	56
5.13. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Júpiter-Europa, $\mu = 2,5262 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{JE} = 628,3 \times 10^6km$	58

- 5.14. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Júpiter-Ganímedes, $\mu = 7,8941 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{JG} = 628,3 \times 10^6 \text{Km}$ 60
- 5.15. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Júpiter-Calisto, $\mu = 5,7891 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{JC} = 628,3 \times 10^6 \text{km}$. 60
- 5.16. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Júpiter-Metis, $\mu = 6,3157 \times 10^{-11}$, $t_f = 500$, $d_{JM} = 128.100 \text{km}$. . 60
- 5.17. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Júpiter-Adrastea, $\mu = 3,9473 \times 10^{-12}$, $t_f = 500$, $d_{JAd} = 128.900 \text{km}$. 61
- 5.18. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Júpiter-Amaltea, $\mu = 1,1052 \times 10^{-9}$, $t_f = 500$, $d_{JAm} = 181.400 \text{km}$. 62
- 5.19. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Júpiter-Tebe, $\mu = 7,8947 \times 10^{-10}$, $t_f = 500$, $d_{JT} = 221.900 \text{Km}$. . . 63
- 5.20. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Saturno-Rea, $\mu = 4,0787 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{SR} = 527.100 \text{Km}$. . . 64
- 5.21. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Saturno-Hiperión, $\mu = 9,9964 \times 10^{-11}$, $t_f = 500$, $d_{SH} = 1.464.100 \text{Km}$ 66
- 5.22. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Saturno-Jápeto $\mu = 3,4686 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{SJ} = 3.560.800 \text{Km}$. 67
- 5.23. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Saturno-Titán, $\mu = 0,2364 \times 10^{-3}$, $t_f = 500$, $d_{STi} = 1.221.900 \text{Km}$. 68
- 5.24. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Saturno-Mimas, $\mu = 3,0748 \times 10^{-8}$, $t_f = 500$, $d_{SM} = 185.600 \text{Km}$. 69
- 5.25. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Saturno-Encélado, $\mu = 1,8991 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$, $d_{SE} = 283.100 \text{Km}$. 70
- 5.26. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Saturno-Tetis, $\mu = 1,0855 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{STe} = 294.700 \text{Km}$. . 71
- 5.27. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Saturno-Dione, $\mu = 1,9268 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{SD} = 377.400 \text{km}$. . 72
- 5.28. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Urano-Titania, $\mu = 4,06039 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{UT} = 435.800 \text{Km}$. 72

5.29. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Urano-Oberón, $\mu = 3,4698 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{UO} = 582.600\text{Km}$.	74
5.30. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Urano-Umbriel, $\mu = 1,3492 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{UU} = 266.000\text{Km}$.	75
5.31. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Urano-Ariel, $\mu = 1,5542 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{UA} = 191.200\text{km}$.	76
5.32. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Urano-Miranda, $\mu = 7,5869 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$, $d_{UM} = 129.800\text{Km}$.	77
5.33. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Neptuno-Náyade, $\mu = 1,9531 \times 10^{-9}$, $t_f = 500$, $d_{NNa} = 48.227\text{Km}$.	78
5.34. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Neptuno-Despina, $\mu = 1,9531 \times 10^{-8}$, $t_f = 500$, $d_{ND} = 52.526\text{Km}$.	78
5.35. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 .	
Sistema: Neptuno-Galatea, $\mu = 3,9062 \times 10^{-8}$, $t_f = 500$, $d_{NG} = 61.953\text{Km}$.	80
5.36. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Neptuno-Larisa, $\mu = 3,9062 \times 10^{-8}$, $t_f = 500$, $d_{NL} = 73.548\text{Km}$.	80
5.37. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Neptuno-Proteo, $\mu = 4,8828 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$, $d_{NP} = 117.647\text{Km}$.	81
5.38. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Neptuno-Tritón, $\mu = 0,2089 \times 10^{-3}$, $t_f = 500$, $d_{NTr} = 354.300\text{Km}$.	82
5.39. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Neptuno-Nereida, $\mu = 2,9296 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$, $d_{NNe} = 5.513.400\text{km}$.	83
5.40. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Plutón-Caronte, $\mu = 0,1084$, $t_f = 500$, $d_{PCa} = 19.640\text{km}$.	84
5.41. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 .	
Sistema: Plutón-Nix, $\mu = 4 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{PN} = 48.690\text{Km}$.	85
5.42. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 .	
Sistema: Plutón-Cerbero, $\mu = 1,32 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{PCe} = 57.750\text{km}$.	87
5.43. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .	
Sistema: Plutón-Estigia, $\mu = 6 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$, $d_{PE} = 42.413\text{km}$.	88
5.44. Tabla de planetas del Sistema Trappist-1, el radio está dado en unidades de radio terrestre. Fuente: NASA	89

5.45. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-B, $\mu = 5,15 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 1,72 \times 10^6 \text{km}$.	90
5.46. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-C, $\mu = 4,39 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 2,36 \times 10^6 \text{Km}$.	91
5.47. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-D, $\mu = 1,45 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 3,34 \times 10^6 \text{km}$.	92
5.48. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-E, $\mu = 2,59 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 4,38 \times 10^6 \text{km}$.	93
5.49. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-F, $\mu = 3,89 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 5,76 \times 10^6 \text{km}$.	94
5.50. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-G, $\mu = 4,95 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 7,02 \times 10^6 \text{km}$.	95
5.51. Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-H, $\mu = 1,22 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 9,26 \times 10^6 \text{km}$.	96

Resumen

Palabras Clave: Mecánica Espacial, Trayectorias, Sistemas Dinámicos

En este trabajo se estudian las regiones de un campo vectorial que cumplen con la condición de ser estables para lograr que un satélite, alrededor de un planeta, se encuentre en dicha zona. Para desarrollar los cálculos necesarios se implementó un algoritmo, que genera una malla de puntos, para resolver las ecuaciones del sistema de ecuaciones diferenciales, que corresponden a las ecuaciones del movimiento.

Durante nuestro estudio se utiliza como marco de análisis el problema restringido de los tres cuerpos, considerando los planetas del Sistema Solar, los planetas junto a sus satélites naturales, y el sistema extrasolar conocido como Trappist-1. Para cada uno de estos sistemas, se identifican los puntos de estabilidad, inestabilidad y colisión con las masas principales.

La implementación del método numérico Runge Kutta de orden 6, junto al algoritmo para determinar el error mediante el Hamiltoniano, implementado en la librería Heyoka de Python, han permitido obtener resultados satisfactorios, comprobando que los algoritmos utilizados comprueban el comportamiento estable de los puntos identificados.

Abstract

Keywords: Space Mechanics, Trajectories, Dynamic Systems

This topic are the study of the occasions to find which regions of a vector field can make a satellite orbit around a planet finding a stable zone. To research the necessary calculations, an algorithm was implemented that generates a mesh of stable points when solving the system equations that correspond to the equations of motion.

During our study, the restricted problem of the three bodies is used as an analysis framework, considering the planets of the Solar System, the planets together with their natural satellites, and the extrasolar system known as Trappist-1. For each of these systems, the points of stability, instability and collision with the main masses are identified.

The implementation of the Runge Kutta numerical method of order 6, together with the algorithm to determine the error by means of the Hamiltonian, implemented in the Heyoka Python library, have allowed obtaining satisfactory results, verifying that the algorithms used verify the stable behavior of the identified points.

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la gravedad de Newton, dio inicio al estudio de la mecánica celeste, donde se postularon diversas incógnitas sobre el movimiento de los cuerpos celestes que interactúan bajo la ley de gravitación universal.

En el año 1.687 ya se había resuelto el problema de dos cuerpos que se atraen gravitacionalmente, lo cual captó un enorme atención en el sistema Sol-Tierra-Luna, y hasta el día de hoy el problema de los tres cuerpos se ha convertido en uno de los más antiguos problemas de sistemas dinámicos.

Este nuevo campo de estudio permitió la comprensión y el análisis de varias aplicaciones que han impactado la forma de comprender el universo.

Existen soluciones que se han encontrado para casos muy especiales, tenemos el caso de Leonhard Euler, quien en 1.767 encontró una configuración muy particular donde cada una de las partículas describe una trayectoria elíptica respecto al centro de masas, esta solución funciona bajo la condición de que las tres masas, o partículas, son colineales y mantienen su posición sobre una línea recta; bajo esta condición se puede obtener la solución analítica exacta del sistema. Cinco años mas tarde, Joseph Lagrange descubrió otra solución periódica al problema de los tres cuerpos, en el cual la configuración de esos tres cuerpos, están sobre un triángulo equilátero y, otra vez cada cuerpo se mueve en una trayectoria elíptica pero siempre manteniendo una configuración equilátera. Este planteamiento, a simple vista aunque parece sencillo, es complejo y, su aplicación puede utilizarse para el cálculo de las órbitas de satélites artificiales en regiones ideales.

El problema en términos generales, de nuestro caso de estudio se basa en las regiones de estabilidad entorno a L_4 , su respectivo análisis se enfoca en el desarrollo matemático

del problema restringido de los tres cuerpos.

Para nuestro estudio las soluciones particulares se sintetizan en los puntos de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales, basado en el movimiento y, las leyes de la gravedad.

En la sección 2, se exponen los fundamentos teóricos y el desarrollo analítico de la ubicación de los puntos de equilibrio, de los cuales sabemos que existen cinco, los tres primeros L1, L2 y L3, denotan las soluciones colineales encontradas por Euler; L4 y L5 son las soluciones triángulares encontradas por Lagrange. En conjunto, a estos cinco puntos también se les conoce como puntos Lagrangianos.

En la sección 3, se plantean los objetivos del presente estudio.

En la sección 4, se expone la metodología de trabajo utilizada. Se presentan los métodos numéricos empleados, así como la justificación del método escogido.

En la sección número 5, se presenta el desarrollo del trabajo, junto al análisis del estudio sobre los sistemas: Solar, Planeta-Satélite Natural y Trappist 1.

Finalmente expondremos nuestros resultados que incluyen la posición calculada de los puntos de equilibrio en base a los parámetros definidos para este caso particular.

Capítulo 2

Contexto y Estado del Arte

Esta sección se enfoca en dos partes, inicialmente se exponen las bases teóricas que forman parte del análisis en cuestión, y finalmente se incluyen algunos casos de aplicación práctica, que son de interés para el estudio de la comunidad científica.

2.1. Principios Básicos de la Mecánica Clásica

Para describir el movimiento de un sistema mecánico se utilizan varios modelos matemáticos basados en diferentes “principios”: leyes del movimiento según Isaac Newton.

2.1.1. Mecánica Newtoniana

Espacio, Tiempo, Movimiento

El espacio donde tiene lugar el movimiento, es tridimensional y euclidiano con una orientación fija. Denotado por E^3 . Se establece un punto $0 \in E^3$ llamado “origen de referencia”. La posición de cada punto s en E^3 está determinada únicamente por su vector de posición $\vec{os} = \mathbf{r}$ (cuyo punto inicial es 0 y punto final es s). El conjunto de todos los vectores de posición, forma el espacio vectorial tridimensional \mathbb{R}^3 .

El tiempo es unidimensional; se denota por t . El conjunto $\mathbb{R} = t$ se llama eje del tiempo. Un movimiento (o trayectoria) del punto s es un mapeo $\Delta \rightarrow E^3$, donde Δ es un intervalo del eje del tiempo. El movimiento está definido en el intervalo Δ . Si el origen (punto 0) es fijo, entonces cada movimiento está determinado únicamente por una función vectorial uniforme $r : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$.

La imagen del intervalo Δ bajo el mapeo $t \rightarrow \mathbf{r}(t)$ se llama trayectoria u órbita del punto

s .

La velocidad \mathbf{v} del punto s en un instante $t \in \Delta$ es, por definición, la derivada $dr/dt = \dot{r}$. Se deduce que la velocidad es independiente de la elección del origen.

La aceleración del punto es por definición el vector $a = \dot{v} = \ddot{a} \in \mathbb{R}^3$. La velocidad y la aceleración se representan como vectores con punto su origen en el punto s .

El conjunto E^3 también se denomina espacio de configuración del punto s [1]. El par (s, \mathbf{v}) se denomina estado del punto, y el conjunto $E^3 \times \mathbb{R}^3\{v\}$, espacio de fase (o estado).

Considerando un caso más general cuando hay n puntos s_1, \dots, s_n moviéndose en el espacio E^3 . El conjunto $E^{3n} = E^3\{s_1\} \times \dots \times E^3\{s_n\}$ se denomina espacio de configuración de este sistema "libre". Si es necesario excluir las colisiones de los puntos, entonces se debe disminuir E^{3n} quitando de ella la unión de las diagonales [1]

$$\Delta = \bigcup_{i < j} \{s_i = s_j\}.$$

Sean $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n}$ los vectores de posición de los puntos s_1, \dots, s_n . Un movimiento del sistema libre viene dado por funciones vectoriales suaves $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t))$. Se define de manera similar la velocidad

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

y la aceleración

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\mathbf{r}}_1, \dots, \ddot{\mathbf{r}}_n) = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

El conjunto $E^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}\{\mathbf{v}\}$ se denomina espacio de fase (o estado) y el par (s, \mathbf{v}) , estado del sistema.

Principio de determinación de Newton-Laplace.

Este principio, afirma que el estado del sistema en cualquier momento fijo determina de manera única todo su movimiento (tanto en el futuro como en el pasado) [1]. Conocido el estado del sistema (r_0, v_0) en un instante t_0 . Entonces, según el principio de determinación, el movimiento $\mathbf{r}(t), t \in \Delta \subset \mathbb{R}; r(t_0) = r_0, r_0(t) = \dot{r}_0 = v_0$. En particular, es posible calcular la aceleración \ddot{r} en el instante $t = t_0$. Entonces $\ddot{r}(t_0) = a_0$. Entonces $\ddot{r}(t_0) = f(t_0, r_0, \dot{r}_0)$, donde f es alguna función cuya existencia se sigue del principio de Newton-Laplace [1]. El tiempo puede elegirse arbitrariamente, se tiene la ecuación

$$\ddot{r} = f(t, r, \dot{r})$$

para todo t . Esta ecuación diferencial se llama ecuación de movimiento o ecuación de Newton [1]. La existencia de la ecuación de Newton (con una función vectorial uniforme $f : \mathbb{R}\{t\} \times \mathbb{R}^{3n}\{r\} \times \mathbb{R}^{3n}\{\dot{r}\} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$) es equivalente al principio de determinación. Esto se sigue del teorema de existencia y unicidad en la teoría de las ecuaciones diferenciales. La función f en las ecuaciones de Newton generalmente se determina de forma experimental. La definición de un sistema mecánico incluye especificar dicha función.

Las siguientes características de movimiento son importantes en la dinámica del espacio euclidiano orientado con un marco inercial fijo: $p = m\vec{v}$ - el impulso de un punto, $\vec{k} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ - el momento angular (momento de momento), $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ - el momento de fuerza (torque), $T = \frac{m\vec{v}^2}{2}$ - la energía cinética, $I = m\vec{r}^2$ - el momento de inercia con respecto al punto 0. Proposición. Sean $\vec{P} = \sum \vec{p}_i$ y $\vec{F} = \sum \vec{f}_i$. Entonces $\dot{\vec{P}} = \vec{F}$. El punto $\xi = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$ se llama centro de masa. Se puede ver que la posición del centro de masa es independiente de la elección del origen de referencia. Corolario. El centro de masa de un sistema cerrado se mueve de manera uniforme y rectilínea: $\ddot{\xi} = 0$

2.2. Planteamiento del Problema Restringido Circular de los Tres Cuerpos:

Para celebrar el sexagésimo cumpleaños del rey de Suecia y Noruega se estableció un premio que se anunció en una de las más prestigiosas revistas matemáticas, Acta Mathematica (vol 7 1885/1886). Esta competencia buscaba responder a la inquietante pregunta sobre la estabilidad de nuestro sistema solar. El problema no fue resuelto, pero el premio se otorgó en 1.889 al matemático francés Henri Poincaré [17] por descubrir y sentar las bases de la teoría que describe el comportamiento caótico en el problema de los tres cuerpos.

Básicamente este problema tiene que ver con una perspectiva generalizada de: ¿Cómo se mueve el sistema compuesto por el Sol, la Luna y la Tierra?. A partir de esta descripción general podemos considerar que los cuerpos son partículas puntuales con una determinada masa, con fines de análisis se puede modelar este problema restringido circular de los tres cuerpos como aquel que describe el comportamiento de una partícula sometida al campo gravitacional de dos masas similares que giran alrededor de su centro de masas común.

En este caso particular, el problema de los tres cuerpos, se considera que dos partículas (llamadas m_1 y m_2) están girando en una órbita circular entorno al centro de masas

común. La tercera masa partícula (m_3) se considera despreciable (infinitesimal) respecto a las otras. En este contexto la partícula m_3 no influye en el campo gravitacional de ninguna de las otras dos partículas, de hecho m_3 queda sometida a la acción gravitacional de las partículas principales. El problema en estudio “consiste en encontrar el movimiento de la partícula de masa m_3 sometida al campo gravitacional de dos partículas que giran en órbitas circulares alrededor de su centro de masa.” (Gregorio, J., 2003). Considerando la mecánica clásica Newtoniana, se puede definir la fuerza que ejercen m_1 y m_2 sobre m_3 , como:

$$m_3 \vec{a}_I = -\frac{Gm_1 m_3 \vec{\rho}_1}{\rho_1^3} - \frac{Gm_2 m_3 \vec{\rho}_2}{\rho_2^3} \quad (2.1)$$

Donde:

\vec{a}_I : aceleración de m_3 respecto a un sistema inercial fijo

$\vec{\rho}_1$: vector posición respecto a m_1

$\vec{\rho}_2$: vector posición respecto a m_2

r_1 : norma de \vec{r}_1

r_2 : norma de \vec{r}_2

G : constante gravitacional de Cavendish

Para analizar el comportamiento (x, y) de las partículas involucradas, se considera un sistema de coordenadas cartesiano, x y y . El origen del sistema coincide con el centro de masas, y sobre el eje x se ubican las masas m_1 y m_2 . No se considera desplazamiento en el eje z , por ende, el análisis se suscribe al plano.

Es necesario determinar las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas que caracterizan el comportamiento de m_3 debido a la influencia de las otras dos partículas, para esto primero se normaliza el sistema, considerando:

$$\text{distancia} \quad d' = Ld,$$

$$\text{velocidad} \quad s' = Vs,$$

$$\text{tiempo} \quad t' = \frac{T}{2\pi}t,$$

donde L es la distancia entre los centros de m_1 y m_2 , V es la velocidad orbital de m_1 , T es el período orbital de m_1 y m_2 . Se establece un único parámetro para el sistema, en función de las masas m_1 y m_2 , llamado *parámetro de masa*,

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.2)$$

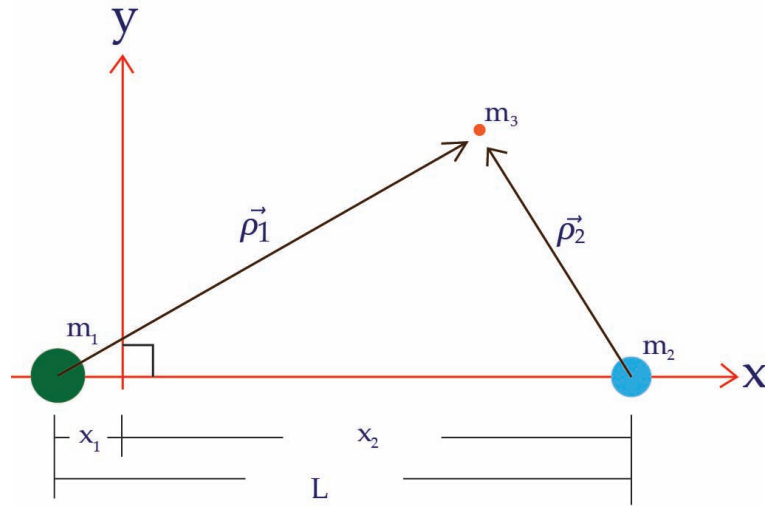


Figura 2.1: Ubicación de las partículas en el espacio, con m_3 infinitesimal. Fuente: Propia.

Considerando que $m_1 > m_2$, y aplicando el *parámetro de masa*, se obtiene:

$$\mu_1 = 1 - \mu \quad \text{y} \quad \mu_2 = \mu \tag{2.3}$$

donde $\mu \in [0, \frac{1}{2}]$, por lo tanto $\mu_1 \geq \mu_2$. Con estas consideraciones se puede obtener una nueva representación de la Figura 2.1, que se presenta en la Figura 2.2 Para saber si

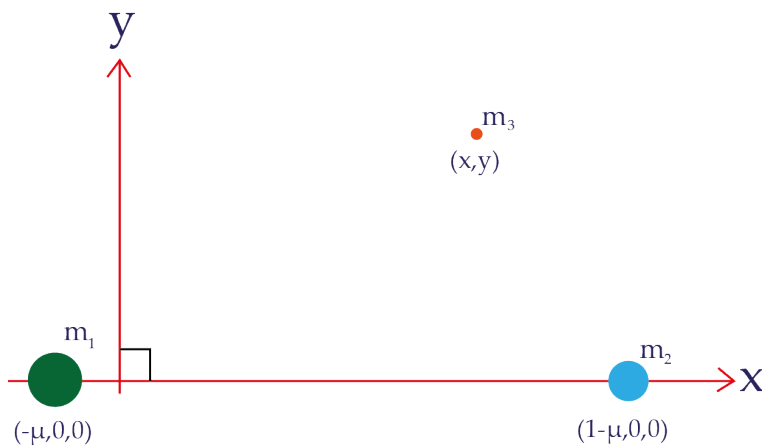


Figura 2.2: Posiciones de m_1 y m_2 en función de μ . Fuente: Propia.

un problema de tres cuerpos, se puede abordar de forma restringida, se deben cumplir ciertas condiciones: la partícula pequeña (no primaria) debe ser heliocéntrica, es decir, su movimiento está superditado a la acción gravitacional de m_1 , a la vez que debe estar ligada a una partícula mayor, de tal manera que se encuentren en el mismo plano orbital.

2.3. Ecuaciones del movimiento

Se considera un marco referencial inercial X, Y, Z con origen en el centro de masa de m_1 y m_2 , como en la Figura 2.3, donde el plano XY es el plano orbital de los primarios. El conjunto de ejes x, y, z tienen el mismo origen, representado en la Figura 2.3 y este nuevo marco referencial se encuentra rotando con respecto al marco inercial XYZ con una velocidad angular unitaria. El eje x se encuentra a lo largo de la línea de m_1 y m_2 , el eje y perpendicular al eje x y en el plano del movimiento de las masas, el eje z es ortogonal a estos dos.

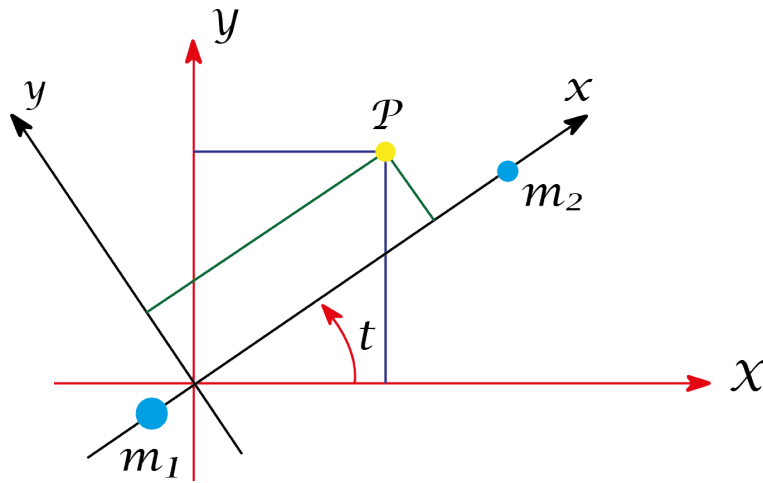


Figura 2.3: Marco referencial inercial y marco giratorio, el eje z coincide con el eje Z y no se observan en la figura. Fuente: propia

Con esto se consigues que las masas tengan posiciones fijas con respecto al marco referencial giratorio.

En unidades normalizadas se obtiene la siguiente transformación de la posición de la partícula entre los dos marcos referenciales:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donde

$$A_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La diferenciación otorga la transformación de las componentes de la velocidad a partir de la rotación respecto al marco inercial:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} &= \dot{A}_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + A_t \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \\
 &= -A_t J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + A_t \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \\
 &= A_t \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Marco Referencial Giratorio En este nuevo sistema de coordenadas las posiciones de m_1 y m_2 respectivamente, son

$$(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0) \text{ y } (x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0)$$

En el marco inercial cuando $t = 0$ se tienen las mismas coordenadas. En general, las posiciones de m_1 y m_2 para tiempos t respectivamente, son:

$$(X_1, Y_1, Z_1) = (-\mu_2 \cos t, -\mu_2 \sin t, 0) \quad (X_2, Y_2, Z_2) = (\mu_1 \cos t, \mu_1 \sin t, 0)$$

En la Figura 2.4 se muestra el PCR3B en el marco referencial giratorio, donde m_1 y m_2 son posiciones fijas sobre el eje x , no se muestra el eje z , (x, y, z) son las coordenadas de la posición de P relativas a las posiciones de m_1 y m_2

Potencial gravitacional El potencial gravitacional que experimenta la partícula debido a m_1 y m_2 (en unidades normalizadas) es

$$\mathcal{U} = -\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2 \tag{2.5}$$

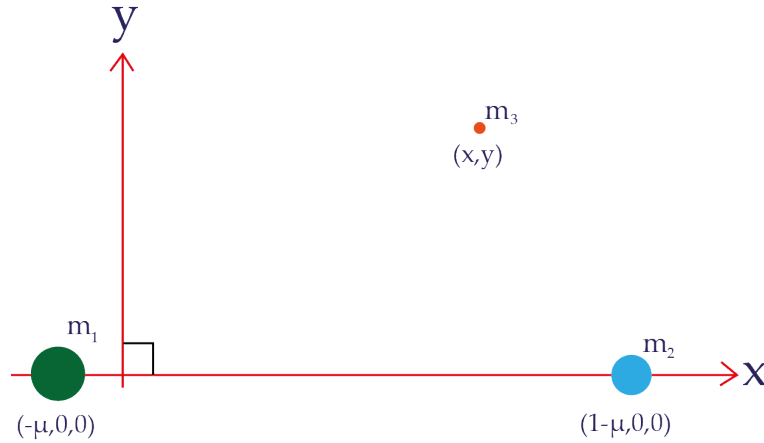


Figura 2.4: Marco referencial giratorio del P3CBR, donde m_1 y m_2 tienen posiciones fijas en el eje x . Fuente: propia

donde r_1 y r_2 son las distancias de m_3 hasta m_1 y m_2 , respectivamente, dado por

$$r_1^2 = (X + \mu_2 \cos t)^2 + (Y + \mu_2 \sin t)^2 + Z^2$$

$$r_2^2 = (X - \mu_1 \cos t)^2 + (Y - \mu_1 \sin t)^2 + Z^2$$

El último término constante en la expresión de \mathcal{U} se suma por convención (Kolomaro [9]), y no afectará las ecuaciones del movimiento.

Enfoque Newtoniano: Marco Referencial Inercial. En el marco inercial, las ecuaciones newtonianas del movimiento son

$$\ddot{X} = -\mathcal{U}_X, \quad \ddot{Y} = -\mathcal{U}_Y, \quad \ddot{Z} = -\mathcal{U}_Z$$

donde \mathcal{U}_X , \mathcal{U}_Y y \mathcal{U}_Z son las derivadas parciales de \mathcal{U} con respecto a X , Y , Z respectivamente. Este sistema depende del tiempo. Se puede hacer una transformación en las variables (x, y, z) con el siguiente procedimiento

Enfoque Lagrangiano: Marco Inercial. Considere las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

donde el sistema mecánico se describe mediante coordenadas generalizadas (q^1, \dots, q^n) . Por lo general, se define el Lagrangiano L como la diferencia entre su energía cinética y su energía potencial.

En el marco inercial, el Lagrangiano \mathcal{L} está dada por

$$\mathcal{L}(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, t) = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - \mathcal{U}(X, Y, Z, t)$$

Enfoque Lagrangiano: Marco Giratorio. En el marco giratorio, el Lagrangiano L está dado por

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} ((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

Luego, el lagrangiano en este marco es independiente del tiempo, lo que simplifica el análisis de soluciones.

Obtenemos la fórmula para L reescribiendo la energía cinética y la energía potencial del marco inercial Lagrangiano \mathcal{L} en coordenadas del marco giratorio. De la ecuación (2.4), la energía cinética es

$$\frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \frac{1}{2} ((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 + \dot{z}^2)$$

Además, desde que las distancias r_1 y r_2 son invariantes bajo rotación, la energía potencial gravitacional es

$$U(x, y, z) = -\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2, \quad (2.6)$$

donde r_1 y r_2 se expresan en coordenadas giratorias

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2, \\ r_2^2 &= (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

La teoría de los sistemas en movimiento dice que se pueden escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange en el marco giratorio y se obtendrán las ecuaciones correctas. En el presente caso, las ecuaciones de Euler-Lagrange están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{x} - y) &= \dot{y} + x - U_x, \\ \frac{d}{dt}(\dot{y} + x) &= -(\dot{x} - y) - U_x, \\ \frac{d}{dt}\dot{z} &= -U_z \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{\mu_1(x + \mu_2)}{r_1^3} + \frac{\mu_2(x - \mu_1)}{r_2^3}, \\ U_y &= \frac{\mu_1 y}{r_1^3} + \frac{\mu_2 y}{r_2^3}, \\ U_z &= \frac{\mu_1 z}{r_1^3} + \frac{\mu_2 z}{r_2^3}, \end{aligned}$$

Los subíndices denotan las derivadas parciales. Se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= -\bar{U}_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\bar{U}_y \\ \ddot{z} &= -\bar{U}_z\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde \bar{U} dado por

$$\begin{aligned}\bar{U}(x, y) &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U(x, y, z) \\ \bar{U}(x, y) &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2,\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$= -\frac{1}{2}(\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2}\tag{2.9}$$

es el **potencial aumentado o efectivo**. La versión plana de (2.7) se puede obtener estableciendo $z = \dot{z} = 0$.

Enfoque Hamiltoniano: marco giratorio. Siempre que se tiene un sistema Lagrangiano, es posible transformarlo a la forma Hamiltoniana por medio de la transformación de Legendre:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}; \quad H(q^i, p_i) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - L(q^i, p_i),$$

para obtener las ecuaciones en forma Hamiltoniana:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

En este caso, La transformación de Legendre está dada por:

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}\end{aligned}$$

y así la función Hamiltoniana es

$$\begin{aligned}H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L \\ &= \frac{1}{2} \left((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2 + p_z^2 \right) + \bar{U},\end{aligned}\tag{2.10}$$

donde p_x , p_y , y p_z son los momentos conjugados de x , y y z , respectivamente. Por lo tanto, las ecuaciones Hamiltonianas están dadas por:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y, \\
\dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x, \\
\dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z, \\
\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - x - \bar{U}_x \\
\dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - y - \bar{U}_y, \\
\dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -\bar{U}_z
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Tanto la forma lagrangiana como la hamiltoniana de las ecuaciones en coordenadas giratorias (x, y, z) dan un sistema independiente del tiempo. Visto como un sistema dinámico, es un sistema dinámico en un espacio de fase de seis dimensiones, $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ o (x, y, z, p_x, p_y, p_z) son subconjuntos de \mathbf{R}^6 que excluyen las singularidades en las posiciones de los primarios.

La Energía Total y la Constante de Jacobi. Dado que las ecuaciones de movimiento del CR3BP (2.11) son Hamiltonianas e independientes del tiempo, tienen una energía total de movimiento. Se utiliza el símbolo H cuando se considera la energía en función de las posiciones y los momentos, como en (2.10), y E cuando se considera en función de las posiciones y velocidades,

$$E(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \bar{U}(x, y, z) \tag{2.12}$$

Físicamente, la medición de la posición y la velocidad de la partícula en los marcos de referencia inercial o giratorio determina el valor de la energía asociada con el movimiento de la partícula.

Las comunidades de mecánica celeste y astronomía dinámica utilizan $-2E$, que se denomina integral de Jacobi y está dada por

$$C(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - 2\bar{U} \tag{2.13}$$

Por lo general, la existencia de la integral de Jacobi se deriva directamente de las ecuaciones de movimiento (2.7). El cálculo es directo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) &= 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) \\
&= 2[\dot{x}(2\dot{y} - \bar{U}_x) + \dot{y}(-2\dot{x} - \bar{U}_y) + \dot{z}(-\bar{U}_z)] = 2\frac{d}{dt}(-\bar{U})
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}C = \frac{d}{dt}(-(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - 2\bar{U}) = 0$$

Se emplean los términos “energía”, “energía total”, “integral de Jacobi” y “constante de Jacobi” para referirse al mismo concepto: la integral más importante que determina el movimiento de la partícula. En general, no hay otras integrales que restrinjan el movimiento de la partícula, lo que hace que PCR3BP no sea un problema integrable.

2.4. Superficie de energía y zonas de movimiento posible

El problema restringido de los tres cuerpos, se puede abordar desde las leyes de Kepler. Para ser válido, según Kolomaro [9], se establece que $m_1 + m_2$ es igual a uno; la separación entre las masas, es constante; el período orbital de m_1 y m_2 alrededor de su centro de masas debe ser 2π , y la constante universal de gravedad $G = 1$. Considerando el párrafo anterior, se tiene que la energía de Kepler, $E_{Kep} = -\frac{1}{2a}$, donde a es el semieje mayor de la elipse descrita por la órbita de la partícula de prueba alrededor del cuerpo de mayor masa. Se pueden plantear dos posibles escenarios para el espacio de fases posibles para la partícula de prueba:

- $E_{Kep} < 0$: se obtienen órbitas elípticas y circulares.
- $E_{Kep} > 0$: se obtienen órbitas hiperbólicas que van desde y hacia el infinito

Existe un tercer caso, que es crítico, se presenta cuando $E_{kep} = 0$. Esta situación provoca la obtención de órbitas parabólicas no limitadas. Circunscribiéndolo al problema de Kepler, se tiene un espacio de fase en cuatro dimensiones, correspondiendo dos coordenadas a la posición, y las otras dos a las velocidades respectivas. En [9], se define la “superficie de energía”, que corresponde al conjunto tridimensional en el espacio de fase tetradimensional. De forma tal, que permite visualizar el espacio fase formado por capas, donde capa capa corresponde a un cierto valor de energía. “Se dice que las superficies de energía folian el espacio de fase”. En el problema restringido de los tres cuerpos, se considera que $z = \dot{z} = 0$. Además de aplicar la integral de Jacobi.

Superficies de energía. Al igualar la integral de energía (2.12) con una constante, por ejemplo e , se obtiene la superficie de energía \mathcal{M} , dada por:

$$\mathcal{M}(\mu, e) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid E(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = e\} \quad (2.14)$$

Al considerar μ constante, para un cierto valor de e , la superficie de energía $\mathcal{M}(\mu, e)$ es parte de una superficie tridimensional insertada en el espacio de fase tetradimensional.

Esfera de Hill. La Región de Posible Movimiento. Al proyectar la superficie de energía sobre el marco giratorio, en el plano xy , se obtiene la región de posible movimiento para una partícula, ubicándose entre los puntos de Lagrange L_1 y L_2 . Se sabe que $\mathcal{M}(\mu, e)$ corresponde a la superficie de energía, pero en la esfera de Hill, o región de Hill, en el límite de esta curva la velocidad de la partícula es cero. Si se considera una proyección de la superficie de energía, en el espacio de posición, se puede expresar como:

$$M(\mu, e) = \{(x, y) \mid \bar{U}(x, y) \leq e\} \quad (2.15)$$

Curvas de velocidad cero. Los límites de la esfera de Hill. En estos puntos la energía cinética se hace cero, debido a la que la velocidad $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, desaparece. Al analizar la ecuación (2.15), se puede deducir que la partícula sólo puede moverse donde la energía cinética es positiva. En la región donde la energía cinética es negativa, no es posible el movimiento de la partícula, y se le llama *reino prohibido*. Se debe tener presente que la energía total, E , está dada por:

$$E = (x, y, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \bar{U}(x, y, z) \quad (2.16)$$

Al considerar que la energía total es constante, se puede establecer $E(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = e$. Esto es equivalente a fijar una altura en el gráfico de potencial efectivo, $\bar{U}(x, y)$, tal como se muestra en la Figura 2.5. De dicha imagen se deduce que:

- Alrededor de m_1 o m_2 se tiene un mínimo local de energía potencial, llamado Pozo de potencial.
- Al alejarse de m_1 o m_2 , que domina el término correspondiente a la fuerza centrífuga. Esto se aprecia en la ecuación (2.8)
- Aplicando cálculo multivariable, se determinan cinco puntos críticos donde la pendiente es cero: tres puntos de silla, a lo largo del eje x y dos puntos simétricos fuera de dicho eje. Estos son los puntos etiquetados como $L_i = 1, \dots, 5$, en la Figura 2.5

- Se pueden definir cinco casos, en términos del valor de la energía total, Sea E_i de una partícula en reposo en L_i . Se considera que $E_5 = E_4 > E_3 > E_2 > E_1$.

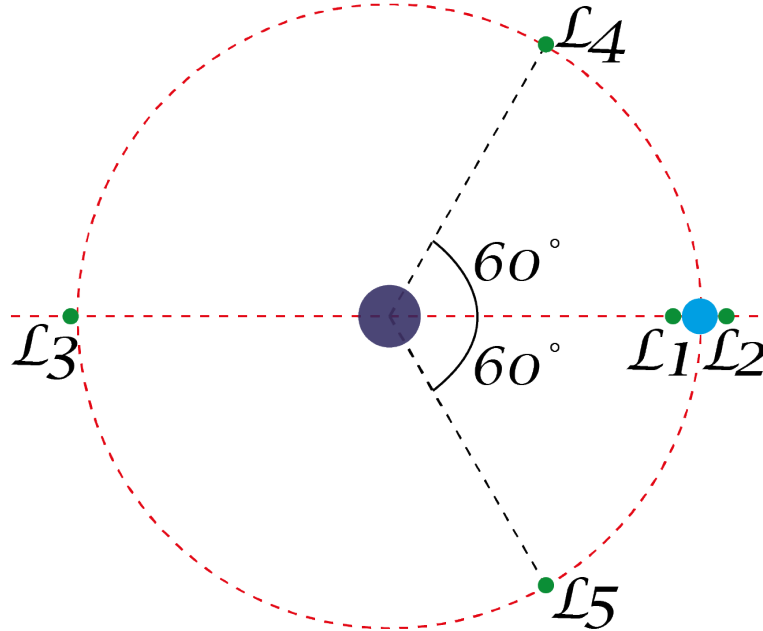


Figura 2.5: Gráfica del potencial efectivo $\bar{U}(x, y)$ para $\mu = 0,3$. Los puntos críticos corresponden a $L_i, i = 1, \dots, 5$. Fuente: Propia

Los cinco casos de energía en la región de Hill. En la ecuación (2.14), se puede identificar que existen cinco configuraciones básicas para la región de Hill, considerando un μ dado, con sus correspondientes intervalos de energía e . Para mayor comprensión los análisis se realizarán sobre la Figura 2.6. Las zonas blancas, son las regiones de Hill, y las sombreadas son el reino prohibido.

- **Caso 1.** $E < E_1$: Si la energía está por debajo de E_1 , la partícula no se puede mover entre los reinos alrededor de m_1 y m_2 .
- **Caso 2.** $E_1 < E < E_2$: En este caso se abre un pasillo entre los reinos de m_1 y m_2 , permitiendo que la partícula se mueva libremente entre ambas zonas.
- **Caso 3.** $E_2 < E < E_3$: Una vez superado el valor de E_2 se crea una salida por L_2 , posibilitando que la partícula se mueva hacia el reino prohibido.
- **Caso 4.** $E_3 < E < -\frac{3}{2} = E_4 = E_5$: La partícula se puede mover libremente a través del reino de m_1 , debido al pasillo creado en L_3 .

- **Caso 5.** $-\frac{3}{2} < E$: El reino prohibido desaparece, permitiendo que a partícula se mueva libremente por todo el plano $x - y$.

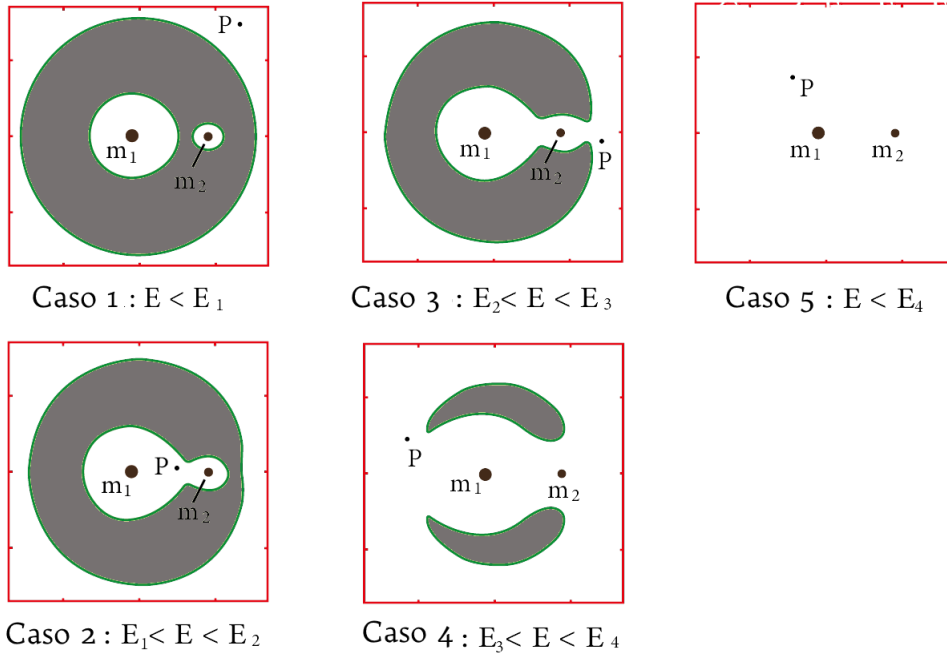


Figura 2.6: **Reinos de movimiento posible.** Las curvas de velocidad cero para cinco valores de energía, se muestran en el plano $x - y$ para $\mu = 0,3$. La zona blanca de estas curvas son accesibles por la partícula, P , para un valor de energía dado, $E = e$. La parte del plano $x - y$ que está sombreada es inaccesible para una energía dada y se conoce como el reino prohibido. El reino accesible más externo, conocido como el reino exterior, se extiende hasta el infinito. En el quinto caso (e), el reino prohibido se desvanece y es posible el movimiento en todo el plano $x - y$. Fuente: Propia

Reinos de movimiento posible. En la Figura 2.6 se pueden definir los reinos existentes. En el Caso 1, la región que rodea a m_1 se conoce como *reino interior*, o *reino de m_1* . La región pequeña que acompaña a m_2 , es el *reino de m_2* . La exterior que se encuentra fuera de los reinos m_1 y m_2 , se llama *reino exterior*. Este estudio se centra en el Caso 3, pero ocasionalmente se refiere al Caso 2. Los valores de energía para μ pequeños se pueden obtener sin mayores inconvenientes. La Figura 2.7 representa graficamente los valores de E_i en función de μ .

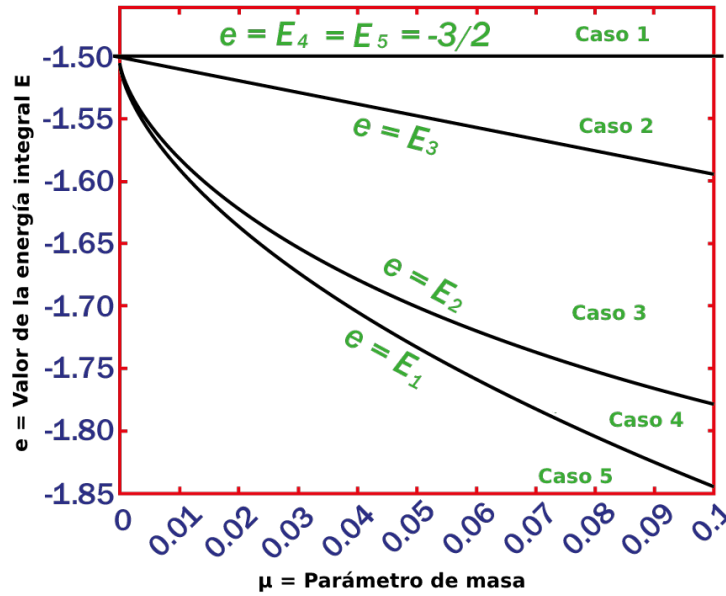


Figura 2.7: Los gráficos de E_i como función de μ dividen el plano μ - e en los cinco casos de movimiento posible. Las regiones de Hill para los casos 1 a 4 se muestran en la Figura 2.6. Fuente: Propia

2.5. Ubicación de los puntos de equilibrio

Las ecuaciones que describen el movimiento del problema restringido de los tres cuerpos, quedan expresadas de la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= 2v_y - \bar{U}_x \\
 \dot{v}_y &= -2v_x - \bar{U}_y
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Para obtener los puntos críticos del sistema, se deben hacer cero los términos del lado derecho del sistema dinámico dado por la ecuación (2.17). Se puede deducir que en el espacio (x, y, v_x, v_y) los puntos de equilibrio son de la forma $(x_e, y_e, 0, 0)$. Donde los puntos (x_e, y_e) , corresponden a los puntos críticos de la Figura 2.5. El problema restringido de los tres cuerpos, admite cinco soluciones para sus puntos de equilibrio, que se muestran en la Figura 2.8

Como se describió, el PCR3BP admite cinco soluciones de punto de equilibrio, las cuales se muestran en la Figura 2.8:

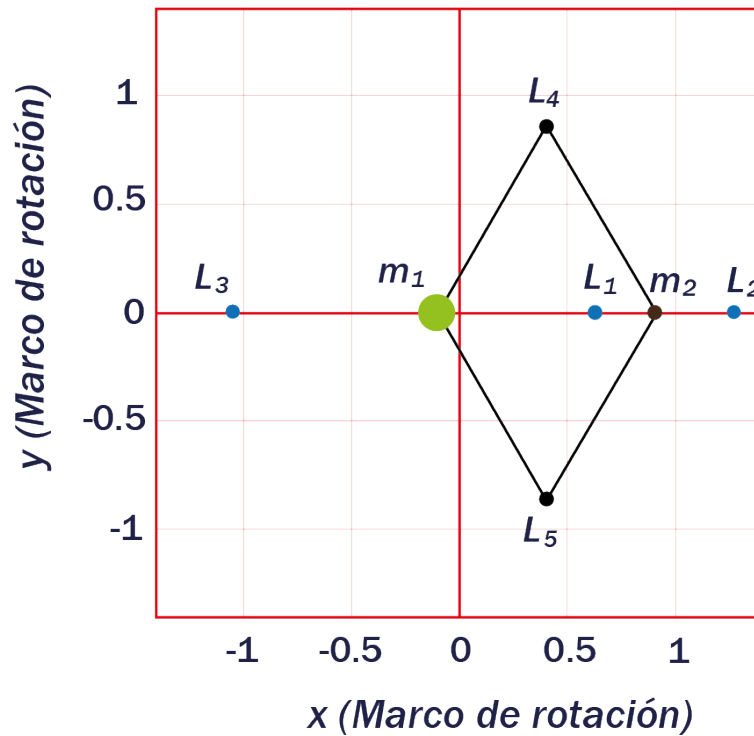


Figura 2.8: Puntos de equilibrio del problema restringido de tres cuerpos en el plano $x - y$ del marco rotacional con el movimiento medio de la órbita de m_1 y m_2 . Fuente: Propia

- tres equilibrios colineales en el eje x , llamados L_1 , L_2 , L_3 ; y
- dos puntos equiláteros llamados L_4 , L_5 .

Estos puntos de equilibrio se pueden encontrar de la siguiente manera.

Los Puntos Equiláteros. Primero, se buscan soluciones que no estén en la línea que une las primarias, es decir, $y \neq 0$. Usando las distancias r_1, r_2 como variables y la relación

$$x^2 + y^2 = (1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2 - \mu(1 - \mu)$$

se tiene que \bar{U} se puede escribir como

$$-\bar{U}(r_1, r_2) = \frac{1}{2}(1 - \mu)r_1^2 + \frac{1}{2}\mu r_2^2 + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

Usando la regla de la cadena, es sencillo mostrar que si $y \neq 0$, entonces $\bar{U}(r_1, r_2)$ y $\bar{U}(x, y)$ tienen los mismos puntos críticos.

$$\begin{aligned} \bar{U}_x &= \bar{U}_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \bar{U}_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = \bar{U}_{r_1} \frac{x + \mu}{r_1} + \bar{U}_{r_2} \frac{x - (1 - \mu)}{r_2} = 0 \\ \bar{U}_y &= \bar{U}_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \bar{U}_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = \bar{U}_{r_1} \frac{y}{r_1} + \bar{U}_{r_2} \frac{y}{r_2} = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el siguiente sistema, se obtiene la solución única $r_1=r_2=1$.

$$\begin{aligned} 0 &= -\bar{U}_{r_1} = \mu r_2 - \frac{\mu}{r_2^2} \\ 0 &= -\bar{U}_{r_2} = (1 - \mu)r_1 - \frac{(1 - \mu)}{r_2^2} \end{aligned}$$

Graficamente esta solución se encuentra en el vértice del triángulo equilátero cuya base es el segmento de recta que une las masas primarias, m_1 y m_2 . Por convención, L_4 se ubica en el semiplano superior, mientras que L_5 se posiciona en el semiplano inferior. Estos puntos se encuentran 60° por detrás de m_2 , y 60° por delante de m_1 .

Los puntos colineales. A lo largo del eje x , se ubican los puntos L_1 , L_2 y L_3 , los cuales son colineales. Para este caso el potencial efectivo queda definido como

$$\bar{U}(x, 0) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1 - \mu}{|x + \mu|} - \frac{\mu}{|x - 1 + \mu|}$$

Se pueden obtener tres puntos críticos para $\bar{U}(x, 0)$, que corresponden a:

$$(i)(-\infty, -\mu), \quad (ii)(-\mu, 1 - \mu), \quad (iii)(1 - \mu, \infty)$$

Al determinar la segunda derivada de \bar{U} , se puede apreciar que siempre es negativa y $\bar{U}(x, 0)$ es cóncava en cada intervalo.

$$\frac{d^2\bar{U}}{dx^2}(x, 0) = -1 - \frac{1 - \mu}{|x + \mu|^3} - \frac{\mu}{|x - 1 + \mu|^3}$$

La Figura 2.9, es un bosquejo de la gráfica de $\bar{U}(x, 0)$

Localización de los puntos colineales de equilibrio. Para determinar los máximos de $\bar{U}(x, 0)$, se deben obtener las soluciones para $\frac{d}{dx}\bar{U}(x, 0) = 0$. La distancia más corta entre L_1 y L_2 está dada por la solución positiva de la ecuación:

$$\gamma^5 \mp (3 - \mu)\gamma^4 + (3 - 2\mu)\gamma^3 - \mu\gamma^2 \pm 2\mu\gamma - \mu = 0 \quad (2.18)$$

donde el signo superior es para γ_1 y el inferior para γ_2 . La distancia entre L_3 y el primario mayor, se puede obtener de γ_3

Según Kolomaro[9], se han buscado formas de representar las soluciones en términos de series, sin buenos resultados. Sin embargo, basta considerar las siguientes, para el caso del presente estudio.

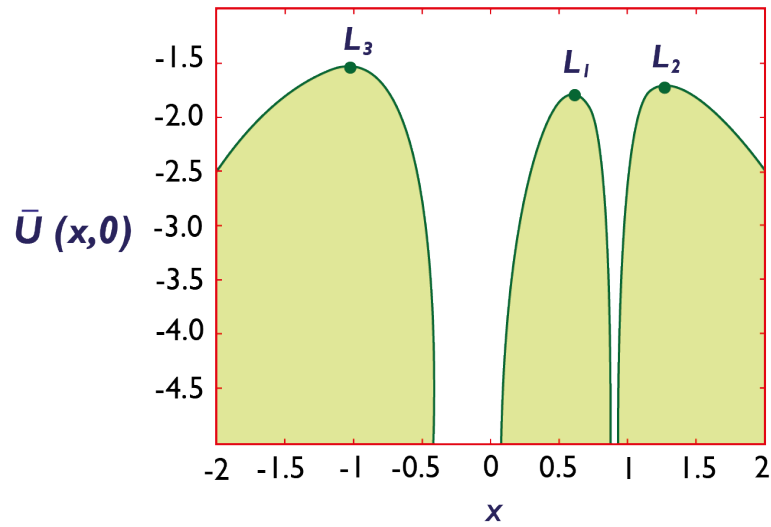


Figura 2.9: La línea sólida es la intersección de $\bar{U}(x,0)$ en la Figura 2.5 con el plano definido por $y = 0$. En las ubicaciones x de m_1 y m_2 , la función se sumerge en $-\infty$. Los máximos de $\bar{U}(x,0)$ corresponden a los puntos de equilibrio colineal inestable L_1 , L_2 y L_3 . Fuente: propia

$$\gamma_1 = r_h \left(1 - \frac{1}{3}r_h - \frac{1}{9}r_h^2 + \dots \right) \quad (2.19)$$

$$\gamma_2 = r_h \left(1 + \frac{1}{3}r_h - \frac{1}{9}r_h^2 + \dots \right) \quad (2.20)$$

donde $r_h = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, es el radio de la esfera de Hill. La ecuación (2.18) puede ser resuelta mediante métodos numéricos, utilizando Newton.

2.6. Linealización cerca de los Equilibrios Colineales

Se estudia el comportamiento de las trayectorias de las partículas cerca de los dos puntos de libración L_1 y L_2 , que se encuentran a ambos lados de m_2 a lo largo del eje x . Particularmente es de interés el caso de partículas que tienen una energía justo por encima de la del punto crítico L_2 , es decir, $E > E_2$ en el caso 3.

Como se muestra en la Figura 2.6, la región de posible movimiento para el caso 3 contiene un cuello alrededor de cada punto de liberación. Así, una partícula que comienza en el

reino exterior puede pasar a través del cuello alrededor de L_2 al reino m_2 , y luego pasar a través del cuello alrededor de L_1 al reino m_1 , y así sucesivamente.

El objetivo de las próximas secciones es describir la geometría de las trayectorias en las regiones del cuello. Considerando las ecuaciones de movimiento linealizadas cerca del punto de equilibrio dentro de la región del cuello. En virtud de la generalización de Moser de un teorema de Lyapunov, todos los resultados cualitativos de tal discusión se trasladan a las ecuaciones no lineales completas. En las siguientes secciones, se utiliza L para indicar L_1 o L_2 . Además, para una energía fija E , considere una vecindad de L en la superficie de energía, cuyas proyecciones espaciales de posición son las regiones de cuello descritas anteriormente. Esta es la región de equilibrio y se denota por superficie de energía. Enfoque hamiltoniano. Para encontrar las ecuaciones linealizadas alrededor del punto de liberación colineal L con coordenadas $(x_e, y_e, x_e, y_e) = (x_e, 0, 0, 0)$, se necesitan los términos cuadráticos del Hamiltoniano H en la ecuación (2.10) como desarrollado sobre $(x_e, y_e, p_{x_e}, p_{y_e}) = (x_e, 0, 0, x_e)$. Después de hacer un cambio de coordenadas con $(x_e, 0, 0, x_e)$ como origen, estos términos cuadráticos forman la función hamiltoniana para las ecuaciones linealizadas, que llamaremos H_l .

$$H_l = \frac{1}{2} \left[(p_x + y)^2 + (p_y - x)^2 - ax^2 + by^2 \right], \quad (2.21)$$

donde a y b están definidos por $a = 2\bar{\mu} + 1$, $b = \bar{\mu} - 1$ y donde

$$\bar{\mu} = \mu |x_e - 1 + \mu|^{-3} + (1 - \mu) |x_e + \mu|^{-3}.$$

Se puede demostrar que tanto a como b son constantes positivas.

Un breve cálculo da las ecuaciones linealizadas en la forma Hamiltoniana.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H_l}{\partial p_x} = p_x + y, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H_l}{\partial p_y} = p_y - x, \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H_l}{\partial x} = p_y - x + ax, \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H_l}{\partial y} = -p_x - y - by. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Enfoque Lagrangiano. Usando la transformación inversa de Legendre:

$$v_x = p_x + y, \quad v_y = p_y - x,$$

donde v_x , v_y corresponden a la velocidad en el sistema de coordenadas rotatorio, se obtienen las ecuaciones linealizadas en el Lagrangiano para

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= 2v_y + ax \\ \dot{v}_y &= -2v_x - by\end{aligned}\tag{2.23}$$

que es la linealización de las ecuaciones (2.8) alrededor del punto de equilibrio $(x_e, 0, 0, 0)$. La integral H_l de (2.21) ahora aparece como

$$E_l = \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 - ax^2 + by^2)\tag{2.24}$$

que corresponde a la integral de energía E del problema restringido. Nótese que la superficie cero de la integral E_1 corresponde a la superficie de energía que pasa por el punto de liberación. Por lo tanto, se estudian las soluciones de las ecuaciones (2.23) en la superficie $E_1 = \varepsilon > 0$ que corresponde al caso donde la región de Hill contiene un cuello alrededor del punto de liberación.

2.7. Geometría de Soluciones cerca del equilibrio

Analizando las ecuaciones linealizadas (2.23) es posible encontrar los valores propios del sistema lineal que tienen la forma $\mp\lambda$ y $\mp i\nu$, donde λ y ν son constantes positivas. Los vectores propios se describen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}u_1 &= (1, -\sigma, \lambda, -\lambda\sigma) \\ u_2 &= (1, \sigma, -\lambda, -\lambda\sigma) \\ w_1 &= (1, -i\tau, i\nu, \nu\tau) \\ w_2 &= (1, i\tau, -i\nu, \nu\tau)\end{aligned}$$

Donde σ y τ son constantes con $\sigma > 0$ y $\tau < 0$

Valores Propios Para poder determinar los valores propios de las ecuaciones linealizadas (2.23), se determina el polinomio característico de:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -b & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix},$$

es dado por

$$p(\beta) = \beta^4 + (2 - \bar{\mu})^2 \beta^2 + (1 + \bar{\mu} - 2\bar{\mu}^2) \quad (2.25)$$

Sea $\alpha = \beta^2$, podemos identificar las siguientes raíces de $p = (\alpha)$

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\mu} - 2 + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\bar{\mu} - 2 - \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}}{2} \quad (2.26)$$

Observando que el último término de $p = (\alpha) = 0$ es igual a $-ab$ que es negativo, esta ecuación cuadrática debe tener raíz positiva y una negativa. Entonces, se tiene $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$. Por lo que los valores propios de las ecuaciones linealizadas son de la forma $\pm\lambda$ y $\pm iv$, donde $\lambda = \sqrt{\alpha_1}$ y $v = \sqrt{\alpha_2}$.

Vectores Propios Sea $v = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ un vector propio de las ecuaciones linealizadas. Si β es un valor propio, entonces $Av = \beta v$ y se tienen las siguientes relaciones:

$$k_3 = \beta k_1, \quad ak_1 + 2k_4 = \beta k_3$$

$$k_4 = \beta k_2, \quad -bk_2 - 2k_3 = \beta k_4$$

Se puede observar que $k_1 \neq 0$, de lo contrario $k_2 = k_3 = k_4 = 0$ y $v = 0$. Por lo tanto, k_1 puede tomarse como 1 y las ecuaciones que relacionan los componentes de v indican que v puede tener la siguiente forma:

$$v = (1, k_2, \beta, \beta k_2),$$

y

$$a + 2(\beta) = \beta^2, \quad -bk_2 - 2\beta = \beta^2 k_2$$

Primero sea $\beta = \lambda$ y después $\beta = -\lambda$ para obtener

$$u_1 = (1, k_2, \lambda, \lambda k_2)$$

$$u_2 = (1, k'_2, -\lambda, -\lambda k'_2)$$

donde

$$\begin{aligned} a + 2\lambda k_2 &= \lambda^2 \\ -bk_2 - 2\lambda &= \lambda^2 k_2 \\ a - 2\lambda k'_2 &= \lambda^2 \\ -bk'_2 + 2\lambda &= \lambda^2 k'_2 \end{aligned}$$

De la primera y la segunda ecuación se prueba que $k_2 = -k'_2$, y denotando $k'_2 = \sigma$, se tiene

$$\sigma = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + b} > 0$$

De manera similar, tomando $\beta = \lambda$, luego $\beta = -\lambda$, se obtiene

$$u_1 = (1, -i\sigma, i\nu, \nu\tau), \quad u_1 = (1, i\sigma, -i\nu, \nu\tau),$$

donde

$$\tau = -\left(\frac{\nu^2 + a}{2\nu}\right) > 0$$

Vectores propios como ejes para un nuevo sistema de coordenadas. Para comprender mejor la estructura de la órbita en el espacio de fase, se hace un cambio lineal de coordenadas con los vectores propios, u_1, u_2, w_1, w_2 , como los ejes del nuevo sistema. Usando las nuevas coordenadas correspondientes $(\epsilon, \eta, \zeta_1, \zeta_2)$, las ecuaciones diferenciales asumen la forma simple

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \lambda\xi, \\ \dot{\eta} &= -\lambda\eta, \\ \dot{\zeta}_1 &= \nu\zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 &= -\nu\zeta_1, \end{aligned} \tag{2.27}$$

y la función de energía (2.23) se convierte en

$$E_l = \lambda\xi\eta + \frac{\nu}{2} (\zeta_1^2 + \zeta_2^2). \tag{2.28}$$

Las soluciones de las ecuaciones (2.27) se pueden escribir convenientemente como

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi^0 e^{\lambda t}, \\ \eta(t) &= \eta^0 e^{-\lambda t}, \\ \zeta(t) &= \zeta_1(t) + i\zeta_2(t) = \zeta^0 e^{-i\nu t}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

Estas ecuaciones linealizadas admiten integrales además de la función de energía (2.28); a saber, las funciones $\eta\xi$ y $|\zeta|^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$ son constantes a lo largo de las soluciones.

Espacio de fase de la región de equilibrio. Para ε y c positivos, la región \mathcal{R} , que está determinada por

$$E_l = \varepsilon, \quad \text{and } |\eta - \xi| \leq c, \tag{2.30}$$

que es homeomorfo al producto de dos esferas y un intervalo; es decir, para cada valor fijo de η en el intervalo $I = [-c, c]$, la ecuación $E_1 = \varepsilon$ determina la doble esfera

$$\frac{\lambda}{4}(\eta + \xi)^2 + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = \varepsilon + \frac{\lambda}{4}(\eta - \xi)^2.$$

La esfera límite de \mathcal{R} para la que $\eta - \xi = -c$ se llamará n_1 , y aquella donde $\eta - \xi = c$, n_2 (ver Figura 2.10). Se llama ecuador al conjunto de puntos en cada esfera límite donde $\eta + \xi = 0$, y los conjuntos donde $\eta + \xi > 0$ o $\eta + \xi < 0$ se denominarán hemisferios norte y sur, respectivamente. y la función de energía se convierten en las soluciones de las ecuaciones.

Flujo de las Regiones de Equilibrio Para analizar el flujo en R simplemente se consideran las proyecciones en el plano $\eta - \epsilon$ y ζ , respectivamente. En el primer caso se observa la imagen estándar de un punto crítico inestable, y en el segundo de un centro. La Figura 2.10 ilustra esquemáticamente el flujo en el plano $\eta - \epsilon$. Los ejes están inclinados 45° para corresponder a la dirección del flujo.

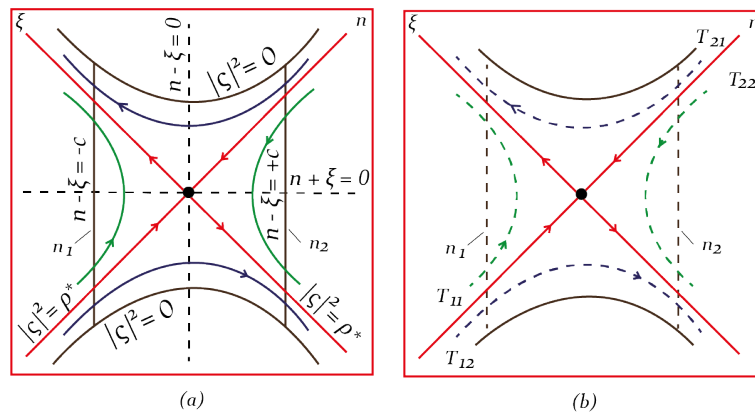


Figura 2.10: Gráfica de la proyección del plano $\eta - \epsilon$ (a) Región de equilibrio (b) Trayectorias adicionales etiquetadas con el subíndice T_{ij}

Representación de las regiones de Equilibrio de McGehee Entre los años 1.968 y 1.969 se propuso una representación para visualizar la región de equilibrio, la cual se denota

como R asumiendo que R es homeomorfo a $S^2 * I$. Se puede observar la representación esférica en la Figura 2.11.

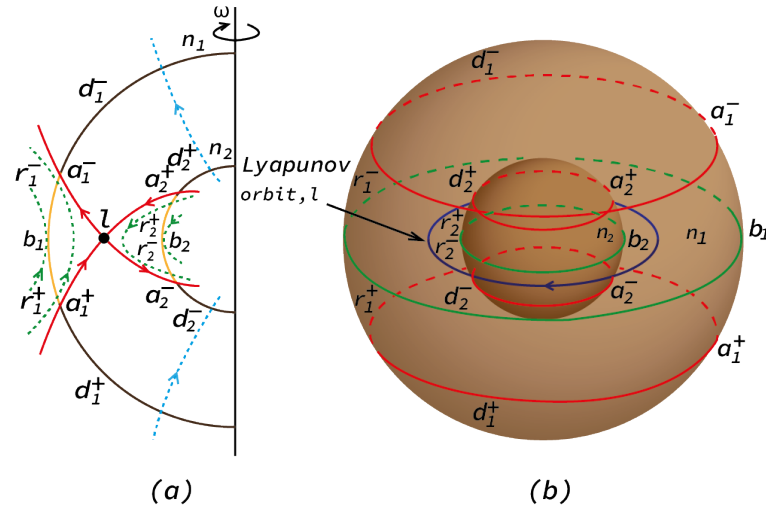


Figura 2.11: Gráfica de la representación de las regiones de equilibrio de McGehee (a) La sección transversal o dentro de la región (b) Representación del flujo dentro de la región.

2.8. Asteroides Troyanos

Maximilian Franz Joseph Cornelius Wolf, Max Wolf, fue un prodigio en la búsqueda de asteroides a través de la fotografía. Es así cómo en los inicios de 1.906 ayudó a tener otra mirada respecto al Sistema Solar.

Wolf en 1.890 declaró que planeaba utilizar la fotografía de campo amplio para descubrir nuevos asteroides. Además fue la primera persona en utilizar el “comparador estéreo” que permitía ver dos fotografías del cielo a la vez.

El 22 de febrero de 1906 [10] descubrió un asteroide que tenía un órbita inusualmente extraña. A diferencia de otros asteroides, en este caso el cuerpo celeste siguió a Júpiter, pareciendo que estaba atrapado por la gravedad del planeta alrededor del Sol. El astrónomo Adolf Berberich pudo comprobar que el asteroide se encontraba 60° por delante de Júpiter. Esto llevó a los investigadores, incluido Carl Charlier [11], recordar que mucho antes Joseph-Louis Lagrange lo había predicho. El argumento de Lagrange era que si un cuerpo pequeño (asteroide) se colocaba en uno de los dos puntos estables de la órbita de un planeta alrededor del Sol (Puntos de Lagrange L4 y L5), el cuerpo menor permanecería estacionario desde la perspectiva del planeta debido a las fuerzas gravitacionales de las masas

mayores, planeta y Sol. Gracias a las fotografías de Wolf y las observaciones de Charlier, se tenían datos empíricos de lo mencionado por Lagrange. Se estableció que el asteroide fotografiado por Wolf, se encontraba en el punto L4. Posteriormente, se descubrieron otros dos asteroides de características similares.

El descubrimiento de estos tres asteroides, ubicados en los puntos de Lagrange, llevó al astrónomo Johann Palisa [10] llamarlos con los nombres de Aquiles, Patroclo y Héctor, personajes de la Iliada.

En la medida que los astrónomos descubrieron asteroides escondidos en los puntos de Lagrange, se referían a ellos como *Asteroides Troyanos*, reservándose los nombres de "La Iliada", para los troyanos de Júpiter. Tiempo después se acordó llamar a los asteroides en L4 con caracteres griegos y los asteroides en L5 con caracteres troyanos.

Desde que Lagrange en 1.772 hizo referencia a estos cuerpos celestes que actualmente llamamos Asteroides Troyanos, han existido múltiples investigaciones y publicaciones científicas refiriéndose a los mismos. Una serie de documentos publicados por Érdi (1.978, 1.979, 1.981, 1.984, 1.988)[12] en *Celestial Mechanics* sobre la dinámica de este tipo de asteroides; obtuvo una solución de segundo orden para el movimiento tridimensional de los Troyanos en el marco del Problema Restringido de los Tres Cuerpos.

Las dudas planteadas por Levison et al. (1.997) son muy pertinentes, ya que cuestiona ¿qué causa la inestabilidad fuera de esta región?, ¿es la inestabilidad un mecanismo intrínseco al Problema de los tres Cuerpos, o son perturbaciones externas de otros planetas responsables estas inestabilidades?. La gran "desigualdad" que corresponde a la resonancia cercana entre Saturno y Júpiter, podría ser causante de la inestabilidad de los asteroides Troyanos. F. Marzani et al. (2.002)[12] señalan cuán complejo ha sido el determinar la estabilidad orbital de los Troyanos, a largo plazo. En su trabajo *Origin and evolution of Trojans Asteroids*, aducen a Rabe[13] quién intentó resolver analíticamente el problema restringido de los tres cuerpos, empleando una región en el espacio de amplitud de excentricidad-liberación para una estabilidad indefinida. Georgilli & Skokos [14] encontraron un área de estabilidad pero no es posible compararla con la población Troyana de Júpiter; de hecho los autores señalan que el resultado es algo restrictivo debido a que está limitado sólo a algunas observaciones.

Capítulo 3

Objetivos

Esta investigación, se basa en el estudio de las regiones de estabilidad L4, zona en que se ubican los asteroides Troyanos. Analizando tres sistemas: Sistema Solar, Planetas-Satélites Naturales y el sistema extrasolar Trappist 1.

Los objetivos específicos son los siguientes:

1. Aportar conocimiento de los resultados obtenidos en la región de estabilidad L4 de los puntos Lagrangianos.
2. Brindar un enfoque de referencia de los posibles escenarios que podrían plantearse como puntos de colisión en un campo vectorial.
3. Determinar un método numérico válido para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales asociado al problema restringido de los tres cuerpos.
4. Cuantificar el error producido en la integración, en términos de la solución encontrada.
5. Identificar las regiones estables, inestables, de colisión con m_1 , de colisión con m_2 .
6. Cuantificar aproximadamente el área correspondiente a la zona de estabilidad, en relación con la distancia entre masas primarias.
7. Explorar la solución del método numérico sobre sistemas exosolares.

Capítulo 4

Metodología de trabajo

El estudio se centra en la determinación de puntos estables alrededor de L4, además se identifican puntos de inestabilidad y de colisión con las masas primarias. Los resultados, se obtienen de la solución de la versión plana del sistema (2.11). Para lograr el objetivo, se debe resolver el sistema, considerando los siguientes criterios:

- Establecer una zona sobre la cuál integrar, para esto, L4 se ubica en el centro de dicha región, en el punto $(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
- Ya definida el área de trabajo, se establece un valor delta para obtener puntos contenidos en dicha superficie, creando un mallado de puntos (x_i, y_i) donde $i = 1, 2, \dots, m$, siendo m el número de puntos obtenidos en la malla. La Figura 4.1 nos muestra una malla realizada alrededor de L4.
- Las partículas que estamos considerando son todas cercanas a L4 con velocidad cero, esto quiere decir que, tendremos como condición inicial $(x_i, y_i, y_i, -x_i)$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ en el sistema Hamiltoniano que vamos a integrar.
- La integración numérica se debe detener, si se cumple que:
 - El valor de la componente y es < 0 . Esto implica que se trata de un punto inestable.
 - $|x| = (\mu - 1) < Tol$ y $|y| < Tol$. Implica colisión con m_1 . Tol , es un valor arbitrario cercano a cero, en este estudio $Tol = 0,01$.
 - $|x| = \mu < Tol$ y $|y| < Tol$. Implica colisión con m_2 . Tol , es un valor arbitrario cercano a cero, en este estudio $Tol = 0,01$

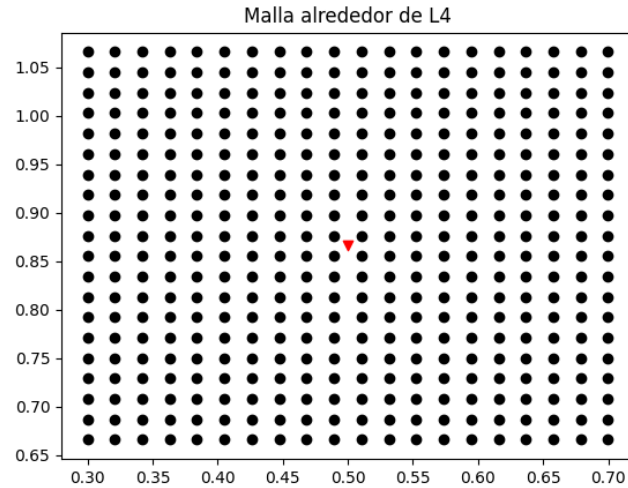


Figura 4.1: Malla alrededor de L4 de 20×20 en una ventana $0,4 \times 0,4$ un total de 400 puntos. El triángulo rojo indica la posición de L4

- Se alcanza el tiempo final sin que se cumpla una de las condiciones anteriores. Esto indica que dicho punto es estable en el tiempo en que se ha realkizado la simulación.
- Los resultados deben representarse gráficamente. Diferenciando si se tratan de puntos estables, inestables, colisiones con m_1 o colisiones con m_2 .
- Para cuantificar los puntos según su clasificación, se generan archivos *.xlsx* por grupo de puntos-tipo.
- Para determinar el área por tipo de punto, se relaciona la distancia entre las masas principales, con el valor delta de la cuadrícula.
- La cantidad de puntos estables, inestables, de colisión, y área respectiva, se almacenan en un archivo *.txt* para su posterior análisis.

La Figura 4.2 sintetiza la metodología utilizada para el desarrollo del presente trabajo.

4.1. Puntos de estabilidad alrededor de L4

Para el desarrollo del trabajo se considera un plano restringido dentro del marco de rotación, y la localización de los puntos de estabilidad de las regiones correspondientes a

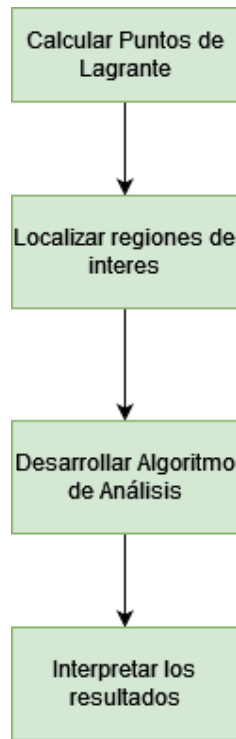


Figura 4.2: Diagrama de Metodología. Fuente: Propia

L4. Para conseguir los objetivos señalados, se utiliza el algoritmo presentado en la Figura 4.3.

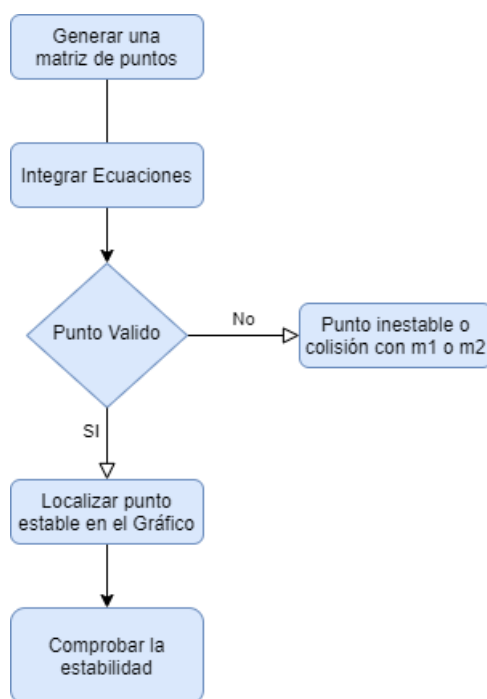


Figura 4.3: Algoritmo de localización para regiones de estabilidad. Fuente: Propia

En el momento de definir la técnica a utilizar, se evaluaron la resolución mediante la librería Heyoka de Python, que emplea el método de Taylor, y el método de Runge Kutta. El primero permite obtener los puntos de convergencia de forma más rápida, y con un error bajo. Sin embargo, Runge Kutta aparece mencionado en varios trabajos que abordan el Problema Restringido de los tres cuerpos, pero el error es mayor que Taylor, y la integración lleva más tiempo.

4.2. Librería de Python Heyoka

Es una librería desarrollado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, utilizando el método de integración de Taylor. Se puede acceder a este recurso en el sitio web <https://bluescarni.github.io/heyoka/>. Dispone de una serie de ejemplos para su uso, la limitante para el presente trabajo fue intervenir el código para detener la integración cuando $y < 0$. A pesar de no utilizar la librería, se obtuvieron ideas para implementar en un código propio, gráficas de error, gráficas de valores x e y , gráfica del comportamiento de la constante de integración o constante de Jacobi. En la Figura 4.4, se aprecia el comportamiento de una masa despreciable, respecto a las principales. La Figura 4.5, muestra el comportamiento del error relativo de Jacobi respecto al valor inicial, que corresponde

al especifica en el ejemplo. La Figura 4.6, muestra la órbita post integración. Y la Figura 4.7, muestra cómo se conserva la integral de Jacobi, durante la trayectoria. Esta prueba se realizó para una relación de masas $\mu = 0,01$.

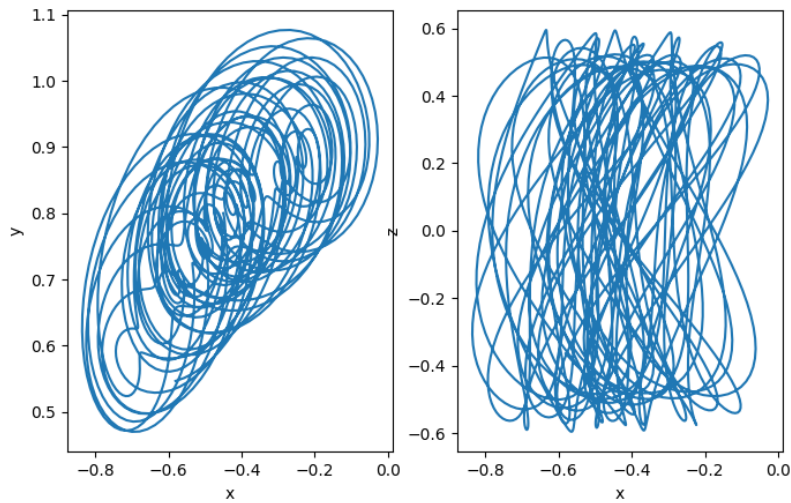


Figura 4.4: Comportamiento de una masa despreciable, respecto a dos masas principales, para $\mu = 0,01$. Fuente: Propia.

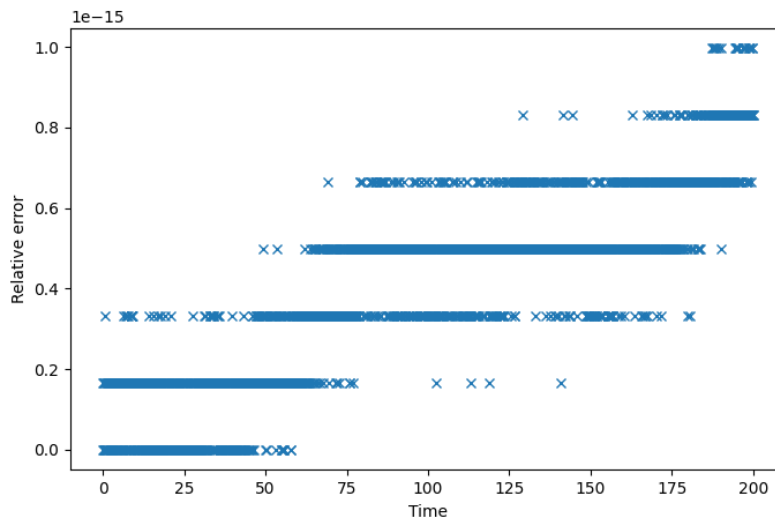


Figura 4.5: Comportamiento del error relativo de la constante de Jacobi 2.13, respecto a las condiciones iniciales, para $\mu = 0,01$. Fuente: Propia.

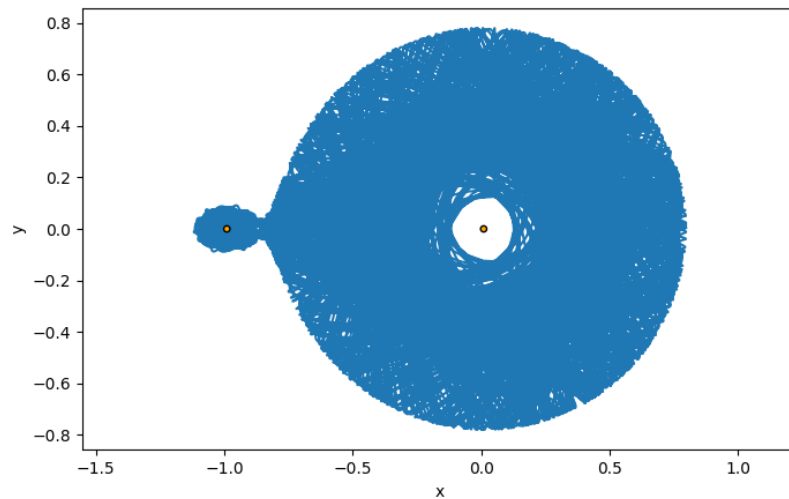


Figura 4.6: Órbita de la mesa despreciable, después de la integración, para $\mu = 0,01$.
Fuente: Propia.

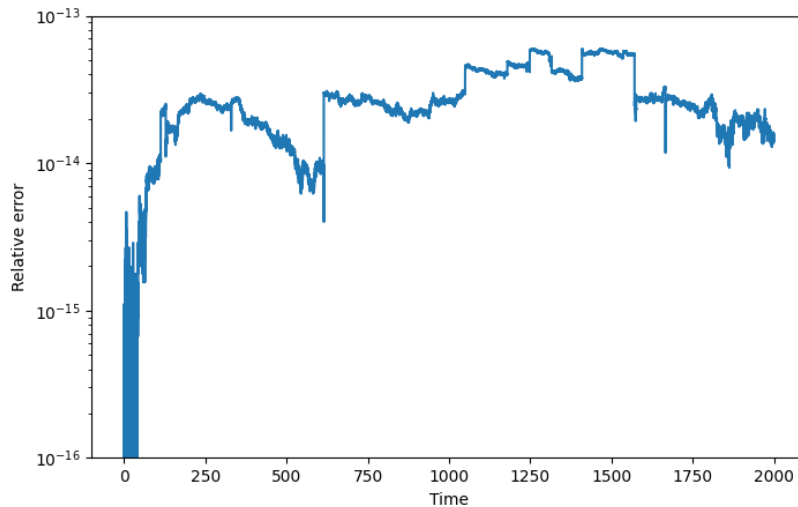


Figura 4.7: Conservación de la constante de Jacobi, para $\mu = 0,01$. Fuente: Propia.

4.3. Método numérico Runge Kutta

La idea de generalizar el método de Euler, permitiendo una serie de evaluaciones que la derivada tenga lugar en un paso, generalmente se atribuye a Runge (1895). Heun (1900) y Kutta (1901) hicieron contribuciones adicionales. Este último caracterizó completamente el conjunto de métodos de Runge-Kutta de orden 4, y propuso los primeros métodos de orden 5. No fue hasta el trabajo de Huta (1956, 1957), que se introdujeron los métodos de

sexto orden [3].

El método más utilizado, en la resolución del problema restringido de tres cuerpos es el de orden 4. Sin embargo, al realizar comparaciones con sus símiles de orden 5 y 6, se aprecian diferencias, que hicieron optar por el último de éstos. Para comprender los argumentos de dicha decisión, se realiza una revisión de los tres métodos, considerando el comportamiento de la constante de Jacobi, para un sistema con relación de masas $\mu = 0,01$. Además, se consideran diferentes tiempos finales de integración, $t_{f1} = 200$, $t_{f2} = 400$, $t_{f3} = 600$, para comprender el efecto que se produce. Se maneja una ventana de visualización, alrededor del punto estable $L4$, de dimensiones $0,4 \times 0,4$. Al aplicar este método numérico, es clave el computador que se utiliza, ya que dependiendo de sus características, y arquitectura, los cálculos involucrados pueden llevar un tiempo considerable. Para el presente caso, bajo las condiciones expuestas anteriormente, el obtener los puntos de estabilidad, lleva alrededor de ocho minutos, en una laptop con procesador Intel Core i5-8250 CPU@1.60GHz, 12GB memoria RAM, Windows 10. Se compararon los rendimientos en la misma máquina, pero con sistema operativo Rocky Linux, sin identificar mejoras significativas.

4.3.1. Método numérico Runge Kutta de orden 4

En la Figura 4.8, se pueden comparar los resultados al utilizar Runge Kutta de orden 4, bajo las condiciones indicadas anteriormente. Las imágenes corresponden al error de integración, considerando un punto estable cualquiera de los obtenidos por el método. Se aprecia que en la medida que aumenta el tiempo final, el error aumenta, pero no de forma significativa, siempre cercano a cero. Al observar las Figuras 4.8b y 4.8c, se ve que el error no disminuye de forma significativa, por ende se puede intuir que la elección de un tiempo final en este rango sería adecuado.

4.3.2. Método numérico Runge Kutta de orden 5

En la Figura 4.9, se ven los resultados de aplicar el método numérico de Runge Kutta de orden 5. El comportamiento es similar al obtenido con el método numérico de Runge Kutta de orden 4. Pero la diferencia existe en que el aumento del error es de forma suave, y no con interrupciones como ocurre en el método de menor orden. Comparando las imágenes 4.9b y 4.9c, se deduce que es aconsejable escoger un tiempo final para la integración, en dicho rango, debido a que es prácticamente constante.

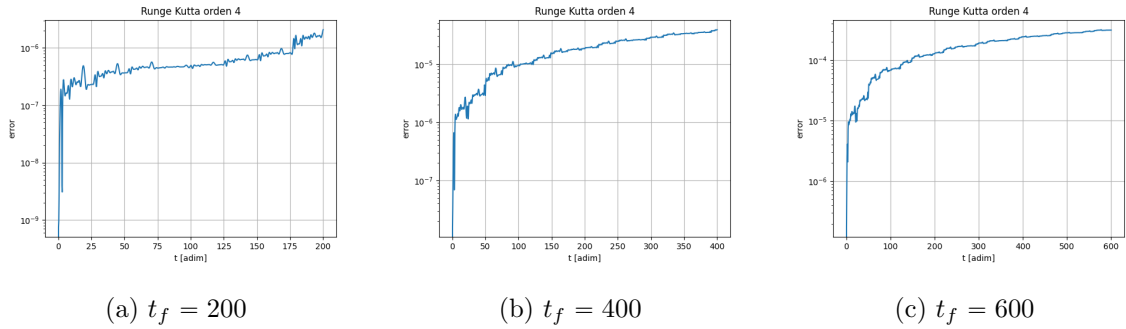


Figura 4.8: Runge Kutta orden 4. Comparación de errores, en función del tiempo final de integración.

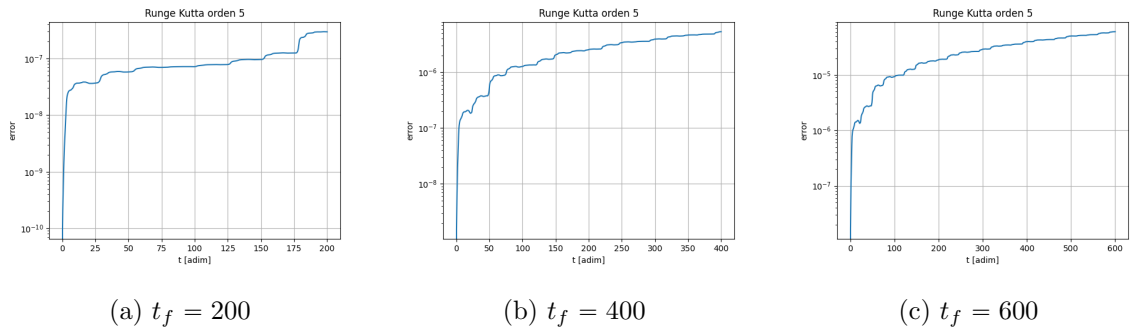


Figura 4.9: Método numérico Runge Kutta orden 5. Comparación de errores, en función del tiempo final de integración.

4.3.3. Método numérico Runge Kutta de orden 6

La Figura 4.10, son los resultados de aplicar el método numérico de Runge Kutta de orden 6. Al igual que los casos anteriores, es aconsejable escoger un tiempo final entre 400 y 600, debido a que en este rango el error casi no cambia manteniéndose próximo a cero. Si observa la Figura 4.10b, se aprecia cómo el error aumenta, pero siempre en el límite de cero, lo que representa una buena estimación para el estudio en curso.

Al realizar estas pruebas, se pudo determinar el método numérico a utilizar, Runge Kutta de orden 6, pero el valor final para el tiempo dependerá del sistema en estudio. Se debe considerar que se analizan sistemas cuasiperiódicos, los que por definición son aquellos que se repiten una y otra vez, sin ser periódicos.

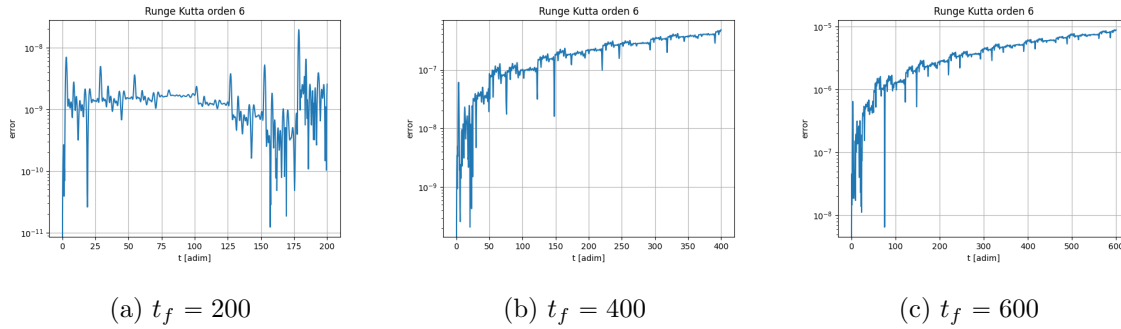


Figura 4.10: Método numérico Runge Kutta orden 6. Comparación de errores, en función del tiempo final de integración.

4.4. Cálculo de error de integración

Para el problema restringido circular de tres cuerpos la integral de Jacobi se conservará invariante a menos que la partícula tenga una aproximación a alguna de las masas primarias.

En consecuencia, para puntos estables, la integral de Jacobi permanece constante (o casi constante) durante la simulación. Entonces se calcula el Hamiltoniano usando la ecuación (2.16) para las condiciones iniciales y se compara con los Hamiltonianos de los valores obtenidos en cada iteración. Sea H_0 el valor del Hamiltoniano calculado para las condiciones iniciales y sea H_i el valor del Hamiltoniano calculada en los valores obtenidos en cada iteración, entonces el error relativo está dado por

$$E_r = \frac{|H_0 - H_i|}{H_0} \quad \forall i = 1, 2, \dots, M \quad (4.1)$$

siendo M la cantidad de pasos que necesita dar el método para llegar al tiempo final. Entonces, si la partícula es estable, se esperará un error tendiendo a cero.

En la Figura 4.11 se realiza una simulación considerando $\mu = 0,01$ con condiciones iniciales cercanas a L4, donde la partícula tiene una órbita estable. Se observa que durante todo el tiempo de simulación la partícula se mantiene alrededor de L4 que está representada en color rojo. En la Figura 4.12, se han calculado los errores relativos de la integral de Jacobi. Se observa que los errores no sobrepasan 10^{-11} . Otra manera de calcular el error es aplicar el logaritmo al valor absoluto de la diferencia de los Hamiltonianos, como se muestra en la figura 4.13 donde se aprecia mejor el comportamiento del error.

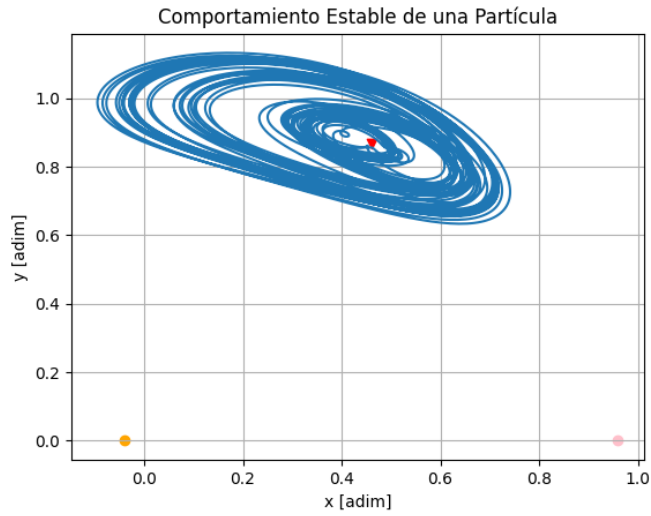


Figura 4.11: Simulación del P3BCR para $\mu = 0,01$, el círculo en naranja es m_1 , el círculo rosado es m_2 y el triángulo rojo es L_4

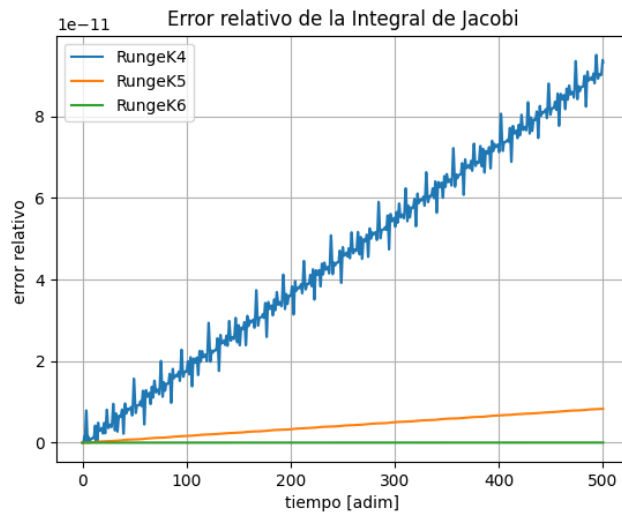


Figura 4.12: Cálculo de los errores relativos, la integral de Jacobi.

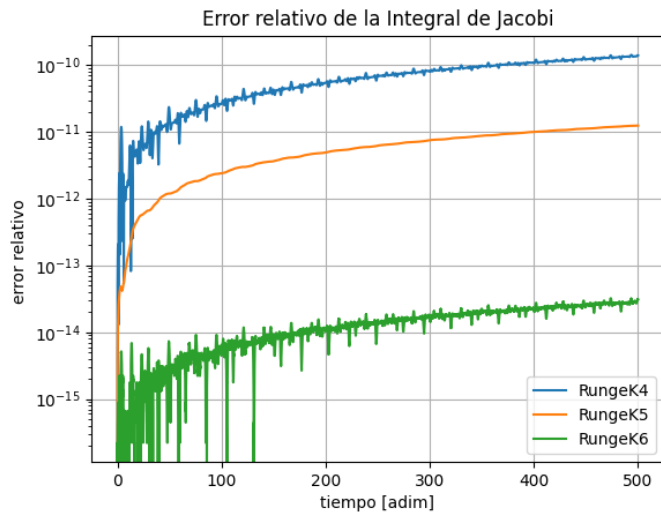


Figura 4.13: Cálculo de los errores relativos, la integral de Jacobi.

Capítulo 5

Regiones de Estabilidad para Trojanos en L4

En este capítulo se estudian las áreas de estabilidad en L4 ubicado en $(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$, observando el comportamiento de un grupo de partículas alrededor de L4 utilizando la simulación numérica de las ecuaciones de movimiento del P3CBR y considerando como condiciones iniciales pequeños desplazamientos de este punto con velocidad cero.

En la primera sección las observaciones se realizan con respecto al sol y los planetas del sistema solar. En la siguiente sección consideramos para el estudio los planetas del sistema solar y sus respectivos satélites, y en la última sección consideramos un sistema extrasolar denominado TRAPPIST-1.

5.1. SISTEMA SOLAR

En esta sección el Sol es considerado como la masa primaria m_1 (cuya masa es de 1.989×10^{30} kg) y los planetas del sistema solar como la primaria m_2 . La simulación numérica se realiza considerando una malla de 100×100 (alrededor de L4), en una ventana de $0,4 \times 0,4$ y un tiempo final de $t_f = 500$.

La nomenclatura utilizada es la siguiente: triángulo de color rojo, corresponde a la ubicación de L4; regiones de color azul, corresponden a puntos de estabilidad; zonas de color gris son regiones de inestabilidades; zonas de color café, colisión con m_2 ; zonas de color verde, colisión con m_1 .

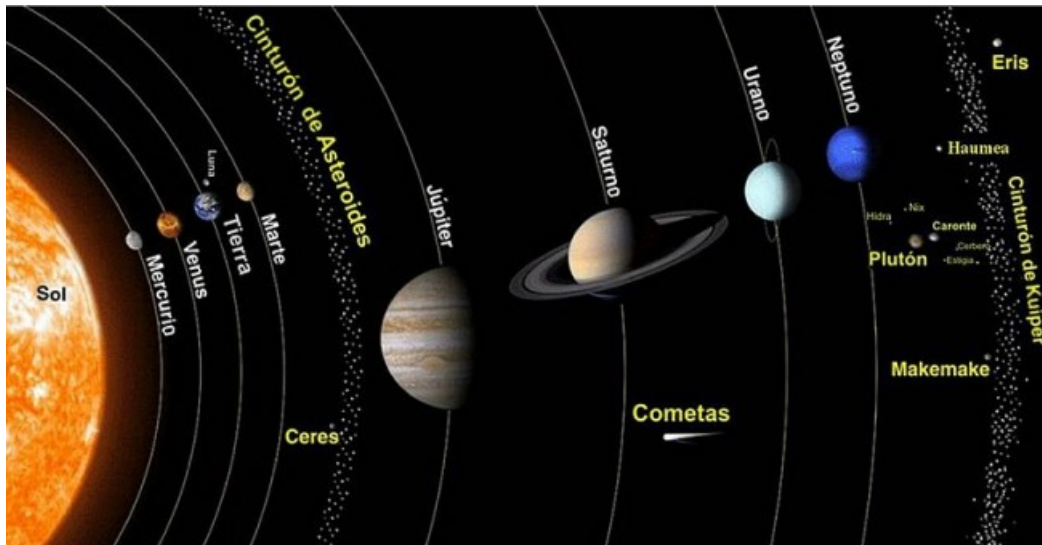


Figura 5.1: El Sistema Solar. Fuente: Wikimedia Commons.

5.1.1. Sol- Mercurio

Mercurio es el planeta del sistema solar más cercano al Sol y el menos masivo con 3.285×10^{23} kg, está a una distancia al sol de 58×10^6 km además no tiene satélites naturales. Hasta la actualidad no se han observado asteroides Troyanos cohabitando con Mercurio. Según [18] no existen asteroides troyanos longevos y una de sus causas es su tamaño en comparación con el Sol. La Figura 5.2 nos muestra las regiones de estabilidad en torno a L4 (en azul). La tabla 5.9 contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifican para el tiempo final, $t_f = 500$. Podemos observar que después de la simulación la cantidad de puntos estables hasta el tiempo final considerado ($t_f = 500$) es solo de 56 que representa el 0,56% de todos los puntos considerados en la malla para la simulación.

Sol-Mercurio		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km ²]
Estables	56	$3,01 \times 10^{12}$
Inestables	9.904	$5,33 \times 10^{14}$
Colisión con m_1	0	0
Colisión con m_2	40	$2,15 \times 10^{12}$

Tabla 5.1: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y el área que representa. Sistema: Sol-Mercurio, $\mu = 1,65158 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$.

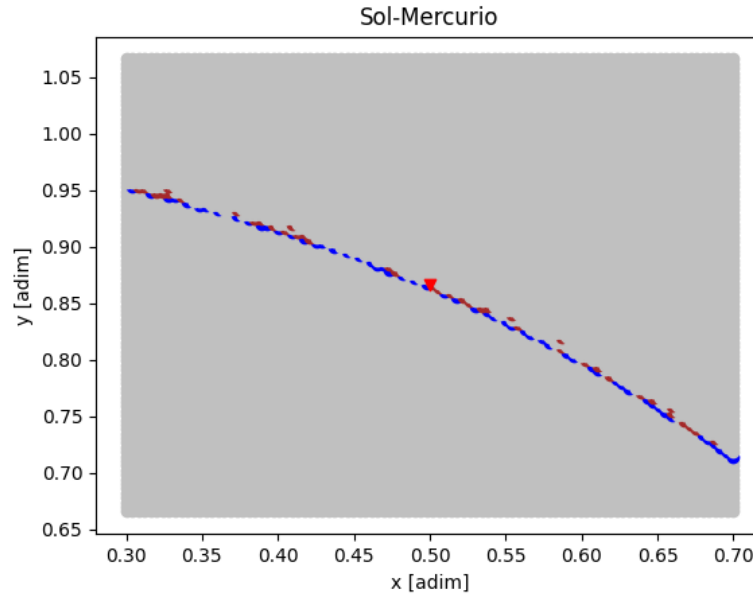


Figura 5.2: Interacción entre el Sol y Mercurio $\mu = 1,65158 \times 10^{-7}$, $t_f = 500[adim]$.
Fuente: Propia

5.1.2. Sol- Venus

Venus es el segundo planeta del sistema solar en cercanía al Sol, al igual que Mercurio no tiene satélites naturales. La masa de Venus es de $4,867 \times 10^{24}$ kg y su distancia al Sol es de 108×10^6 km. Hasta ahora se han observado cuatro coorbitales conocidos: 2001 CK32, 2002 VE68, 2012 XE133 y 2013 ND15 [7].

La Figura 5.3 nos muestra la interacción entre el Sol y Venus, considerando en la simulación un tiempo de $t_f = 500$, en este caso $\mu = 2,446952 \times 10^{-6}$ y la Tabla 5.2, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el mismo tiempo. Considerando que la distancia del Sol a Venus es de 108×10^6 km, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos obtenido, Se puede observar que el área de estabilidad hasta dicho tiempo representa un 0,68 % de la ventana que se ha considerado para la simulación.

5.1.3. Sol- Tierra

La Tierra con una masa de $5,9736 \times 10^{24}$ kg es el tercer planeta del sistema solar ubicada a una distancia de 150×10^6 km. Solamente en 2.010 después de analizar las observaciones hechas por el satélite Wide-Field Infrared Survey Explorer (en español: Explorador de

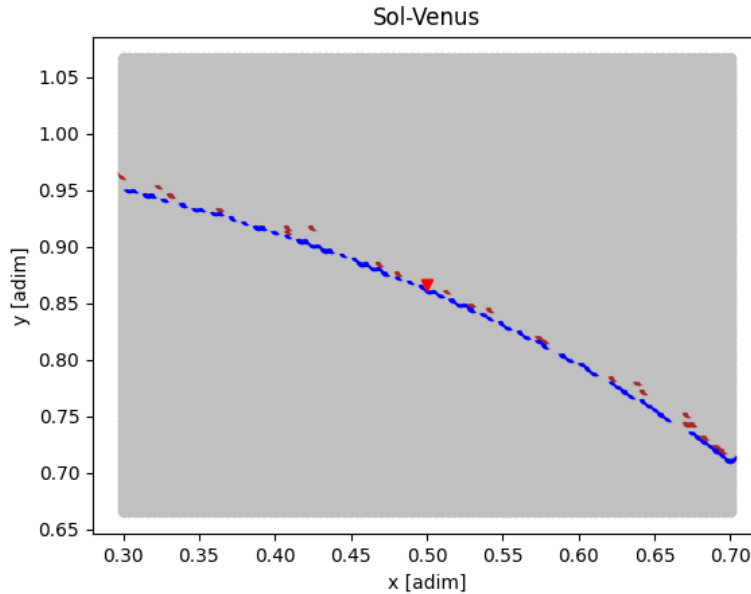


Figura 5.3: Interacción entre el Sol y Venus $\mu = 2,446952 \times 10^{-6}$ $t_f = 500$ [adim]. Fuente: Propia

Sol-Venus		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km ²]
Estables	68	$1,27 \times 10^{13}$
Inestables	9.909	$1,85 \times 10^{15}$
Colisión con m_1	0	0
Colisión con m_2	23	$4,29 \times 10^{12}$

Tabla 5.2: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y el área que representa. Sistema: Sol-Venus, $\mu = 2,446952 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$.

Infrarrojos de Campo Amplio) (WISE), fue descubierto el primer asteroide troyano del sistema Sol-Tierra [4]. El objeto fue denominado 2010 TK7 cuya orbita está confinada en torno de L4. En diciembre del 2.020 los astrónomos han confirmado que la Tierra tiene un segundo asteroide troyano 2020 XL5 [5].

Para realizar la simulación del sistema Sol-Tierra el valor de μ es $\mu = 3,003309 \times 10^{-6}$. En la Figura 5.4 podemos observar en el área azul las regiones estables y en la Tabla 5.3 los puntos según se clasifiquen y el area que representan en km². Podemos observar que

de los 10.000 puntos considerados en la malla alrededor de L4 solo 72 son estables hasta el final de la simulación, este representa en área $2,59 \times 10^{13} \text{ km}^2$ que es el 0.72 % del área total considerada.

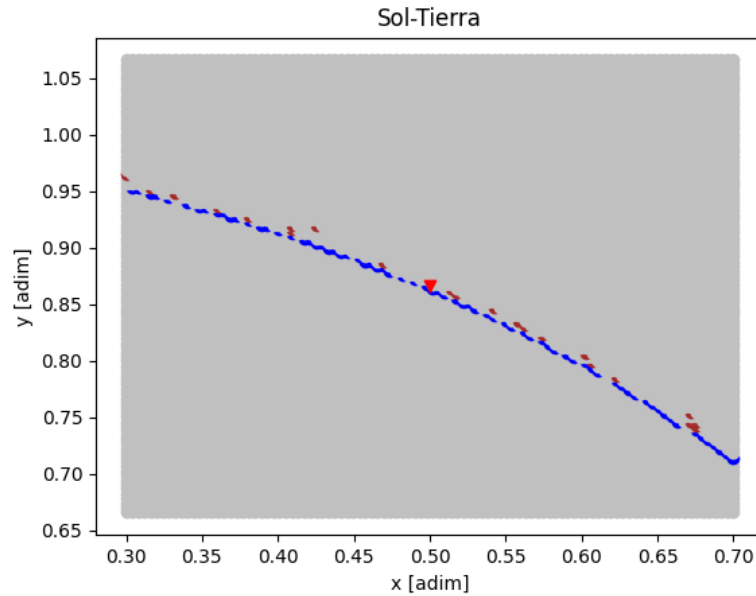


Figura 5.4: Interacción entre el Sol y la Tierra $\mu = 3,006526 \times 10^{-6}$, $t_f = 500[adim]$.

Fuente: Propia

Sol-Tierra		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	72	$2,59 \times 10^{13}$
Inestables	9.906	$3,57 \times 10^{15}$
Colisión con m_1	0	0
Colisión con m_2	22	$7,92 \times 10^{12}$

Tabla 5.3: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Sol-Tierra, $\mu = 3,006526 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$.

5.1.4. Sol-Marte

Marte es el cuarto planeta en orden de distancia al Sol, $228 \times 10^6 \text{ km}$ y el segundo más pequeño del sistema solar $5,9736 \times 10^{24} \text{ kg}$. Marte es un planeta rocoso y tiene dos satélites

naturales. Hasta ahora se han observado nueve asteroides troyanos, los más destacados por su tamaño y por contener cristal de olivino en su composición son: 1.999 UJ7 que rodea la posición L4 y 5.261 Eureka que rodea L5 [6].

La Figura 5.5 muestra el resultado de la interacción entre el sistema Sol-Marte, donde $\mu = 3,22699 \times 10^{-7}$ y el tiempo de simulación $t_f = 500$. En la Tabla 5.4 se observa la cantidad de puntos estables, inestables, los que chocan con el planeta y las áreas que representan aproximadamente. Podemos observar que el área de la región estable es menor que la Tierra, solo de 0,62% del Total.

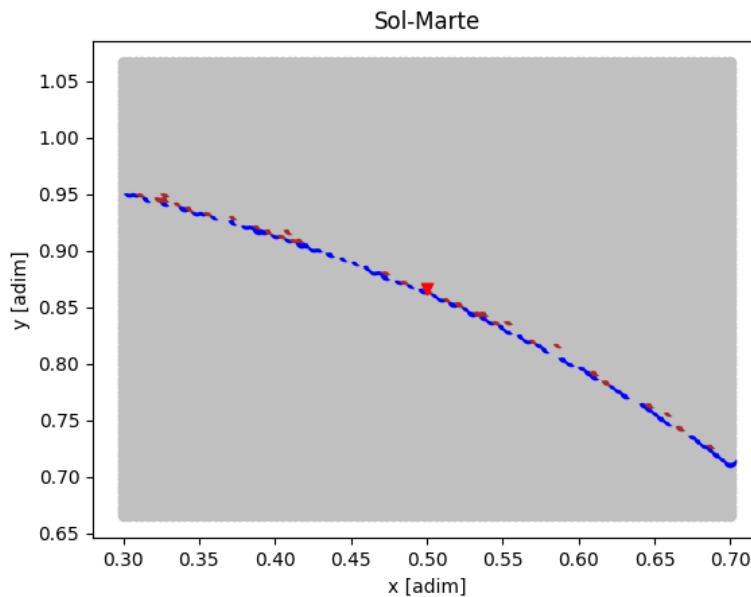


Figura 5.5: Interacción entre el Sol y Marte $\mu = 3,22699 \times 10^{-7}$, $t_f = 500[adim]$. Fuente: Propia

5.1.5. Sol- Júpiter

Júpiter es el quinto planeta del sistema solar y el primero de los planetas gaseosos en orden de lejanía al Sol, La distancia entre ellos es de 778×10^6 km. Júpiter es el planeta mas grande del Sistema Solar, su diámetro es 11 veces mayor que el de la Tierra y su masa es de $1,901 \times 10^{27}$ kg. Actualmente se conocen 79 lunas que orbitan Júpiter.

El primer asteroide de este tipo en libración alrededor del punto L4 de Júpiter (588 Aquiles) fue descubierto en 1.906 por Wolf [10]. En la actualidad, el grupo más numeroso de troyanos conocidos se encuentra en la órbita de Júpiter, aproximadamente más de 2.250

Sol-Marte		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	62	$5,16 \times 10^{13}$
Inestables	9.907	$8,24 \times 10^{15}$
Colisión con m_1	0	0
Colisión con m_2	31	$2,58 \times 10^{13}$

Tabla 5.4: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Sol-Marte, $\mu = 3,22699 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$.

objetos, unos 1.230 en alrededor de L4 y unos 1.050 en la nube L5.

En la Figura 5.6 podemos observar que el área de color azul (que representa las regiones estables) es mayor en comparación a los otros planetas del sistema solar y en la Tabla 5.5 observamos que los 704 puntos estables representan $6,82 \times 10^{15} km^2$.

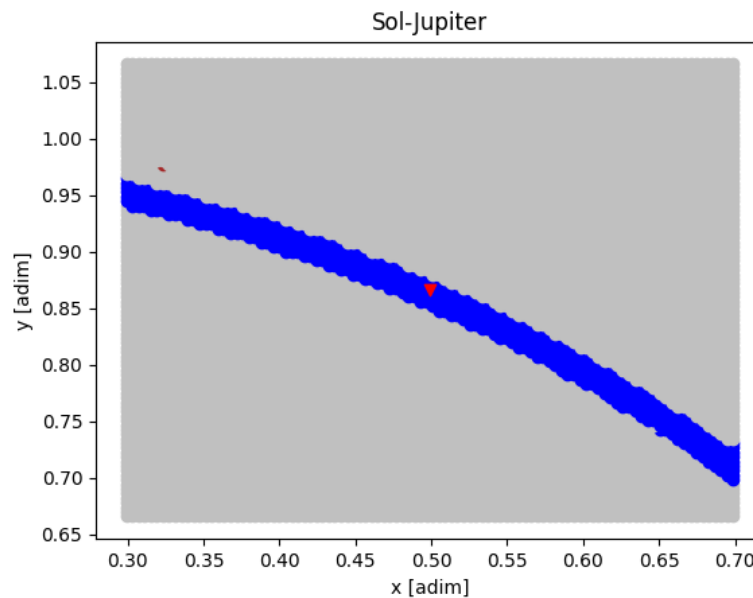


Figura 5.6: Interacción entre el Sol y Júpiter $\mu = 0,00095484$, $t_f = 500ad$. Fuente: Propia

5.1.6. Sol-Saturno

Saturno es el sexto planeta de Sistema Solar contado desde el Sol cuya distancia entre ellos es $1.427 \times 10^6 km$. Entre los planetas exteriores o gigantes gaseosos, es el segundo,

Sol-Júpiter		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	704	$6,82 \times 10^{15}$
Inestables	9.295	$9,00 \times 10^{16}$
Colisión con m_1	0	0
Colisión con m_2	1	$9,68 \times 10^{12}$

Tabla 5.5: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Sol-Júpiter, $\mu = 0,00095484$, $t_f = 500$.

después de Júpiter, tiene $5,688 \times 10^{26}$ kg de masa, Saturno tiene 82 satelites naturales identificados, además es el único con un sistema de anillos visibles desde la Tierra.

Saturno es otro planeta en el que hasta ahora no se han encontrado asteroides Troyanos, según [16] el planeta Júpiter podría ser el único responsable de desestabilizar toda la región alrededor de los puntos de libración de Saturno, las posibles capturas serían demasiado cortas respecto al tiempo que permanecen en las inmediaciones de L4 y L5. Nuestro modelo no considera la influencia de Júpiter.

La Figura 5.7 muestra el resultado de la interacción entre el sistema Sol-Saturno, donde $\mu = 0,00028589$ y el tiempo de simulación $t_f = 500$. En la Tabla 5.6 se observa la cantidad de puntos estables, inestables y los que chocan con el planeta y las áreas que representan aproximadamente. Vemos que el área que representa la región estable es más o menos el 60 % del área estable que tiene Júpiter.

Sol-Saturno		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	397	$1,29 \times 10^{16}$
Inestables	9.595	$3,13 \times 10^{17}$
Colisión con m_1	0	0
Colisión con m_2	8	$2,61 \times 10^{14}$

Tabla 5.6: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Sol-Saturno, $\mu = 0,00028589$, $t_f = 500$.

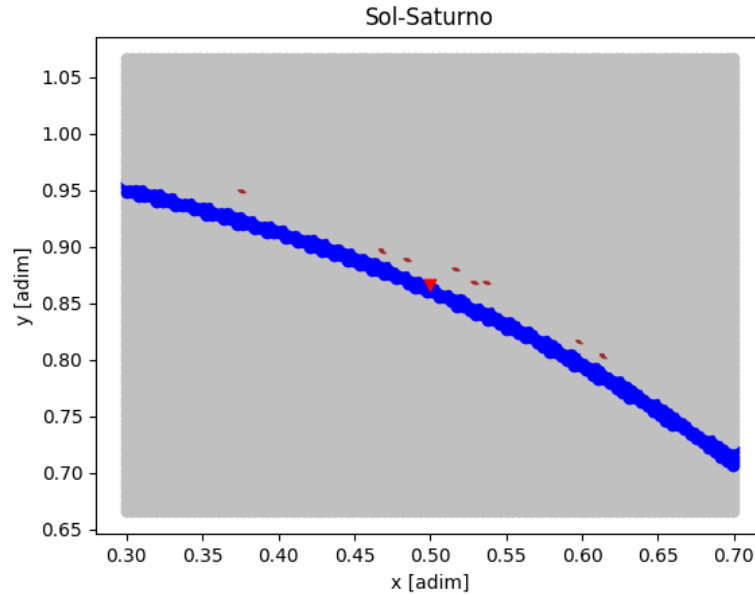


Figura 5.7: Interacción entre el Sol y Saturno $\mu = 0,00028589$, $t_f = 500ad$. Fuente: Propia

5.1.7. Sol-Urano

Urano es el séptimo planeta desde el Sol, la distancia entre ellos es de 2.871×10^6 km. Urano es el tercero más grande y el cuarto con más masa ($8,686 \times 10^{25}$ Km) del Sistema Solar. Urano pertenece al grupo de planetas exteriores del sistema solar junto a Júpiter, Saturno y Neptuno. Está rodeado por 13 anillos y se han identificado 27 satélites naturales.

Se han encontrado dos asteroides Troyanos en Urano: 2.011 QF99 y 2.014 YX49, ambos alrededor de L4 [8].

La Figura 5.8 muestra el resultado de la interacción entre el sistema Sol-Urano, donde $\mu = 4,366827 \times 10^{-5}$ y el tiempo de simulación $t_f = 500$. En la Tabla 5.7 se observa la cantidad de puntos estables, inestables y los que chocan con el planeta y las áreas que representan aproximadamente.

5.1.8. Sol-Neptuno

Es el cuarto y el más lejano de los planetas gigantes gaseosos, la distancia al Sol es de $4,497 \times 10^6$ km. Los dos últimos, Urano y Neptuno, se conocen como gigantes helados, a causa de sus bajas temperaturas. Es también el cuarto planeta más grande en tamaño y el tercero en masa con $1,0286 \times 10^{26}$ kg.

La Figura 5.9 muestra el resultado de la interacción entre el sistema Sol-Urano, donde

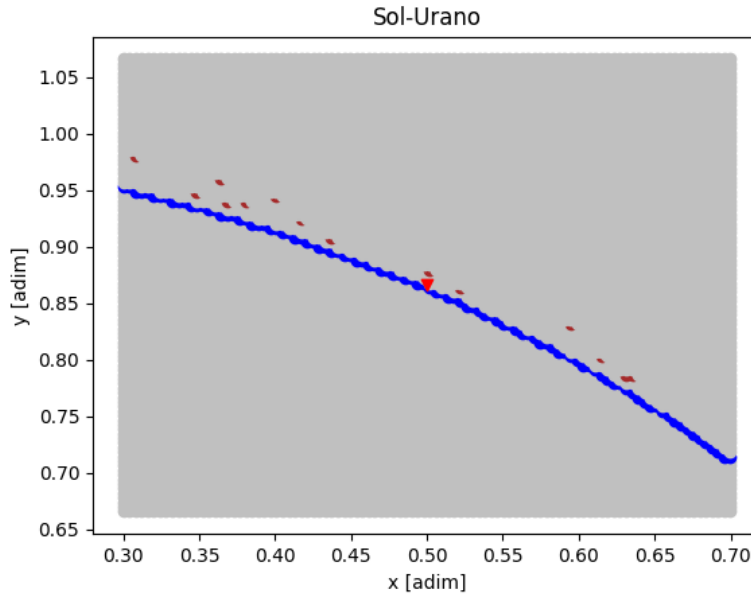


Figura 5.8: Interacción entre el Sol y Urano $\mu = 4,366827 \times 10^{-5}$, $t_f = 500ad$. Fuente: Propia

Sol-Urano		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	154	$2,03 \times 10^{16}$
Inestables	9.832	$1,30 \times 10^{18}$
Colisión con m_1	0	0
Colisión con m_2	14	$1,85 \times 10^{15}$

Tabla 5.7: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Sol-Urano, $\mu = 4,366827 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$.

$\mu = 4,366827 \times 10^{-5}$ y el tiempo de simulación $t_f = 500$. En la Tabla 5.8 se observa la cantidad de puntos estables, inestables y los que chocan con el planeta y las áreas que representan aproximadamente.

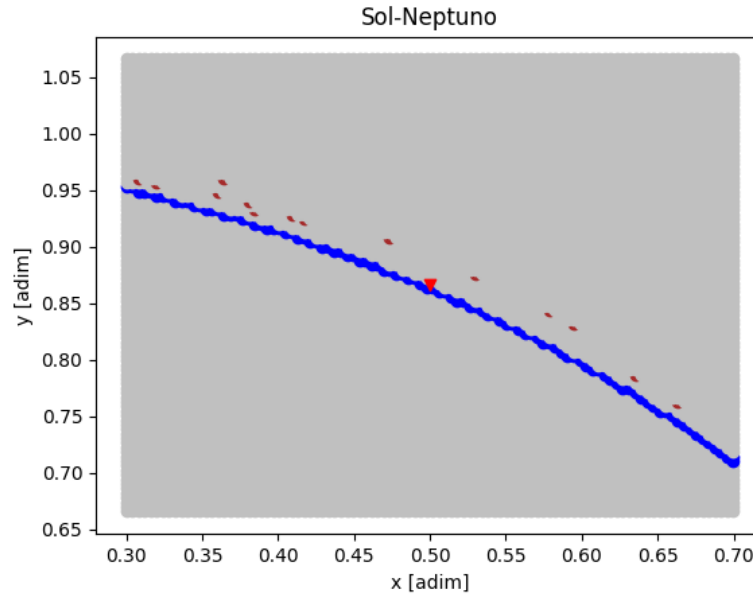


Figura 5.9: Interacción entre el Sol y Neptuno $\mu = 5,1711755 \times 10^{-5}$, $t_f = 500ad$. Fuente: Propia

Sol-Neptuno		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	172	$5,57 \times 10^{16}$
Inestables	9.814	$3,18 \times 10^{18}$
Colisión con m_1	0	0
Colisión con m_2	14	$4,53 \times 10^{15}$

Tabla 5.8: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Sol-Neptuno, $\mu = 5,1711755 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$.

5.2. SISTEMA PLANETA - SATÉLITES NATURALES

En este apartado se estudian las estabildades de puntos en la región de L4, ubicado en $(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

La observación se realiza sobre una cuadrícula de 100×100 , en una ventana de $0,4 \times 0,4$, en un tiempo final $t_f = 500$.

La nomenclatura utilizada es la siguiente: triángulo de color rojo, corresponde a la ubicación de L4; regiones de color azul, corresponden a puntos de estabilidad; zonas de color

gris son regiones de inestabilidades; zonas de color café, colisión con m_1 ; zonas de color verde, colisión con m_2 . Se debe tener presente que estas regiones, contienen los puntos de coordenadas (x_0, y_0) .

5.2.1. Satélite natural de la Tierra.

La Tierra interactúa gravitatoriamente con el Sol y la Luna. Su masa es de $5,9736 \times 10^{24}$ kg.

En la Figura 5.10, se aprecia la Tierra junto a la Luna, su satélite natural.



Figura 5.10: Tierra - Luna. Fuente: Wikipedia

Tierra-Luna. La Luna posee una masa de $7,349 \times 10^{22}$ Kg. Con lo que junto a la masa del planeta, presentan una relación $\mu = 0,01215$. En la Figura 5.11, se aprecian las zonas de puntos estables, inestables y colisiones con m_2 . Se considera un tiempo final, $t_f = 500$.

La tabla 5.9, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Tierra-Luna, $d_{TL} = 384.400$ km, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

5.2.2. Satélites naturales de Marte.

Marte tiene dos satélites naturales, Fobos y Deimos, que respectivamente tienen una masa de $1,072 \times 10^{16}$ kg y de $2,244 \times 10^{15}$ kg. Para ambos estudios el tiempo final es $t_f = 500$. En la Figura 5.12, Marte está acompañado de sus satélites.

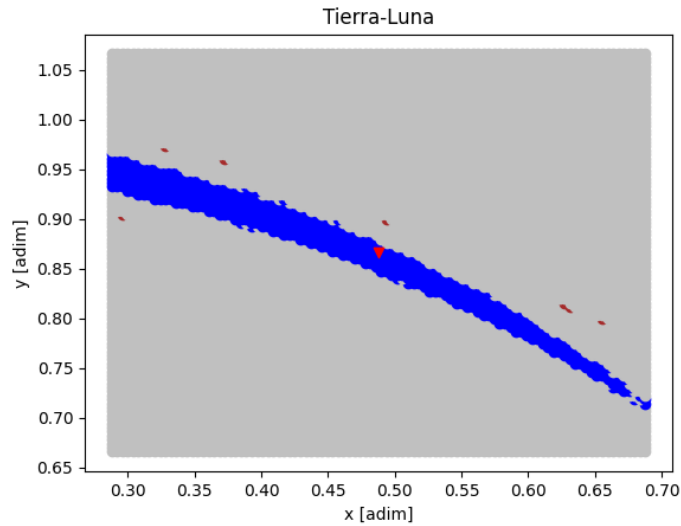


Figura 5.11: Interacción Tierra-Luna. $\mu = 0,01215$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Tierra-Luna		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	711	$1,68 \times 10^9$
Inestables	9.282	$1,19 \times 10^{10}$
Colisión con m_1	0	0
Colisión con m_2	7	$1,65 \times 10^7$

Tabla 5.9: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Tierra-Luna, $\mu = 0,01215$, $t_f = 500$, $d_{TL} = 384.400Km$.

Marte-Fobos. La relación de masas entre Marte y Fobos es $\mu = 1,67 \times 10^{-8}$. Figura 5.13

La tabla 5.10, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Marte-Fobos es $d_{MF} = 9.377km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Marte-Deimos. La relación de masas entre Marte y Deimos, es $\mu = 3,496 \times 10^{-9}$.

La tabla 5.11, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Marte-Deimos es $d_{MD} = 23.460km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

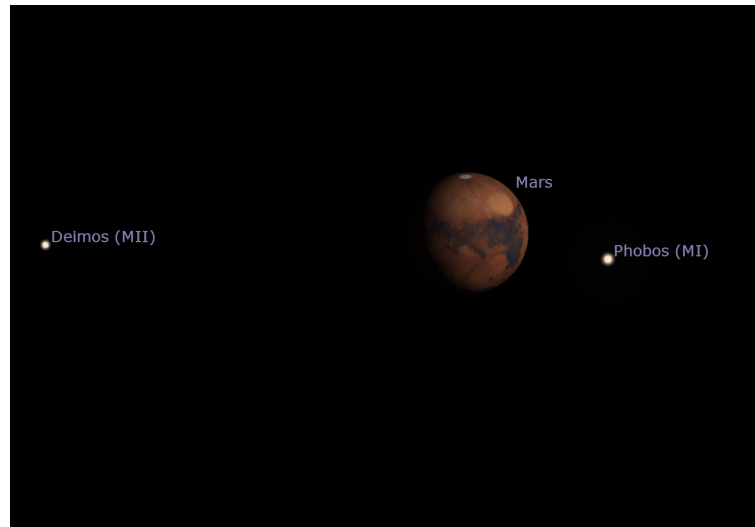


Figura 5.12: Marte y sus satélites. Fuente: Propia

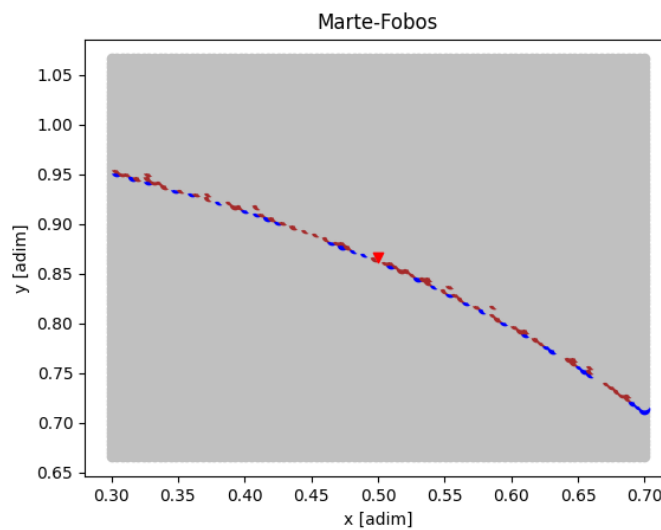


Figura 5.13: Interacción Marte-Fobos. $\mu = 1,67 \times 10^{-8}$. $t_f = 500$ Fuente: Propia

5.2.3. Satélites naturales de Júpiter.

Los principales satélites, que fueron descubiertos por Galileo, se les clasifica como satélites galileanos y son: Io, Europa, Ganímedes, Calisto. Además, cuenta con varios satélites menores, de los cuales en este estudio se consideran los del Grupo Amaltea: Metis, Adrastea, Amaltea y Tebe, debido a que se ubican en las órbitas interiores de los satélites galileanos. En el presente estudio no se considerarán los satélites irregulares, debido a que se encuentran en órbitas lejanas a Júpiter, y se ven influenciados por la gravedad del Sol. En la Figura 5.15, se puede ver Júpiter junto a sus satélites naturales.

Marte-Fobos		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	30	$4,22 \times 10^4$
Inestables	9.909	$1,39 \times 10^7$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	61	$8,58 \times 10^4$

Tabla 5.10: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Marte-Fobos, $\mu = 1,67 \times 10^{-8}$, $t_f = 500$, $d_{MF} = 9.377 Km$

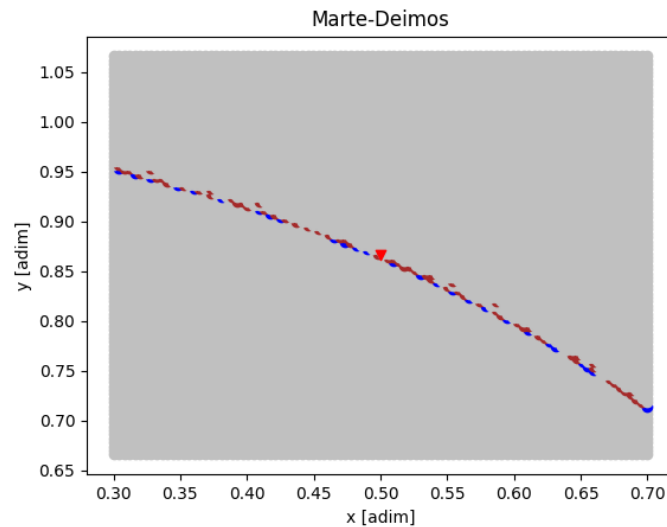


Figura 5.14: Interacción Marte-Deimos. $\mu = 3,496 \times 10^{-9}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Júpiter-Io. Io tiene una masa de $8,90 \times 10^{22} kg$, que junto a la masa de Júpiter, presentan una relación de masas de $\mu = 4,6839 \times 10^{-5}$.

La tabla 5.12, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Júpiter-Io es $d_{JI} = 628,3 \times 10^6 Km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Júpiter-Europa. Europa tiene una masa de $4,80 \times 10^{22} Kg$, que junto a la masa de Júpiter, presentan una relación de masas de $\mu = 2,5262 \times 10^{-5}$.

La tabla 5.13, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el

Marte-Deimos		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	27	$2,38 \times 10^5$
Inestables	9.910	$8,73 \times 10^7$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	63	$5,55 \times 10^5$

Tabla 5.11: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Marte-Deimos, $\mu = 3,496 \times 10^{-9}$, $t_f = 500$, $d_{MD} = 23.460 Km$



(a) Vista amplia.Fuente:Propia

(b) Vista cerca.Fuente:Propia

Figura 5.15: Jupiter y sus Satélites Naturales

Júpiter-Io		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	164	$1,04 \times 10^{15}$
Inestables	9.821	$6,20 \times 10^{16}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	15	$9,47 \times 10^{13}$

Tabla 5.12: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Júpiter-Io, $\mu = 4,6839 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{JI} = 628,3 \times 10^6 Km$

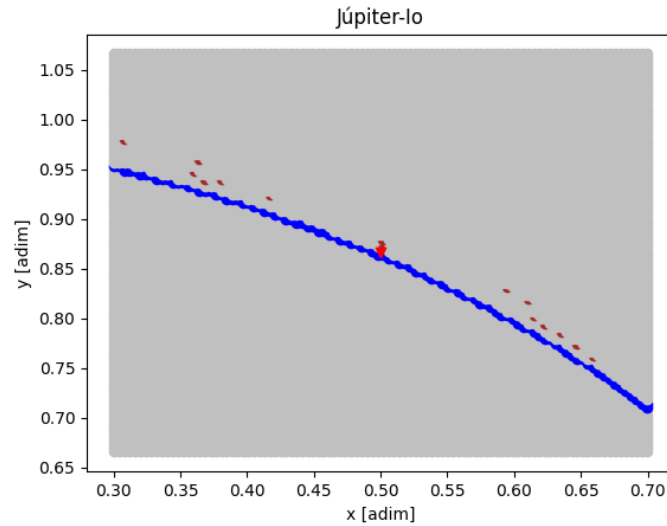


Figura 5.16: Interacción Júpiter-Io. $\mu = 4,6839 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$ Fuente: Propia

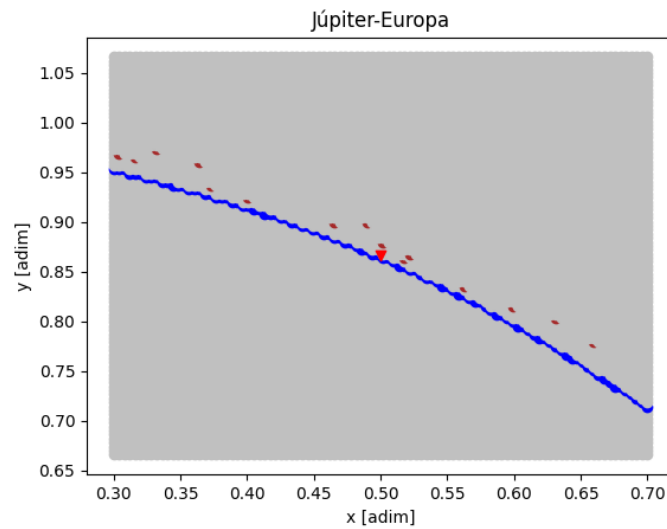


Figura 5.17: Interacción Júpiter-Europa. $\mu = 2,5262 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Júpiter-Europa es $d_{JE} = 628,3 \times 10^6 km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Júpiter-Ganímedes. Ganímedes tiene una masa de $1,50 \times 10^{23} kg$, que junto a la masa de Júpiter, presentan una relación de masas de $\mu = 7,8941 \times 10^{-5}$.

La tabla 5.14, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Júpiter-Ganímedes es $d_{JG} = 628,3 \times 10^6 km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Júpiter-Europa		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	164	$1,04 \times 10^{15}$
Inestables	9.821	$6,20 \times 10^{16}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	15	$9,47 \times 10^{13}$

Tabla 5.13: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Júpiter-Europa, $\mu = 2,5262 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{JE} = 628,3 \times 10^6 km$.

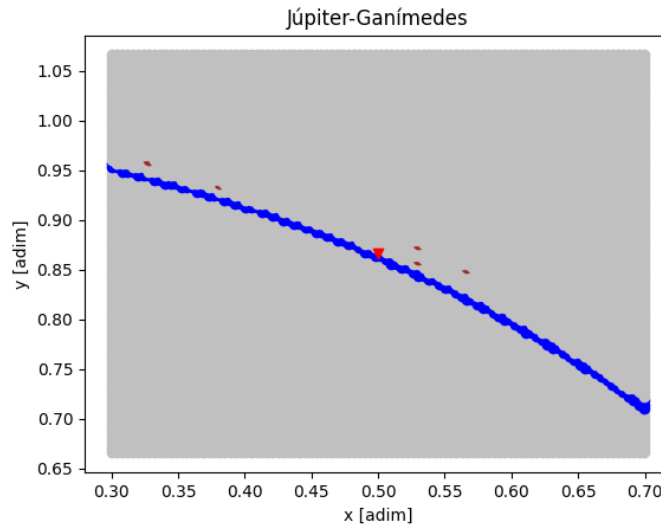


Figura 5.18: Interacción Júpiter-Ganímedes. $\mu = 7,8941 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Júpiter-Calisto. Calisto tiene una masa de $1,10 \times 10^{23} Kg$, que junto a la masa de Júpiter, presentan una relación de masas de $\mu = 5,7891 \times 10^{-5}$.

La tabla 5.15, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Júpiter-Calisto es $d_{JC} = 628,3 \times 10^6 km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Júpiter-Metis. Metis tiene una masa de $1,20 \times 10^{17} Kg$, que junto a la masa de Júpiter, presentan una relación de masas de $\mu = 6,3157 \times 10^{-11}$.

La tabla 5.16, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Júpiter-Metis es $d_{JM} = 128.100 km$,

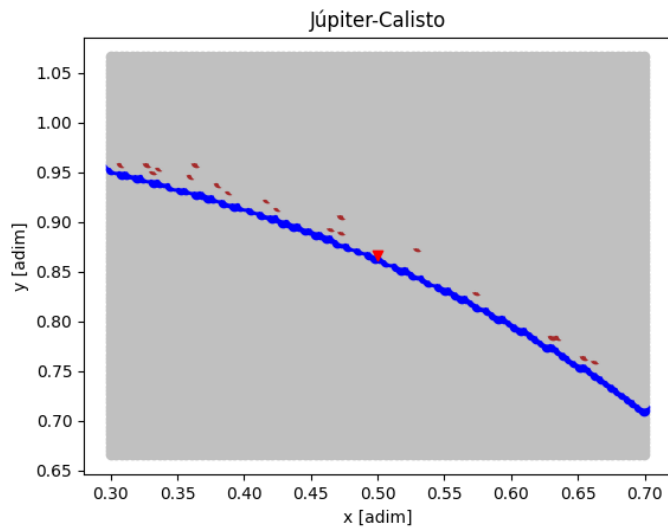


Figura 5.19: Interacción Júpiter-Calisto. $\mu = 5,7891 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

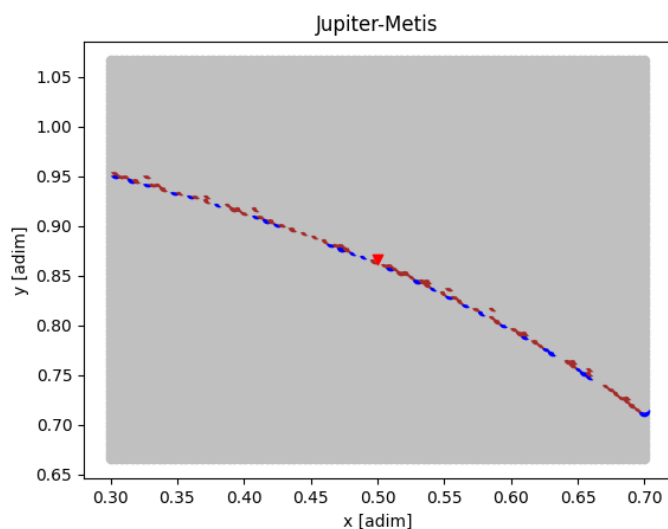


Figura 5.20: Comportamiento interacción Júpiter-Metis. $\mu = 6,3157 \times 10^{-11}$. $t_f = 500$.
Fuente: Propia

Júpiter-Ganímedes		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	164	$1,04 \times 10^{15}$
Inestables	9.821	$6,20 \times 10^{16}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	15	$9,47 \times 10^{13}$

Tabla 5.14: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .Sistema: Júpiter-Ganímedes, $\mu = 7,8941 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{JG} = 628,3 \times 10^6 Km$.

Júpiter-Calisto		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	164	$1,04 \times 10^{15}$
Inestables	9.821	$6,20 \times 10^{16}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	15	$9,47 \times 10^{13}$

Tabla 5.15: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .Sistema: Júpiter-Calisto, $\mu = 5,7891 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{JC} = 628,3 \times 10^6 km$.

se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Júpiter-Metis		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	27	$7,09 \times 10^6$
Inestables	9.910	$2,60 \times 10^9$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	63	$1,65 \times 10^7$

Tabla 5.16: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 .Sistema: Júpiter-Metis, $\mu = 6,3157 \times 10^{-11}$, $t_f = 500$, $d_{JM} = 128.100 km$.

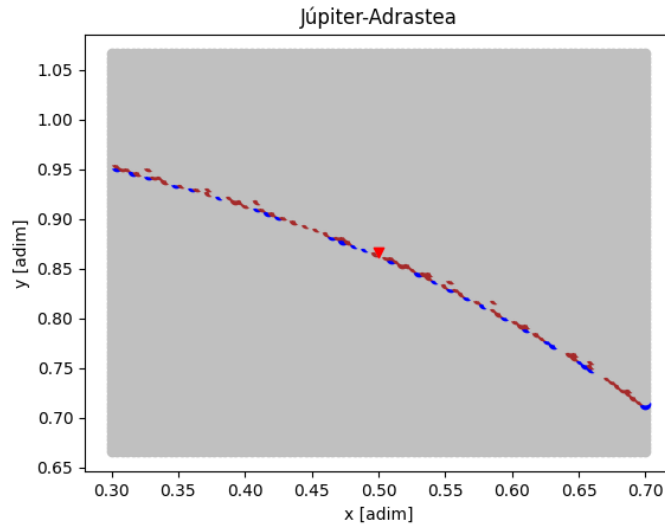


Figura 5.21: Comportamiento interacción Júpiter-Adrastea. $\mu = 3,9473 \times 10^{-12}$. $t_f = 500$.

Fuente: Propia

Júpiter-Adrastea. Adrastea tiene una masa de $7,50 \times 10^{15}kg$, que junto a la masa de Júpiter, presentan una relación de masas de $\mu = 3,9473 \times 10^{-12}$.

La tabla 5.17, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Júpiter-Adrastea es $d_{JAd} = 128.900km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Júpiter-Adrastea		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	27	$7,18 \times 10^6$
Inestables	9.910	$2,63 \times 10^9$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	63	$1,67 \times 10^7$

Tabla 5.17: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Júpiter-Adrastea, $\mu = 3,9473 \times 10^{-12}$, $t_f = 500$, $d_{JAd} = 128.900km$.

Júpiter-Amaltea. Amaltea tiene una masa de $2,10 \times 10^{18}kg$, que junto a la masa de Júpiter, presentan una relación de masas de $\mu = 1,1052 \times 10^{-9}$.

La tabla 5.18, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el

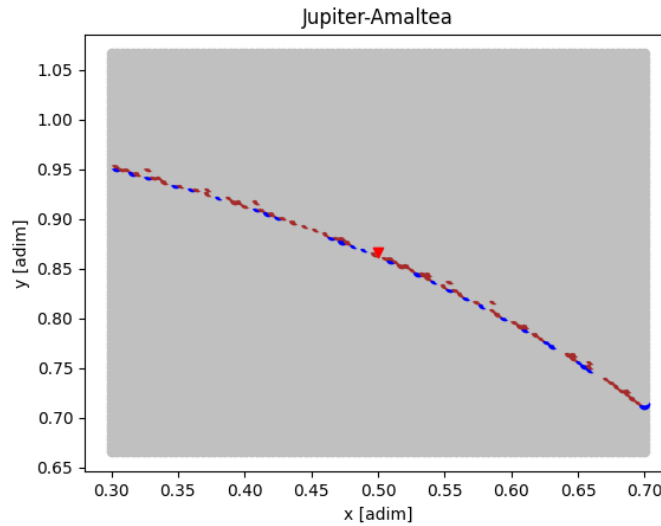


Figura 5.22: Comportamiento interacción Júpiter-Amaltea. $\mu = 1, 1052 \times 10^{-9}$. $t_f = 500$.

Fuente: Propia

tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Júpiter-Amaltea es $d_{JAm} = 181.400km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Júpiter-Amaltea		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	27	$1, 42 \times 10^7$
Inestables	9.910	$5, 22 \times 10^9$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	63	$3, 32 \times 10^7$

Tabla 5.18: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Júpiter-Amaltea, $\mu = 1, 1052 \times 10^{-9}$, $t_f = 500$, $d_{JAm} = 181.400km$.

Júpiter-Tebe. Tebe tiene una masa de $1, 50 \times 10^{18}kg$, que junto a la masa de Júpiter, presentan una relación de masas de $\mu = 7, 8947 \times 10^{-10}$.

La tabla 5.19, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Júpiter-Tebe es $d_{JT} = 221.900km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

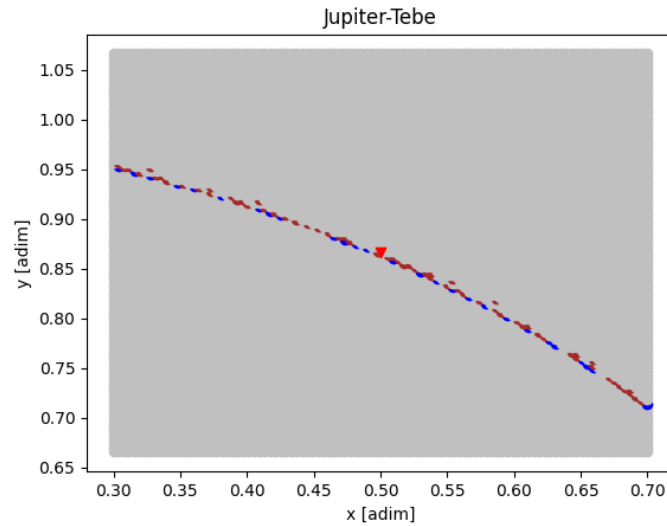


Figura 5.23: Comportamiento interacción Júpiter-Tebe. $\mu = 7,8947 \times 10^{-10}$. $t_f = 500$.

Fuente: Propia

Júpiter-Tebe		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	27	$2,13 \times 10^7$
Inestables	9.910	$7,81 \times 10^9$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	63	$4,96 \times 10^7$

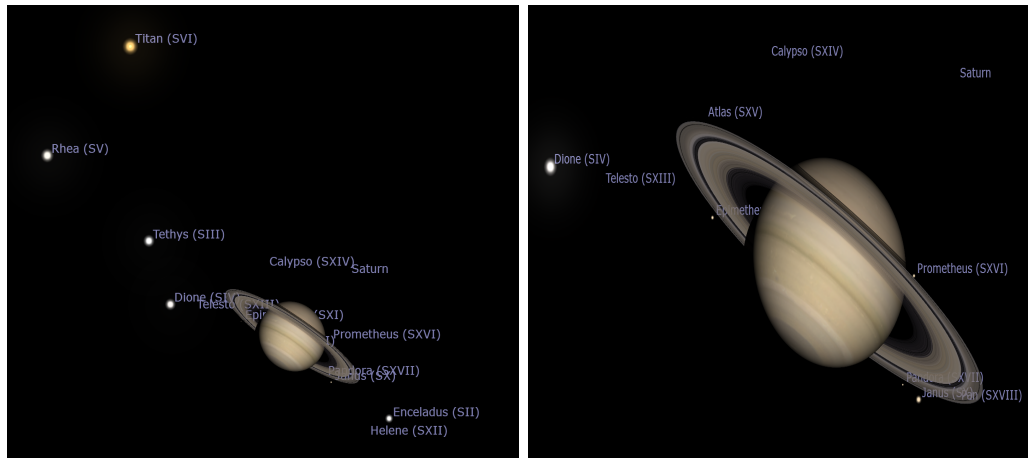
Tabla 5.19: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Júpiter-Tebe, $\mu = 7,8947 \times 10^{-10}$, $t_f = 500$, $d_{JT} = 221.900Km$.

5.2.4. Satélites naturales de Saturno.

Saturno tiene 82 satélites con órbitas regulares. Los más grandes son Mimas, Encélado, Tetis, Dione, Rea, Titán, Hiperión, Jápeto, Febe. En la Figura 5.24, se aprecia Saturno junto a sus satélites.

Saturno-Rea. Rea tiene una masa de $2,32 \times 10^{21}kg$, que junto a la masa de Saturno, presentan una relación de masas de $\mu = 4,0787 \times 10^{-6}$.

La tabla 5.20, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Saturno-Rea es $d_{SR} = 527.100km$, se



(a) Vista amplia.Fuente:Propia

(b) Vista cerca.Fuente:Propia

Figura 5.24: Saturno y sus Satélites Naturales

puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Saturno-Rea		
Tipo de Punto	Unidades	Área [Km^2]
Estables	76	$3,38 \times 10^8$
Inestables	9.903	$4,40 \times 10^{10}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	21	$9,34 \times 10^7$

Tabla 5.20: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Saturno-Rea, $\mu = 4,0787 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{SR} = 527.100Km$.

Saturno-Hiperión. Hiperión tiene una masa de $5,686 \times 10^{16}Kg$, que junto a la masa de Saturno, presentan una relación de masas de $\mu = 9,9964 \times 10^{-11}$.

La tabla 5.21, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Saturno-Hiperión es $d_{SH} = 1.464.100km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Saturno-Jápeto. Jápeto tiene una masa de $1,973 \times 10^{21}kg$, que junto a la masa de Saturno, presentan una relación de masas de $\mu = 3,4686 \times 10^{-6}$.

La tabla 5.22, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el

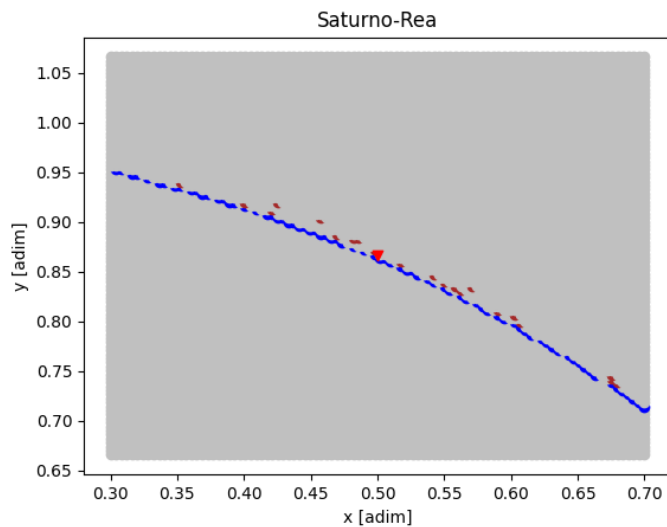


Figura 5.25: Interacción Saturno-Rea. $\mu = 4,0787 \times 10^{-6}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

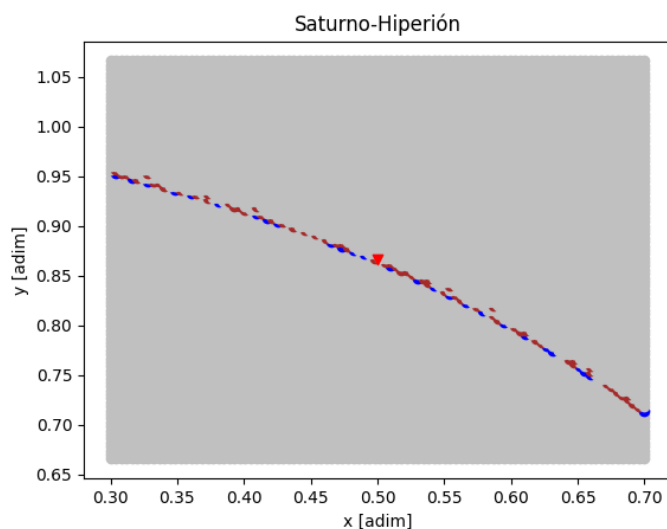


Figura 5.26: Comportamiento interacción Saturno-Hiperión. $\mu = 9,9964 \times 10^{-11}$. $t_f = 500$.
Fuente: Propia

Saturno-Hiperión		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	27	$9,26 \times 10^8$
Inestables	9.910	$3,40 \times 10^{11}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	63	$2,16 \times 10^9$

Tabla 5.21: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Saturno-Hiperión, $\mu = 9,9964 \times 10^{-11}$, $t_f = 500$, $d_{SH} = 1.464.100Km$.

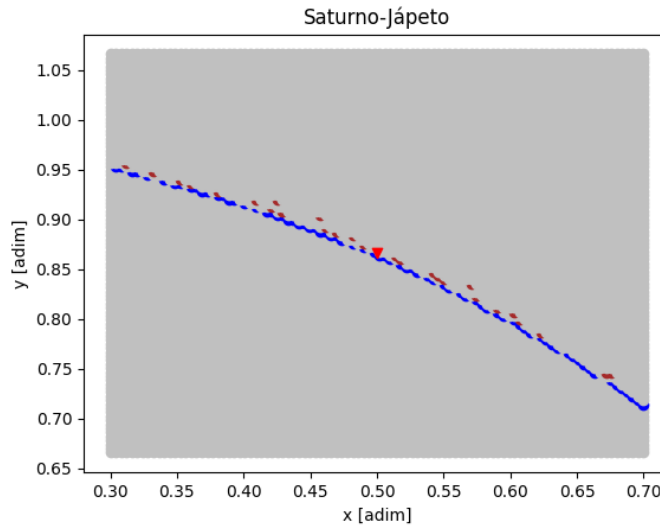


Figura 5.27: Interacción Saturno-Jápeto. $\mu = 3,4686 \times 10^{-6}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Saturno-Jápeto es $d_{SJ} = 3.560.800km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Saturno-Titán. Titán tiene una masa de $1,345 \times 10^{23}kg$, que junto a la masa de Saturno, presentan una relación de masas de $\mu = 0,2364 \times 10^{-3}$.

La tabla 5.23, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Saturno-Titán es $d_{STi} = 1.221.900km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Saturno-Jápeto		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	75	$1,52 \times 10^{10}$
Inestables	9.898	$2,01 \times 10^{12}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	27	$5,48 \times 10^9$

Tabla 5.22: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Saturno-Jápeto $\mu = 3,4686 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{SJ} = 3.560.800Km$.

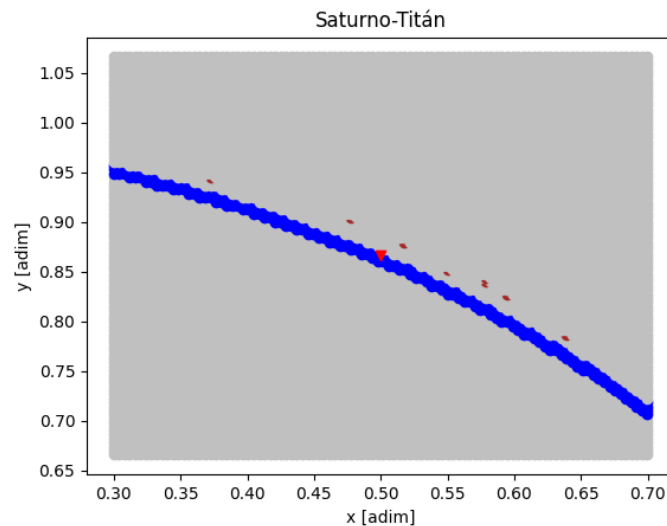


Figura 5.28: Interacción Saturno-Titán. $\mu = 0,2364 \times 10^{-3}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Saturno-Mimas. Mimas tiene una masa de $1,749 \times 10^{19}kg$, que junto a la masa de Saturno, presentan una relación de masas de $\mu = 3,0748 \times 10^{-8}$.

La tabla 5.24, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Saturno-Mimas es $d_{SM} = 185.600Km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Saturno-Encélado. Encélado tiene una masa de $1,08022 \times 10^{20}kg$, que junto a la masa de Saturno, presentan una relación de masas de $\mu = 1,8991 \times 10^{-7}$.

La tabla 5.25, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Saturno-Encélado es $d_{SE} = 283.100Km$,

Saturno-Titán		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	359	$8,59 \times 10^9$
Inestables	9.633	$2,30 \times 10^{11}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	8	$1,91 \times 10^8$

Tabla 5.23: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Saturno-Titán, $\mu = 0,2364 \times 10^{-3}$, $t_f = 500$, $d_{STi} = 1.221.900Km$.

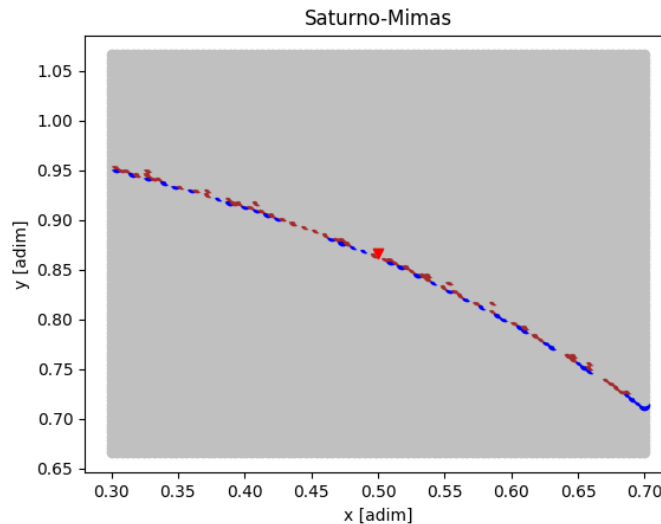


Figura 5.29: Interacción Saturno-Mimas. $\mu = 3,0748 \times 10^{-8}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Saturno-Tetis. Tetis tiene una masa de $6,17449 \times 10^{20}Kg$, que junto a la masa de Saturno, presentan una relación de masas de $\mu = 1,0855 \times 10^{-6}$.

La tabla 5.26, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Saturno-Tetis es $d_{STe} = 294.700km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Saturno-Dione. Dione tiene una masa de $1,096 \times 10^{21}kg$, que junto a la masa de Saturno, presentan una relación de masas de $\mu = 1,9268 \times 10^{-6}$.

Saturno-Mimas		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	36	$1,98 \times 10^{11}$
Inestables	9.907	$5,46 \times 10^{13}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	57	$3,14 \times 10^{11}$

Tabla 5.24: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Saturno-Mimas, $\mu = 3,0748 \times 10^{-8}$, $t_f = 500$, $d_{SM} = 185.600Km$.

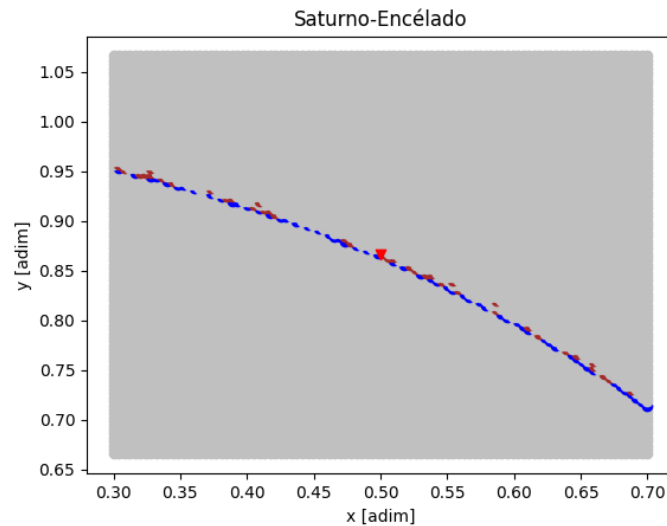


Figura 5.30: Interacción Saturno-Encélado. $\mu = 1,8991 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

La tabla 5.27, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Saturno-Dione es $d_{SD} = 377.400Km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

5.2.5. Satélites naturales de Urano.

Urano tiene 27 satélites conocidos y todos tienen nombre definitivo. Los más importantes, y que son tratados en el presente estudio, son Titania, Oberón, Umbriel, Ariel y Miranda. En la Figura 5.33, se ve al planeta junto a sus satélites..

Saturno-Encélado		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	58	$7,44 \times 10^7$
Inestables	9.903	$1,27 \times 10^{10}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	39	5×10^7

Tabla 5.25: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Saturno-Encélado, $\mu = 1,8991 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$, $d_{SE} = 283.100Km$.

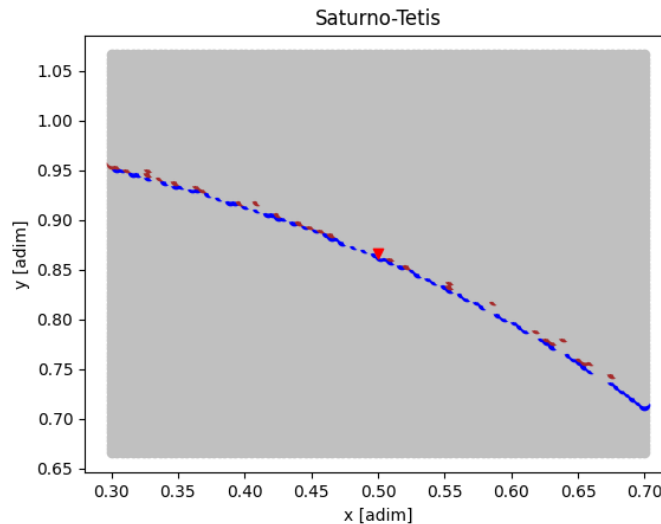


Figura 5.31: Interacción Saturno-Tetis. $\mu = 1,0855 \times 10^{-6}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Urano-Titania. Titania tiene una masa de $3,527 \times 10^{21}kg$, que junto a la masa de Urano, presentan una relación de masas de $\mu = 4,06039 \times 10^{-5}$.

La tabla 5.28, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Urano-Titania es $d_{UT} = 435.800km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Urano-Oberón. Oberón tiene una masa de $3,014 \times 10^{21}kg$, que junto a la masa de Urano, presentan una relación de masas de $\mu = 3,4698 \times 10^{-5}$.

La tabla 5.29, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Urano-Oberón es $d_{UO} = 582.600km$,

Saturno-Tetis		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	64	$8,89 \times 10^7$
Inestables	9.907	$1,38 \times 10^{10}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	29	$4,03 \times 10^7$

Tabla 5.26: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 .

Sistema: Saturno-Tetis, $\mu = 1,0855 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{STe} = 294.700Km$.

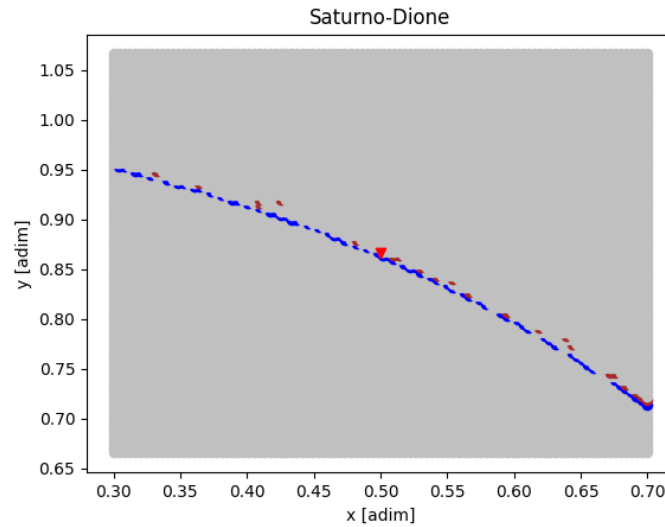


Figura 5.32: Comportamiento interacción Saturno-Dione. $\mu = 1,8991 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$.

Fuente: Propia

se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

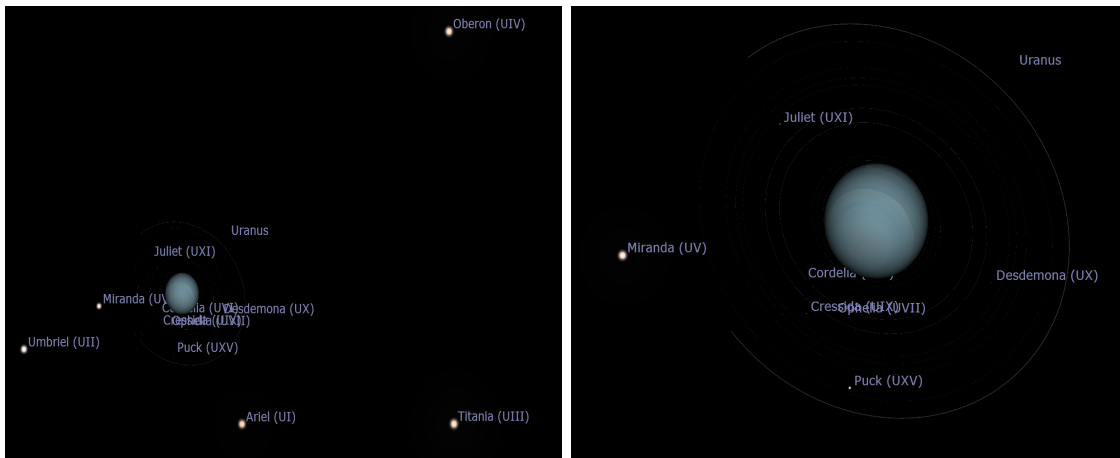
Urano-Umbriel. Umbriel tiene una masa de $1,172 \times 10^{21}kg$, que junto a la masa de Urano, presentan una relación de masas de $\mu = 1,3492 \times 10^{-5}$.

La tabla 5.30, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Urano-Umbriel es $d_{UU} = 266.000km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Saturno-Dione		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	66	$1,50 \times 10^8$
Inestables	9.912	$2,26 \times 10^{10}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	22	$5,01 \times 10^7$

Tabla 5.27: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 .

Sistema: Saturno-Dione, $\mu = 1,9268 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{SD} = 377.400km$.



(a) Vista amplia.Fuente:Propia

(b) Vista cerca.Fuente:Propia

Figura 5.33: Urano y sus Satélites Naturales

Urano-Titania		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	148	$4,50 \times 10^8$
Inestables	9.834	$2,99 \times 10^{10}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	18	$5,47 \times 10^7$

Tabla 5.28: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 .

Sistema: Urano-Titania, $\mu = 4,06039 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{UT} = 435.800Km$.

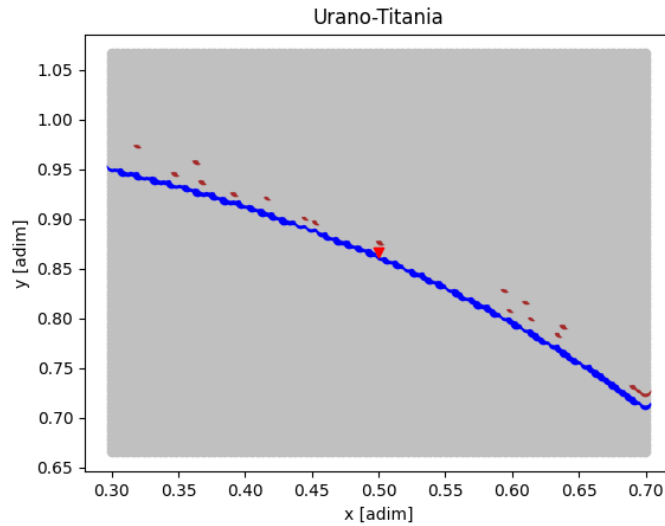


Figura 5.34: Interacción Urano-Titania. $\mu = 4,06039 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

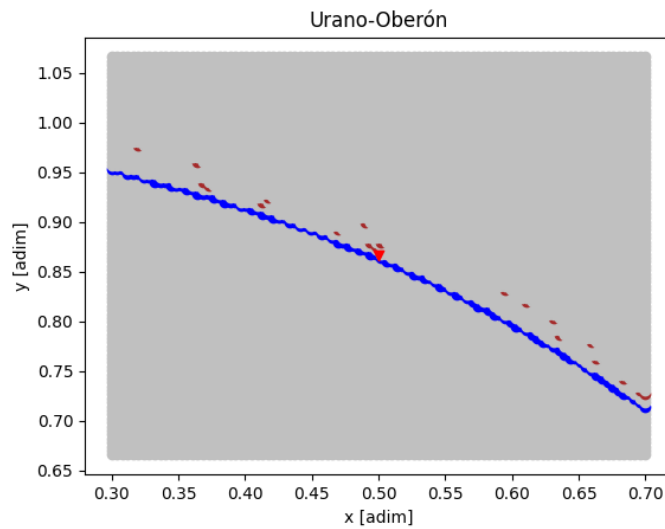


Figura 5.35: Interacción Urano-Oberón. $\mu = 3,4698 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Urano-Ariel. Ariel tiene una masa de $1,35 \times 10^{21}kg$, que junto a la masa de Urano, presentan una relación de masas de $\mu = 1,5542 \times 10^{-5}$.

La tabla 5.31, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Urano-Ariel es $d_{UA} = 191.200km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Urano-Miranda. Miranda tiene una masa de $6,59 \times 10^{19}kg$, que junto a la masa de Urano, presentan una relación de masas de $\mu = 7,5869 \times 10^{-7}$.

Urano-Oberón		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	137	$7,44 \times 10^8$
Inestables	9.843	$5,35 \times 10^{10}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	20	$1,09 \times 10^8$

Tabla 5.29: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Urano-Oberón, $\mu = 3,4698 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{UO} = 582.600Km$.

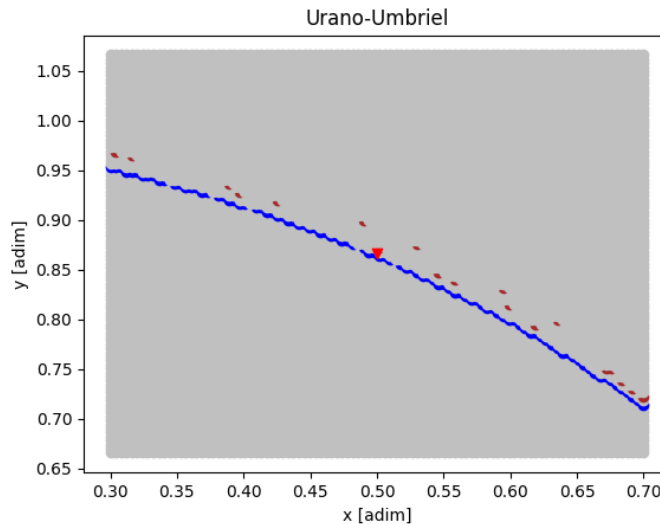


Figura 5.36: Interacción Urano-Umbriel. $\mu = 1,3492 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

La tabla 5.32, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Urano-Miranda es $d_{UM} = 129.800km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

5.2.6. Satélites naturales de Neptuno.

En la actualidad se conocen catorce satélites de Neptuno. El mayor de ellos es Tritón, que posee el 99,5% de la masa en órbita alrededor de Neptuno. En este estudio se analizan los comportamientos de Neptuno respecto a Tritón, Talasa, Despina, Galatea, Larisa, Proteo, Nereida. En la Figura 5.39, se aprecia Neptuno con sus satélites naturales. La masa de Neptuno es de $1,024 \times 10^{26}kg$.

Urano-Umbriel		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	95	$1,08 \times 10^8$
Inestables	9.886	$1,12 \times 10^{10}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	19	$2,15 \times 10^7$

Tabla 5.30: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Urano-Umbriel, $\mu = 1,3492 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{UU} = 266.000Km$.

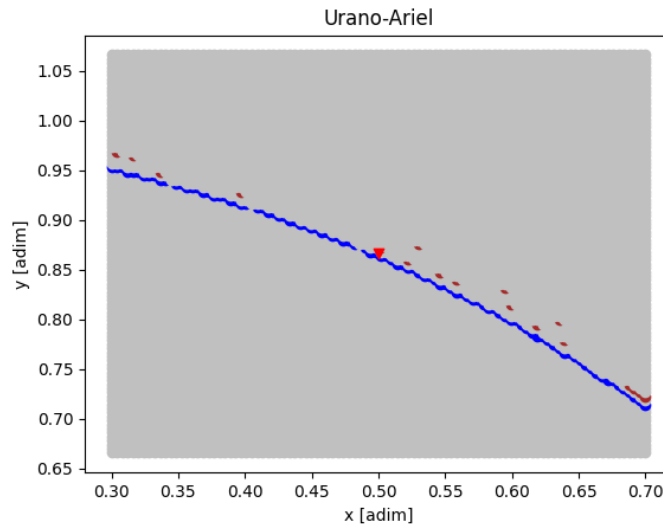


Figura 5.37: Interacción Urano-Ariel. $\mu = 1,5542 \times 10^{-5}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Neptuno-Náyade. Náyade posee una masa de $2 \times 10^{17} Kg$. Con lo que junto a la masa del planeta, presentan una relación $\mu = 1,9531 \times 10^{-9}$.

La tabla 5.33, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Neptuno-Náyade es $d_{NNa} = 48.227km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Neptuno-Despina. Despina posee una masa de $2 \times 10^{18}kg$. Con lo que junto a la masa del planeta, presentan una relación $\mu = 1,9531 \times 10^{-8}$.

La tabla 5.34, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Neptuno-Despina es $d_{ND} = 52.526km$,

Urano-Ariel		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	99	$5,79 \times 10^7$
Inestables	9.883	$5,78 \times 10^9$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	18	$1,05 \times 10^7$

Tabla 5.31: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Urano-Ariel, $\mu = 1,5542 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d_{UA} = 191.200km$.

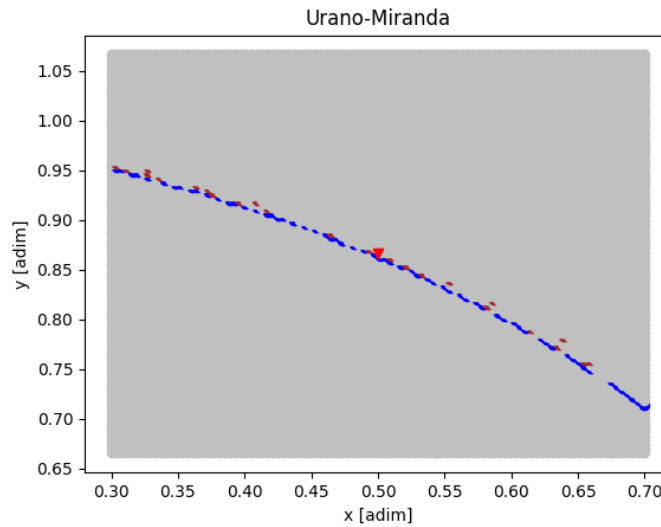


Figura 5.38: Interacción Urano-Miranda. $\mu = 7,5869 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

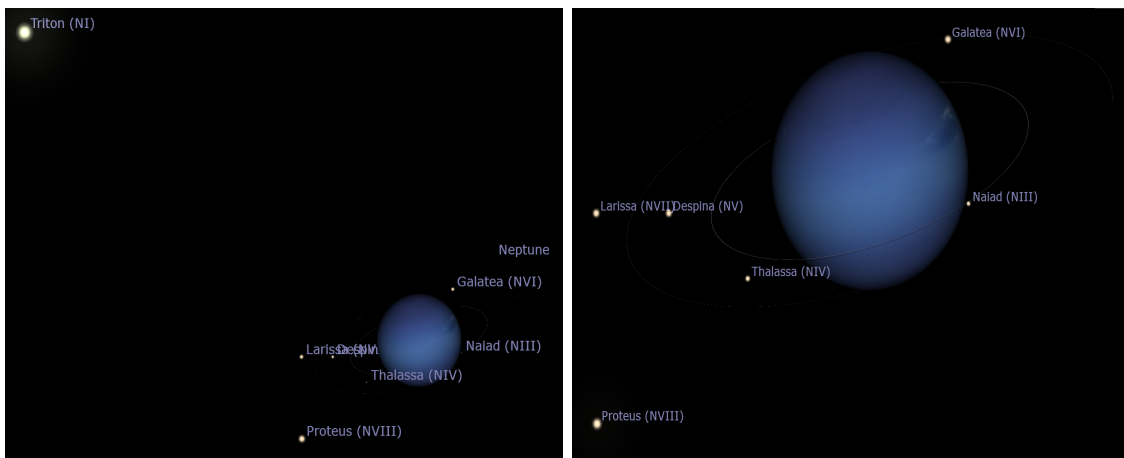
Neptuno-Galatea. Galatea posee una masa de $4 \times 10^{18}kg$. Con lo que junto a la masa del planeta, presentan una relación $\mu = 3,9062 \times 10^{-8}$.

La tabla 5.35, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifican para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Neptuno-Galatea es $d_{NG} = 61.953km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Neptuno-Larisa. Larisa posee una masa de $5 \times 10^{18}kg$. Con lo que junto a la masa del planeta, presentan una relación $\mu = 4,8828 \times 10^{-8}$.

Urano-Miranda		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	64	$1,73 \times 10^7$
Inestables	9.912	$2,67 \times 10^9$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	24	$6,47 \times 10^6$

Tabla 5.32: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Urano-Miranda, $\mu = 7,5869 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$, $d_{UM} = 129.800Km$.



(a) Vista amplia.Fuente:Propia

(b) Vista cerca.Fuente:Propia

Figura 5.39: Neptuno y sus Satélites Naturales

La tabla 5.36, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Neptuno-Larisa es $d_{NL} = 73.548km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Neptuno-Proteo. Proteo posee una masa de $5 \times 10^{19}kg$. Con lo que junto a la masa del planeta, presentan una relación $\mu = 4,8828 \times 10^{-7}$.

La tabla 5.37, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Neptuno-Proteo es $d_{NP} = 117.647km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

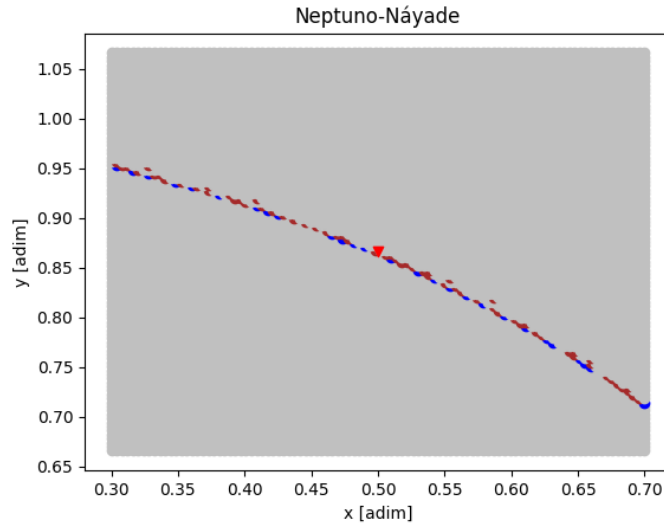


Figura 5.40: Interacción Neptuno-Náyade. $\mu = 1,9531 \times 10^{-9}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Neptuno-Náyade		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	27	1×10^6
Inestables	9.910	$3,69 \times 10^8$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	63	$2,34 \times 10^6$

Tabla 5.33: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Neptuno-Náyade, $\mu = 1,9531 \times 10^{-9}$, $t_f = 500$, $d_{NNa} = 48.227Km$.

Neptuno-Despina		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	31	$1,37 \times 10^6$
Inestables	9.909	$4,37 \times 10^8$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	60	$2,65 \times 10^6$

Tabla 5.34: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 .

Sistema: Neptuno-Despina, $\mu = 1,9531 \times 10^{-8}$, $t_f = 500$, $d_{ND} = 52.526Km$.

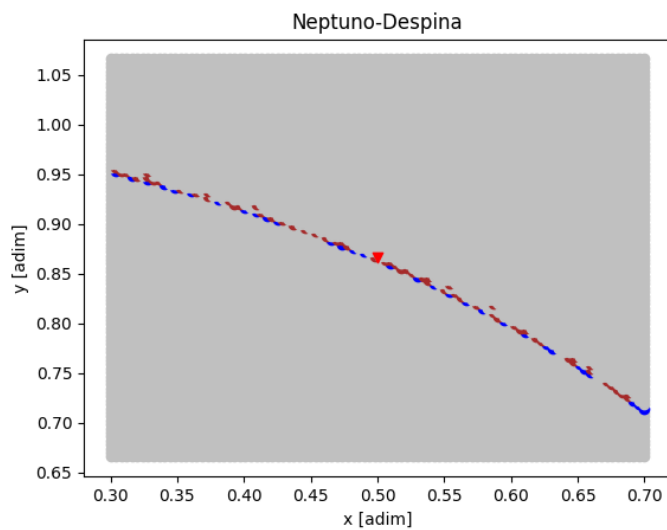


Figura 5.41: Interacción Neptuno-Despina. $\mu = 1,9531 \times 10^{-8}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

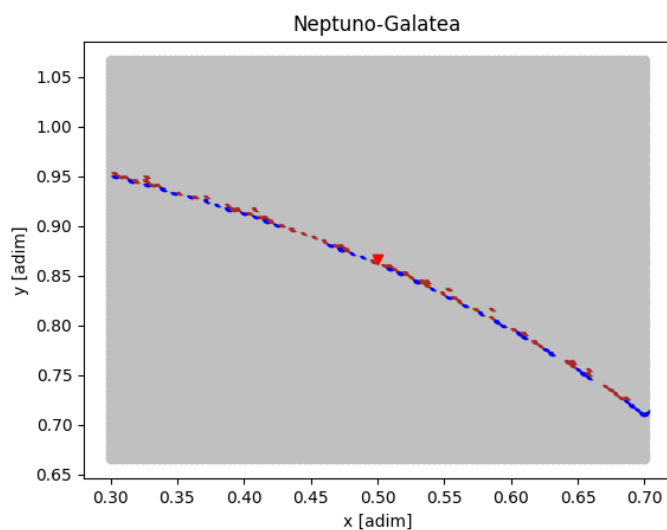


Figura 5.42: Interacción Neptuno-Galatea. $\mu = 3,9062 \times 10^{-8}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Neptuno-Galatea		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	37	$2,27 \times 10^6$
Inestables	9.906	$6,08 \times 10^8$
Colisión m_1	0	0
colisión m_2	57	$3,50 \times 10^6$

Tabla 5.35: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Neptuno-Galatea, $\mu = 3,9062 \times 10^{-8}$, $t_f = 500$, $d_{NG} = 61.953Km$.

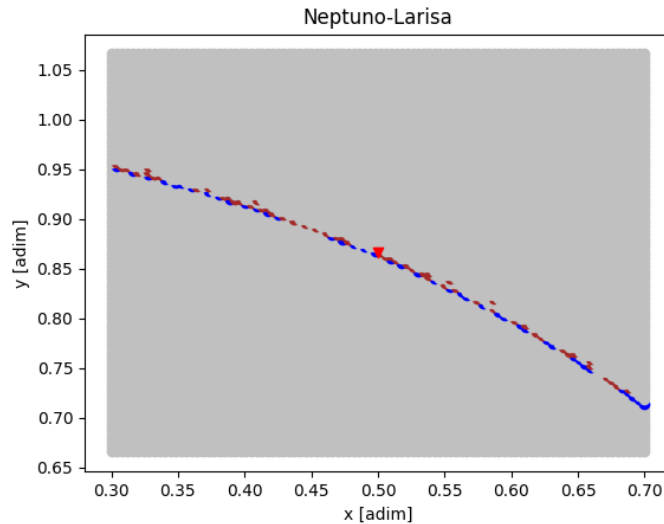


Figura 5.43: Interacción Neptuno-Larisa. $\mu = 4,8828 \times 10^{-8}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Neptuno-Larisa		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	42	$3,64 \times 10^6$
Inestables	9.903	$8,57 \times 10^8$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	55	$4,76 \times 10^6$

Tabla 5.36: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Neptuno-Larisa, $\mu = 3,9062 \times 10^{-8}$, $t_f = 500$, $d_{NL} = 73.548Km$.

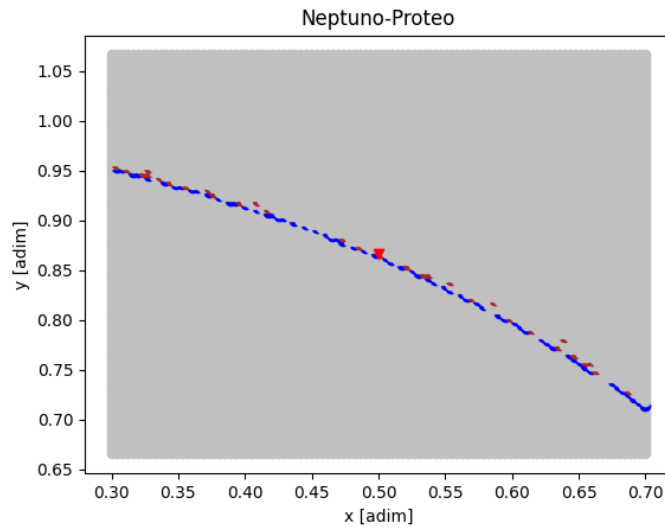


Figura 5.44: Interacción Neptuno-Proteo. $\mu = 4,8828 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Neptuno-Proteo		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	63	$1,4 \times 10^7$
Inestables	9.906	$2,19 \times 10^9$
Colisión m_1	0	0
colisión m_2	31	$6,87 \times 10^6$

Tabla 5.37: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Neptuno-Proteo, $\mu = 4,8828 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$, $d_{NP} = 117.647Km$.

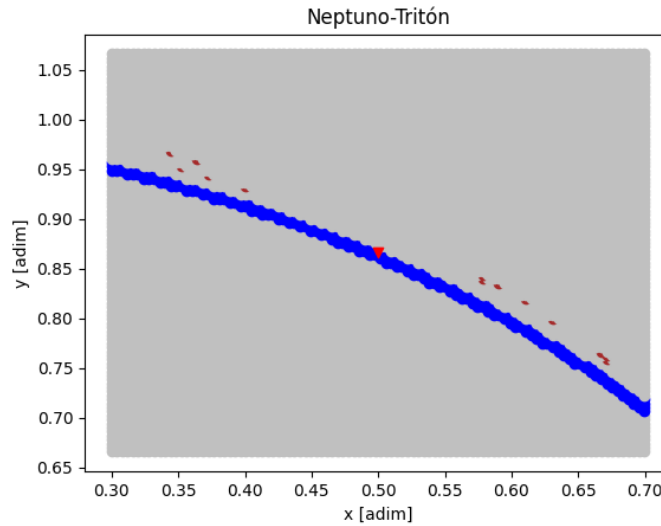


Figura 5.45: Interacción Neptuno-Tritón. $\mu = 0,2089 \times 10^{-3}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Neptuno-Tritón		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	339	$6,81 \times 10^8$
Inestables	9.648	$1,94 \times 10^{10}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	13	$2,61 \times 10^7$

Tabla 5.38: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Neptuno-Tritón, $\mu = 0,2089 \times 10^{-3}$, $t_f = 500$, $d_{NT_r} = 354.300Km$.

Neptuno-Tritón. Tritón posee una masa de $2,14 \times 10^{22}Kg$. Con lo que junto a la masa del planeta, presentan una relación $\mu = 0,2089 \times 10^{-3}$.

La tabla 5.38, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Neptuno-Tritón es $d_{NT_r} = 354.300km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Neptuno-Nereida. Nereida posee una masa de $3 \times 10^{19}kg$. Con lo que junto a la masa del planeta, presentan una relación $\mu = 2,9296 \times 10^{-7}$.

La tabla 5.39, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Neptuno-Nereida, es $d_{NN_e} =$

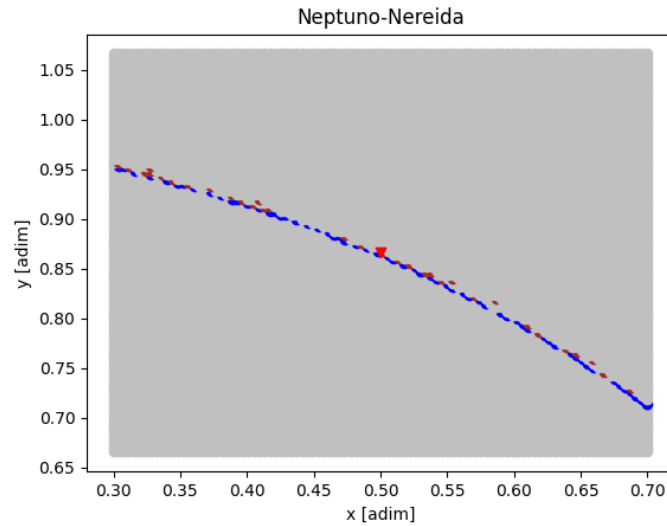


Figura 5.46: Interacción Neptuno-Nereida. $\mu = 2,9296 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Neptuno-Nereida		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	61	$2,971 \times 10^{10}$
Inestables	9.906	$4,82 \times 10^{12}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	33	$1,6 \times 10^{10}$

Tabla 5.39: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Neptuno-Nereida, $\mu = 2,9296 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$, $d_{NNe} = 5.513.400km$.

$5.513.400km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

5.2.7. Satélites naturales de Plutón.

Posee cinco satélites naturales: Caronte (Chanon), Nix, Hidra, Cerbero y Estigia. Siendo los dos últimos más pequeños que sus antecesores, y además de reciente descubrimiento. En el presente estudio se analizarán, por separado los puntos de estabilidad alrededor de L_4 . Considerando que Nix e Hydra tienen igual masa, sólo se realizará el estudio sobre el primero de ellos. Reviste especial interés, la relación Plutón-Caronte, debido a la similitud de sus masas. En la Figura 5.47, se aprecia Plutón con sus satélites naturales.

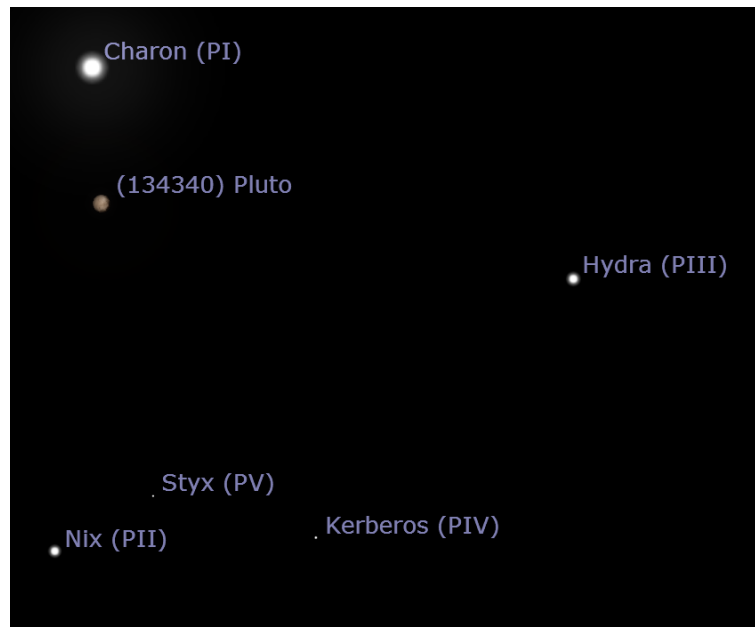


Figura 5.47: Plutón y sus satélite.Fuente:Propia.

Plutón-Caronte. La masa de Caronte es de $1,52 \times 10^{21}kg$, que junto a la masa del planeta, se obtiene una relación de masas aproximada, $\mu = 0,1084$. En la Figura5.48, se aprecia la ausencia de puntos de estabilidad.

La tabla 5.40, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Plutón-Caronte es $d_{PCa} = 19.640km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Plutón-Nix. Los satélites Nix e Hydra, se diferencian en sus tamaños, el diámetro de Nix es de 93km, y el diámetro de Hydra es de 115km. Sin embargo, sus masa son iguales

Plutón-Caronte		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	0	0
Inestables	9.997	$6,17 \times 10^7$
Colisión m_1	1	$6,17 \times 10^3$
Colisión m_2	2	$1,23 \times 10^4$

Tabla 5.40: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Plutón-Caronte, $\mu = 0,1084$, $t_f = 500$, $d_{PCa} = 19.640km$.

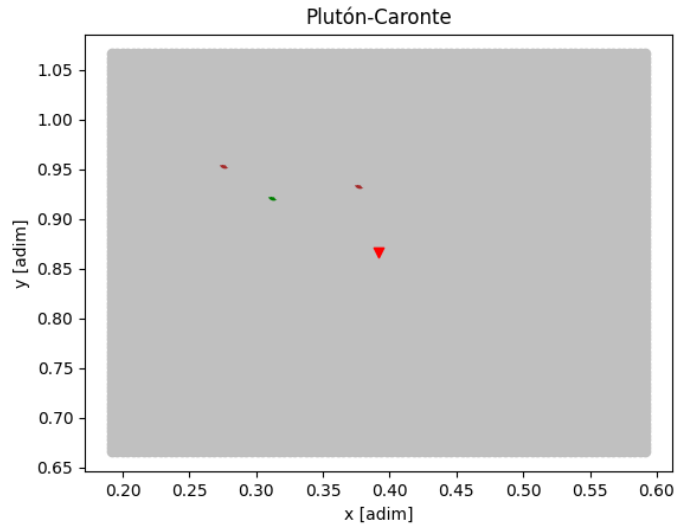


Figura 5.48: Interacción Plutón-Caronte. $\mu = 0,1084$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Plutón-Nix		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	76	$2,88 \times 10^6$
Inestables	9.902	$3,76 \times 10^8$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	22	$8,34 \times 10^5$

Tabla 5.41: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Plutón-Nix, $\mu = 4 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{PN} = 48.690Km$.

a $5 \times 10^{16}kg$. Debido que el presente estudio considera el efecto de las masas, sus tamaños pasan a ser irrelevantes, por tal motivo, se analiza la interacción Pluton-Nix. La relación de masas es aproximada, $\mu = 4 \times 10^{-6}$.

La tabla 5.41, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Plutón-Nix es $d_{PN} = 48.690km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Plutón-Cerberero. Cerbero (Kerberos), con una masa de $1,65 \times 10^{16}kg$, corresponde al cuarto satélite de Plutón, en haber sido descubierto. La relación de masas es aproximada, $\mu = 1,32 \times 10^{-6}$.

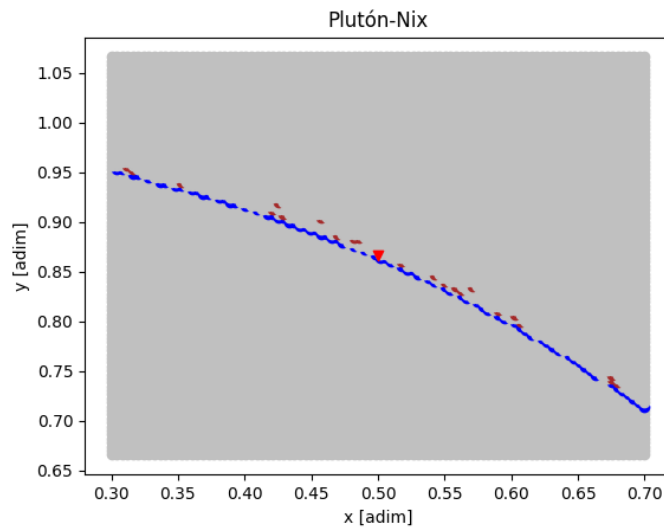


Figura 5.49: Interacción Plutón-Nix. $\mu = 4 \times 10^{-6}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

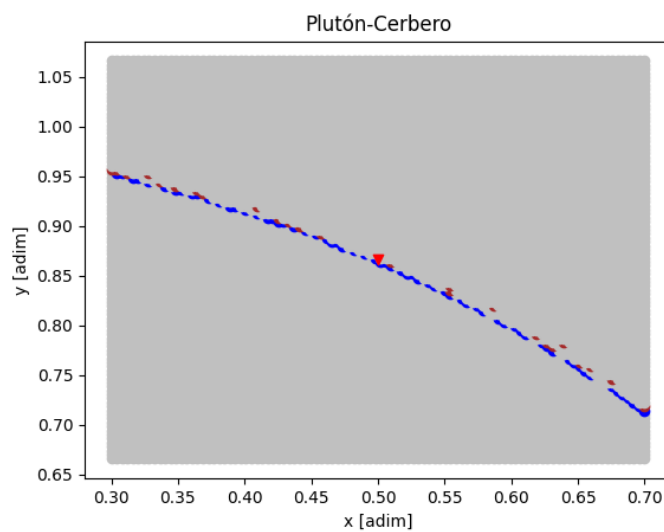


Figura 5.50: Interacción Plutón-Cerbera. $\mu = 1,32 \times 10^{-6}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

Plutón-Cerbero		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	65	$3,47 \times 10^6$
Inestables	9.910	$5,29 \times 10^8$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	25	$1,33 \times 10^6$

Tabla 5.42: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Plutón-Cerbero, $\mu = 1,32 \times 10^{-6}$, $t_f = 500$, $d_{PCE} = 57.750km$.

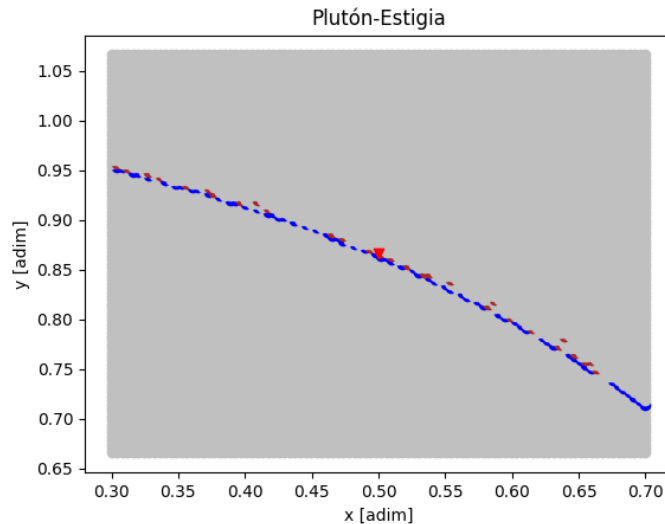


Figura 5.51: Interacción Plutón-Estigia. $\mu = 6 \times 10^{-7}$. $t_f = 500$. Fuente: Propia

La tabla 5.42, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Plutón-Cerbero es $d_{PCE} = 57.750km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Plutón-Estigia. Estigia (Styx), con una masa de $7,5 \times 10^{15}kg$, corresponde al quinto satélite de Plutón, en haber sido descubierto. La relación de masas es aproximada, $\mu = 6 \times 10^{-7}$.

La tabla 5.43, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Plutón-Estigia es $d_{PE} = 42.413km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

Plutón-Estigia		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	64	$1,84 \times 10^6$
Inestables	9.907	$2,85 \times 10^8$
Colisión m_1	0	0
colisión m_2	29	$8,35 \times 10^5$

Tabla 5.43: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Plutón-Estigia, $\mu = 6 \times 10^{-7}$, $t_f = 500$, $d_{PE} = 42.413km$.

5.3. SISTEMA EXTRASOLAR TRAPPIST-1

TRAPPIST-1, también conocida como 2MASS J23062928-0502285, es una estrella enana ultra-fría de tipo espectral M8 V (enana roja de tipo avanzado) localizada a 39,13 años luz (12,0 pc) en la constelación de Acuario 1. Sus magnitudes en distintas longitudes de onda son: banda V = 18.798, banda R = 16.466 y banda I = 14.024.

Un equipo de astrónomos de Bélgica encabezado por Michaël Gillon, del Instituto de Astrofísica y Geofísica de la Universidad de Lieja en Bélgica, utilizó el telescopio TRAPPIST (Telescopio Pequeño para Planetas y Planetesimales en Tránsito) situado en el observatorio de La Silla, en el desierto de Atacama (Chile), para observar TRAPPIST-1 y buscar posibles planetas que la orbitasen. Utilizando el tránsito fotométrico, descubrieron tres planetas del tamaño de la Tierra que orbitan la estrella; los dos planetas internos que se encontraron están acoplados por la gravedad a su estrella anfitriona, mientras que el planeta externo parece estar dentro de la zona habitable o justo en el exterior de esta en el sistema. El equipo hizo sus observaciones de septiembre a diciembre de 2.015 y publicó sus hallazgos en la edición de mayo de 2.016 de la revista Nature.

La estrella no es mucho más grande que Júpiter y emite una fracción de la radiación del Sol. Los tres pequeños planetas orbitan la estrella estrechamente entre (entre 1-3 % de la distancia de la órbita de la Tierra al Sol). Un año en el planeta más cercano equivale a 1,5 días de la Tierra, y en el segundo planeta, a 2,4 días terrestres.

El 22 de febrero de 2.017 los astrónomos anunciaron el descubrimiento de cuatro exoplanetas adicionales en torno a TRAPPIST-1. Además del telescopio TRAPPIST, este trabajo utilizó el VLT, Very Large Telescope, en el Observatorio Paranal y el Telescopio

Planeta	Masa (kg)	Sistema	Radio
Trappist1-B	$8,205528 \times 10^{24}$	TRAPPIST-1	1,116
Trappist1-C	$7,811376 \times 10^{24}$	TRAPPIST-1	1,097
Trappist1-D	$2,317136 \times 10^{24}$	TRAPPIST-1	0,788
Trappist1-D	$4,132624 \times 10^{24}$	TRAPPIST-1	0,920
Trappist1-F	$6,204908 \times 10^{24}$	TRAPPIST-1	1,045
Trappist1-G	$7,889012 \times 10^{24}$	TRAPPIST-1	1,129
Trappist1-H	$1,946872 \times 10^{24}$	TRAPPIST-1	0,755

Tabla 5.44: Tabla de planetas del Sistema Trappist-1, el radio está dado en unidades de radio terrestre. Fuente: NASA

Espacial Spitzer, entre otros, y llevó el número total de planetas que orbitan la estrella a siete, de los cuales al menos tres están en su zona habitable circunestelar. (Gillon [15])

5.3.1. El planeta Trappist1-B

Se procedió a realizar el estudio de la estrella Trappist-1 y su planeta Trappist1-B tomando como referencia que este sistema tiene muchas similitudes con nuestro Sistema Solar, el análisis de malla permite observar que las regiones de estabilidad en la zona L4 demuestran que sí existen puntos para tomar en cuenta en el campo vectorial, tal como se aprecia en la Figura 5.52 al realizar un acercamiento se logran mejores apreciaciones que permiten visualizar un campo mas completo, para esto es necesario realizar varias ejecuciones del algoritmo, finalmente se observan resultados favorables para considerar una región estable.

La tabla 5.45, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Trappist-1 y Trappist1-B es $1,72 \times 10^6 km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos.

El estudio de este planeta y sus órbitas estables en relación a una tercera partícula demuestra que los resultados son satisfactorios y nos brinda una posibilidad con un alto margen de éxito para poder utilizar las regiones de estabilidad.

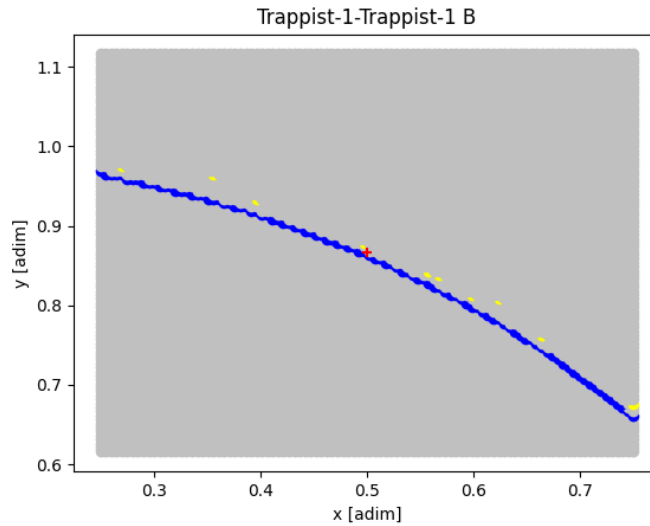


Figura 5.52: Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-B. $\mu = 0,0000515$. Fuente: Propia

5.3.2. El planeta Trappist1-C

Se procedió a realizar el estudio de la estrella Trappist-1 y su planeta Trappist1-C el resultado observa en la Figura 5.53 en esta gráfica se aprecia que las regiones de estabilidad son pocas, pero existen varios puntos alrededor del punto L4 que se pueden clasificar como aptos para las orbitas satelitales.

La tabla 5.46, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Trappist-1 y Trappist1-C es $2,36 \times 10^6 km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Trappist1 - Trappist1-B		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	144	$1,07 \times 10^{10}$
Inestables	9.846	$7,28 \times 10^{11}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	10	$7,40 \times 10^8$

Tabla 5.45: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-B, $\mu = 5,15 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 1,72 \times 10^6 km$.

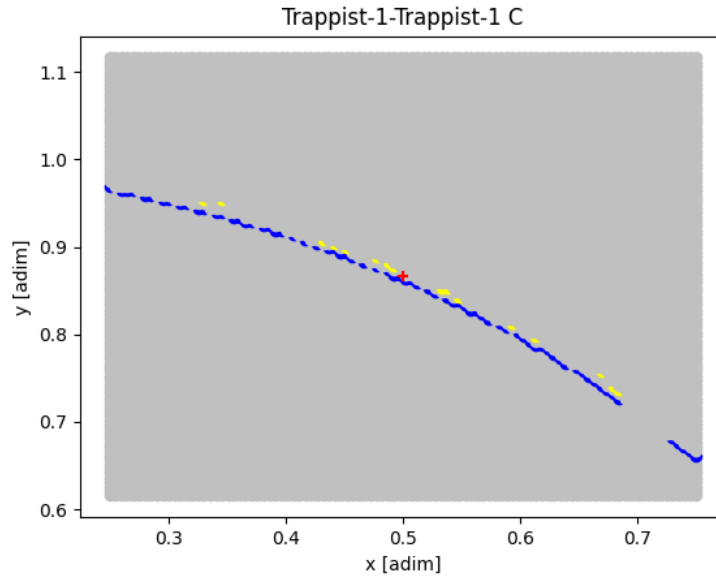


Figura 5.53: Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-C. $\mu = 0,000049$. Fuente: Propia

5.3.3. El planeta Trappist1-D

Se procedio a realizar el estudio de la estrella Trappist-1 y su planeta Trappist1-D el resultado observa en la Figura 5.54 en esta grafica podemos apreciar que las regiones de estabilidad se encuentran dispersas a lo largo de la orbita satélital.

La tabla 5.47, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Trappist-1 y Trappist1-D es $3,34 \times 10^6 km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Trappist1 - Trappist1-C		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	141	$1,96 \times 10^{10}$
Inestables	9.849	$1,37 \times 10^{12}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	10	$1,39 \times 10^9$

Tabla 5.46: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-C, $\mu = 4,39 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 2,36 \times 10^6 Km$.

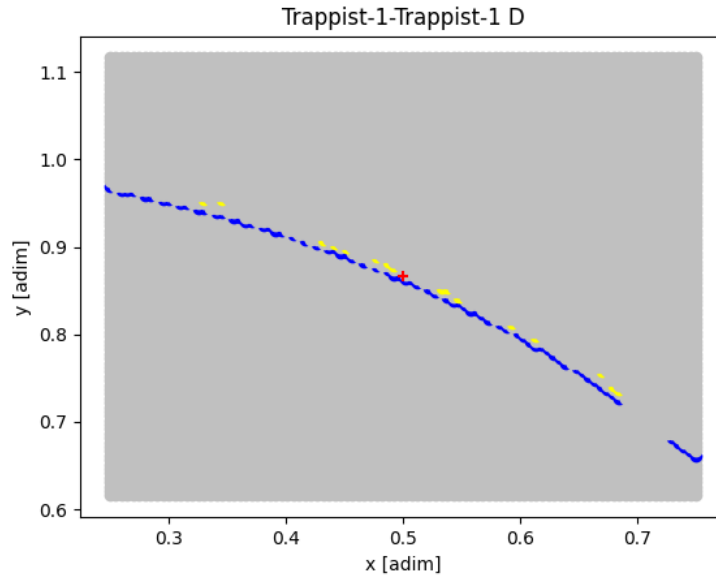


Figura 5.54: Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-D. $\mu = 0,00001456$. Fuente: Propia

5.3.4. El planeta Trappist1-E

Se procedio a realizar el estudio de la estrella Trappist-1 y su planeta Trappist1-E tal como se representa en la 5.55 resultados para estas zonas son bastante prometedores.

La tabla 5.48, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Trappist-1 y Trappist1-E es $4,38 \times 10^6 km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Trappist1 - Trappist1-D		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	72	$2,01 \times 10^{10}$
Inestables	9.912	$2,76 \times 10^{12}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	16	$4,46 \times 10^9$

Tabla 5.47: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-D, $\mu = 1,45 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 3,34 \times 10^6 km$.

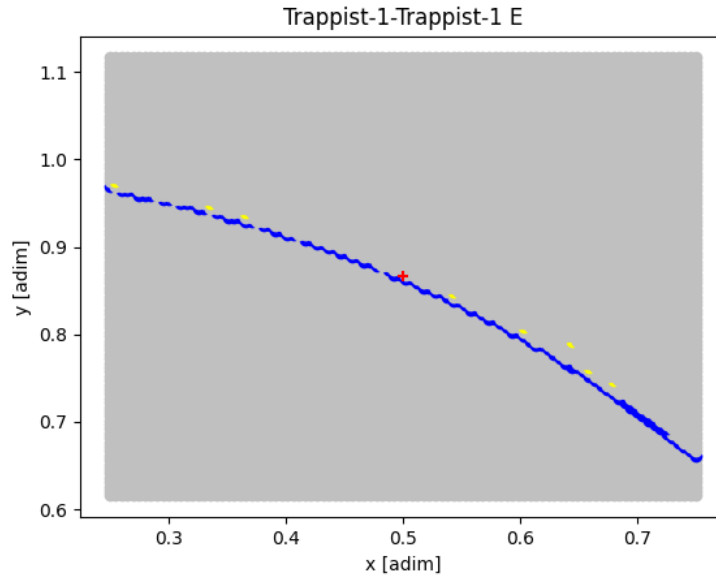


Figura 5.55: Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-E. Malla 100x100. $\mu = 0,00002597$ Fuente: Propia

5.3.5. El planeta Trappist1-F

Se procedio a realizar el estudio de la estrella Trappist-1 y su planeta Trappist1-F tal como se representa en la 5.56 este planeta cuenta con una masa de 1.039 masas terrestres.

La tabla 5.49, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Trappist-1 y Trappist1-F es $5,76 \times 10^6 km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Trappist1 - Trappist1-E		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	102	$4,89 \times 10^{10}$
Inestables	9.890	$4,74 \times 10^{12}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	8	$3,84 \times 10^9$

Tabla 5.48: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-E, $\mu = 2,59 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 4,38 \times 10^6 km$.

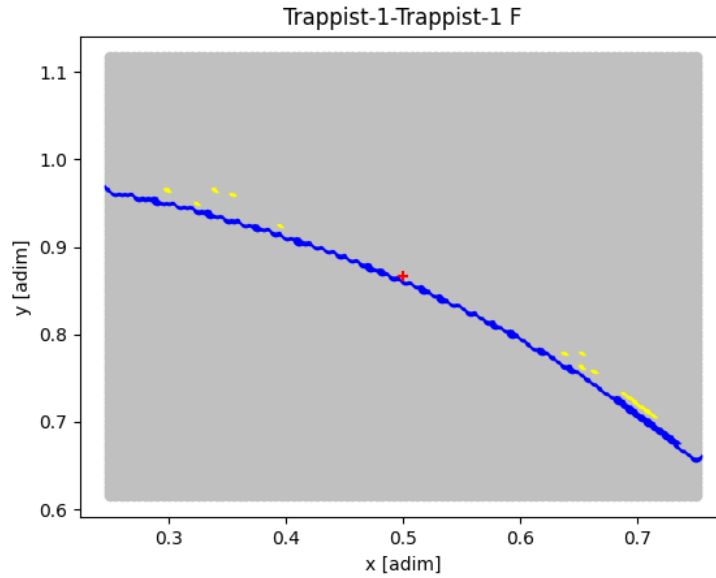


Figura 5.56: Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-F. Malla 100x100. $\mu = 0,00003899$ Fuente: Propia

5.3.6. El planeta Trappist1-G

Se procedio a realizar el estudio de la estrella Trappist-1 y su planeta Trappist1-G tal como se representa en la 5.57 este planeta cuenta con una masa de 1.321 masas terrestres y cuenta con una localización de puntos muy similiar a los otros planetas por lo que podemos clasificar su zona como estable.

La tabla 5.50, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$.

Trappist1 - Trappist1-F		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	123	$1,02 \times 10^{11}$
Inestables	9.862	$8,18 \times 10^{12}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	15	$1,24 \times 10^{10}$

Tabla 5.49: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-F, $\mu = 3,89 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 5,76 \times 10^6 km$.

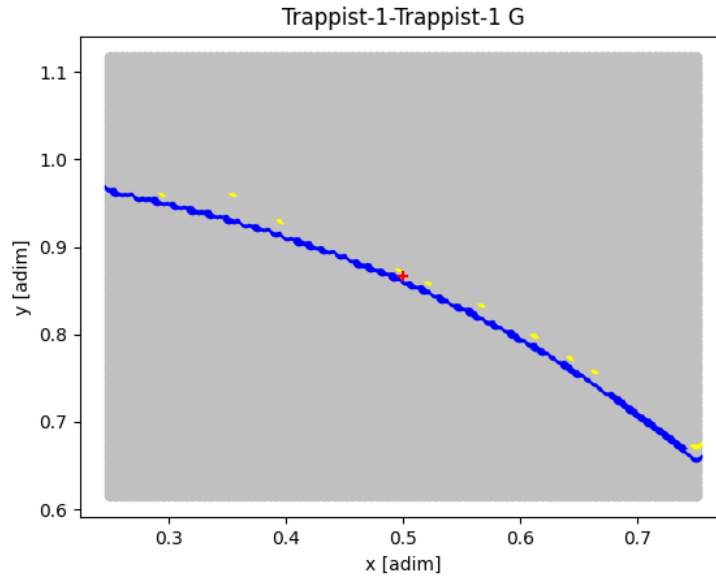


Figura 5.57: Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-G. Malla 100x100. $\mu = 0,00004957$ Fuente: Propia

En base al fundamento teórico del contexto de la sección 3 y el análisis realizado en los primeros capítulos, se considera que estas regiones estables de los planetas extrasolares también tienen el mismo comportamiento, tanto en el sistema de Jupyter y los asteroides troyanos que es uno de los propósitos de estudio principales, así como estos sistemas exoplanetarios que forman parte de nuestra galaxia en este caso el sistema Trappist1.

Trappist1 - Trappist1-G		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	141	$1,74 \times 10^{11}$
Inestables	9.849	$1,21 \times 10^{13}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	10	$1,23 \times 10^{10}$

Tabla 5.50: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en Km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-G, $\mu = 4,95 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 7,02 \times 10^6 km$.

Trappist1 - Trappist1-H		
Tipo de Punto	Unidades	Área [km^2]
Estables	66	$1,41 \times 10^{11}$
Inestables	9.920	$2,13 \times 10^{13}$
Colisión m_1	0	0
Colisión m_2	14	$3,00 \times 10^{10}$

Tabla 5.51: Tabla con la cantidad de puntos según su tipo y área que representa en km^2 . Sistema: Trappist1 - Trappist1-H, $\mu = 1,22 \times 10^{-5}$, $t_f = 500$, $d = 9,26 \times 10^6 km$.

5.3.7. El planeta Trappist1-H

Se procedio a realizar el estudio de la estrella Trappist-1 y su planeta Trappist1-H tal como se aprecia en 5.58

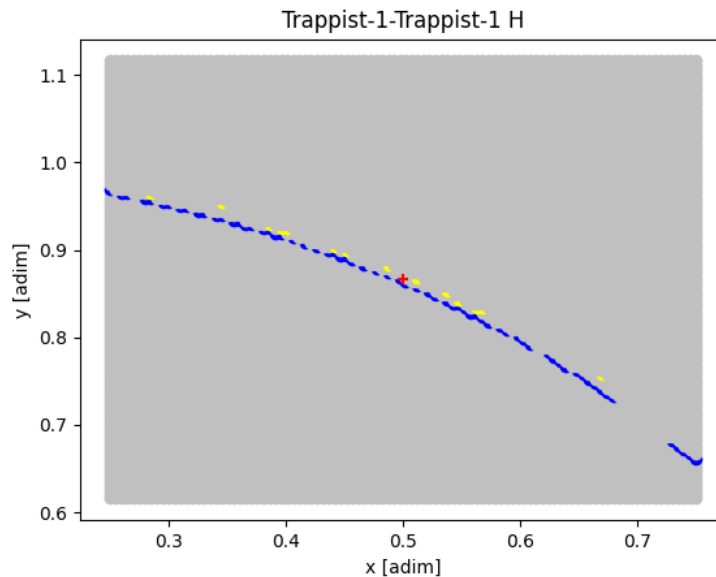


Figura 5.58: Comportamiento interacción Trappist1 - Trappist1-H. Malla 100x100. $\mu = 0,00001223$ Fuente: Propia

La tabla 5.51, contiene la cantidad de puntos según el tipo en que se clasifiquen para el tiempo final, $t_f = 500$. Considerando la distancia Trappist-1 y Trappist1-H es $9,26 \times 10^6 km$, se puede obtener un área aproximada para cada conjunto de puntos

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

En nuestro estudio se utilizó como marco de análisis el problema restringido de los tres cuerpos, ya que era de interés determinar puntos de estabilidad alrededor de L4, considerando una masa despreciable. La teoría que respalda este trabajo se fundamenta en el texto de Kolomaro [9]. Era de interés dicha región, debido que por estudios previos, se sabe que en Júpiter existen asteroides Troyanos en dicha ubicación, y desde acá surge la inquietud, ¿qué ocurrirá en otros sistemas similares a Sol-Júpiter?. En el caso de los asteroides Troyanos, la literatura se refiere que en el sistema Solar, Júpiter no es un caso aislado, con esto en mente es que estimamos conveniente, y provechoso para nuestro trabajo el considerar los planetas del Sistema Solar, los planetas junto a sus satélites naturales, y el sistema extrasolar conocido como Trappist-1. Para cada uno de estos sistemas, se identificaron los puntos de estabilidad, inestabilidad y colisión con las masas principales, m_1 y m_2 . El interés de estudio en estos sistemas, se originan en la posibilidad de contar con información suficiente que permita validar, o refutar, los resultados que estábamos obteniendo. En el origen se pensaba sólo estudiar el sistema Solar, y abordar extraordinariamente el sistema Plutón-Caronte, zona en la que estudios previos señalan que es una zona de inestabilidad. Sin embargo, al apreciar el comportamiento de dichos sistemas, optamos por extendernos a los sistemas Planeta-Satélites naturales, obteniendo una considerable cantidad de información respecto a las regiones de estabilidad alrededor de L4, que se evidencian en el desarrollo del trabajo realizado. Posteriormente, surgió la inquietud de que comportamiento existía para esta misma región, pero en un sistema exosolar, lo que nos llevó a escoger Trappist-1, por sugerencia del Dr. Magaña, debido a que hay suficiente documentación cómo para ser considerado en un caso de estudio como el realizado.

Definidos los casos de estudio, así como las condiciones que se debían cumplir, debimos definir qué método numérico utilizar para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que se describe en 2.17. Esta situación, nos planteó un nuevo desafío.

El resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, no está limitado al uso de un método numérico en particular. De hecho existen diferentes métodos, y en este estudio se mencionaron dos, el método de Taylor y el método de Runge Kutta.

Al realizar un análisis de la teoría que involucra al método de Taylor, se identifican ciertas características que lo presentan como una buena opción para la integración numérica, sin embargo, su implementación no es simple, considerando que se debía resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Esta situación, llevó a buscar alternativas, logrando acceder a la librería Heyoka para Python, la cual está implementada en C++. Al estar disponible en un repositorio GitHub, y ser de libre acceso, y uso, nos llevó a realizar algunas pruebas, evidenciando que dispone del algoritmo que se requería para resolver el problema restringido de los tres cuerpos. Pero, para utilizarla había que cumplir con ciertos requisitos, se debía instalar en una distribución de GNU/Linux, requiere la instalación de Anaconda y de Python 3.9. En nuestro caso, probamos en Rocky Linux y Fedora, en ambas distribuciones obtuvimos idénticos resultados, con el ejemplo disponible.

Posteriormente, para cumplir con los objetivos propuestos, necesitamos interrumpir la integración para descartar aquellos valores donde $y < 0$, debido a que corresponden a puntos de inestabilidad. Se intentó modificar el código base de Heyoka, pero los resultados no fueron los esperados, debido a que se necesitaba acceder al código fuente escrito en C++, lenguaje que no utilizamos. Ante esta dificultad, se buscó una solución, basándonos en los aprendizajes adquiridos, y optamos por implementar el método numérico Runge Kutta 4.

Runge Kutta 4, no tiene un buen valor para el error, pero al implementarlo completamente desde cero, en Python, nos permitía modificarlo según nuestras necesidades. Una vez comprobados los resultados obtenidos, nos centramos en reducir el error de la integración, es así como pasamos por Runge Kutta de orden 5, hasta llegar al método numérico Runge Kutta de orden 6, que permite cumplir con los objetivos propuestos.

Al trabajar con el método numérico Runge Kutta 6, en Python, facilitó la obtención de los resultados, así como la generación de las imágenes, utilizando matplotlib, creación de archivos *.xlsx*, utilizando pandas, y generando archivos *.txt*.

Obtener las gráficas, identificando con colores diferentes, las áreas de estabilidad, ines-

tabilidad, colisión con m_1 , y colisión con m_2 facilita la comparación entre sistemas, entregando información relevante para el estudio de las zonas de estabilidad entorno a L4. Junto a las imágenes, y como insumo, se determina la cantidad de puntos según su tipo, así cómo el área aproximada que les corresponde, para este cálculo se relaciona la distancia entre las masas primarias, con el valor asignado a delta. Para facilitar el uso de esta información, se generan archivos con dicha información, para su posterior análisis e interpretación. En los formatos especificados en el párrafo anterior.

En las simulaciones del sistema Solar, se observa que todos los planetas tienen regiones de estabilidad, siendo Júpiter el que mayor superficie de estabilidad posee; la relación de masas con el Sol es $\mu = 0,00095484$. En contraparte, Mercurio posee la menor área de estabilidad, cuya relación de masas con el Sol es $\mu = 1,65158 \times 10^{-7}$.

Pudimos comprobar de forma empírica que el sistema Plutón-Charonte carece de puntos estables, y cuenta sólo con algunos puntos de colisión, sin embargo, presenta una amplia zona inestable. Por otro lado, que en la mayoría de los sistemas Planeta-Satélites naturales, cuentan con zonas de estabilidad, diferenciándose en la cantidad de puntos que contienen, así cómo la distribución de los mismos.

En relación al sistema exoplanetario Trappist1 se logró analizar la estabilidad y, observamos cómo las regiones con valores de μ pequeños, en general son estables. Este patrón se repite para todos los casos, exceptuando aquellos en que el valor de μ es muy grandes. En la medida que el valor de μ disminuye, se comprueba que todas las órbitas se vuelven estables, independientemente del valor de distancia entre las masas.

Respecto a los trabajos futuros, es recomendable el desarrollar el método numérico de Taylor, pero directamente en Python, para su posterior manipulación, o bien, realizar el estudio de la librería Heyoka para determinar de qué forma se puede detener la integración bajo ciertos criterios. Además, es interesante el comparar diferentes métodos numéricos para la resolución al problema restringido de los tres cuerpos, explorando Runge Kutta de orden superior al 6. Otra propuesta futura sería, analizar el comportamiento de estabilidad de otros sistemas extra-solares, además del estudiado en este trabajo. Finalmente, se deja la inquietud de avanzar en el estudio en las tres dimensiones, analizando el comportamiento de la masa despreciable en el eje z , y su interacción con las masas principales.

Bibliografía

- [1] ARNOLD V. I., KOZLOV V., NEISHTADT A. I., KHUKHRO E., *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics* Springer 2010.
- [2] BEAN, J. L; BENEDICT, G. F.; ENDL, M. (2006), *Astrophysical Journal Letters* 653 (1): L65-L68
- [3] BUTCHER, J. C. (2016). *Numerical methods for ordinary differential equations* (3a ed.). John Wiley & Sons. Springer 2010.
- [4] CONNORS, M., WIEGERT, P., & VEILLET, C. (2011)., *Earth's Trojan asteroid*. *Nature*, 475(7357), 481–483. <https://doi.org/10.1038/nature10233>
- [5] CRANE, L. (2021), *A second trojan asteroid shares Earth's orbit* *New Scientist* (1971), 252(3362), 14. [https://doi.org/10.1016/s0262-4079\(21\)02101-1](https://doi.org/10.1016/s0262-4079(21)02101-1)
- [6] CHRISTOU, A. A., BORISOV, G., DELL'ORO, A., JACOBSON, S. A., CELLINO, A., & UNDA-SANZANA, E. (2019), *Population control of Mars Trojans by the Yarkovsky & YORP effects*. En arXiv [astro-ph.EP]. <http://arxiv.org/abs/1907.12858>
- [7] DE LA FUENTE MARCOS C.AND DE LA FUENTE MARCOS R.(2014), *Trojan companion to Venus, PHA to the Earth* *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439(3), 2970–2977. <https://doi.org/10.1093/mnras/stu152>
- [8] DE LA FUENTE MARCOS C.AND DE LA FUENTE MARCOS R.(2017), *Asteroid 2014 YX49: a large transient Trojan of Uranus* *Monthly notices of the Royal Astronomical Society*, stx197. <https://doi.org/10.1093/mnras/stx197>
- [9] KOON W.S.,LO .W.,MARSDEN J.E. Y ROSS S.D. , *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*. version: April 25, 2011

- [10] NICHOLSON S.B., (1961). *The Trojan Asteroids*.
NASA/ADS.<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1961ASPL.8..239N/abstract>
- [11] INTA-NASA, V.E.D.C.Y., (2021, 23 febrero). *¿Cómo se descubrieron y nombraron los asteroides troyanos?*. *Deep Space Network*.
<https://www.mdsc.nasa.gov/index.php/2021/02/23/como-se-descubrieron-y-nombraron-los-asteroides-troyanos/>
- [12] MARZARI, F., SCHOLL, H., MURRAY, C., & LAGERKVIST, C. (S.F.), *Origin and Evolution of Trojan Asteroids*. *Lunar and Planetary Institute*.
<https://www.lpi.usra.edu/books/AsteroidsIII/pdf/3007.pdf>
- [13] CHARLES F., YODER, *Notes on the origin of the Trojan asteroids*.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0019103579900241>
- [14] ROBUTEL, P., & SOUCHAY, J. (2010, 3 NOVIEMBRE), *An Introduction to the Dynamics of Trojan Asteroids*. *SpringerLink*.
<https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-04458-8>
- [15] MICHAËL GILLON , AMAURY H. M. J. TRIAUD , BRICE-OLIVIER DEMORY,, EM-MANUËL JEHIN¹, ERIC AGOL , KATHERINE M. DECK , SUSAN M. LEDERER , JULIEN DE WIT , ARTEM BURDANOV¹ , JAMES G. INGALLS, EMELINE BOLMON , JEREMY LECONTE, SEAN N. RAYMOND, FRANCK SELSIS, MARTIN TURBET¹⁴, KHALID BAR-KAOU , ADAM BURGASSER , MATTHEW R. BURLEIGH , SEAN J. CAREY, ALEKSAN- DER CHAUSHEV¹⁷ , CHRIS M. COPPERWHEAT , LAETITIA DELREZ , CATARINA S. FERNANDES , DANIEL L. HOLDSWORTH , ENRICO J. KOTZE, VALÉRIE VAN GROO- TEL , YASEEN ALMLEAKY,, ZOUHAIR BENKHALDOUN, PIERRE MAGAIN , DIDIER QUELOZ (22 DE FEBRERO DE 2017), «*Seven temperate terrestrial planets around the nearby ultracool dwarf star TRAPPIST-1*». *Nature* 542 (7642): 456-460
<https://es.wikipedia.org/wiki/TRAPPIST-1>
<https://www.eso.org/public/archives/releases/sciencepapers/eso1706/eso1706a.pdf>
- [16] INNANEN, K. A., & MIKKOLA, S. (1988)., *Where are the saturnian Trojans? En Long-Term Dynamical Behaviour of Natural and Artificial N-Body Systems* (pp. 21–26). Springer Netherlands.
- [17] *Henri Poincare*.https://es.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9

- [18] TABACHNIK1 S. A., AND EVANS N.W., *Asteroids in the inner Solar system $\pm I$. Existence*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 319, 63-79 (2000)

Apéndice A

Programa en Python

A.1. Implementación del Método numérico Runge Kutta de Orden 6

En el desarrollo de este trabajo de investigación se realizó un código especial de Python que permite calcular los valores que corresponden a las regiones de estabilidad, el programa fue implementado utilizando el algoritmo de Runge-Kutta de orden 6.

A.1.1. Librerías utilizadas

El lenguaje de programación utilizado, para este Trabajo Fin de Máster, es Python. Se incluyen las librerías de manejo de vectores y arreglos numpy, la librería de cálculos math, y las librerías de paquetes avanzados de gráficos matplotlib.

```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

Después de incluir las librerías a utilizar, se define la función del problema de valor inicial que se utilizará para integrar un sistema de 4 ecuaciones, descritas en (2.22), se declaran en el programa como dv1, dv2, dv3 y dv4 respectivamente.

Las variables r1p y r2p corresponden a las ecuaciones de distancia de las masas.

```
def f1(t, v):
    (x, y, xp, yp) = v
```

```

r1p=((x+mu2)**2+y**2)**(-3/2.)
r2p=((x-mu1)**2+y**2)**(-3/2.)
dv1=xp+y
dv2=yp-x
dv3=yp-mu1*((x+mu2)*r1p)-mu2*((x-mu1)*r2p)
dv4=-xp-(mu1*(y))*r1p-(mu2*y)*r2p

return(np.array([dv1,dv2,dv3,dv4]))

```

A.1.2. Algoritmo de RK6

El algoritmo RK6 fue implementado, con una pequeña modificación para registrar los elementos de puntos de estabilidad que se detectaron durante el recorrido del integrador, los puntos $j1$ y $j4$ corresponde a los valores inestables y estables de la malla respectivamente, y los puntos $j2$ y $j3$ corresponden a los puntos de colisión con las masas m_1 y m_2 .

```

def RungeKutaS6(f,t0,tn,x0,n):
    t=np.linspace(t0,tn,n+1)
    m=len(x0)
    x=np.zeros((m,n+1))
    x[:,0]=x0
    h=(tn-t0)/n
    for i in range(1,n+1):
        k1=f(t[i-1],x[:,i-1])
        k2=f(t[i-1]+h*(1/3.),x[:,i-1]+(1/3.)*k1*h)
        k3=f(t[i-1]+h*(2/3.),x[:,i-1]+(2/3)*k2*h)
        k4=f(t[i-1]+h*(1/3),x[:,i-1]+(1/12)*k1*h+(1/3)*k2*h
            -(1/12)*h*k3)
        k5=f(t[i-1]+h*(5/6.),x[:,i-1]+(25/48.)*k1*h-(55/24.)*k2*h
            +(35/48.)*k3*h+k4*(15/8.)*h)
        k6=f(t[i-1]+h*(1/6.),x[:,i-1]+(3/20)*k1*h-(11/24)*k2*h
            -(1/8)*k3*h+(1/2)*k4*h+(1/10)*h*k5)
        k7=f(t[i],x[:,i-1]-(261/260)*k1*h+(33/13)*k2*h+
            (43/156)*k3*h-(118/39)*k4*h+(32/195)*k5*h+(80/39)*k6*h)

```



```

x[:, i]=x[:, i-1]+((13/200)*k1+(11/40.)*k3+(11/40.)*k4
+(4/25)*k5+(4/25)*k6+(13/200)*k7)*h
return((t,x))

```

A.1.3. Función de malla

Mediante un vector de dimensiones $m \times n$ y un acercamiento de $a \times b$ se despliega una malla de puntos que provienen del resultado de la función de RK6, con esta función obtenemos los valores necesarios para generar los puntos de análisis que permitirán visualizar gráficamente las regiones de estabilidad sobre L4.

```

def malla(m,n,a,b):
    x=np.linspace(-a,a,n)
    y=np.linspace(-b,b,m)
    xx,yy=np.meshgrid(x,y)
    points=np.c_[xx.ravel(),yy.ravel()]
    return(points)

```

A.1.4. Programa principal

En esta parte del programa se utilizan las funciones previamente definidas para poder desplegar los gráficos y calcular los puntos estables, en las últimas líneas se guarda un acumulador de los puntos que se generan como estables e inestables y la superficie que abarcan estas regiones expresadas en km^2 .

```
m = 100
```

```
n = m
```

```
a = 0.2
```

```
b = a
```

```

for i in range(n*m):
    points=malla(m,n,a,b)
    #Una vez generada la malla se generan las
    #condiciones iniciales
    x0=0.5-mu2+points[i,0]
    y0=3**(1/2)*0.5+points[i,1]

```

```

f0=[x0 ,y0 ,-y0 , x0]
M=1000

tiempo = 500

(j ,x) = RungeKutaS6(f1 ,0 , tiempo , f0 ,M)

if(j==1):
    plt . scatter (x0 ,y0 , color=' silver ' )
    inestable_x . append (x0)
    inestable_y . append (y0)
elif(j==2):
    plt . scatter (x0 ,y0 , color=' green ' )
    colision_m1x . append (x0)
    colision_m1y . append (y0)
elif(j==3):
    plt . scatter (x0 ,y0 , color=' brown ' )
    colision_m2x . append (x0)
    colision_m2y . append (y0)
else :
    plt . scatter (x0 ,y0 , color=' blue ' )
    estable_x . append (x0)
    estable_y . append (y0)
estable = len(estable_x)
print (estable)
inestable = len(inestable_x)
colision_m1 = len(colision_m1x)
colision_m2 = len(colision_m2x)
#####
#Calculo del area en Kilometros cuadrados
#####
deltaA = (2*a)/n
deltaB = (2*b)/m

```

```
deltaKmA = deltaA * distanciaPrimarios
deltaKmB = deltaB * distanciaPrimarios
area = deltaKmA*deltaKmB
area_est = area * estable
area_inest = area * inestable
area_colM1 = area * colision_m1
area_colM2 = area * colision_m2
```

Se realizaron varias pruebas y verificaciones del margen de error de los cálculos del programa, y se obtuvieron valores muy por debajo de $1,0 \times 10^{-11}$ por lo que se determina que los resultados son confiables.