El cultivo de la inteligencia a través del lenguaje matemático

Cultivating intelligence through mathematical language

Dr. Fernando BLASCO. Profesor Titular. Universidad Politécnica de Madrid (*fernando.blasco@upm.es*).

Resumen:

Este artículo presenta diferentes contextos donde las matemáticas ayudan a crear un hábito de pensamiento y razonamiento, con ramificaciones en la resolución de problemas. La inteligencia se asume asociada a la capacidad de resolución de problemas y es por esa razón que nos acercamos a la resolución de problemas matemáticos. Estos problemas serán planteados en un sentido amplio, no restringiéndonos a los enunciados clásicos, sino también a situaciones problemáticas que pueden aparecer en juegos como el ajedrez, juegos de magia y juegos de mesa y tablero, que son más motivadoras para los estudiantes y que requieren del uso de diferentes técnicas de resolución, además de estar interconectadas con otros ámbitos de conocimiento. Se expone la experiencia de planteamiento de problemas y razonamiento a través de juegos de magia basados en ideas matemáticas, llevada a cabo con estudiantes de altas capacidades, y se proporcionan algunos ejemplos concretos de actividades que se han realizado con estos estudiantes. Se presenta la matemática recreativa como una disciplina que abunda en la motivación de los estudiantes y el fomento de la curiosidad y la indagación. En esta línea, comentamos algunas ideas de M. De Guzmán, M. Gardner y R. Smullyan que se han utilizado en diferentes contextos. Se explican algunos juegos que se han demostrado de utilidad en la creación de pautas de razonamiento, exponiendo el caso concreto del ajedrez como herramienta educativa. Finalmente, se exponen conclusiones sobre la introducción de nuevos materiales, métodos e ideas con el objeto de resolver problemas y se formula una propuesta de continuidad y aplicación en el aula.

Descriptores: recursos educacionales, resolución de problemas, proceso cognitivo, matemática recreativa, inteligencia práctica, juegos de ingenio.

Abstract:

This paper sets out different contexts where mathematics helps create a thinking and

Fecha de recepción de la versión definitiva de este artículo: 05-10-2020.
Cómo citar este artículo: Blasco, F. (2021). El cultivo de la inteligencia a través del lenguaje matemático | *Cultivating intelligence through mathematical language. Revista Española de Pedagogía, 79* (278), 59-75. doi: https://doi.org/10.22550/REP79-1-2021-07
https://revistadepedagogia.org/ ISSN: 0034-9461 (Impreso), 2174-0909 (Online)

reasoning habit, with special emphasis on problem solving. Intelligence is thought to be connected to problem solving ability and so we are interested in the relationship between intelligence and mathematical problem solving. These problems will be posed in a broad sense, not just considering classical written problems but also problems that appear in situations such as chess, magic tricks, and board games. These settings motivate students better, solving them requires different approaches, and they relate to other fields of knowledge. This paper reports on our experience of posing problems and reasoning with gifted students through magic tricks based on mathematical ideas and we give some examples of the activities we have done with them. We also present recreational mathematics as a discipline that promotes student motivation and increases curiosity and inquiry. We show some ideas from Miguel De Guzmán, Martín Gardner, and Raymond Smullyan that have been used in different frameworks. We describe some games that have been shown to be useful tools for creating reasoning schemas, presenting the particular case of chess as an educational tool. Finally, we set out some conclusions about the introduction of new materials, methods, and ideas for solving problems and we formulate a proposal for continuing this work and applying it in the classroom.

Keywords: educational resources, problem solving, cognitive procedure, recreational mathematics, practical intelligence, mind games.

1. Introducción

Las Matemáticas pasan como una asignatura difícil para muchos estudiantes. Quizás porque es una asignatura en la que es necesario comprender los conceptos y saber hacer más que memorizar datos, definiciones o procedimientos. No hay una única definición de inteligencia y los diferentes expertos en la materia suelen poner matices a una u otra definición. Reagrupando algunas de las ideas, hay veces que se define como una capacidad mental muy general que implica habilidad para razonar, planificar, resolver problemas, pensar de forma abstracta, comprender ideas complejas, aprender con rapidez y aprender de la experiencia. Todas esas capacidades que se mencionan en la descripción anterior son inherentes a la resolución de problemas de matemáticas. Quizás es por eso por lo que, a menudo, las matemáticas y su dificultad se asocian a la inteligencia; pero no es esa la tesis que queremos defender aquí, sino únicamente mostrar la relación que existe entre ambas: a pesar de que las matemáticas se consideren complicadas, el currículo de matemáticas de ESO y bachillerato es asequible a cualquier alumno que estudie esas materias, pero también es habitual encontrar estudiantes que demandan más. Pedro Puig Adam, uno de los pioneros del estudio de la educación matemática en España, ya decía en 1951 que «La Matemática es el filtro a través del cual el hombre estudia los fenómenos naturales; sustituye la infinita complejidad de los mismos por la esquemática sencillez de unos entes de razón sobre los cuales pueda discurrir cómodamente el razonamiento lógico; obtenidos los frutos de este, procede la interpretación de los mismos en el campo de la realidad»

(Puig, 1951, p. 4). Luis Santaló (1966, p. 14) afirmaba que «Hacer matemáticas es resolver problemas», situando esta resolución de problemas en un contexto amplio «en que los conceptos matemáticos puedan aparecer, según el caso, como consecuencia de un problema o como un método para resolver futuros problemas, introducidos a manera de ejemplos o de aplicaciones». Volveremos sobre estas ideas más adelante pero sí queremos resaltar que el lenguaje es importante: al enfrentarse a un problema debemos primero entender qué nos está pidiendo, con lo que es necesario dominar el lenguaje. Después debemos resolverlo y, para ello, es muy útil la formalización matemática. Esta usa un lenguaje particular que simplifica la escritura. Por último, debemos interpretar la solución y, para ello, volver a adaptar el lenguaje matemático al lenguaje cotidiano. Estas ideas también fueron recogidas y ampliadas por Miguel de Guzmán en diferentes escritos: algunos artículos científicos, otros libros dedicados a profesores y otros libros, también muy importantes, pensados para estudiantes, pero con contenidos extracurriculares: libros con problemas diferentes y que mostraban unas matemáticas que sin introducir necesariamente conceptos distintos de los que se explican en las aulas habitualmente, sí que cambiaban mucho el punto de vista de su aplicación. Se plantean retos, conexiones, generalizaciones y aplicaciones. Las matemáticas se plantean de este modo como un cuerpo de conocimiento que incita a pensar y que supera el esquema de Proposición-Demostración-Ejemplo con el que se muestran muchas veces. No en vano Guzmán fue el creador e impulsor del programa ESTALMAT de estimulación del talento matemático desde la Real Academia de Ciencias. En sus palabras «en la resolución de problemas es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas, es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas» (De Guzmán, 1984, p. 12).

También el National Council of Supervisors of Mathematics (1977, p. 2) afirmaba: «Aprender a resolver problemas es la razón principal para estudiar matemáticas» (traducción del autor)[1] y quizás ocurre que los estudiantes más capaces, que necesitan desafíos, se sientan inclinados a resolver y a plantear problemas matemáticos «Teniendo en cuenta la compleja actividad intelectual, la naturaleza de las dificultades a las que se enfrenta el estudiante para resolver los problemas es variada, abarcando desde las dificultades de percepción hasta las relativas a su autorregulación cognitiva» (traducción del autor) (Căprioară, 2015, p. 1859). Por otro lado, a resolver problemas se puede aprender. Si bien es cierto que parece que determinados individuos tienen más facilidad para un tipo de razonamientos que otros, existen técnicas para la resolución de problemas matemáticos que también pueden ser aplicadas a la vida cotidiana, o no. En este sentido, George Polya, uno de los mayores estudiosos de la resolución de problemas matemáticos y un referente en técnicas de resolución de problemas, afirma que «el espacio dedicado en los periódicos y revistas a los crucigramas y otros acertijos parece demostrar que el público dedica un cierto tiempo a resolver problemas sin ningún interés práctico. Detrás del deseo de resolver este o aquel problema, que no aporta ventaja material alguna, debe haber una honda curiosidad, un deseo de comprender los caminos y medios, los motivos y procedimientos de la solución» (Polya, 1965).

De acuerdo con Polya, aquí consideraremos la resolución de problemas en un sentido amplio. Los problemas a los que nos vamos a referir no son todos con un texto que hay que interpretar, formular un modelo, realizar unos cálculos, dar con la solución matemática y volver al problema con palabras. La experiencia nos muestra que hay muchos modos diferentes de plantear problemas y de hacer ejercicios de razonamiento. En ocasiones, el problema tendrá que ver, efectivamente, con enunciados en los que hay que utilizar relaciones algebraicas, mientras que en otros casos los problemas serán geométricos, que pueden resolverse con regla y compás o con otros artefactos. Algunas veces un problema matemático puede ser explicar (o averiguar) por qué ocurre una determinada cosa (un problema teórico puede estar muy relacionado con probar un resultado matemático, pero también puede decirnos cuál es el fundamento de un juego de magia con cartas). En otras ocasiones, el problema matemático puede consistir en poner todas las caras de un cubo de un mismo color, como hizo el profesor Ernö Rubik con sus alumnos de arquitectura: ese objeto de sobra conocido que hoy se considera un juguete en realidad se diseñó para que los estudiantes de Rubik pudieran experimentar con objetos tridimensionales y giros en el espacio. El cubo ha dejado de ser un problema ya que los que son capaces de resolverlo rápidamente han memorizado los movimientos que tienen que hacer: tras examinar el cubo, son capaces mediante un algoritmo de volver a ponerlo en su posición inicial. Pero hubo un momento en el que el matemático David Singmaster (1981), utilizando una notación adecuada, resolvió el problema de volver a poner todas las caras del cubo de Rubik del mismo color. Del mismo modo, el ajedrez y otros juegos de mesa se pueden utilizar como entrenamiento mental. Comentaremos algunas de estas experiencias más adelante.

En este artículo no vamos únicamente a describir el estado de la cuestión y los beneficios de la resolución de problemas, planteados de formas no convencionales, para el desarrollo de la inteligencia. Utilizaremos ejemplos seleccionados a través de la experiencia que esperamos resulten de utilidad al docente y que le sirvan para profundizar en esta metodología y llevar a cabo sus propias propuestas de resolución de problemas de matemáticas entendidos en un sentido amplio.

2. Matemática recreativa y el legado de Martin Gardner

Martin Gardner fue quien escribió durante 25 años la columna de juegos matemáticos de la revista *Scientific American* y de quien se ha dicho que «convirtió a cientos de niños en matemáticos y a cientos de matemáticos en niños». Esa columna de juegos matemáticos en realidad no contenía juegos simples, sino que en ella aparecieron grandes ideas que pueden pensarse como un juego, pero que encierran un importante valor matemático. A título de ejemplo, en su columna fue donde se dio a conocer el método criptográfico RSA que hoy se utiliza, por ejemplo, en protocolos de firma electrónica. La idea de enseñar matemáticas a través de problemas curiosos, con una pizca de sorpresa y que pudieran sorprender al lector, no es propia de Gardner y del siglo XX. Encontramos planteamientos de problemas «divertidos» en el *Liber Abaci* de Fibonacci o en *De Viribus Quantitatis* de Luca Pacioli y Leonardo da Vinci, libro en el que, además, aparece la primera mención en la literatura a un juego de magia con cartas.

Gardner fue un experto en elegir problemas curiosos con un cierto interés para el lector. También era un experto en la obra de Lewis Carroll y rescató para el gran público muchos de los acertijos y juegos de palabras de este (Carroll, 1885/2002, 1895/2014). Los estudiantes a menudo están acostumbrados a que un problema siempre tiene solución y además una única solución. En la vida diaria no siempre eso es así y una muestra de ello es este problema formulado por él:

> *Si 6 gatos cazan 6 ratones en 6 minutos, ¿cuántos gatos se necesitarán para cazar 100 ratones en 50 minutos?*

Una primera solución es que se necesitan 12 gatos. La idea de proporcionalidad (y de media) nos viene a decir que 6 gatos cazan 1 ratón por minuto. Por tanto 6 gatos cazarían 50 ratones en 50 minutos y, así, necesitaríamos 12 gatos para cazar 100 ratones en 50 minutos.

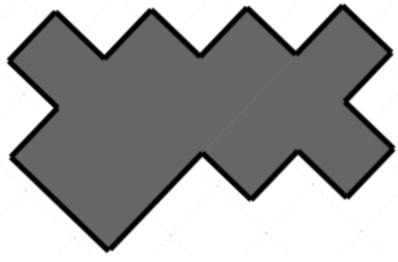
Pero… a lo mejor lo que ocurre es que un gato caza un ratón en 6 minutos. Por tanto, 1 gato habrá cazado 8 ratones en 50 minutos (en realidad sería en 48 minutos, pero en los dos minutos que le sobran ya no le da tiempo a cazar más). Así, para poder cazar 100 ratones en 50 minutos necesitaríamos 100/8 gatos. Teniendo en cuenta que el número de gatos debe ser un entero llegamos a que se necesitan 13 gatos (con 12 nos quedaríamos solo en 96 ratones cazados).

Este es un ejemplo que da para razonar y buscar soluciones diferentes. Con él estimulamos el ingenio y también nos damos cuenta de la precisión con que hay que plantear los problemas de matemáticas y que, a menudo, hay que hacer suposiciones adicionales a las contenidas en el enunciado.

En una línea de pensamiento completamente distinta, un razonamiento geométrico, podemos proponer este problema que sí es original de M. Gardner:

Hacer una única línea (no necesariamente recta) que divida la figura en dos partes con igual forma.

Gráfico 1. Figura geométrica.



Fuente: Elaboración propia.

Quizás a la hora de abordar este problema podríamos imprimir la figura y cortarla en dos partes de igual forma con unas tijeras. El problema no es difícil, pero nos obliga a pensar geométricamente. Si seguimos el decálogo de Polya (1965) para la resolución de problemas, podemos comenzar calculando el área de esa figura, con lo que ya sabremos qué área tiene que tener cada una de las piezas en las que la separemos. Eso nos puede dar una pista y, siempre en caso de desesperación, podríamos consultar el original (Gardner, 1994).

Gardner tiene numerosos libros en los que plantea problemas curiosos, pero también artículos que ayudan en la práctica docente, como en el que propone utilizar barajas de cartas para modelizar matemáticas (Gardner, 2000). Martin Gardner no era matemático, sino filósofo y periodista con un marcado interés por la ciencia, puesto que había querido estudiar Física en la universidad y, por circunstancias, no fue así. Su principal mérito era buscar buenos problemas y hacer buenas preguntas, resolverlos o preguntar a otros matemáticos cómo se resolvían y, una vez que él lo había comprendido, tenía un don especial para transmitir las matemáticas que había aprendido. Otra vez encontramos que el lenguaje de las matemáticas es fundamental. Cada año se celebran en todo el mundo homenajes a su figura bajo el nombre de «Martin Gardner Celebration of Mind». Ese nombre vuelve a ser un juego de palabras. Y vuelve a estar relacionado con la mente y la inteligencia.

3. La experiencia con estudiantes de alta capacidad: magia matemática

Cada persona posee capacidades o talentos diferentes. El talento matemático puede que aflore, pero también se debe entrenar. Desde 2006 hemos colaborado con el PEAC, programa de enriquecimiento educativo para alumnos con altas capacidades de la Comunidad de Madrid. Muchos de los estudiantes que participan en el programa son, de algún modo, aficionados a las matemáticas, pero el propio espíritu del programa pretende fomentar otras capacidades y aproximarse a un conocimiento transdisciplinar. Por ese motivo, los temas que hemos tratado en las sesiones con los estudiantes han versado sobre matemáticas que tienen una fuerte componente en otras disciplinas. En concreto, al trabajar efectos de ilusionismo estamos fomentando una vena artística. Los que representan un juego de magia deben cuidar la voz, el trato a los espectadores, el modo como se comportan en el escenario al mismo tiempo que tienen que estar pendientes de muchos detalles sobre lo que ocurre a su alrededor.

El que los juegos de magia que se presentaron tengan un fundamento matemático proporciona al mismo tiempo razones para descubrir por qué funciona un determinado juego. Estos programas de enriquecimiento educativo abarcan la educación de estudiantes entre 6 y 18 años y se nota un descenso del número de asistentes en los cursos superiores. Hemos comprobado que sesiones de magia matemática con ellos funcionan bastante bien. El abanico de posibilidades abarca desde juegos geométricos o topológicos con cuerdas hasta juegos que se pueden hacer con lápiz y papel o también con una baraja de cartas (Álvarez et al., 2002; Blasco, 2016). Además de presentar cada año alguna sesión en el PEAC, también hemos colaborado con la Asociación FANJAC en Girona (Duran, 2017), en la que ayudamos a diseñar un programa extracurricular sobre ilusionismo y educación para un catálogo completo de cursos: desde 1.º de Primaria hasta 2.º de Bachillerato. Obviamente, con edades distintas funcionan juegos diferentes. Mientras que con los más pequeños funcionan juegos en los que intervienen los colores u operaciones matemáticas sencillas, con los mayores funciona mucho mejor el estudio de las mezclas de cartas o utilizar estas como modelos para cuestiones relacionadas con probabilidad.

Vamos a incluir una pequeña muestra del recurso didáctico que pueden suponer los naipes. Es frecuente que nuestros alumnos conozcan un juego de cartas en el que se reparten 21 cartas en tres montones. La descripción que se hace aquí es para que el lector «se haga el juego a sí mismo» pero funcionaría con una adaptación obvia si, siguiendo pasos similares, hacemos el juego a otra persona.

Se coge una baraja y nos quedamos con 21 cartas cualesquiera de ellas. Mezclamos esas 21 cartas y cogemos una de ellas, la miramos y la apuntamos o recordamos. La ponemos de nuevo con las otras 20 cartas y mezclamos de nuevo. Ahora repartimos las cartas, cara arriba, en tres montones, fijándonos en qué montón queda la carta elegida. Cogemos el montón en el que se encuentra la carta elegida, lo situamos en el centro de los otros dos y repetimos la operación: repartimos otra vez, cara arriba, en tres montones, fijándonos en cuál de ellos está la carta elegida. Hacemos esa operación una última vez: repartimos en tres montones las 21 cartas, fijándonos en dónde se encuentra la carta elegida y situamos ese montón en el medio de los otros. Ahora ponemos las 21 cartas dorso arriba y desechamos las 10 superiores. La carta que ocupa ahora la posición superior del paquete (en realidad, la número 11) es la que se había elegido al principio.

Este juego es un clásico, aparece habitualmente contenido en las cajas de magia que se regalan a los pequeños y aparecía ya descrito por Claude Gaspard Bachet de Méziriac en uno de los primeros libros de matemática recreativa (Bachet, 1612/1884). Por un lado, este juego nos ayuda a introducir el concepto de proceso iterativo: repetimos las mismas operaciones tres veces. En efecto, repartimos en tres montones, nos fijamos en qué montón está la carta elegida y situamos ese montón en el centro de los otros dos. Ese conjunto de instrucciones podríamos escribirlo también en forma de algoritmo. Este juego de las 21 cartas también permite hablar de teoremas de punto fijo, que son muy importantes en la resolución de ecuaciones. Hablamos de punto fijo porque lo que ocurre tras la ejecución de tres iteraciones del proceso es que la carta elegida se sitúa en el centro de la baraja, y eso sucede siempre así, independientemente de cuál fuera la posición inicial de la carta. De este modo, estamos introduciendo, de una forma amena, conceptos matemáticos. Podríamos pedir a los estudiantes que explicaran por qué funciona el juego. Quizás dando pistas y ayudándoles en sus razonamientos. Para comprender un concepto matemático es muy importante verbalizarlo: el poder explicar a otro compañero cómo se resuelve un problema matemático ayuda a interiorizarlo y comprenderlo mejor. A menudo, cuando explicamos, nos damos cuenta de que pasos de una demostración que nos parecían obvios resulta que no lo son tanto.

Vamos a observar qué es lo que ocurre:

- Al repartir veintiuna cartas en tres montones, habrá siete en cada montón.
- Al situar el montón de la carta elegida entre los otros dos montones por primera vez, lo que hacemos es que dicha carta se encuentre entre las posiciones 8 y 14.
- Cuando repartimos por segunda vez, la carta elegida se sitúa necesariamente en la posición tercera, cuarta o quinta dentro de su montón (recordemos que antes de llegar a ella se habían repartido al menos siete cartas).
- Al poner el montón en el que está la carta elegida en medio de los otros dos, llevamos esta carta a la posición 10, 11 o 12 dentro del mazo.
- Al repartir por tercera vez en tres montones, repartiremos primero nueve cartas (tres en cada montón) y, dependiendo de si la carta elegida estaba en la posición 10, la 11 o la 12, dicha carta irá a parar al primer, segundo o tercer montón respectivamente. Además, siempre estará en la cuarta posición de ese montón.
- Al volver a poner el montón en el que está la carta elegida en el medio de los otros dos, estamos llevando dicha carta a la posición 11.

Hasta aquí hemos analizado el juego. Pero se puede aprovechar más: podríamos preguntarnos si es generalizable a otras situaciones o adaptarlo a otras circunstancias. Lo primero que encontramos es que, si en vez de utilizar 21 cartas utilizamos 27, el juego gana vistosidad. Curiosamente, el juego de 27 cartas es mucho menos conocido que el juego de 21 cartas. El procedimiento de este juego es similar al anterior: mezclamos las 27 cartas, cogemos una de ellas y la recordamos. La devolvemos al mazo y mezclamos. Repartimos las cartas, cara arriba, en tres montones, fijándonos en qué montón queda la carta elegida. Cogemos el montón en el que se encuentra la carta elegida y, a diferencia del juego anterior, podemos situarlo encima de los otros dos, debajo de los otros dos o en el medio de ellos. Nos acordamos de dónde lo hemos puesto y repetimos la operación: repartimos otra vez, cara arriba, en tres montones, fijándonos en cuál de ellos está la carta elegida. Ese montón podemos ponerlo arriba, en medio o abajo y lo recordamos. Hacemos esa operación una última vez: repartimos en tres montones, nos fijamos en dónde se encuentra la carta elegida y situamos ese montón arriba, en medio o abajo. Codificando 0 como arriba, 1 como en medio y 2 como abajo obtenemos un número de la forma $x_3\, x_2\, x_1$ (donde x_i representa la posición del montón tras el i-ésimo reparto). Por ejemplo, si la secuencia fuera centro en el primer reparto, arriba en el segundo y abajo en el tercero nuestro número codificado sería 201. Pues bien, ahora es cuando viene la magia: si llamamos $n= 9x_3 +3x_2 +x_1$ y retiramos n cartas de la baraja, la siguiente será la carta elegida. Este juego también tiene que ver con la representación de números en sistema ternario en vez de en sistema decimal y podemos extraer de él algunas otras propiedades. Podríamos, incluso, generalizarlo para más montones y más cartas en cada montón (Quintero, 2006). Es un buen ejercicio pensar por qué funciona de esta manera.

Estos son simples ejemplos de juegos de magia matemática, pero el área es muy amplia y pueden encontrarse ejemplos con otros materiales y otras técnicas. Sería posible, incluso, preparar un juego de magia para presentar cada una de las partes del currículo. Pero también hay que tener cuidado con los juegos de magia: no nos interesa que los estudiantes piensen que en matemáticas las cosas «se sacan de la manga» sino que en esta disciplina todo debe ser razonado. También hay que tener cuidado porque al hacer un juego de magia podemos llegar a que solo se vea la parte lúdica o sorprendente del efecto mágico y que este oculte lo que realmente deberíamos mostrar como docentes: la matemática que hay debajo del juego. Si decidimos usar esta técnica en clase debemos tener muy bien preparada la sesión.

Una de las disciplinas del ilusionismo es la llamada *mentalismo*. Este tipo de ilusionistas simula tener poderes mentales superiores, incluyendo entre ellos una inteligencia superior o una determinada capacidad para el cálculo. En realidad, conocen algunas técnicas que el resto de la población no conoce (esto es la tónica general en todas las ramas del ilusionismo) pero eso precisamente es lo que les hace pasar como personas con una inteligencia excepcional. Sí que es cierto que capacidades, como la memoria, la memoria visual o la rapidez de cálculo son factores que sí pueden contribuir a una mayor inteligencia y que en algunas personas esas capacidades son innatas, lo mismo que otros individuos son capaces de correr 100 m en 9.58 segundos. No obstante, esas capacidades deben ser entrenadas y hay técnicas que nos van a permitir calcular más rápido (Benjamin y Shermer, 2006; Coto, 2010). Un ejemplo sencillo puede consistir en «adivinar» el último dígito de un código de barras: por ejemplo, los 12 primeros dígitos del código de barras asociado al ISBN del libro *Matemagia* (Blasco, 2016) son 978843442264. Podemos presentar como un juego de magia pedir a los estudiantes que nos digan los 12 primeros dígitos de códigos de barras que tengan y nosotros decirles el último de ellos. Eso pasa a su memoria como una adivinación, pero en realidad no lo es. Con los 12 primeros dígitos tenemos información suficiente para deducir el último. La razón es que en cualquier código de barras EAN-13 la suma de los dígitos que ocupan las posiciones impares más el triple de la suma de los dígitos que ocupan las posiciones pares ha de ser un múltiplo de 10. Así, en el ejemplo anterior, si llamamos x al último dígito, al desconocido, tendríamos que el ISBN de *Matemagia* es 978843442264x y aplicando la propiedad que tienen todos esos códigos de barras y que acabo de decir, tiene que cumplirse que (9 + 8 + 4 + 4 + 2 + 6 + x) + 3 (7 + 8 + 3 + 4 + 2 + 4) tiene que dar como resultado un múltiplo de 10, esto es, un número que termine en 0. Haciendo operaciones llegamos a que 33 + x + 84 tiene que terminar en 0 y, por tanto, x debe ser 3.

Un juego de estas características tiene muchas ventajas desde el punto de vista educativo. Por una parte, ejecutarlo proporciona habilidades comunicativas, para ejecutarlo bien hay que calcular correctamente y el estudiante está haciendo sumas mentalmente con un objetivo importante: deducir el número oculto y poder sorprender a otras personas. No hacemos una batería de operaciones simplemente como entrenamiento sin proporcionar un valor añadido: aquí se calcula con un objetivo. Colateralmente, estamos trabajando un concepto importante: el de múltiplo de un número y sus propiedades. El profesor podría, incluso, proponer diseñar códigos de barras con otras propiedades (que los hay también en el mundo real) y que los estudiantes estableciesen sus propias reglas. Además, con este juego (y otros similares) se introduce un concepto importante: en un código de barras hay información redundante, lo que los matemáticos llamamos un código de detección de errores. Esa información permite decidir si el número que identifica el artículo se ha introducido bien en el sistema o no. El ordenador lee los 13 dígitos, efectúa una operación y decide si es un código de barras válido o se ha cometido algún error de transcripción. Esa idea es la misma que hay en los números de serie de los billetes, en la letra del DNI o en los *checksum* que proporcionan las plataformas cuando descargamos software. Son lugares donde las matemáticas aparecen sin darnos cuenta de que están ahí.

La experiencia que hemos tenido al presentar juegos de magia matemática con estudiantes de diferentes niveles educativos, en concreto con estudiantes de altas capacidades, siempre ha sido positiva y hemos descubierto que se interesan por saber cómo funcionan los juegos. En realidad, lo que hacemos es resolver un problema en el que el enunciado no aparece de forma estándar como en otros contextos. En este punto, lo que hemos realizado es una experiencia y una propuesta. Dado el reducido tamaño de los grupos donde se ha implementado y la imposibilidad, también debido al carácter extraescolar, de realizar una continuidad en estos programas y poder emplear métodos científicos incluyendo grupos de control, lo que hemos planteado debe entenderse como una propuesta metodológica.

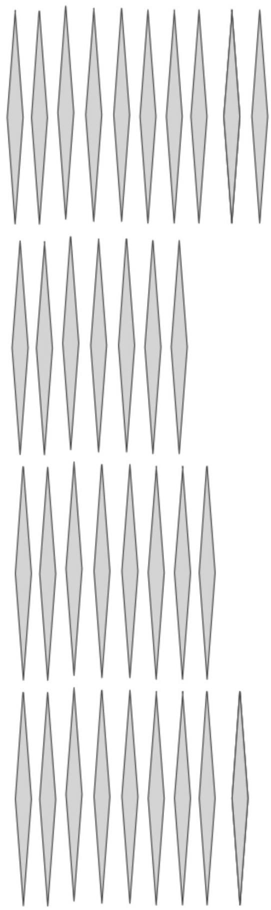
4. El ajedrez y otros juegos como herramienta para ejercitar la mente

En España, ya en 1995, se hizo una proposición por parte del senador José Marcelino Galindo Santana para que el ajedrez formara parte de las actividades extraescolares en Educación General Básica y como optativa en Educación Secundaria Obligatoria (Senado de España, 1995). En 2012, el Parlamento Europeo recomendó la inclusión del ajedrez en los programas escolares de los países miembros (Parlamento Europeo, 2012), reconociendo el valor pedagógico de este juego. Más recientemente, el Congreso de los Diputados también aprobó por unanimidad una proposición no de ley para la introducción del ajedrez en escuelas. Han sido varias las comunidades autónomas que lo han introducido dentro de la oferta de asignaturas optativas.

Por las particulares características del ajedrez y quienes lo practican, sí que se han llevado a cabo estudios que inducen a pensar en efectos positivos del ajedrez desde el punto de vista educativo, considerando que ayuda a desarrollar de un modo natural aptitudes como la memoria, la capacidad de concentración, la resolución de problemas y el razonamiento lógico-matemático. Machargo, García, Ramos y Luján (2002) estudian su relación con el desarrollo psicológico, mientras que Aciego, García y Betancort (2012) destacan los beneficios de practicar este deporte para el enriquecimiento intelectual y emocional. En el panorama internacional, Jankovic y Novak (2019) también defienden el uso del ajedrez como herramienta educativa. Año tras año se sigue avanzando en este campo, incluso con nuevas tesis doctorales destinadas a avanzar en esta línea de trabajo (Gardiner, 2018) y se elaboran estudios que cuantifican la relación entre el ajedrez y la capacitación matemática (Burján, 2016; Rosholm et al., 2017). En la misma línea, se ha visto que el uso del ajedrez, como vehículo para la enseñanza de la resolución de problemas a estudiantes con dificultades de aprendizaje, resulta de utilidad (Scholz et al., 2008; Storey, 2010; Barret y Fish, 2011; Khosrorad et al., 2014). No obstante, no hay un criterio unificado sobre la utilidad del ajedrez como elemento educativo que mejore la inteligencia. En ese sentido, aparecen diferentes estudios (Gobet y Campitelli, 2006; Sala y Gobet, 2016, 2017; Jerrim et al., 2017) que ponen de manifiesto que la metodología para medir la influencia del uso del ajedrez en la educación matemática no es la correcta y que, en cualquier caso, esa influencia no es significativa, de modo contrario a lo que se afirma en la mayor parte de los artículos al respecto. De ahí surgen réplicas (Bart, 2014; Subia et al., 2019) y continúa la polémica y la investigación sobre si la práctica del ajedrez es buena para las matemáticas o no.

El ajedrez es un juego que no fue diseñado específicamente para aumentar las destrezas matemáticas. Sin embargo, se pueden encontrar juegos diseñados explícitamente para desarrollar el lenguaje matemático. Aparte del ya comentado ejemplo del cubo de Rubik y cómo David Singmaster desarrolló una notación que llevó a su resolución, un ejemplo muy conocido es el Nim (Bouton, 1901; Baron, 1974), que se plantea a partir de unas cuantas filas con varios palillos en cada una de ellas. Juegan dos jugadores y el juego consiste en que cada uno de ellos, en su turno de juego, debe elegir una única fila y retirar de ella tantos palillos como quiera, pero lo importante es que tiene que retirar por lo menos una. Gana el jugador que retira el último palillo. Dependiendo de la configuración inicial va a ser uno u otro jugador el que pueda definir una estrategia ganadora. Para definir esa estrategia es muy útil el manejo del sistema binario de numeración y en este juego sí que encontramos, directamente, una importante relación con las matemáticas.

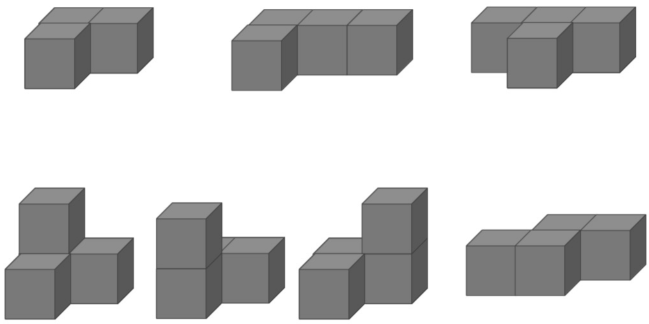
Gráfico 2. Nim.



Fuente: Elaboración propia.

Más antiguo, pero menos conocido que el cubo de Rubik, es el *cubo Soma* (Peter-Orth, 1985; Gardner, 2008; Rupérez y García, 2010), ideado por el polifacético Piet Hein. Se dice que lo ideó mientras estaba en una conferencia sobre física cuántica dictada por Werner Heisenberg, cuando empezó a pensar en cómo podría juntar unos cubos elementales en algunas piezas con las que pudiera construir un cubo mayor. El cubo Soma está formado por 7 piezas, estando seis de ellas formadas de 4 cubos básicos y una de únicamente 3 cubos básicos. La primera propuesta es formar un cubo con esas piezas (hay 240 formas de hacerlo) y a partir de ahí, ya se puede pensar en construir otras figuras con esas piezas. El juego funcionaría de modo parecido a como lo hace un tangram, pero las construcciones se hacen en el espacio tridimensional en vez de ser construcciones planas. El juego ayuda a desarrollar la intuición geométrica espacial y, además, hay razonamientos que permiten deducir qué piezas pueden ir en un determinado lugar o no.

Gráfico 3. Cubo Soma.



Fuente: Elaboración propia.

Hemos querido destacar el valor de los juegos para plantear problemas matemáticos y, en este sentido, hemos querido presentar dos juegos clásicos a los que nos podemos enfrentar mediante estrategias de resolución que, en el fondo, siguen las mismas pautas que las estrategias de resolución de problemas a las que nos referíamos al principio del artículo. Por otra parte, el juego como tal se ha considerado como una herramienta eficaz en la educación matemática, pero, como ocurría con el ajedrez, tampoco hay muchos estudios apoyados en resultados científicos que apoyen esta tesis y así lo plantea Bragg (2012, p. 1446): «Por tanto, es importante investigar si los juegos son realmente útiles en la enseñanza de ideas matemáticas. La pregunta de investigación utilizada como base para este artículo es si los juegos dan como resultado un mejor aprendizaje de las matemáticas que actividades que no son juegos» (traducción del autor). En ese mismo artículo concluye que sí es estadísticamente significativa la ventaja del aprendizaje basado en juegos frente al que no utiliza esa componente lúdica, al menos en las primeras etapas educativas, que es donde hace el experimento. Esta duda metodológica aparece en escritos anteriores de la misma autora (Bragg, 2007).

5. Conclusiones

Los problemas, en matemáticas, pueden aparecer de muchas formas distintas. A veces un problema consiste en explicar por qué ocurre un determinado fenómeno. Eso incide directamente en la competencia de abstracción y deducción. En otras ocasiones, los problemas pueden ser planteados simplemente como problemas de geometría que, necesitando muy pocos conceptos matemáticos, es una disciplina muy formativa porque nos obliga a razonar espacialmente. Hemos descrito nuestra experiencia en dos ámbitos distintos al fomentar la inteligencia y la resolución de problemas mediante la magia matemática, pero ponemos de manifiesto que es necesaria una mayor investigación en este sentido: la experiencia que hemos desarrollado debe ser cuantificada y sostenida por el método científico, por lo que aún queda una labor por hacer.

Abundando en esa idea hemos detectado que en la literatura científica no aparece una postura unánime sobre el uso del ajedrez como una herramienta que significativamente ayuda a fomentar las competencias matemáticas. En la misma línea, se ha investigado si el juego es una buena herramienta para lograr ese propósito y, también a falta de una investigación mayor y más rigurosa, se ve que determinados juegos sí que influyen positivamente en la adquisición de destrezas matemáticas. Sobre todo, en determinados ámbitos.

Somos conscientes de que es muy difícil llevar a cabo experimentos rigurosos relacionados con los temas que hemos tratado antes, pero también es esencial que se continúe investigando e, incluso, que se puedan publicar resultados negativos: es interesante conocer cuándo un experimento ha resultado fallido para emplear técnicas distintas. Hay muchos juegos y problemas matemáticos que se vienen empleando desde hace mucho tiempo y la experiencia docente es la que recomienda su uso. Tal vez es el momento de pasar de esa práctica habitual a un análisis cualitativo y cuantitativo de esas técnicas y abrir una línea de investigación transdisciplinar.

Nota

[1] La **revista española de pedagogía** se publica en español y en inglés. Por este motivo, sigue el criterio, cuando se citan textos ajenos, de acudir a los originales que están escritos en esas lenguas y de poner su traducción oficial, cuando tal texto se haya editado también en el otro idioma. En caso de que no se haya producido esa traducción oficial, el texto citado se ofrecerá a los lectores traducido o por el autor del artículo (señalándose que la traducción es del autor del artículo), o por el traductor jurado contratado por la revista.

Referencias bibliográficas

Aciego, R., García, L. y Betancort, M. (2012). The benefits of chess for the intellectual and social-emotional enrichment in schoolchildren [Los beneficios del ajedrez para el enriquecimiento intelectual y socio-emocional en escolares]. *The Spanish Journal of Psychology, 15* (2), 551-559. doi: https://doi.org/10.5209/rev_SJOP.2012.v15.n2.38866

Álvarez, V., Fernández, P. y Márquez, M. A. (2002). Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos. *La Gaceta de la RSME*, *5* (3), 711-735.

Bachet, C. G. (1884). *Problèmes plaisants & delectables qui se font par les nombres [Problemas placenteros y deliciosos que se hacen por los números].* Librería Gauthier-Villars. https://archive.org/details/problmesplaisan00labogoog (Obra original publicada en 1612).

Baker, R. N. (1999). *Cards in the classroom: Mathematics and methods [Cartas en el aula: matemáticas y métodos].* https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED428786.pdf

Baron, J. G. (1974). The game of Nim — a heuristic approach [El juego del Nim, una aproximación heurística]. *Mathematics Magazine*, *47* (1), 23-28. https://doi.org/10.1080/0025570X.1974.11976347

Barrett, D. C. y Fish, W. W. (2011). Our move: Using chess to improve math achievement for students who receive special education services [Nuestra jugada: utilizando el ajedrez para mejorar los logros matemáticos de estudiantes que reciben servicios de educación especial]. *International Journal of Special Education, 26*, 181-193.

Bart, W. M. (2014). On the effect of chess training on scholastic achievement [Sobre el efecto del entrenamiento en ajedrez y el logro escolar]. *Frontiers in Psychology*, *5*, article 762. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00762

Benjamin, A. y Shermer, M. (2006). *Secrets of mental math: The mathemagician's guide to lightening calculation and amazing math tricks [Secretos de magia mental: la guía del matemago para cálculo rápido y sorprendentes trucos matemáticos].* Crown Publishing Group.

Blasco, F. (2016). *Matemagia. Los mejores trucos para entender los números*. Editorial Ariel.

Bouton, C. L. (1901). Nim, a game with a complete mathematical theory [Nim, un juego con una teoría matemática completa]. *Annals of Mathematics*, *3* (1 /4), 35-39.

Bragg, L. (2007). Students' conflicting attitudes towards games as a vehicle for learning mathematics: A methodological dilemma [Actitudes conflictivas de los estudiantes frente al uso de juegos como medio para aprender matemáticas: un dilema metodológico]. *Mathematics Education Research Journal, 19*, 29-44. https://doi.org/10.1007/BF03217448

Bragg, L. A. (2012). Testing the effectiveness of mathematical games as a pedagogical tool for children's learning [Comprobando la eficacia de los juegos matemáticos como una herramienta pedagógica para el aprendizaje de los niños]. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 1445-1467. https://doi.org/10.1007/s10763-012-9349-9

Burján, A. M. (2016). The effects of chess education on mathematical problem solving performance [Los efectos de la educación con ajedrez en la destreza en la resolución de problemas matemáticos]. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *14* (2), 153-168. https://doi.org/10.5485/TMCS.2016.0421

Căprioară, D. (2015). Problem solving: Purpose and means of learning mathematics in school [Resolución de problemas – propósito y significado del aprendizaje de las matemáticas en la escuela]. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *191*, 1859-1864. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.332

Carroll, L. (2002). *Un cuento enmarañado.* Editorial Nivola (Obra original publicada en 1885).

Carroll, L. (2014). *Problemas de almohada.* Editorial Nivola (Obra original publicada en 1895).

Congreso de los Diputados (2014). *Proposición no de Ley sobre la implantación y fomento de la práctica del ajedrez en escuelas y espacios públicos y su promoción como deporte. (161/002598).* https://bit.ly/38vL31Q

Coto, A. (2010). *La aventura del cálculo.* Editorial EDAF.

De Guzmán, M. (1984). *Cuentos con cuentas.* Editorial Labor.

Duran, M. (2017). *La magia, centre del projecte extracurricular per a estudiants d'altes capacitats [La magia, centro del proyecto extracurricular para estudiantes con altas capacidades].* https://bit.ly/3lnDG1V

Gardiner, G. C. (2018). *Learning chess and the development of cognitive thinking in Queensland primary schools: An exploratory study [El aprendizaje del ajedrez y el desarrollo del pensamiento cognitivo en escuelas de educación primaria de Queensland: un estudio exploratorio]* [Tesis doctoral, University of Southern Queensland]. https://eprints.usq.edu.au/36711/

Gardner, M. (1994). *My best mathematics and logical puzzles [Mis mejores rompecabezas matemáticos y lógicos].* Dover.

Gardner, M. (2000). Modelling mathematics with playing cards [Modelando matemáticas con naipes de juego]. *The College Mathematics Journal, 31* (3), 173-177. https://doi.org/10.1080/07468342.2000.11974138

Gardner, M. (2008). *Origami, Eleusis, and the Soma cube. Martin Gardner's mathematical diversions [Origami, Eleusis y el cubo Soma. Los nuevos pasatiempos matemáticos de Martin Gardner].* Cambridge University Press.

Gobet, F. y Campitelli, G. (2006). Education and chess: a critical review [Educación y ajedrez: una revisión crítica]. En T. Redman (Ed.), *Chess and education: Selected essays from the Koltanowski conference* (pp. 124-143). University of Texas at Dallas.

Jankovic, A. y Novak, I. (2019). Chess as a powerful educational tool for successful people [El ajedrez como una poderosa herramienta educativa para personas de éxito]. En D. Tipurić y D. Hruška (Ed.), *7th International OFEL Conference on Governance, Management and Entrepreneurship: Embracing Diversity in Organisations. April 5th - 6th, 2019, Dubrovnik, Croatia, Governance Research and Development Centre (CIRU)* (pp. 425-441). http://hdl.handle.net/10419/196101

Jerrim, J., Macmillan, L., Micklewright, J., Sawtell, M. y Wiggins, M. (2017). Does teaching children how to play cognitively demanding games improve their educational attainment? Evidence from a Randomised Controlled Trial of chess instruction in England [¿Mejora la enseñanza de juegos cognitivamente exigentes los logros educativos infantiles? Evidencia a partir de ensayos controlados aleatorios sobre la enseñanza del ajedrez en Inglaterra]. *Journal of Human Resources*, *53* (4), 993-1021. https://doi.org/10.3368/jhr.53.4.0516.7952r

Khosrorad, R., Kouhbanani, S. S. y Sanii, A. R. (2014). Chess training for improving executive functions and mathematics performance of students with mathematics disorders [Clases de ajedrez para mejorar funciones ejecutivas y destreza matemática de estudiantes con trastornos matemáticos]. *International Journal of Educational Investigations*, *1* (1), 283-295.

Machargo, J., García, D., Ramos, S. y Luján, I. (2002). Ajedrez como recurso educativo para el desarrollo psicológico. *Evaluación e Intervención Psicoeducativa: Revista Interuniversitaria de Psicología de la Educación, 8-9*, 111-127.

National Council of Supervisors of Mathematics (1977). *Position paper on basic mathematical skills [Artículo de posicionamiento sobre destrezas matemáticas básicas].* https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED139654.pdf

Parlamento Europeo (2012). D*eclaración del Parlamento Europeo, de 15 de marzo de 2012, sobre la introducción del programa «Ajedrez en la Escuela» en los sistemas educativos de la Unión Europea.* https://bit.ly/2UlEus0

Peter-Orth, C. (1985). All solutions of Soma cube puzzle [Todas las soluciones del rompecabezas cubo Soma]. *Discrete Mathematics*, *57* (1-2), 105-121. https://doi.org/10.1016/0012-365X(85)90160-8

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas.

Puig Adam, P. (1951). *Valor formativo de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. https://www.ucm.es/data/cont/media/www/pag-81684/conferencias1.pdf

Quintero, R. (2006). El truco de m pilas de Gergonne y el sistema de numeración de base m. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *13* (2), 165-176.

Rosholm, M., Mikkelsen, M. B. y Gumede, K. (2017). Your move: The effect of chess on mathematics test scores [Tu jugada: el efecto del ajedrez en la puntuación de los exámenes de matemáticas]. *PLoS ONE*, *12* (5), e0177257. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0177257

Rupérez, J. A. y García, M. (2010). Graduación de la dificultad en el cubo Soma (I). *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *75*, 165-173. https://mdc.ulpgc.es/cdm/singleitem/collection/numeros/id/768/rec/3

Sala, G. y Gobet, F. (2016). Do the benefits of chess instruction transfer to academic and cognitive skills? A meta-analysis [¿Se transfieren los beneficios de la enseñanza del ajedrez las destrezas académicas y cognitivas? Un meta análisis]. *Educational Research Review*, *18*, 46-57. http://dx.doi.org/10.1016/j.edurev.2016.02.002

Sala, G. y Gobet, F. (2017). Does far transfer exist? Negative evidence from chess, music, and working memory training [¿Existe la transferencia lejana? Evidencia negativa del ajedrez, la música y el entrenamiento de la memoria de trabajo]. *Current Directions in Psychological Science*, *26* (6), 515-520. https://doi.org/10.1177%2F0963721417712760

Santaló, L. A. (1966). *La matemática en la educación*. Editorial Docencia.

Scholz, M., Niesch, H., Steffen, O., Ernst, B., Loeffler, M., Witruk, E. y Schwarz, H. (2008). Impact of chess training on mathematics performance and concentration ability of children with learning disabilities [Impacto del entrenamiento con ajedrez sobre la destreza matemática y la capacidad de concentración de chicos con problemas de aprendizaje]. *International Journal of Special Education*, *23* (3), 138-148.

Senado de España (1995). *Expedientes relacionados con expediente 662/000126.* https://bit.ly/3hihRQ8

Singmaster, D. (1981). *Notas sobre el cubo de Rubik*. Editorial Altalena.

Storey, K. (2010). Teaching beginning chess skills to students with disabilities [Enseñando destrezas básicas de ajedrez a estudiantes con discapacidades]. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth*, *44*, 45-40. https://doi.org/10.1080/10459880009599782

Subia, G., Amaranto, J., Amaranto, J., Bustamante, J. y Damaso, I. (2019). Chess and Mathematics Performance of College Players: An Exploratory Analysis [Desempeño en ajedrez y matemáticas de los jugadores universitarios:

un análisis exploratorio]. *Open Access Library Journal*, *6*, e5195. https://doi.org/10.4236/oalib.1105195

Biografía del autor

Fernando Blasco es Profesor Titular de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM). Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid. Su línea de actividad principal se centra en la frontera entre la educación no formal y la divulgación científica. Es miembro del Committee for Raising Public Awareness of Mathematics de la European Mathematical Society y Presidente de la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española. Colabora en diferentes proyectos de fomento de las disciplinas CTIM.

https://orcid.org/0000-0002-5158-6828

Cultivating intelligence through mathematical language

El cultivo de la inteligencia a través del lenguaje matemático

Fernando BLASCO, PhD. Associate Professor. Universidad Politécnica de Madrid (*fernando.blasco@upm.es*).

Abstract:

This paper sets out different contexts where mathematics helps create a thinking and reasoning habit, with special emphasis on problem solving. Intelligence is thought to be connected to problem solving ability and so we are interested in the relationship between intelligence and mathematical problem solving. These problems will be posed in a broad sense, not just considering classical written problems but also problems that appear in situations such as chess, magic tricks, and board games. These settings motivate students better, solving them requires different approaches, and they relate to other fields of knowledge. This paper reports on our experience of posing problems and reasoning with gifted students through magic tricks based on mathematical ideas and we give some examples of the activities we have done with them. We also present recreational mathematics as a discipline that promotes student motivation and increases curiosity and inquiry. We show some ideas from Miguel De Guzmán, Martín Gardner, and Raymond Smullyan that have been used in different frameworks. We describe some games that have been shown to be useful tools for creating reasoning schemas, presenting the particular case of chess as an educational tool. Finally, we set out some conclusions about the introduction of new materials, methods, and ideas for solving problems and we formulate a proposal for continuing this work and applying it in the classroom.

Keywords: educational resources, problem solving, cognitive procedure, recreational mathematics, practical intelligence, mind games.

Revision accepted: 2020-10-05.

This is the English version of an article originally printed in Spanish in issue 278 of the **revista española de pedagogía**. For this reason, the abbreviation EV has been added to the page numbers. Please, cite this article as follows: Blasco, F. (2021). El cultivo de la inteligencia a través del lenguaje matemático | *Cultivating intelligence through mathematical language. Revista Española de Pedagogía, 79* (278), 59-75. https://doi.org/10.22550/REP79-1-2021-07

https://revistadepedagogia.org/ ISSN: 0034-9461 (Print), 2174-0909 (Online)

Resumen:

Este artículo presenta diferentes contextos donde las matemáticas ayudan a crear un hábito de pensamiento y razonamiento, con ramificaciones en la resolución de problemas. La inteligencia se asume asociada a la capacidad de resolución de problemas y es por esa razón que nos acercamos a la resolución de problemas matemáticos. Estos problemas serán planteados en un sentido amplio, no restringiéndonos a los enunciados clásicos, sino también a situaciones problemáticas que pueden aparecer en juegos como el ajedrez, juegos de magia y juegos de mesa y tablero, que son más motivadoras para los estudiantes y que requieren del uso de diferentes técnicas de resolución, además de estar interconectadas con otros ámbitos de conocimiento. Se expone la experiencia de planteamiento de problemas y razonamiento a través de juegos de magia basados en ideas matemáticas, llevada a cabo con estudiantes de altas capacidades, y se proporcionan algunos ejemplos concretos de actividades que se han realizado con estos estudiantes. Se presenta la matemática recreativa como una disciplina que abunda en la motivación de los estudiantes y el fomento de la curiosidad y la indagación. En esta línea, comentamos algunas ideas de M. De Guzmán, M. Gardner y R. Smullyan que se han utilizado en diferentes contextos. Se explican algunos juegos que se han demostrado de utilidad en la creación de pautas de razonamiento, exponiendo el caso concreto del ajedrez como herramienta educativa. Finalmente, se exponen conclusiones sobre la introducción de nuevos materiales, métodos e ideas con el objeto de resolver problemas y se formula una propuesta de continuidad y aplicación en el aula.

Descriptores: recursos educacionales, resolución de problemas, proceso cognitivo, matemática recreativa, inteligencia práctica, juegos de ingenio.

1. Introduction

Many students find mathematics difficult. This could be because it is a subject in which it is necessary to understand concepts and know how to apply them rather than memorising information, definitions, and procedures. There is no single definition of intelligence and different experts in the field often emphasise different aspects of one definition or another. Combining some of these ideas, intelligence is sometimes defined as a very general mental capacity that involves being able to reason, plan, solve problems, think abstractly, understand complex ideas, learn quickly, and learn from experience. All of the capacities mentioned in this description are inherent to mathematical problem solving. This might be why mathematics and its difficulty are often linked to intelligence; however, we do not set out to uphold this position here but instead simply to show the relationship that exists between the two: Even though mathematics is often regarded as complicated, the mathematics curriculum for compulsory secondary education (ESO) in Spain and for the Spanish baccalaureate is accessible to any student who studies these subjects, but it is also common to find students who require more. Pedro Puig Adam, one of the pioneers of the study of mathematical education in Spain, said as early as 1951 that "Mathematics is the filter through which man studies natural phenomena; for their infinite complexity it substitutes the schematic simplicity of rational entities that logical reasoning can consider with ease; once the fruits of this process have been obtained, they can be interpreted in the field of reality" (Puig, 1951, p. 4). Luis Santaló (1966, p. 14) stated that "Doing maths is solving problems," placing this problem solving in a broad context "where mathematical concepts can appear, depending on the case, as the consequence of a problem or as a method for solving future problems, introduced as examples or as applications". We will return to these ideas below but we must emphasise that language is important: when confronting a problem, we must first understand what it is asking us to do, and to do this it is necessary to dominate language. Then we must solve the problem, and mathematical formalism is very useful for doing this. This uses a particular language that simplifies writing. Finally, we must interpret the solution and, to do this, again adapt mathematical language to everyday language. These ideas were also gathered and expanded on by Miguel de Guzmán in various writings, including academic articles, books aimed at teachers, and other books — also very important — intended for students but with extracurricular content: books with different problems, which showed cases of mathematics that changed the outlook on its application without necessarily introducing concepts different than those normally covered in class. Challenges, connections, generalisations, and applications are proposed. Mathematics is approached in this way as a body of knowledge that inspires thought and goes beyond the Proposition-Demonstration-Example scheme through which it is often demonstrated. Indeed, Guzmán was the creator and promotor of Spain's Royal Academy of Sciences' ESTALMAT programme for stimulating mathematical talent. In his words "it is in the solving of problems that we can acquire the true taste that has attracted and continues to attract mathematicians from all periods. From it, motivations, attitudes, habits, and ideas for developing tools, in a word, the very life of mathematics, can derive" (De Guzmán, 1984, p. 12).

The National Council of Supervisors of Mathematics (1977, p. 2) also stated that "Learning-to solve problems-is the principal reason for studying mathematics" and it may be that the most capable students, who need challenges, feel inclined to resolve and propose mathematical problems "taking into account the complex intellectual activity, the nature of difficulties which the student faces in solving problems is varied, ranging from perceptual difficulties to those concerning his cognitive self-regulation" (Căprioară, 2015, p. 1859). Furthermore, problem solving is something that can be learnt. While it is true that certain individuals have a greater gift for certain types of reasoning than others, there are techniques for solving mathematical problems that might or might not be applicable in everyday life. In this respect, George Pólya, one of the most important scholars of the solving of mathematical problems and a major figure in problem solving techniques, notes that "the space devoted by popular newspapers and magazines to crossword puzzles and other riddles seems to show that people spend some time in solving unpractical problems. Behind the desire to solve this or that problem that confers no material advantage, there may be a deeper curiosity, a desire to understand the ways and means, the motives and procedures, of solution" (Pólya, 1965).

In line with Pólya, we will consider problem solving in a broad sense here. Not all of the problems we will refer to involve interpreting a text, formulating a model, doing calculations, finding a mathematical solution, and returning to the problem with words. Experience shows us that there are many different ways of posing problems and doing reasoning exercises. Sometimes the problem actually relates to statements where algebraic relations must be used, while in other cases the problems are geometric and can be solved with a ruler and compasses or with other instruments. A mathematical problem might sometimes involve explaining (or finding out) why a certain thing happens (a theoretical problem can be closely related to proving a mathematical result, but it can also tell us what the basis of a magic trick using cards is). Other problems can involve making all of the faces of a cube the same colour, as Professor Erno Rubik did with his architecture students. The famous object we now regard as a toy was actually designed so that Rubik's students could experiment with three-dimensional objects and rotations in space. The cube has ceased to be a problem as people who can solve it quickly have memorised the movements they have to do: after examining the cube they can return it to its initial position using an algorithm. But there was a moment when the mathematician David Singmaster (1981), using a suitable notation, solved the problem of making each face of the Rubik's cube the same colour. Similarly, chess and other board games can be used for mind training. We will discuss some of these experiences below.

In this article we not only describe the state of the question and the benefits of solving problems, posed in unconventional ways, for developing intelligence. We use examples selected from experience, which are intended to be of use for teachers, who we also hope will consider this methodology in depth and make their own proposals for resolving mathematical problems understood in a broad sense.

2. Recreational maths and the legacy of Martin Gardner

For 25 years, Martin Gardner wrote the mathematical games column in the journal *Scientific American* and it has been said of him that he "turned thousands of children into mathematicians and thousands of mathematicians into children". This column of mathematical games did not really contain simple games. Instead it presented big ideas that can be thought of as games but which contain an important mathematical element. To give one example, it was in his column that the RSA cryptographic method was made known. This is now used, for example, in digital signature protocols. The idea of teaching mathematics through interesting problems with an element of surprise and that could challenge the reader did not originate with Gardner and the 20th century. "Fun" problems are posed in the *Liber Abaci* by Fibonacci and in *De Viribus Quantitatis* by Luca Pacioli and Leonardo da Vinci, a book which also contains the first mention in literature of a magic trick using cards.

Gardner was an expert in choosing interesting problems that have appeal for the reader. He was also an expert on the work of Lewis Carroll and rescued many of his puzzles and word games for the general public (Carroll, 1885/2002, 1895/2014). Students are often accustomed to problems having a solution and also having just one solution. This is not always so in everyday life and Gardner gives an example of this:

If 6 cats catch 6 mice in 6 minutes, how many cats would you need to catch 100 mice in 50 minutes?

A first solution is that 12 cats are needed. The idea of proportionality (and averages) tells us that 6 cats catch 1 mouse per minute. Therefore, 6 cats would catch 50 mice in 50 minutes and so we would need 12 cats to catch 100 mice in 50 minutes.

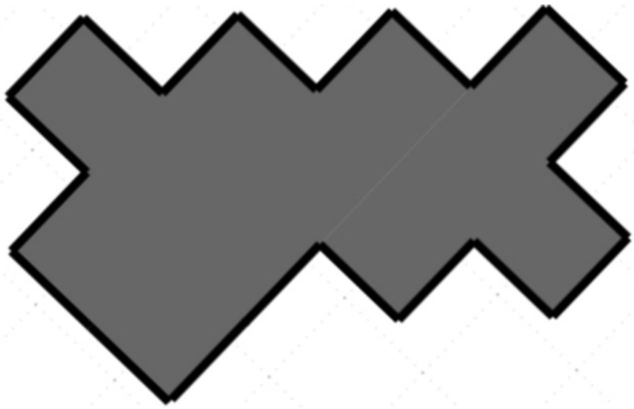
But… maybe what happens is that one cat catches a mouse in 6 minutes. Therefore, 1 cat will catch 8 mice in 50 minutes (it would actually take 48 minutes, but the cat would not have time to catch any more in the remaining 2 minutes). So, to catch 100 mice in 50 minutes, we would need 100/8 cats. Taking into account that the number of cats always has to be a whole number, we find that we need 13 cats (12 would only catch 96 mice).

This is an example he gives for reasoning and seeking different solutions. With it we stimulate ingenuity and it also shows how precisely mathematical problems have to be posed and that it is often necessary to make additional suppositions to those contained in the question.

This problem, which is original to Gardner, uses a completely different line of thinking — geometrical reasoning:

Draw a single line (not necessarily straight) that divides the figure into two parts of the same shape.

Graph 1. Geometrical figure.



Source: Own elaboration.

When approaching this problem we could perhaps print the figure and cut it into parts that are the same shape using scissors. The problem is not difficult, but it obliges us to think geometrically. Following Pólya's (1965) four step process for solving problems, we could start by calculating the area of this shape, and so we will know what the area of each of the parts we will separate it into must be. This can give us a clue and, if we are desperate, we could always consult the original (Gardner, 1994).

Gardner has many books in which he sets interesting problems, but he also has articles that help with teaching practice, like one in which he suggests using packs of playing cards to model mathematics (Gardner, 2000). Martin Gardner was not a mathematician but rather a philosopher and journalist with a strong interest in science, as he had wanted to study physics at university but owing to circumstances could not. His greatest merit was finding good problems and asking good questions, solving them or asking other mathematicians how they would solve them. Once he understood it, he had a special gift for sharing the mathematics he had learned. Again we find that the language of mathematics is fundamental. Every year all over the world, people pay homage to him in the "Martin Gardner Celebration of Mind". The name is a play on words. And again it is linked to the mind and intelligence.

3. Experience with gifted and talented students: mathematical magic

Everyone has different capacities or talents. Mathematical talent might emerge by itself, but it must also be taught. Since 2006 we have cooperated with PEAC, a programme for educational enrichment for gifted and talented students in the Community of Madrid. Many of the students who participate in the programme are, in some way, enthusiastic for mathematics, but the spirit of the programme is intended to build other capacities and explore transdisciplinary knowledge. For this reason, the topics we have covered in the sessions with the students have focussed on examples of mathematics that have a strong component in other disciplines. When working on illusionism effects we encourage a specifically artistic vein. When people perform a magic trick, they have to think about their voice, how they interact with spectators, and how they act on stage at the same time as having to be vigilant of many details of what is happening around them.

The fact that the magic tricks presented have a mathematical basis also provides reasons for working out how a particular trick works. These educational enrichment programmes cover the education of students aged between 6 and 18. We observe a decrease in numbers attending in higher years. We have found that mathematical magic sessions work quite well with them. Possibilities range from geometrical or topological games with strings to games that can be done with paper and pencil and also card tricks (Álvarez et al., 2002; Blasco, 2016). As well as presenting a session every year at the PEAC, we have also collaborated with the FANJAC association in Girona (Duran, 2017), where we helped design an extracurricular programme on illusionism and education for a complete range of levels from year 1 of primary education up to year 2 of the Spanish baccalaureate. Obviously different games work with different age groups. While games involving colours or simple mathematical operations work best with younger children, with older ones studying combinations of cards or using them as models for questions relating to probability works much better.

We will include a small sample of the teaching resources cards can provide. Our students often know a card trick in which 21 cards are dealt into three piles. The description we give here is so that readers can try it themselves, but following similar steps the trick will also work, with an obvious adaptation, if you do it with another person.

Take a pack of cards and take any 21 cards from it. Shuffle these 21 cards, take one of them, look at it make a note of it or remember it. Put it back with the other 20 cards and shuffle them again. Now deal the cards, face up, into three stacks, making a note of the stack where the chosen card is. Take the stack containing the chosen card, put it in between the other two, and repeat the process: deal again, face up into three stacks, making a note of which one contains the chosen card. Do this operation one last time: deal the 21 cards into three stacks, making a note of which one contains the chosen card, and place this stack in between the other two. Now put the 21 cards face down and put the top 10 cards to one side. The card that is now in the top place in the pack (in reality, number 11) is the one that was chosen at the start.

This trick is a classic. It often features in the magic sets people give to children and was described by Claude Gaspard Bachet de Méziriac in one of the first books of recreational magic

(Bachet, 1612/1884). This trick helps introduce the concept of iterative processes: the same operation is repeated three times. In effect, you deal into three stacks, make a note of which stack the chosen card is in, and you put this stack between the other two. This set of instructions could also be written as an algorithm. This game of 21 cards also enables us to discuss fixed-point theorems, which are very important for solving equations. We speak about a fixed point because what happens after three iterations of the process is that the chosen card is located in the centre of the pack and this always happens, regardless of the initial position of the card. Doing this enables us to introduce mathematical concepts in an entertaining way. We could ask students to explain how the game works, perhaps giving clues and helping with their reasoning. To understand a mathematical concept it is very important to verbalise it: being able to explain to a classmate how to solve a mathematical problem helps to internalise it and understand it better. Often, when we explain something, we realise which steps in a demonstration that seemed obvious to us actually are not.

We will now see what happens:

- When 21 cards are split into three stacks, there are seven in each stack.
- When the stack with the chosen card is placed between the other two stacks for the first time, this card will be between positions 8 and 14.
- When you deal the chosen card for the second time, it has to be in the third, fourth, or fifth position in its stack (remember that at least seven cards were dealt before reaching it).
- When putting the stack containing the chosen card in between the other two, this card goes into position 10, 11, or 12 in the pack.
- When dealing for the third time into three stacks, first deal nine cards (three in each stack) and, depending on whether the chosen card was in position 10, 11, or 12, this card will end up in the first, second, or third stack respectively. Furthermore, it will always be in the fourth position in this stack.
- When you put the stack containing the chosen card back in between the other two, you move this card to position 11.

Up to here, we have analysed the trick. But we can get more out of it: we could ask if this can be generalised to other situations or adapted to other circumstances. The first thing we find is that if we use 27 cards instead of 21, the trick becomes more impressive. Strangely, the trick with 27 cards is much less well known than the version with 21. The process for this trick is similar to the previous one: shuffle the 27 cards, take one of them and remember it. Return it to the pack and shuffle again. Deal the cards face up into three stacks, making a note of which stack contains the chosen card. Take the stack containing the chosen card. Unlike in the previous trick, you can place it on top of the other two, below the other two, or between them. Remember where you have put it and repeat the process: deal again, face up, into three stacks, making a note of which one contains the chosen card. You can put this stack at the top, in the middle or at the bottom. Remember where you have put it. Do this operation one last time: deal into three stacks, make a note of where the chosen card is and put this stack at the top, in the middle, or at the bottom. Coding the top position as 0, the middle as 1, and the bottom as 2 gives us a number of the form $x_3\ x_2\ x_1$ (where x_n represents the position of the stack after the *nth* dealing). For example, if the sequence is middle in the first dealing, top in the second, and bottom in the third, the coded number will be 201. Now it is time for the magic: if we call $n = 9x_3 + 3x_2 + x_1$ and we remove n cards from the pack, the next one will be the chosen card. This trick is also related to representing numbers in ternary instead of decimal and we can extract some other properties from it. We could even generalise it to more stacks and more cards in each stack (Quintero, 2006). This is a good exercise for thinking about why it happens this way.

These are simple examples of mathematical magic tricks, but the area is very broad and we can find other examples with other materials and other techniques. It would even be possible to prepare a magic trick to present each of the parts of the curriculum. But it is important to take care with magic tricks: we do not want students to think that in mathematics you "pull things out of your sleeve" but rather that in this discipline everything must be reasoned. It is also necessary to take care because when doing a magic trick we might find that students only see the entertaining or impressive part of the magic effect and that this hides what we really want to show as teachers: the mathematics behind the trick. If we decide to use this technique in class, we have to make sure the session is very well prepared.

One of the disciplines in illusionism is called *mentalism*. This type of illusionist pretends to have superior mental powers, including superior intelligence or a particular capacity for performing calculations. In reality, they know some techniques that the rest of the population does not (this is the general trend in all branches of illusionism) but this is precisely what makes them pass for people with an exceptional intelligence. It is true that capacities like memory, visual memory, or speed of calculation are factors that can contribute to higher intelligence and for some people these capacities are innate, just as other individuals can run the 100 metres in 9.58 seconds. Nonetheless, these capacities must be practised and there are techniques that can help people calculate quicker (Benjamin & Shermer, 2006; Coto, 2010). One example is "guessing" the last digit in a barcode: For example, the first 12 digits of the barcode associated with the ISBN of the book *Matemagia* (Blasco, 2016) are 978843442264. Something we can present as a magic game is asking students to tell us the first 12 digits of a bar code they have and we tell them its last digit. They remember this as divination, but it is not really. The first 12 digits give us enough information to deduce the last one. This is because in any EAN-13 bar code the sum of the digits in the odd positions plus three times the sum of the digits in the even positions must be a multiple of 10. So, in the previous example, if we call the last digit — the unknown one — x, the ISBN of *Matemagia* is 978843442264x and by applying the property that all of these bar codes have and which we have just described, the result of (9+8+4+4+2+6+x) + 3 (7+8+3+4+2+4) has to be a multiple of 10, in other words, a number ending in 0. By doing calculations, we find that 33 + x + 84 has to end in 0 and so x must be 3.

A game of this type has many advantages from an educational perspective: on the one hand, doing it improves communicative skills, to do it well it is necessary to calculate correctly, and the student is doing sums mentally with an important goal: deducing the hidden number and being able to surprise other people. We do not do a set of operations simply for entertainment without providing some added value: here we are calculating with a goal. Furthermore, we are working on an important concept: the multiple of a number and its properties. The teacher could even suggest that the students design bar codes with other properties (these do exist in the real world) and make their own rules. This game (and other similar ones) also introduces an important concept: bar codes contain redundant information, which mathematicians call error detecting codes. This information makes it possible to establish whether the number that identifies the article has been correctly entered into the system. The computer reads the 13 digits, performs a calculation, and decides if it is a valid barcode or if there has been a transcription error. This is the same idea found in serial numbers on tickets, in the letter on Spanish national identity cards, or in the checksum platforms provide when you download software. These are places where mathematics appears without us realising it is there.

Our experience of presenting mathematical magic tricks with students at different educational stages, specifically with gifted and talented students, has always been positive and we find that students are interested in knowing how the games work. In reality what we do is solve a problem where the question does not appear in a standard form as in other contexts. On this point, what we have done is an experiment and a proposal. Given the small size of the groups with which we have done this and the impossibility of providing continuity in these programmes or using scientific methods such as control groups owing to the programmes' extracurricular character, what we suggest should be regarded as a methodological proposal.

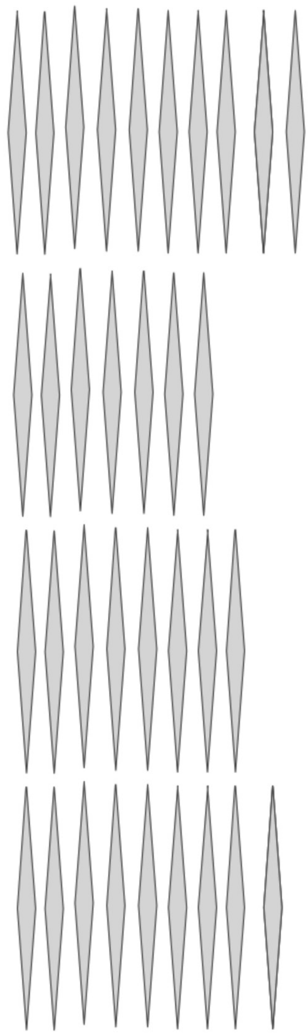
4. Chess and other games to exercise the mind

In Spain, as long ago as 1995, the senator José Marcelino Galindo Santana proposed that chess should form part of the extracurricular activities in General Basic Education and be an option in Compulsory Secondary Education (Senado de España, 1995). In 2012, the European Parliament recommended member states include chess in their curricula (European Parliament, 2012), recognising the pedagogical value of this game. More recently, Spain's Congress of Deputies also unanimously approved a parliamentary discussion document to introduce chess in schools. Several of Spain's Autonomous Communities have introduced it in their range of optional subjects.

Owing to the particular characteristics of chess and the people who play it, a number of studies have been carried out that show that it has positive effects from an educational viewpoint, and that it helps naturally develop aptitudes such as memory, the ability to concentrate, problem solving, and logical-mathematical reasoning. Machargo, García, Ramos, and Luján (2002) studied its relationship with psychological development, while Aciego, García, and Betancort (2012) emphasised the benefits of playing this game for intellectual and emotional enrichment. On the international stage, Jankovic and Novak (2019) also support the use of chess as an educational tool. Progress is still being made every year in this field, with new doctoral theses moving this line of work forward (Gardiner, 2018) and studies that quantify the relationship between chess and mathematical training (Burján, 2016; Rosholm et al., 2017). Similarly, chess has been shown to be of use as a vehicle for teaching problem solving to students with learning difficulties (Scholz et al., 2008; Storey, 2010; Barret & Fish, 2011; Khosrorad et al., 2014). Nonetheless, there are no unified criteria for the usefulness of chess as an educational tool that improves intelligence. Accordingly, various studies have been published (Gobet & Campitelli, 2006; Sala & Gobet, 2016, 2017; Jerrim et al., 2017) that note that the methodology used to measure the influence of the use of chess in mathematical education is not adequate and that, in any case, this influence is not significant, in contrast to what is stated in most of the articles on this question. Responses have appeared (Bart, 2014; Subia et al., 2019) and discussion and research about whether or not playing chess is good for mathematics continue.

Chess is a game that was not specifically designed to improve mathematical skills. However, other games were specifically designed to develop mathematical language. Apart from the example above of the Rubik's cube and how David Singmaster developed a notation that led to its resolution, one very well-known example is Nim (Bouton, 1901; Baron, 1974), which involves several piles with various objects in each of them. The game is played by two players. When it is their turn, each player must choose a single pile and remove as many objects as they want from it. The key thing is that they must remove at least one. The player who removes the last item wins. Depending on the initial configuration, one player or the other can define a winning strategy. To define this strategy, a command of the binary number system is very useful and in this game we do directly find a connection to mathematics.

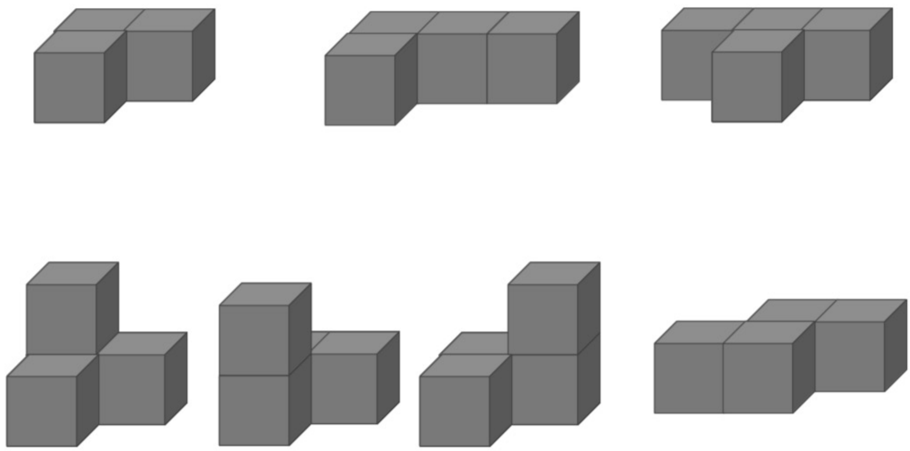
Graph 2. Nim.



Source: Own elaboration.

Older and less well known than the Rubik's cube is the Soma cube (Peter-Orth, 1985; Gardner, 2008; Rupérez & García, 2010), invented by the multitalented Piet Hein. It is said that he came up with it while he was in a lecture on quantum physics delivered by Werner Heisenberg, when he started thinking about how he could combine unit cubes into parts from which he could build a larger cube. The Soma cube comprises 7 parts, 6 of which are made up of 4 unit cubes and 1 of just 3 unit cubes. The first proposal is to make a cube with these parts (there are 240 ways of doing it) and from there it is possible to think about making other shapes with these parts. The game works in a similar way to how a tangram is made, but the structures are made in three-dimensional space instead of being flat. The game helps develop spatial geometric intuition and, there are also thought processes that make it possible to deduce which parts can or cannot go in a particular space.

GRAPH 3. Soma cube.



Source: Own elaboration.

We have set out to identify the value of games in setting mathematical problems and have presented two classic games that we can tackle using resolution strategies that ultimately follow the same patterns as the strategies for solving problems that we mentioned at the start of this article. Games are also regarded as an effective tool in mathematical education but, as in the case of chess, there are few studies based on scientific results to support this thesis, and as Bragg observes (2012, p. 1446): "Thus, it is important to research whether games really are useful in teaching mathematical ideas. The research question used as a basis for this paper is whether games result in better learning of mathematics than do non-game activities". In this same article he concludes that the benefit of learning based on games compared to learning that does not use this ludic component is statistically significant, at least in the earlier stages of education, which is where the experiment is performed. This methodological doubt appears in earlier writings by the same author (Bragg, 2007).

5. Conclusions

Problems, in mathematics, can appear in many distinct forms. Sometimes a problem involves explaining why a certain phenomenon occurs. This directly involves abstraction and deduction skills. In other cases, problems can be posed simply as problems from geometry; geometry requires very few mathematical concepts and is a very instructive discipline because it obliges students to think spatially. We have described our experience of promoting intelligence and problem solving through mathematical magic in two distinct areas, but we note that further research is necessary in this area: our experience must be quantified and supported by the scientific method, and so there is still work to be done.

Elaborating on this idea, we have found that there is no unanimous position in the scientific literature regarding the use of chess as a tool that significantly helps to develop mathematical competences. Similarly, we have investigated whether games are a good tool for achieving this aim and, again in the absence of further or more rigorous research, we have found that certain games do have a positive influence on the acquisition of mathematical skills. Especially in certain ambits.

We are aware that it is very difficult to carry out rigorous experiments relating to the topics discussed above, but it is also essential to continue with research and even to publish possible negative results: it is important to know when an experiment has not been successful so that different approaches can be used. There are many mathematical games and problems that have been used for a long time and teachers' experience is what backs up their use. Perhaps now is the time to move from this common practice to a qualitative and quantitative analysis of these techniques and a transdisciplinary line of research can be opened.

References

Aciego, R., García, L., & Betancort, M. (2012). The benefits of chess for the intellectual and social-emotional enrichment in schoolchildren. *The Spanish Journal of Psychology*, *15* (2), 551-559. doi: https://doi.org/10.5209/rev_SJOP.2012.v15.n2.38866

Álvarez, V., Fernández, P., & Márquez, M. A. (2002). Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos [Mathematical card tricks and card trick theorems]. *La Gaceta de la RSME*, *5* (3), 711-735.

Bachet, C. G. (1884). *Problèmes plaisants & delectables qui se font par les nombres [Pleasant & delectable problems that are done with numbers].* Librería Gauthier-Villars. https://archive.org/details/problmesplaisan00labogoog (Original work published 1612)

Baker, R. N. (1999). *Cards in the classroom: Mathematics and methods*. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED428786.pdf

Baron, J. G. (1974). The game of Nim: A heuristic approach. *Mathematics Magazine*, *47* (1), 23-28. https://doi.org/10.1080/0025570X.1974.11976347

Barrett, D. C., & Fish, W. W. (2011). Our move: Using chess to improve math achievement for students who receive special education services. *International Journal of Special Education, 26*, 181-193.

Bart, W. M. (2014). On the effect of chess training on scholastic achievement. *Frontiers in Psychology*, *5*, article 762. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00762

Benjamin, A., & Shermer, M. (2006). *Secrets of mental math: The mathemagician's guide to lightening calculation and amazing math tricks*. Crown Publishing Group.

Blasco, F. (2016). *Matemagia. Los mejores trucos para entender los números [Mathemagics. The best tricks for understanding numbers]*. Editorial Ariel.

Bouton, C. L. (1901). Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of Mathematics*, *3* (1 /4), 35-39.

Bragg, L. (2007). Students' conflicting attitudes towards games as a vehicle for learning mathematics: A methodological dilemma. *Mathematics Education Research Journal, 19*, 29-44. https://doi.org/10.1007/BF03217448

Bragg, L. A. (2012). Testing the effectiveness of mathematical games as a pedagogical tool for children's learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 1445-1467. https://doi.org/10.1007/s10763-012-9349-9

Burján, A. M. (2016). The effects of chess education on mathematical problem solving performance. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *14* (2), 153-168. https://doi.org/10.5485/TMCS.2016.0421

Cãprioarã, D. (2015). Problem solving: Purpose and means of learning mathematics in school. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *191*, 1859-1864. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.332

Carroll, L. (2002). *Un cuento enmarañado [A tangled tale].* Editorial Nivola. (Original work published 1885)

Carroll, L. (2014). *Problemas de almohada [Pillow problems].* Editorial Nivola. (Original work published 1895)

Congreso de los Diputados (2014). *Proposición no de Ley sobre la implantación y fomento de la práctica del ajedrez en escuelas y espacios públicos y su promoción como deporte [Non-legislative proposal on the implementation and encouragement of the practice of chess in schools and public spaces and its promotion as a sport]. (161/002598)* https://bit.ly/38vL31Q

Coto, A. (2010). *La aventura del cálculo [The adventure of calculus].* Editorial EDAF.

De Guzmán, M. (1984). *Cuentos con cuentas [Stories with sums].* Editorial Labor.

Duran, M. (2017). *La magia, centre del projecte extracurricular per a estudiants d'altes capacitats [Magic, centre of the extracurricular project for students with high abilities].* https://bit.ly/3lnDG1V

European Parliament (2012). *Declaration of the European Parliament of 15 March 2012 on the introduction of the programme 'Chess in School' in the educational systems of the European Union*. https://bit.ly/3ltmp7q

Gardiner, G. C. (2018). *Learning chess and the development of cognitive thinking in Queensland primary schools: An exploratory study* [Doctoral dissertation, University of Southern Queensland]. https://eprints.usq.edu.au/36711/

Gardner, M. (1994). *My best mathematics and logical puzzles*. Dover.

Gardner, M. (2000). Modelling mathematics with playing cards. *The College Mathematics Journal, 31* (3), 173-177. https://doi.org/10.1080/07468342.2000.11974138

Gardner, M. (2008). *Origami, Eleusis, and the Soma Cube. Martin Gardner's Mathematical Diversions*. Cambridge University Press.

Gobet, F., & Campitelli, G. (2006). Education and chess: A critical review. In T. Redman (Ed.), *Chess and Education: Selected Essays from the Koltanowski Conference* (pp. 124-143). University of Texas at Dallas.

Jankovic, A., & Novak, I. (2019). Chess as a powerful educational tool for successful people. In D. Tipurić & D. Hruška (Ed.), *7th International OFEL Conference on Governance, Management and Entrepreneurship: Embracing Diversity in Organisations. April 5th - 6th, 2019, Dubrovnik, Croatia, Governance Research and Development Centre (CIRU)* (pp. 425-441). http://hdl.handle.net/10419/196101

Jerrim, J., Macmillan, L., Micklewright, J., Sawtell, M., & Wiggins, M. (2017). Does teaching children how to play cognitively demanding games improve their educational attainment? Evidence from a randomised controlled trial of chess instruction in England. *Journal of Human Resources*, *53* (4), 993-1021. https://doi.org/10.3368/jhr.53.4.0516.7952r

Khosrorad, R., Kouhbanani, S. S., & Sanii, A. R. (2014). Chess training for improving executive functions and mathematics performance of students with mathematics disorders. *International Journal of Educational Investigations*, *1* (1), 283-295.

Machargo, J., García, D., Ramos, S., & Luján, I. (2002). Ajedrez como recurso educativo para el desarrollo psicológico [Chess as an educational resource for psychological development]. *Evaluación e Intervención Psicoeducativa: Revista Interuniversitaria de Psicología de la Educación, 8-9*, 111-127.

National Council of Supervisors of Mathematics (1977). *Position paper on basic mathematical skills*. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED139654.pdf

Peter-Orth, C. (1985). All solutions of Soma cube puzzle. *Discrete Mathematics*, *57* (1-2), 105-121. https://doi.org/10.1016/0012-365X(85)90160-8

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas [How to pose and solve problems].* Editorial Trillas.

Puig Adam, P. (1951). *Valor formativo de las matemáticas en la enseñanza secundaria [The educational value of mathematics in secondary education].* https://www.ucm.es/data/cont/media/www/pag-81684/conferencias1.pdf

Quintero, R. (2006). El truco de m pilas de Gergonne y el sistema de numeración de base m [The Gergonne m-pile trick and the base m counting system]. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *13* (2), 165-176.

Rosholm, M., Mikkelsen, M. B., & Gumede, K. (2017). Your move: The effect of chess on mathematics test scores. *PLoS ONE*, *12* (5), e0177257. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0177257

Rupérez, J. A. y García, M. (2010). Graduación de la dificultad en el Cubo Soma (I) [Graduation of difficulty in the Cube Soma (I)]. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *75*, 165-173. https://mdc.ulpgc.es/cdm/singleitem/collection/numeros/id/768/rec/3

Sala, G., & Gobet, F. (2016). Do the benefits of chess instruction transfer to academic and cognitive skills? A meta-analysis. *Educational Research Review*, *18*, 46-57. http://dx.doi.org/10.1016/j.edurev.2016.02.002

Sala, G., & Gobet, F. (2017). Does far transfer exist? Negative evidence from chess, music, and working memory training. *Current Directions in Psychological Science*, *26* (6), 515-520. https://doi.org/10.1177%2F0963721417712760

Santaló, L. A. (1966). *La matemática en la educación [Mathematics in education]*. Editorial Docencia.

Scholz, M., Niesch, H., Steffen, O., Ernst, B., Loeffler, M., Witruk, E., & Schwarz, H. (2008). Impact of chess training on mathematics performance and concentration ability of children with learning disabilities. *International Journal of Special Education*, *23* (3), 138-148.

Senado de España (1995). *Expedientes relacionados con expediente 662/000126 [Files related to file 662/000126].* Retrieved from https://bit.ly/3hihRQ8

Singmaster, D. (1981). *Notas sobre el cubo de Rubik [Notes on the Rubik's Cube]*. Editorial Altalena.

Storey, K. (2010). Teaching beginning chess skills to students with disabilities. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth*, *44*, 45-40. https://doi.org/10.1080/10459880009599782

Subia, G., Amaranto, J., Amaranto, J., Bustamante, J., & Damaso, I. (2019). Chess and mathematics performance of college players: An exploratory analysis. *Open Access Library Journal*, *6*, e5195. https://doi.org/10.4236/oalib.1105195

Author biography

Fernando Blasco is an Associate Professor at the Universidad Politécnica de Madrid (UPM). He took his undergraduate degree and doctorate in mathematics at the Universidad Complutense

de Madrid. His main research interest is the frontier between non-formal education and scientific outreach. He is a member of the Committee for Raising Public Awareness of Mathematics of the European Mathematical Society and President of the Outreach Committee of the Royal Spanish Mathematical Society. He collaborates on various projects for promoting STEM disciplines.

https://orcid.org/0000-0002-5158-6828