



Universidad Internacional de La Rioja
Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Valoración de derivados financieros con un modelo de dividendos estocásticos

Trabajo fin de estudio presentado por:	Pablo Macías Pineda
Tipo de trabajo:	Tipo 3. Investigación pura
Director/a:	Julia Calatayud Gregori
Fecha:	2 de mayo de 2021

Resumen

En este trabajo se modelizarán el índice EUROSTOXX 50 y el pago de sus dividendos con ecuaciones diferenciales estocásticas. Para ello, primero se realiza una introducción teórica al cálculo estocástico y la valoración de derivados financieros. Partiendo de conceptos básicos de teoría de la medida, se construyen los conceptos de proceso estocástico, movimiento Browniano e integral de Itô. Una vez presentados, se introduce la fórmula de valoración de riesgo neutro.

El índice EUROSTOXX 50 y el pago de sus dividendos son modelizados con una evolución lognormal y con una evolución de Cox-Ingersoll-Ross respectivamente. Se utilizará el precio de opciones call sobre el EUROSTOXX 50, el precio de opciones call sobre los dividendos y futuros sobre los dividendos para calibrar todos los parámetros libres del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas planteado: la volatilidad del índice, la volatilidad de los dividendos, el valor medio de los dividendos y la velocidad de reversión a la media de los dividendos.

Para realizar esta calibración, se valorarán los productos a través de un método Montecarlo programado en Python y se utilizará el método híbrido de Powell como algoritmo de búsqueda de raíces para encontrar los parámetros del modelo.

Una vez calibrado el modelo, se analizarán dos posibles usos de este modelo en la industria financiera: el cálculo del VaR y el cálculo de las sensibilidades.

Palabras clave: Cox-Ingersoll-Ross, Dividendos, Derivados financieros, Montecarlo

Abstract

In this work, we model the EUROSTOXX 50 index and the payment of its dividends with stochastic differential equations. First, a theoretical introduction to stochastic calculus and to financial derivatives pricing is presented. The concepts of stochastic process, Brownian motion and Itô integral are built from basic measure theory concepts. After that, the risk neutral pricing formula is presented.

We model the EUROSTOXX 50 index and the payment of its dividends with a lognormal evolution and a Cox-Ingersoll-Ross evolution respectively. The price of call options on the EUROSTOXX 50 index, the price of call options on the dividends and dividend futures are used for calibrating all the free parameters of the stochastic differential equations system proposed: the volatility of the index, the volatility of the dividends, the mean value of the dividends and the mean reversion speed of the dividends.

For performing this calibration, the three products will be priced using a Montecarlo method programmed in Python, and the Powell's hybrid method will be used as roots finding algorithm for obtaining the model parameters.

Once the model is calibrated, we will analyse two of its possible uses in the financial industry: the calculation of the VaR and the sensitivities.

Keywords: Cox-Ingersoll-Ross, Dividends, Financial derivatives, Montecarlo

Índice de contenidos

1. Introducción y conceptos básicos	8
1.1. Motivación	8
1.2. Conceptos básicos.....	10
1.2.1. Forwards.....	10
1.2.2. Futuros.....	12
1.2.3. Opciones	13
1.3. Estructura del trabajo	15
2. Contexto y estado del arte	16
2.1. Introducción al cálculo estocástico.....	16
2.1.1. Movimiento Browniano.....	17
2.1.2. Cálculo de Itô	19
2.2. Valoración de derivados	22
2.3. Estado del arte	23
3. Aplicaciones del estudio que se lleva a cabo	25
4. Objetivos	28
4.1. Objetivo general.....	28
4.2. Objetivos específicos	28
5. Descripción de la contribución.....	29
5.1. Modelización de las variables	29
5.2. Derivados financieros usados en la calibración.....	31
5.2.1. Opciones sobre el EUROSTOXX 50	31
5.2.2. Futuros sobre el índice de dividendos del EUROSTOXX 50.....	33
5.2.3. Opciones sobre el índice de dividendos del EUROSTOXX 50	34
5.3. Valoración por método Montecarlo	35

5.4.	Método de Euler-Maruyama	36
5.5.	Correlación de variables normales utilizando la factorización de Cholesky	38
5.6.	Variables antitéticas.....	39
5.7.	Problema por la discretización del modelo continuo.....	40
5.8.	Obtención de los datos de mercado.....	40
5.8.1.	EUROSTOXX 50	41
5.8.2.	Ratio de dividendos del EUROSTOXX 50	41
5.8.3.	Correlación entre el índice y su ratio de dividendos.....	41
5.8.4.	Tipo de interés libre de riesgo.....	42
5.8.5.	Velocidad de reversión a la media	42
5.9.	Calibración del modelo	43
5.10.	Cálculo de griegas.....	44
5.11.	Value at Risk y Expected Shortfall.....	47
6.	Conclusiones y trabajo futuro	49
6.1.	Conclusiones	49
6.2.	Líneas de trabajo futuro	49
	Referencias bibliográficas.....	51
Anexo A.	Código Python	53
Anexo B.	Artículo	70

Índice de figuras

Figura 1. Número de contratos negociados. (Fernández, 2020).....	8
Figura 2. Payoff de un contrato forward comprado. Elaboración propia.	11
Figura 3. Payoff de una opción call (izquierda) y de una opción put (derecha). Elaboración propia.....	13
Figura 4. Datos históricos EUROSTOXX 50. (Investing.com, 2020)	16
Figura 5. Camino aleatorio simétrico. Elaboración propia.....	17
Figura 6. Caminos aleatorios simétricos escalados. Elaboración propia.	18

Índice de tablas

Tabla 1. Número de contratos negociados en Eurex. (Eurex, 2021)	10
Tabla 2. Resumen de modelos de tipos de interés instantáneos. (Brigo & Mercurio, 2006) ..	30
Tabla 3. Vencimientos de productos para la calibración. Elaboración propia.....	32
Tabla 4. Parámetros calibrados. Elaboración propia.....	43
Tabla 5. Comparación entre precios de mercado y precios calculados. Elaboración propia...	44
Tabla 6. Sensibilidad delta de equity de los derivados financieros. Elaboración propia.	45
Tabla 7. Sensibilidad delta de dividendos de los derivados financieros. Elaboración propia..	45
Tabla 8. Sensibilidad vega de equity de los derivados financieros. Elaboración propia.	46
Tabla 9. Sensibilidad vega de dividendos de los derivados financieros. Elaboración propia. .	47
Tabla 10. Value at Risk y Expected Shortfall. Elaboración propia.	47
Tabla 11. Value at Risk y Expected Shortfall mediante aproximación de Taylor. Elaboración propia.....	48

1. Introducción y conceptos básicos

1.1. Motivación

En la actualidad, los derivados financieros son herramientas básicas en la industria de las finanzas. Son usados por todo tipo de compañías: bancos, bancos centrales, energéticas, farmacéuticas, compañías de seguros, gobiernos, fondos de inversiones...

Para poder apreciar la relevancia de estos instrumentos, la Figura 1 muestra el número de contratos negociados (en millones) en los principales mercados de intercambio de derivados durante 2019.



Figura 1. Número de contratos negociados. (Fernández, 2020)

Comenzamos este trabajo definiendo el concepto de derivado financiero: “Un derivado puede ser definido como un instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otras variables subyacentes más básicas” (Hull, 2014, p.1). A lo largo de este trabajo, aprenderemos a utilizar diferentes modelos que se usan en la actualidad para calcular el valor de derivados financieros y propondremos uno que tenga en cuenta el riesgo que surge debido a los dividendos.

La valoración de estos instrumentos es fundamental para la gestión de riesgos, debido a que diferentes reguladores de instituciones financieras como el ECB¹ o asociaciones de participantes en los mercados financieros como ICMA² o IFRS³, exigen a las entidades que manejan este tipo de instrumentos el cálculo de diferentes medidas del riesgo al que se exponen, como el VaR⁴ o las griegas. Actualmente, se ha publicado una nueva normativa que está pendiente de ser implantada en todas las instituciones (Basel Committee on Banking Supervition, 2019). El cálculo de estas medidas es fundamental para las instituciones y debe realizarse con la mayor precisión posible, ya que el capital que deben reservar para hacer frente a posibles pérdidas depende de ellas.

Los diferentes derivados financieros suelen clasificarse y gestionarse en conjunto según el tipo de subyacente. Los principales subyacentes que se negocian en los mercados son:

- Acciones (“*equities*”) e índices bursátiles (como IBEX 35, EURO STOXX 50, DOW JONES, NIKKEI 225 o S&P 500).
- Índices de tipos de interés (como EURIBOR, EONIA, €STR, SOFR o LIBOR).
- Tipos de cambio de divisas (como EUR/USD, EUR/GBP o USD/JPY).
- Materias primas (como trigo, maíz, oro o recursos energéticos).

Como primera toma de contacto en la valoración de derivados, todos los subyacentes se pueden modelar con la misma dinámica y llegar a las mismas fórmulas de valoración. En la práctica, cada subyacente tiene unas particularidades diferentes y tienen sus propias dinámicas de evolución que las recogen.

Durante este trabajo, nos centraremos en modelizar derivados de acciones. Concretamente, el índice que elegiremos es el EURO STOXX 50, ya que es uno de los principales índices de Europa y existen muchos tipos diferentes de derivados sobre él. De los diferentes mercados organizados que se indican en la Figura 1, el EURO STOXX 50 es negociado en Eurex.

La Tabla 1 muestra el número de derivados financieros (opciones y futuros) por subyacente que se comerciaron en Eurex el día 1 de junio de 2021:

¹ ECB: European Central Bank

² ICMA: International Capital Market Association

³ IFRS: International Financial Reporting Standards

⁴ VaR: Value at Risk

Subyacente	Número de contratos negociados
Tipos de interés	5,196,321
Acciones	847,505
Índices bursátiles	2,775,741
Tipos de cambio	142
Dividendos	82,029
Materias primas	0

Tabla 1. Número de contratos negociados en Eurex. (Eurex, 2021)

Otra regulación emitida por la European Commission que hace necesario el desarrollo de modelos de valoración de derivados es PRIIPs⁵ (Commission delegated regulation, 2017). El objetivo de esta regulación es que las instituciones financieras que ofrecen derivados financieros a clientes minoristas entreguen estos un documento en el que se indique claramente el riesgo al que se exponen y los posibles resultados de su inversión en diferentes escenarios, tanto favorables como desfavorables.

1.2. Conceptos básicos

En esta sección veremos en detalle los derivados financieros sobre acciones más sencillos que se negocian en los mercados organizados mencionado en la sección anterior.

1.2.1. Forwards

Un forward es un contrato en el que dos partes acuerdan la venta de un subyacente en un determinado momento futuro a un precio fijado. Si llamamos T al momento en el que se

⁵ PRIIPs: Packaged retail investment and insurance products

realizará la venta, S_T al precio del subyacente en el instante T y K al precio de venta que se ha fijado, entonces el valor V_T^{fwd} del contrato forward en el momento en el que se realiza la venta final será

$$V_T^{fwd} = S_T - K.$$

Nótese que este valor está calculado desde el punto de vista de la persona que ha comprado el contrato, y por tanto, va a comprar en el futuro el subyacente. Esto significa que si el precio del subyacente en el instante T es mayor al precio K fijado ($S_T > K$), el comprador del contrato forward obtendrá beneficios, ya que podría comprar el subyacente a precio K y venderlo al momento en el mercado a precio S_T , por lo que obtendrá de beneficio la cantidad $V_T^{fwd} = S_T - K > 0$.

En caso contrario, si el precio del subyacente en el instante T es menor al precio K fijado ($S_T < K$), se puede razonar de la misma manera para ver el comprador del forward habrá perdido la cantidad $V_T^{fwd} = S_T - K < 0$, ya que se está viendo obligado a comprar el subyacente a un precio más caro del valor real.

La Figura 2 muestra el valor del contrato forward en el momento de vencimiento del mismo en función del valor del subyacente.

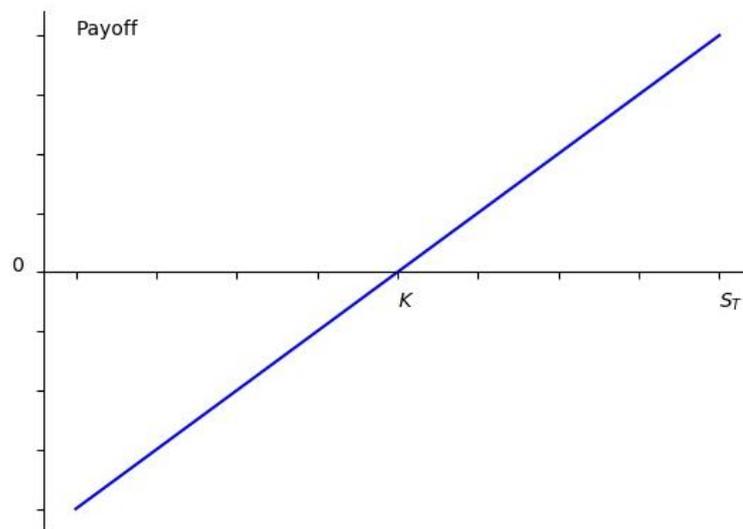


Figura 2. Payoff de un contrato forward comprado. Elaboración propia.

Este tipo de derivado financiero suele negociarse de manera privada en las dos partes, por lo que no se ven en los diferentes mercados financieros que se mencionan en la sección 1.1.

Los principales riesgos de este tipo de derivados son el riesgo generado por el valor que vaya a tener el subyacente S_T y el riesgo a que una de las dos partes no pueda afrontar su parte del contrato, bien porque no tenga el dinero para pagar una de las dos partes, o bien porque la otra parte no disponga del subyacente para entregarlo.

1.2.2. Futuros

Los futuros son derivados financieros muy parecidos a los forwards. Se trata también de un contrato en el que dos partes acuerdan la venta de un subyacente en un determinado momento futuro a un precio fijado, por lo que la fórmula para valorar el producto en la fecha final es la misma.

La principal diferencia de este tipo de contratos es que se acuerda ir realizando pagos cada día. El primer día t_1 se paga la diferencia $P_{t_1}^{fut} = S_{t_1} - K$, y el resto de día se va pagando la diferencia con el día anterior $P_{t_i}^{fut} = S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ (con $i = 2, \dots, N$ y $t_N = T$). De esta manera, se elimina el riesgo de que al final del contrato, el precio a pagar sea muy elevado y se cometa un impago.

Si sumamos todos los pagos que se han ido haciendo durante la vida del futuro, vemos que el valor del contrato es equivalente al del forward

$$V_T^{fut} = \sum_{i=1}^N P_{t_i}^{fut} = (S_{t_1} - K) + (S_{t_1} - S_{t_2}) + \dots + (S_{t_N} - S_{t_{N-1}}) = S_{t_N} - K = S_T - K.$$

Este tipo de contratos, con menos riesgos, son negociados en los mercados organizados, y son unos de los que utilizaremos para calibrar el modelo de valoración que se propone en este trabajo. Lo que se negocia en estos mercados es el precio K , que denominan comúnmente “precio del futuro”.

1.2.3. Opciones

Las opciones son contratos en los que una parte le da la opción a la otra de comprar (o vender) un determinado subyacente a un precio fijado en una fecha futura. Las opciones en las que se otorga el derecho (pero no la obligación) de comprar se llaman “opciones call”, mientras que en las opciones en las que se otorga el derecho a vender se llaman “opciones put”.

Si utilizamos la misma notación que en el apartado 1.2.1, el valor de una opción call V_T^{call} en el instante T de finalización del contrato será:

$$V_T^{call} = \max(S_T - K, 0)$$

La parte $S_T - K$ de la ecuación es igual que la del forward. Cuando $S_T > K$, el comprador de la opción call ejercerá su derecho a comprar el subyacente al precio K más barato que su precio real. Sin embargo, cuando $S_T < K$, al comprador de la opción no le será rentable ejercitar su derecho a comprar, ya que si quisiera el subyacente podría comprarlo en el mercado directamente a un precio más barato que el precio que fijó en el contrato de la opción, por lo que la opción no valdrá nada.

Análogamente, se razona que el valor de una opción put V_T^{put} en el instante T de vencimiento de la opción es:

$$V_T^{put} = \max(K - S_T, 0)$$

La Figura 3 muestra el valor de una opción call y una opción put en el instante T en función del precio del subyacente S_T .

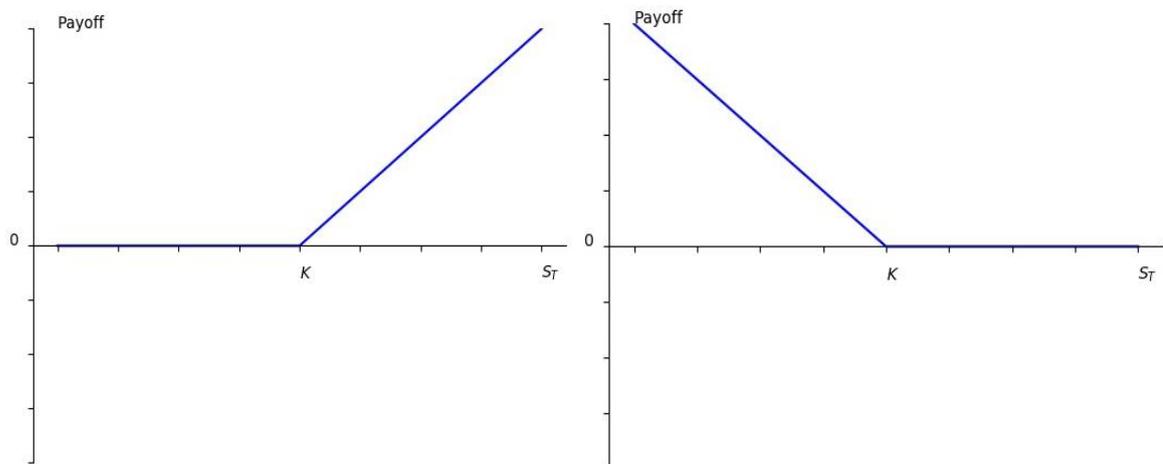


Figura 3. Payoff de una opción call (izquierda) y de una opción put (derecha). Elaboración propia.

Durante toda esta sección, hemos hablado del valor de los derivados financieros en el momento de su vencimiento T . Todos ellos dependen del valor del subyacente en ese instante, por lo que de manera natural aparecen las siguientes dudas:

- ¿Es posible conocer o predecir el valor de S_T (y por tanto V_T) en el instante t de compra de un derivado financiero?
- ¿Cuál es el precio “justo” de compra de un derivado financiero V_t , ya sea un forward, un futuro o una opción?

La respuesta a estas preguntas las veremos en la sección 2, donde aprenderemos técnicas matemáticas de valoración de derivados.

1.3. Estructura del trabajo

Este trabajo se divide en cinco secciones diferentes:

- La sección 1, donde se han introducido los conceptos más básicos sobre derivados financieros. Hemos visto la cantidad de contratos que se negocian en los mercados organizados, la importancia de disponer de modelos de valoración debido a diferentes regulaciones financieras y hemos presentado los derivados financieros más sencillos.
- La sección 2, donde presentaremos las técnicas matemáticas para valorar derivados (cálculo estocástico) y veremos algunos modelos existentes que incluyen los dividendos como variable aleatoria también.
- La sección 3, donde detallaremos las aplicaciones de la valoración de derivados que ya hemos presentado en la introducción y veremos las mejoras que incluye el tener en cuenta los dividendos como factor de riesgo.
- La sección 4, donde veremos los objetivos del desarrollo de la aportación de este trabajo, tanto de manera general como específica.
- La sección 5, donde plantearemos un modelo de evolución para un índice bursátil y para sus dividendos. Calibraremos este modelo para valorar ciertos derivados financieros y ser capaces de medir riesgos.
- La sección 6, donde se llega a las conclusiones del trabajo y se proponen futuras líneas de trabajo.

2. Contexto y estado del arte

2.1. Introducción al cálculo estocástico.

Para comenzar nuestro estudio, necesitamos encontrar una forma adecuada de tratar la variable S_t que queremos modelizar. La siguiente gráfica muestra el valor del índice EUROSTOXX 50 cada día durante un periodo de 13 meses, de fecha más reciente a más antigua.

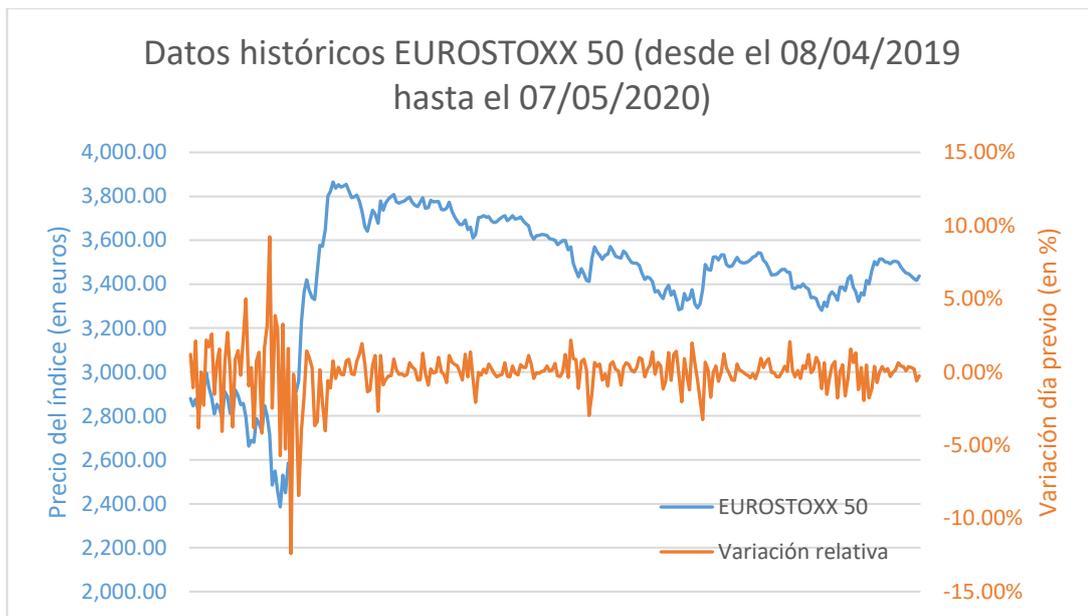


Figura 4. Datos históricos EUROSTOXX 50. (Investing.com, 2020)

Si observamos el precio del índice, vemos que varía aleatoriamente, por lo que a lo largo de este trabajo, consideraremos que S_t es un variable aleatoria en cada instante de tiempo t , es decir, es un proceso estocástico. Visualmente, sus caminos (trayectorias) son continuos y no diferenciable en todo t .

El tratamiento de las variables aleatorias requiere de conocimientos de generales de teoría de la probabilidad, que se encuentra dentro de la rama de las matemáticas de teoría de la medida. En esta sección no introduciremos los conceptos más básicos, si no que partiremos de la base de que se conoce todo lo expuesto en los capítulos 1 y 2 de (Shreve, 2004). Concretamente, los conceptos que asumimos conocidos son los de espacio de probabilidad, medida de probabilidad, variables aleatorias, esperanza, integral de Lebesgue, los teoremas

de convergencia de integrales, el teorema de Radon-Nikodým, esperanzas condicionadas y dependencias entre variables aleatorias.

2.1.1. Movimiento Browniano

El objetivo de esta sección es construir un movimiento Browniano W_t , que será la pieza fundamental de la parte aleatoria de la variable S_t .

Definimos el camino aleatorio simétrico de k pasos como:

$$M_k = \sum_{j=1}^k X_j$$

donde X_j son variables aleatorias independientes que pueden tomar los valores 1 y -1 con la misma probabilidad.

La Figura 5 muestra un posible resultado de la variable M_k , con $k = 7$ pasos.

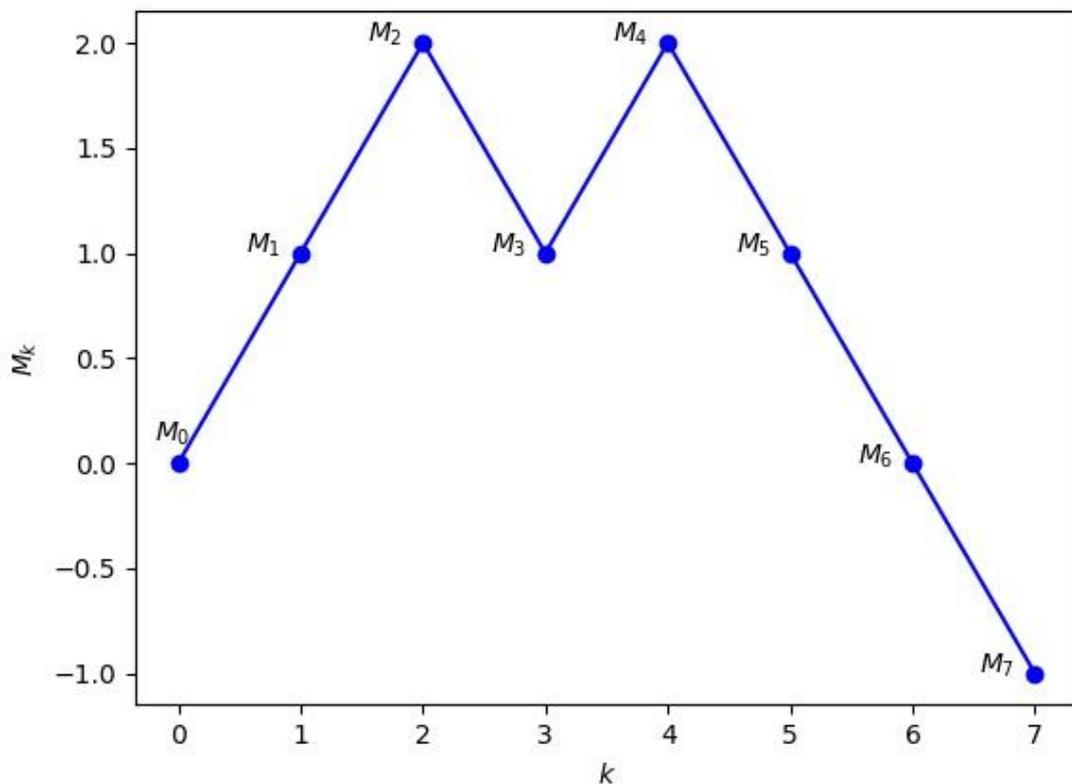


Figura 5. Camino aleatorio simétrico. Elaboración propia.

Esta variable aleatoria empieza a parecerse a lo que necesitamos para modelar el EUROSTOXX 50, pero necesitamos que el tamaño de los pasos, tanto en altura como en separación no sea tan grande. Para ello, definimos camino aleatorio simétrico escalado $W^{(n)}(t)$ como:

$$W^{(n)}(t) = \frac{M_{nt}}{\sqrt{n}}$$

donde n es un parámetro que fija el tamaño de la escala.

La Figura 6 muestra tres caminos aleatorios simétricos escalados con diferente parámetro n , que toma los valores $n = 100$, $n = 20$ y $n = 5$ y con $t \in [0, 5]$.

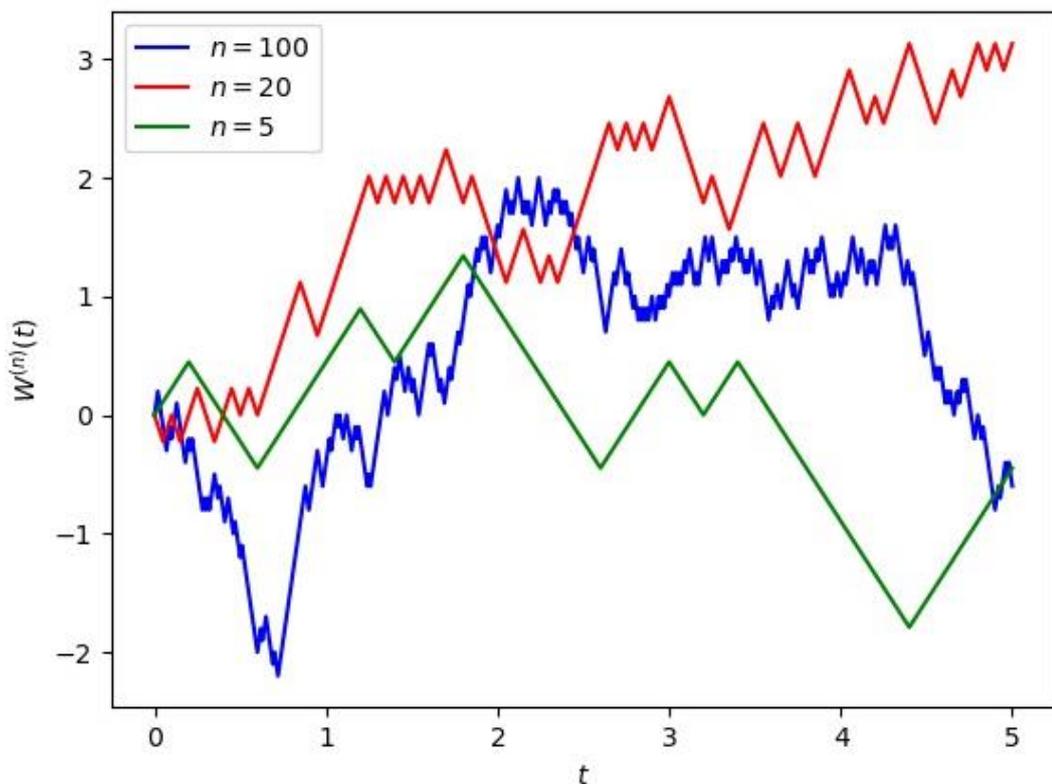


Figura 6. Caminos aleatorios simétricos escalados. Elaboración propia.

Este tipo de variable aleatoria nos valdría para aproximar el índice que queremos modelar, sin embargo, para poder ver todas las propiedades del cálculo estocástico, necesitamos llegar al movimiento Browniano.

Un movimiento Browniano se definirá como el proceso estocástico $W(t)$ obtenida como:

$$W(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{(n)}(t).$$

Esta variable aleatoria tiene la propiedad de que cualquier incremento $W(t_j) - W(t_k)$ (con $t_j > t_k$) se distribuye como una variable aleatoria normal con esperanza $\mathbb{E}[W(t_j) - W(t_k)] = 0$ y varianza $Var[W(t_j) - W(t_k)] = t_j - t_k$.

Además, un movimiento Browniano cumple que en a lo largo de un intervalo $[0, T]$, acumula T unidades de variación cuadrática. Esto nos lleva a afirmar que $(W(t) - W(s))^2 \approx (t - s)$ cuando $t - s$ es pequeño. Esta propiedad se suele escribir de la forma

$$dW(t)dW(t) = dt,$$

y jugará un papel crítico en el cálculo de Itô presentado en la sección 2.1.2.

A parte del movimiento Browniano, en la valoración de derivados financieros necesitaremos utilizar el concepto de filtración. La definición técnica puede encontrarse en la definición 3.3.3 de (Shreve, 2004), aquí presentaremos las propiedades que definen el concepto.

Una filtración para un movimiento Browniano es una colección de σ -álgebras $\mathcal{F}(t)$ que satisface:

- A tiempo t hay al menos tanta información disponible en la σ -álgebra $\mathcal{F}(t)$ como había en un tiempo anterior s en la σ -álgebra $\mathcal{F}(s)$.
- La información disponible en un tiempo t es suficiente para evaluar el movimiento Browniano $W(t)$ en ese instante.
- Cualquier incremento del movimiento Browniano después de un tiempo t es independiente de la información disponible en t .

Además, dado un proceso estocástico $\Delta(t)$, decimos que $\Delta(t)$ está adaptado a la filtración $\mathcal{F}(t)$ si para cada instante t , la variable aleatoria $\Delta(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible.

2.1.2. Cálculo de Itô

En el cálculo clásico, cuando tenemos una función diferenciable $g(t)$ y queremos realizar la integral de Lebesgue de una función $\Delta(t)$, podemos utilizar la fórmula

$$\int_0^T \Delta(t) dg(t) = \int_0^T \Delta(t)g'(t) dt.$$

En el caso del cálculo estocástico, cuando $g(t) = W(t)$, no es posible utilizar la misma fórmula que en cálculo clásico, ya que un movimiento Browniano no es diferenciable en ningún punto. Por ello, debemos definir un nuevo concepto de integral que llamaremos integral de Itô.

En el caso en el que el proceso $\Delta(t)$ sea simple, es decir, sea constante en cada intervalo $[t_j, t_{j+1})$ de una cierta partición $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[0, T]$, definimos la integral de Itô $I(t)$ (con $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ y $t \in [0, T]$) como

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW(u) \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_k)[W(t) - W(t_k)].$$

Como se puede ver en esta definición, la integral de Itô será también un proceso estocástico. En caso de que el integrando $\Delta(t)$ no sea un proceso simple, podríamos aproximarlo por un proceso simple $\Delta_n(t)$ eligiendo una partición $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ del intervalo $[0, T]$, de manera que en cada punto t_j , $\Delta_n(t)$ tome el valor constante $\Delta(t_j)$ hasta el punto t_{j+1} . La gráfica x muestra un ejemplo de esta aproximación, donde la gráfica continua sería el proceso $\Delta(t)$ y la gráfica a rayas sería la aproximación $\Delta_n(t)$.

Añadiendo más puntos a la partición, podemos crear una sucesión de procesos simples de manera que $\Delta_n(t)$ converja a $\Delta(t)$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^t |\Delta_n(t) - \Delta(t)|^2 dt = 0.$$

De esta forma, podemos definir la integral de Itô de un proceso adaptado $\Delta(t)$ que varía continuamente como

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW(u) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \Delta_n(u) dW(u).$$

La integral de Itô cumple las siguientes propiedades:

- Como es una función que depende del límite de integración superior t , los caminos de $I(t)$ son continuos.
- $I(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible para todo t .
- Isometría de Itô: $\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E} \int_0^t \Delta^2(u) du$.
- Su variación cuadrática es $[I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u) du$.

Una vez sabemos hacer integrales con respecto a un movimiento Browniano, también nos interesa obtener una generalización de la regla de la cadena para el cálculo estocástico. Concretamente, nos interesaría ser capaces de derivar expresiones del tipo $f(W(t))$, donde $f(x)$ es una función diferenciable.

Si en lugar de $W(t)$, tuviéramos una función diferenciable $g(t)$, la regla de la cadena clásica nos diría que

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t)) g'(t),$$

o en notación diferencial

$$df(g(t)) = f'(g(t)) dg(t).$$

En el caso del cálculo estocástico, se generaliza esta expresión con la fórmula de Itô-Doebelin, que en su forma diferencial sería

$$df(W(t)) = f'(W(t)) dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt.$$

Podemos ver que el primer término es análogo al de la regla de la cadena, pero además, se añade un segundo término debido a la variación cuadrática del movimiento Browniano.

Para utilizar estos resultados en la valoración de derivados, tenemos que generalizarlos un poco más, ya que no modelizaremos nuestras variables como movimientos Brownianos directamente, sino que será procesos de Itô.

Un proceso de Itô es un proceso estocástico de la forma

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u) dW(u) + \int_0^t \Theta(u) du,$$

donde $X(0)$ es un valor inicial fijo y $\Delta(t)$ y $\Theta(t)$ son procesos estocásticos adaptados a la filtración asociada al movimiento Browniano.

En su forma diferencial, un proceso de Itô se escribiría como $dX(t) = \Delta(t) dW(t) + \Theta(t)dt$. Nos será muy útil utilizar procesos de Itô porque aparecen de forma diferencial el término con $\Delta(t)$, que es el que aporta la variación cuadrática y el término con $\Theta(t)$, que aunque pueda ser aleatorio también, no aporta variación cuadrática.

La fórmula de Itô-Doebelin para un proceso de Itô al que se le aplica una función $f(t, x)$ es

$$df(t, X(t)) = f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))dX(t)dX(t),$$

donde f_t , f_x y f_{xx} son las diferentes derivadas parciales de $f(t, x)$.

En este trabajo, llamaremos S_t al valor del índice EUROSTOXX 50 y lo modelaremos utilizando el proceso de Itô

$$dX(t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW(t),$$

de manera que $S(t) = f(X(t))$, con $f(x) = S(0)e^x$, donde $S(0)$ es el valor inicial del índice y r y σ serán parámetros del modelo.

Si se aplica la fórmula de Itô, se puede ver que

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

Este proceso $S(t)$ recibe el nombre de movimiento Browniano geométrico.

Para el caso del ratio de dividendos $q(t)$, utilizaremos el modelo de evolución de Cox-Ingersoll-Ross

$$dq(t) = a(b - q(t))dt + \sigma\sqrt{q(t)}dW(t),$$

donde a , b y σ serán parámetros del modelo. En este caso, el modelo es más complejo y la fórmula de Itô no nos ayudará en el trabajo.

2.2. Valoración de derivados

Ahora que tenemos las herramientas matemáticas para modelizar los subyacentes de los que dependen los derivados financieros que introducimos al final del capítulo 1.2:

- ¿Es posible conocer o predecir el valor de S_T (y por tanto V_T) en el instante t de compra de un derivado financiero?

Como hemos visto, S_T será un proceso estocástico adaptado a la filtración asociada a un determinado movimiento Browniano que utilizamos para modelizarlo. Al estar adaptado a dicha filtración, únicamente será posible conocer el valor de S_T a partir del instante T , por lo que la respuesta a esta pregunta es negativa.

- ¿Cuál es el precio “justo” de compra de un derivado financiero V_t , ya sea un forward, un futuro o una opción?

El hecho de desconocer el valor de S_T en el instante t no nos limita a la hora de poner un precio V_t a un derivado financiero. Para responder a esta pregunta, nos remitimos al final de la sección 5.2.4 de (Shreve, 2004). La fórmula de valoración de riesgo neutro de un derivado financiero es

$$V(t) = \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(T-t)} V(T)|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Para el caso concreto de la valoración de futuros, nos referimos a la sección 5.6.2 de la misma referencia, donde se concluye que el precio de un futuro sobre un subyacente $S(t)$ es

$$V(t) = \tilde{\mathbb{E}}[S(T)|\mathcal{F}(t)].$$

2.3. Estado del arte

La valoración de derivados financieros con modelos en los que los dividendos son estocásticos no es común, ya que hoy en día, no existen demasiados derivados sobre los dividendos que permitan calibrar los parámetros.

Cuando el ratio de dividendos no se considera estocástico, sino que se toma como un parámetro determinista más o cuando el pago de dividendos discretos se considera conocido, las fórmulas de valoración de opciones, futuros y forwards son conocidas. Estas fórmulas de valoración y su deducción se pueden encontrar en (Hull, 2014) y (Shreve, 2004).

Sin embargo, al pasar a un modelo estocástico, estas fórmulas pueden complicarse demasiado, llegando incluso a no ser posibles de obtener de manera cerrada.

En (Lioui, 2006), se presenta una fórmula de valoración obtenida con una evolución lognormal para el índice de equity y una evolución para el ratio de dividendos y para otra variable que no analizaremos en este trabajo (el precio de mercado del riesgo) dadas por procesos de Ornstein-Uhlenbeck generalizados.

En (Phewchean & Wu, 2019), se realiza un estudio muy similar al anterior, en el que se utiliza otro modelo más complejo para el precio de mercado del riesgo.

En (Vatiwutipong & Phewchean, 2019) se presenta un estudio de un modelo de dividendos estocásticos que también utiliza un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. En este caso, el estudio consiste en ajustar los parámetros a datos históricos del índice en cuestión. Se trata de un tipo de estudio diferente al que realizaremos en este trabajo, donde lo que pretendemos es calibrar los parámetros con los datos de un instante presente para obtener como va a evolucionar el subyacente.

Estas tres referencias tienen en común el modelo que utilizan para los dividendos estocásticos. Al usar ese modelo en concreto, se pueden obtener fórmulas cerradas, pero este presenta una característica que podría ser de controversia. El ratio de dividendos podría tomar valores negativos. En este trabajo, utilizaremos el modelo de Cox-Ingersoll-Ross, que por la forma de construirlo, hace que esto no pueda ocurrir. Aunque para ello, tenemos que pagar un precio por haber complicado el modelo: No se pueden obtener fórmulas cerradas para valorar los productos. Por tanto, tendremos que ver métodos alternativos para hallar los precios de los productos que utilizaremos para calibrar.

3. Aplicaciones del estudio que se lleva a cabo

La valoración de derivados financieros con el modelo propuesto se puede utilizar en los siguientes ámbitos:

- Valoración de derivados:

Además de valorar los productos con los que hemos calibrado el modelo, se pueden valorar productos mucho más complejos, productos para los que incluso no haya precio en ningún mercado organizado y se negocien internamente entre entidades financieras. Algunos ejemplos de estos payoffs son:

- Opciones asiáticas: En este tipo de opciones, en lugar de mirar el valor del subyacente en la fecha de vencimiento, se hace una media del valor que toma en unas fechas específicas t_k , de modo que el payoff es

$$V_T = \max\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_{t_k} - K, 0\right).$$

- Opciones con barrera: En este tipo de opciones, el payoff es igual que el de las opciones call o put que ya hemos visto, pero condicionado a que el subyacente pase (o que no pase también) de un determinado valor durante la vida del contrato. En caso de que no se cumpla esta condición, el producto no tendría valor.
- Opciones americanas: En este tipo de opciones, el payoff también es igual al de las opciones call o put, pero se otorga el derecho al comprador de ejecutar el contrato en cualquier momento, en lugar de ser únicamente en la fecha de vencimiento.

- Griegas:

Como ya comentamos en la introducción, se llama griegas a las derivadas del precio de un instrumento financiero con respecto a las variables de las que depende. Las griegas miden el riesgo de dicho instrumento, ya que mientras mayor sea el valor de una griega, más puede variar su precio en función de lo que cambie la variable.

Esto hace que las griegas sean una métrica importante para las entidades financieras en la gestión de riesgos. Tan importante es, que la regulación FRTB⁶, que entrará en vigor en 2022, exige a las entidades calcular las griegas de todos los productos financieros de sus libros de trading y reservar un determinado capital que depende de ellas para hacer posible a posibles pérdidas.

Algunos ejemplos de las instrucciones para calcular las griegas expuestas en (Basel Committee on Banking Supervition, 2019) son:

- *“(21.21) Delta equity spot: the sensitivity is measured by changing the equity spot price by 1 percentage point (ie 0.01 in relative terms) and dividing the resulting change in the market value of the instrument (V_i) by 0.01 (ie 1%) as follows, where:*
 - *k is a given equity;*
 - *EQ_k is the market value of equity k ; and*
 - *V_i is the market value of instrument i as a function of the price of equity k .*

$$s_k = \frac{V_i(1.01 EQ_k) - V_i(EQ_k)}{0.01}$$

- *(21.25) (1) Vega, $\frac{\partial V_i}{\partial \sigma_i}$, is defined as the change in the market value of the option V_i as a result of a small amount of change to the implied volatility σ_i .”*

- **Cálculo del VaR:**

El VaR que introducimos en la sección 1 para un determinado instrumento financiero se define como el percentil 5% de la distribución resultante de valorar dicho instrumento variando únicamente el precio del subyacente, que tomará 252 valores calculados como el precio en el día del cálculo multiplicado por uno más la variación porcentual diaria que ha tenido durante el año anterior.

⁶ FRTB: Fundamental Review of Trading Book

Esta definición nos permite afirmar que estamos seguros al 95% de que, si el precio del subyacente variara como en el año anterior, nuestro instrumento no perdería un valor superior al VaR calculado.

En la actualidad, el VaR debe ser calculado obligatoriamente por todas las entidades financieras, y es la métrica de referencia que se usa para calcular el capital que se debe reservar para riesgo hasta que entre en vigor la normativa FRTB mencionada anteriormente.

En la nueva normativa, se propone pasar de la métrica VaR a ES⁷, que se calcula de forma parecida. La única diferencia es que en lugar de tomar el percentil 5%, se debe hacer una media de todo lo que está por debajo, de modo que se trata con más cuidado la cola de la distribución.

- Regulación PRIIPs:

Esta regulación pretende proteger a los clientes minoristas que pueden desconocer los instrumentos financieros que compran. La regulación obliga a entregar una hoja de información del producto que se vende, llamada KID⁸, en la que se deben explicar los riesgos del producto, se debe indicar con un número del 1 al 7 el nivel de riesgo del producto y se deben simular los resultados de producto en diferentes escenarios, tanto favorables como desfavorables.

Tanto para calcular el nivel de riesgo del producto, como para simular los escenarios, se debe valorar el producto con una simulación Montecarlo similar a la propuesta en este trabajo. Los detalles de esta simulación se pueden encontrar en (European Supervisory Authorities, 2016).

⁷ Expected Shortfall

⁸ KID: Key information document.

4. Objetivos

4.1. Objetivo general

El principal objetivo de este trabajo es aprender las técnicas y teoría matemática usadas en la actualidad para valorar derivados financieros. Aprenderemos estas técnicas modelizando un índice bursátil y sus dividendos con un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas.

4.2. Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general, pasaremos por los siguientes puntos:

- Plantear las ecuaciones que describen la evolución de las dos variables modelizadas.
- Discretizar el sistema de ecuaciones apropiadamente para poder aplicar el método Montecarlo.
- Desarrollos en Python:
 - El código de un método Montecarlo que simule las variables.
 - La valoración de futuros y opciones con el método Montecarlo.
 - El código de un algoritmo de optimización que calibre los parámetros del modelo para obtener los precios de mercado con el método Montecarlo.
 - El cálculo de las griegas usando el modelo calibrado.
 - El cálculo del VaR y el Expected Shortfall.

5. Descripción de la contribución

En esta sección se propone un modelo de evolución de un índice bursátil más complejo que la evolución lognormal expuesta en el capítulo 2.1.2.

Concretamente, además de modelar el índice, también se modelan los dividendos de manera estocástica.

5.1. Modelización de las variables

El modelo propuesto es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r - q_t)dt + \sigma^S dW_t^1 \\ dq_t = a(b - q_t)dt + \sigma^q \sqrt{q_t} dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \end{cases}$$

donde:

- S_t es el valor del índice EUROSTOXX 50 en el instante t .
- r es el tipo de interés libre de riesgo.
- q_t es el ratio de dividendos pagados por el índice en el instante t .
- W_t^1 y W_t^2 son dos movimientos Brownianos.
- σ^S es la volatilidad del índice.
- σ^q es la volatilidad del ratio de dividendos.
- a es la velocidad de reversión a la media del ratio de dividendos.
- b es el valor medio de los dividendos.
- ρ es la correlación entre los movimientos Brownianos.

El modelo de evolución para el ratio de dividendos es conocido como Cox-Ingersoll-Ross. Es común en la industria financiera utilizar este modelo para los tipos de interés, en lugar de para el ratio de dividendos. El estudio de este TFM consiste en ver si podemos calibrar este modelo para replicar los precios que se cotizan en el mercado de una serie de derivados financieros, y así poder medir riesgos asociados a los dividendos que no se podían estudiar sin usar algún modelo para la evolución de estos.

Existen muchos modelos de evolución que se podrían utilizar para este tipo de procesos. La Tabla 2 muestra diferentes modelos, indica si cumple la condición $r > 0$ y la distribución de probabilidad que sigue r_t (en nuestro caso, los usaremos para la variable q_t en lugar de para el tipo de interés r).

Modelo	Dinámica	$r > 0$	$r \sim$
Vasicek	$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t$	No	Normal
Cox-Ingersoll-Ross	$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$	Si	Chi cuadrado no central
Dothan	$dr_t = ar_tdt + \sigma r_t dW_t$	Si	Lognormal
Exponential Vasicek	$dr_t = r_t[\eta - a \ln r_t]dt + \sigma r_t dW_t$	Si	Lognormal
Hull-White	$dr_t = k[\theta_t - r_t]dt + \sigma dW_t$	No	Normal
Black-Karasinki	$dr_t = r_t[\eta_t - a \ln r_t]dt + \sigma r_t dW_t$	Si	Lognormal
Mercurio-Moraleda	$dr_t = r_t \left[\eta_t - \left(\lambda - \frac{\gamma}{1 + \gamma t} \right) \ln r_t \right] dt + \sigma r_t dW_t$	Si	Lognormal
Cox-Ingersoll-Ross ++	$r_t = x_t + \varphi_t, \quad dx_t = k[\theta - x_t]dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t$	Si	Chi cuadrado no central desplazada
Extended Exponential Vasicek	$r_t = x_t + \varphi_t, \quad dx_t = x_t[\eta - a \ln x_t]dt + \sigma x_t dW_t$	Si	Lognormal desplazada

Tabla 2. Resumen de modelos de tipos de interés instantáneos. (Brigo & Mercurio, 2006)

La elección del modelo de Cox-Ingersoll-Ross para el ratio de dividendos en este trabajo se debe a que es el modelo más sencillo que por construcción, asegura que el valor del

subyacente modelado siempre será positivo en unas determinadas condiciones que serán comprobadas.

Si nos fijamos en la notación utilizada para los parámetros del modelo σ^S , σ^q y b , no se incluye dependencia temporal. Esta notación ha sido elegida por simplicidad, pero a la hora de realizar la calibración, asumiremos que los parámetros tienen una dependencia temporal, de manera que serán constantes en varios intervalos, determinados por el vencimiento de los productos que usaremos en la calibración. Estos intervalos tendrán una longitud de un año cada uno.

5.2. Derivados financieros usados en la calibración

De todos los productos presentados en la sección 1.2 usaremos tres de ellos para calibrar el modelo.

La motivación para usar estos tres productos es que aparte de ser los más simples, sus precios son públicos y gratuitos. Todos los precios utilizados en este trabajo se han obtenido de la web del mercado europeo de productos financieros Eurex (*Eurex*, 2020).

5.2.1. Opciones sobre el EUROSTOXX 50

El subyacente sobre el que el pago de este producto es calculado es el EUROSTOXX 50, que en el modelo presentado en esta sección está representado por el valor de S_t .

Utilizaremos las opciones call, aunque podríamos haber utilizado indistintamente las opciones put. Como vimos en la sección 1.2.3, el pago en el momento del vencimiento T de este producto sería

$$P_T^S = \max(S_T - K, 0).$$

En la web donde se obtienen los precios, podemos ver que existen precios para diferentes strikes K . En este trabajo hemos utilizado los precios para el strike K que es igual al precio S_t del EUROSTOXX 50 en el momento t en el que estamos valorando los productos. Este

momento t elegido⁹ se trata del cierre de mercado del día 01/04/2020. Concretamente, este valor (en EUR) se trata de

$$K = S_t = 2680.3$$

Si nos fijamos en la web de Eurex, no se venden opciones con este strike en concreto. Los strikes más cercanos a este son 2675 y 2700, luego para obtener los precios que buscamos, interpolaremos linealmente el precio entre estos dos strikes.

Los vencimientos de las cuatro opciones que utilizamos son:

Etiqueta	Fecha
T_1	18/12/2020
T_2	17/12/2021
T_3	16/12/2022
T_4	15/12/2023

Tabla 3. Vencimientos de productos para la calibración. Elaboración propia.

Comúnmente, en los mercados organizados, los vencimientos de los productos que se comercian coinciden con el tercer viernes no festivo del mes en cuestión.

Finalmente, los precios de mercado (en EUR) de estas opciones call son:

$$V_{T_1,t}^S = 239.0016,$$

$$V_{T_2,t}^S = 292.9000,$$

$$V_{T_3,t}^S = 312.5604 \text{ y}$$

$$V_{T_4,t}^S = 336.7692.$$

⁹ Se trata de un día elegido al azar, es el día en el que este TFM comenzó.

Estos precios son los que introduciremos como input en el algoritmo de optimización. Según la fórmula de valoración de riesgo neutro presentada en la sección 2.2, estos precios pueden de ser calculados a través de nuestro modelo teórico propuesto como

$$V_{T_i,t}^S = \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(T_i-t)} P_{T_i}^S | \mathcal{F}(t)] = \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(T_i-t)} \max(S_{T_i} - K, 0) | \mathcal{F}(t)].$$

En la sección 5.3 veremos cómo calcular este precio teórico con un método Montecarlo.

5.2.2. Futuros sobre el índice de dividendos del EUROSTOXX 50.

Trabajar con derivados sobre los dividendos del EUROSTOXX 50 no es tan sencillo como trabajar con el índice en sí mismo. En este caso, los productos que encontramos en el mercado no tienen como subyacente la variable q_t directamente.

Esta variable q_t la hemos definido como ratio de dividendos pagados en un instante t , lo que quiere decir que la cantidad de dividendos pagados (δ_t) en dicho instante (en EUR) es

$$\delta_t = S_t \cdot q_t$$

En nuestro caso, como veremos en la sección 5.4, discretizaremos el tiempo en nuestro problema en intervalos de un día. Por tanto, $\delta_t \cdot \Delta t$ representa los dividendos pagados en un cierto día t , con Δt siendo la duración de un día en años.

El índice de dividendos sobre el que se construyen los derivados es EUROSTOXX 50 DVP, que incluye no solo los dividendos pagados en un día, sino los dividendos totales acumulados a lo largo de un año. Es decir, este índice D_t se calcula como

$$D_t = \sum_{i=0}^n S_{t_i} \cdot q_{t_i} \cdot \Delta t,$$

donde:

- t_0 es el día de comienzo del año en el que se calcula el índice.
- t_n coincide con el instante t en el que se está calculando el índice D_t .

Al igual que en el caso de las opciones sobre el EUROSTOXX 50, tomaremos los precios de los futuros sobre el índice EUROSTOXX 50 DVP en los vencimientos mostrado en la Tabla 3.

Los precios de mercado de los futuros (en EUR) para estos cuatro vencimientos son

$$V_{T_1,t}^{FutD} = 53.1,$$

$$V_{T_2,t}^{FutD} = 49.8,$$

$$V_{T_3,t}^{FutD} = 63.6 \text{ y}$$

$$V_{T_4,t}^{FutD} = 67.4.$$

Al igual que en el caso anterior, estos precios también los usaremos como input en el algoritmo de optimización. Según la teoría explicada en la sección 2.2, estos precios pueden de ser calculados a través de nuestro modelo teórico propuesto como

$$V_{T_i,t}^S = \tilde{\mathbb{E}}[D_{T_i} | \mathcal{F}(t)] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\sum_{i=0}^n S_{t_i} \cdot q_{t_i} \cdot \Delta t | \mathcal{F}(t) \right].$$

Hay que tener cuidado a la hora de simular el valor de D_{T_i} cuando el vencimiento es mayor a un año, ya que no hay que acumular los valores de los dividendos pagados en el año anterior.

5.2.3. Opciones sobre el índice de dividendos del EUROSTOXX 50

Una vez ya sabemos calcular el índice EUROSTOXX 50 DVP, podemos seguir el mismo procedimiento que el indicado en la sección 5.2.1 para valorar opciones call sobre este índice.

En este caso, el pago a vencimiento de este producto sería

$$V_T^D = \max(D_T - K, 0).$$

A diferencia de las opciones sobre EUROSTOXX 50, en este caso no tomaremos el precio de las opciones con strike igual al valor del índice D_t . Esto es debido a que como se trata de un derivado financiero nuevo, no es un producto líquido¹⁰. Por ello, ahora tomaremos el strike para el que más transacciones se han realizado, que en este caso, se trata de

$$K = 65.$$

¹⁰ Liquidez: El concepto de liquidez en el ámbito de los productos financieros está relacionado con la cantidad de contratos sobre un determinado producto que se negocian en el mercado. Un producto con poca liquidez (es decir, que no se haya negociado demasiado) no es un producto fiable a la hora de tomar precios, ya que al no haberse negociado, el mercado no nos aporta fiabilidad ni su opinión sobre el producto.

Los vencimientos que usamos para estas opciones volverán a ser los de la Tabla 3, y los respectivos precios serán

$$V_{T_1,t}^D = 5.60,$$

$$V_{T_2,t}^D = 4.19,$$

$$V_{T_3,t}^D = 11.02 \text{ y}$$

$$V_{T_4,t}^D = 16.13.$$

La fórmula de valoración de riesgo neutro nos vuelve a dar la misma estructura para calcular el precio con nuestro modelo teórico

$$V_{T_i,t}^D = \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(T_i-t)} P_{T_i}^D | \mathcal{F}(t)] = \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(T_i-t)} \max(D_{T_i} - K, 0) | \mathcal{F}(t)].$$

5.3. Valoración por método Montecarlo

En esta sección vamos a ver como se utiliza un método Montecarlo para valorar derivados financieros.

La esencia de este método consiste en aplicar el teorema central del límite de Lindeberg-Levy (Wackerly, Dennis et al., 2014):

Dada una sucesión $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de variables aleatoria independientes e idénticamente distribuidas con esperanza $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ y varianza $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Cuando n se acerca a infinito, la sucesión de variables aleatorias $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ converge en distribución a una normal $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, donde

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

es el estadístico media.

En nuestro caso, el valor de un derivado financiero se calcula a través de una esperanza matemática

$$V_t = \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(T-t)} P_T | \mathcal{F}(t)].$$

Si tomamos $X = e^{-r(T-t)} P_T$ como variable aleatoria, podemos realizar n simulaciones con el método de Euler-Maruyama que explicaremos en la siguiente sección. De esta manera

contendríamos una sucesión X_1, X_2, \dots, X_n de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por el teorema central del límite, si n es un valor suficientemente grande el estadístico \bar{X}_n es una buena aproximación de $V_t = \mu = \mathbb{E}[X]$, ya que $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

5.4. Método de Euler-Maruyama

Una vez sabemos que podemos valorar los derivados financieros simulando el pago de los productos una cierta cantidad de veces n , debemos encontrar un método para realizar dicha simulación.

El método más sencillo que se puede usar para obtener una aproximación numérica de la solución de una ecuación diferencial estocástica es el método de Euler-Maruyama (E. Kloeden, Peter & Platen, Eckhard, 1992).

La idea de este método es discretizar la parte no estocástica de la ecuación utilizando el método de Euler y discretizar la parte estocástica aproximando las variaciones pequeñas del movimiento Browniano con variables normales aleatorias con esperanza cero y varianza Δt .

Si nuestra ecuación diferencial estocástica consiste en un proceso de Itô de la forma

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t,$$

con condición inicial $X_0 = x_0$ y $t \in [0, T]$, entonces la aproximación de Euler-Maruyama de la solución X de la ecuación diferencial estocástica es la cadena de Markov Y definida de la siguiente forma:

- Partimos el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos iguales de longitud $\Delta t > 0$, es decir, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ y $\Delta t = T/N$.
- Fijamos el valor inicial $Y_0 = x_0$.
- Definimos de manera recursiva Y_n para $1 \leq n \leq N$ como $Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n, \tau_n)\Delta t + b(Y_n, \tau_n)\Delta W_n$, donde $\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$.

Como vimos en la sección 2.1.1, las variables aleatorias ΔW_n son variables aleatorias normales independientes e idénticamente distribuidas, con esperanza nula y varianza Δt .

Si aplicamos el método a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas, el esquema de discretización nos quedaría de la siguiente manera

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i + (r - q_i)S_i\Delta t + \sigma^S S_i \Delta W_i^1 \\ q_{i+1} = q_i + a(b - q_i)\Delta t + \sigma^q \sqrt{q_i} \Delta W_i^2 \end{cases}$$

Debemos tener cuidado con las variables normales que utilizaremos para calcular ΔW_i^1 y ΔW_i^2 , ya que partíamos de movimiento Brownianos con correlación. En el algoritmo de Python que se presenta en este trabajo, se parten de dos variables normales independientes y después son correladas utilizando la factorización de Cholesky de la matriz de covarianzas de las variables. Este método es detallado en la próxima sección.

Si nos fijamos en las ecuaciones anteriores, en la primera de ellas hay un término de orden 1 multiplicando toda la parte derecha. Este término está relacionado con el comportamiento exponencial de la ecuación que vimos en la sección 2.1.2. Este comportamiento exponencial hace que el esquema de discretización propuesto presente una varianza elevada en el valor de S_T . Para evitar un alto error en el método Montecarlo, es conveniente trabajar con la variable aleatoria $\ln S_t$ en lugar de S_t . Una vez obtengamos el valor de $\ln S_T$, tomaremos su exponencial para hallar la variable deseada.

Esta transformación de la ecuación diferencial estocástica se puede realizar mediante la fórmula de Itô explicada en la sección 2.1.2, donde la función de transformación es $f(t, x) = f(x) = \ln x$ (esta transformación no depende del tiempo). Si la aplicamos a $dS_t = (r - q_t)S_t dt + \sigma^S S_t dW_t^1$

$$df(t, S_t) = f_t(t, S_t)dt + f_x(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, S(t))dS_t dS_t.$$

Las derivadas parciales de f serían

$$\begin{cases} f_t = 0 \\ f_x = \frac{1}{x} \\ f_{xx} = \frac{(-1)}{x^2} \end{cases},$$

luego la fórmula de Itô quedaría

$$df(S_t) = 0 dt + \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{(-1)}{S_t^2} dS_t dS_t.$$

Obtenemos y simplificamos el término $dS_t dS_t$, teniendo en cuenta, que como vimos en la sección 2.1.1, $dW_t^1 dW_t^1 = dt$ y también $dt dt = 0$ y $dt dW = 0$:

$$dS_t dS_t = (r - q_t)^2 S_t^2 dt dt + 2(r - q_t) \sigma^S S_t^2 dt dW_t^1 + (\sigma^S)^2 S_t^2 dW_t^1 dW_t^1 = (\sigma^S)^2 S_t^2 dt.$$

Sustituyendo dS_t y $dS_t dS_t$ en la fórmula de Itô

$$df(S_t) = \frac{1}{S_t} [(r - q_t) S_t dt + \sigma^S S_t dW_t^1] + \frac{1(-1)}{2 S_t^2} (\sigma^S)^2 S_t^2 dt.$$

Despejando y simplificando términos, la ecuación que obtenemos para $\ln S_t$ es

$$d \ln S_t = \left(r - q_t - \frac{1}{2} (\sigma^S)^2 \right) dt + \sigma^S dW_t^1.$$

Como se puede observar, esta ecuación no tiene el problema del término de orden 1 de la variable subyacente en el lado derecho.

Finalmente, el esquema de discretización queda de la siguiente manera

$$\begin{cases} \ln S_{i+1} = \ln S_i + \left(r - q_i - \frac{1}{2} (\sigma^S)^2 \right) \Delta t + \sigma^S \Delta W_i^1 \\ q_{i+1} = q_i + a(b - q_i) \Delta t + \sigma^q \sqrt{q_i} \Delta W_i^2 \end{cases}.$$

5.5. Correlación de variables normales utilizando la factorización de Cholesky

En esta sección se explica el método para correlar variables aleatorias utilizando la factorización de Cholesky de la matriz de covarianzas de las variables.

Tomemos una matriz cualquiera Σ y supongamos que se puede descomponer en un producto de matrices de la forma $\Sigma = LL^T$, donde L^T indica la matriz transpuesta de L . Si partimos de un vector X de variables normales independientes, podemos estudiar la matriz de covarianzas de la variable aleatoria $Z = LX$. Por las propiedades de linealidad de las operaciones con variables normales, la variable Z seguirá siendo un vector de variables normales que ya no tienen por qué ser independientes.

Por definición, la matriz de covarianzas es la matriz $C = \mathbb{E}((Z - \mu)(Z - \mu)^T)$ (en nuestro caso particular, la media es cero $\mu = 0$). Si operamos

$$C = \mathbb{E}(ZZ^T) = \mathbb{E}((LX)(LX)^T) = \mathbb{E}(LXX^T L^T).$$

Como la esperanza es un operador lineal

$$\mathbb{E}(LXX^T L^T) = L\mathbb{E}(XX^T)L^T.$$

Como X es un vector de variables normales independientes, su matriz de covarianzas es $\mathbb{E}(XX^T) = I$, es decir, la identidad. Luego

$$C = L\mathbb{E}(XX^T)L^T = LL^T = \Sigma.$$

Como se ha demostrado, si queremos obtenemos variables normales con una cierta matriz de correlación, simplemente tenemos que partir de un vector de variables aleatorias normales independientes y multiplicarlo por una matriz L tal que la matriz de covarianzas que buscamos cumpla $\Sigma = LL^T$.

En el caso de las variables aleatorias normales, su matriz de covarianzas siempre es simétrica y definida positiva por definición. Por tanto, siempre se podrá utilizar la factorización de Cholesky para obtener la matriz L (Meyer, 2010).

Concretamente, en el caso que nos ocupa en este trabajo, con dos variables aleatorias normales con correlación ρ , la factorización de Choleski queda de la forma

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}.$$

5.6. Variables antitéticas

Dado que vamos a realizar simulaciones de más de tres años de nuestras variables aleatorias, vamos a requerir una gran cantidad de capacidad de computación si queremos simular un número de caminos elevado con el método Montecarlo.

Utilizar un número elevado de caminos hará que reduzcamos la desviación estándar del precio del producto que calculamos, ya que como vimos en la sección 5.3, la varianza tiene una relación inversamente proporcional al número de variables simuladas.

Computacionalmente, la generación de las variables aleatorias consume una gran cantidad de tiempo, por lo que es útil buscar otras formas de reducir la varianza del método Montecarlo.

Una forma muy sencilla es utilizar variables antitéticas (Kroese et al., 2011). Este método consiste en tomar, además de los caminos simulados, los correspondientes caminos asociados a las variables aleatorias

$$\begin{pmatrix} -\Delta W_t^1 \\ -\Delta W_t^2 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, obtenemos el doble de caminos sin tener que generar variables aleatorias nuevas y sin cambiar la media de nuestras variables aleatorias normales. Este método aportará una reducción en un factor $\sqrt{2}$ de la desviación estándar del precio calculado.

5.7. Problema por la discretización del modelo continuo

A pesar de que en la sección 5.1 se indicaba el que modelo de Cox-Ingersoll- Ross asegura que la variable modelizada siempre es positiva bajo unas ciertas condiciones, esta propiedad puede perderse debido a la discretización de problema de tiempo continuo.

Si nos fijamos en la ecuación del modelo

$$dq_t = a(b - q_t)dt + \sigma^q \sqrt{q_t} dW_t^2,$$

el factor $\sigma^q \sqrt{q_t}$ es el que evita que el valor de q_t baje de cero, ya que cuando q_t se hace pequeño, al estar dentro de una raíz cuadrada, el término $\sigma^q \sqrt{q_t} dW_t^2$ se anula prácticamente. Esto hace que en esos instantes, el término dominante $a(b - q_t)dt$ acerque el valor de q_t a la media b , por lo que nunca puede hacerse negativo.

Al discretizar el tiempo, puede pasar que alguno de los saltos cuando q_t es pequeño, no se esté anulando el factor $\sigma^q \sqrt{q_t} dW_t^2$ como se ha explicado anteriormente. El hecho de que q_t pueda hacerse negativo no debería de tener mucha importancia, ya que rápidamente volvería a ser positivo en el siguiente paso de la discretización. El problema surge por el hecho de que q_t aparezca en la raíz cuadrada. Si se hace negativo, el cálculo daría un número complejo y el algoritmo se pararía. Para evitar este error, si en algún paso de nuestras simulaciones se pasa a un valor de q_t negativo, en nuestro algoritmo lo pondremos como cero, para así poder evitar problemas con el término de la volatilidad.

5.8. Obtención de los datos de mercado

Aunque en la sección 5.2 ya se han indicado los precios de mercado de los productos que vamos a usar como objetivo en el algoritmo de calibración, aún nos siguen faltando algunos datos para hacer funcionar el modelo. En esta sección indicaremos de donde se obtiene cada uno de ellos.

Necesitaremos el valor de dichos datos a fecha 01/04/2020, que es la fecha de simulación a la que estamos valorando todos los productos.

5.8.1. EUROSTOXX 50

El valor del índice EUROSTOXX 50 es un dato público que se puede encontrar en cualquier buscador web. Su valor (en EUR) a fecha de simulación es

$$S = 2680.3.$$

5.8.2. Ratio de dividendos del EUROSTOXX 50

El valor de este ratio no es un valor que se publique en las webs de compra/venta de productos financieros, ya que es un valor que ha sido creado por el modelo.

El valor que sí que se publica es el del índice EUROSTOXX 50 DVP, que como comentábamos en la sección 5.2.2, en nuestro modelo lo podemos obtener a partir del valor de S y q

$$D_t = \sum_{i=0}^n S_{t_i} \cdot q_{t_i} \cdot \Delta t.$$

Con la idea de esta fórmula, podemos recuperar la serie histórica del valor de q_t a partir del índice EUROSTOXX 50 y el índice EUROSTOXX 50 DVP.

A fecha de simulación, su valor era

$$q = 1.9968\%.$$

5.8.3. Correlación entre el índice y su ratio de dividendos

Utilizando las series históricas del EUROSTOXX 50 y de su ratio de dividendos durante el año previo a la fecha de simulación, el coeficiente de correlación que se obtiene es

$$\rho = -18.9292\%$$

mediante la fórmula de Pearson:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

5.8.4. Tipo de interés libre de riesgo

El tipo de interés libre de riesgo que introduciremos en este modelo es el tipo de interés del mercado interbancario al máximo plazo disponible, es decir, el tipo de referencia EURIBOR a un año. A fecha de simulación, su valor es

$$r = -0.168\%.$$

Normalmente, en la industria financiera, no se toma un único tipo de interés. Para valorar derivados financieros sobre índices bursátiles, se suele asumir que el tipo de interés es determinista pero dependiente del tiempo. Con estas asunciones, se calibra una cierta curva $r(t)$ observando diferentes tipos de productos como bonos, swaps o préstamos.

Esta metodología permite calcular con más detalle el riesgo de los derivados financieros que estamos valorando a los tipos de interés. En nuestro caso, podríamos haber hecho algo parecido, pero sería demasiado avanzado para este trabajo y nos alejaría de nuestro objetivo principal de estudiar el riesgo de los productos debido a los dividendos.

5.8.5. Velocidad de reversión a la media

El modelo que hemos aplicado en este trabajo contiene demasiados parámetros que otorgan demasiados grados de libertad con respecto al número de restricciones dadas por los precios de mercados de los productos que vamos a calibrar.

Existen dos maneras de lidiar con este problema:

- Añadir más productos a la calibración para tener el mismo número de restricciones que de parámetros libres en el modelo.
- Fijar el valor de alguno de los parámetros, simplificando el modelo y reduciendo el número de variables a calibrar.

En este trabajo, se opta por la segunda opción, ya que añadir más productos ralentiza el programa de optimización y añadir variables no aporta conocimientos extra para comprender el método que estamos poniendo en práctica.

Fijaremos el siguiente valor para la velocidad de reversión a la media

$$a = 0.001.$$

Podría suceder que la calibración del modelo no tuviera solución para el caso concreto de este valor que hemos fijado. En ese caso, probaríamos otros valores, pero este valor nos va a permitir calibrar bien, como veremos en la siguiente sección.

5.9. Calibración del modelo

Para calibrar el modelo, vamos ajustando los parámetros b, σ^S y σ^q haciendo “bootstrapping”.

Empezamos con los precios de los tres productos para el primer vencimiento y buscamos los parámetros que durante el este primer periodo de tiempo nos dan los precios de mercado.

Una vez obtenidos estos parámetros para el primer periodo de tiempo, calculamos los precios de los tres productos para el segundo vencimiento. Durante este segundo vencimiento, tendremos los parámetros que calibramos en el primer tramo, y serán incógnita los parámetros entre el segundo tramo. Se calibran estos parámetros incógnita y se repite este proceso con todos los vencimientos para los que disponemos de datos.

El código implementado devuelve los siguientes parámetros calibrados (redondeados hasta una precisión de seis decimales):

Intervalo	b	σ^S	σ^q
$t_0 \leq t < T_1$	0.024737	0.298577	0.178015
$T_1 \leq t < T_2$	0.039417	0.209427	0.129734
$T_2 \leq t < T_3$	0.051132	0.196489	0.127034
$T_3 \leq t \leq T_4$	0.055940	0.205345	0.181146

Tabla 4. Parámetros calibrados. Elaboración propia.

Una vez tenemos los parámetros del modelo, podemos calcular el precio de todos los productos que hemos usado para calibrar. Así, somos capaces de ver el error del nuestro

modelo. Estos precios son mostrados en la Tabla 5, donde se puede comprobar que los precios coinciden y el modelo se ha calibrado correctamente.

Intervalo	Producto			
	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX	
$t_0 \leq t < T_1$	53.100000	5.600000	239.001600	Precio de mercado
	53.099999	5.600008	239.001599	Precio del modelo
$T_1 \leq t < T_2$	49.800000	4.1900000	292.900000	Precio de mercado
	49.800000	4.190000	292.900000	Precio del modelo
$T_2 \leq t < T_3$	63.600000	11.020000	312.560400	Precio de mercado
	63.600000	11.020000	312.560400	Precio del modelo
$T_3 \leq t \leq T_4$	67.400000	16.130000	336.769200	Precio de mercado
	67.400000	16.130000	336.769200	Precio del modelo

Tabla 5. Comparación entre precios de mercado y precios calculados. Elaboración propia.

5.10. Cálculo de griegas

Una vez calibrado el modelo, podemos obtener las griegas de cada uno de estos instrumentos financieros. Vamos a ver las dos sensibilidades que pide la normativa FRTB y mencionamos en la sección 3. La Tabla 6 muestra la sensibilidad delta de equity y la Tabla 7 la delta de dividendos.

Vencimiento	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
T_1	53.100000	23.479155	239.001600

T_2	49.800000	17.978683	292.900000
T_3	63.600000	37.022108	312.560400
T_3	67.400000	43.801737	336.769200

Tabla 6. Sensibilidad delta de equity de los derivados financieros. Elaboración propia.

Como era de esperar en esta sensibilidad, siempre es positiva, ya que los tres payoffs dependen directamente de S_T . Por tanto, si S_T aumenta, es de esperar el V_T aumente también.

Vencimiento	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
T_1	1,838.938107	679.394951	-919.425731
T_2	-25.536570	-9.925978	-910.892172
T_3	-45.011097	-25.462989	-881.371679
T_4	-47.795849	-30.665145	-859.113682

Tabla 7. Sensibilidad delta de dividendos de los derivados financieros. Elaboración propia.

El caso de la delta de dividendos no es tan intuitivo. En las opciones sobre el EUROSTOXX, el payoff depende explícitamente de S_T únicamente. Como en la ecuación de evolución propuesta para S_T , los dividendos aparecen restando en el término de dt , es de esperar que la sensibilidad sea negativa.

En el caso de los futuros sobre los dividendos y las opciones sobre los dividendos, no podemos predecir cual va a ser el signo de la delta de dividendos. Esto es porque en ambos casos, el payoff depende del producto $q_T S_T$, por lo que el factor q_T aportará una tendencia positiva, mientras que el factor S_T ya hemos visto que aporta una tendencia negativa en cuanto a la sensibilidad a dividendos.

La Tabla 8 muestra la sensibilidad vega de equity y la Tabla 9 la vega de dividendos. Como la regulación no indica con precisión el esquema de diferencias finitas que hay que utilizar para obtener esta sensibilidad, fijamos uno nosotros mismos. El esquema que utilizamos es de diferencias finitas hacia adelante con un paso de 0.0001.

Nótese en este caso que estamos obteniendo una sensibilidad con respecto a un parámetro que depende del tiempo. La regulación indica con respecto a qué tiempos en concreto se debe obtener la sensibilidad vega para luego agregarla de una determinada manera. Por practicidad para nuestro ejemplo, obtendremos la sensibilidad en cada salto de nuestra volatilidad para los productos con el vencimiento en T_4 , ya que son los únicos que tienen sensibilidad a los cuatro valores de la volatilidad.

t	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
t_0	-0.448997	8.780789	461.384801
T_1	0.408203	10.000642	467.921482
T_2	-1.185040	7.987847	427.770744
T_3	-4.616025	-0.332051	499.439645

Tabla 8. Sensibilidad vega de equity de los derivados financieros. Elaboración propia.

t	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
t_0	0.128060	0.152205	6.607915
T_1	0.145831	0.174670	6.785728
T_2	0.085180	0.152576	8.545754

T_3	-6.595893	34.856358	10.739574
-------	-----------	-----------	-----------

Tabla 9. Sensibilidad vega de dividendos de los derivados financieros. Elaboración propia.

En esta ocasión, en ambas sensibilidades no es intuitivo predecir el signo, ya que la volatilidad va en el término estocástico de las ecuaciones de evolución del EUROSTOXX y de los dividendos y no sabemos sin tener la solución analítica como va a contribuir.

5.11. Value at Risk y Expected Shortfall

Ahora vamos a proceder a calcular el VaR y el ES de los tres derivados financieros que vencen en T_4 . Para ellos, seguiremos la metodología expuesta en la sección 3. Ambos resultados se muestran en la Tabla 10.

Métrica	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
VaR	-1.721862	-1.099131	-8.603416
ES	-3.304078	-2.071192	-16.509075

Tabla 10. Value at Risk y Expected Shortfall. Elaboración propia.

Estos cálculos ponen de manifiesto la mejora que aporta el ES en cuanto a la medición de riesgos, ya que al hacer la media de los valores por debajo del percentil, obtenemos un valor más conservador en cuanto riesgo.

El cálculo de ambos parámetros ha sido muy costoso computacionalmente, ya que hemos tenido que ejecutar la simulación Montecarlo 252 veces. Una manera de ahorrar tiempo de cálculo es utilizar la delta de equity para hacer una aproximación de Taylor (G. Bartle, Robert & R. Sherbert, Donald, 2011) de la variación del precio de los derivados. La fórmula para aproximar la variación del precio $\Delta V_{t,k}$ (con t el día de valoración y k el día con respecto al que queremos calcular la variación) es

$$\Delta V_{t,k} \approx \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \Delta S_k,$$

donde ΔS_k es la variación porcentual del subyacente con respecto al día anterior, es decir,

$$\Delta S_k = \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1.$$

De esta manera, nos ahorramos la ejecución de todos los Montecarlo. La Tabla 11 muestra el cálculo del VaR y el ES mediante la aproximación de Taylor.

Métrica	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
VaR	-1.721862	-1.118999	-8.603413
ES	-3.304078	-2.147245	-16.509075

Tabla 11. Value at Risk y Expected Shortfall mediante aproximación de Taylor. Elaboración propia.

Si comparamos con los resultados anteriores, ambas métricas son iguales para el futuro de dividendos y la call sobre el EUROSTOXX. Para el caso de la opción call sobre los dividendos, los dos cálculos se separan algo más. Esto puede ser debido a que para este producto, el esquema de diferencias finitas que hemos aplicado no sea lo suficientemente bueno, y sea más conveniente reducir el tamaño del paso o pasar a un esquema de segundo orden.

De cualquier forma, el segundo método ahora bastante tiempo de cálculo. El método de revalorar con el Montecarlo tarda 200 segundos mientras que el método de Taylor tarda 0.0009 segundos.

6. Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

El modelo es utilizable, ya que hemos sido capaces de calibrarlo correctamente. Devuelve los precios iniciales a partir de los parámetros que hemos ajustado. Además, cumple con el requisito que nos motivó a utilizar la dinámica de Cox-Ingersoll-Ross y que no cumplieran los estudios comentados en la sección 2.3: el ratio de dividendos siempre se mantiene positivo.

El modelo se puede utilizar también para la gestión de riesgos. Como hemos visto, somos capaces de calcular la sensibilidad de los productos que se negocian en el mercado a diferentes parámetros, tanto a datos de mercado (como el precio del EUROSTOXX 50 y el ratio de dividendos, como a parámetros del modelo (como las volatilidades de ambas variables).

A parte, el uso del modelo nos permite calcular métricas de riesgos que exigen diferentes reguladores europeos a las entidades financieras, como son el Value at Risk y el Expected Shortfall. Estas métricas se pueden calcular de forma sencilla a partir de las griegas, pero teniendo siempre cuidado de que las griegas hayan sido calculadas de manera adecuada.

6.2. Líneas de trabajo futuro

El modelo calibrado podría utilizarse para valorar productos más complejos. Si tuviéramos acceso a precios de mercado de este tipo de productos, podríamos analizar si se obtienen buenos resultados. En caso de que no fuera bien, podríamos calibrar la velocidad de reversión a la media que fijamos por falta de restricciones en el problema de optimización.

Otra línea de trabajo podría ser la de añadir más variables aleatorias al modelo. Concretamente, es típico en la industria modelar el tipo de interés con un proceso estocástico de los que se proponen en la Tabla 2. Para ello podrían utilizarse productos que no dependan del EUROSTOXX 50, para que sea más sencilla la calibración.

También se podría intentar hacer más compleja la volatilidad. En la práctica, cuando solo se modela estocásticamente un subyacente de equity, es sencillo aplicar un modelo de volatilidad local. Este tipo de modelos asumen que la variable σ^S (que nosotros hemos puesto dependiente del tiempo únicamente) depende también del valor de S_t , y no es constante a

trozos como en este trabajo. El modelo de volatilidad local se puede encontrar en (Bergomi, Lorenzo, 2015) y se basa en obtener la superficie de volatilidad $\sigma(S_t, t)$ a partir de la superficie de precios de opciones call o put para diferentes vencimientos y strikes. Para ello, se utiliza la conocida fórmula de Dupire.

Referencias bibliográficas

- Basel Committee on Banking Supervition. (2019). *Minimum capital requirements for market risk*. <https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf>
- Bergomi, Lorenzo. (2015). *Stochastic volatility modeling*. CRC press.
- Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit* (2.^a ed.). Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-34604-3>
- Commission delegated regulation. (2017). Official Journal of the European Union. *Regulations*. <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32017R0653&from=FR>
- E. Kloeden, Peter & Platen, Eckhard. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer.
- Eurex. (2020, mayo 8). <https://www.eurex.com/ex-en/>
- Eurex. (2021, junio 1). *Market statistics at Eurex*. <https://www.eurex.com/ex-en/data/statistics/market-statistics-online/100!onlineStats?viewType=0&productGroupId=&productId=&cp=&month=&year=&busDate=20210601>
- European Supervisory Authorities. (2016). *Final draft regulatory technical standards* (p. 183).
- Fernández, R. (2020, diciembre 11). *Mercados intercambio de derivados: Ranking según contratos 2019*. Statista. <https://es.statista.com/estadisticas/600804/ranking-de-los-principales-intercambios-de-derivados-en-el-mundo--por-volumen/>

- G. Bartle, Robert & R. Sherbert, Donald. (2011). Taylor's Theorem. En *Introduction to Real Analysis* (4.^a ed., p. 418). John Wiley & Sons, Inc.
- Hull, J. C. (2014). *Options, Futures, and Other Derivatives* (9a ed.). Pearson.
- Investing.com. (2020, mayo 8). *Euro Stoxx 50 datos históricos*. Investing.com.
<https://es.investing.com/indices/eu-stoxx50-historical-data>
- Kroese, D. P., Taimre, T., & Botev, Z. I. (2011). *Handbook of Monte Carlo Methods* (1.^a ed.). Wiley. <https://www.wiley.com/en-us/Handbook+of+Monte+Carlo+Methods-p-9781118014967>
- Lioui, A. (2006). Black-Scholes-Merton revisited under stochastic dividend yields. *Journal of Futures Markets*, 26, 703-732. <https://doi.org/10.1002/fut.20208>
- Meyer, C. D. (2010). *Matrix analysis and applied linear algebra* (Har/Cdr). SIAM.
- Phewchean, N., & Wu, Y. (2019). European option pricing model with generalized Ornstein–Uhlenbeck process under stochastic earning yield and stochastic dividend yield. *Advances in Difference Equations*, 2019. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2210-5>
- Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer-Verlag.
<https://www.springer.com/gp/book/9780387401010>
- Vatiwutipong, P., & Phewchean, N. (2019). A study of dividend yield model under stochastic earning yield environment in stock exchange of Thailand. *Advances in Difference Equations*, 2019. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2231-0>
- Wackerly, Dennis, Mendenhall, William, & Scheaffer, Richard. (2014). *Mathematical Statistics with Applications* (7.^a ed.). Cengage Learning.

Anexo A. Código Python

El código utilizado en este trabajo se encuentra dividido en tres archivos .py. Para ejecutar el programa, los tres archivos deben de encontrarse en la misma carpeta del directorio de trabajo.

El primero de ellos es el archivo funciones.py. Este archivo contiene tres funciones que nos ayudaran a calcular los vectores que contienen la discretización del tiempo y de los parámetros b , σ^S y σ^q :

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue May  5 23:49:23 2020

@author: pablo
"""

import numpy as np
from math import log, sqrt
from scipy.stats import norm

def cal_yf_from_mat(t0, T, end_year):
    yf = list()
    yf.append(np.busday_count(t0, T[0]) / np.busday_count(end_year[0],
end_year[1]))
    for i in range(len(T) - 1):
        yf.append(
            np.busday_count(t0, end_year[1]) /
np.busday_count(end_year[0], end_year[1]) + i + np.busday_count(
            end_year[i + 1], T[i + 1]) / np.busday_count(end_year[i
+ 1], end_year[i + 2]))
    return yf

def days_yf(t0, T, end_year):
    days_yf = [np.ones(np.busday_count(t0,
T[0]))/np.busday_count(end_year[0], end_year[1])]
    for i in range(len(T) - 1):
        days_yf.append(
            np.concatenate(
                [np.ones(np.busday_count(T[i], end_year[i+1])) /
np.busday_count(end_year[i], end_year[i+1]),
                np.ones(np.busday_count(end_year[i+1], T[i+1])) /
np.busday_count(end_year[i+1], end_year[i+2]))
            )
        h = [days_yf[0]]
        for i in range(len(days_yf)-1):
            h.append(np.concatenate([h[i], days_yf[i+1]]))
    return days_yf, h
```

```
def parametros_to_pasos(param, t0, maturities):
    if len(param)!=len(maturities):
        print('faltan o sobran valores del parametro')
    aux = [param[0]*np.ones(np.busday_count(t0,maturities[0]))]
    for i in range(len(param)-1):
        aux.append(param[i+1]*np.ones(np.busday_count(maturities[i],maturities[
i+1])))
    return np.concatenate(aux)
```

El segundo archivo es el fichero montecarlo.py. Este archivo contiene la función HybridStockDividendsMSamples() que se encargará de realizar la simulación Montecarlo que se ha descrito en la sección 5. Además, incluye las funciones PayoffDivFut() y PayoffOptCall(), que calculan el pago a vencimiento (del futuro sobre el índice de dividendos y de las opciones call respectivamente) de cada una de las simulaciones realizadas mediante la función anterior.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed May 6 13:43:14 2020

@author: pablo
"""

import time
import numpy as np
from math import log, sqrt

def
HybridStockDividendsMSamples(S0,q0,r,a_pasos,b,volS_pasos,volq_pasos,rh
o,M,N,h,mat_pos):
    # M number of paths.
    # N number of step of each path.

    a = a_pasos[:N]
    volq = volq_pasos[:N]
    volS = volS_pasos[:N]

    S=[[[]] * (N + 1)
    q=[[[]] * (N + 1)

    mats = [pos for pos in mat_pos if pos<=N]

    if len(a)!=N:
        print('a está mal')
    if len(h)!=N:
        print('h está mal')
```

```

t0 = time.time()
np.random.seed(140494)
# Calculo de la matriz aleatoria
Cov = np.array([[1, rho], [rho, 1]])
# Descomposición de Cholesky. Diferente que en matlab, python
# da TriInferior.
L = np.linalg.cholesky(Cov).T
# Generación de normales independientes
Z = np.random.normal(0,1,(N,2,M))
# Transformación para correlacionarlas
random_walk = np.zeros((N,2,M))
for k in range(M):
    random_walk[:, :, k] = np.dot(Z[:, :, k], L)

t1 = time.time()
print('Generar números:', t1-t0)

Saux = np.ones(2*M) * log(S0)
q[0] = np.ones(2*M) * q0
S[0] = np.exp(Saux)
inicio = 0
for days_year in mats:
    if inicio == 0: # Este if sirve para resetear a 0 el indice de
# dividendos cada año.
        Saux += h[inicio] * (np.ones(2 * M) * (r - 0.5 *
volS[inicio]** 2) - q[inicio]) + sqrt(h[inicio]) * volS[
        inicio] * np.concatenate((random_walk[inicio, 0, :], -
random_walk[inicio, 0, :]))
        qaux = np.maximum(np.zeros(2 * M), q[inicio]) # q se hace
negativo por la discretización del problema
        q[inicio + 1] = q[inicio] + h[inicio] * (a[inicio] *
np.ones(2 * M) - b * q[inicio]) + np.multiply(
        np.sqrt(qaux * h[inicio]) * volq[inicio],
np.concatenate((random_walk[inicio, 1, :], -random_walk[inicio, 1,
:]))))
        S[inicio + 1] = np.exp(Saux)
    else:
        Saux += h[inicio] * (np.ones(2 * M) * (r - 0.5 *
volS[inicio]** 2) - q[inicio]) + sqrt(h[inicio]) * volS[
        inicio] * np.concatenate((random_walk[inicio, 0, :], -
random_walk[inicio, 0, :]))
        q[inicio + 1] = np.zeros(2 * M)
        S[inicio + 1] = np.exp(Saux)
    for dia in range(inicio + 1, days_year):
        Saux += h[dia] * (np.ones(2 * M) * (r - 0.5 * volS[dia]**
2) - q[dia]) + sqrt(h[dia]) * volS[
        dia] * np.concatenate((random_walk[dia, 0, :], -
random_walk[dia, 0, :]))
        qaux = np.maximum(np.zeros(2 * M), q[dia]) # q se hace

```

```
negativo por la discretización del problema
    q[dia + 1] = q[dia] + h[dia] * (a[dia] * np.ones(2 * M) - b
* q[dia]) + np.multiply(
    np.sqrt(qaux * h[dia]) * volq[dia],
np.concatenate((random_walk[dia, 1, :], -random_walk[dia, 1, :])))
    S[dia + 1] = np.exp(Saux)
    inicio = days_year

    t2 = time.time()
    print('Cálculo caminos:', t2 - t1)
    return S, q

def PayoffDivFut(S, q, h):
    result = np.zeros(len(S[0]))
    for i in range(len(h)):
        result += np.multiply(S[i], q[i]) * h[i]
    return result

def PayoffOptCall(S, K):
    return np.maximum(S - K * np.ones(len(S)), np.zeros(len(S)))
```

El último fichero es el llamado optimización.py. Este archivo define dos funciones necesarias para poner en marcha el algoritmo de optimización para calibrar el modelo, pricer() y f_objetivo(). Una vez definidas las funciones, en este archivo se cargan todos los datos de mercado necesario para realizar la valoración y se pone en marcha algoritmo descrito en la sección 5.9. Finalmente, se imprimen por pantalla los parámetros del modelo calibrados y los precios de los productos que se calculan con dichos parámetros.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed May 6 01:37:59 2020

@author: pablo
"""

from montecarlo import *
from funciones import cal_yf_from_mat, days_yf, parametros_to_pasos
from math import exp
from scipy.optimize import fsolve

def pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h_previo, h_elegido,
mat_position):
    a_pasos = parametros_to_pasos(a, t0, T_futdiv)
    volq_pasos = parametros_to_pasos(volq, t0, T_futdiv)
    vols_pasos = parametros_to_pasos(vols, t0, T_opt_sx5e)

    # Número de pasos N en la simulación
```

```
N = len(h_elegido)
N_previo = len(h_previo)

# Cálculos usando normrnd y correlacionando variables después
S, q = HybridStockDividendsMSamples(S0, q0, r, a_pasos, b,
vols_pasos, volq_pasos, rho, M, N, h_elegido, mat_position)

payoffs_divfut = PayoffDivFut(S[N_previo:N + 1], q[N_previo:N + 1],
h_elegido[N_previo:N])
payoffs_divopt = exp(-r * yf_futdiv[0]) *
PayoffOptCall(payoffs_divfut, K_div)
payoffs_eqopt = exp(-r * yf_futdiv[0]) * PayoffOptCall(S[N], S0)

return [np.mean(payoffs_divfut), np.mean(payoffs_divopt),
np.mean(payoffs_eqopt)]

def f_objetivo(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h_previo,
h_elegido, mat_position, objetivos):
    prices = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h_previo,
h_elegido, mat_position)
    return [x1 - x2 for x1, x2 in zip(prices, objetivos)]

if __name__ == '__main__':
    T_opt_sx5e = ['2020-12-18',
                '2021-12-17',
                '2022-12-16',
                '2023-12-15']
    T_futdiv = ['2020-12-18',
               '2021-12-17',
               '2022-12-16',
               '2023-12-15']
    T_endyear = ['2020-01-01',
                 '2021-01-01',
                 '2022-01-01',
                 '2023-01-01',
                 '2024-01-01']

    t0 = '2020-04-01'
    days_futdiv = [np.busday_count(t0, fecha) for fecha in T_futdiv]
    days_opt_sx5e = [np.busday_count(t0, fecha) for fecha in
T_opt_sx5e]

    # Year fractions maturities
    yf_futdiv = cal_yf_from_mat(t0, T_futdiv, T_endyear)

    # Steps for each maturity.
    days_yf, h = days_yf(t0, T_futdiv, T_endyear)
    mat_position = [len(hs) for hs in h]

    h1 = h[0]
    h2 = h[1]
```

```
h3 = h[2]
h4 = h[3]

div_fut_prices = [53.1, 49.8, 63.6, 67.4]
div_call_opt_prices = [5.60, 4.19, 11.02, 16.13] # Excel. Tomo el
strike 65, que es el más líquido.
eurostoxx_call_opt_prices = [239.0016, 292.9, 312.5604, 336.7692]

# Datos del problema
S0 = 2680.3 # También es el strike de las call sobre el eurostoxx
q0 = 0.019967966 #0.022794603
M = 2 ** 14
K_div = 65 # Strike dividend call options
rho = -0.189292925
r = -0.00168

# Parametros a calibrar
b = 0.001 # Criterio experto
a = [0.01, 0.01, 0.01, 0.01]
vols = [0.1, 0.1, 0.1, 0.1]
volq = [0.1, 0.1, 0.1, 0.1]

# Objetivos
objetivos = [[div_fut_prices[i], div_call_opt_prices[i],
eurostoxx_call_opt_prices[i]] for i in range(4)]

prices_0 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, [1], h1,
mat_position)

f0 = Lambda x: f_objetivo(S0,
                        q0,
                        r,
                        [x[0], a[1], a[2], a[3]],
                        b,
                        [x[1], vols[1], vols[2], vols[3]],
                        [x[2], volq[1], volq[2], volq[3]],
                        rho,
                        M,
                        [1],
                        h1,
                        mat_position,
                        objetivos[0])

initial_guess = [0.01, 0.1, 0.1]
[a_sol0, vols_sol0, volq_sol0] = fsolve(f0, initial_guess,
xtol=10e-7)
a[0] = a_sol0
vols[0] = vols_sol0
volq[0] = volq_sol0

f1 = Lambda x: f_objetivo(S0,
```

```
        q0,
        r,
        [a[0], x[0], a[2], a[3]],
        b,
        [vols[0], x[1], vols[2], vols[3]],
        [volq[0], x[2], volq[2], volq[3]],
        rho,
        M,
        h1,
        h2,
        mat_position,
        objetivos[1])

[a_sol1, vols_sol1, volq_sol1] = fsolve(f1, [a_sol0, vols_sol0,
volq_sol0], xtol=10e-7)
a[1] = a_sol1
vols[1] = vols_sol1
volq[1] = volq_sol1

f2 = Lambda x: f_objetivo(S0,
        q0,
        r,
        [a[0], a[1], x[0], a[3]],
        b,
        [vols[0], vols[1], x[1], vols[3]],
        [volq[0], volq[1], x[2], volq[3]],
        rho,
        M,
        h2,
        h3,
        mat_position,
        objetivos[2])

[a_sol2, vols_sol2, volq_sol2] = fsolve(f2, [a_sol1, vols_sol1,
volq_sol1], xtol=10e-7)
a[2] = a_sol2
vols[2] = vols_sol2
volq[2] = volq_sol2

f3 = Lambda x: f_objetivo(S0,
        q0,
        r,
        [a[0], a[1], a[2], x[0]],
        b,
        [vols[0], vols[1], vols[2], x[1]],
        [volq[0], volq[1], volq[2], x[2]],
        rho,
        M,
        h3,
        h4,
        mat_position,
```

```
objetivos[3])

[a_sol3, vols_sol3, volq_sol3] = fsolve(f3, [a_sol2, vols_sol2,
volq_sol2], xtol=10e-7)
a[3] = a_sol3
vols[3] = vols_sol3
volq[3] = volq_sol3

print('Param solver 1:', a_sol0, vols_sol0, volq_sol0) # 2^15
0.015506635921427488 0.29514724550393595 0.1656479699860158
# 2^16 0.015512465425311258 0.29648353534605315 0.16555735571639657
# 2^17 0.01549042738583047 0.29837489136838047 0.16497912181648908
# 2^18 0.015541662125404594 0.2970416411412151 0.16578548959864273
# 2^19 0.015539355389007983 0.29778113130425526 0.1658044809216574

print('Param solver 2:', a_sol1, vols_sol1, volq_sol1)
print('Param solver 3:', a_sol2, vols_sol2, volq_sol2)
print('Param solver 4:', a_sol3, vols_sol3, volq_sol3)

prices_1 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, [1], h1,
mat_position)
prices_2 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h1, h2,
mat_position)
prices_3 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h2, h3,
mat_position)
prices_4 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h3, h4,
mat_position)

# print('Precios sin calibración:', prices_0)
print('Precios con calibración 1:', prices_1)
print('Precios de mercado 1', objetivos[0], '\n')
print('Precios con calibración 2:', prices_2)
print('Precios de mercado 2', objetivos[1], '\n')
print('Precios con calibración 3:', prices_3)
print('Precios de mercado 3', objetivos[2], '\n')
print('Precios con calibración 4:', prices_4)
print('Precios de mercado 4', objetivos[3], '\n')
```

Además de estos tres ficheros, se ha utilizado adicionalmente uno más para calcular las sensibilidades de la sección 5.9, llamado sensibilidades.py:

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Jul 15 16:00:50 2021

@author: pablo
"""

from montecarlo import *
```

```
from funciones import cal_yf_from_mat, days_yf, parametros_to_pasos
from math import exp
import numpy as np

def pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h_previo, h_elegido,
mat_position):
    a_pasos = parametros_to_pasos(a, t0, T_futdiv)
    volq_pasos = parametros_to_pasos(volq, t0, T_futdiv)
    vols_pasos = parametros_to_pasos(vols, t0, T_opt_sx5e)

    # Número de pasos N en la simulación
    N = len(h_elegido)
    N_previo = len(h_previo)

    # Cálculos usando normrnd y correlacionando variables después
    S, q = HybridStockDividendsMSamples(S0, q0, r, a_pasos, b,
vols_pasos, volq_pasos, rho, M, N, h_elegido, mat_position)

    payoffs_divfut = PayoffDivFut(S[N_previo:N + 1], q[N_previo:N + 1],
h_elegido[N_previo:N])
    payoffs_divopt = exp(-r * yf_futdiv[0]) *
PayoffOptCall(payoffs_divfut, K_div)
    payoffs_eqopt = exp(-r * yf_futdiv[0]) * PayoffOptCall(S[N], S0)

    return [np.mean(payoffs_divfut), np.mean(payoffs_divopt),
np.mean(payoffs_eqopt)]

T_opt_sx5e = ['2020-12-18',
'2021-12-17',
'2022-12-16',
'2023-12-15']
T_futdiv = ['2020-12-18',
'2021-12-17',
'2022-12-16',
'2023-12-15']
T_endyear = ['2020-01-01',
'2021-01-01',
'2022-01-01',
'2023-01-01',
'2024-01-01']

t0 = '2020-04-01'
days_futdiv = [np.busday_count(t0, fecha) for fecha in T_futdiv]
days_opt_sx5e = [np.busday_count(t0, fecha) for fecha in T_opt_sx5e]

# Year fractions maturities
yf_futdiv = cal_yf_from_mat(t0, T_futdiv, T_endyear)

# Steps for each maturity.
days_yf, h = days_yf(t0, T_futdiv, T_endyear)
mat_position = [len(hs) for hs in h]
```

```
h1 = h[0]
h2 = h[1]
h3 = h[2]
h4 = h[3]

div_fut_prices = [53.1, 49.8, 63.6, 67.4]
div_call_opt_prices = [5.60, 4.19, 11.02, 16.13] # Excel. Tomo el
strike 65, que es el más líquido.
eurostoxx_call_opt_prices = [239.0016, 292.9, 312.5604, 336.7692]

objetivos = [[div_fut_prices[i], div_call_opt_prices[i],
eurostoxx_call_opt_prices[i]] for i in range(4)]

# Datos del problema
S0 = 2680.3 # También es el strike de las call sobre el eurostoxx
q0 = 0.019967966
M = 2 ** 12
K_div = 65 # Strike dividend call options
rho = -0.189292925
r = -0.00168

# Parametros
b = 0.001 # Criterio experto
a = [0.024632889670984207, 0.03943332940236466, 0.051152059755964985,
0.0559917559120302]
vols = [0.2941956753706126, 0.2115385477314622, 0.2084001707439573,
0.21062649631184904]
volq = [0.17712546432086035, 0.1297972709969229, 0.1263240067709712,
0.1761761314040222]

prices_1 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, [1], h1,
mat_position)
prices_2 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h1, h2,
mat_position)
prices_3 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h2, h3,
mat_position)
prices_4 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h3, h4,
mat_position)

prices_1_eqbump = pricer(S0*1.01, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, [1],
h1, mat_position)
prices_2_eqbump = pricer(S0*1.01, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h1,
h2, mat_position)
prices_3_eqbump = pricer(S0*1.01, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h2,
h3, mat_position)
prices_4_eqbump = pricer(S0*1.01, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h3,
h4, mat_position)

prices_1_divbump = pricer(S0, q0+0.0001, r, a, b, vols, volq, rho, M,
```

```

[1], h1, mat_position)
prices_2_divbump = pricer(S0, q0+0.0001, r, a, b, vols, volq, rho, M,
h1, h2, mat_position)
prices_3_divbump = pricer(S0, q0+0.0001, r, a, b, vols, volq, rho, M,
h2, h3, mat_position)
prices_4_divbump = pricer(S0, q0+0.0001, r, a, b, vols, volq, rho, M,
h3, h4, mat_position)

eq_delta_1 = [(shift-base)/0.01 for shift, base in zip(prices_1_eqbump,
prices_1)]
eq_delta_2 = [(shift-base)/0.01 for shift, base in zip(prices_2_eqbump,
prices_2)]
eq_delta_3 = [(shift-base)/0.01 for shift, base in zip(prices_3_eqbump,
prices_3)]
eq_delta_4 = [(shift-base)/0.01 for shift, base in zip(prices_4_eqbump,
prices_4)]

div_delta_1 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_1_divbump, prices_1)]
div_delta_2 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_2_divbump, prices_2)]
div_delta_3 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_3_divbump, prices_3)]
div_delta_4 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_4_divbump, prices_4)]

vols1 = [vols[0]+0.0001, vols[1], vols[2], vols[3]]
vols2 = [vols[0], vols[1]+0.0001, vols[2], vols[3]]
vols3 = [vols[0], vols[1], vols[2]+0.0001, vols[3]]
vols4 = [vols[0], vols[1], vols[2], vols[3]+0.0001]

prices_4_eqvol1 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols1, volq, rho, M, h3, h4,
mat_position)
prices_4_eqvol2 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols2, volq, rho, M, h3, h4,
mat_position)
prices_4_eqvol3 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols3, volq, rho, M, h3, h4,
mat_position)
prices_4_eqvol4 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols4, volq, rho, M, h3, h4,
mat_position)

eq_vega_1 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_4_eqvol1, prices_4)]
eq_vega_2 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_4_eqvol2, prices_4)]
eq_vega_3 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_4_eqvol3, prices_4)]
eq_vega_4 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_4_eqvol4, prices_4)]

volq1 = [volq[0]+0.0001, volq[1], volq[2], volq[3]]
volq2 = [volq[0], volq[1]+0.0001, volq[2], volq[3]]

```

```
volq3 = [volq[0], volq[1], volq[2]+0.0001, volq[3]]
volq4 = [volq[0], volq[1], volq[2], volq[3]+0.0001]

prices_4_divvol1 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq1, rho, M, h3, h4,
mat_position)
prices_4_divvol2 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq2, rho, M, h3, h4,
mat_position)
prices_4_divvol3 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq3, rho, M, h3, h4,
mat_position)
prices_4_divvol4 = pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq4, rho, M, h3, h4,
mat_position)

div_vega_1 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_4_divvol1, prices_4)]
div_vega_2 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_4_divvol2, prices_4)]
div_vega_3 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_4_divvol3, prices_4)]
div_vega_4 = [(shift-base)/0.0001 for shift, base in
zip(prices_4_divvol4, prices_4)]
```

Para calcular el VaR y el Expected Shortfall tanto con el Montecarlo como con la aproximación de Taylor, utilizamos el script var.py:

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Jul 15 20:09:44 2021

@author: pablo
"""

from montecarlo import *
from funciones import cal_yf_from_mat, days_yf, parametros_to_pasos
from math import exp
import numpy as np
import time

def pricer(S0, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h_previo, h_elegido,
mat_position, t0, T_futdiv, T_opt_sx5e):
    a_pasos = parametros_to_pasos(a, t0, T_futdiv)
    volq_pasos = parametros_to_pasos(volq, t0, T_futdiv)
    vols_pasos = parametros_to_pasos(vols, t0, T_opt_sx5e)

    # Número de pasos N en la simulación
    N = len(h_elegido)
    N_previo = len(h_previo)

    # Cálculos usando normrnd y correlacionando variables después
```

```
S, q = HybridStockDividendsMSamples(S0, q0, r, a_pasos, b,
vols_pasos, volq_pasos, rho, M, N, h_elegido, mat_position)

payoffs_divfut = PayoffDivFut(S[N_previo:N + 1], q[N_previo:N + 1],
h_elegido[N_previo:N])
payoffs_divopt = exp(-r * yf_futdiv[0]) *
PayoffOptCall(payoffs_divfut, K_div)
payoffs_eqopt = exp(-r * yf_futdiv[0]) * PayoffOptCall(S[N], S0)

return [np.mean(payoffs_divfut), np.mean(payoffs_divopt),
np.mean(payoffs_eqopt)]

T_opt_sx5e = ['2020-12-18',
             '2021-12-17',
             '2022-12-16',
             '2023-12-15']
T_futdiv = ['2020-12-18',
            '2021-12-17',
            '2022-12-16',
            '2023-12-15']
T_endyear = ['2020-01-01',
             '2021-01-01',
             '2022-01-01',
             '2023-01-01',
             '2024-01-01']

t0 = '2020-04-01'
days_futdiv = [np.busday_count(t0, fecha) for fecha in T_futdiv]
days_opt_sx5e = [np.busday_count(t0, fecha) for fecha in T_opt_sx5e]

# Year fractions maturities
yf_futdiv = cal_yf_from_mat(t0, T_futdiv, T_endyear)

# Steps for each maturity.
days_yf, h = days_yf(t0, T_futdiv, T_endyear)
mat_position = [len(hs) for hs in h]

h1 = h[0]
h2 = h[1]
h3 = h[2]
h4 = h[3]

div_fut_prices = [53.1, 49.8, 63.6, 67.4]
div_call_opt_prices = [5.60, 4.19, 11.02, 16.13] # Excel. Tomo el
strike 65, que es el más líquido.
eurostoxx_call_opt_prices = [239.0016, 292.9, 312.5604, 336.7692]

objetivos = [[div_fut_prices[i], div_call_opt_prices[i],
eurostoxx_call_opt_prices[i]] for i in range(4)]
```

```
# Datos del problema
S0 = 2680.3 # También es el strike de las call sobre el eurostoxx
q0 = 0.019967966
M = 2 ** 12
K_div = 65 # Strike dividend call options
rho = -0.189292925
r = -0.00168

# Parametros
b = 0.001 # Criterio experto
a = [0.024632889670984207, 0.03943332940236466, 0.051152059755964985,
0.0559917559120302]
vols = [0.2941956753706126, 0.2115385477314622, 0.2084001707439573,
0.21062649631184904]
volq = [0.17712546432086035, 0.1297972709969229, 0.1263240067709712,
0.1761761314040222]

ist_variation = [0, -
0.038250385733252, 0.00769447718775544, 0.0135488245102889, -
0.0418325853822978, 0.0170134350425337, 0.0313173315261627, 0.092362223098
4012, -0.0247047282715323, 0.038474703351154, 0.0286107082680168, -
0.0571744714483303, 0.0327011839028392, -
0.052455124090301, 0.0160260565842772, -0.124013959443274, -
0.00153263551453256, -0.0165761539943294, -0.0844659923825907, -
0.0390982227269754, -
0.0166580910728068, 0.014409973991465, 0.00992563263179014, 0.002805234435
30395, -0.0365836014722564, -0.0340332282372934, 0.00144716179940703, -
0.0206881616675529, -0.0401012530325915, -0.00591161868490024, -
0.0109179908827014, 0.00746505966313394, -
0.00434176686295017, 0.00320231608161485, -0.00149997140435797, -
0.00199510692891038, 0.0074728687033435, 0.00861018986707731, -
0.00139792391187023, -
0.00184731652967274, 0.00732693814454816, 0.0122070155508161, 0.0193949094
166779, 0.00559200859125881, -0.0135120489435838, -
0.0121990386365339, 0.00460849317867734, 0.0112511691645095, -
0.0268101906243715, 0.0113223704456962, -0.00873788725631933, -
0.00510144835740223, -0.0026085606062601, -
0.00242367905552668, 0.00904047014684149, 0.00137438444557646, -
0.00156826177255968, -0.00126994877873252, -0.00259663493001756, -
0.00167550080613721, 0.00618147888966648, 0.00354059985369421, 0.001793461
46056517, -0.00552556468090855, -0.00523826596787967, 0.0128406071852929, -
0.000885694696769538, -0.00893643235411543, 0.00208775457756091, -
0.000601060196046237, 2.64791238587257E-
05, 0.00999954535364797, 4.54667023268448E-05, -0.00167677717019828, -
0.00727852966279139, 0.0111683779720026, 0.00666963454611687, 0.0051254932
2702683, 0.00426768488308113, -0.00010892712230872, -
0.00545995222541811, 0.0121185374424705, -
0.00324861612778069, 0.0135779938465629, -0.00432078000143385, -
0.0207690936877292, -0.000242949077873302, -
0.00225433292484207, 0.00197001794605382, -
0.000574483234799026, 0.00552162546239536, 0.00208171407140886, -
```

0.00114553134195475, -0.00343021620100846, -0.00225645897887137, -
0.00180245230506439, 0.00618085507250311, -0.00288957967292879, -
0.00342115187759275, 0.004160332393787, -0.00076493722379142, -
0.00189657591159737, 0.00486344930789377, 0.00332379532819073, 0.003085771
34734434, 0.0114439777688245, 0.00536287492266416, -0.00438638893569303, -
0.00049695065556079, -
0.000992914452145636, 0.000278645287308181, 0.000914018727719053, 0.004014
53884094054, 0.00057423116826907, 0.00131663740805766, 0.00577469471225707
, -0.00256644615478932, -
0.00295339306800031, 0.000166729190112934, 0.0119198258844966, -
0.00382641627823589, 0.0217403748182578, 0.0091995921562284, 0.00854997145
154334, -
0.011085375831115, 0.00711693179872973, 0.00858554970635317, 0.00118946125
608279, -0.029827328927734, -
0.0143439465463866, 0.00664715105982146, 0.00387862453215869, 0.0054511347
7539322, -0.00538497473138828, -0.00139102112825374, -
0.00963770408720416, 0.00527493561144492, 0.00697554449496041, 0.001925447
14108011, 0.000798647131549518, -
0.00891803352572182, 0.00317898984418711, 0.0062670253240143, 0.0050957562
0393324, 0.00113590194047525, -4.86382714530749E-
05, 0.00301030217809287, 0.00981503000727358, 0.00879634231189747, -
0.00343768754333531, 0.00168672448610342, 0.00452316252019016, 0.013653733
0108338, -0.00151017513877877, 0.00645895295087244, 0.00437579665591967, -
0.0116846045997386, -0.00625057071068571, 0.013330428060163, -
0.0056274653551744, 0.012048373724873, 0.01410389974351, -
0.00180010338431588, -0.0203922362949636, 0.00920172551141563, -
0.00215673687810075, -
0.0123363887917806, 0.0197553466928904, 0.00556861887315213, -
0.00582011700640001, -0.0193091477791074, -
0.0326386879195882, 0.00668618486522356, 0.00115511789422008, -
0.0172353118135533, -0.000252520237085256, 0.00407959773798832, -
0.00643946899148009, 8.49167956935865E-
06, 0.0123068723638364, 0.00279870581406716, -0.000760875494928001, -
0.00535472558102342, -
0.00561714792012183, 0.00546510499054895, 0.00131231719764517, 0.000257383
326708122, -0.00136797733555712, -0.00234489636013962, -
0.00397586668785622, -0.00119615190562299, -
0.00456244797765334, 0.000994173353329769, 0.00930735066904603, 0.00297061
691050119, 0.00688029156315045, 0.00909545140280851, -
0.00016555570077977, -0.000409364874751858, -0.00324403788665836, -
0.00327379922236449, -
0.000334479020091767, 0.00387298462963502, 0.00052419856989361, 0.02059582
46753822, 0.00118963420227924, -0.00333579118124169, 0.00114272890749798, -
0.00425450589515151, 0.00432606416749106, 0.00238871885341486, 0.011972765
4781768, -
0.000461084746777636, 0.00193790891828085, 0.0100811461054111, 0.006032745
70711765, -0.0113677802389887, 0.00616772949320917, -0.0152439934783778, -
0.00451243148119518, 0.00398125764765576, 0.00706299591247896, -
0.0175745263854112, 6.20107426228128E-05, 0.00496471579747046, -
0.0163064420079167, -
0.00375738681308457, 0.0155887269698562, 0.00636075591936704, 0.0131294454

```
917218, -0.0119813748679728, 0.00308591313482818, -  
0.0194746668383442, 0.00473367909771971, -0.017843168396887, -  
0.0112862885726686, 0.0038837121982958, -  
0.00730946731083305, 0, 0.00362085015734131, 0.000437091654977617, 0.002431  
32717817126, -0.00305770235508747, -  
0.000348188421307933, 0.00132029046390203, 0.00618219355729168, 0.00414914  
995842185, 0.00373863195052257, 0.000762798629862873, 0.00363573911170358,  
0.00312148686727112, 0.00217428201871705, -0.00606155797164684]  
index_sim = [S0*(1+change) for change in hist_variation]  
  
tiempo0 = time.time()  
  
V_divfut = []  
V_divcall = []  
V_eurostoxxcall = []  
  
for S in index_sim:  
    auxi = pricer(S, q0, r, a, b, vols, volq, rho, M, h3, h4,  
mat_position, t0, T_futdiv, T_opt_sx5e)  
    V_divfut.append(auxi[0] - div_fut_prices[3])  
    V_divcall.append(auxi[1] - div_call_opt_prices[3])  
    V_eurostoxxcall.append(auxi[2] - eurostoxx_call_opt_prices[3])  
  
var_divfut = np.percentile(V_divfut, 5)  
var_divcall = np.percentile(V_divcall, 5)  
var_eurostoxxcall = np.percentile(V_eurostoxxcall, 5)  
  
ES_divfut = np.average([valor for valor in V_divfut if  
valor<=var_divfut])  
ES_divcall = np.average([valor for valor in V_divcall if  
valor<=var_divcall])  
ES_eurostoxxcall = np.average([valor for valor in V_eurostoxxcall if  
valor<=var_eurostoxxcall])  
  
tiempo1 = time.time()  
print("Tiempo VaR:", tiempo1 - tiempo0)  
  
delta_equity = [67.39999999864352, 43.80173654962185, 336.769200000964]  
# Obtenida del otro archivo  
V_divfut_taylor = [delta_equity[0]*variacion for variacion in  
hist_variation]  
V_divcall_taylor = [delta_equity[1]*variacion for variacion in  
hist_variation]  
V_eurostoxxcall_taylor = [delta_equity[2]*variacion for variacion in  
hist_variation]  
  
var_divfut_taylor = np.percentile(V_divfut_taylor, 5)  
var_divcall_taylor = np.percentile(V_divcall_taylor, 5)  
var_eurostoxxcall_taylor = np.percentile(V_eurostoxxcall_taylor, 5)  
  
ES_divfut_taylor = np.average([valor for valor in V_divfut_taylor if
```

```
valor<=var_divfut_taylor])
ES_divcall_taylor = np.average([valor for valor in V_divcall_taylor if
valor<=var_divcall_taylor])
ES_eurostoxxcall_taylor = np.average([valor for valor in
V_eurostoxxcall_taylor if valor<=var_eurostoxxcall_taylor])

tiempo2 = time.time()
print("Tiempo VaR:", tiempo2 - tiempo1)
```

Anexo B. Artículo

Valoración de derivados financieros con un modelo de dividendos estocásticos

Pablo Macías Pineda

Universidad Internacional de la Rioja
Logroño (España)

Fecha 22/07/2021



RESUMEN

En este trabajo se modelizarán el índice EURO STOXX 50 y el pago de sus dividendos con ecuaciones diferenciales estocásticas. Para ello, primero se realiza una introducción teórica al cálculo estocástico y la valoración de derivados financieros. Partiendo de conceptos básicos de teoría de la medida, se construyen los conceptos de proceso estocástico, movimiento Browniano e integral de Itô. Una vez presentados, se introduce la fórmula de valoración de riesgo neutro. El índice EURO STOXX 50 y el pago de sus dividendos son modelizados con una evolución lognormal y con una evolución de Cox-Ingersoll-Ross respectivamente. Se utilizará el precio de opciones call sobre el EURO STOXX 50, el precio de opciones call sobre los dividendos y futuros sobre los dividendos para calibrar todos los parámetros libres del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas planteado: la volatilidad del índice, la volatilidad de los dividendos, el valor medio de los dividendos y la velocidad de reversión a la media de los dividendos. Para realizar esta calibración, se valorarán los productos a través de un método Montecarlo programado en Python y se utilizará el método híbrido de Powell como algoritmo de búsqueda de raíces para encontrar los parámetros del modelo. Una vez calibrado el modelo, se analizarán dos posibles usos de este modelo en la industria financiera: el cálculo del VaR y el cálculo de las sensibilidades.

Palabras clave: Cox-Ingersoll-Ross, Dividendos, Derivados financieros, Montecarlo

1 – Introducción

En la actualidad, los derivados financieros son herramientas básicas en la industria de las finanzas. Son usados por todo tipo de compañías: bancos, bancos centrales, energéticas, farmacéuticas, compañías de seguros, gobiernos, fondos de inversiones...

Para poder apreciar la relevancia de estos instrumentos, la Figura 1 muestra el número de contratos negociados (en millones) en los principales mercados de intercambio de derivados durante 2019.

Comenzamos este trabajo definiendo el concepto de derivado financiero: “Un derivado puede ser definido como un instrumento financiero cuyo valor depende del valor de otras variables subyacentes más básicas” (Hull, 2014, p.1). A lo largo de este trabajo, aprenderemos a utilizar diferentes modelos que se usan en la actualidad para calcular el valor de derivados

financieros y propondremos uno que tenga en cuenta el riesgo que surge debido a los dividendos.



Figura 1. Número de contratos negociados. (Fernández, 2020)

La valoración de estos instrumentos es fundamental

para la gestión de riesgos, debido a que diferentes reguladores de instituciones financieras como el ECB¹ o asociaciones de participantes en los mercados financieros como ICMA² o IFRS³, exigen a las entidades que manejan este tipo de instrumentos el cálculo de diferentes medidas del riesgo al que se exponen, como el VaR⁴ o las griegas. Actualmente, se ha publicado una normativa que está pendiente de ser implantada en todas las instituciones (Basel Committee on Banking Supervision, 2019). El cálculo de estas medidas es fundamental para las instituciones y debe realizarse con la mayor precisión posible, ya que el capital que deben reservar para hacer frente a posibles pérdidas depende de ellas.

Durante este trabajo, nos centraremos en modelizar derivados de acciones. Concretamente, el índice que elegiremos es el EURO STOXX 50, ya que es uno de los principales índices de Europa y existen muchos tipos diferentes de derivados sobre él. De los diferentes mercados organizados que se indican en la Figura 1, el EURO STOXX 50 es negociado en Eurex. Los derivados más básicos son: forwards, futuros y opciones.

Un forward es un contrato en el que dos partes acuerdan la venta de un subyacente en un determinado momento futuro a un precio fijado. Si llamamos T al momento en el que se realizará la venta, S_T al precio del subyacente en el instante T y K al precio de venta que se ha fijado, entonces el valor V_T^{fwd} del contrato forward en el momento en el que se realiza la venta final será

$$V_T^{fwd} = S_T - K.$$

Los futuros son derivados financieros muy parecidos a los forwards. Se trata también de un contrato en el que dos partes acuerdan la venta de un subyacente en un determinado momento futuro a un precio fijado, por lo que la fórmula para valorar el producto en la fecha final es la misma.

La principal diferencia de este tipo de contratos es que se acuerda ir realizando pagos cada día. El primer día t_1 se paga la diferencia $P_{t_1}^{fut} = S_{t_1} - K$, y el resto de día se va pagando la diferencia con el día anterior $P_{t_i}^{fut} = S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ (con $i = 2, \dots, N$ y $t_N = T$). De esta manera, se elimina el riesgo de que al final del contrato, el precio a pagar sea muy elevado y se cometa un impago.

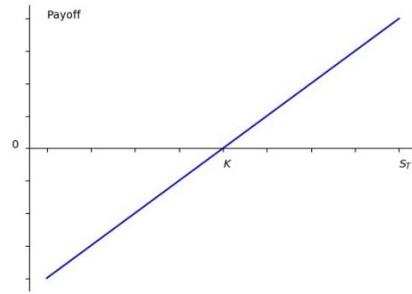


Figura 2. Payoff contrato forward. Elaboración propia.

Si sumamos todos los pagos que se han ido haciendo durante la vida del futuro, vemos que el valor del contrato es equivalente al del forward

$$\begin{aligned} V_T^{fut} &= \sum_{i=1}^N P_{t_i}^{fut} = (S_{t_1} - K) + (S_{t_1} - S_{t_2}) + \dots \\ &\quad + (S_{t_N} - S_{t_{N-1}}) = S_{t_N} - K \\ &= S_T - K. \end{aligned}$$

Las opciones son contratos en los que una parte le da la opción a la otra de comprar (o vender) un determinado subyacente a un precio fijado en una fecha futura. Las opciones en las que se otorga el derecho (pero no la obligación) de comprar se llaman "opciones call", mientras que en las opciones en las que se otorga el derecho a vender se llaman "opciones put".

El valor de una opción call V_T^{call} en el instante T de finalización del contrato será

$$V_T^{call} = \max(S_T - K, 0).$$

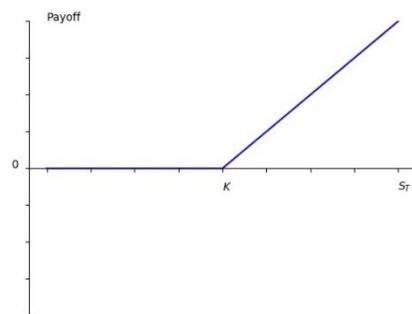


Figura 3. Payoff opción call. Elaboración propia.

¹ ECB: European Central Bank

² ICMA: International Capital Market Association

³ IFRS: International Financial Reporting Standards

⁴ VaR: Value at Risk

2 – Estado del arte

La valoración de derivados financieros con modelos en los que los dividendos son estocásticos no es común, ya que hoy en día, no existen demasiados derivados sobre los dividendos que permitan calibrar los parámetros.

Cuando el ratio de dividendos no se considera estocástico, sino que se toma como un parámetro determinista más o cuando el pago de dividendos discretos se considera conocido, las fórmulas de valoración de opciones, futuros y forwards son conocidas. Estas fórmulas de valoración y su deducción se pueden encontrar en (Hull, 2014) y (Shreve, 2004).

Sin embargo, al pasar a un modelo estocástico, estas fórmulas pueden complicarse demasiado, llegando incluso a no ser posibles obtener de manera cerrada.

En (Lioui, 2006), se presenta una fórmula de valoración obtenida con una evolución lognormal para el índice de equity y una evolución para el ratio de dividendos y para otra variable que no analizaremos en este trabajo (el precio de mercado del riesgo) dadas por procesos de Ornstein-Uhlenbeck generalizados.

En (Phewchean & Wu, 2019), se realiza un estudio muy similar al anterior, en el que se utiliza otro modelo más complejo para el precio de mercado del riesgo.

En (Vatiwutipong & Phewchean, 2019) se presenta un estudio de un modelo de dividendos estocásticos que también utiliza un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. En este caso, el estudio consiste en ajustar los parámetros a datos históricos del índice en cuestión. Se trata de un tipo de estudio diferente al que realizaremos en este trabajo, donde lo que pretendemos es calibrar los parámetros con los datos de un instante presente para obtener como va a evolucionar el subyacente.

Estas tres referencias tienen en común el modelo que utilizan para los dividendos estocásticos. Al usar ese modelo en concreto, se pueden obtener fórmulas cerradas, pero este presenta una característica que podría ser de controversia. El ratio de dividendos podría tomar valores negativos.

En este trabajo, utilizaremos el modelo de Cox-Ingersoll-Ross, que por la forma de construirlo, hace que esto no pueda ocurrir. Aunque para ello, tenemos que pagar un precio por haber complicado el modelo: No se pueden obtener fórmulas cerradas para valorar los productos. Por tanto, tendremos que ver métodos alternativos para hallar los precios de los productos que utilizaremos para calibrar.

3 – Aplicaciones del estudio

La valoración de derivados financieros con el modelo propuesto se puede utilizar en los siguientes ámbitos:

Valoración de derivados:

Además de valorar los productos con los que hemos calibrado el modelo, se pueden valorar productos mucho más complejos, productos para los que incluso no haya precio en ningún mercado organizado y se negocien internamente entre entidades financieras. Algunos ejemplos de estos payoffs son:

- Opciones asiáticas: En este tipo de opciones, en lugar de mirar el valor del subyacente en la fecha de vencimiento, se hace una media del valor que toma en unas fechas específicas t_k , de modo que el payoff es

$$V_T = \max\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_{t_k} - K, 0\right).$$
- Opciones con barrera: En este tipo de opciones, el payoff es igual que el de las opciones call o put que ya hemos visto, pero condicionado a que el subyacente pase (o que no pase también) de un determinado valor durante la vida del contrato. En caso de que no se cumpla esta condición, el producto no tendría valor.
- Opciones americanas: En este tipo de opciones, el payoff también es igual al de las opciones call o put, pero se otorga el derecho al comprador de ejecutar el contrato en cualquier momento, en lugar de ser únicamente en la fecha de vencimiento.

Griegas:

Como ya comentamos en la introducción, se llama griegas a las derivadas del precio de un instrumento financiero con respecto a las variables de las que depende. Las griegas miden el riesgo de dicho instrumento, ya que mientras mayor sea el valor de una griega, más puede variar su precio en función de lo que cambie la variable.

Esto hace que las griegas sean una métrica importante para las entidades financieras en la gestión de riesgos. Tan importante es, que la regulación FRTB, que entrará en vigor en 2022, exige a las entidades calcular las griegas de todos los productos financieros de sus libros de trading y reservar un determinado capital que depende de ellas para hacer posible a posibles pérdidas.

Algunos ejemplos de las instrucciones para calcular las griegas expuestas en (Basel Committee on Banking Supervision, 2019) son:

- “(21.21) Delta equity spot: the sensitivity is measured by changing the equity spot price by 1 percentage point (ie 0.01 in relative terms) and dividing the resulting change in the market value of the instrument (V_i) by 0.01 (ie 1%) as follows, where:
 - k is a given equity;
 - EQ_k is the market value of equity k ; and
 - V_i is the market value of instrument i as a function of the price of equity k .
$$s_k = \frac{V_i(1.01 EQ_k) - V_i(EQ_k)}{0.01}$$
- (21.25) (1) Vega, $\frac{\partial V_i}{\partial \sigma_i}$ is defined as the change in the market value of the option V_i as a result of a small amount of change to the implied volatility σ_i .”

Cálculo del VaR:

El VaR para un determinado instrumento financiero se define como el percentil 5% de la distribución resultante de valorar dicho instrumento variando únicamente el precio del subyacente, que tomará 252 valores calculados como el precio en el día del cálculo multiplicado por uno más la variación porcentual diaria que ha tenido durante el año anterior.

Esta definición nos permite afirmar que estamos seguros al 95% de que, si el precio del subyacente variara como en el año anterior, nuestro instrumento no perdería un valor superior al VaR calculado.

En la actualidad, el VaR debe ser calculado obligatoriamente por todas las entidades financieras, y es la métrica de referencia que se usa para calcular el capital que se debe reservar para riesgo hasta que entre en vigor la normativa FRTB mencionada anteriormente.

En la nueva normativa, se propone pasar de la métrica VaR a ES⁵, que se calcula de forma parecida. La única diferencia es que en lugar de tomar el percentil 5%, se debe hacer una media de todo lo que está por debajo, de modo que se trata con más cuidado la cola de la distribución.

Regulación PRIIPs:

Esta regulación pretende proteger a los clientes minoristas que pueden desconocer los instrumentos financieros que compran. La regulación obliga a entregar una hoja de información del producto que se vende, llamada KID⁶, en la que se deben explicar los riesgos del producto, se debe indicar con un número del 1 al 7 el nivel de riesgo del producto y se deben simular los resultados de producto en diferentes escenarios, tanto favorables como desfavorables.

Tanto para calcular el nivel de riesgo del producto, como para simular los escenarios, se debe valorar el producto con una simulación Montecarlo similar a la propuesta en este trabajo. Los detalles de esta simulación se pueden encontrar en (European Supervisory Authorities, 2016).

4 - Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es aprender las técnicas y teoría matemática usadas en la actualidad para valorar derivados financieros. Aprenderemos estas técnicas modelizando un índice bursátil y sus dividendos con un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas.

Para alcanzar el objetivo general, pasaremos por los siguientes puntos:

- Plantear las ecuaciones que describen la evolución de las dos variables modelizadas.
- Discretizar el sistema de ecuaciones apropiadamente para poder aplicar el método Montecarlo.
- Desarrollos en Python:
 - El código de un método Montecarlo que simule las variables.
 - La valoración de futuros y opciones con el método Montecarlo.
 - El código de un algoritmo de optimización que calibre los parámetros del modelo para obtener los precios de mercado con el método Montecarlo.
 - El cálculo de las griegas usando el modelo calibrado.
 - El cálculo del VaR y el Expected Shortfall.

⁵ Expected Shortfall

⁶ KID: Key information document.

5 – Descripción de la contribución

El modelo propuesto es

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r - q_t)dt + \sigma^S dW_t^1 \\ dq_t = a(b - q_t)dt + \sigma^q \sqrt{q_t} dW_t^2 \\ dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \end{cases}$$

donde:

- S_t es el valor del índice EUROSTOXX 50 en el instante t .
- r es el tipo de interés libre de riesgo.
- q_t es el ratio de dividendos pagados por el índice en el instante t .
- W_t^1 y W_t^2 son dos movimientos Brownianos.
- σ^S es la volatilidad del índice.
- σ^q es la volatilidad del ratio de dividendos.
- a es la velocidad de reversión a la media del ratio de dividendos.
- b es el valor medio de los dividendos.
- ρ es la correlación entre los movimientos Brownianos.

El modelo de evolución para el ratio de dividendos es conocido como Cox-Ingersoll-Ross. Es común en la industria financiera utilizar este modelo para los tipos de interés, en lugar de para el ratio de dividendos. El estudio de este TFM consiste en ver si podemos calibrar este modelo para replicar los precios que se cotizan en el mercado de una serie de derivados financieros, y así poder medir riesgos asociados a los dividendos que no se podían estudiar sin usar algún modelo para la evolución de estos.

La elección del modelo de Cox-Ingersoll-Ross para el ratio de dividendos en este trabajo se debe a que es el modelo más sencillo que por construcción, asegura que el valor del subyacente modelado siempre será positivo en unas determinadas condiciones que serán comprobadas.

Si nos fijamos en la notación utilizada para los parámetros del modelo σ^S , σ^q y b , no se incluye dependencia temporal. Esta notación ha sido elegida por simplicidad, pero a la hora de realizar la calibración, asumiremos que los parámetros tienen una dependencia temporal, de manera que serán constantes en varios intervalos, determinados por el vencimiento de los productos que usaremos en la calibración. Estos intervalos tendrán una longitud de un año cada uno.

Para calibrar el modelo, utilizaremos tres tipos de derivados financieros: Opciones sobre el EURO STOXX 50, futuros sobre el índice de dividendos del EURO

STOXX 50 y opciones sobre el índice de dividendos del EURO STOXX 50.

Todos los precios utilizados en este trabajo se han obtenido de la web del mercado europeo de productos financieros Eurex (Eurex, 2020) a fecha 01/04/2020.

Las fórmulas de valoración de los tres productos son: $V_{T_i,t}^S = \mathbb{E}[e^{-r(T_i-t)} \max(S_{T_i} - K, 0) | \mathcal{F}(t)]$ para las opciones call sobre el EURO STOXX 50, $V_{T_i,t}^F = \mathbb{E}[\sum_{i=0}^n S_{t_i} \cdot q_{t_i} \cdot \Delta t | \mathcal{F}(t)]$ para los futuros sobre los dividendos y $V_{T_i,t}^D = \mathbb{E}[e^{-r(T_i-t)} \max(D_{T_i} - K, 0) | \mathcal{F}(t)]$ para las opciones sobre los dividendos, donde $D_t = \sum_{i=0}^n S_{t_i} \cdot q_{t_i} \cdot \Delta t$, t_0 es el día de comienzo del año en el que se calcula el índice y t_n coincide con el instante t en el que se está calculando el índice D_t .

Para obtener estos precios, utilizamos un método Montecarlo, es decir, vamos a simular N veces el valor que hay dentro de las esperanzas y por el teorema central del límite (Wackerly, Dennis et al., 2014), el estadístico media se distribuye como una normal $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{N})$, donde μ coincide con la esperanza que queremos calcular.

Para simular las variables aleatorias de nuestro modelo utilizamos el siguiente esquema de discretización, que ha sido obtenido aplicando la fórmula de Itô (Shreve, 2004) a la primera ecuación y después el método de Euler-Maruyama (E. Kloeden, Peter & Platen, Eckhard, 1992) a ambas

$$\begin{cases} \ln S_{i+1} = \ln S_i + \left(r - q_i - \frac{1}{2}(\sigma^S)^2\right) \Delta t + \sigma^S \Delta W_i^1 \\ q_{i+1} = q_i + a(b - q_i) \Delta t + \sigma^q \sqrt{q_i} \Delta W_i^2 \end{cases}$$

6 – Resultados

Para calibrar el modelo, vamos ajustando los parámetros b , σ^S y σ^q haciendo "bootstrapping".

Empezamos con los precios de los tres productos para el primer vencimiento y buscamos los parámetros que durante el este primer periodo de tiempo nos dan los precios de mercado.

Una vez obtenidos estos parámetros para el primer periodo de tiempo, calculamos los precios de los tres productos para el segundo vencimiento. Durante este segundo vencimiento, tendremos los parámetros que calibramos en el primer tramo, y serán incógnita los parámetros entre el segundo tramo. Se calibran estos parámetros incógnita y se repite este proceso con todos los vencimientos para los que disponemos de datos.

La Tabla xxx muestra el resultado de la calibración de los parámetros con el código de Python.

Intervalo	b	σ^S	σ^q
$t_0 \leq t < T_1$	0.024737	0.298577	0.178015
$T_1 \leq t < T_2$	0.039417	0.209427	0.129734
$T_2 \leq t < T_3$	0.051132	0.196489	0.127034
$T_3 \leq t \leq T_4$	0.055940	0.205345	0.181146

Tabla 1. Parámetros calibrados. Elaboración propia.

Una vez calibrados los parámetros, podemos volver a valorar los derivados y obtener sus sensibilidades. Las Tabla 2, Tabla 3, Tabla 4 y Tabla 5 muestran las sensibilidades delta de equity, delta de dividendos, vega de equity y vega de dividendos respectivamente.

Vencimiento	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
T_1	53.100000	23.479155	239.001600
T_2	49.800000	17.978683	292.900000
T_3	63.600000	37.022108	312.560400
T_3	67.400000	43.801737	336.769200

Tabla 2. Delta de equity. Elaboración propia.

Vencimiento	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
T_1	1,838.938107	679.394951	-919.425731
T_2	-25.536570	-9.925978	-910.892172
T_3	-45.011097	-25.462989	-881.371679
T_4	-47.795849	-30.665145	-859.113682

Tabla 3. Delta de dividendos. Elaboración propia.

Además de las sensibilidades, también podemos calcular el VaR y el ES. La Tabla 6 muestra estos valores calculados mediante la reevaluación de los derivados financieros mediante el método Montecarlo 252 veces y la Tabla 7 muestra estos dos valores también, pero calculados a través de la sensibilidad delta de equity, por aproximación de Taylor.

La aproximación de Taylor consiste en aproximar la variación del precio $\Delta V_{t,k}$ (con t el día de valoración y k el día con respecto al que queremos calcularla) como

$$\Delta V_{t,k} \approx \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \Delta S_k,$$

donde ΔS_k es la variación porcentual del subyacente con respecto al día anterior, es decir,

$$\Delta S_k = \frac{S_k}{S_{k-1}} - 1.$$

t	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
t_0	-0.448997	8.780789	461.384801
T_1	0.408203	10.000642	467.921482
T_2	-1.185040	7.987847	427.770744
T_3	-4.616025	-0.332051	499.439645

Tabla 4. Vega de equity. Elaboración propia.

t	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
t_0	0.128060	0.152205	6.607915
T_1	0.145831	0.174670	6.785728
T_2	0.085180	0.152576	8.545754
T_3	-6.595893	34.856358	10.739574

Tabla 5. Vega de dividendos. Elaboración propia.

Métrica	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
VaR	-1.721862	-1.099131	-8.603416
ES	-3.304078	-2.071192	-16.509075

Tabla 6. VaR y ES mediante revaloración Montecarlo. Elaboración propia.

Métrica	Futuro dividendos	Call sobre dividendos	Call sobre EUROSTOXX
VaR	-1.721862	-1.118999	-8.603413
ES	-3.304078	-2.147245	-16.509075

Tabla 7. VaR y ES mediante sensibilidades. Elaboración propia.

7 - Conclusiones

El modelo es utilizable, ya que hemos sido capaces de calibrarlo correctamente. Devuelve los precios

iniciales a partir de los parámetros que hemos ajustado.

Además, cumple con el requisito que nos motivó a utilizar la dinámica de Cox-Ingersoll-Ross: el ratio de dividendos siempre se mantiene positivo.

El modelo se puede utilizar también para la gestión de riesgos. Como hemos visto, somos capaces de calcular la sensibilidad de los productos que se negocian en el mercado a diferentes parámetros, tanto a datos de mercado (como el precio del EUROSTOXX 50 y el ratio de dividendos, como a parámetros del modelo (como las volatilidades de ambas variables).

A parte, el uso del modelo nos permite calcular métricas de riesgos que exigen diferentes reguladores europeos a las entidades financieras, como son el Value at Risk y el Expected Shortfall. Estas métricas se pueden calcular de forma sencilla a partir de las griegas, pero teniendo siempre cuidado de que las griegas hayan sido calculadas de manera adecuada.

Como línea de trabajo futuro, el modelo calibrado podría utilizarse para valorar productos más complejos. Si tuviéramos acceso a precios de mercado de este tipo de productos, podríamos analizar si se obtienen buenos resultados. En caso de que no fuera bien, podríamos calibrar la velocidad de reversión a la media que fijamos por falta de restricciones en el problema de optimización.

Otra línea de trabajo podría ser la de añadir más variables aleatorias al modelo. Concretamente, es típico en la industria modelar el tipo de interés con un proceso estocástico análogamente a lo que se ha realizado en este trabajo para el ratio de dividendos. Para ello podrían utilizarse productos que no dependan del EUROSTOXX, para que sea más sencilla la calibración.

También se podría intentar hacer más compleja la volatilidad. En la práctica, cuando solo se modela estocásticamente un subyacente de equity, es sencillo aplicar un modelo de volatilidad local. Este tipo de modelos asumen que la variable σ^S (que nosotros hemos puesto dependiente del tiempo únicamente) depende también del valor de S_t , y no es constante a trozos como en este trabajo. El modelo de volatilidad local se puede encontrar en (Bergomi, Lorenzo, 2015) y se basa en obtener la superficie de volatilidad $\sigma(S_t, t)$ a partir de la superficie de precios de opciones call o put para diferentes vencimientos y strikes. Para ello, se utiliza la conocida fórmula de Dupire.

Bibliografía

- Basel Committee on Banking Supervision. (2019). *Minimum capital requirements for market risk*.
<https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf>
- Bergomi, Lorenzo. (2015). *Stochastic volatility modeling*. CRC press.
- E. Kloeden, Peter & Platen, Eckhard. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer.
- Eurex. (2020, mayo 8). <https://www.eurex.com/ex-en/>
- European Supervisory Authorities. (2016). *Final draft regulatory technical standards* (p. 183).
- Fernández, R. (2020, diciembre 11). *Mercados intercambio de derivados: Ranking según contratos 2019*. Statista.
<https://es.statista.com/estadisticas/600804/ranking-de-los-principales-intercambios-de-derivados-en-el-mundo--por-volumen/>
- Hull, J. C. (2014). *Options, Futures, and Other Derivatives* (9a ed.). Pearson.
- Lioui, A. (2006). Black-Scholes-Merton revisited under stochastic dividend yields. *Journal of Futures Markets*, 26, 703-732.
<https://doi.org/10.1002/fut.20208>
- Phewchean, N., & Wu, Y. (2019). European option pricing model with generalized Ornstein-Uhlenbeck process under stochastic earning yield and stochastic dividend yield. *Advances in Difference Equations*, 2019.
<https://doi.org/10.1186/s13662-019-2210-5>
- Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer-Verlag.
<https://www.springer.com/gp/book/9780387401010>
- Vatiwutipong, P., & Phewchean, N. (2019). A study of dividend yield model under stochastic earning yield environment in stock exchange of Thailand. *Advances in Difference Equations*, 2019.
<https://doi.org/10.1186/s13662-019-2231-0>
- Wackerly, Dennis, Mendenhall, William, & Scheaffer, Richard. (2014). *Mathematical Statistics with Applications* (7.^a ed.). Cengage Learning.