

Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación

Máster en Didáctica de las Matemáticas
en Educación Secundaria y Bachillerato

La Zaragoza mudéjar escenario didáctico
para el Aprendizaje Basado en Proyectos
en la geometría de 3º Educación
Secundaria Obligatoria

Trabajo Fin de Máster presentado por:	Víctor Sancho Blanco
Tipo de trabajo:	Propuesta de intervención didáctica
Directora:	Esther Rodríguez Díez
Fecha:	Julio 2021

Resumen

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y de la geometría en particular se ha centrado en el uso de metodologías basadas en la memorización y en la presentación de contenidos como un producto acabado y descontextualizado. Los resultados en esta materia obtenidos en pruebas internacionales evidencian el bajo nivel de rendimiento. Poniendo de manifiesto la necesidad de diseñar e implementar nuevas estrategias de intervención que permitan mejorar tanto la predisposición como la motivación hacia estos contenidos. Por todo ello, la finalidad de este trabajo es la diseñar una propuesta didáctica para el curso de 3º Educación Secundaria Obligatoria (ESO) mediante el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) como metodología. Contextualizada en el escenario de la Zaragoza mudéjar y en sus elementos artísticos y arquitectónicos para favorecer a los estudiantes un aprendizaje significativo, motivador, activo y autónomo. El análisis bibliográfico enmarca el espacio teórico y ayuda a establecer el fundamento de la enseñanza de la geometría, las dificultades encontradas por los estudiantes y el ABP. La temporalización, las sesiones y los recursos que conforman el proyecto se han diseñado con base en experiencias reales del entorno cercano al alumnado. La implementación del ABP en el aula ha tenido en cuenta la transversalidad del conocimiento, implicando a diversas asignaturas. De tal manera que este proceso sea eficaz ofreciendo un contexto a los contenidos curriculares y facilite la adquisición de estos.

Palabras clave:

Aprendizaje Basado en Proyectos, arte mudéjar, Educación Secundaria, geometría, movimientos en el plano.

Abstract

The teaching-learning process involved in mathematics in general and geometry in particular, has focused on the use of teaching methodologies based on memorization and exposition as a completed and decontextualized result. The outcome of this particular subject obtained from international tests reflects a low academic performance, revealing the need of designing and implementing new proactive strategies that enables the improvement of good disposition and motivation towards these topics. Therefore, the aim of this dissertation is tailoring a didactic proposal for Third year of *ESO* grade via Project Based Learning (PBL) as a strategic method with the Mudejar artwork and architecture in Saragossa as a context provider. All of that together will foster a meaningful, motivational, active and self-directed learning. The bibliographic analysis frames the theoretical basis and helps to lay the foundations of teaching geometry, learning projects and the challenges that the students might face. The scheduling, classes and resources that shape this project have been designed on a real-experienced basis close to the student's environment. The implementation of Project Based Learning in the classroom has taken into account the mainstreaming nature of knowledge, involving diverse subjects which results in an efficient process that provides context to the curriculum.

Keywords:

Geometry, Mudejar artwork, Project Based Learning (PBL), Secondary Education, transformations on the plane.

Índice de contenidos

1.	Introducción	1
1.1.	Justificación	2
1.2.	Planteamiento del problema	6
1.3.	Objetivos del TFM.....	7
1.3.1.	Objetivo general	7
1.3.2.	Objetivos específicos	8
2.	Marco teórico	9
2.1.	Enseñanza-aprendizaje de la geometría	9
2.1.1.	Modelos de aprendizaje	12
2.1.2.	Consideraciones metodológicas	19
2.2.	Aprendizaje Basado en Proyectos en la geometría	23
2.2.1.	La enseñanza directa y el ABP	24
2.2.2.	La enseñanza de la geometría a través del ABP	27
2.3.	Geometría, arquitectura y arte mudéjar	28
2.3.1.	La geometría y el arte.....	29
2.3.2.	Zaragoza y arte mudéjar.....	30
3.	Propuesta didáctica	31
3.1.	Presentación	31
3.2.	Marco legislativo y contexto.....	31
3.2.1.	Marco legislativo estatal	31
3.2.2.	Marco legislativo autonómico	32
3.2.3.	Contexto	32
3.3.	Objetivos.....	33
3.4.	Contenidos.....	34

3.4.1.	Contenidos para 3º ESO.....	34
3.4.2.	Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables	35
3.5.	Competencias clave	36
3.6.	Temporalización	37
3.7.	Recursos	38
3.8.	Metodología	39
3.9.	Actividades	40
3.9.1.	Primera sesión.....	41
3.9.2.	Cuarta sesión	42
3.9.3.	Quinta sesión.....	43
3.9.4.	Sexta sesión	44
3.9.5.	Séptima sesión	46
3.9.6.	Octava sesión	47
3.9.7.	Novena sesión	48
3.9.8.	Décima sesión.....	50
3.9.9.	Undécima sesión	51
3.9.10.	Duodécima sesión	52
3.10.	Evaluación.....	53
3.10.1.	Evaluación del alumnado	53
3.10.2.	Evaluación de la propuesta	55
3.11.	Autoevaluación.....	57
4.	Conclusiones.....	58
5.	Limitaciones y prospectiva	60
6.	Referencias bibliográficas.....	61
7.	Anexos	67

Índice de figuras

Figura 1 Evolución de las puntuaciones medias en matemáticas de Aragón, España y OCDE..	3
Figura 2 Cono de aprendizaje de Edgar Dale.....	25
Figura 3 Esquema de los ocho elementos esenciales del ABP	27
Figura 4 Celosías en yeso en Zaragoza	30
Figura 5 Método de secuenciación didáctica para el ABP.....	40
Figura 6 Recorrido de la visita mudéjar y sus monumentos emblemáticos.....	42
Figura 7 Tramas simétricas en el mudéjar aragonés.....	45
Figura 8 Cenefa mudéjar ornamental en La Seo	46
Figura 9 Cenefa de la base de la torre de San Pablo	48
Figura 10 Estrella típica del mudéjar y dibujo para la actividad.....	49
Figura 11 Ábside de la iglesia de la Magdalena y su transformación.....	50
Figura 12 Descripción de los seis niveles de rendimiento de matemáticas, informe PISA	67
Figura 13 El desarrollo en 10 pasos de la metodología ABP	69
Figura 14 Competencias clave definidas en la LOMCE.....	77
Figura 15 Competencias clave definidas en la LOMCE.....	78
Figura 16 Competencias clave definidas en la LOMCE.....	79
Figura 17 Distribución de estudiantes para formación de grupos heterogéneos	80
Figura 18 Cuaderno del alumno 3ª parada en el paseo matemático.....	83
Figura 19 Ritmos lineales aparecidos en el paseo matemático	85
Figura 20 Ficha de trabajo GeoGebra.....	86
Figura 21 Mapa conceptual resumen de movimientos en el plano	87

Índice de tablas

Tabla 1 Estudiantes por niveles de rendimiento en matemáticas.	4
Tabla 2 Características de los niveles de razonamiento matemático del modelo Van Hiele. .	17
Tabla 3 Clasificación de los errores en geometría.....	22
Tabla 4 Criterios, competencias y estándares del bloque 3 de Geometría.....	35
Tabla 5 Temporalización del proyecto.	37
Tabla 6 Rúbrica de coevaluación de la presentación producto final.....	54
Tabla 7 Matriz de análisis DAFO para la propuesta didáctica.	56
Tabla 8 Criterios, competencias y estándares del bloque 1 Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.....	70
Tabla 9 Relación de objetivos, contenidos, competencias, criterios y estándares.	73
Tabla 10 Cargos y funciones de equipo.....	82
Tabla 11 Instrumento de autoevaluación del proyecto.	88
Tabla 12 Rúbrica de coevaluación de actividades.	89
Tabla 13 Ponderación de instrumentos de evaluación.	89
Tabla 14 Rúbrica de evaluación docente del producto final.	91

1. INTRODUCCIÓN

El director del informe PISA, por sus siglas en inglés *Programme for International Student Assessment*, el alemán Andreas Schleicher, en su libro *Primera clase: Cómo construir una escuela de calidad para el siglo XXI*, sugiere a España que si quiere mejorar sus resultados en la prueba –que mide la capacidad de resolver problemas de la vida real– se trabaje menos la capacidad memorística y más otros aspectos como la capacidad crítica, el trabajo en equipo o la creatividad. Sin embargo, aunque este cambio de metodología se puede ver en la etapa de Primaria, no se hace patente en la Educación Secundaria Obligatoria (en adelante, ESO), que sigue anclada en la enseñanza tradicional (Torres y Silió, 2019). Los 36 000 alumnos de 15 años que se examinaron de PISA 2018 en 1102 centros, siguen obteniendo resultados por debajo de la media de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (en adelante, OCDE) y, en esta nueva edición, hay una tendencia a la baja (481 puntos, cinco menos que en la última edición de 2015).

En lo que respecta a la geometría en secundaria esto se agudiza todavía más, ya que se presenta al estudiantado como el producto acabado de la actividad matemática. La enseñanza dedicada a esta parte de las matemáticas es fundamentalmente tradicional, apoyada en la memorización de fórmulas para calcular áreas y/o volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades estudiadas de forma mecánica y descontextualizada (Gamboa y Ballester, 2010).

Autores como Barrantes y Balletbo (2012a), Báez e Iglesias (2007) y Gamboa y Ballester (2010) consideran a la geometría como uno de los pilares fundamentales dentro de la formación académica, parte integrante cultural de la humanidad, tanto con función instrumental como desarrolladora del pensamiento crítico y creativo, así como con capacidad formadora del razonamiento lógico y deductivo, de la resolución de problemas y de las habilidades para visualizar y argumentar de manera coherente en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002).

Por todas estas razones, con este trabajo se pretende que la geometría en educación secundaria tenga un papel protagonista en los alumnos, que los conecte con el mundo que les rodea, en este caso la Zaragoza mudéjar, a través de una metodología activa y contextualizada,

alejado de los libros de texto, como es la basada en el Aprendizaje Basado en Proyectos (en adelante, ABP), donde no solo el conocimiento entra en juego, sino también la intuición, el pensamiento crítico, el razonamiento lógico, las habilidades comunicativas; y para todo eso los contenidos relacionados con la geometría, en particular, con las isomerías resultan idóneos para el desarrollo de esta metodología y el día a día de los discentes (Barrantes, 2003).

Finalmente, hacer hincapié en que la finalidad de la Educación Secundaria Obligatoria consiste en lograr, entre toda la comunidad educativa, que el alumnado adquiera los elementos básicos de la cultura, en especial en sus aspectos humanístico, artístico, científico y tecnológico; desarrollar, consolidar y afianzar en ellos hábitos de estudio y de trabajo; disponerlos para su incorporación a estudios posteriores y para su inserción laboral, así como prepararlos para el ejercicio de sus derechos y obligaciones en la vida como futuros ciudadanos ([LOE, arts. 3 y 22 y sigs.](#); también [art. 23 bis](#) en la redacción de la [LOMCE](#)).

1.1. JUSTIFICACIÓN

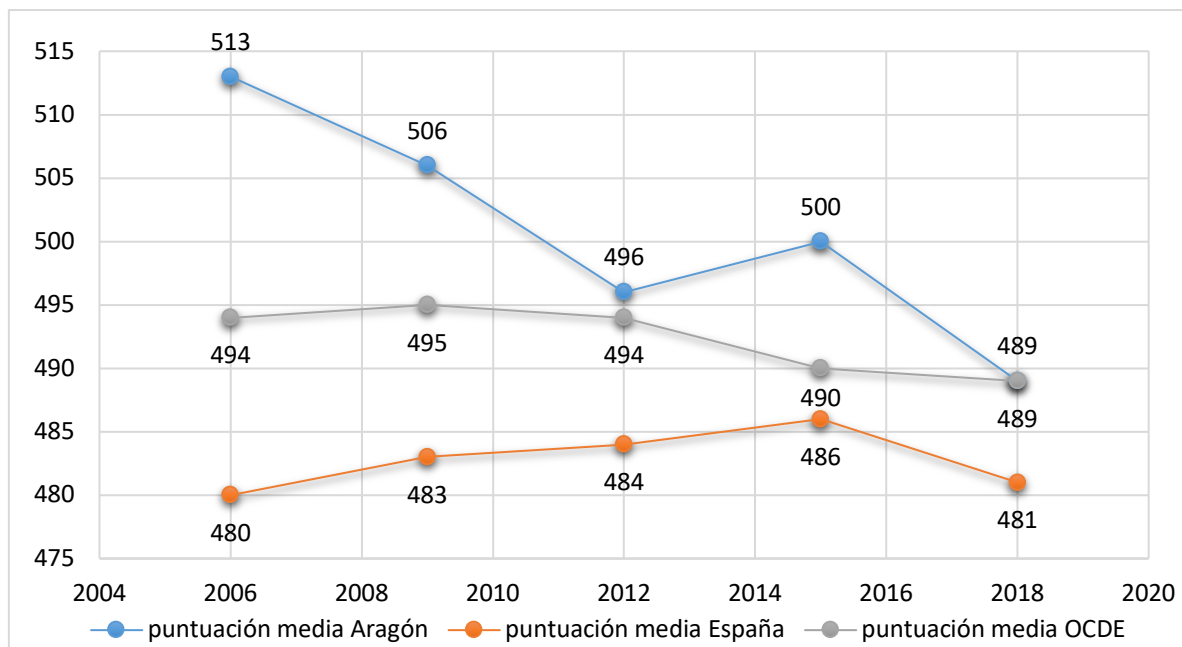
La geometría suele tener un papel secundario en el área de las matemáticas, desplazando los contenidos de la misma hacia el final de curso lo que puede suponer una exclusión de estos o un enfoque nimio y superficial (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006). Por esta razón, el bloque de geometría puede verse como difícil y de poca utilidad para la mayoría estudiantil. Se trata de buscar un papel más atractivo a través de una metodología activa, donde los protagonistas sean los propios estudiantes, y no que esta quede relegada a "algo" meramente memorístico. La metodología tradicional aplicada en las aulas hace que los alumnos aborden este bloque del currículum con hastío, ya que el único cometido que tienen es la memorización de fórmulas, definiciones y propiedades descontextualizadas (Gamboa y Ballester, 2010).

Por otro lado, el proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque de geometría sigue generando ciertas dificultades y/u obstáculos por parte de los estudiantes, que hacen que los resultados que aporta el informe PISA¹ 2018 no sean buenos (Ministerio de Educación y Formación profesional, 2019). En los sucesivos informes PISA se observa un claro estancamiento en las destrezas matemáticas y científicas del alumnado perteneciente a Aragón, España y la OCDE

¹PISA es un estudio internacional de evaluación educativa que realiza la OCDE cada tres años. En el informe se reflejan los resultados de los alumnos de 15 años en comprensión lectora, matemáticas y ciencias.

de enseñanza secundaria (Figura 1); niveles siempre por debajo de la media de los países de nuestro entorno, pese a la multitud de reformas en el currículo de la asignatura de Matemáticas sufridas en España en los últimos veinte años.

Figura 1 Evolución de las puntuaciones medias en matemáticas de Aragón, España y OCDE.



Fuente: Elaboración propia a partir de PISA 2003, 2006, 2009, 2012, 2015 y 2018 (Ministerio de Educación y Formación profesional).

Además, PISA establece unos niveles de rendimiento, en la escala de matemáticas, que indican la clase de tareas que los estudiantes son capaces de realizar con éxito cuando alcanzan un determinado nivel. En la Figura 12 (recogida en el Anexo A) se describe el conjunto de destrezas matemáticas que abarca la prueba PISA y describe las habilidades, conocimientos y comprensión que se requieren en cada uno de los niveles de la escala de matemáticas.

Se puede ver detalladamente en la Tabla 1 el porcentaje de alumnos por niveles de rendimiento en la OCDE, España y Aragón².

² El informe español PISA 2018 (p. 66, Figura 2.7) establece un total de 100 estudiantes distribuidos en los diferentes niveles; por ejemplo, si el 75 % está o alcanza el nivel dos significa que 75 de los alumnos están en el nivel dos o por encima de este. En los últimos dos niveles tan solo tiene en cuenta los estudiantes presentes en ese nivel, es decir, si el porcentaje en Navarra es de 9 % para el nivel 5 y 2 % para el nivel 6, habría 9 alumnos en el 5 y 2 en el 6 de los 100.

Tabla 1 Estudiantes por niveles de rendimiento en matemáticas.

	Niveles	1	2	3	4	5	6
% estudiantes por niveles	OCDE	14,8 %	76 %	54 %	29 %	8,5 %	2,4 %
	España	16 %	75 %	51 %	25 %	6,2 %	1,1 %
	Aragón	≈13 %	80 %	58 %	31 %	≈8,0 %	≈2,0 %

Fuente: Elaboración propia a partir de PISA 2018 (Ministerio de Educación y Formación profesional, 2019).

Se observa cierta estabilidad en estos a lo largo de estos diez años en ambas evoluciones, con la salvedad de que en los niveles inferiores de rendimiento España presenta la misma proporción de estudiantes que la media de países de la OCDE. Pero, sin embargo, en el nivel más alto de rendimiento España se mantiene en cuatro puntos porcentuales menos que la media de la OCDE (Ministerio de Educación y Formación profesional, 2019). Es decir, no solo se debe prestar atención a los estudiantes de los niveles más bajos, sino que también se debe fomentar el potencial de los alumnos de niveles más altos.

El último informe de la OCDE (2020) pone el acento en las características actitudinales y motivacionales que los estudiantes españoles muestran ante los contenidos matemáticos como razón principal de este estancamiento, y no tanto a aspectos epistemológicos, derivados de la dificultad propia de la materia o vinculados a la comprensión lectora, variables todas ellas que demuestran ser poco significativas para explicar los mediocres resultados al respecto (Antón y Sánchez, 2020). Para superar estas dificultades Barrantes (2003) propone como línea general de trabajo una metodología activa y contextualizada, basada en la resolución de problemas en la que además de estar motivado, el estudiante aprenda.

Para ello los objetivos principales del proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría deben estar enfocados a, no solo a aprender, sino también, conectar a estos con el mundo que les rodea, fomentar un espíritu crítico y creativo, desarrollar capacidades visuales y razonamiento lógico-deductivo, que pudiese hacerse extensivo a otras áreas de las matemáticas o, incluso, a otras materias (Báez e Iglesias, 2007).

Luis Rodríguez, presidente de la Comisión de Educación de la Real Sociedad Matemática Española, publicó en *El País* que “en matemáticas no hay bajada significativa en PISA, pero desde luego no hay mejoras. Y no las va a haber mientras en España haya una estructura de contenidos y no de competencias”. Además, comenta en esta misma entrevista que se debería

hacer una reflexión más profunda sobre nuevos modelos pedagógicos que respondan a las evidencias de las últimas investigaciones matemáticas, en lugar de la inclusión de más contenidos en el currículo (Torres y Silió, 2019). Por otro lado, habla de la necesidad de aumentar la profundidad con la que se estudian las matemáticas, es decir, emplear más tiempo para cada concepto y razonar sobre el porqué de este.

La *National Council of Teachers of Mathematics* (en adelante, NCTM) estableció cinco objetivos que a día de hoy en España no se cumplen, cuenta Luis Rodríguez (Diez, 2020). Estos cinco logros son: resolver problemas, manejar la lógica matemática, aprender a comunicar los resultados, conectar las matemáticas con disciplinas científicas y sociales y saberlas representar (por ejemplo una tabla en un gráfico) (Diez, 2020). Asimismo, considera importante que en la enseñanza de las matemáticas se puedan establecer relaciones entre los distintos aspectos de esta; abordándola a través de la resolución de problemas como pilar fundamental, donde se promueva el razonamiento y el análisis crítico, así como la formulación y comprobación de conjeturas, y que se desarrollen habilidades de comunicación y transmisión matemática en el alumnado (Diez, 2020).

Diversas culturas a lo largo de la historia han utilizado las transformaciones geométricas en los diferentes campos de la arquitectura o la pintura y que, también, pueden encontrarse en numerosos aspectos de la naturaleza.

Partiendo de esta premisa, se pretende realizar una aproximación de la geometría utilizando como pretexto la arquitectura y el arte mudéjar de la ciudad de Zaragoza. Convirtiéndolo así en un escenario didáctico motivador e interesante para el aprendizaje de la geometría en el alumnado. Concretamente, para los contenidos de traslaciones, giros y simetrías en el plano establecidos en el bloque 3 de geometría del currículo de 3º ESO en la comunidad autónoma de Aragón. Con el objetivo de promover un aprendizaje significativo efectivo de dichos contenidos (Goncalves, 2006); teniendo presente la cultura geométrica con visión histórica e interdisciplinaria y poder así resolver problemas reales, usando diferentes modos de representación y lenguaje utilizando como propuesta metodológica el ABP (Gamboa y Ballester, 2010). En este sentido, resulta especialmente interesante el método de trabajo del ABP, cuya perspectiva se fundamenta en desarrollar los contenidos curriculares a través de proyectos llevados a cabo por los propios alumnos de forma cooperativa, donde desarrollan,

entre otros, el razonamiento lógico-matemático, el espíritu crítico y la relación con el entorno cercano (Mettas y Constantinou, 2007).

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La importancia de la enseñanza de la geometría radica en llevar a cabo procesos de razonamiento por parte del estudiantado, aunque esta situación es distinta en la mayoría de las aulas; y es que uno de los problemas en la enseñanza de la geometría es la dificultad de transformar la descripción de las figuras en un proceso más formal, fundamentado en razonamientos y argumentación (Castiblanco et al., 2004).

La visión de los estudiantes, que analizaron Barrantes y Blanco (2005, 2004), sobre el proceso de enseñanza de la geometría en secundaria señalan los siguientes aspectos (Gamboa y Ballesteros, 2010):

- ▶ Conciben la geometría escolar como una parte de la materia más compleja, a la que se dedica poco tiempo. Desconociendo el motivo por el que esta se enseña. Adquirir conocimiento por el mero hecho de que hay que hacerlo.
- ▶ Señalan que la geometría es una materia muy teórica, abstracta y complicada de entender, para la que se necesita una mayor capacidad de razonamiento.
- ▶ Para el estudiantado la dificultad de la geometría radica, principalmente, en la memorización de fórmulas y saber cuándo aplicarlas.
- ▶ Revelan que la metodología clásica para la enseñanza de la geometría se divide en dos: la parte teórica, caracterizada por definiciones y propiedades, entre otros, y la parte práctica, donde se entienden como sinónimos las palabras problema y ejercicio repetitivo.
- ▶ Apuntan que los contenidos que más se estudian son los relacionados con la geometría plana; en la geometría espacial se profundiza menos.
- ▶ Destacan que la pizarra y el libro de texto son los recursos más utilizados para la enseñanza de la geometría.
- ▶ Recalcan que el uso de materiales alternativos como figuras tridimensionales u otros recursos TIC son poco frecuentes y cuando se utilizan se hacen construcciones o actividades sin ningún contexto y tampoco sin utilidad posterior.

- ▶ Declaran que las actividades geométricas frecuentemente son extraídas del libro de texto y suelen estar relacionadas con el estudio de elementos de las figuras, clasificación y sobre todo de medida; es decir, resolución de problemas “tradicionales”.
- ▶ Indican que el examen es el elemento más importante de la evaluación de este bloque.

A tenor de lo expuesto anteriormente se hace patente cómo la enseñanza de esta disciplina vive en el ostracismo, alejada del entorno del estudiante, donde los contenidos no representan un conocimiento valioso para este y donde el pensamiento crítico, el razonamiento lógico y el ensayo-error no son empleados como medio para lograr un aprendizaje efectivo y útil.

Por otro lado, a la vista de los resultados obtenidos en el informe PISA 2018 –en matemáticas los resultados han sufrido un estancamiento, la media es de 481 puntos, 5 menos que en la última edición de 2015, cuando se alcanzó el mejor resultado histórico, y por debajo de la media de la OCDE, de 489 puntos– parece que esta problemática persiste en la enseñanza de la geometría. Esto supone un reto para todos los docentes involucrados, que deben hallar diferentes alternativas a la hora de enfrentarse a los contenidos de geometría. A pesar de que en Aragón los resultados de este informe están por encima tanto de la media de España como de la OCDE (497 puntos), han empeorado con respecto al año 2015 (500 puntos) manteniendo esta tendencia a la baja y de estancamiento.

La solución que se propone, en forma de intervención didáctica en el aula, es un diseño de actividades espaciadas en diferentes sesiones con la metodología del ABP, donde cada una de estas se estructura siguiendo el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

1.3. OBJETIVOS DEL TFM

Los objetivos, a continuación presentados, van a determinar la pauta de trabajo a seguir para el logro de la propuesta presentada en el mismo.

1.3.1. Objetivo general

Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje del bloque de geometría en el curso de 3º ESO que se apoye en la arquitectura y arte mudéjar de la ciudad de Zaragoza a través del Aprendizaje Basado en Proyectos.

1.3.2. Objetivos específicos

La consecución del objetivo principal estriba en la realización de los siguientes objetivos específicos:

- ▶ Analizar la situación actual de la enseñanza en secundaria obligatoria de la asignatura de Matemáticas, en particular del bloque de geometría en 3º ESO.
- ▶ Estudiar las principales dificultades, con base en experiencias previas, y obstáculos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en 3º ESO.
- ▶ Plantear en relación con lo analizado mejoras a estas dificultades mediante el estudio de implementación de la metodología ABP y los niveles de razonamiento de Van Hiele.
- ▶ Utilizar la metodología del ABP estructurando las sesiones según el modelo de razonamiento de Van Hiele vinculándolas con los contenidos curriculares aragoneses de referencia en el bloque de Geometría para el curso de 3º ESO.
- ▶ Diseñar actividades para las sesiones del ABP apoyándose en los elementos del arte mudéjar y de la arquitectura de la ciudad de Zaragoza como contexto histórico para la enseñanza-aprendizaje de la geometría en dicho curso.

2. MARCO TEÓRICO

En el primer punto del marco teórico se examina, por un lado, la situación actual de la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas en secundaria de España y Aragón a través de los resultados del informe PISA del año 2018 y anteriores. Por otro lado, se analizan las distintas teorías existentes sobre el aprendizaje de matemáticas y, en particular, cómo se concretan en el caso del bloque de la geometría. Asimismo, se tienen en cuenta las diferentes consideraciones metodológicas, representaciones, dificultades y los distintos tipos de razonamientos –se recomienda el uso del razonamiento deductivo e inductivo– para trabajar con el bloque 3 del currículo aragonés correspondiente a la geometría.

Una vez estudiado el contexto matemático español, se profundiza en lo referente a la metodología del ABP; en la relación de esta con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y con la arquitectura y el arte mudéjar en la ciudad de Zaragoza (Patrimonio de la Humanidad), al tratarse del escenario escogido para la propuesta de intervención didáctica en el curso de 3º ESO.

En el marco de lo expuesto sobre el informe PISA y siguiendo la línea de las razones descritas con anterioridad sobre las estrategias a seguir en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se decide realizar esta propuesta de intervención didáctica.

2.1. ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

A lo largo de los siglos la geometría ha sido uno de los pilares fundamentales de la formación académica y cultural del hombre; es difícil encontrar situaciones en las que esta de forma directa o indirecta no aparezca. Es por esta razón que se puede afirmar de forma taxativa la relevancia de la geometría como disciplina formadora del razonamiento lógico; ciencia cuyo objetivo se centra en analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales (Alsina, Burgués y Fortuny, 1997).

Los investigadores Báez e Iglesias (2007) concretan seis principios didácticos que consideran primordiales dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría:

1. Principio globalizador o interdisciplinar: consiste en una aproximación consciente a la realidad, donde los elementos involucrados están estrechamente relacionados entre sí.
2. Integración del conocimiento: el conocimiento no puede dividirse, sino que representa un saber global e integrador, lo que implica también una integración de los objetivos, contenidos, metodología, evaluación y la relación existente entre estos.
3. Contextualización del conocimiento: los conocimientos se deben adaptar a las necesidades y características de las estudiantes y los estudiantes, a partir del uso de situaciones reales de su entorno, es decir, de hechos concretos.
4. Principio de flexibilidad: la organización y administración del proceso educativo debe poder adaptarse a las necesidades del alumnado, y no ser el alumno quien se adapte al proceso, sin perder de vista la consecución de los objetivos propuestos.
5. Aprendizaje por descubrimiento: todo proceso de enseñanza debe considerar una participación activa, y no pasiva, del estudiantado, de manera que motive la investigación, reflexión y búsqueda del conocimiento.
6. Innovación de estrategias metodológicas: los docentes deben buscar y emplear diferentes estrategias metodológicas que incentiven y motiven al alumnado hacia la investigación, descubrimiento y construcción del aprendizaje.

En este mismo sentido Almeida (2002), en lo referido a la educación secundaria, apunta a que la enseñanza de la geometría debe:

- ▶ Profundizar y sintetizar los aspectos geométricos en desarrollo, como la comprensión del espacio y de los respectivos modelos geométricos impartidos por las matemáticas; es decir, tomar como punto de partida problemas y situaciones relacionadas con el espacio, como la simetría, la forma y la dimensión.
- ▶ Integrar la historia de la geometría en su enseñanza, como pretexto para permitir a los estudiantes tener la noción de la existencia de otros tipos de geometrías.
- ▶ Buscar y analizar la conexión de la geometría con otras ramas de las matemáticas y de manera interdisciplinar con otras materias como el arte y promover su aplicabilidad en situaciones reales.

El NCTM (2000) establece cuatro objetivos generales orientados a conseguir una enseñanza de la geometría contextualizada y encaminada a la adquisición de ciertas habilidades y destrezas:

1. Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.
2. Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
3. Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.
4. Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

Por tanto, las estrategias de enseñanza de este bloque de contenidos, para seguir las premisas anteriores, deberían ser procedimientos, medios y/o recursos utilizados de forma reflexiva, flexible y estratégica para promover la mayor cantidad y calidad de aprendizajes significativos en los discentes. Mediante un uso inteligente, adaptativo e intencional de ellas, con la finalidad de ofrecer a los alumnos la ayuda pedagógica adecuada a su actividad constructiva (Díaz, Barriga y Hernández, 2002).

Sin embargo, Barrantes (2004) señala que la enseñanza de la geometría ha estado centrada, en los últimos años, en la memorización de conceptos y propiedades, en la mecanización de resolución de problemas y en la exclusión de cualquier forma de intuición como forma de acceder al conocimiento geométrico.

Con relación a estas tendencias e investigaciones específicas sobre la educación matemática, más en concreto en geometría, se muestra la necesidad de realizar reformas metodológicas en la enseñanza de las mismas, fundamentalmente enfocadas a la atribución paulatina de un papel cada vez más activo del estudiante (Vaello, 2009).

Actualmente la perspectiva está cambiando, ya que en un análisis posterior de este mismo autor, junto con Balletbo (Barrantes y Balletbo, 2012b), comprueban cómo aumentan las investigaciones y trabajos dedicados a la resolución de problemas y a la utilización de recursos, hasta ahora recomendados pero con apenas protagonismo en las aulas, como son la historia y la relación de esta con la geometría o con otras materias como pueden ser las manifestaciones artísticas. Asimismo, son de especial interés las recomendaciones basadas en

una metodología constructiva y dinámica, para corregir y erradicar los obstáculos y errores (esquemas conceptuales incompletos o mal contruidos sobre: conceptos, teoremas, propiedades, clasificaciones, etc.) que impiden un aprendizaje óptimo de la geometría.

El modelo de razonamiento de Van Hiele permite conocer el nivel de los estudiantes en cada momento del proceso de enseñanza y, por tanto, diseñar las actividades acordes a su edad y su nivel de conocimiento, para obtener un correcto aprendizaje. Combinado con el uso de metodologías innovadoras y motivadoras hacen de este un tándem perfecto para facilitar la enseñanza de la geometría en la educación secundaria. El ABP está dentro de estas metodologías activas que favorecen el aprendizaje y la enseñanza de la geometría a través de experiencias empíricas observables relacionadas con el entorno más cercano del alumno y rompen con lo establecido hasta ahora en las aulas de matemáticas.

2.1.1. Modelos de aprendizaje

En relación con los cuatro objetivos generales, establecidos por el NCTM, orientados a lograr una enseñanza de la geometría contextualizada y a la consecución de habilidades y destrezas, se considera que el aprendizaje significativo de los estudiantes, que se fundamenta en sus propias experiencias, así como en la capacidad de adaptación de sus propios resultados para la posterior resolución de problemas cotidianos que se le presenten, debe ser, por tanto, constructivista.

Dos aspectos que favorecen un aprendizaje significativo de la geometría por parte del estudiantado son la adquisición de nociones y relaciones geométricas resumidas en (Ausubel, 2002):

- ▶ Proceso de construcción de las relaciones espaciales geométricas en la mente de los individuos.
- ▶ Análisis y descripción de los distintos niveles de conocimiento que se pueden tener sobre cuestiones geométricas.

Para ello se realiza una breve descripción de las teorías más relevantes relacionadas con el aprendizaje de la geometría:

- ▶ Teoría constructivista de Piaget.
- ▶ El aprendizaje como desarrollo psicológico de Vygotsky.

- ▶ Aprendizaje significativo de Ausubel.
- ▶ Los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Se considera de especial interés, en este trabajo, el modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría creado por Dina y Pierre van Hiele.

2.1.1.1. Teoría constructivista de Piaget

Jean Piaget

–09 de agosto de 1896-16 de septiembre de 1980–

La **teoría de Piaget** es conocida con el nombre de **epistemología genética** (Saldarriaga, Bravo y Loor, 2016). Para Piaget la inteligencia humana se construye en la cabeza del individuo mediante estructuras organizadas que se adaptan a través de los procesos conocidos como la asimilación y la acomodación. Por esta razón, un objeto solo podrá comprenderse y aprenderse a través de las distintas estructuras cerebrales que tenga previamente el sujeto, es decir, de adaptación del aprendizaje (Saldarriaga, Bravo y Loor, 2016):

- ▶ La *asimilación* mental es, según este principio de adaptación, la integración de los objetos, ideas o estímulos externos son asimilados por esquemas mentales preexistentes.
- ▶ La *acomodación* consiste en la adaptación de los individuos en respuesta a las exigencias externas del medio para alcanzar un equilibrio interno. Es decir, es un proceso contrapuesto a la asimilación.

La teoría propuesta por Piaget tiene carácter constructivista, debido a que el alumnado va progresando en el aprendizaje mediante su actividad; está en constante proceso de desarrollo y adaptación. Piaget estipula que el sujeto puede poseer tres tipos diferentes de conocimiento (Saldarriaga, Bravo y Loor, 2016):

1. *Conocimiento físico*: los objetos tangibles; la manipulación y la relación sujeto-entorno.
2. *Conocimiento lógico-matemático*: el individuo debe ir construyéndolo a través de la abstracción reflexiva. De lo más simple a lo más complejo.
3. *Conocimiento social*: se suele dividir en convencional y no convencional.

Estos tres tipos interactúan entre sí y, según Piaget, el lógico-matemático (base del sistema cognitivo) juega un papel predominante, ya que sin él, los conocimientos físico y social no se

podrían incorporar o asimilar en el individuo (Piaget, 1987). Este conocimiento es resultado de un proceso dinámico del estudiante, con cierta influencia sensorial. No por acumulación del conocimiento como plantea el modelo empirista, sino apoyado en el nivel de desarrollo – estatus psicológico adecuado– y en la estimulación externa ligada al individuo (Piaget, 1987).

En la metodología de enseñanza de las matemáticas en general, y en la geometría en particular, la teoría de Piaget sobre el conocimiento ha sido clave (Santana, 2007). Los estudiantes consiguen alcanzar el conocimiento a través del descubrimiento; de los resultados obtenidos con la experimentación de los objetos de su entorno y de los materiales didácticos empleados en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para continuar descubriendo dichos estudiantes necesitan un aliciente, una motivación en la experimentación. Por este motivo, la metodología debe plantearse como una experiencia activa, participativa, experimental y sumativa (Santana, 2007).

De las cuatro etapas o estadios en los que Piaget divide el proceso de enseñanza-aprendizaje, el alumnado de secundaria está inmerso en la etapa lógico-formal (de 11 años en adelante). Etapa en la que, según Piaget, comienza el razonamiento hipotético deductivo. El estudiante puede generalizar mediante un razonamiento inductivo y puede generar nuevos conocimientos y, además, tiene la capacidad de llegar a conclusiones abstractas utilizando la lógica (Ramírez y Ramírez, 2018).

2.1.1.2. El aprendizaje como desarrollo psicológico

Lev Vygotsky

– 17 de noviembre de 1896-11 de junio de 1934–

Vygotsky, psicólogo, sostiene que el sentido del aprendizaje es desde fuera hacia dentro del individuo, asimismo señala que las funciones mentales tienen su origen en la sociedad, transmitiéndose a lo individual, es decir, en primer lugar, surgen en el plano social e interpersonal y, posteriormente, en lo intrapersonal. En su opinión, la enseñanza idónea es aquella que se adelanta al desarrollo (Polman, 2010).

Para Vygotsky (1980), la interacción social es la base del desarrollo e introduce el concepto de **zona de desarrollo próximo** (en adelante, ZPD) que se define como “la distancia entre el nivel de desarrollo real –determinado por la resolución independiente de problemas– y potencial –

determinado por la resolución de problemas bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más expertos—“.

Este autor señala, en referencia a la ZDP, que cada persona posee un código genético o **línea natural del desarrollo**, ligado al aprendizaje en el momento que el individuo interactúa con el entorno y, a su vez, existen intermediarios que guían al individuo durante el desarrollo de sus capacidades cognitivas. Es decir, existen dos casos diferenciados, por un lado, lo que el individuo pueda realizar por sí mismo y, por otro lado, lo que pueda hacer con una tutela (o guía) encaminados a que este avance con éxito en su ZDP (Polman, 2010).

Vygotsky se opuso a la idea de Piaget de que “el proceso de desarrollo va a la zaga del proceso de aprendizaje” (1980, p. 90). Propuso que, al aprender, el individuo lleva a cabo —con la ayuda de otros (más expertos) — un ejercicio que no podría haber desarrollado solo, dentro en un contexto social, es decir, en una dimensión “intermental” (Polman, 2010).

2.1.1.3. Aprendizaje significativo de Ausubel

David Ausubel

—25 de octubre de 1918-09 de julio de 2008—

Ausubel, psicólogo estadounidense, padre del aprendizaje significativo. Este aprendizaje fue desarrollado entre los años 1963 y 1968 como el proceso por el que un nuevo conocimiento o información se integra dentro de la persona que está en proceso de aprender, dentro de su estructura cognitiva. El aprendizaje significativo tiene lugar cuando una nueva información “se conecta” con un concepto relevante (“subsunsor”) ya existente previamente en la estructura cognitiva. Lo que supone que, las nuevas ideas, los conceptos y las proposiciones pueden aprenderse de forma significativa a medida que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes ya existentes y disponibles en la estructura cognitiva del individuo funcionan como un punto de “anclaje” a las primeras (Ausubel, 1983).

Para Ausubel (1983), la característica más relevante del aprendizaje significativo es que, “produce una interacción entre los conocimientos más importantes de la estructura cognitiva y las nuevas informaciones (no es una simple asociación), de tal modo que estas adquieren un significado y son integradas a la estructura cognitiva de manera no arbitraria y sustancial”, auspiciando la diferenciación, evolución y estabilidad de los “subsunsosores” preexistentes y,

por ende, de toda la estructura cognitiva (Ausubel, 1983). Por tanto, si la nueva información es clara y precisa, esta puede servir de complemento a los conocimientos ya existentes sin importar el lenguaje utilizado, ya que un mismo concepto puede definirse a través de diversas representaciones.

Por esta razón, si se quiere realizar una correcta orientación del aprendizaje es fundamental y necesario conocer con anterioridad cuál es la estructura cognitiva del alumnado, no tanto por el gran número de conocimientos que tenga, sino por la firmeza de los conceptos e información que este emplee. Este modelo de aprendizaje propone que el docente presente de manera clara, concisa, estructurada y organizada todos los contenidos a tratar y, que al mismo tiempo, diseñe una secuenciación didáctica de actividades que motiven al alumnado. Sin embargo, esto no impide que se pueda complementar con una docencia expositiva o magistral siempre y cuando, en lo primordial, ambas enseñanzas cumplan lo expuesto por este modelo (Ausubel, 2002).

2.1.1.4. Los niveles de Van Hiele

Dina y Pierre Van Hiele

–1957–

El modelo de Van Hiele fue propuesto, en la Universidad de Utrech en 1957, por los profesores D. van Hiele y P. van Hiele en el libro original *Structure and Insight: A theory of mathematics education*. Este modelo estriba en dos pilares fundamentales: el primero, en la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento intuitivo de los niños hasta el formal y abstracto de los estudiantes de la carrera de Matemáticas; el segundo, se apoya en una descripción de cómo puede un profesor organizar y diseñar la actividad en sus clases para que dichos estudiantes puedan alcanzar el nivel de razonamiento superior al que tengan (las cinco “fases de aprendizaje”); básicamente, estas cinco fases –cuatro para el nivel preuniversitario– constituyen un esquema para organizar la enseñanza.

A lo largo de los años existen diferentes estudios sobre la didáctica de la geometría donde ha quedado patente la necesidad de establecer una correlación entre los niveles de razonamiento propuestos por D. y P. van Hiele y la tipología de los niveles de pensamiento

diseñados por Piaget, con el objetivo de definir el pensamiento de los estudiantes en los diferentes niveles educativos y poner énfasis en lo que ellos son capaces de aprender (Camargo, 2011).

En la Tabla 2 se definen brevemente cada uno de los niveles, detallando los aspectos más destacables de cada uno de ellos mediante la caracterización realizada por Corberán, Gutiérrez, Huerta, Jaime, Margarit, Peñas y Ruiz (1994) y completados por Arrieta (1992).

Los niveles de razonamiento diseñados por Van Hiele siguen una estructura jerarquizada, ya que la adquisición de un nivel superior supone haber logrado completar las cinco fases propuestas por estos del nivel anterior de razonamiento. Es decir, el nivel inferior sirve como base del nivel superior. Existe una fase de acomodación donde el discente trabaja los razonamientos de ambos niveles hasta alcanzar el nivel superior.

Tabla 2 Características de los niveles de razonamiento matemático del modelo Van Hiele.

Nivel	Síntesis	Características	Productos de pensamiento
Nivel 1 Visualización o reconocimiento	Reconocimiento global de figuras por su forma.	No hay lenguaje geométrico básico. No reconoce propiedades matemáticas de las figuras. Percepción global de las figuras geométricas. Utilizan propiedades imprecisas.	Agrupaciones de formas.
Nivel 2 Análisis	Análisis de las partes y propiedades de que componen las figuras de forma intuitiva.	No es capaz de establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras. Determina dichas propiedades a través de la manipulación y experimentación. Razonamientos sencillos. No pueden elaborar definiciones.	Partes y propiedades de formas.

Nivel 3	Comprende el razonamiento formal y deductivo de las matemáticas.	Reconoce cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre estas y las consecuencias de esas relaciones.	Relaciones entre propiedades de los objetos geométricos.
Ordenación o clasificación		Es capaz de seguir una demostración, aunque no la comprende de manera global. Clasifican de forma lógica diferentes familias de figuras.	Demostración informal.
Nivel 4	Se realizan deducciones y demostraciones lógicas, ya que entiende la naturaleza axiomática.	Se comprenden las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos. No tiene la necesidad del rigor en los razonamientos matemáticos. Dan argumentos deductivos formales.	Sistemas axiomáticos. Deductivos.
Nivel 5	Capta la geometría de forma abstracta; prescinde de ejemplos concretos.	Preparados para analizar la consistencia, independencia y la completitud de los axiomas sobre los que se construye una teoría y los compara entre sí.	Comparaciones y contrastes entre diferentes sistemas axiomáticos.
Rigor			

Fuente: Elaboración propia a partir de Corberán et al. (1994, p 15-20) y Arrieta (1992, p. 13).

Este último nivel, por su alto grado de abstracción, debe ser considerado en una categoría aparte, así lo sugieren estudios sobre el tema. Tal y como afirman los autores Alsina, Fortuny y Pérez (1997) y Jaime y Gutiérrez (1990) dicho nivel solo se va a desarrollar en estudiantes de la universidad, con una buena capacidad y preparación en geometría.

Este modelo asume que para conseguir ascender a un nivel mayor de aprendizaje debe haber completado cinco fases. Es decir, cuando el alumno haya alcanzado la última fase adquiere un nuevo nivel de conocimiento.

Corberán, Gutiérrez, Huerta, Jaime, Margarit, Peñas y Ruiz (1994) describen las cinco fases de aprendizaje del modelo Van Hiele como sigue:

- **Fase 1: Discernimiento o información.** El estudiantado tiene el vocabulario adecuado y los mecanismos oportunos para acometer el nivel cognitivo correspondiente. Exposición de contenidos, metodología, actividades, etc.

- ▶ **Fase 2: Orientación dirigida.** El docente facilita al alumnado una serie de ejercicios de dificultad progresiva que este debe resolver y cuyo razonamiento funcionará, a su vez, como motivación intrínseca para conseguir alcanzar el nivel cognitivo superior. Evitar dar la solución.
- ▶ **Fase 3: Explicitación.** Los discentes estructuran, analizan y expresan sus experiencias entre el grupo y justifican los resultados obtenidos de ellas. Consolidación del lenguaje matemático.
- ▶ **Fase 4: Orientación libre.** El alumnado pone en juego los conocimientos adquiridos en otros niveles a situaciones de diversa índole, pero estructuralmente semejantes. Mayor precisión en el lenguaje y razonamiento matemático.
- ▶ **Fase 5: Integración.** Interiorización en su estructura cognitiva, unificada y global de todas las relaciones obtenidas en las fases anteriores.

Las fases de aprendizaje son un adecuado punto de partida para el docente a la hora de proporcionar al alumnado experiencias significativas y orientarlo durante el proceso de aprendizaje. Según Gutiérrez y Jaime (2012, p. 57) “las fases de aprendizaje son unas etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento”. Este modelo presenta un diseño de enseñanza cíclico, donde cada nivel de razonamiento geométrico comienza por la primera fase y continúa hasta la quinta fase. Sin embargo, un mismo estudiante puede situarse en diferentes niveles dependiendo del área matemática.

A la hora de evaluar a los alumnos según su nivel de razonamiento, se debe tener en cuenta la forma de responder y el porqué de sus contestaciones. Estas harán patentes las ideas y conceptos asimilados, así como su manera de razonar. Estudiantes que se encuentren en distintos niveles de razonamiento pueden responder una misma actividad, marcando la diferencia en el procedimiento seguido y en la argumentación dada.

2.1.2. Consideraciones metodológicas

A la hora de trabajar el bloque de movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías se necesita hacer uso de dos tipos de razonamientos distintos como son (Guillén, 2010):

- ▶ El razonamiento deductivo (intuitivo-experimental): enseñar las propiedades de los giros, las traslaciones y las simetrías.
- ▶ El razonamiento lógico inductivo (lógica formal): trabajar las regularidades en mosaicos y la obtención de la pieza generadora.

2.1.2.1. Representaciones

Las representaciones que resultan de interés para trabajar este bloque de contenidos son (Rico, 1997):

- ▶ **Representaciones simbólicas:** de tipo matemático como ecuación, matriz, etc.
- ▶ **Representaciones verbales:** se pone de manifiesto en la verbalización de los enunciados de las actividades y la comunicación de resultados.
- ▶ **Representaciones numéricas:** se presentan en el caso en el que estén fijados todos los elementos de la isometría como, por ejemplo, el ángulo y el centro de giro en un giro, el vector de traslación en una traslación y los ejes o el centro de simetría en una simetría axial y central.
- ▶ **Representaciones manipulativas:** a destacar, por ejemplo, los Geoplanos, mosaicos para construir diferentes composiciones geométricas o, incluso, el uso de programas informáticos: Cabri, GeoGebra, Sketchpad, etc.
- ▶ **Representaciones gráficas:** de gran relevancia en secundaria, dado que se pretende que el estudiante sea capaz de visualizar los conceptos explicados. Las representaciones pueden ser en el plano euclídeo o en el cartesiano. Es recomendable comenzar por las representaciones en dos dimensiones y, posteriormente, gracias a la utilización de *software*, en tres dimensiones.

Se recomienda que el alumnado durante su proceso de enseñanza-aprendizaje en el citado bloque se familiarice con la manipulación, el uso de las nuevas tecnologías y la relación con el entorno. Por esta razón, es interesante que los estudiantes observen y reflexionen sobre los movimientos en la naturaleza, en el arte o la arquitectura.

2.1.2.2. Dificultades del aprendizaje: obstáculos y errores

La geometría, en general, está considerada por los estudiantes de Matemáticas como una parte teórica, abstracta y memorística fundamentada en el aprendizaje de fórmulas que

deben aplicarse en determinados contextos o actividades sin aparente relación (Gamboa y Ballester, 2010). Las ideas que tienen la mayoría estudiantil sobre la educación en la materia de Matemáticas, sobre ellos mismos y sobre el contexto de la enseñanza-aprendizaje, pueden influir considerablemente en su motivación y rendimiento. Además, la organización en el currículo de Matemáticas supone un obstáculo en sí mismo, debido al alto volumen de contenidos en la enseñanza del bloque de geometría y a que este suele impartirse en el final de curso y, consecuentemente, los contenidos pueden verse reducidos sin verse en su totalidad o que los alumnos no presten la atención necesaria (Gamboa y Ballester, 2010).

La tendencia actual en España en la enseñanza de la geometría obstaculiza el proceso de abstracción y la adquisición de facilidad para resolver tareas de competencia matemática, por el enfoque deductivo que antepone la memorización de conceptos, propiedades y teoremas (Barrantes, Balletbo y Fernández, 2014). Por ello, la metodología aplicada puede suponer para el alumnado un foco de dificultades en la adquisición del conocimiento y en la síntesis de nuevos esquemas conceptuales.

La visión constructivista de la enseñanza supuso un nuevo comienzo, donde el alumno es el protagonista activo, dando otro sentido al concepto de error, mostrándolo como una oportunidad de mejora, y no como un obstáculo, tanto para el estudiante como para el docente.

Este último puede reflexionar de manera crítica sobre el enfoque de la metodología y las estrategias que debe seguir para una enseñanza más efectiva. Como señala Rico (1997) “los errores forman parte del proceso de construcción y elaboración del conocimiento humano [...], son parte legítima de los procesos de construcción de conocimiento matemático”.

En relación con el proceso de aprendizaje por parte del alumnado existen algunos errores y dificultades de diversa naturaleza que aparecen de forma continua durante todo el proceso o incluso con anterioridad. Estos estudios se centran en aspectos específicos de ciertos tipos de movimientos como pueden ser las traslaciones y los giros. La aceptación como movimiento de una transformación que no conserva la forma o el tamaño es el principal obstáculo encontrado (Jaime y Gutiérrez, 1990). Otro ejemplo reside en el concepto de simetría y en una interpretación reducida o deformada de la simetría al utilizar concepciones visuales erróneas.

Como también en el relacionado con los giros: centro de giro, sentido de giro o falta de congruencia entre figuras.

En lo que se refiere a los errores en geometría Barrantes y Zapata (2008) muestran en un estudio pormenorizado de los errores más frecuentes que ayudan a no terminar de completar adecuadamente los esquemas internos en los conceptos geométricos. En la Tabla 3 se recoge esta clasificación. Estos errores son provocados en muchas ocasiones por un empleo exclusivo del libro de texto sin complementarlo con otro tipo de recursos y/o materiales que amplíen y mejoren el esquema conceptual del alumno (Barrantes y Zapata, 2008).

Tabla 3 Clasificación de los errores en geometría.

Categoría	Descripción
Esquema conceptual	Errores por la asociación de ciertos significados a un determinado concepto.
Distractores de orientación	Errores debido a ciertos atributos irrelevantes con fuertes características visuales y que actúan como distractores. Propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen relación con la definición del concepto.
Nombres	Errores derivados de la nomenclatura y las clasificaciones.
Distractores de estructuración	Errores por una presentación débil del concepto en el que ciertos elementos y propiedades son excluidos, de forma inintencionada. Por ello, a veces los alumnos tienen ideas erróneas que se desarrollan con el proceso de aprendizaje y que tienen incidencia durante varios cursos.
Imágenes reales	Errores relacionados con los conceptos geométricos son distintos de sus representaciones externas por lo que son difícilmente dissociables de ellas. Abstracción a la realidad.
Definiciones	Errores de conocimiento de los conceptos geométricos de forma teórica pero poco práctica, incapaces de afrontar los problemas geométricos que se les presentan.
Clasificaciones	Errores derivados de la clasificación de los conceptos geométricos.
Simbología visual	Errores por construcción de esquemas conceptuales estándar sobre las figuras geométricas (cuadriláteros, prismas, etc.) que suelen alejarse de la verdadera definición del concepto.

Fuente: Elaboración propia a partir de Barrantes y Zapata (2008).

Otras dificultades descritas por Jaime y Gutiérrez (1996) en su libro: *El grupo de las isometrías del plano* son:

- ▶ Descomponer una traslación oblicua en una horizontal y vertical.
- ▶ Comparar ángulos en diferentes posiciones.
- ▶ Identificar el ángulo de giro formado entre una figura y su transformada.
- ▶ Determinar el centro de giro de una figura y su homóloga.
- ▶ Diferenciar los tipos de simetría.
- ▶ Dibujar el eje de simetría de dos figuras cuando no es paralelo a los ejes cartesianos.

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría los profesores tienen que priorizar más el mundo de las figuras a través de actividades interdisciplinares relacionadas con otras materias como el arte o la arquitectura. Es necesario, por tanto, aumentar el número de actividades experimentales en las que los conceptos y propiedades de estas figuras geométricas se manipulen, así como llevar a cabo investigaciones y proyectos de estudios de las figuras geométricas (Barrantes y Zapata, 2008). Estas actividades deben incluir tareas tanto de orientación de las figuras y de estructuración como de las distintas representaciones de una figura en el plano (Barrantes y Zapata, 2008).

2.2. APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS EN LA GEOMETRÍA

La enseñanza de la geometría a través del ABP como metodología didáctica pretende ser un aliciente, mediante la cual el alumnado desarrolle habilidades y cree aprendizajes significativos. El punto de inflexión de esta metodología es que los estudiantes deben trabajar de manera cooperativa y colaborativa sobre una situación didáctica inicial planteada a modo de proyecto, reto o problema, aunque la definición definitiva del problema o proyecto debe su origen a las ideas que, al respecto, propone el propio alumnado, y de forma que el contexto en que se sitúe tiene que ser lo más realista y significativo posible (Antón y Sánchez, 2020). En este modelo, con tintes constructivistas, donde los ritmos de trabajo y estilos de aprendizaje son respetados destaca, además, la adecuada organización del ambiente y de los alumnos, divididos en grupos de trabajo heterogéneos y equilibrados en cuanto a las capacidades, talentos y resultados académicos se refiere. Es necesario una atribución de roles dentro de estos grupos, habitualmente decidida por el docente, aunque no siempre (Antón y Sánchez, 2020). El docente tiene asignado el rol de mediador, guía y facilitador del aprendizaje.

2.2.1. La enseñanza directa y el ABP

La enseñanza directa fundamenta su secuencia transmisora en lo que se conoce como “las tres Pes”: presentación, práctica y prueba. Es decir, lo que sería considerado hasta ahora como la enseñanza tradicional donde el alumnado, que es un mero receptor de conocimientos transmitidos por el docente, practica con estos y, finalmente, se acaban evaluando en una prueba en la que generalmente tienen o bien que reproducirlos o reproducir en cierta manera alguna actividad de la segunda fase (Trujillo, 2016).

El problema de esta enseñanza es que normalmente lleva a los estudiantes hacia un aprendizaje memorístico, de corta duración, reiterativo y acrítico (Trujillo, 2016). Se espera que, tras una transposición didáctica realizada por el profesor, el estudiantado incorpore unos contenidos sin apenas cuestionarse su sentido, su valor o, peor aún, su validez. Tampoco cubre la atención a la diversidad, las necesidades que puedan tener los diferentes alumnos presentes en el aula y que suele estar, además, supeditada a experiencias extraescolares ajenas al proceso de aprendizaje en la clase.

Sin embargo, existen alternativas a esta enseñanza directa. En el ABP, el docente plantea a sus estudiantes una pregunta, un reto o un problema que tienen que afrontar con éxito. Para esto, el alumnado debe buscar información, seleccionarla, reflexionarla, sintetizarla y compartirla para poder superar la resolución del reto real (Trujillo, 2016). Procediendo de acuerdo a esta metodología el proceso de enseñanza-aprendizaje es significativo en sí mismo, es contextualizado y tiene sentido para ellos.

De acuerdo con el *Cono del aprendizaje* de Edgar Dale (véase Figura 2), hay muchas maneras y más efectivas de enseñar, que no solo son entender, memorizar y reproducir, sino que también implica buscar, seleccionar, debatir, aplicar, cometer errores y aprender de ellos. Y estas son consideradas enseñanzas activas.

Figura 2 Cono de aprendizaje de Edgar Dale.

Después de dos semanas tendemos a recordar:



Fuente: Elaboración propia a partir de Andrade y Chacón, 2018.

El ABP, se puede incluir, por tanto, en el ámbito del “aprendizaje activo”. Esta estrategia metodológica de enseñanza y aprendizaje marca la diferencia respecto a la “enseñanza directa” porque entre otras cosas (Trujillo, 2016):

- ▶ El **conocimiento** no es exclusivo del docente y algo que deba transmitirse a los alumnos sino, más bien, el resultado de un proceso cooperativo y participativo entre estos y el docente. Se realizan preguntas, se busca información y se trata de forma reflexiva para obtener unas conclusiones que deben comunicar.
- ▶ El **papel del estudiante** no se limita a la escucha permanente sino que se espera que intervenga activamente en otro tipo de procesos cognitivos: reconocimiento de la problemática, priorización, búsqueda y selección de información, comprensión e interpretación crítica de los resultados y las relaciones lógicas que puedan darse. Ayudándoles a eliminar las ideas previas o creencias.
- ▶ El **papel del docente** engloba más allá de la mera exposición de contenidos. La función principal es la de crear una situación de aprendizaje realista que les sirva de punto de partida para desarrollar el proyecto. Implica búsqueda de materiales, herramientas, fuentes de información, resolver dificultades, guía en el ritmo de trabajo y, por último, evaluar el resultado.

En este sentido, Thomas (2000) desarrolla cinco aspectos fundamentales de la metodología del ABP y los diferencia respecto de estas otras actividades propias de las metodologías tradicionales:

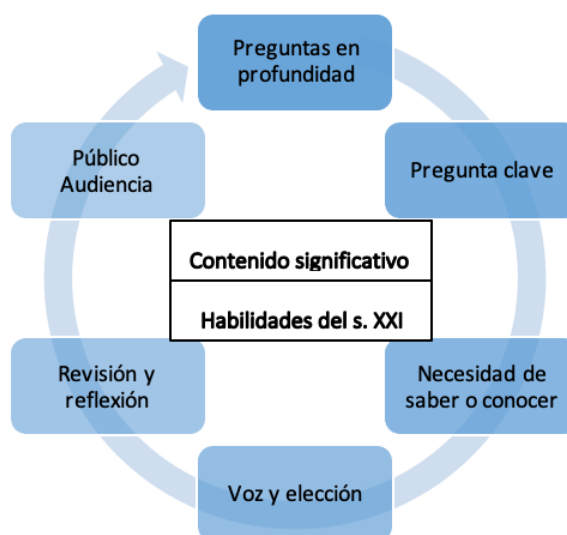
1. Los proyectos están centrados metodológicamente en el desarrollo del currículo, frente a la subordinación tradicional.
2. El fundamento de los proyectos son las preguntas guiadas, que dirigen a los estudiantes, sin límites de actuación, en el proceso versátil de elaboración de sus propios conocimientos relacionados con los contenidos que se pretenden trabajar.
3. La elaboración de conocimientos es constructiva (activa) y no pasiva.
4. Es clave el impulso que introducen los alumnos en los proyectos, por definición.
5. Los proyectos tienen que ser lo más realistas posibles y significativos.

Los ocho elementos esenciales que, según Trujillo (2016), debe incluir un buen proyecto (véase, Figura 3). Hernando (2015) propone los diez puntos clave o fases en las que debe estar dividido el desarrollo de la aplicación en el aula de la metodología ABP. A continuación se describen brevemente dichos pasos (Figura 13 del Anexo B):

1. **Punto de partida:** intentar buscar “el elemento” del que habla Ken Robinson. Planteamiento del tema principal, idea motivadora y lluvia de ideas. Se establecen los objetivos principales del proyecto.
2. **Formación de grupos:** el docente forma los grupos de la manera que crea idónea.
3. **Definición del producto final:** se debaten los objetivos a lograr entre profesor y alumnos, cada grupo se fija sus hitos y objetivos propios.
4. **Organización y planificación:** asignación de papeles dentro del grupo, planificación y temporalización.
5. **Recopilación de información:** los alumnos buscan, recopilan e introducen nuevos conceptos. El docente guía y facilita el acceso a la información a través de talleres.
6. **Análisis y síntesis:** comienza la reflexión crítica, el proceso de compartir, tomar decisiones e intentar resolver el problema planteado.
7. **Producción:** puesta en práctica de lo aprendido; se establecen relaciones, conexiones nuevas y conclusiones.
8. **Presentación del proyecto:** preparación previa, defensa y revisión con expertos.

9. **Respuesta colectiva a la pregunta inicial:** reflexión sobre la experiencia, puesta en común.
10. **Evaluación y autoevaluación:** consensuada con los estudiantes inicialmente. El alcance de los objetivos se evaluará de dos formas: autoevaluación y coevaluación.

Figura 3 Esquema de los ocho elementos esenciales del ABP.



Fuente: Elaboración propia a partir de Trujillo, 2016.

2.2.2. La enseñanza de la geometría a través del ABP

En la última década del siglo pasado se han realizado numerosos estudios para intentar demostrar la gran efectividad y el cambio de paradigma del ABP en las diferentes etapas y áreas educativas (Antón y Sánchez, 2020). Barron et al. (1998) tratan su experiencia llevada a cabo durante cinco semanas, donde los estudiantes tenían que trabajar en un proyecto sobre conceptos geométricos contextualizados en algunos problemas arquitectónicos. Este estudio revela un incremento cuantitativamente significativo en los participantes –medido a partir de *pretest* y *posttest*– de las habilidades para medir, comprender escalas y calcular perímetros, áreas, volúmenes y otras magnitudes geométricamente significativas (Antón y Sánchez, 2020).

En esta misma línea, Boaler (1998, 2002) comparó y analizó datos relacionados con el rendimiento en el área de matemáticas en los alumnos británicos de entre 13 y 16 años de una escuela secundaria que trabajaba con ABP y otra escuela en la misma etapa que trabajaba con la metodología tradicional. Ambas partían con niveles semejantes. En relación con los resultados obtenidos, se puede inferir que los estudiantes de la escuela que trabajaba con ABP

alcanzaron unas puntuaciones mayores a lo largo de los tres años de duración del estudio, en la que también demostraron mejores habilidades relacionadas con el uso práctico y contextualizado de conceptos matemáticos y, además, se vio que su nivel de memorización era mejor.

Otras investigaciones más actuales han ayudado a demostrar que la aplicación del ABP redundaba en una percepción más positiva del área de matemáticas por parte de los discentes y, por ende, de una mayor motivación hacia su estudio. Un ejemplo es el de Morales y García (2015, citado en Antón y Sánchez, 2020) que a través de un proyecto, dirigido a alumnos panameños, los aspectos trigonométricos se introducen en un contexto arquitectónico. O, también, el de Badia y García (2006, citado en Antón y Sánchez, 2020) que demuestra cómo el uso de herramientas TIC utilizadas tanto para la presentación de este tipo de proyectos como para el desarrollo de la propia metodología, prescinde de mayor contexto y artificialidad, aumentando así el rendimiento en la enseñanza de matemáticas.

2.3. GEOMETRÍA, ARQUITECTURA Y ARTE MUDÉJAR

El arte y la arquitectura son un buen punto de partida para los docentes a la hora de trabajar la interdisciplinariedad en el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas y favorecer un aprendizaje más significativo y motivador próximo al contexto real de los estudiantes (Barrantes y Zapata, 2008).

“Un paseo es un tiempo ganado a la prisa, a la ambición, a las obligaciones, al estrés... Es un tiempo rescatado para nosotros mismos, para el disfrute” de Usón y Ramírez (2017). Entre el rico patrimonio cultural de la ciudad de Zaragoza se encuentra el arte mudéjar, Patrimonio de la Humanidad. Por ello, es obligado para el alumnado perderse y deleitarse entre sus ábsides, sus torres, sus forjas, sus arcos, su luz que llena cada uno de los huecos de las yeserías creando sombras sugerentes. Donde se entrelazan los argumentos matemáticos y enriquecen la mirada del que pasea. El alumno se puede adentrar de forma contextualizada en los giros, los deslizamientos, las simetrías y las traslaciones presentes en diversos elementos constituyentes de esta ciudad.

2.3.1. La geometría y el arte

Alsina (2005) subraya la importancia de la geometría como herramienta matemática para facilitar la oportunidad de conocer el espacio tridimensional, representarlo y transformarlo, así como de despertar la creatividad necesaria para abordar estos conceptos. Este mismo autor desarrolla la categorización de los conceptos geométricos relacionados con la arquitectura y el diseño (Alsina, 2005).

- ▶ **Orientación geográfica:** posicionar el edificio de forma adecuada.
- ▶ **Modelización:** diseño y proyección de maquetas para fomentar la actividad.
- ▶ **Representación:** realización de modelos gráficos.
- ▶ **Modularidad:** repetición de elementos en la construcción y diseño.
- ▶ **Proporción:** búsqueda de la armonía entre las partes.
- ▶ **Fractalidad:** principio de dividir de forma iterativa.
- ▶ **Forma:** empleo de figuras geométricas.
- ▶ **Simetría:** utilización de transformaciones en el plano.

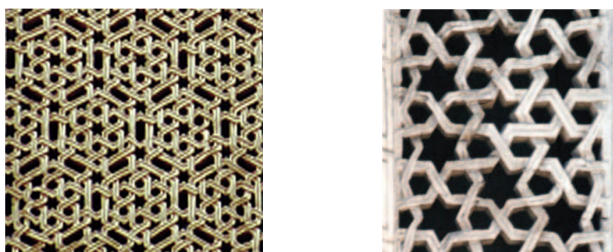
En su trabajo, Alsina, Burgués y Fortuny (1989) proponen tres tipos de actividades para trabajar el bloque de geometría, en el que el entorno artístico y/o arquitectónico es el escenario del aprendizaje.

1. **Observación directa:** visitar edificios con arquitectura particular o proporcionar material fotográfico nítido sobre estos para permitir trabajar figuras o elementos geométricos reales.
2. **Observación indirecta:** encontrar a través de fotografías, planos, esquemas, dibujos u otras representaciones, la estructura y el patrón geométrico original generador del diseño.
3. **Creación artística:** reflejar de forma creativa la geometría mediante maquetas, mosaicos, dibujos, croquis, etc.

2.3.2. Zaragoza y arte mudéjar

Las dos celosías presentes en la Figura 4 están diseñadas a partir de una trama hexagonal, y sus motivos son habituales en las decoraciones del arte musulmán, con la diferencia de que la primera se realizó en el siglo XI y la segunda en el siglo XIV. La de la izquierda recubre dos ventanales geminados³ de la pequeña mezquita de la Aljafería; la segunda vela uno de los vanos del ábside de la iglesia de San Miguel de los Navarros (Usón y Ramírez, 2017). Es decir, una fue diseñada y construida por una autoridad islámica y la otra por una autoridad cristiana. La imagen de la izquierda es de arte hispano–musulmán; y la de la derecha, de arte mudéjar.

Figura 4 Celosías en yeso en Zaragoza.



Fuente: Usón y Ramírez, 2017.

La historia del arte mudéjar es fiel reflejo de la última parte del periodo del arte islámico en la Península Ibérica. En sus inicios fue realizado por artesanos mudéjares⁴ y, más adelante, a partir del s. XV, también aparece en fachadas de iglesias y edificios civiles cristianos, es decir, realizado por artesanos cristianos (Usón y Ramírez, 2017).

El mudéjar aragonés se extiende a lo largo cinco siglos, desde el XIII hasta el XVII, momento que coincide con la expulsión de los moriscos⁵ decretada por Felipe III en 1610. Posteriormente, el barroco aragonés decora de nuevo las bóvedas y los intradoses⁶ de los arcos de sus iglesias con versiones de las tramas clásicas del mudéjar. Por esta razón, Zaragoza es un referente en la conservación de excelentes muestras a lo largo de las distintas etapas del arte mudéjar en Aragón (Usón y Ramírez, 2017). Lo que la hace ideal para ser escenario metodológico y didáctico de la geometría en el arte y la arquitectura.

³ Que está formado por dos elementos iguales o por elementos colocados por parejas.

⁴ Musulmanes que viven bajo dominio político cristiano.

⁵ Musulmanes forzados a la conversión cristiana.

⁶ Término arquitectónico que designa a la superficie interior, cóncava e inferior de un arco, bóveda o dovela.

3. PROPUESTA DIDÁCTICA

3.1. PRESENTACIÓN

La propuesta didáctica de intervención diseñada a continuación está enmarcada en el bloque de contenidos 3, Geometría, de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para 3º ESO en la comunidad autónoma de Aragón. Los contenidos a trabajar son concretamente: traslaciones, giros y simetrías en el plano. Por otro lado, dicha propuesta va a tener en cuenta contenidos de la asignatura de Historia, ya que trata el arte mudéjar aragonés en la ciudad de Zaragoza, vistos en el curso anterior.

Las actividades y experiencias planteadas para esta intervención didáctica se relacionan con la enseñanza de la geometría a través de la metodología didáctica ABP; teniendo presente en la secuenciación de estas los niveles de razonamiento de Van Hiele.

3.2. MARCO LEGISLATIVO Y CONTEXTO

En el marco legislativo se consideran las diferentes leyes, órdenes y reales decretos vigentes que intervienen en el proceso de concreción de esta propuesta de intervención centrándose en el currículo, los objetivos, los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje aragoneses para el correcto diseño didáctico de la propuesta centrada en el bloque 3 de Geometría para el último curso del primer ciclo de la ESO de Matemáticas.

Asimismo, para el adecuado planteamiento de la actividad se va a atender a la diversidad social, económica y cultural de los estudiantes presentes en el aula.

3.2.1. Marco legislativo estatal

En lo que se refiere a la legislación vigente a nivel nacional existen dos leyes orgánicas y un real decreto. Las dos primeras hacen referencia a la Ley Orgánica 2/2006 de Educación (en adelante, LOE) y la Ley Orgánica 8/2013 para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). Esta última ley no sustituye sino que modifica el texto de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. La LOMCE nace de la necesidad de dar respuesta a los bajos resultados obtenidos por los alumnos participantes en las diferentes pruebas internacionales, el fracaso escolar y la alta tasa de abandono. Y, por último, el Real Decreto 1105/2014 por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

3.2.2. Marco legislativo autonómico

En la comunidad autónoma de Aragón, en lo que a legislación vigente se refiere, hay dos órdenes que tratan el currículo, por un lado, de la Educación Secundaria Obligatoria y, por otro, el de Bachillerato. La Orden ECD/489/2016 para Educación Secundaria Obligatoria y la Orden ECD/494/2016 para Bachillerato. Ambas concretan los elementos constitutivos del currículo en materia autonómica: los objetivos de etapa, las competencias clave, los contenidos, los métodos pedagógicos, los criterios de evaluación del grado de adquisición de las competencias clave y del logro de los objetivos y los estándares de aprendizaje evaluables, que se han definido en el mencionado Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre.

Este trabajo se centra exclusivamente en la primera de ellas (ECD/489/2016), debido a que el curso donde se realiza la propuesta de intervención está incluido en la enseñanza obligatoria. En dicha orden, que tiene carácter básico, se plantea la importancia de las metodologías activas y contextualizadas para el desarrollo competencial del alumno y, además, se establece que las competencias clave deben estar relacionadas con los objetivos para que el logro de estos lleve implícita el desarrollo de las estas. Y, por otra parte, la valoración que se haga del nivel competencial adquirido por el alumnado tiene que estar integrada con la evaluación de los contenidos de las distintas materias.

3.2.3. Contexto

El entorno social y económico en el que se ubica el centro –Casco Histórico de Zaragoza– corresponde a una población muy heterogénea, que incluye a familias de clase media y un buen número de familias de bajo nivel socioeconómico. En la Junta Municipal Casco Histórico se encuentran empadronados extranjeros de 108 países distintos. Lo que hace que la tasa de población extranjera en este barrio sea del 24 % aproximadamente. Esta elevada diversidad curricular, social, económica y de intereses personales configura la vida académica del centro. Los estudiantes de 3º ESO tienen entre 14 y 15 años. La clase la componen 20 estudiantes, de estos 9 son chicos y 11 son chicas. El comportamiento es bueno, existe buena cohesión de grupo. Hay dos alumnos que no llevan mucho tiempo en España, por tanto, expresarse en este idioma es algo que les cuesta. Por otro lado, casi la mitad de la clase ven la asignatura de matemáticas como una de las más difíciles y poco motivadoras.

Por otro lado, los recursos tanto personales como materiales y electrónicos disponibles en el centro son adecuados. Existe conexión a internet, ordenadores portátiles “minis” con programas ofimáticos, GeoGebra, etc. instalados, sala de informática, pizarra digital y elementos de papelería a disposición del alumnado.

3.3. OBJETIVOS

Los objetivos didácticos específicos de la unidad didáctica de: Movimientos en el plano, de acuerdo con la legislación autonómica son:

- ▶ **O.D.1.** Identificar transformaciones isométricas que llevan de una figura a otra mediante movimientos en el plano. Clasificación. Conceptos y propiedades.
- ▶ **O.D.2.** Distinguir y describir cada uno de los tres movimientos en el plano.
- ▶ **O.D.3.** Aplicar traslaciones, giros y simetrías a figuras en el plano.
- ▶ **O.D.4.** Trabajar y modelar en un taller de cerámica de arte mudéjar aragonés una creación propia mediante la aplicación de un solo movimiento o la composición de estos, empleando elementos geométricos característicos de esta época.
- ▶ **O.D.4.** Utilizar las herramientas TIC, programas informáticos y otros recursos didácticos de geometría para trabajar los movimientos en el plano.
- ▶ **O.D.6.** Reconocer y analizar en el arte y la arquitectura traslaciones, giros y simetrías a través de imágenes del arte mudéjar de espacios cercanos al entorno estudiantil.
- ▶ **O.D.7.** Diseñar una creación en grupo que conlleve la aplicación de los movimientos en el plano en un contexto real, señalando los movimientos en el plano elegidos, una fachada o parte de ella en la época mudéjar.
- ▶ **O.D.8.** Identificar y reconocer frisos y mosaicos junto con sus elementos generadores en el arte mudéjar aragonés.
- ▶ **O.D.9.** Razonar acerca de la construcción de frisos y mosaicos y realizar una composición de uno de los mismos, a partir de una figura dada y un vector de traslación.
- ▶ **O.D.10.** Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en el desarrollo del proyecto.

3.4. CONTENIDOS

En el currículo de Matemáticas de los dos primeros cursos de la ESO aparecen ya conceptos de geometría en el plano, del espacio y la semejanza. Por tanto, el alumnado que comienza 3º ESO ha tenido que incorporar a sus conocimientos estos contenidos para poder afrontarlo. En la Tabla 9 (Anexo C) se recoge la relación entre contenidos, objetivos y competencias clave.

3.4.1. Contenidos para 3º ESO

De acuerdo con el Real Decreto 1105/2014 y la orden ECD/489/2016, los contenidos objeto de estudio de 3º ESO del bloque 3 de Geometría son:

- ▶ **C.G.1.** Traslaciones, giros y simetrías en el plano.
 - C.G.1.1. Traslaciones: Módulo, dirección y sentido de un vector de traslación. Elementos y estructuras invariantes de una traslación como mosaicos y frisos.
 - C.G.1.2. Giros: Elementos que determinan un giro en el plano. Elementos invariantes de un giro.
 - C.G.1.3. Simetría: axial y central. Elementos invariantes de una simetría.
- ▶ **C.G.2.** Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Por otro lado, en lo que respecta a los contenidos del bloque 1 de la materia de Matemáticas del currículo aragonés –orden ECD/489/2016– para tener en cuenta son:

- ▶ **C.M.1.** Planificación del proceso de resolución de problemas.
- ▶ **C.M.2.** Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.
- ▶ **C.M.3.** Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.
- ▶ **C.M.4.** Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

- ▶ **C.M.5.** Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- ▶ **C.M.6.** Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- ▶ **C.M.7.** Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:
 - a) la recogida ordenada y la organización de datos;
 - b) facilitar la comprensión de propiedades geométricas y la realización de cálculos;
 - c) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas;
 - d) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos;
 - e) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

3.4.2. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables recogidos en la Orden ECD/489/2016 que establece el currículo de Matemáticas en Aragón para el bloque 3 de Geometría, que se pueden ver en la Tabla 4, y para el bloque 1 de Procesos (Tabla 8 en Anexo C), métodos y actitudes en matemáticas son los siguientes:

Tabla 4 Criterios, competencias y estándares del bloque 3 de Geometría.

BLOQUE 3: Geometría		
Criterios de evaluación	Competencias Clave	Estándares de Aprendizaje Evaluables
Crit.MAAC.3.4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.	CMCT-CD-CCEC-CAA	<p>Est.MAAC.3.4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.</p> <p>Est.MAAC.3.4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.</p>

Crit.MAAC.3.5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.

CMCT-CCEC

Est.MAAC.3.5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

Fuente: Fuente: Orden ECD/489/2016, 2016.

3.5. COMPETENCIAS CLAVE

Las orientaciones dadas por parte de la Unión Europea recalcan la necesidad del logro de las competencias clave por parte de la ciudadanía como condición *sine qua non* para conseguir que los individuos alcancen un pleno desarrollo personal, social y profesional que se ajuste a las demandas actuales. Las competencias clave están divididas en tres partes cada una: saber, saber hacer y saber ser. A continuación se presentan aquellas que se van a trabajar a lo largo del desempeño del proyecto (véase Figura 14, 15 y 16 de Anexo D):

1. **Competencia de Aprender a aprender (CAA):** la motivación, la necesidad, la curiosidad y la autoeficacia son los cuatro pilares fundamentales de esta. A través de diversos estímulos donde el alumno sea protagonista activo de su aprendizaje se desarrolla esta competencia. Juegos, talleres o visitas culturales fundamentan esta competencia en el proyecto.
2. **Competencia de Comunicación Lingüística (CCL):** el diálogo crítico y constructivo como herramienta para la convivencia y la comunicación. La comprensión de textos y la expresión escrita. Búsqueda de información, selección, redacción y diálogo entre compañeros son la base de esta competencia.
3. **Competencia Digital (CD):** tener actitud activa, crítica y realista hacia las tecnologías. Además, de tener motivación y curiosidad por aprender en el uso de la tecnología. GeoGebra, PowerPoint, Edpuzzle, Plickers, buscadores y plataformas para investigar y contrastar información relevante en el desarrollo del proceso.
4. **Competencia Matemática y Competencias Básicas en Ciencias y Tecnología (CMCT):** aplicar los principios y procesos matemáticos en diferentes contextos. Interpretar los resultados obtenidos. Asimismo, está relacionada con movimientos en el plano y construcción de representaciones de formas. Se les propone realizar el proceso de diseño de una parte de una fachada en la época mudéjar en Aragón, con la elección del motivo inicial sobre una retícula isométrica, una baldosa. Se dispone de tres movimientos: traslaciones, giros y simetrías.

5. **Competencia Conciencia y Expresiones Culturales (CCEC):** respetar el derecho a la diversidad cultural y mostrar interés por la valoración crítica de las obras artísticas y culturales. La iniciativa, la creatividad y la imaginación bases sobre las que asentar esta competencia. Deben ser capaces de emplear distintos materiales y técnicas en la realización del proyecto. El proceso creativo y original de proponer un diseño mudéjar de acuerdo con los materiales, técnicas y colores más típicos de la época.
6. **Competencia Sociales y Cívicas (CSC):** participar en la toma de decisiones democráticas y en actividades de la comunidad de forma constructiva. Mostrar solidaridad e interés por resolver problemas. Actividades en grupo, coevaluación, asunción de papeles en el grupo.

3.6. TEMPORALIZACIÓN

El proyecto diseñado para la unidad didáctica de Movimientos en el plano está planteado para que tenga una duración de 12 sesiones (Tabla 5). Dentro de estas se incluyen, entre otras sesiones de aula, un taller, una visita cultural, una sesión de formación de grupos, presentación del resultado final y de evaluación-coevaluación. La asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3º ESO dispone de tres horas semanales de 50 minutos cada una.

Tabla 5 Temporalización del proyecto.

Semana	Sesión	Temática
1ª	Transversalidad	1ª Punto de partida: “Artesanos mudéjares del siglo XXI”. Presentación del tema. Visita cultural por la Zaragoza mudéjar. Contexto histórico. Lugar: exterior al aula y aula.
		2ª “Una cuestión previa: equipos de trabajo”. Formación de grupos. Definición del producto final y objetivos. Aula.
		3ª “ <i>Tempus fugit</i> ”. Asignación de papeles y definición de tareas y tiempos. Lugar: aula.
2ª	Intercambio de ideas	4ª “La tradición pervive. Artesanía mudéjar aragonesa”: Acercamiento práctico a la geometría mudéjar. Taller de cerámica. Lugar: exterior al aula.
		5ª “Recordando y recopilando que es gerundio”. Revisión de objetivos del proyecto y relación con los contenidos nuevos. Taller de Geoplanos. Lugar: aula.

3ª	Creatividad	6ª	“No todo es matemáticas, y no todo es simple lógica, también se trata de un poco de belleza y poesía”. Análisis y puesta en común. Taller de espejos. Reproducción de . Toma de decisiones. Lugar: aula.
		7ª	“Tren geométrico mudéjar”. Análisis y puesta en común. Más por menos. Construcción de mosaicos. Aplicación de los nuevos conocimientos. Toma de decisiones. Lugar: aula.
		8ª	“Alterando nuestras preconcepciones. ¡Qué tramas!”. Resolución de problemas. Taller de Geoplanos. Tramas impresas. Aplicación de los nuevos conocimientos. Lugar: aula.
		9ª	“Paseo matemático de una época pasada”. Introducción de nuevos conceptos grupos de simetría, ritmos lineales y giros a través de monumentos de la ciudad. Recopilación de fotografías y/o dibujos esquemáticos. Lugar: exterior al aula.
4ª	Colaboración	10ª	“Simposio matemático”. Repaso y últimos ejercicios prácticos. Puesta en práctica de las competencias básicas. Producción y edición del producto final. Lugar: aula.
		11ª	“La obra de Mahoma Rami”. Producción y edición del producto final. Preparación, defensa y revisión previa con expertos del proyecto. Lugar: aula.
		12ª	“La geometría: un camino hacia la belleza”. Presentación colectiva, reflexión y valoración. Evaluación del proyecto y coevaluación. Lugar: audiovisuales.

Fuente: Elaboración propia.

3.7. RECURSOS

Los recursos necesarios para la realización del proyecto son de tres tipos, personales, materiales y espaciales.

En lo referente a los medios materiales se va a requerir para el diseño de algunas de las sesiones y actividades del uso de las TIC, en particular GeoGebra y algún otro programa de ofimática, con el ordenador portátil mini por cada grupo de trabajo o incluso por cada alumno integrante de este. Si no se dispusiera de estos ordenadores se puede acudir al aula de informática del centro. En la visita cultural por la ciudad de Zaragoza, que sirve como contexto histórico y punto de partida, se precisa de cámara fotográfica o móvil, así como de cuaderno y bolígrafo para tomar las notas oportunas.

Por otro lado, en el desarrollo habitual de las sesiones en el aula hace falta una pizarra digital y/o proyector para la explicación de los nuevos conceptos matemáticos y la preparación y defensa del resultado del proyecto. Además, del material de papelería necesario para el correcto desarrollo del proyecto de cada uno de los grupos de trabajo (cartulinas, folios, hojas

transparentes, calculadora, regla, bolígrafos, pinturas, etc.), también en alguna sesión que sirva de afianzamiento de los contenidos se puede emplear Geoplanos o libros de espejos que permiten trabajar posiciones relativas y diseñar mosaicos, representaciones lineales y superficies.

En cuanto a los medios personales se consideran tal a todos aquellos docentes que intervienen en el diseño de este proyecto didáctico interdisciplinar, tanto del departamento de Matemáticas como el de otras materias presentes. Así como el personal no docente que proporcione ayuda puntual para habilitar espacios, preparar material, etc.

Por último, los recursos espaciales utilizados para este proyecto son el aula, la ciudad de Zaragoza, el aula taller de cerámica y la sala de audiovisuales.

3.8. METODOLOGÍA

En este tipo de metodología –ABP– se busca que exista una relación, un equilibrio entre el contenido curricular del curso correspondiente y la práctica activa fundamentada en experiencias o vivencias cercanas a la vida del estudiante. Además, se propone como una metodología donde el alumnado sea autónomo, investigue, reflexione, trabaje de forma cooperativa y cree su propio material de trabajo a través de medios diferentes como el uso de las TIC. Durante el desarrollo del proyecto, que se ha dividido a partir del diseño recomendado por Hernando (2015) cuando se emplea una metodología de ABP, en una secuencia didáctica de tres fases principales: Diseño, Creación y Muestra (Figura 5). Estas tres fases principales corresponden a las cuatro semanas de duración del proyecto; doce sesiones de aula.

La primera semana es la fase (Diseño) denominada de transversalidad donde cada una de las sesiones se utilizan para preparar a los alumnos de cara al proyecto. La segunda semana se relaciona con el intercambio de ideas (Creación) donde las sesiones se emplean para la recopilación de información, análisis y síntesis de ideas clave. La tercera semana se corresponde con la fase más creativa (Creación), donde los estudiantes emplean las sesiones para llevar a cabo sus ideas, aplican sus conocimientos y ponen en práctica lo aprendido. Y la última fase, llamada de colaboración (Muestra), por un lado, se enmarca en unas sesiones de creación, preparación y desarrollo y por otro lado de autoevaluación y evaluación final del producto y de todo el proyecto.

Cada sesión tendrá, en general, su metodología particular detallándose en cada caso. Las actividades expresamente relacionadas con los contenidos de geometría están diseñadas de acuerdo con los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Figura 5 Método de secuenciación didáctica para el ABP.



Fuente: Hernando, 2015.

3.9. ACTIVIDADES

En este apartado se detallan cada una de las sesiones que forman parte de esta propuesta de intervención didáctica fundamentadas en la metodología ABP para la enseñanza de los contenidos relacionados con la geometría en 3º ESO.

Las sesiones segunda y tercera están disponibles en el Anexo E, ya que, aunque forman parte del proyecto, no son exclusivas de la asignatura de Matemáticas, sino que ayudan al adecuado funcionamiento del mismo

3.9.1. Primera sesión

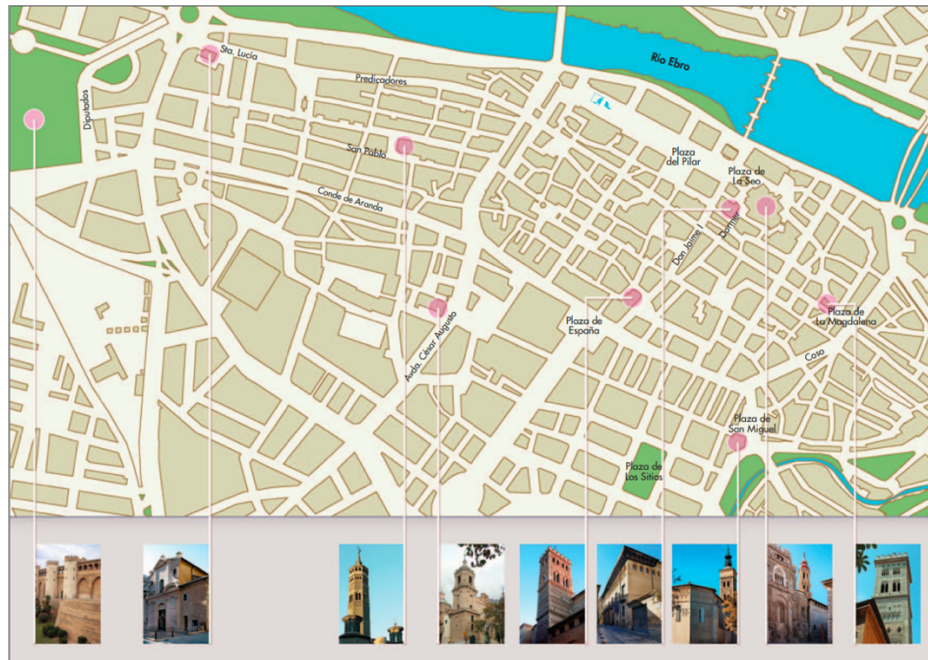
- ▶ **Objetivo didáctico:** O.D.7.
- ▶ **Competencias:** CAA-CSC-CEC-CCL-CMCT.
- ▶ **Desarrollo:** En esta primera sesión consta de dos partes; por un lado se presenta el proyecto y todos aspectos relacionados con el proceso y la forma de trabajar en este. Y, por otro lado, una visita cultural sobre el arte mudéjar en monumentos clave de esta época para la ciudad de Zaragoza.

En esta visita propuesta por el ayuntamiento se explican conceptos relacionados con la historia, con las matemáticas e incluso con la química. Los discentes aprenden la razón de la utilización de determinadas formas geométricas, el por qué de los colores empleados, la química detrás los compuestos, los materiales con los que construían estos edificios o monumentos, etc. por parte de los musulmanes. Asimismo, se les comenta por qué es una época tan especial en la región y cuánto tiempo perduró. El recorrido pasa por el palacio de la Aljafería, la catedral de La Seo, la iglesia de San Pablo y la iglesia de la Magdalena (Figura 6). Los alumnos tienen que tomar nota de los datos que les resulten más relevantes, impactantes o novedosos. De esta parte de la sesión se encarga el departamento de Geografía e Historia.

En la segunda parte de esta sesión, ya dentro del aula, en la hora de Matemáticas se les va a pedir que recuerden, con ayuda de sus apuntes, si hay algún elemento característico en lo que han visitado que se pudiera relacionar con la geometría, con las matemáticas. El docente irá apuntando las ideas que vayan dando estos en la pizarra. El siguiente paso que dar en esta sesión es pedirles que dibujen las formas geométricas que recuerden o los motivos repetitivos que se dan en los monumentos vistos.

Una vez analizado todo esto y reflexionado sobre las matemáticas presentes en esta época histórica se procede a presentar el proyecto. El arte mudéjar y la geometría van a ser los temas alrededor de los cuales gire el desarrollo del proyecto.

Figura 6 Recorrido de la visita mudéjar y sus monumentos emblemáticos.



Fuente: Usón y Ramírez, 2017.

- ▶ **Recursos:** Cuaderno (diario de sesiones), bolígrafos, tiza o pizarra digital.
- ▶ **Duración:** La visita tiene una duración de unas 3 horas. La sesión de clase 50 minutos.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** *One Minute Paper* con dos preguntas cortas. ¿qué tiene de característico el arte en esta época mudéjar? ¿qué elementos relacionados con las matemáticas aparecen? Dar al menos tres ejemplos.

3.9.2. Cuarta sesión

- ▶ **Objetivo didáctico:** O.D.4. Nivel 1 Visualización y reconocimiento y Nivel 2 de Van Hiele: Análisis.
- ▶ **Competencias:** CAA-CCEC-CMCT.
- ▶ **Desarrollo:** recorrido por el Patrimonio Artístico de Aragón a través de las cerámicas realizadas en el taller de Fernando Malo para los principales monumentos de la tierra aragonesa desde el año 1990. El Taller – Museo cuenta con diferentes espacios:
 - Visita guiada a la *Exposición “Alfar Mudéjar S.XXI”* del centro de interpretación de la cerámica mudéjar a través de 10 paneles con textos e imágenes, reproducciones de azulejos, solerías de la Aljafería y La Seo, herramientas de trabajo y juegos de geometría mudéjar. Duración aproximada 20 minutos.

- Participación en el Taller de Cerámica. Espacio de trabajo, modelado, decoración y hornos. En el taller se pueden ofrecer demostraciones de las técnicas utilizadas y/o realizar un taller de modelado de “la estrella mudéjar” para grupos. Duración aproximada de 45 minutos.
- ▶ **Recursos:** material facilitado por la visita, Diario de equipo, bolígrafos.
- ▶ **Duración:** alrededor de 1 hora y 30 minutos. Fuera del aula.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** proceso y composición final de la construcción realizada en el taller, diario de observación. Mapa conceptual de los contenidos vistos en la exposición junto con un croquis por equipo de la combinación de los azulejos, solerías, etc. en los monumentos representados.

3.9.3. Quinta sesión

- ▶ **Objetivo didáctico:** Recordar los contenidos de geometría vistos en el curso anterior y, partiendo de sus ideas previas, analizar los conceptos nuevos de simetría, giro y traslación sin nombrar cada uno de ellos. Nivel 2 de Van Hiele: Análisis.
- ▶ **Competencias:** CMCT-CAA.
- ▶ **Desarrollo de la sesión:** se reparten, por equipos de trabajo, dos Geoplanos (25 x 25 cm²) y varias gomas elásticas de diferentes colores. En la primera parte de esta sesión, por parejas van a tener que plantear en él diferentes polígonos regulares como el cuadrado, el pentágono, el hexágono, el triángulo, etc. Una vez realizados estos polígonos, deben anotar las características de estos en una tabla: número de lados, números diagonales, igualdad ángulos, tipos de ángulos, suma de ángulos.

En la segunda parte, deben dividir el Geoplano en cuatro partes iguales con dos hilos blancos. En uno de los dos cuadrantes de arriba van a construir, sin ocuparlo por completo, con las gomas un polígono regular y en el cuadrante de al lado van a intentar reproducir la misma figura. En los otros dos cuadrantes van a proceder de manera análoga pero con otro polígono regular. Una vez lo tienen hecho, van a girar el Geoplano 90° hacia la derecha y van a anotar en su Diario de equipo lo que vean reproduciéndolo en un dibujo. Vuelven a girar 90° y anotan. Y así dos veces más.

Posteriormente, dejan solo uno de los hilos en el Geoplano. Este les va a servir para que en uno de los lados de este, y partiendo de ese hilo, reproduzcan la mitad de un

hexágono y en el otro lado la otra mitad, con diferentes colores cada una. Intentar lo mismo con un cuadrado, triángulo y pentágono. Apuntar en el Diario de equipo las reflexiones y conclusiones encontradas.

Para finalizar la sesión, los alumnos a través de la plataforma *Edpuzzle* tienen que ver el vídeo, de Eduardo Sáenz de Cabezón, introductorio sobre los aspectos más importantes relacionados con la simetría e ir respondiendo a las cuestiones planteadas.

Como aclaración puede existir una actividad a modo de complemento de todo lo anterior sobre el trabajo de localización de varios puntos con el Geoplano y unirlos con segmentos dirigidos para introducir o recordar el concepto de vector.

- ▶ **Recursos:** Geoplano, gomas elásticas de colores, Diario de equipo, bolígrafo. Ordenadores “minis”, plataforma *Edpuzzle* e internet. Enlace del [vídeo](#).
- ▶ **Duración:** 50 minutos.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** diario de observación.

3.9.4. Sexta sesión

- ▶ **Objetivos didácticos:** O.D.1. O.D.3. O.D.4. O.D.8. Nivel 2 de Van Hiele: Análisis y Nivel 3 de Van Hiele: Ordenación y clasificación.
- ▶ **Competencias:** CAA-CSC-CMCT-CCEC.
- ▶ **Desarrollo de la sesión:** para iniciar la sesión los alumnos del mismo equipo por parejas deben trazar una línea recta horizontal en una hoja de papel y situar encima el libro de espejos. Si abren y cierran el libro aparecerán polígonos. Tienen que conseguir uno de 3, otro de 4, otro de 5 y otro de 6 lados. Cada uno de estos polígonos aparece descompuesto en una serie de triángulos. ¿Cuántos hay en cada caso? ¿qué ángulo forman los dos espejos? ¿cuál es el número de ángulos iguales? Anotar los datos obtenidos en una tabla en el diario de equipo.

A continuación cada grupo de trabajo además del libro de espejos y el semicírculo graduado dispone de varias figuras planas: dos cuadrados, dos triángulos equiláteros y uno isósceles, dos rectángulos, dos pentágonos regulares y dos hexágonos regulares. La idea de simetría está asociada a los espejos, la imagen reflejada es simétrica respecto a la original, pero un espejo es una herramienta útil para comprobar si una

figura es simétrica respecto de un eje. Por tanto, los alumnos deben, bajo esta premisa, encontrar y dibujar los ejes que reproduzcan la figura completa.

Una vez analizado esto con figuras sencillas, a cada equipo se le pasan tres imágenes impresas a color de creaciones artísticas en el mudéjar aragonés (Figura 7). Tiene que identificar, con ayuda de un espejo, el eje de simetría, si lo tiene, y clasificar el tipo de movimiento en el plano. ¿Podrías formar un mosaico con alguna?

Figura 7 *Tramas simétricas en el mudéjar aragonés.*



Fuente: Usón y Ramírez, 2017.

Por otro lado, el libro de espejos también les va a permitir estudiar las regularidades de muchas figuras, permitiéndoles entrar en el mundo mágico de los mosaicos. En esta parte deben comparar con cuáles de las figuras anteriores pueden formar un mosaico. Solo lo pueden conseguir con un hexágono regular, un cuadrado y un triángulo equilátero. Analizar este hecho pensando en el caso del pentágono. Ya que en cada vértice tienen que confluír ángulos cuya suma sea de 360° . Deben describir todo lo que ven y dibujar para la siguiente sesión.

- ▶ **Recursos:** libros de espejos, espejo individual, semicírculo graduado, figuras planas de polígonos regulares, bolígrafo, imágenes del arte mudéjar y Diario de equipo.
- ▶ **Duración:** 50 minutos.

- ▶ **Evaluación final de la actividad:** diario de observación, bocetos de simetría con los libros de espejos. Tabla resumen de conclusiones.

3.9.5. Séptima sesión

- ▶ **Objetivo didáctico:** O.D.1. O.D.3. O.D.4. O.D.8. O.D.9. Nivel 2 de Van Hiele: Análisis y Nivel 3 de Van Hiele: Ordenación y clasificación.
- ▶ **Competencias:** CAA-CSC-CMCT-CCEC.
- ▶ **Desarrollo de la sesión:** en la primera parte de la sesión van a ver un fragmento del programa Más por menos-Movimientos en el plano de RTVE con la aplicación *Edpuzzle* por grupos de trabajo, deben contestar a las cuestiones planteadas y prestar atención a los comentarios. Cuando terminen tienen que anotar las reflexiones a las que hayan llegado y también los elementos característicos de este movimiento en el plano.

Por parejas y con la ayuda de un bolígrafo y papel se les propone el diseño de un tren con mínimo 5 vagones geométricos donde señalen los puntos característicos, la dirección y el sentido que lleva el tren mediante flechas y la unión correspondiente de puntos. Una vez terminada esta tarea, la pondrán en común entre el resto de los equipos de la clase, analizarán si es correcto el diseño y, finalmente, votarán un ganador.

A continuación, se les presenta una imagen de una parte de una cenefa o friso de la pared mudéjar de La Seo (Figura 8) en la pizarra digital y por equipos de trabajo han de crear con ese motivo en papel cuadriculado la parte restante.

Figura 8 *Cenefa mudéjar ornamental en La Seo.*



Fuente: Usón y Ramírez, 2017.

Como han visto en el video anterior, los mosaicos se pueden obtener por una traslación vertical de un friso. Partiendo de esta premisa y dada una colección de polígonos regulares de igual lado (ocho de cada tipo) deben construir pavimentos usando un tipo

de polígonos (triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos). Razonar y anotar los resultados. En los casos que sea posible dibujar el mosaico obtenido y extenderlo a una superficie mayor. Análogamente tienen que describir y diseñar posibles mosaicos combinando dos o tres tipos de polígonos regulares. ¿Se puede combinar entre todos? ¿Por qué? Deben acordarse de lo planteado en clase anterior sobre los ángulos y tipos de polígonos regulares empleados en el taller de espejos. Existen solo tres tipos de mosaicos regulares y ocho tipos de mosaicos semirregulares.

- ▶ **Recursos:** enlace video [Edpuzzle](#), hoja cuadriculada, bolígrafo, ordenadores “minis” portátiles, internet, Diario de equipo y polígonos regulares por equipos.
- ▶ **Duración:** 50 minutos.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** video *Edpuzzle*, diario de observación docente y creación propia de mosaico y tren geométrico.

3.9.6. Octava sesión

- ▶ **Objetivo didáctico:** O.D.1. O.D.3. O.D.4. Nivel 2 de Van Hiele: Análisis y Nivel 3 de Van Hiele: Ordenación y clasificación.
- ▶ **Competencias:** CAA-CSC-CMCT-CCEC.
- ▶ **Desarrollo de la sesión:** cada uno de los equipos tendrá sobre su mesa cuatro tramas impresas diferentes a color. Cada una de estas tendrá una pareja impresa sobre una lámina transparente. Los alumnos tendrán que comprobar y anotar qué sucede con cada una de ellas, si una vez emparejadas una sobre la otra se le aplica a una un giro de 90° en sentido horario. Y así con todas ellas.

Una vez realizada esta parte con las hojas de tramas impresas, deben coger por grupo un Geoplano y las gomas elásticas. Cada uno representa un polígono regular más o menos centrado en la parte de arriba. En la figura tienen que aparecer nombrados los vértices de alguna manera y el punto sobre el que van a girarla. A continuación tienen que girar la figura, puede ser con un vértice como centro o un centro externo a esta. Van construyendo las nuevas figuras sin alterar la original y señalando los vértices nuevos correspondientes a los originales. Primero pueden girar el Geoplano con la primera figura y ver lo que sucede con esta. En una tabla resumen escriben cuáles son los elementos que hay que tener en cuenta a la hora de realizar un giro a la figura.

Al término de la sesión se les presenta la siguiente imagen de la cenefa de la iglesia de San Pablo (véase Figura 9), por equipos y sobre el folio en el que está impresa, deben averiguar cuál es la isometría generadora del friso en su avance horizontal: giro de 180° .

Figura 9 *Cenefa de la base de la torre de San Pablo.*



Fuente: Usón y Ramírez, 2017.

- ▶ **Recursos:** hojas con tramas impresas, Geoplano, gomas elásticas, Diario de equipo, bolígrafo, códigos QR para la aplicación *Plickers*, internet, proyector.
- ▶ **Duración:** 50 minutos.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** Tabla resumen, actividad de cinco preguntas en *Plickers*, diario de observación docente.

3.9.7. Novena sesión

- ▶ **Objetivos didácticos:** O.D.1. O.D.3. O.D.4. O.D.6. O.D.8. Nivel 2 de Van Hiele: Análisis y Nivel 3 de Van Hiele: Ordenación y clasificación.
- ▶ **Competencias:** CMCT-CSC-CAA-CCL.
- ▶ **Desarrollo de la sesión:** *Zaragoza con otros ojos* supone una línea de actuación didáctica donde Zaragoza se emplea como espacio de aprendizaje y conocimiento. Dentro de esta, las Rutas Matemáticas forman parte de la idiosincrasia de este proyecto donde se aúnan los contenidos curriculares y el entorno más cercano al alumnado. En el paseo que van a dar, esta vez van a tener que estar pendientes de los cuatro tipos de movimientos en el plano –traslación, giro, simetría axial y simetría central– existentes en las fachadas y elementos constitutivos de tres monumentos mudéjares de Zaragoza. Las tres paradas van a centrarse en la iglesia de la Magdalena, en La Seo y en la iglesia de San Pablo.

En la primera parada se les va a explicar apoyándose en las decoraciones en forja de un edificio modernista los siete ritmos lineales diferentes que permiten alargar un módulo de forma regular e infinita en línea recta. En la Figura 18 del Anexo F se observa un ejemplo del cuaderno del alumno. Una vez presentados estos siete ritmos, comienza el verdadero paseo mudéjar. La siguiente parada es la iglesia de la Magdalena, en ella reconocerán una figura familiar: la estrella típica del mudéjar. En una hoja transparente tienen esta estrella representada de dos formas: con cinco piezas y una interior blanca y por una única pieza azul externa y otra blanca interna. Deben observar y analizar si alguna de ellas presenta uno o más de los movimientos en el plano previamente explicados en su cuaderno. En caso afirmativo, deben dibujar el movimiento encontrado sobre esta hoja (véase Figura 10).

Figura 10 *Estrella típica del mudéjar y dibujo para la actividad.*

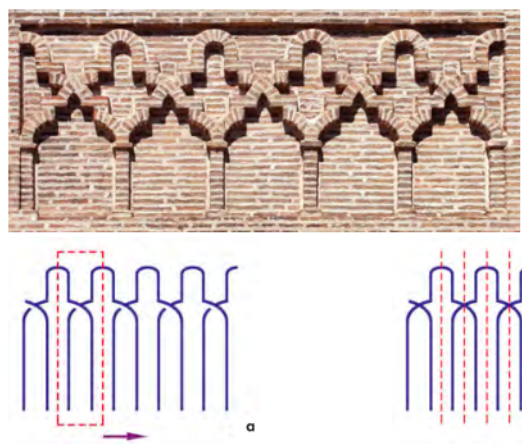


Fuente: Usón y Ramírez, 2017.

A continuación, deben prestar atención en la decoración del ábside del s. XIV y pararse a ver las transformaciones presentes en esta parte de la fachada. Para ello, deben realizar un croquis sobre el cuaderno de una parte e identificar los posibles movimientos: traslación, simetría, etc. Y, por último, identificar el tipo de cenefa en función de los ritmos aprendidos (Figura 11).

Se procede de manera análoga con el monumento restante y con las actividades similares establecidas en el cuaderno del estudiante. En la siguiente parada: La Seo, van a tener que analizar, reflexionar, encontrar y fotografiar detenidamente la mayor cantidad de tipos de ritmos lineales, giros, traslaciones y simetrías posibles. En la Figura 19 del Anexo F hay una muestra de esto.

Figura 11 *Ábside de la iglesia de la Magdalena y su transformación.*



Fuente: Usón y Ramírez, 2017.

Por otro lado, se aconseja a los alumnos que tomen fotografías que les puedan servir de inspiración y ayuda para llegar al producto final. Asimismo, con todo lo visto en la visita y en las sesiones tienen que ir con una idea sobre el diseño de lo que va a ser su producto final.

- ▶ **Recursos:** cuaderno del alumno Rutas matemáticas III, bolígrafo, rotulador, cámara de fotos o móvil.
- ▶ **Duración:** 2 horas.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** diario de observación, cuaderno del alumno con las actividades resueltas y breve prueba tipo test sobre los tipos de movimientos en el plano. Rúbrica de coevaluación.

3.9.8. Décima sesión

- ▶ **Objetivo didáctico:** O.D.1. O.D.2. O.D.3. O.D.4. O.D.8. Nivel 3 de Van Hiele: Ordenación y clasificación y Nivel 4: Deducción formal.
- ▶ **Competencias:** CMCT-CD-CAA-CCEC.

Desarrollo de la sesión: esta sesión va a servir de recopilación de la información clave y como repaso de los movimientos en el plano. La sesión se va a dividir en dos partes. En la primera parte de la sesión, los estudiantes van a visualizar un video disponible en la ficha de trabajo adjunta (Figura 20 del Anexo G) sobre el funcionamiento de GeoGebra con la vista geométrica seleccionada. En él se explican los movimientos en el plano de traslación, giro y simetría axial y central. Una vez visto, tienen que realizar

un mapa conceptual (véase de ejemplo Figura 21 de Anexo H) con los tres movimientos vistos a lo largo de estas sesiones, destacando los elementos característicos clave, dibujando un ejemplo y dando una definición en términos matemáticos de cada uno. Para la segunda parte de esta sesión, los alumnos, por un lado, tienen unos minutos para familiarizarse con la aplicación con las actividades propuestas con el Libro de GeoGebra disponible en la ficha de trabajo. En este libro encuentran actividades de traslaciones, giros y simetrías, así como de composición de movimientos y frisos. Y, por otro lado, deben intentar reproducir con la ayuda de GeoGebra, por parejas dentro del equipo, alguno de los elementos geométricos trabajados en la sesión anterior del paseo por la ciudad.

En esta sesión el docente va a recordarles cuáles son los objetivos propuestos, los objetivos trabajados y los objetivos logrados con la ayuda de una línea temporal en la que aparece cada sesión con estos objetivos proyectada en la pizarra digital. También, se les recuerda cuál es el producto final y el número de sesiones que tienen para ir desarrollándolo.

Además, depende del grado de avance que lleven los grupos pueden comenzar a producir y diseñar su producto final.

Recursos: enlace del video de [GeoGebra](#), ordenadores “minis” portátiles, internet, programa GeoGebra y enlace de los [ejercicios con GeoGebra](#).

- ▶ **Duración:** 50 minutos.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** Coevaluación del trabajo realizado. Recreación en GeoGebra y diario de observación docente.

3.9.9. Undécima sesión

- ▶ **Objetivo didáctico:** O.D.4. O.D.7. O.D.10.
- ▶ **Competencias:** CAA-CD-CSC-CCEC-CMCT-CCL.
- ▶ **Desarrollo de la sesión:** en esta penúltima sesión del proyecto interdisciplinar los alumnos van a ponerse con el diseño de su producto final, a elegir los movimientos que van a aparecer, la combinación de estos y cómo los van a reproducir. Para ello, pueden encontrar más información en la página web Territorio mudéjar, que es una asociación de ayuntamientos cuyo objetivo es afianzar una red de gestión unificada y

colaborativa para la utilización de los recursos histórico-artísticos vinculados al importante patrimonio mudéjar en Aragón, en ella pueden acceder con tan solo un clic a la mayor parte del patrimonio mudéjar de la comunidad autónoma. Otras páginas webs de interés son Turismo de Aragón o la colección de “Patrimonio Mundial Unesco”. En el resto de las asignaturas han ido trabajando en los otros aspectos a tener en cuenta a la hora de diseñar el producto final como, materiales, colores, historia e inspiración del proyecto, etc.

La idea es que los estudiantes llegados a este punto tengan un boceto de la fachada o parte de ella que van a diseñar y presentar. Con la ayuda de GeoGebra van a hacer su diseño original con los grupos de simetría que van a aparecer en la fachada, los pasos previos que los han llevado a ese diseño, junto con la integración de los elementos característicos de estos: vectores de traslación, ejes de simetría, ángulo de giro, etc. Pueden preguntar al docente sobre cualquier aspecto relacionado con el programa, diseño, cuestiones matemáticas y sobre el enfoque de la defensa del proyecto.

- ▶ **Recursos:** enlace página web [Territorio Mudéjar](#), enlace colección “Patrimonio Mundial Unesco” de [Google Arts and Culture](#), enlace [Turismo de Aragón](#), GeoGebra, Diario de equipo, bolígrafo, ordenadores “minis” portátiles e internet.
- ▶ **Duración:** 1 hora y 40 minutos. 2 clases.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** rúbrica de coevaluación, Diario de observación docente.

3.9.10. Duodécima sesión

- ▶ **Objetivo didáctico:** O.D.4. O.D.7. O.D.10.
- ▶ **Competencias:** CD-CSC-CCL-CCEC-CMCT.
- ▶ **Desarrollo de la sesión:** última sesión del proyecto y presentación del mismo. Cada grupo sale a exponer su producto final delante del resto de compañeros y equipo docente. La presentación es libre. Podían hacerla mediante PowerPoint, cartulinas o carteles tipo presentación de congresos, exposición de fotografía, etc. En la defensa de su proyecto, tienen que explicar la idea de su trabajo, la historia, la inspiración, el diseño, los materiales, colores y las matemáticas. Están en la época mudéjar y concursan hacia la nueva construcción de un edificio en Zaragoza. La evaluación de

este proyecto se lleva a cabo por parte tanto del equipo docente como del resto de compañeros incluidos los miembros del grupo.

- ▶ **Recursos:** proyector, ordenador, altavoces, pizarra digital, paneles, cartulinas, etc.
- ▶ **Duración:** 50 minutos.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** rúbrica final docente, rúbrica de exposición final.

3.10.EVALUACIÓN

En este apartado se detalla la manera de evaluar de las distintas sesiones, así como la ponderación de cada una y, además, se realiza un análisis DAFO de la propuesta de intervención didáctica.

3.10.1. Evaluación del alumnado

La evaluación del alumnado atiende a los criterios y estándares de aprendizaje expuestos en el punto 3.4.2. La concreción de esta evaluación se va a realizar de tres modos diferentes:

- ▶ **Evaluación inicial:** es necesaria para conocer las ideas previas que tienen los alumnos sobre el tema tratado en el proyecto. Sirve como contextualización del nivel del estudiantado y así poder ofrecerles el mejor punto de partida. No tiene carácter cuantitativo.
- ▶ **Evaluación formativa:** su implementación está presente en el proceso de enseñanza-aprendizaje y tiene como objetivo no solo detectar las dificultades sino también el progreso y la evolución de los estudiantes. Esta información va a ayudar a reajustar, reforzar y reorientar las actividades propuestas en función del nivel de adquisición de los contenidos. A través de rúbricas de coevaluación (Tabla 12 de Anexo I), de diario de observación docente y otras actividades o fichas evaluables.
- ▶ **Evaluación sumativa:** se realiza una vez terminada la unidad didáctica y se utiliza para verificar los resultados obtenidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje del alumnado. Esta determina si se han alcanzado los objetivos definidos al inicio y en qué grado por parte de cada uno de ellos en relación con los estándares de aprendizaje. Rúbrica de coevaluación para presentación final (Tabla 6) y rúbrica de consecución de objetivos (Tablas 14 de Anexo I).

En la Tabla 13 del Anexo I se detallan los instrumentos de la evaluación del progreso, junto con la ponderación de cada uno, de los estudiantes en las diferentes sesiones.

Tabla 6 Rúbrica de coevaluación de la presentación producto final.

Categoría	4 Excelente	3 Satisfactorio	2 Mejorable	1 Insuficiente
Habla	Habla despacio y con gran claridad.	La mayoría del tiempo habla despacio y con claridad.	Unas veces habla despacio y con claridad, pero otras se acelera y se le entiende mal.	Habla rápido o se detiene demasiado a la hora de hablar. Además su pronunciación no es buena.
Vocabulario	Usa vocabulario apropiado para la audiencia. Aumenta el vocabulario de la audiencia definiendo las palabras que podrían ser nuevas para ésta.	Usa vocabulario apropiado para la audiencia. Incluye 1-2 palabras que podrían ser nuevas para la audiencia, pero no las define.	Usa vocabulario apropiado para la audiencia. No incluye vocabulario que podría ser nuevo para la audiencia.	Usa varias (5 o más) palabras o frases que no son entendidas por la audiencia.
Volumen	El volumen es lo suficientemente alto para ser escuchado por todos los miembros de la audiencia a través de toda la presentación.	El volumen es lo suficientemente alto para ser escuchado por todos los miembros de la audiencia al menos 90% del tiempo.	El volumen es lo suficientemente alto para ser escuchado por todos los miembros de la audiencia al menos el 80% del tiempo.	El volumen con frecuencia es muy débil para ser escuchado por todos los miembros de la audiencia.
Comprensión	El estudiante puede con precisión contestar casi todas las preguntas planteadas sobre el tema por sus compañeros de clase.	El estudiante puede con precisión contestar la mayoría de las preguntas planteadas sobre el tema por sus compañeros de clase.	El estudiante puede con precisión contestar unas pocas preguntas planteadas sobre el tema por sus compañeros de clase.	El estudiante no puede contestar las preguntas planteadas sobre el tema por sus compañeros de clase.
Postura del cuerpo y contacto visual	A la hora de hablar, la postura y el gesto son muy adecuados. Mira a todos los compañeros con total naturalidad.	La mayoría del tiempo la postura y el gesto son adecuados y casi siempre mira a los compañeros mientras habla.	Algunas veces, mantiene la postura y el gesto adecuados, y otras no. En ocasiones mira a sus compañeros.	No mantiene la postura y gesto propios de una exposición oral y, la mayoría de las veces no mira a sus compañeros.
Contenido	Demuestra un completo entendimiento del tema.	Demuestra un buen entendimiento del tema.	Demuestra un buen entendimiento de partes del tema.	No parece entender muy bien el tema

Fuente: Cedec, 2021.

3.10.2. Evaluación de la propuesta

El estudio de la viabilidad de la propuesta didáctica tiene que servir al docente para reflexionar sobre la nueva práctica metodológica aplicada y, con ello, llegar a mejorar en las estrategias a seguir en el futuro de acuerdo con este tipo de enseñanza.

Este cambio de paradigma educativo lleva asociado en su implementación diversos aspectos organizativos y didácticos, que afectan tanto al alumnado como al profesorado. Por ejemplo, en lo que concierne a los docentes está el incremento en la carga de trabajo sobre todo a la hora de diseñar la evaluación, la coordinación entre las diferentes materias o la temporalización de las sesiones y los objetivos a alcanzar. Y por otro lado se encuentra el de los estudiantes que deben ser capaces de vencer su resistencia a participar, a trabajar en equipo o incluso pueden tener la impresión de que les supone un incremento de la carga de trabajo y encontrarse un poco más desorientados al principio.

Por tanto, poner en valor todos estos elementos ayuda a la propia práctica docente, a conocer las dificultades, obstáculos y problemas que han existido en el desarrollo del proyecto tanto a nivel organizativo como de medios materiales y/o personales.

Para conseguir esta mejora es fundamental favorecer la interacción entre todos los agentes participantes en este proyecto, teniendo en cuenta los puntos fuertes y débiles encontrados por ambos. Los instrumentos de evaluación deben facilitar este proceso de mejora. Debido a esto, un análisis DAFO es considerada una técnica adecuada para tratar de identificar cuáles son los factores internos y externos que pueden afectar al desarrollo del proyecto o al desarrollo de una solución, permitiendo la reflexión sobre la idoneidad del diseño, las estrategias empleadas, las herramientas de evaluación, etc. y así alcanzar la mejora de la implementación de dicho proyecto. Estos factores internos y externos se clasifican en factores de dos tipos: positivos y negativos. Según estos factores sean internos o externos, y positivos o negativos, se distinguen:

- ▶ Factores internos: debilidades y fortalezas.
- ▶ Factores externos: amenazas y oportunidades.

En la Tabla 7 se presenta la matriz DAFO diseñada *ad hoc* para este proyecto interdisciplinar relacionado con el bloque de contenidos de geometría en 3º ESO.

Tabla 7 Matriz de análisis DAFO para la propuesta didáctica.

Positivos		Negativos
Fortalezas		Debilidades
Factores internos	Colaboración por parte del equipo docente.	No existe la cultura de trabajo en equipo entre docentes y estudiantes.
	Interdisciplinariedad del proyecto.	Falta de formación de ABP en los centros.
	El conocimiento se acerca a la realidad tangible de los estudiantes. Se fomenta la autonomía.	El diseño de los horarios de los docentes y la falta de espacios.
	El proyecto de ABP se puede incorporar como Proyecto de Innovación Docente.	Necesaria hora de coordinación con el equipo docente del curso.
	La metodología del ABP es idónea para la atención a la diversidad.	Posible falta de continuidad en la metodología ABP.
	Mayor motivación por parte del alumnado a la hora de aprender y reforzar contenidos nuevos.	Mayor tiempo de dedicación en el diseño de actividades, métodos de evaluación, organización interna, etc.
	Actividades de formación para el equipo docente y claustro.	Tiempo extra necesario para ABP no contemplado en la programación didáctica del departamento.
Positivos		Negativos
Oportunidades		Amenazas
Factores externos	Los resultados del informe PISA debe ser un aliciente para cambiar la metodología.	El cambio constante en la ley educativa.
	Las herramientas TIC ayudan al desempeño de las tareas propuestas y a la integración de la realidad en el aula.	LOMCE, cada vez mayor contenido en el currículo de matemáticas.
	Mayor oferta y demanda de cursos de formación de ABP para docentes.	Las familias no siempre ven con buenos ojos el cambio de metodología.
	La interdisciplinariedad ayuda a relacionar contenidos y actividades entre centros y docentes.	El presupuesto destinado a la educación pública no goza de buena salud. Falta de herramientas TIC o mantenimiento.
	La mayoría estudiantil cada vez está más familiarizada con las nuevas tecnologías.	El ABP puede verse como una imposición externa por parte del Equipo Directivo o Servicio Provincial de Educación.
	Mejor acceso a internet en los centros.	El currículo no está adaptado a este tipo de metodología.

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con las debilidades y amenazas del proyecto ABP (véase Tabla 7), algunas de las sesiones diseñadas requieren de herramientas TIC para su desempeño, por lo que el deterioro de los recursos informáticos o la falta de ellos podría obligar a la reorganización de la

programación. De igual modo, la formación del equipo docente debe ser adecuada a este tipo de metodología, así como su predisposición actitudinal y colaborativa hacia la innovación didáctica. Por otro lado, tanto para los profesores como para los alumnos supone un reto las nuevas formas de evaluar. Finalmente, la actitud y la motivación del alumnado ante este nuevo reto va a ser fundamental para el desarrollo de sus conocimientos y el correcto funcionamiento del proyecto.

3.11.AUTOEVALUACIÓN

El objetivo de este apartado es evaluar la propuesta de enseñanza-aprendizaje para el bloque 3 de Geometría, en concreto, de la unidad didáctica: Movimientos en el plano a través del ABP como metodología innovadora y motivadora. Se propone una breve encuesta para el análisis y evaluación del proyecto didáctico de intervención (véase Tabla 11 del Anexo I).

4. CONCLUSIONES

El desarrollo del presente trabajo se ha fundamentado en el logro del objetivo principal a través de los diferentes objetivos específicos definidos al comienzo del mismo. A continuación se enuncian las conclusiones obtenidas durante el proceso de redacción de esta propuesta con motivo de la consecución de estos.

Con el primer objetivo se pretendía conocer cuál es la situación actual o habitual de la enseñanza de la materia Matemáticas, en concreto del bloque de geometría en 3º ESO; tanto en el contenido como en la forma. El análisis sobre el estudio del informe PISA en lo referido al área de matemáticas deja patente la tendencia a la baja de los resultados obtenidos por los estudiantes aragoneses, aunque mejores que la media española no deja de ser significativo esta estabilidad en el rendimiento académico bajo. Es clave fijarse y apoyar tanto a los alumnos con más carencias como a los de altas capacidades, ya que de no ser así puede llegar a hacer que disminuya el buen rendimiento de estos. Es necesario, por tanto, un cambio de estrategia y metodología para asegurar una mejora en la motivación y rendimiento de todos los discentes.

El segundo de los objetivos específicos buscaba el análisis de las principales dificultades y obstáculos con base en experiencias previas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. La investigación realizada a través de los diversos artículos y libros en esta materia confirma la necesidad de un replanteamiento de los procesos de enseñanza en una nueva dirección, donde el aprendizaje de los contenidos de geometría se dé en un contexto más cercano a la realidad de los alumnos y de forma más significativa. Dado que esto facilita al estudiante la adquisición de las habilidades, competencias y capacidades necesarias para comprender y familiarizarse con dichos contenidos de manera más eficiente, crítica y completa. El enfoque debe basarse en una adecuada definición de los objetivos, poniendo énfasis en lo que ellos son capaces de aprender, apoyándose en una metodología activa donde el docente sea guía y facilitador de situaciones que los alienten y motiven durante este proceso. Por todo ello, se propuso el tercer y cuarto objetivo específico cuya pretensión estaba ligada con la introducción a una metodología activa basada en un aprendizaje significativo: el ABP. El diseño de un proyecto didáctico atractivo, con una correcta definición y secuenciación de los objetivos, gracias a la propuesta de los cuatro niveles de razonamiento

de Van Hiele en geometría, donde los estudiantes puedan alcanzar un nivel de logro mayor al de partida y el docente es un apoyo en el desarrollo de este, plantea mejoras frente a las dificultades halladas en la enseñanza de geometría en Matemáticas de 3º ESO.

Aunando todo lo anterior a la contextualización cercana a la realidad del alumno con los contenidos curriculares de este bloque aparece el último objetivo específico. Utilizar el arte mudéjar de Zaragoza como escenario didáctico ha sido fundamental para el diseño de las actividades y sesiones enmarcadas dentro del proyecto de este trabajo. Por tanto, ha servido para dar interdisciplinariedad a los contenidos geométricos dados, de manera que no se les presentaban como un producto acabado que tuvieran que memorizar. Favoreciéndose así tanto un aprendizaje práctico con aplicación real de los procesos matemáticos con actividades de observación, análisis y creación propia como, a su vez, un aprendizaje motivador para la mayoría estudiantil de unos contenidos, a priori, abstractos.

Llevar a término estos cinco objetivos específicos con éxito ha ayudado a alcanzar el objetivo principal del trabajo que consistía en diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje del bloque de geometría en el curso de 3º ESO apoyada en la arquitectura y arte mudéjar de la ciudad de Zaragoza a través del Aprendizaje Basado en Proyectos.

Como última reflexión, solo si el alumnado mostrase una buena predisposición al aprendizaje y a la comprensión del bloque de geometría, del mismo modo que el docente incentivara la capacidad de razonamiento, este modelo daría resultados óptimos.

5. LIMITACIONES Y PROSPECTIVA

El diseño de este proyecto de intervención didáctica es adecuado para el proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque de geometría de 3º ESO. Sin embargo, es una propuesta meramente teórica, ya que no se ha podido implementar en el aula. Por tanto, llevar a cabo este proyecto de innovación metodológica permitiría tener, desde una perspectiva real, una visión más precisa sobre la idoneidad de cada una de las sesiones diseñadas, la correcta definición en tiempo y forma de las actividades, contenidos y materiales propuestos para su desarrollo. Asimismo, la evaluación de dicha propuesta por parte tanto del alumnado como del profesorado sería una herramienta perfecta para la reflexión de las estrategias a seguir en función de las necesidades de aprendizaje reales.

Por otro lado, para la elaboración del trabajo se ha tenido en cuenta una temática específica viéndose limitada la investigación y el diseño de este a unos contenidos curriculares concretos, así como a un único curso. Por esta razón, en un futuro sería fundamental intentar ampliar la búsqueda en el resto de los contenidos matemáticos y niveles educativos. Además, se considera clave que estos se puedan vincular con el arte, la arquitectura o incluso la naturaleza como recurso didáctico en favor de un aprendizaje significativo.

Del mismo modo que tanto los contenidos como el nivel han quedado limitados, el proyecto se centra en un escenario como la ciudad de Zaragoza y en un arte como el mudéjar aragonés. Otra línea prospectiva de investigación puede consistir en explorar escenarios culturales y artísticos diferentes para contextualizar en otros centros o lugares y poder así ampliar la interdisciplinariedad de la formación del alumnado con los contenidos curriculares oportunos.

Finalmente, cuando se habla de la enseñanza y el aprendizaje de la asignatura de Matemáticas, los docentes deben aspirar a la conquista de la mejora, del desarrollo de capacidades, del espíritu crítico, de la investigación, de la innovación, de la enseñanza de la inteligencia emocional, de la interacción por y para los estudiantes. Se debería ser, por tanto, buscadores de cualidades y no de defectos como dice J. Marrasé. Por ello, la formación continua y el estudio de las dificultades y obstáculos a los que se enfrentan los alumnos deben ser siempre una prioridad a la hora de diseñar e implementar actividades metodológicas innovadoras, motivadoras y contextualizadas, para poder atender a la diversidad del aula.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrate, R.; Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 39(1), 1-9. Recuperado de: <https://rieoei.org/historico/deloslectores/1290Abrate.pdf>
- Almeida, M. (2002). *Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia*. [Tesis doctoral, Universidad de Barcelona]. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Barcelona, Barcelona. Recuperado el 29 de abril de 2021 en: https://www.researchgate.net/publication/39156025_Desarrollo_profesional_docente_en_Geometria_analisis_de_un_proceso_de_Formacion_a_Distancia/link/54660fdd0cf25b85d17f551e/download
- Alsina, C. (2005). Los secretos geométricos en diseño y arquitectura. *La geometría y la historia de la matemática en la enseñanza secundaria. Catalunya*, 166, 23. Recuperado el 6 de mayo de 2021 en: <http://textos.pucp.edu.pe/pdf/412.pdf>
- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). Invitación a la Didáctica de la Geometría. *Matemática: Cultura y Aprendizaje*, 12. Madrid: Editorial Síntesis.
- Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para ESO*. Madrid, España: Síntesis.
- Andrade, E. y Chacón, E. (2018). Implicaciones teóricas y procedimentales de la clase invertida. *PULSO. Revista de Educación*, 41, 251-267. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6742360>
- Antón, Á. y Sánchez, M. (2020). Metodología mixta Flipped Classroom y Aprendizaje Basado en Proyectos para el aprendizaje de la geometría analítica en Secundaria. *Enseñanza y Teaching: Revista Interuniversitaria de Didáctica*, 38(2), 135-156. <https://revistas.usal.es/index.php/0212-5374/article/view/et2020382135156>
- Arrieta, M. (1992). Bases para un planteamiento actual de la geometría en la enseñanza secundaria obligatoria (12-16). *Suma*, 10, 9-14. <http://funes.uniandes.edu.co/7803/>
- Ausubel, D. P. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, 1(1-10). https://www.academia.edu/10435788/TEORÍA_TEORIA_DEL_APRENDIZAJE_SIGNIFICATIVO

- Ausubel, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Editorial Paidós. https://issuu.com/luisorbegoso/docs/ausubel_-_adquisicion_y_retencion_d
- Badia, A. y García, C. (2006). Incorporación de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje basados en la elaboración colaborativa de proyectos. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 2 (3), 42-54. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2126328>
- Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática, Vols. 12 al 16*, Número extraordinario, 67-87. <https://core.ac.uk/download/pdf/287746183.pdf>
- Barrantes, M. (2003). Caracterización de la enseñanza aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria. *Campo abierto*, 24, 15-36. https://www.researchgate.net/publication/39207658_Caracterizacion_de_la_ensenanza_aprendizaje_de_la_geometria_en_primaria_y_secundaria
- Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012a). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, 8(1), 25. <https://core.ac.uk/download/pdf/236360994.pdf>
- Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012b). Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria. *Campo abierto: Revista de educación*, 31(2), 133-148. <https://relatec.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1497>
- Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro sobre la geometría Escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 241-250. <https://ddd.uab.cat/record/1658>
- Barrantes, M., Balletbo, I. y Fernández, M. A. (2014). Enseñar Geometría en Secundaria. *Revista de Ciencias de la Educación: Academicus*, 1(3), 26-33. https://www.researchgate.net/publication/261170095_Ensenar_geometria_en_Secundaria
- Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo abierto: Revista de educación*, 27(1), 55-71. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2885384>
- Barron, B. J. S., Schwartz, D. L., Vye, N. J., Moore, A., Petrosino, A., Zech, L., Bransford, J. D. The Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1998). *Doing with understanding: Lessons*

- from research on problem- and project-based learning. *The Journal of the Learning Sciences*, 7, 271-311. https://www.uky.edu/~jwi229/saas/Barron_etal_1998.pdf
- Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 41-62. <https://www.jstor.org/stable/749717?origin=crossref>
- Boaler, J. (2002). *Experiencing School Mathematics: Traditional and Reform Approaches to Teaching and their Impact on Student Learning*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Revista Colombiana de Educación*, 60, 41-60. <http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n60/n60a3.pdf>
- Cedec. Centro nacional de desarrollo curricular en sistemas no propietarios. (2021, junio 3). *Banco de rúbricas y otros documentos*. <https://cedec.intef.es/banco-de-rubricas-y-otros-documentos/>
- Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit J. B., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele* (Vol. 95). Ministerio de Educación. <https://sede.educacion.gob.es/publiventa/d/1379/19/1>
- Díaz, F., Barriga, A., Hernández, R. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. Editorial. Mc Graw Hill. México.
- Diez, N. (2020, mayo 22). Debemos reflexionar sobre cómo afrontar la educación matemática adaptada a las necesidades del siglo XXI. *Real Sociedad Matemática Española*. Recuperado de: <https://www.rsme.es/2020/05/luis-j-rodriguez-debemos-reflexionar-sobre-como-afrontar-la-educacion-matematica-adaptada-a-las-necesidades-del-siglo-xxi/>
- Gamboa, R., y Ballester, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista electrónica educare*, 14(2), 125-142. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5414933>
- Gobierno de Canarias. (2021, junio 17). *Movimientos en el plano*. <http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/contenidosdigitales/ucticee/s2/CD110000006/#/lang/es/pag/cc33f16a353f4fae55f594fbbd43558d>

- Goncalves, R. (2006, Enero-Junio). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista Ciencias de la Educación*, 1(27), 83-98.
<http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/volIn27/27-5.pdf>
- Guillén, G. (2010). ¿ Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?,¿ y en la investigación?. *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 21-68). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 17-28.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4378969>
- Hernando, A. (2015). *Viaje a la escuela del siglo XXI: así trabajan los colegios más innovadores del mundo*. Madrid: Fundación telefónica. <https://www.fundaciontelefonica.com/noticias/record-descargas-viaje-escuela-siglo-21-alfredo-hernando/>
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática*, 295-384.
<https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>
- Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics. Perspectives on practice*, 121-139. London: RoutledgeFalmer.
https://www.researchgate.net/publication/200744703_Issues_in_the_teaching_and_learning_of_geometry
- Mettas, A. C. y Constantinou, C. C. (2007). The technology fair: a project based learning approach for enhancing problema solving skills and interest in design and technology education. *International Journal of Technology and Design Education*, 18, 79-100.
https://www.researchgate.net/publication/227237659_The_Technology_Fair_A_Project-Based_Learning_Approach_for_Enhancing_Problem_Solving_Skills_and_Interest_in_Design_and_Technology_Education
- Ministerio de Educación y Formación profesional. (2019). PISA 2018 *Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informa español*. España: Secretaría General Técnica. Recuperado de: <https://sede.educacion.gob.es/publiventa/pisa-2018-programa-para-la-evaluacion-internacional-de-los-estudiantes-informe-espanol/evaluacion-examenes/23505>

- Morales, L. y García, O. (2015). Un aprendizaje basado en proyecto en matemática con alumnos de undécimo grado. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 90, 21-30. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/90/Articulos_02.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>
- OCDE. (2020). A note about Spain in PISA 2018: Further analysis of Spain's data by testing date (updated on 23 July 2020). Recuperado el 29 de abril de 2021. <https://www.oecd.org/pisa/PISA2018-AnnexA9-Spain.pdf>
- Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*, núm. 105, de 2 de junio de 2016, 12640-13458. <http://www.boa.aragon.es/cgi-bin/EBOA/BRSCGI?CMD=VEROBJ&MLKOB=910768820909>
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 25, de 29 de enero de 2015, 6986-7003. <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf>
- Piaget, J. (1987). *Possibility and necessity. The role of necessity in cognitive development*. Minneapolis: University of Minnesota Press.
- Polman, J. L. (2010). La zona de desarrollo próximo de la identidad en entornos de aprendizaje de oficios. *Revista de educación*, 353, 129-156. <https://www.educacionyfp.gob.es/revista-de-educacion/gl/dam/jcr:cf443536-50ba-4d20-9961-2db3de1844f6/re35305esp-pdf.pdf>
- Ramírez, Z. y Ramírez, T. (2018). Inteligencias Múltiples en el trabajo docente y su relación con la Teoría del Desarrollo Cognitivo de Piaget. *Killkana sociales: Revista de Investigación Científica*, 2(2), 47-52. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6538370>
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 3, de 3 de enero de 2015, 169-546. <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>

- Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Saldarriaga, P. J., Bravo, G. D. R. y Loor, M. R. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. *Dominio de las Ciencias*, 2(3 Especial), 127-137. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5802932>
- Santana, M. S. (2007). Capítulo 2: Enseñanza y Aprendizaje. *La enseñanza de las matemáticas y las NTIC. Una estrategia de formación permanente*. [Tesis doctoral, Universitat Rovira i Virgili] Tesis Doctorals en Xarxa. <https://www.tdx.cat/handle/10803/8927#page=1>
- Thomas, J. W. (2000). *A review of research on project-based learning*. Recuperado el 6 de mayo de 2021. http://www.bobpearlman.org/BestPractices/PBL_Research.pdf
- Torres, A. y Silió, E. (2019, diciembre 4). Informe PISA: España obtiene sus peores resultados en ciencias y se estanca en matemáticas. *El País*. Recuperado de: https://elpais.com/sociedad/2019/12/03/actualidad/1575328003_039914.html
- Trujillo, F. (2015). *Aprendizaje basado en proyectos. Infantil, Primaria y Secundaria*. Ministerio de Educación. <https://sede.educacion.gob.es/publiventa/PdfServlet?pdf=VP17667.pdf&area=E>
- Usón, C. y Ramírez, A. (2017). *Rutas Matemáticas III. El Mudéjar*. Edita: Ayuntamiento de Zaragoza. Área de Educación y Acción Social. Servicio de Educación. Recuperado el 6 de mayo de 2021 en: <http://www.zaragoza.es/cont/paginas/educacion/pdf/rutasmudejarprof.pdf>
- Vaello Orts, J. (2009). *El profesor emocionalmente competente*. Barcelona: Graó.
- Vargas, G. V. y Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4945319>
- Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

7. ANEXOS

Anexo A. Informe PISA

Figura 12 Descripción de los seis niveles de rendimiento de matemáticas, informe PISA.

Nivel	Límite inferior de puntuación	Descripción del nivel de rendimiento
6	669	En el nivel 6 los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y modelizar situaciones de problemas complejos, y pueden utilizar su conocimiento en contextos relativamente atípicos. Pueden relacionar simultáneamente diferentes fuentes de información y representaciones e intercambiarlas entre ellas de manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Estos alumnos pueden aplicar esta comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales para desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos en este nivel pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y adecuación a situaciones originales.
5	607	En el nivel 5, los alumnos pueden desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando las restricciones y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos en este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento amplias y bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Los estudiantes de este nivel han comenzado a desarrollar la capacidad de reflexionar sobre su trabajo y de comunicar conclusiones e interpretaciones en forma escrita.
4	545	En el nivel 4, los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar restricciones o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel pueden utilizar su gama de habilidades y razonar con cierta perspicacia en contextos sencillos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.

3	482	En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Sus interpretaciones son lo suficientemente sólidas como para ser la base para construir un modelo simple o para seleccionar y aplicar estrategias simples de resolución de problemas. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Estos alumnos muestran cierta capacidad para manejar porcentajes, fracciones y números decimales, y para trabajar con relaciones proporcionales. Sus soluciones muestran que son capaces de exponer una interpretación y un tipo de razonamiento básicos.
2	420	En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modo de representación. Los alumnos de este nivel pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales para resolver problemas relacionados con números enteros. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	358	En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Asimismo, pueden realizar acciones que son casi siempre obvias y que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Fuente: Informe PISA 2018. Ministerio de Educación y Formación profesional, 2019.

Anexo B. Aplicación de la metodología ABP

Figura 13 El desarrollo en 10 pasos de la metodología ABP.



Fuente: Hernando, 2015 (p. 91)

Anexo C. Relación entre objetivos, contenidos y competencias

Tabla 8 Criterios, competencias y estándares del bloque 1 Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

BLOQUE 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS CLAVE	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
Crit.MAAC.1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.	CCL-CMCT-CSC	Est.MAAC.1.1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
Crit.MAAC.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CCL-CMCT-CAA	Est.MAAC.1.2.1. Est.MAAC.1.2.2. Analiza, comprende e interpreta el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema) adecuando la solución a dicha información.
		Est.MAAC.1.2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.
		Est.MAAC.1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.

Crit.MAAC.1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones	CMCT-CAA	Est.MAAC.1.3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
		Est.MAAC.1.3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.
Crit.MAAC.1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	CMCT-CAA-CSC-CCEC	Est.MAAC.1.4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.
		Est.MAAC.1.4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
Crit.MAAC.1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CCL-CMCT-CSC	Est.MAAC.1.5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico.

<p>Crit.MAAC.1.12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de estos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.</p>	<p>CCL-CMCT-CD-CAA</p>	<p>Est.MAAC.1.12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido...), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.</p>
		<p>Est.MAAC.1.12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.</p>
		<p>Est.MAAC.1.12.3. Estructura y mejora su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora, pudiendo utilizar para ello medios tecnológicos.</p>

Fuente: Orden ECD/489/2016, 2016

Tabla 9 Relación de objetivos, contenidos, competencias, criterios y estándares.

Objetivos	Contenidos	Competencias clave	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
O.D.1. Identificar transformaciones isométricas que llevan de una figura a otra mediante movimientos en el plano. Clasificación. Conceptos y propiedades.	C.G.1. C.G.1.1.; C.G.1.2.; C.G.1.3.; C.M.1.; C.M.2.; C.M.3.; C.M.4.; C.M.5.; C.M.6.; C.M.7	CMCT-CD-CCEC- CAA-CCL.	Crit.MAAC.3.4. Crit.MAAC.1.1.	Est.MAAC.3.4.1.; Est.MAAC.3.4.2. Est.MAAC.1.1.1. Est.MAAC.1.2.1. Est.MAAC.1.3.1. Est.MAAC.1.3.2.
O.D.2. Distinguir y describir cada uno de los tres movimientos en el plano.	C.G.1. C.G.1.1.; C.G.1.2.; C.G.1.3.; C.M.1.; C.M.2.; C.M.3.; C.M.4.; C.M.5.; C.M.6.; C.M.7.	CMCT-CD-CCEC- CAA-CCL.	Crit.MAAC.3.4. Crit.MAAC.1.1.	Est.MAAC.3.4.1.; Est.MAAC.3.4.2. Est.MAAC.1.1.1. Est.MAAC.1.2.2. Est.MAAC.1.2.3. Est.MAAC.1.2.4. Est.MAAC.1.3.1. Est.MAAC.1.3.2.
O.D.3. Aplicar traslaciones, giros, deslizamientos y simetrías a figuras en el plano.	C.G.1. C.G.1.1.; C.G.1.2.; C.G.1.3.; C.M.1.; C.M.2.; C.M.3.; C.M.6.	CMCT-CD-CCEC- CAA.	Crit.MAAC.3.5. Crit.MAAC.1.2.	Est.MAAC.1.2.1.; Est.MAAC.1.2.2. Est.MAAC.1.2.3.; Est.MAAC.1.2.4. Est.MAAC.3.5.3.

O.D.4. Trabajar y modelar en un taller de cerámica de arte mudéjar aragonés una creación propia mediante la aplicación de un solo movimiento o la composición de estos, empleando elementos geométricos característicos de esta época.	C.M.5.; C.M.6.	CCEC-CAA.		
O.D.5. Utilizar las herramientas TIC y programas informáticos de geometría para trabajar los movimientos en el plano.	C.G.1. C.G.1.1.; C.G.1.2.; C.G.1.3; C.G.2.; C.M.3.; C.M.4.; C.M.5.; C.M.6. C.M.7.	CD-CAA-CMCT- CCEC.	Crit.MAAC.1.12.	Est.MAAC.1.12.1.; Est.MAAC.1.12.2. Est.MAAC.1.12.3.
O.D.6. Reconocer y analizar en el arte y la arquitectura traslaciones, deslizamientos, giros y simetrías a través de una visita a pie de espacios cercanos al entorno estudiantil.	C.G.1. C.G.1.1.; C.G.1.2.; C.G.1.3; C.M.2.; C.M.5.; C.M.6.; C.M.4.	CMCT-CD-CCEC- CAA-CSC-CCL.	Crit.MAAC.3.4. Crit.MAAC.3.5. Crit.MAAC.1.1. Crit.MAAC.1.2. Crit.MAAC.1.3. Crit.MAAC.1.4.	Est.MAAC.1.1.1.; Est.MAAC.3.5.3. Est.MAAC.1.2.2.; Est.MAAC.1.2.3. Est.MAAC.1.2.4.; Est.MAAC.1.3.1. Est.MAAC.1.3.2.; Est.MAAC.1.4.1. Est.MAAC.1.4.2.; Est.MAAC.3.4.1. Est.MAAC.3.4.2.

<p>O.D.7. Diseñar una creación en grupo que conlleve la aplicación de los movimientos en el plano en un contexto real, señalando los movimientos en el plano elegidos, una fachada o parte de ella en la época mudéjar.</p>	<p>C.G.1. C.G.1.1.; C.G.1.2.; C.G.1.3; C.M.1.; C.M.2.; C.M.3.; C.M.5.;</p>	<p>CMCT-CD-CCEC-CAA-CCL.</p>	<p>Crit.MAAC.3.4. Crit.MAAC.1.1. Crit.MAAC.1.2. Crit.MAAC.1.3. Crit.MAAC.1.4.</p>	<p>Est.MAAC.1.1.1.; Est.MAAC.3.5.3. Est.MAAC.1.2.2.; Est.MAAC.1.2.3. Est.MAAC.1.2.4.; Est.MAAC.1.3.1. Est.MAAC.1.3.2.; Est.MAAC.1.4.1. Est.MAAC.1.4.2.; Est.MAAC.3.4.1. Est.MAAC.3.4.2.</p>
<p>O.D.8. Identificar y reconocer frisos y mosaicos junto con sus elementos generadores en el arte mudéjar aragonés.</p>	<p>C.G.1. C.G.1.1.; C.G.1.2.; C.G.1.3.; C.G.2. C.M.1.; C.M.2.; C.M.3.; C.M.3.; C.M.5.; C.M.4.; C.M.6.; C.M.7.</p>	<p>CMCT-CD-CCEC-CAA-CSC.</p>	<p>Crit.MAAC.3.4. Crit.MAAC.3.5. Crit.MAAC.1.1. Crit.MAAC.1.2. Crit.MAAC.1.3. Crit.MAAC.1.4.</p>	<p>Est.MAAC.1.1.1.; Est.MAAC.3.5.3. Est.MAAC.1.2.2.; Est.MAAC.1.2.3. Est.MAAC.1.2.4.; Est.MAAC.1.3.1. Est.MAAC.1.3.2.; Est.MAAC.1.4.1. Est.MAAC.1.4.2.; Est.MAAC.3.4.1. Est.MAAC.3.4.2.</p>

O.D.9. Razonar acerca de la construcción de frisos y mosaicos y realizar una composición de uno de los mismos, a partir de una figura dada y un vector de traslación.	C.G.1. C.G.1.1.; C.G.1.2.; C.G.1.3.; C.G.2. C.M.1.; C.M.2.; C.M.3; C.M.3; C.M.5.; C.M.4.; C.M.6.; C.M.7.	CMCT-CD-CCEC- CAA.	Crit.MAAC.3.4. Crit.MAAC.3.5. Crit.MAAC.1.1. Crit.MAAC.1.2. Crit.MAAC.1.3. Crit.MAAC.1.4.	Est.MAAC.1.1.1.; Est.MAAC.3.5.3. Est.MAAC.1.2.2.; Est.MAAC.1.2.3. Est.MAAC.1.2.4.; Est.MAAC.1.3.1. Est.MAAC.1.3.2.; Est.MAAC.1.4.1. Est.MAAC.1.4.2.; Est.MAAC.3.4.1. Est.MAAC.3.4.2.
O.D.10. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en el desarrollo del proyecto.	C.M.3; C.M.6.; C.M.7.	CCL-CMCT-CSC-CD.	Crit.MAAC.1.5. Crit.MAAC.1.12.	Est.MAAC.1.5.1.; Est.MAAC.1.12.1.; Est.MAAC.1.12.2. Est.MAAC.1.12.3.

Fuente: Elaboración propia.

Anexo D. Competencias clave de la LOMCE

Figura 14 Competencias clave definidas en la LOMCE.



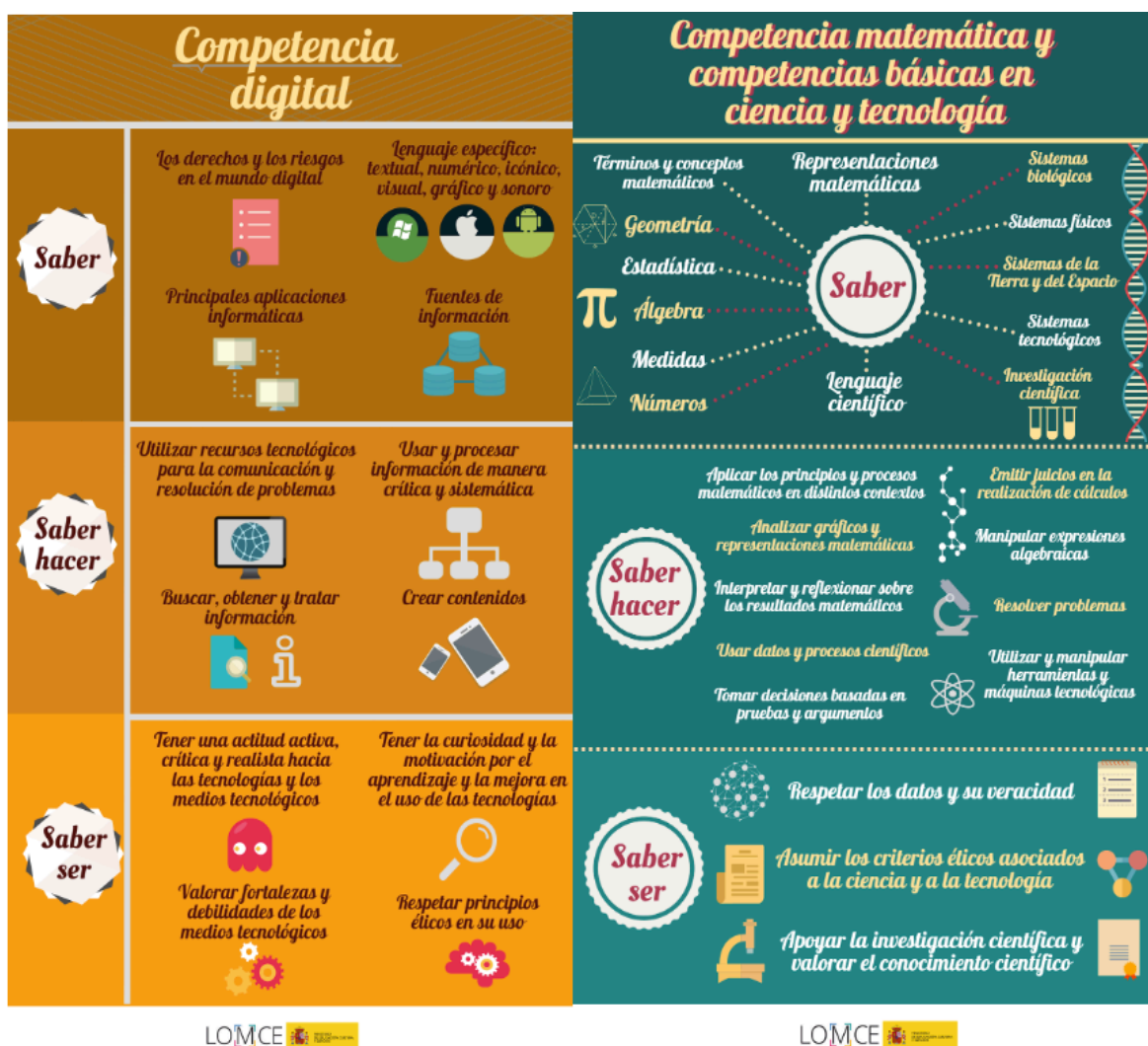
Fuente: LOMCE, 2013.

Figura 15 Competencias clave definidas en la LOMCE.



Fuente: LOMCE, 2013.

Figura 16 Competencias clave definidas en la LOMCE.



Fuente: LOMCE, 2013.

Anexo E. Sesiones complementarias para el desarrollo del ABP

Segunda sesión

- ▶ **Objetivo didáctico:** Formar equipos heterogéneos para el desarrollo del proyecto. Formalizar el objeto final, el producto, y objetivos a conseguir.
- ▶ **Competencias:** CAA-CSC-CCL.
- ▶ **Desarrollo:** Una manera habitual de proceder para formar los *equipos de base* –así se denominan cuando los equipos se mantienen estables un tiempo más largo– es distribuir a los alumnos del grupo clase en tres o cuatro columnas. En la columna de uno de los extremos se coloca una cuarta parte del alumnado (tantos como equipos de cuatro alumnos queremos formar, es decir, alrededor de cinco estudiantes); se debe procurar colocar en esta columna a los que son más capaces de ofrecer su ayuda (no tienen por qué ser los de un rendimiento mayor, sino sobre todo los más motivados, los más capaces de ilusionar y animar al resto). En el otro extremo se sitúa a la cuarta parte de alumnos más “necesitados” de ayuda, los menos autónomos y/o los menos motivados. En la columna o columnas del centro se colocan las dos cuartas partes restantes (la otra mitad del grupo). De este proceso, cada equipo se forma con un estudiante de la primera columna, dos de la columna o columnas del centro y uno de la tercera columna (véase Figura 17), procurando, además, que se dé un equilibrio en las demás variables existentes: género, etnia, etc.

Figura 17 Distribución de estudiantes para formación de grupos heterogéneos.



Fuente: Gobierno de Canarias, 2017.

Una vez establecidos los grupos de trabajo y pensando en favorecer la cohesión, la interrelación y la distensión dentro del grupo se propone jugar durante un breve rato

al juego de “La pelota”. Se trata de una dinámica donde uno de los integrantes del grupo pasa la pelota a otro antes de sentarse dentro de un círculo, y dice, además del nombre del compañero a quien pasa la pelota, una cualidad suya: “Me llamo Víctor, y paso la pelota a Teresa porque es una persona que siempre está dispuesta a ayudar”.

Para finalizar la sesión, se establecen los objetivos didácticos a trabajar durante el desarrollo del proceso. Se define la idea del producto final que es la siguiente: el alumnado se va a poner en la piel de los artesanos mudéjares inmersos en el diseño y construcción propia y original de una fachada de un edificio teniendo en cuenta los movimientos en el plano y las diferentes simetrías. En este producto final se debe presentar un diseño en GeoGebra, o en otro programa que permita este tipo de trabajo, de una fachada o parte de ella indicando el tipo de movimiento en plano utilizado: traslación, giro, simetría axial y/o simetría central, así como los elementos más característicos de este tipo de arte como colores, materiales, etc.

- ▶ **Recursos:** Pelota, diario de sesiones, bolígrafos. Folleto informativo de la presentación del producto final y los objetivos didácticos del proyecto.
- ▶ **Duración:** 50 minutos, una clase.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** Realización grupal de un mapa conceptual con los puntos más importantes de la sesión.

Tercera sesión

- ▶ **Objetivo didáctico:** Elegir el nombre y símbolo del grupo, la organización interna del equipo con la determinación y distribución de los *papeles* a ejercer dentro de él, con la especificación de las *funciones* propias de cada cargo, determinación de normas de convivencia y funcionamiento y establecer el “Diario de equipo”.
- ▶ **Competencias:** CSC-CCL-CAA-CEC.
- ▶ **Desarrollo de la sesión:** A través de la dinámica “La diana” el estudiantado va a identificar cuáles son los aspectos en común que tienen todos los miembros del equipo, por ejemplo, cualidades, aficiones, defectos, etc. Una vez que concretados sus puntos comunes buscan un nombre que sea característico para su equipo. Posteriormente se establecen, entre toda la clase, las normas de funcionamiento

básicas y de convivencia. Se realiza una lluvia de ideas que el docente apunta en la pizarra, después se realiza una reflexión sobre cuáles son las más importantes y se matizan y terminan de definir entre el alumnado y el profesor. Se realiza un documento que permanecerá visible durante todo el proyecto.

En el momento en el que se hayan concretado estas normas, se procede a distribuir de forma crítica y consensuada los cargos internos de cada miembro del grupo. A sabiendas de que el que ejerza el cargo pertinente sepa exactamente cuáles son sus funciones y responsabilidades. Estos cargos son elegidos internamente en función de las características, actitudes y aptitudes que van mejor con la persona que va a desempeñar el cargo (Tabla 10).

Por último, el docente establece un calendario con las fechas clave de entrega, la temporalización de las sesiones y las tareas a realizar en cada una de ellas.

Tabla 10 Cargos y funciones de equipo.

Cargo o papel		Tareas y responsabilidades
Coordinador		Modera las actividades: controla que se sigan los pasos de la estructura utilizada. Ejerce de portavoz del quipo.
Secretario		Controla la actitud y el tono de voz del equipo. Toma notas y rellena el Diario de Equipo.
Ayudante		Ayuda al que lo necesite o ejerce de sustituto de un compañero ausente.
Responsable del material		Cuida del material del equipo. Controla que se invierta bien el tiempo.

Fuente: Elaboración propia.

- ▶ **Recursos:** Diario de equipo, bolígrafo y fotocopia del calendario.
- ▶ **Duración:** 50 minutos, una clase.
- ▶ **Evaluación final de la actividad:** realización de una tabla con el nombre y símbolo del equipo, asignación de cargos y responsabilidades, así como las normas de convivencia y funcionamiento establecidas en común.

Anexo F. Rutas matemáticas III

Figura 18 Cuaderno del alumno 3ª parada en el paseo matemático.

CATEDRAL DE SAN SALVADOR O LA SED



PARADA
4

22

El interior de la catedral alberga elegantes muestras de arte mudéjar, como la monumental puerta de acceso a la sacristía, la cúpula interior del **coro** o las puertas –más pequeñas y difíciles de contemplar por la ausencia de luminosidad– del interior de la Parroquia y su artesanado. Pero, sin duda, serán la magnificencia del muro exterior de esta última y el recrecimiento mudéjar de los ábsides románicos –obra de Mahoma Rami, el maestro de obras del Papa Luna, en los comienzos del s. XV– el centro nuestra atención. El conjunto, más allá de una primera impresión casi abrumadora, ofrece la oportunidad de aplicar nuestros conocimientos sobre geometría para disfrutar, desde la comprensión de su complejidad, de los distintos temas decorativos. Es un buen momento para encontrar grupos todavía desconocidos y para entender cómo los sutiles juegos de colores o entrelazados transforman la apariencia de unos y otros.

LA OBRA DE MAHOMA RAMI

Los temas ornamentales son los mismos que en la torre de la Magdalena, excepto los óculos de los vanos del coro y las dos cenefas de la parte superior del ábside más pequeño. La más alta (foto 1) es una clásica cenefa de estrellas entrelazadas que, por tanto, respondería al modelo L_2 , sino fuera porque el escudo de la familia Luna invalida todos los centros de giro (señalados en rojo en la fig. 2¹): las lunas no dan media vuelta, siempre están en la misma posición². En consecuencia, sólo quedan las traslaciones como movimientos que dejan invariante la cenefa y, por tanto, responde al modelo L_1 .



foto 1



fig. 2

¹ Obsérvese que tiene más centros que la cenefa "parecida" de la torre de San Miguel de los Navarros (fotos 1.4 y 1.5 de pág. 14).

² La cenefa de lunas, considerada aisladamente, conforma una L_2 .



foto 4

Los dos cuerpos superiores convierten a la torre de la Magdalena en una hermana pequeña de las de Teruel. Un juego decorativo de fustes, platos, azulejos y vanos (foto 6) que tendría escasa continuidad en el mudéjar aragonés pero que determinó la forma en que sería tratada la cerámica en sus muros y torres. La mirada se detiene una y otra vez en la horizontalidad de sus frisos, retenida por un juego de reflejos que volatilizan las formas y diluyen la fuerza del volumen. Hay una amplia variedad de cenefas por descubrir, pero todas ellas con estructuras geométricas de los tipos que ya vimos en San Miguel, salvo L_4 que la identificamos en las bandas de puntas de flecha de la foto 6.



foto 6

LA TORRE

Varias cenefas decoran la parte superior del ábside (foto 4). Una banda del cm de San Miguel, también presente aquí en el primer cuerpo de la torre, se convierte en una cenefa de rombos en la que se distinguen sin problemas reflexiones verticales y la simetría horizontal. Por tanto, modelo L_2 . De la misma forma pueden interpretarse los frisos de esquinitas superpuestas. En cuanto al pequeño fragmento de cadena –que hay que imaginar infinito– funciona como una L_2 a causa de la laceria (foto 5).



foto 5

Atención, porque, como muestra la foto 7, hay dos tipos de estrellas: con y sin ejes de simetría, y ello cambia las propiedades de los frisos en los que queramos hacerlas intervenir.



foto 7

19

El muro de la Parroquieta tiene su zona central repartida entre dos grandes paños. Si nos fijamos en la composición en ladrillo resaltado del que está en la parte derecha³ (modelo **p4**), comprobaremos que la bonita **L₂** (foto 3) situada debajo de la **L₁** anterior es una franja horizontal de dicho paño.

EL MURO DE LA PARROQUIETA (SIGLO XIV, hacia 1375)

foto 4

Se han empleado cuatro colores trasladando un bloque de tres ellos (negro-amarillo-verde) y reservando el blanco para las columnas intermedias. En consecuencia, sólo se mantienen las direcciones horizontales de simetría (ejes rojos en fig. 5). Si se hubiera trasladado sólo uno, el resultado habría sido un mosaico de ajedrez, en el que funcionan además las reflexiones verticales y diagonales. Su estructura (**p4m**) ya nos es conocida, puesto que la vimos en san Miguel de los Navarros. Podemos observarlo, incrustado entre un zigzag de ladrillos, en la parte alta del muro (foto 6).

foto 3

Dentro de la variada colección de temáticas del muro –ochos grupos de simetría y las siete cenefas– elegiremos un pequeño mosaico de azulejos cuadrados para estudiar un grupo que sólo presenta una dirección de ejes de simetría especular: **pm** (foto 4).

fig. 5

La banda superior del doble zigzag tiene los ladrillos como en la fig. 7. Corresponde al modelo **L₁**: cada rectángulo sería la hoja de una enredadera que avanza tapando el tallo, como vimos en el apartado de *Ritmos lineales* y que podemos contemplar en una ventana de uno de los ábsides románicos de la propia Seo (foto 10).

foto 6

La parte inferior los tiene como en la fig. 8: un típico zigzag con simetrías verticales (modelo **L₂**). La unión de los dos (fig. 9) da una cenefa **L₁**: lo único constante es la traslación permanente del módulo encerrado en el recuadro rojo.

fig. 7

fig. 8

fig. 9

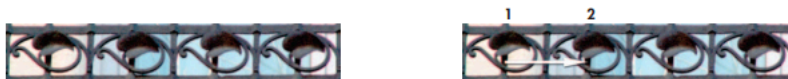
foto 10

³ Está dibujado en el capítulo que hemos llamado *Paños infinitos*.

Fuente: Usón y Ramírez, 2017.

Figura 19 *Ritmos lineales aparecidos en el paseo matemático.*

L_1 : La situación matemáticamente más elemental, común a todas las cenefas. Sólo se puede pasar de un elemento de la cenefa a otro igual (de 1 a 2) mediante una traslación (la representamos con un vector)



L_2 : Además de las traslaciones (ya no señalaremos este movimiento en los restantes modelos) son centros de giro de 180° todos los puntos como los que hemos marcado en rojo. Si rotamos media vuelta la cenefa, imaginada como infinita, respecto a cualquiera de ellos, la cenefa girada queda perfectamente superpuesta a la anterior.



L_3 : Reflexiones respecto de las rectas verticales marcadas en blanco en la foto, permiten pasar de 1 a 2, de 2 a 3, etc. y caracterizan el ritmo de la cenefa.



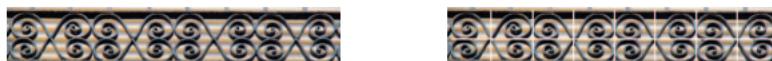
L_4 : Se identifica con mucha facilidad: el eje central de la cenefa es eje de simetría de ella misma.



L_5 : Imaginemos nuestro pie izquierdo en 1, el derecho en 2, el izquierdo en 3, etc. Los elementos de la cenefa se despliegan de manera análoga a las huellas de nuestros pies en la arena húmeda o, como muestra la forja del balcón, de la misma forma que si fueran las hojas de una enredadera. El paso de 1 a 2, de 2 a 3, ..., se llama en matemáticas **deslizamiento**. Las isometrías que caracterizan a este modelo son las obligadas traslaciones y el deslizamiento.



L_6 : Aparentemente, una mezcla de L_3 y L_4 : reflexiones verticales y simetría horizontal. Ocurre que la acción conjunta de ambas genera más cosas¹, pero no entraremos en ellas. La cenefa queda perfectamente identificada con esas dos propiedades.



L_7 : Otra mezcla aparente. Esta vez de L_3 y L_5 . El resultado es una estructura en zigzag en la que podemos observar ejes verticales de reflexión, deslizamientos (de 1 a 2, de 2 a 3, ...) y giros respecto de puntos como los señalados en la fotografía.



Puesto que quizás es un movimiento que cuesta detectar al principio, resaltaremos cómo funcionan los deslizamientos en un zigzag: para pasar de la posición 1 a la posición 2, se traslada primero el pico 1 a 1' y se obtiene el simétrico de este 1' *auxiliar* mediante el eje r . Análogamente, para ir de 2 a 3 necesitamos una traslación a la posición *auxiliar* 2' y una reflexión respecto del eje r . Borrando las que hemos llamado posiciones *auxiliares*, queda un avance similar al de las huellas de los pies (1-2-3-4 ...) que hemos comentado antes en la forja de L_5 . La diferencia es que la hoja de la enredadera no es simétrica por un eje vertical al de la cenefa y los picos del zigzag sí lo son.


Fuente: Usón y Ramírez, 2017.

Anexo G. Ficha de trabajo sesión séptima

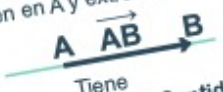
Figura 20 Ficha de trabajo GeoGebra.

MATEMÁTICAS

MOVIMIENTOS EN EL PLANO





UN VECTOR \overrightarrow{AB}
Es un segmento orientado con origen en A y extremo en B.


 Tiene **Módulo-Dirección-Sentido**

MOVIMIENTOS EN EL PLANO

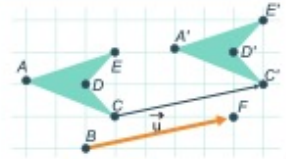
Un movimiento en el plano es un desplazamiento de una figura que no altera las distancias ni los ángulos.


 SÍ


 NO


TRASLACIONES

Una traslación aplica un movimiento a una figura según un **vector \vec{u}** que indica la distancia, la dirección y el sentido del deslizamiento.

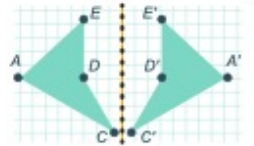



GIROS


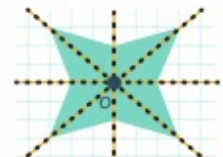
Un giro aplica un movimiento de rotación circular con un determinado ángulo (**amplitud**), respecto a un punto fijo (**centro de giro o rotación**).




SIMETRÍAS

Simetría axial	Simetría central
<p>La simetría axial aplica un movimiento que transforma cada punto en su simétrico respecto a una recta (eje de simetría).</p> 	<p>La simetría central aplica un movimiento que transforma cada punto en su simétrico respecto a un punto (centro de simetría).</p> 


FIGURAS CON SIMETRÍA

<p>Una figura tiene eje de simetría si hay una línea que la divide en dos partes iguales.</p> 	<p>El punto de corte de los ejes de simetría, si hay más de uno, es el centro de simetría o de giro de la figura.</p> 
--	---

Libro de GeoGebra:



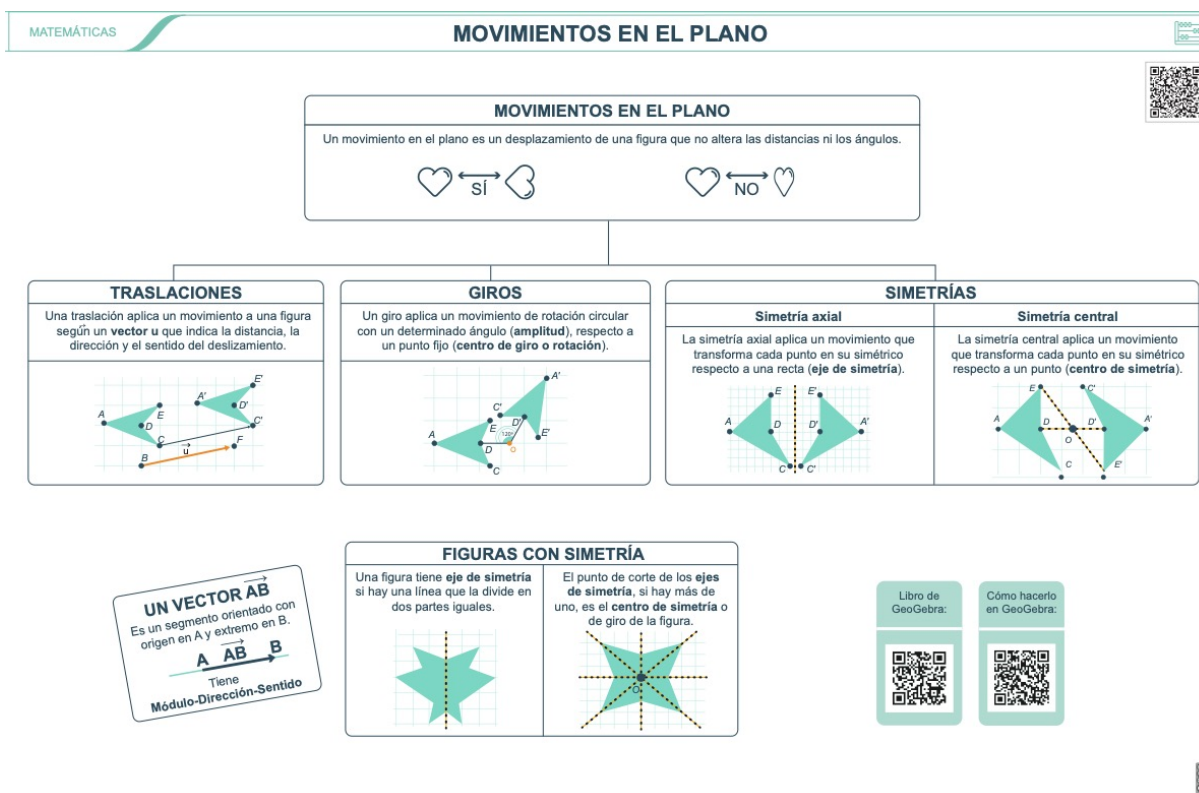
Cómo hacerlo en GeoGebra:



© Gobierno de Canarias 2019.

Anexo H. Mapa conceptual simposio matemático geométrico

Figura 21 Mapa conceptual resumen de movimientos en el plano.



Anexo I. Rúbricas de evaluación del proyecto didáctico

Tabla 11 Instrumento de autoevaluación del proyecto.

Criterios	Comentarios
¿Se han definido claramente los contenidos (curriculares o no) que se van a aprender?	Sí: No:
¿El título del proyecto es atractivo y sitúa a los alumnos al inicio? Es decir, se tienen en cuenta los conocimientos previos.	Sí: No:
La secuencia se inicia con un recurso, pregunta, actividad motivadora y que suponga un reto o un desafío .	Sí: No:
¿El objetivo final del proyecto está claro? (Qué tienen que hacer o producir los alumnos)	Sí: No:
¿La secuencia (el desarrollo del proyecto) está organizada en diversas tareas (pasos) que guían al alumno hacia la consecución del objetivo final?	Sí: No:
¿Aparecen momentos y recursos para la revisión y evaluación ? (Diario de aprendizaje / actividades orales o escritas de revisión y actividades finales de revisión del propio proyecto)	Sí: No:
¿Están incluidos los recursos de evaluación (rúbricas, guías) y les sirven a los alumnos de guía para su aprendizaje?	Sí: No:
¿Aparecen actividades para que los alumnos difundan lo aprendido, recopilado y creado?	Sí: No:
¿Están claros los agrupamientos (número y criterio) y el tiempo para el proyecto?	Sí: No:
¿Los talleres y actividades TIC han sido motivadoras y han servido en el desarrollo del proyecto?	Sí: No:

Fuente: Elaboración propia a partir de cedec, 2021.

Tabla 12 Rúbrica de coevaluación de actividades.

Aspectos	4 Excelente	3 Satisfactorio	2 Mejorable	1 Insuficiente
Es responsable con la tarea asignada	Sí. Ha hecho todo lo que tenía que hacer.	Ha hecho el 70 / 80 % del trabajo que tenía que hacer.	Ha terminado un poco más de la mitad de la tarea asignada.	No ha hecho casi nada o como máximo algo menos de la mitad de la tarea.
Acepta las opiniones de los otros compañeros del grupo	Escucha y acepta los comentarios, sugerencias y opiniones de otros y los usa para mejorar su trabajo.	Escucha los comentarios, sugerencias y opiniones de otros pero no los usa para mejorar su trabajo.	Escucha los comentarios y sugerencias de los otros. No obstante, no siempre les presta atención ni los acepta positivamente	No escucha al resto de compañeros del equipo.
Es respetuoso y favorece el trabajo del grupo	Respeto a todos los compañeros. Anima al grupo y a todos sus componentes para mejorar. Hace propuestas para que el trabajo y los resultados mejoren.	Respeto a todos los compañeros. Anima al grupo y a todos sus componentes para mejorar.	Respeto a todos los compañeros. No anima al grupo o solo anima a algunos de sus componentes para mejorar el trabajo.	No es respetuoso con los compañeros del grupo.

Fuente: Cedec, 2021.

Tabla 13 Ponderación de instrumentos de evaluación.

Sesión	Instrumento de evaluación	Ponderación (%)
1ª, 2ª y 3ª	Diario de observación	5 %
	<i>One Minute Paper</i>	
	Mapa conceptual	
	Tabla resumen equipo	
4ª	Diario de observación	10 %
	Mapa conceptual y croquis	
5ª	Diario de observación	–
6ª	Diario de observación	15 %
	Rúbrica de coevaluación	
	Bocetos de simetría con los libros de espejos	
	Tabla resumen de conclusiones	
7ª	Diario de observación	15 %
	<i>Edpuzzle</i>	
	Creación propia de mosaico y tren geométrico	

8ª	Diario de observación	15 %
	Tabla resumen	
	Actividad de cinco preguntas en <i>Plickers</i>	
9ª	Diario de observación	15 %
	Cuaderno del alumno con las actividades resueltas y breve prueba tipo test sobre los tipos de movimientos en el plano	
	Rúbrica de coevaluación	
10ª	Coevaluación del trabajo realizado.	10 %
	Recreación en GeoGebra	
	Diario de observación docente	
11ª	Rúbrica de coevaluación, Diario de observación docente	5 %
12ª	Rúbrica final docente	10 %
	Rúbrica de exposición final	

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 14 Rúbrica de evaluación docente del producto final.

Categoría	NIVEL DE LOGRO				Selección nivel
	Nivel 1 (aprendiz)	Nivel 2 (avanzado)	Nivel 3 (notable)	Nivel 4 (experto)	Puntuación máxima
Presentación, orden y limpieza	El producto final no cumple con lo pautado. Presentación inadecuada.	El producto final se aleja de lo estipulado. Presentación, orden y limpieza bastante mejorable.	El producto final sigue parcialmente con lo explicado. Presentación, orden y limpieza adecuada aunque con algún error.	El producto final correctamente todas las indicaciones. Presentación, orden y limpieza correcta y clara.	1,00
Desarrollo de contenidos	El producto final no consigue alcanzar ninguno de los contenidos.	El producto final no tiene en cuenta los contenidos más relevantes.	El producto final, en general, alberga los contenidos exigidos.	El producto final logra alcanzar con éxito todos los contenidos planteados.	2,00
Estrategia de resolución	El producto final no presenta una estrategia clara en la resolución.	El producto final presenta cierta organización aunque con algunos aspectos mejorables.	El producto final presenta en general una estrategia eficaz y adecuada en la resolución.	El producto final presenta una estrategia, correcta y adecuada en la resolución.	2,00
Cumplimiento de los objetivos	Los objetivos definidos no se alcanzan correctamente.	Los objetivos planteados se logran de manera superficial.	Los objetivos propuestos se consiguen parcialmente.	Los objetivos planteados se adquieren completamente.	2,00

Trabajo en equipo (en caso de autoevaluación)	Los miembros del equipo no han tenido buena predisposición de trabajo.	Algunos miembros del grupo no han realizado las actividades.	La totalidad del grupo ha colaborado, pero no de manera homogénea.	Todos los integrantes del grupo han participado activamente y de manera cohesionada.	1,00
Autonomía (autoevaluación)	El grupo no ha llevado la iniciativa en ninguna sesión.	El equipo ha precisado de ayuda en muchos momentos y cierta orientación por parte del docente.	El grupo de trabajo ha necesitado la ayuda del profesor en contadas ocasiones.	El equipo se ha organizado de forma autónoma en todo momento.	1,00
Manejo y aplicación de las TIC	No hace un uso responsable de las TIC o se hace con errores y de forma superficial.	Se incorpora el uso de las TIC para la realización de la actividad, pero podría ser más correcto en el procedimiento.	Se incorporan las TIC con criterio y cierta originalidad y de forma autónoma.	Se incorpora las TIC en la actividad, mejorando el trabajo con la proporción áurea de forma completa y original, así como autónoma.	1,00
PUNTUACIÓN TOTAL					10,0

Fuente: Elaboración propia.