

Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

ESIT

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

FUNCIONES PESO PARA MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES CON RAÍCES MÚLTIPLES

Trabajo Fin de Máster

presentado por: Contreras Ossa, Rafael Andrés

Director/a: Chicharro López, Francisco Israel

Ciudad: Bogotá.

Fecha: 23 de septiembre de 2020

Agradecimientos

Este TFM es el fruto de un trabajo de varios meses en el cual he contado con la orientación precisa, clara y asertiva del Profesor Francisco Chicharro.

También es la culminación de mis estudios de Maestría en Ingeniería Matemática durante los cuales tuve siempre la colaboración generosa y constructiva de diferentes estancias de la UNIR.

Además, ha sido posible gracias a un gran esfuerzo personal de largo plazo, más allá de lo académico, contando el apoyo irrestricto de mi nucleo familiar, en particular de mi Madre, y con la solidez de mi Gran Maestro de vida, el Doctor Nelson Bruno Casas.

Es un placer poder trabajar la Matemática como una herramienta artesanal, con el rigor necesario y con la posibilidad de desarrollar la creatividad.

Resumen

Existen numerosos métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales de la forma $f(x) = 0$. En particular, los casos con raíces múltiples requieren de sus propias soluciones.

En este trabajo proponemos algunas de ellas en respuesta a una inquietud planteada en un TFM anterior.

Después de exponer la base conceptual necesaria para el análisis, proponemos el desarrollo de una familia uniparamétrica (así caracterizada como resultado del estudio de convergencia), que identificamos como la familia Chébyshev-Halley para raíces múltiples. Basados en ella, desarrollamos un método óptimo de dos pasos que identificamos con un esquema ya existente.

Realizamos los estudios dinámicos correspondientes sobre el polinomio $p(z) = (z - a)^2(z - b)$: puntos fijos, críticos, planos dinámicos y de parámetros.

Finalmente, exploramos el comportamiento numérico mediante ejemplos concretos y relacionándolo con el estudio dinámico, mostrando bondades y limitaciones dentro de un marco de Complejidad.

Palabras Clave: ecuaciones no lineales, métodos iterativos, raíces múltiples.

Abstract

There are numerous iterative methods for solving nonlinear equations of the form $f(x) = 0$. In particular, cases with multiple roots require their own solutions.

In this paper we propose some of them in response to a concern raised in an earlier TFM.

After exposing conceptual basis necessary for the analysis, we propose the development of a uniparametric family (thus characterized as a result of the convergence study), which we identify as the Chébyshev-Halley family for multiple roots. Based on it, we develop an optimal two-step method that we identify with an existing scheme.

We carry out the corresponding dynamic studies on the polynomial $p(z) = (z - a)^2(z - b)$: fixed points, critical points, dynamic and parameter planes.

Finally, we explore the numerical behavior by means of concrete examples and relating it to the dynamic study, showing benefits and limitations within a framework of Complexity.

Keywords: non-linear equations, iterative methods, multiple roots.

Índice de contenido

Agradecimientos	III
Resumen.....	IV
Abstract.....	V
Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Motivación	2
1.2 Planteamiento del problema	3
1.3 Objetivos.....	3
1.4 Estructura del documento	4
Capítulo 2. Marco teórico y estado del arte	5
2.1. Métodos iterativos de punto fijo.....	5
2.1.1 Orden de convergencia e índice de eficiencia.	6
2.2. Conceptos de dinámica compleja	7
2.2.1 Definiciones.....	8
2.2.2. Planos dinámicos y planos de parámetros	10
2.3 Métodos iterativos para la búsqueda de raíces múltiples.	13
2.3.1 Métodos de tercer orden.	14
2.3.2 Métodos de cuarto orden.....	15
2.3.3 Construcción de métodos para raíces múltiples a partir de métodos para raíces simples.....	16
2.3.4 Métodos de orden mayor que cuatro.	17
Capítulo 3. Tres respuestas a una pregunta abierta	19
3.1 Primera respuesta	19
3.2 Segunda respuesta.....	23
3.3 Tercera respuesta.....	24
Capítulo 4. Estudio dinámico de las familias construidas	27
4.1 Dinámica compleja de la familia CH3.....	27
4.1.1 Construcción del operador racional	27
4.1.2 Puntos fijos y puntos críticos.	30

4.1.3 Estabilidad de los puntos fijos	32
4.1.4 Planos de parámetros	34
4.1.4 Planos dinámicos	36
4.2 Dinámica compleja del método CH4	41
4.2.1 Construcción del operador racional	41
4.2.2 Puntos fijos y puntos críticos	43
4.2.3 Estabilidad de los puntos fijos	43
4.2.4 Plano dinámico.....	43
Capítulo 5. Ejemplos numéricos	45
5.1 Ejemplo con una raíz simple y una raíz doble	45
5.2 Ejemplo con dos raíces dobles	54
Capítulo 6. Conclusiones y líneas futuras.....	58
6.1 Conclusiones	58
6.2 Líneas futuras.....	59
Bibliografía	61

Índice de figuras

Figura 2.1: Planos dinámicos para (a) polinomio cuadrático, (b) polinomio cúbico.	10
Figura 2.2: Plano de parámetros	12
Figura 2.3: Planos dinámicos correspondientes a diferentes zonas del plano de parámetros	12
Figura 4.1: Regiones de estabilidad para $ze1$ y $ze2$	34
Figura 4.2: Mapa de estabilidad de los puntos fijos extraños y $z = \infty$ para (a) el semiplano $\operatorname{Re}\alpha < 2$ y (b) el semiplano derecho.	34
Figura 4.3: Planos de parámetros para (a) $c1$, (b) $c2$, (c) $c3$, (d) $c4$	36
Figura 4.5: Planos dinámicos para (a) $\alpha = 2$, (b) $\alpha = 14/9$, (c) y (d) $\alpha = -2$ y (e) $\alpha = 2/3$	38
Figura 4.6: Planos dinámicos para (a) Chebyshev, (b) Halley, (c) super-Halley, (d) y (e) Osada.	39
Figura 4.7: Planos dinámicos para (a) $\alpha = 3/2$ y (b) $\alpha = 1.58$	40
Figura 4.8: Planos dinámicos (a) con 50 iteraciones y (b) con 3500 iteraciones	44
Figura 5.1: Planos dinámicos para métodos $m = 2$, convergencia a la raíz simple	52
Figura 5.2: Planos dinámicos para (a) Chebyshev y (b) y Halley, convergentes a la raíz doble cuando $x_0 = -2$	53
Figura 5.3: planos dinámicos de $\alpha = -2$, $m = 2$ alrededor de $x_0 = 0$ en tres escalas diferentes.	53
Figura 5.4: planos dinámicos de Chebyshev $m = 1$ alrededor de $x_0 = -2$ en tres escalas diferentes.	53
Figura 5.5: Plano dinámico para el método $\alpha = 2$, $m = 1$	54

Índice de Tablas

Tabla 5.1: Resultados obtenidos en la búsqueda de la raíz doble, métodos con $m = 2$	47
Tabla 5.2: Resultados obtenidos en la búsqueda de la raíz simple, métodos con $m = 2$	47
Tabla 5.3: Resultados obtenidos en la búsqueda de la raíz doble, métodos con $m = 1$	48
Tabla 5.4: Resultados obtenidos en la búsqueda de la raíz simple, métodos con $m = 1$	49
Tabla 5.5: Resultados obtenidos en la búsqueda de las dos raíces.....	56

Capítulo 1. Introducción

En los siglos XVI y XVII la humanidad vivió una era de intenso desarrollo del conocimiento conocida como la Revolución Científica.

Áreas como la astronomía, la física y la biología lideraron el comienzo de una acumulación de conocimiento sin precedentes. De la mano de la Matemática, filosofía y ciencia se separaron.

La Matemática cuantitativa se desarrolló y con ella la posibilidad de construir modelos teóricos, evaluarlos numéricamente y compararlos con la experimentación (medición): nació el Método Científico vigente hasta nuestros días.

Con el tiempo y la creciente necesidad de resolver problemas matemáticos, desarrollamos herramientas como la calculadora de Pascal, la máquina de multiplicar de Leibniz y las máquinas de tarjetas perforadas, entre otras, hasta llegar a los poderosos computadores de hoy.

Grandes esfuerzos se han centrado en desarrollar soluciones exactas a muchos de estos problemas.

Pero muchas veces los procedimientos analíticos que ello conlleva son imposibles o intratables.

Para superar estas dificultades podemos recurrir a los métodos numéricos que, a cambio de exactitud, nos brindan aproximaciones a la solución muchas veces bastante satisfactorias.

El desarrollo de los métodos numéricos tiene una larga historia [1]. Pero sucede que la gran capacidad de cómputo disponible hoy permite que sean cada vez más estudiados y utilizados.

De éstos, los iterativos permiten aproximaciones sucesivas a la solución con un grado de precisión conocido como tolerancia, parámetro de control que determina el número de tales aproximaciones.

Por lo demás, Iteración y Cómputo son un poderoso dúo que parece ir más allá de auxiliar la resolución de problemas matemáticos: son, por ejemplo, la base de lo que el reconocido físico y científico computacional Stephen Wolfram, creador del potente y reconocido software Mathematica, plantea como su novedosa Teoría del todo que, para decirlo de manera muy resumida, pretende que toda la física puede explicarse a partir de una serie de reglas iteradas de forma consecutiva [2]. Una base muy emparentada con la de los fractales de Mandelbrot.

Aunque dicha Teoría es muy controvertida, es un paso disruptivo en la manera de hacer ciencia que contrasta con el camino que sembró Einstein al estar convencido de que toda la física, y con ella el universo, debería poder explicarse mediante una única ecuación que diera cuenta de todas las fuerzas de la naturaleza.

En la actualidad existe un gran desarrollo de métodos iterativos para la solución de ecuaciones no lineales de la forma $f(x) = 0$.

Estas ecuaciones aparecen en los más diversos campos: la economía, la biología, la física, el estudio del clima, la robótica entre muchos otros [1]. Son expresión de la Complejidad de los fenómenos estudiados, de la evolución de sistemas alejados de su equilibrio, lejos de la linealidad.

El más conocido de los métodos iterativos, fundamento esencial para la mayoría de los muchos existentes, es el método de Newton.

A partir de él se han creado multitud de métodos caracterizados por conceptos como el multipaso, el orden de convergencia, la eficiencia, la optimalidad y la estabilidad.

Este último concepto tiene especial importancia pues la convergencia del proceso dependerá de la escogencia del valor inicial de iteración o semilla.

Un estudio, cuantitativo y cualitativo, a través de planos dinámicos y/o planos de parámetros, brindará información acerca de las bondades o limitaciones del método al respecto.

1.1 Motivación

Cuando la ecuación $f(x) = 0$ presenta raíces múltiples, requiere de métodos iterativos especialmente diseñados para su búsqueda ya que, si se aplican los métodos clásicos para raíces simples, se presentarán problemas de convergencia lenta o incluso puede haber divergencia [1].

Y hay relativamente pocos de estos estudios si se comparan con los existentes para raíces simples.

Por otro lado, estudios dinámicos detallados son aún más escasos.

Teniendo todo esto en mente, nuestro deseo en el presente trabajo es, después de ilustrar un proceso de construcción de una familia de métodos de búsqueda de raíces múltiples de ecuaciones no lineales, realizar un detallado análisis de estabilidad de dicha familia.

1.2 Planteamiento del problema

Aunque algunos de los métodos de la familia Chebyshev-Halley para raíces múltiples son bien conocidos, no sabemos de una única expresión que los agrupe a todos de manera exclusiva como ocurre en el caso de raíces simples.

En este trabajo pretendemos realizar un aporte al respecto, proponiendo una expresión que analizaremos cualitativa y numéricamente.

Realizaremos un estudio dinámico encaminado a comprobar qué miembros de la familia tienen un mejor comportamiento. De este modo, podremos comparar los métodos ya existentes con otros de la familia generada.

Es importante mencionar que el análisis dinámico constituye un punto de partida, puesto que luego los métodos se deben aplicar sobre funciones no lineales de mayor complejidad que las que se utilizan en los análisis dinámicos. Entonces, es necesario realizar pruebas sobre algunas funciones o problemas de ciencia e ingeniería que presentan no linealidades, con dificultades o imposibilidades de ser resueltas con métodos analíticos conocidos.

Teniendo en cuenta lo anterior, propondremos dos estudios numéricos sobre funciones concretas y trataremos de relacionar los resultados con los estudios dinámicos cualitativos.

1.3 Objetivos

El objetivo general es construir y analizar nuevos métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales con raíces múltiples, utilizando la técnica de funciones peso.

Para el logro de este objetivo, se plantean los objetivos específicos:

- ❖ Generar una familia de métodos iterativos basados en la familia Chebyshev-Halley.
- ❖ Construir un método de orden 4 a partir de la familia generada.
- ❖ Averiguar si algún esquema existente incluye a dicha familia.
- ❖ Analizar la estabilidad de determinados casos particulares de la familia de métodos iterativos.
- ❖ Comprobar el comportamiento numérico de los métodos a partir de diferentes funciones test.

1.4 Estructura del documento

El resto de la memoria de este Trabajo Fin de Máster está estructurado como se detalla a continuación.

En el Capítulo 2, explicaremos los conceptos enunciados unas líneas atrás y contextualizaremos los métodos iterativos para raíces múltiples.

En el Capítulo 3 desarrollaremos los métodos propuestos: una familia uniparamétrica de un paso con un detallado estudio de convergencia; un método de dos pasos, libre de segunda derivada, basado en dicha familia. Finalmente, traeremos a colación una investigación realizada por Rajni Sharma et al. [3] que también responde a la búsqueda que realizamos.

En el Capítulo 4 mostraremos el estudio dinámico de los métodos construidos: determinaremos puntos fijos, puntos fijos extraños, puntos críticos libres, planos dinámicos y de parámetros que nos permitirán extraer conclusiones acerca de la estabilidad de los métodos.

En el Capítulo 5 experimentaremos el funcionamiento de los métodos al aplicarlos en la solución de dos ecuaciones no lineales.

El Capítulo 6 estará dedicado a recapitular y concluir. Plantearemos algunas inquietudes hacia el futuro.

Capítulo 2. Marco teórico y estado del arte

En este capítulo vamos a presentar una introducción teórica a los conceptos relacionados con los métodos iterativos, así como una revisión de los artículos de investigación más relevantes relacionados con la temática de este Trabajo Fin de Máster.

2.1. Métodos iterativos de punto fijo

El problema general que queremos resolver es el de hallar soluciones de la ecuación no lineal $f(x) = 0$, $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (donde I es un intervalo abierto), mediante métodos iterativos.

Hablando de manera simplificada, un método iterativo busca aproximaciones sucesivas a la solución. Así, a un valor inicial o semilla le aplicamos un operador Φ . Al resultado de tal operación le aplicamos de nuevo el operador y procedemos así consecutivamente buscando acercarnos a la solución con determinada precisión.

A dicho operador se le conoce como *operador de punto fijo sin memoria* y lo escribimos formalmente así:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

El operador Φ está construido con base en la función f y/o sus derivadas de tal manera que una solución de la ecuación $f(x) = 0$ es una solución de la ecuación $\Phi(x) = x$ (no ocurre necesariamente en sentido contrario). De allí el denominativo de *punto fijo*, puesto que la aplicación del operador sobre el punto fijo hace que éste permanezca invariante.

El padre de tales métodos es el método de Newton conocido también como método de Newton-Raphson ya que a éste le debemos su forma (iterativa) más conocida:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

El operador de punto fijo correspondiente es $\Phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Debemos anotar que también se pueden diseñar técnicas para calcular el valor de la n -ésima aproximación con base en varias de las aproximaciones anteriores, es decir

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots), n = 0, 1, 2, \dots,$$

definiendo así un *método iterativo con memoria*. En lo que sigue consideraremos solo los métodos iterativos sin memoria.

Por otro lado, debemos mencionar los métodos *multipaso* o predictor-corrector que introducen etapas intermedias entre iterados. Por ejemplo,

$$y_n = \Psi(x_n),$$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, y_n), n = 0, 1, 2, \dots,$$

es un método de dos pasos.

Estos métodos buscan mejorar la convergencia sin mayor detrimiento del coste computacional.

En este trabajo también haremos referencia a la técnica de reemplazo de una derivada por una expresión dependiente de la función y de sus derivadas de menor orden.

2.1.1 Orden de convergencia e índice de eficiencia.

Sea $\{x_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de iterados que converge a α y sea $e_n = x_n - \alpha$ el error cometido en la n -ésima iteración.

Se dice que el orden de convergencia es p si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = A$, $A > 0$. A se conoce como la constante asintótica del error.

Dicho más informalmente, para n suficientemente grande $|e_{n+1}| \approx A |e_n|^p$, lo que brinda una relación entre los errores cometidos de una iteración a la siguiente. También podemos expresarlo como

$$e_{n+1} = A e_n^p + O(e_n^{p+1}),$$

que es conocida como la ecuación del error. Leemos $O(e_n^{p+1})$ como un “término de orden $p + 1$ ”. Así, $e_{n+1} = O(e_n^p)$ o “ e_{n+1} es un término de orden p ”.

Es claro que hablamos de convergencia si $p \geq 1$. Si $p = 1$ se habla de convergencia lineal, si $p = 2$ de convergencia cuadrática o de orden 2, si $p = 3$ de convergencia cúbica o de orden 3, etc....

Cuanto mayor sea el orden de convergencia, menor será el número de iteraciones necesarias para aproximarse a la solución, lo que entendemos como una convergencia más rápida.

La búsqueda de mayores velocidades de convergencia implica métodos más complejos, es decir con mayor número de evaluaciones funcionales y más pasos.

En la práctica, y dado que el problema es que precisamente no se conoce el valor de α , son necesarias otras definiciones computacionales de p , entre las cuales la más utilizada hoy en día es la de Cordero y Torregrosa [4] que se conoce como *orden de convergencia computacional aproximado* o ACOC por sus iniciales en inglés,

$$\text{ACOC} = \frac{\ln \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} \right|}{\ln \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \right|}.$$

Este cálculo es base para la evaluación y comparación de los distintos métodos a través de parámetros como el índice de eficiencia definido por Ostrowski [5] como $EI = p^{\frac{1}{d}}$, donde d es el número de evaluaciones funcionales de f y sus derivadas, realizadas en cada iteración.

O el concepto de método óptimo, que será aquel que alcance, de acuerdo a la conjetura de Kung y Traub [6], el máximo nivel de convergencia posible para un método sin memoria, a saber $p = 2^{d-1}$. En tal caso $EI = 2^{(d-1)/d}$, con lo que se puede establecer que cualquier método tendrá un EI menor de 2.

Los métodos óptimos presentan el mayor orden de convergencia posible para un determinado número de evaluaciones funcionales, algo que es muy deseable computacionalmente.

2.2. Conceptos de dinámica compleja

En este apartado vamos a realizar una revisión de determinados conceptos básicos de dinámica compleja. Para información más detallada es interesante consultar [7], [8], [9].

Además de los conceptos hasta ahora vistos, surge la pregunta de cómo se comporta el método según la estimación inicial que se tome.

Métodos de Bisección, Interpolación o el trazado de una gráfica se han utilizado para estimar un rango plausible de valores iniciales.

Pero desde hace algunas décadas, y con creciente frecuencia, se recurre al análisis de lo que se conoce como dinámica compleja, que establece criterios comparativos (cuantitativos y cualitativos) con respecto la estabilidad y fiabilidad de los procesos iterativos evaluados desde los puntos de partida.

2.2.1 Definiciones

El comportamiento dinámico de un método se evalúa sobre polinomios (usualmente de bajo grado), ya que el operador de punto fijo deberá ser una función racional.

Sea R un operador de punto fijo $R: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ sobre un polinomio p , donde $\widehat{\mathbb{C}}$ es la esfera de Riemann [10].

Para poder estudiar la dinámica compleja definimos los siguientes conceptos.

- La órbita de un punto $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ es el conjunto de puntos

$$\{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\},$$

donde $R^k(z_0)$ corresponde a la aplicación, k veces consecutivas, del proceso iterativo sobre z_0 .

- Los puntos fijos de R son aquellos que verifican que $R(z^*) = z^*$ y se distinguen por su dinámica, acorde al valor de $R'(z^*)$, así:
 - Atractores si $|R'(z^*)| < 1$ (Superatractores cuando $R'(z^*) = 0$)
 - Repulsores si $|R'(z^*)| > 1$
 - Neutrales (o Parabólicos) si $|R'(z^*)| = 1$
- Se dice que un punto z^* es k -periódico si $R^k(z^*) = z^*, R^{k+t}(z^*) \neq z^*, t = 1, 2, \dots, k-1$, lo que equivale a decir que su órbita es un conjunto finito.
- Un punto k -periódico será atractor si el producto $|R'(z_0^*)R'(z_1^*) \dots R'(z_{k-1}^*)|$ es menor que 1 (superatractor si es igual a 0), repulsor si es mayor que 1 y neutral o parabólico si es igual a 1.
- La *cuenca de atracción* de un atractor z^* es el conjunto de todos los puntos que convergen a dicho atractor y está definida por

$$\mathcal{A}(z^*) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : R^n(z) \rightarrow z^*, n \rightarrow \infty\}.$$

- Un punto crítico z^* de R es aquel para el cual $R'(z^*) = 0$.

Las soluciones de la ecuación $p(z) = 0$ son también soluciones de la ecuación $R(z) = z$. Pero puede ocurrir que hallemos puntos fijos de R que no sean raíces de p . A estos valores se le denominan *puntos fijos extraños*.

Es claro que un superatractor es también un punto crítico. Por otra parte, los puntos críticos que no sean raíces de p se denominan *puntos críticos libres* y juegan un papel importante en la elaboración de los llamados *planos de parámetros* que ilustraremos más adelante.

Las cuencas de atracción representan las regiones de convergencia del método pues allí están todas las órbitas que confluyen en algún atractor. Su unión se conoce como *conjunto de Fatou*, $\mathcal{F}(R)$. La unión de las fronteras entre estas regiones se conoce como *conjunto de Julia*, $\mathcal{J}(R)$. Ambos conjuntos son complementarios, esto es, $\mathcal{F} \cup \mathcal{J} = \widehat{\mathbb{C}}$.

Teorema 2.1 (de FATOU-JULIA): *Sea R una función racional. La cuenca de atracción inmediata de un punto k -periódico contiene, al menos, a un punto crítico.*

Dado que en cada cuenca de atracción hay a lo menos un punto crítico, los puntos críticos libres pueden estar en la cuenca de atracción de una solución de p o en la de un punto fijo extraño o en la de un punto k -periódico, $k > 1$ (caso este último donde el método no converge).

Definición 2.2 Dadas dos funciones $f, g: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, una conjugación analítica entre f y g es un difeomorfismo (aplicación diferenciable con inversa diferenciable) $h: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $f \circ h = h \circ g$.

Teorema 2.3 (Teorema del escalado). Sea $R_f(z)$ el operador R aplicado a una función analítica $f(z)$ en la esfera de Riemann y sea $T(z) = \delta z + \gamma$, $\delta \neq 0$, una aplicación afín. Si $g(z) = \lambda f(T(z))$, $\lambda \neq 0$ entonces R_f está conjugado analíticamente con R_g , esto es $(T \circ R_g \circ T^{-1})(z) = R_f(z)$.

Las clases de conjugación y el teorema del escalado, cuando se cumple, son muy útiles para reducir el estudio la dinámico de un método sobre un grupo de funciones a través de casos más simples.

Por ejemplo, para el estudio dinámico sobre cualquier polinomio de segundo grado podrá emplearse el polinomio genérico $p(z) = (z - a)(z - b)$ ([7], [11]) o, equivalentemente, $p(z) = z^2 + \lambda$ ([8], [12]). Y para el estudio sobre un polinomio cualquiera de tercer grado con una raíz doble podrá emplearse el polinomio genérico $p(z) = (z - a)^2(z - b)$ ([13], [14]).

Generalmente se busca ir más allá en la simplificación del análisis, realizando además una transformación de Möbius ([7], [15], [16]) sobre el polinomio genérico para evitar que el operador resultante, conjugado de $R_p(z)$, dependa de a y b .

En el capítulo 3 veremos desarrollos detallados de los conceptos recién expuestos.

2.2.2. Planos dinámicos y planos de parámetros

En este apartado nos referiremos a las representaciones gráficas de la dinámica compleja.

Planos dinámicos.

Los *planos dinámicos* permiten visualizar las cuencas de atracción. Cada punto del plano complejo (cuadrícula en la práctica) representa a una semilla o estimación inicial y se le asignará un color diferente de acuerdo con el punto fijo atractor al que converja.

La gradación de colores permitirá distinguir la velocidad de convergencia de tal forma que, a mayor número de iteraciones, mayor oscuridad del tono del color.

A manera de ejemplo, las Figuras 2.1a y 2.1b muestran los planos dinámicos del método de Newton (cuyo operador de punto fijo complejo es $N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$) para $f(z) = z^2 - 1$ y $f(z) = z^3 - 1$, respectivamente.

En el primer caso, las raíces de f y los puntos fijos de N_f coinciden y son $z^* = \pm 1$

En el segundo caso sucede algo similar y $z^* = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}$

Como se puede ver, el comportamiento del método es muy estable. Las zonas más claras, que indican convergencia más rápida, son las más cercanas a las raíces.

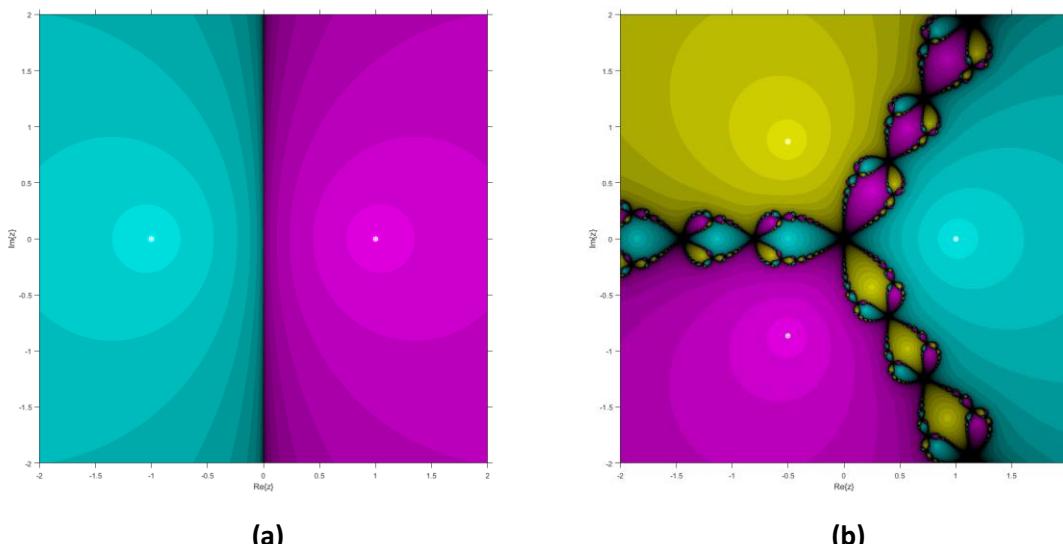


Figura 2.1: Planos dinámicos para (a) polinomio cuadrático, (b) polinomio cúbico.

Planos de parámetros.

Cuando el operador de punto fijo depende de un parámetro, decimos que tenemos una *familia uniparamétrica* y en tales casos se considera esencial dibujar un plano de parámetros para cada punto crítico libre del método.

Cada punto del plano complejo corresponderá a un valor del parámetro que particulariza a cada miembro de la familia y, por ende, a sus puntos críticos libres. Cada punto crítico libre será semilla y al punto del plano complejo se le asignará un color determinado de acuerdo con el punto fijo atractor al que converja. Si no converge a ninguno, se utilizará el color negro.

El significado de la gradación de colores es análogo al de los planos dinámicos.

A manera de ejemplo, aplicaremos el método de Newton al polinomio $f(z) = (z^2 - 1)(z - c)$. El operador de punto fijo correspondiente es la función racional

$$Op(z) = \frac{-2z^3 + cz^2 + c}{-3z^2 + 2cz + 1},$$

cuya derivada es

$$Op'(z) = \frac{2(z^2 - 1)(3z^2 - 4cz + c^2)}{(-3z^2 + 2cz + 1)^2}.$$

Haciendo $Op'(z) = 0$ encontramos cuatro puntos críticos que son las tres raíces del polinomio y un punto crítico libre que es $z_c^* = \frac{c}{3}$.

En la Figura 2.2a aparece el plano de parámetros correspondiente y en la Figura 2.2b aparece una zona inestable.

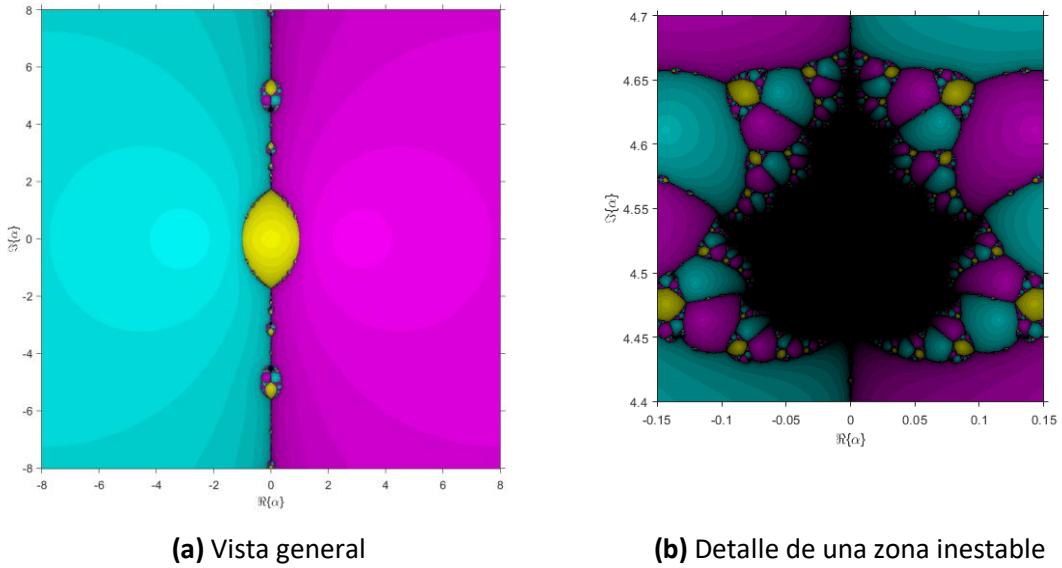


Figura 2.2: Plano de parámetros

Los siguientes Planos Dinámicos nos sirven para corroborar la información obtenida.

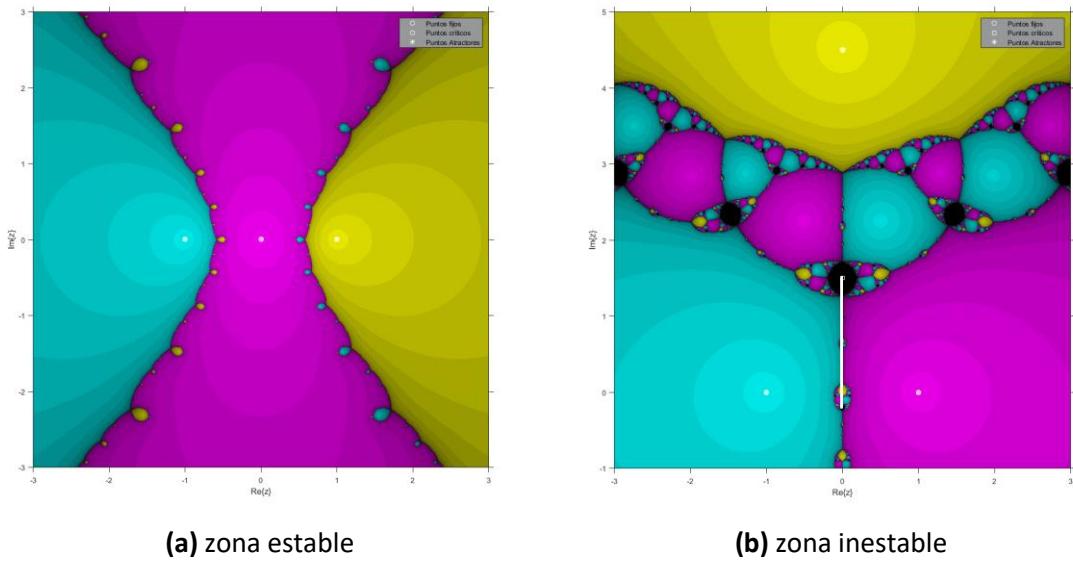


Figura 2.3: Planos dinámicos correspondientes a diferentes zonas del plano de parámetros

En la Figura 2.3a tenemos el plano dinámico para $c = 0$ que corresponde a la zona estable del plano de parámetros, por lo que está libre de regiones en negro. Estas sí aparecen en la Figura 2.3b que corresponde a $c = 4.5i$, valor que está en la zona negra del plano de parámetros como se ve en la Figura 2.2b. Al respecto, la línea en color blanco muestra una órbita periódica atractora de orden 2 ($\{-0.1957i; 1.4997i\}$).

2.3 Métodos iterativos para la búsqueda de raíces múltiples.

Definición 2.4. Se dice que α es un cero de multiplicidad m de una función f si $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$, con $|g(\alpha)| < M$.

Si $m = 1$, se trata de una raíz simple; cuando $m > 1$, se le llama raíz múltiple.

Métodos adecuados para encontrar una raíz simple pueden presentar problemas al utilizarlos para hallar una raíz múltiple. Por ejemplo, al aplicar el método de Newton cuando $m > 1$ ocurrirá que tanto $f(x_n)$ como $f'(x_n)$ se estarán aproximando a cero cuando nos acerquemos a la raíz. Entonces, la dificultad no es tanto la de aproximarse a una división entre valores próximos a cero ya que, como lo demostraron Ralston y Rabinowitz [17], $f(x)$ llegará a cero antes que $f'(x)$; sino que el método reducirá su convergencia de orden dos a una convergencia lineal.

Para solucionar este tipo de problemas varios autores han propuesto modificaciones al método de Newton.

Dos de las más conocidas son el método de Newton acelerado (o método de Rall [18]) y el método de Newton modificado (o método de Schröder [19]) que consisten en aplicar el método de Newton a las funciones $u_1(x) = f(x)^{\frac{1}{m}}$ y $u_2(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, respectivamente. El problema pasa a ser entonces, en cualquiera de los dos casos, el de hallar una raíz simple, recuperándose el orden dos de convergencia. Sus expresiones respectivas son

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ y } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}.$$

Cada una de estas soluciones tiene un inconveniente que es ventaja para la otra: Newton acelerado exige el conocimiento previo de la multiplicidad m , mientras que Newton modificado exige el cálculo de la segunda derivada de f .

De los métodos existentes para encontrar raíces múltiples, la mayoría requieren del conocimiento a priori de m y solo una muy pequeña minoría no lo hace.

Algunos corresponden a modificaciones de métodos diseñados para raíces simples, como los recién vistos, y otros a la creación de métodos nuevos.

2.3.1 Métodos de tercer orden.

Una manera de aumentar la convergencia consiste en realizar combinaciones lineales de métodos conocidos.

Por ejemplo, si realizamos el promedio de los métodos recién expuestos de Newton acelerado y Newton modificado, obtendremos la expresión

$$x_{k+1} = x_k - \frac{m}{2} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)},$$

que se conoce como el método de super-Halley y tiene orden tres de convergencia.

De este modo, el promedio de dos métodos de orden 2 ha permitido obtener uno de orden 3.

Otro ejemplo similar consiste en plantear una combinación lineal de Newton acelerado con el esquema $x_{n+1} = x_n - (m-1) \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$ que también es de orden dos.

En la familia biparamétrica resultante, hay un método que presenta orden de convergencia tres y es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{m(m+1)}{2} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{(m-1)^2}{2} \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}.$$

Se conoce como el método de Osada.

El mismo ejercicio puede realizarse reemplazando a Newton acelerado por Newton modificado en el caso anterior (Ver [1]), obteniéndose la expresión

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(m-1)^2}{2m} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{(m+1)}{2m} \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}.$$

Estos tres métodos se encuentran explicados paso a paso en [20].

Más adelante nos referiremos en detalle a los métodos de super-Halley [21], Osada [22], Chebyshev [23] y Halley [24] para raíces múltiples. Las expresiones conocidas para estos dos últimos son

$$x_{k+1} = x_k - \frac{m(3-m)}{2} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{m^2}{2} \frac{f(x_k)^2 f''(x_k)}{f'(x_k)^3}$$

$$y x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{(m+1)}{2m} f'(x_k) - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2f'(x_k)}},$$

respectivamente.

Otros métodos de orden 3 pueden encontrarse en [25].

2.3.2 Métodos de cuarto orden.

Un gran problema de la creación de métodos de un paso sin memoria radica en el hecho de que si queremos orden de convergencia p deberemos incluir derivadas de orden a lo menos $p - 1$. En métodos de tercer orden, como los recién tratados, aparecerán entonces f, f' y f'' y si queremos uno de cuarto orden deberemos incluir también a la tercera derivada.

Además, no se puede alcanzar la optimalidad de acuerdo con la conjetura de Kung-Traub ya que con tres evaluaciones funcionales el orden óptimo es $2^{3-1} = 4$, con cuatro el orden óptimo es $2^{4-1} = 8$, etc.

Es por ello por lo que se han desarrollado los métodos multipunto.

Teorema 2.5 Sean Φ_1 y Φ_2 dos funciones de punto fijo para $f(x) = 0$. Consideremos los esquemas iterativos $x_{n+1} = \Phi_1(x_n)$ y $x_{n+1} = \Phi_2(x_n)$ de órdenes p_1 y p_2 respectivamente. Entonces, el orden de convergencia del método iterativo asociado a la función de punto fijo $\Phi(x) = \Phi_2(\Phi_1(x))$ es $p_1 p_2$.

Por ejemplo, componiendo Newton acelerado consigo mismo obtenemos un método de convergencia igual a $2^2 = 4$. El esquema es [26]:

$$\begin{cases} y_n = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = y_n - m \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}. \end{cases}$$

Aunque el índice de convergencia se duplica, también lo hace el número de evaluaciones funcionales por lo que nos alejamos de la optimalidad. Es por ello por lo que un método así no es atractivo y lo que se busca son esquemas de varios pasos que minimicen también el número de evaluaciones funcionales.

Encontramos desarrollos detallados de métodos de dos pasos en [27] y en [28].

Entre ellos, S.G. Li et al. [28] proponen el siguiente, óptimo, de cuarto orden:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - a_1 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(x_n)}{a_2 f'(x_n) + a_3 f'(y_n)}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}m^2 + m, \quad a_2 = -\frac{1}{m}, \quad a_3 = \frac{1}{m \left(\frac{m}{m+2} \right)^m}.$$

La ecuación del error para este método es:

$$e_{n+1} = K e_n^4 + O(e_n^5),$$

Donde

$$K = \frac{1}{3} \frac{m^3 + 2m^2 + 2m - 2}{m^4(m+1)^3} A_1^3 - \frac{A_1 A_2}{m(m+2)(m+1)^2} + \frac{m}{(m+1)(m+2)^3(m+3)} A_3, \text{ con}$$

$$A_j = \frac{f^{(m+j)}(r)}{f^{(m)}(r)} \text{ y siendo } r \text{ la raíz.}$$

2.3.3 Construcción de métodos para raíces múltiples a partir de métodos para raíces simples.

Una de las técnicas más utilizadas para el restablecimiento, e incluso la mejoría, del orden de convergencia es la introducción de parámetros en métodos óptimos para raíces simples como se ve en [1] y [24].

En [30] F. Soleymani et al. proponen una parametrización del método de Basu para raíces simples que pierde su convergencia óptima de orden 4 al utilizarlo para hallar una raíz múltiple.

El método original se expresa así:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2}{3} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(y_n)}{-\frac{9}{16}f'(x_n)^2 + \frac{11}{8}f'(x_n)f'(y_n) + \frac{3}{16}f'(y_n)^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Y la parametrización propuesta es:

$$\begin{cases} y_n = x_n - a_0 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(y_n)}{a_1 f'(x_n)^2 + a_2 f'(x_n)f'(y_n) + a_3 f'(y_n)^2} \end{cases} \quad (2)$$

Los valores de a_0, a_1, a_2, a_3 que permiten que se recupere la convergencia de orden 4 son:

$$a_0 = \frac{2m}{m+2}, a_1 = \frac{1}{16}(-2+m)m^{-1+m}(2+m)^{3-m}, a_2 = \frac{8-m(2+m)(-2+m^2)}{8m},$$

$$a_3 = \frac{1}{16}m^{3-m}(2+m)^m.$$

Cabe resaltar que los autores presentan también una alternativa para el caso en que no se tiene conocimiento previo del valor de la multiplicidad, que consiste en aplicar el método (1) a la función

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \text{ lo que resulta en:}$$

$$\begin{cases} y_n = x_n + \frac{f(x_n)f'(x_n)}{-3f'(x_n)^2 + 3f(x_n)f''(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{16\psi(x_n)}{2\psi(x_n) - 9\left(-1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}\right) + 3\left(-1 + \frac{f(y_n)f''(y_n)}{f'(y_n)^2}\right)} \end{cases}$$

$$\text{con } \psi(x_n) = \frac{f(x_n)\left(1 - \frac{f(y_n)f''(y_n)}{f'(y_n)^2}\right)}{f'(x_n)}.$$

Se mantiene el orden de convergencia, pero se introducen tres evaluaciones funcionales adicionales, amén del cálculo de la segunda derivada.

La literatura se concentra mucho más en trabajos del primer tipo (Ver [1], [29], [31]).

2.3.4 Métodos de orden mayor que cuatro.

Son muy escasos, y de muy reciente desarrollo, los métodos existentes que presentan orden de convergencia mayor que 4.

Juan Liang et al. presentan en [32] un método de orden 5 en tres etapas para resolver problemas con m desconocido.

Geum et al. presentan en [34] y [35] familias de orden seis en dos y tres pasos respectivamente, m conocido.

En 2018 aparecen los primeros métodos óptimos de orden 8 en los trabajos de Behl et al. [35] y de Young Hee Geum et al. [36]. Ambos construyen familias en tres pasos, m conocido.

Capítulo 3. Tres respuestas a una pregunta abierta

En su trabajo de Tesis, María Mora Jiménez [37], habiendo partido de una combinación lineal de los métodos Newton acelerado y Newton modificado, propone la siguiente familia paramétrica:

$$x_{k+1} = x_k - m(1 - \alpha) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \alpha \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Esta familia también presenta orden dos de convergencia salvo para $\alpha = 1/2$, valor para el cual el nivel de convergencia sube a tres (es el método de super-Halley referido en el capítulo anterior).

La familia también puede describirse así:

$$x_{k+1} = x_k - H \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

con

$$H = H(t_k, \alpha) = m(1 - \alpha) + \alpha \frac{1}{1 - t_k}; t_k = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Al final de su trabajo, en el apartado de “Conclusiones y líneas futuras”, Mora propone responder a la pregunta de “qué condiciones debe cumplir la función H para obtener nuevos métodos con buenas propiedades de convergencia, o para encontrar métodos existentes que cumplan esta estructura”.

A continuación, ensayamos tres respuestas a esta inquietud.

3.1 Primera respuesta

Proponemos el estudio de la siguiente familia triparamétrica:

$$x_{k+1} = x_k - H \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$H = H(t_k, b_1, b_2, b_3) = b_1 m + \frac{b_2}{1 - b_3 t_k}, t_k = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}. \quad (3.1)$$

Teorema 3.1 Sea $r \in I$ una raíz de multiplicidad m de una función f suficientemente diferenciable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$. Si x_0 está suficientemente cerca de r , entonces el esquema iterativo definido por (3.1) tiene orden de convergencia 3, siempre que

$$b_1 = \frac{-m + (m+1)b_3}{2b_3} \text{ y } b_2 = \frac{(-m + (m-1)b_3)^2}{2b_3}.$$

Siendo $e_k = x_k - r$, la ecuación del error es:

$$e_{k+1} = \left[\frac{(-m(3+m) + (1+m)^2 b_3) A_1^2 + 2m(m - (-1+m)b_3) A_2}{2m^2(-m + (-1+m)b_3)} \right] e_k^3 + O(e_k^4), \quad (3.2)$$

donde $A_j = \frac{m! f^{(m+i)}(r)}{(m+i)! f^{(m)}(r)}$, $i = 1, 2, \dots$

Democión.

Expandiendo $f(x_k), f'(x_k), f''(x_k)$ en series de Taylor alrededor de r y utilizando el hecho de que $f^{(j)}(r) = 0, j = 0, 1, \dots, m-1$ y $f^{(m)}(r) \neq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_k) &= \frac{f^{(m)}(r) e_k^m}{m!} [1 + A_1 e_k + A_2 e_k^2 + A_3 e_k^3 + O(e_k^4)], \\ f'(x_k) &= \frac{f^{(m)}(r) e_k^{m-1}}{(m-1)!} [1 + B_1 e_k + B_2 e_k^2 + B_3 e_k^3 + O(e_k^4)], \\ f''(x_k) &= \frac{f^{(m)}(r) e_k^{m-2}}{(m-2)!} [1 + C_1 e_k + C_2 e_k^2 + C_3 e_k^3 + O(e_k^4)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

siendo

$$A_i = \frac{m! f^{(m+i)}(r)}{(m+i)! f^{(m)}(r)}, B_i = \frac{(m-1)! f^{(m+i)}(r)}{(m+i-1)! f^{(m)}(r)}, C_i = \frac{(m-2)! f^{(m+i)}(r)}{(m+i-2)! f^{(m)}(r)}, i = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

De (3.3), y con la ayuda del software Mathematica, se obtiene que

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{e_k}{m} - \frac{A_1 e_k^2}{m^2} + \frac{1}{m^3} [(m+1)A_1^2 - 2mA_2] e_k^3 + O(e_k^4) \quad (3.5)$$

y que

$$t_k = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2} = \frac{m-1}{m} + \frac{2A_1e_k}{m^2} - \frac{3}{m^3}[(m+1)A_1^2 - 2mA_2]e_k^2 + \frac{4}{m^4}[(m+1)A_1^3 - m(3m+4)A_1A_2 + 3m^2A_3]e_k^3 + O(e_k^4). \quad (3.6)$$

De (3.1), $e_{k+1} = e_k - H \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$; y combinando con (3.5) y (3.6) obtenemos la ecuación del error

$$e_{k+1} = K_1 e_k + K_2 e_k^2 + K_3 e_k^3 + O(e_k^4), \quad (3.7)$$

donde

$$K_1 = \left(1 - b_1 - \frac{b_2}{m + b_3 - mb_3}\right), K_2 = \frac{1}{m} \left(b_1 + \frac{b_2(m - (1+m)b_3)}{(m - (-1+m)b_3)^2}\right) A_1 \quad (3.8)$$

$$\text{y } K_3 = \frac{(-m(3+m) + (1+m)^2b_3)A_1^2 + 2m(m - (-1+m)b_3)A_2}{2m^2(-m + (-1+m)b_3)}.$$

Para alcanzar el orden 3 de convergencia, los coeficientes K_1 and K_2 deben desaparecer. Resolviendo $K_1 = 0$ y $K_2 = 0$, se deduce que

$$b_1 = \frac{-m + (m+1)b_3}{2b_3}, b_2 = \frac{(-m + (m-1)b_3)^2}{2b_3}. \quad (3.9)$$

Así, (3.7) se convierte en

$$e_{k+1} = \left[\frac{(-m(3+m) + (1+m)^2b_3)A_1^2 + 2m(m - (-1+m)b_3)A_2}{2m^2(-m + (-1+m)b_3)} \right] e_k^3 + O(e_k^4),$$

con lo que la prueba queda concluida.

Si hacemos $b_3 = \alpha$, tenemos que

$$H(t_k, \alpha) = \frac{(m(3-m) + \alpha(m-1)^2) + m(m - (m+1)\alpha)t_k}{2(1 - \alpha t_k)}. \quad (3.10)$$

Y, mediante un desarrollo algebraico de (3.10), podemos llegar a una expresión de tipo Chebyshev-Halley para H ,

$$H(t_k, \alpha) = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)((m-1)\alpha - 2m) + m^2t_k}{2(1 - \alpha t_k)}. \quad (3.11)$$

En efecto, haciendo $m = 1$ obtenemos la conocida familia Chebyshev-Halley para raíces simples:

$$x_{k+1} = x_k - \left(1 + \frac{t_k}{2(1 - \alpha t_k)}\right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

En resumen, nuestra familia puede expresarse así:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - H(t_k, \alpha) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ H(t_k, \alpha) &= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)((m-1)\alpha - 2m) + m^2 t_k}{2(1 - \alpha t_k)}, \\ t_k &= \frac{f(x_k) f''(x_k)}{f'(x_k)^2}, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esta expresión agrupa a todos los métodos Chebyshev-Halley para raíces simples o múltiples y solo a estos. En adelante nos referiremos a ella como la familia CH3.

Algunos métodos conocidos se pueden deducir así:

1) Chebyshev ($\alpha = 0$):

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{m(3-m)}{2} + \frac{m^2 t_k}{2} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3.13)$$

2) Halley ($\alpha = 1/2$):

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{m(m+1)}{2} + \frac{(1-m)(1+3m) + 2m^2 t_k}{2(2-t_k)} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3.14)$$

3) Super-Halley ($\alpha = 1$):

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{(m+1) - mt_k}{2(1-t_k)} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3.15)$$

4) Osada ($\alpha = \infty$):

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{m(m+1)}{2} - \frac{(m-1)^2}{2t_k} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3.16)$$

3.2 Segunda respuesta

Pensando en mejorar la convergencia, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Puede construirse un método óptimo de dos pasos basado en el esquema trabajado en el apartado anterior?

En respuesta, proponemos el estudio del siguiente esquema:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \left(b_1 m + \frac{b_2}{1-b_3 t_n} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}, \quad t_n = \frac{f(x_n) f''(x_n)}{f'(x_n)^2}. \quad (3.17)$$

Será libre de segunda derivada y utilizará tres evaluaciones funcionales $f(x_n)$, $f'(x_n)$ y $f'(y_n)$.

Obtendremos una expresión para $f''(x_n)$ aproximando la función f mediante un polinomio de segundo grado alrededor de x_n ,

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)^2 \quad (3.18)$$

Para encontrar a_0 , a_1 y a_2 expresamos que

$$P(x_n) = f(x_n) = a_0, \quad P'(x_n) = f'(x_n) = a_1, \quad (3.19)$$

$$P'(y_n) = f'(y_n) = f'(x_n) + 2a_2(y_n - x_n), \text{ de donde } a_2 = \frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{2(y_n - x_n)}, \quad (3.20)$$

$$P''(x_n) = f''(x_n) = 2a_2 = \frac{(m+2)(f'(x_n) - f'(y_n))f'(x_n)}{2mf(x_n)}, \quad (3.21)$$

por lo que

$$t_n = \frac{f(x_n) f''(x_n)}{f'(x_n)^2} = \frac{(m+2)(f'(x_n) - f'(y_n))}{2mf'(x_n)}. \quad (3.22)$$

Teorema 3.2 Sea $r \in I$ una raíz de multiplicidad m de una función f suficientemente diferenciable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$. Si x_0 está suficientemente cerca de r , entonces el esquema iterativo definido por (3.17) tiene orden de convergencia 4 siempre que

$$b_1 = 1 - \frac{m}{2}, \quad b_2 = \frac{m\mu}{1-\mu} \quad \text{y} \quad b_3 = \frac{2m}{(2+m)(1-\mu)}, \quad \text{con } \mu = \left(\frac{m}{m+2} \right)^m. \quad (3.23)$$

Demostración.

Tomando la segunda ecuación de (3.17) en combinación con (3.22) obtenemos que:

$$x_{n+1} = x_n - b_1 m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(x_n)}{\frac{2m - (m+2)b_3}{2mb_2} f'(x_n) + \frac{(m+2)b_3}{2mb_2} f'(y_n)} \quad (3.24)$$

Identificamos esta expresión con la segunda ecuación de (2.1) así:

$$b_1 = \frac{a_1}{m} = 1 - \frac{m}{2}, b_2 = \frac{1}{a_2 + a_3} = \frac{m\mu}{1 - \mu}, b_3 = \frac{2ma_3}{(2+m)(a_2 + a_3)} = \frac{2m}{(2+m)(1-\mu)} \quad (3.25)$$

Así concluye la prueba.

En resumen, hemos llegado a un método conocido que podría identificarse como un método óptimo de orden 4 para raíces múltiples tipo Chebyshev-Halley, y que podemos describir así:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \left(\frac{m(2-m)}{2} + \frac{(2+m)m\mu}{(2+m)(1-\mu) - 2mt_n} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ t_n = \frac{(m+2)(f'(x_n) - f'(y_n))}{2mf'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.26)$$

Lo llamaremos CH4 al realizar su estudio dinámico.

3.3 Tercera respuesta

Nos preguntamos: ¿Existe alguna investigación anterior que responda más directamente a la pregunta planteada?

Rajni Sharma et al. presentan en [3] el siguiente esquema iterativo:

$$x_{k+1} = x_k - H \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} ; \quad H \in C^2(\mathbb{R}) \quad (3.27)$$

No se dan más condiciones a priori sobre la función de peso H .

Teorema 3.3 Sea $r \in I$ una raíz de multiplicidad m de una función f suficientemente diferenciable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$. Si x_0 está suficientemente cerca de r , entonces el esquema iterativo definido por (3.27) tiene orden de convergencia 3, siempre que:

$$H(u) = m, H'(u) = \frac{m^2}{2} \text{ y } H''(u) < \infty,$$

con $u = \frac{(m-1)}{m}$ y $e_k = x_k - r$. Entonces la ecuación del error es:

$$e_{k+1} = \left[\frac{m^4 + 3m^3 - 4H''(u)}{2m^5} A_1^2 - \frac{A_2}{m} \right] e_k^3 + O(e_k^4), \text{ donde } A_j = \frac{m! f^{(m+i)}(r)}{(m+i)! f^{(m)}(r)}, i = 1, 2, \dots$$

Demuestra.

Repetimos los pasos (3.3) a (3.6). Despues, con $u = \frac{(m-1)}{m}$ reescribimos (3.6) como

$$t_k = u + \frac{2A_1 e_k}{m^2} - \frac{3}{m^3} [(m+1)A_1^2 - 2mA_2] e_k^2 + \frac{4}{m^4} [(m+1)A_1^3 - m(3m+4)A_1 A_2 + 3m^2 A_3] e_k^3 + O(e_k^4),$$

de donde $v = t_k - u$

$$\begin{aligned} &= \frac{2A_1 e_k}{m^2} - \frac{3}{m^3} [(m+1)A_1^2 - 2mA_2] e_k^2 \\ &\quad + \frac{4}{m^4} [(m+1)A_1^3 - m(3m+4)A_1 A_2 + 3m^2 A_3] e_k^3 + O(e_k^4) \end{aligned}$$

es una cantidad infinitesimal con el mismo orden de e_k y puede realizarse la expansión de Taylor de $H(t_k) = H(u + v)$ alrededor de u ,

$$H(t_k) = H(u) + H'(u)v + \frac{H''(u)v^2}{2} + \frac{H'''(u)v^3}{3!} + O(e_k^4). \quad (3.29)$$

Combinan

do (3.27), (3.5) y (3.29) llegamos a la ecuación del error:

$$e_{k+1} = K_1 e_k + K_2 e_k^2 + K_3 e_k^3 + O(e_k^4), \quad (3.30)$$

con

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 - \frac{H(u)}{m}, K_2 = \frac{H(u)m - 2H'(u)}{m^3} A_1, \\ K_3 &= -\frac{1}{m^5} [(m^3 + m^2)H(u) - (3m^2 + 5m)H'(u) + 2H''(u)] A_1^2 + (6m^2 H'(u) - 2m^3 H(u)) A_2. \end{aligned}$$

Para alcanzar el orden 3 de convergencia, los coeficientes K_1 and K_2 deben desaparecer. Resolviendo $K_1 = 0$ y $K_2 = 0$, se obtiene que

$$H(u) = m, H'(u) = \frac{m^2}{2}. \quad (3.31)$$

Entonces, (3.30) se convierte en

$$e_{k+1} = \left[\frac{m^4 + 3m^3 - 4H''(u)}{2m^5} A_1^2 - \frac{A_2}{m} \right] e_k^3 + O(e_k^4). \quad (3.32)$$

Con esto se completa la prueba.

Es obvio que este método requiere de tres evaluaciones funcionales y se identifica en eficiencia y optimalidad con los métodos presentados en el capítulo 2.3.2.

Casos especiales.

Existen expresiones de H para las cuales muchos métodos conocidos como Ostrowski [5], Hansen y Patrick [24], Traub [23], Neta [38], Osada [22], Chun et al. [30-31], Biazar and Ghanbari [41], and J. R. Sharma and R. Sharma [35-36] aparecen como casos particulares de esta familia.

Los métodos Chebyshev-Halley para raíces múltiples también están incluidos allí. En efecto si $H(t) = b_1 m + \frac{b_2}{1 - b_3 t}$, entonces $H'(t) = \frac{b_2 b_3}{(1 - b_3 t)^2}$. De (3.31), $b_1 m + \frac{b_2}{1 - b_3 u} = m$ y $\frac{b_2 b_3}{(1 - b_3 u)^2} = \frac{m^2}{2}$. De ahí se deducen los mismos valores que en (3.9).

Capítulo 4. Estudio dinámico de las familias construidas

Una manera de estudiar la convergencia de un método o de una familia de métodos de acuerdo con los valores iniciales de iteración es a través de la dinámica compleja aplicada a polinomios.

En este capítulo estudiaremos en detalle la dinámica de la familia CH3 y del método CH4 cuando se aplican a polinomios de tercer grado con una raíz doble.

4.1 Dinámica compleja de la familia CH3

4.1.1 Construcción del operador racional

En el apartado 3.1 anterior encontramos una expresión de los métodos Chebyshev-Halley para raíces múltiples que llamamos CH3 y que recordamos a continuación:

$$x_{k+1} = x_k - H(t_k, \alpha) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$H(t_k, \alpha) = \frac{(m(3-m) + \alpha(m-1)^2) + m(m-(m+1)\alpha)t_k}{2(1-\alpha t_k)},$$

$$t_k = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Sea $f(z)$ una función analítica en $\hat{\mathbb{C}}$. Se define el operador de punto fijo complejo para $f(z)$ como la aplicación del método en estudio a la función. Para la familia CH3 se tiene que

$$G_f(z) = z - \frac{(m(3-m) + \alpha(m-1)^2) + m(m-(m+1)\alpha)t_f}{2(1-\alpha t_f)} \frac{f(z)}{f'(z)}; t_f = \frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}.$$

Para simplificar el estudio dinámico, aplicaremos el teorema del escalado que vamos a enunciar y a demostrar.

Teorema 4.1 (Teorema del escalado de la familia de métodos CH3):

Sean:

- $f(z)$ una función analítica en $\hat{\mathbb{C}}$ y $G_f(z)$ su operador de punto fijo correspondiente.
- $A(z) = \beta z + \gamma$ una aplicación afín con $\beta \neq 0$.
- $g(z) = \lambda(f \circ A)(z)$ y $G_g(z)$ su operador de punto fijo correspondiente.

Entonces $(AoG_g o A^{-1})(z) = G_f(z)$. Es decir, G_f y G_g son analíticamente conjugados por A .

Demostración.

Durante el procedimiento utilizaremos las siguientes igualdades:

- $g'(z) = \lambda f'(A(z))A'(z) = \lambda f'(A(z))\beta$.
- $g''(z) = \lambda f''(A(z))\beta^2$.
- $A(z_1 - z_2) = A(z_1) - \beta z_2$

Dado que,

$$\begin{aligned} t_g(A^{-1}(z)) &= \frac{g(A^{-1}(z))g''(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))^2} = \frac{\lambda f(A(A^{-1}(z)))\lambda f''(A(A^{-1}(z)))\beta^2}{(\lambda f'(A(A^{-1}(z)))\beta)^2} = \frac{f(z)f''(z)}{f'^2(z)} \\ &= t_f(z) \end{aligned}$$

y que

$$\frac{g(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))} = \frac{\lambda f(A(A^{-1}(z)))}{\lambda f'(A(A^{-1}(z)))\beta} = \frac{f(z)}{\beta f'(z)},$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} (AoG_g o A^{-1})(z) &= A(G_g(A^{-1}(z))) \\ &= A(A^{-1}(z)) - \frac{(m(3-m) + \alpha(m-1)^2) + m(m-(m+1)\alpha)t_g(A^{-1}(z))}{2(1-\alpha t_g(A^{-1}(z)))} \frac{g(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))} \\ &= A(A^{-1}(z)) - \beta \frac{(m(3-m) + \alpha(m-1)^2) + m(m-(m+1)\alpha)t_f}{2(1-\alpha t_f)} \frac{f(z)}{\beta f'(z)} \\ &= z - \frac{(m(3-m) + \alpha(m-1)^2) + m(m-(m+1)\alpha)t_f}{2(1-\alpha t_f)} \frac{f(z)}{f'(z)} = G_f(z). \end{aligned}$$

Que G_f y G_g sean analíticamente conjugados por A implica que tienen la misma dinámica compleja.

Lo que dice el teorema del escalado para nuestro estudio es que las raíces de un polinomio cualquiera de tercer grado con una raíz doble se pueden transformar mediante una aplicación afín manteniéndose la dinámica compleja.

Esto nos permitirá trabajar con el polinomio genérico $p(z) = (z - a)^2(z - b)$.

El operador racional que obtenemos al aplicar la familia sobre $p(z)$ es

$$R_p(z, \alpha, a, b) = z - \frac{((\alpha + 2)(3z - 2b - a)^2 + 2(4 - 6\alpha)(z - b)(3z - b - 2a))}{2((3z - 2b - a)^2 - 2\alpha(z - b)(3z - b - 2a))} \frac{(z - a)(z - b)}{(3z - 2b - a)},$$

dependiente no solo de α sino también de los parámetros a y b .

Para evitar esto último, consideramos la transformación de Möbius

$$M(z) = \frac{z - a}{z - b},$$

de tal manera que conjugando el operador R_p con M obtendremos un operador O_p dependiente solo del parámetro α . Como R_p y O_p son conjugados por M su dinámica es equivalente.

Así,

$$O_p(z, \alpha) = (M \circ R_p \circ M^{-1})(z) = -\frac{z^3(2z + 10 - 9\alpha)}{az^3 + 12z^2(1 - \alpha) - 4z(2 - 3\alpha) - 8(2 - \alpha)} \quad (4.1)$$

Dado que $M(a) = 0$, $M(b) = \infty$ y $M(\infty) = 1$, la transformación de Möbius ha enviado las raíces a y b a 0 e ∞ respectivamente, mientras que el comportamiento divergente se concentrará ahora en 1.

En otras palabras 0 e ∞ serán los puntos fijos de O_p que corresponden a las raíces de multiplicidad 2 y 1 de $p(z)$, respectivamente.

Para poder realizar el estudio de estabilidad de los puntos fijos y la obtención de los críticos, calculamos el operador diferencial

$$O_p'(z) = \frac{\left(-2z^2(z^4\alpha - 24z^3(-1 + \alpha) + 6z^2(6 - 13\alpha + 9\alpha^2)) \right.}{\left. -4z(36 - 56\alpha + 27\alpha^2) - 12(20 - 28\alpha + 9\alpha^2) \right) \frac{(z^3\alpha - 12z^2(-1 + \alpha) + 4z(-2 + 3\alpha) + 8(-2 + \alpha))^2}{(z^3\alpha - 12z^2(-1 + \alpha) + 4z(-2 + 3\alpha) + 8(-2 + \alpha))^2}. \quad (4.2)$$

El tratamiento del punto fijo ∞ precisa sin embargo de una consideración especial [44].

Definición 4.2 *El punto ∞ es un punto fijo de O_p si y solo si $z = 0$ es un punto fijo de la función*

$F_p(z) = \frac{1}{Op\left(\frac{1}{z}\right)}$. Será atractor si y solo si $|F_p'(0)| < 1$, neutro si y solo si $|F_p'(0)| = 1$ y repulsor si y solo si $|F_p'(0)| > 1$.

Entonces, las expresiones para F_p y F_p' son

$$F_p(z) = \frac{z(8z^3(-2 + \alpha) + 4z^2(-2 + 3\alpha) - 12z(-1 + \alpha) + \alpha)}{z(-10 + 9\alpha) - 2}, \quad (4.3)$$

$$F_p'(z) = \frac{(24z^4(20 - 28\alpha + 9\alpha^2) + 8z^3(36 - 56\alpha + 27\alpha^2))}{(z(-10 + 9\alpha) - 2)^2} - \frac{12z^2(6 - 13\alpha + 9\alpha^2) + 48z(-1 + \alpha) - 2\alpha}{(z(-10 + 9\alpha) - 2)^2}. \quad (4.4)$$

4.1.2 Puntos fijos y puntos críticos.

Verificamos de manera inmediata que $z = 0$ y $z = \infty$ son puntos fijos ya que $Op(0, \alpha) = 0$ y $Fp(0, \alpha) = 0$.

Resolviendo la ecuación $Op(z, \alpha) = z$ aparecen los puntos fijos extraños que son

$$z_{e_0} = 1, z_{e_1} = \frac{2(-6 + 5\alpha - \sqrt{28 - 60\alpha + 27\alpha^2})}{2 + \alpha} \text{ y } z_{e_2} = \frac{2(-6 + 5\alpha + \sqrt{28 - 60\alpha + 27\alpha^2})}{2 + \alpha}.$$

A continuación, hacemos el estudio de existencia de los puntos fijos y de su estabilidad y también de los puntos críticos.

Lema 4.3 *El número de puntos fijos extraños es 3, excepto para $\alpha = -2, 2, 2/3, 14/9$.*

Demuestra.

- Los valores $\alpha = \pm 2$ anulan los numeradores de z_{e_1} y z_{e_2} .
- Los valores $\alpha = 2/3$ y $14/9$ anulan el polinomio $28 - 60\alpha + 27\alpha^2$.
- El valor $\alpha = 14/9$ es la solución de las ecuaciones $z_{e_1} = 1$ y $z_{e_2} = 1$.

Ahora vamos a determinar los puntos fijos extraños para estos valores.

- $Op(z, -2) = \frac{z^3(14 + z)}{16 + 16z - 18z^2 + z^3} = z \rightarrow z = 0, z = 1, z = -\frac{1}{2}$.

Los dos últimos son puntos fijos extraños.

- $Op(z, 2) = \frac{z^2}{2 - z} = z \rightarrow z = 0, z = 1$.

$z = 1$ es el único punto fijo extraño.

- $Op(z, 2/3) = -\frac{3z^3}{-8 + 4z + z^2} = z \rightarrow z = 0, z = 1, z = -2.$

Los dos últimos son puntos fijos extraños.

- $Op(z, 14/9) = -\frac{9(-2 + z)z^3}{-16 + 48z - 30z^2 + 7z^3} = z \rightarrow z = 0, z = 1, z = 1, z = 1.$

$z = 1$ es único punto fijo extraño y es triple.

Lema 4.4 Los puntos críticos del operador $Op(z, \alpha)$ son $z = 0$, que corresponde a la raíz múltiple de $p(z)$, y los 4 puntos críticos libres que son las raíces del polinomio

$$\begin{aligned} z^4\alpha - 24z^3(-1 + \alpha) + 6z^2(6 - 13\alpha + 9\alpha^2) - 4z(36 - 56\alpha + 27\alpha^2) \\ - 12(20 - 28\alpha + 9\alpha^2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Demostración.

Las soluciones enunciadas son las soluciones de la ecuación $Op'(z) = 0$ (Ver 4.2), siempre que los valores hallados no anulen el denominador.

Algunas de las raíces del polinomio (4.5) pueden en realidad corresponder a puntos fijos si estos son superatractores.

Vamos a describir los puntos críticos libres $c1, c2, c3, c4$.

Sean:

$$A1 = 144(-1 + \alpha)^2 - 4\alpha(6 - 13\alpha + 9\alpha^2),$$

$$A2 = 18 * 3^{2/3}\alpha(2 - 3\alpha + \alpha^2)^2,$$

$$A3 = -72 + 228\alpha - 218\alpha^2 + 11\alpha^3 + 97\alpha^4 - 54\alpha^5 + 9\alpha^6,$$

$$A4 = \sqrt{((-2 + \alpha)^4\alpha(864 - 4968\alpha + 11616\alpha^2 - 14162\alpha^3 + 9522\alpha^4 - 3357\alpha^5 + 486\alpha^6))},$$

$$A5 = 8\left(13 - \frac{6}{\alpha} - 9\alpha\right) + \frac{288(-1 + \alpha)^2}{\alpha^2},$$

$$A6 = 8(432 - 1404\alpha + 1602\alpha^2 - 772\alpha^3 + 135\alpha^4),$$

$$A = \frac{A2}{(A3 + A4)^{1/3}} + 6 * 3^{1/3}\alpha(A3 + A4)^{1/3},$$

$$B = 6 - \frac{6}{\alpha}, \quad C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A1 + A}{\alpha^2}}, \quad D = A5 - \frac{A}{\alpha^2}, \quad E = A6/(\alpha^3 C).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} c1 &= B - C - \frac{1}{2}\sqrt{D+E}, \\ c2 &= B - C + \frac{1}{2}\sqrt{D+E}, \\ c3 &= B + C - \frac{1}{2}\sqrt{D-E}, \\ c4 &= B + C + \frac{1}{2}\sqrt{D-E}. \end{aligned}$$

Enunciamos los siguientes casos especiales:

- $\alpha = 2$, un solo punto crítico libre.
- $\alpha = \infty, \alpha = 2/3, \alpha = 3/2, \alpha = 4/3$, dos puntos críticos libres.
- $\alpha = 0, \alpha = 10/9, \alpha = -5.66328, \alpha = 1.59444, \alpha = 1.58399$, tres puntos críticos libres.

4.1.3 Estabilidad de los puntos fijos

Para el diseño de un buen método es deseable que los puntos fijos extraños sean repulsores, de manera que el proceso iterativo no desemboque en valores que no corresponden a las raíces de la ecuación que queremos resolver.

Teorema 4.5. *El punto fijo $z = 0$ es superatractor para todo α . Para $z = \infty$ distinguimos los siguientes casos:*

1. *Atractor si $|\alpha| < 2$.*
2. *Neutral o parabólico si $|\alpha| = 2$.*
3. *Repulsor si $|\alpha| > 2$.*

Demostración.

Haciendo $z = 0$ en (4.2) y en (4.4) tenemos que $Op'(0, \alpha) = 0$ y que $F_p'(0, \alpha) = -\frac{\alpha}{2}$.

Entonces $z = 0$ es superatractor y, de acuerdo con la Definición 4.2, $z = \infty$ es:

1. *Atractor si $\left|-\frac{\alpha}{2}\right| < 1$, es decir si $|\alpha| < 2$ (y superatractor si $\alpha = 0$).*
2. *Neutral o parabólico si $\left|-\frac{\alpha}{2}\right| = 1$, es decir si $|\alpha| = 2$.*

3. Repulsor si $\left| -\frac{\alpha}{2} \right| > 1$, es decir si $|\alpha| > 2$.

Teorema 4.6. El punto fijo extraño z_{e_0} es atractor en el interior del disco

$$\left(\operatorname{Re}\{\alpha\} - \frac{68}{45} \right)^2 + (\operatorname{Im}\{\alpha\})^2 < \left(\frac{2}{45} \right)^2,$$

donde $\operatorname{Re}\{\alpha\}$ e $\operatorname{Im}\{\alpha\}$ representan las partes real e imaginaria de α , respectivamente; es repulsor fuera de este y neutral sobre la circunferencia $\left(\operatorname{Re}\{\alpha\} - \frac{68}{45} \right)^2 + (\operatorname{Im}\{\alpha\})^2 = \left(\frac{2}{45} \right)^2$.

Demostración.

Haciendo $z = 1$ en (4.2) tenemos que $Op'(1, \alpha) = \frac{6(-3 + 2\alpha)}{-4 + 3\alpha}$ por lo que $z = 1$ es:

$$1. \text{ Atractor si } \left| \frac{6(-3 + 2\alpha)}{-4 + 3\alpha} \right| < 1.$$

$$2. \text{ Neutral o parabólico si } \left| \frac{6(-3 + 2\alpha)}{-4 + 3\alpha} \right| = 1.$$

$$3. \text{ Repulsor si } \left| \frac{6(-3 + 2\alpha)}{-4 + 3\alpha} \right| > 1.$$

Si $\left| \frac{6(-3 + 2\alpha)}{-4 + 3\alpha} \right| = 1$ entonces $|6(-3 + 2\alpha)| = |-4 + 3\alpha|$, que corresponde a la circunferencia

$$\left(\operatorname{Re}\{\alpha\} - \frac{68}{45} \right)^2 + (\operatorname{Im}\{\alpha\})^2 = \left(\frac{2}{45} \right)^2.$$

De ahí se siguen los resultados enunciados; z_{e_0} será superatractor para $\alpha = \frac{3}{2}$.

Para z_{e_1} y z_{e_2} no son posibles estudios analíticos como los recién realizados pues

$$Op'(z_{e_1}, \alpha) = \frac{176 - 168\alpha + 36\alpha^2 + (-14 + 9\alpha)^{3/2} \sqrt{(-2 + 3\alpha)}}{9(-2 + \alpha)^2}$$

$$\text{y } Op'(z_{e_2}, \alpha) = \frac{176 - 168\alpha + 36\alpha^2 - (-14 + 9\alpha)^{3/2} \sqrt{(-2 + 3\alpha)}}{9(-2 + \alpha)^2}.$$

En su lugar dibujamos, en la Figura 4.1, las regiones de estabilidad en el plano complejo, donde la parte real de α se representa en el eje de las abcisas y la parte compleja en el de las ordenadas.

En blanco están las regiones donde $Op'(z_{e_1}, \alpha) < 1$ y $Op'(z_{e_2}, \alpha) < 1$, es decir donde z_{e_1} y z_{e_2} son atractores.

En gris están las regiones donde $Op'(z_{e_1}, \alpha) > 1$ y $Op'(z_{e_2}, \alpha) > 1$, es decir donde z_{e_1} y z_{e_2} son repulsores.

Las curvas que limitan las regiones anteriores son los lugares de la neutralidad.

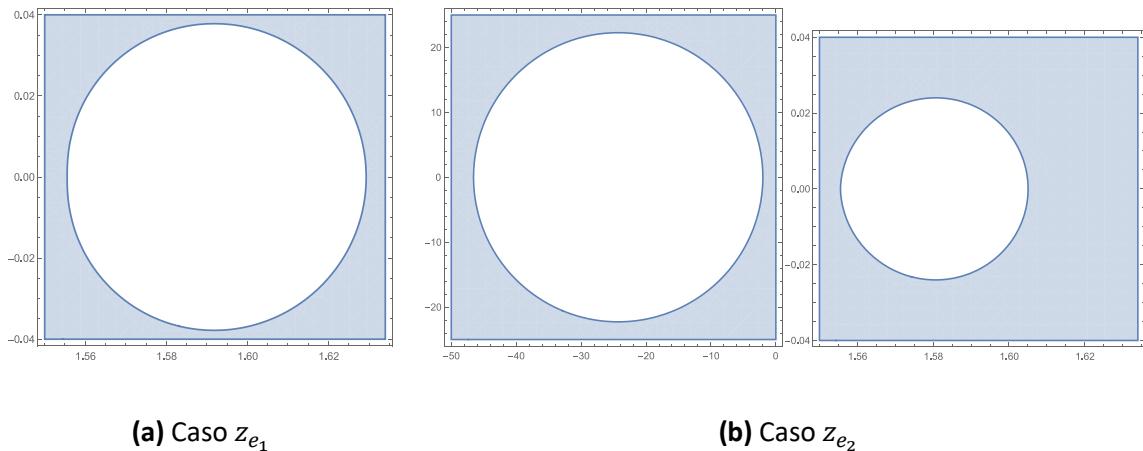


Figura 4.1: Regiones de estabilidad para z_{e_1} y z_{e_2}

En la Figura 4.2, dibujamos el mapa de estabilidad de los puntos fijos extraños y $z = \infty$:

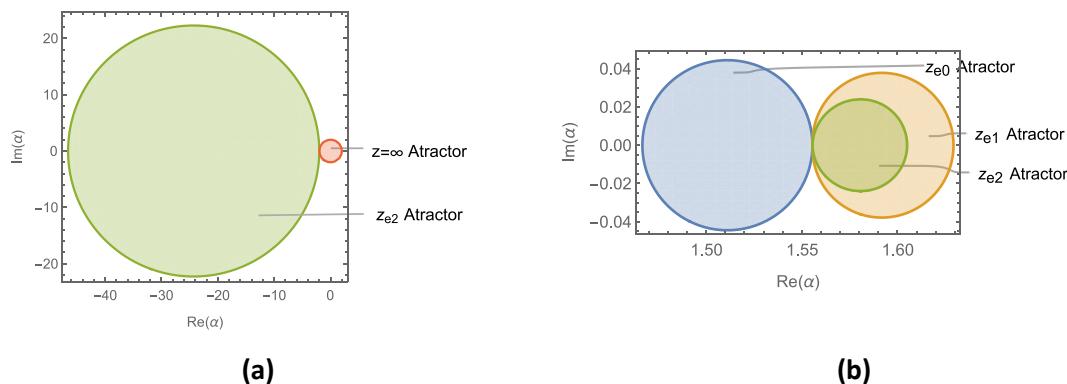


Figura 4.2: (a) Mapa de estabilidad de los puntos fijos extraños y $z = \infty$; la región (b) está dentro de la zona en rojo.

En la Figura 4.2a, tenemos que al exterior de las zonas verde y roja solo hallaremos la raíz doble. Dentro de la zona roja y al exterior de las zonas en color de la Figura 4.2b, los métodos podrán converger a la raíz simple. Los métodos al interior de las zonas en color diferente al rojo deben evitarse.

4.1.4 Planos de parámetros

A continuación, vamos a dibujar los planos de parámetros para cada uno de los puntos críticos.

Para ello tomaremos una cuadrícula de 800×800 puntos, cada uno de los cuales representa a un valor del parámetro y , por lo tanto, a un valor del punto crítico que procederemos a iterar.

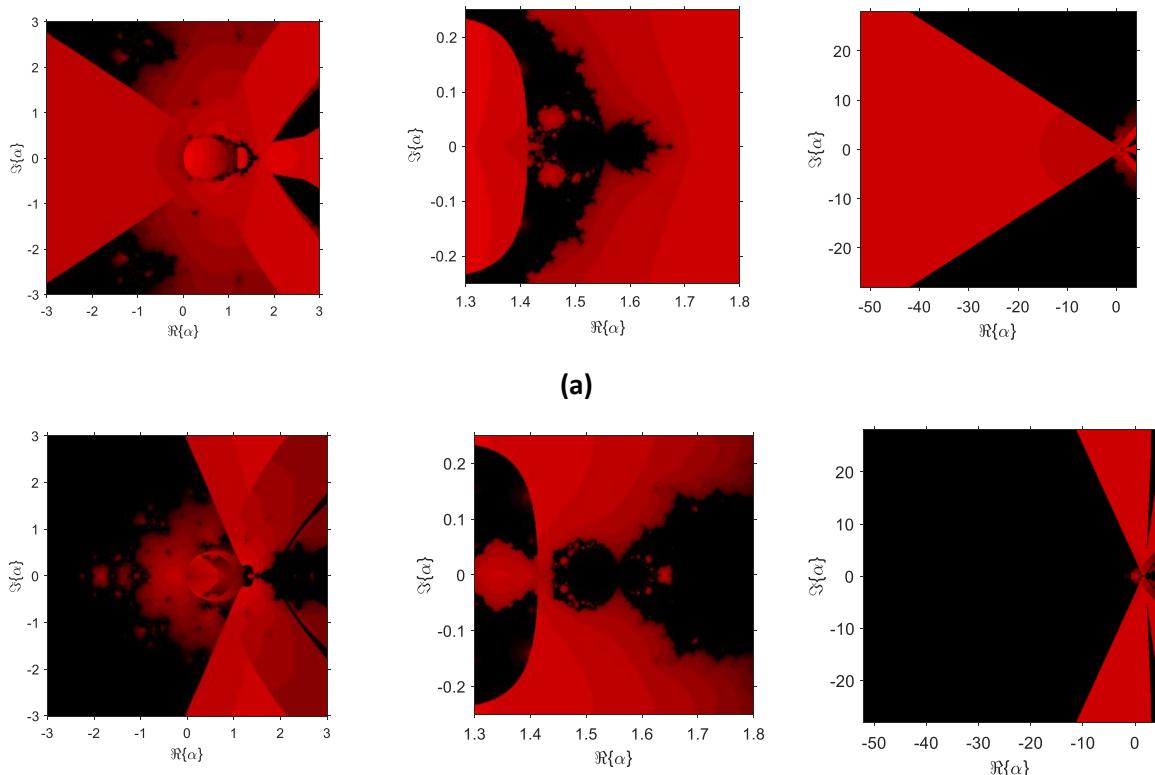
Si se presenta convergencia hacia una de las dos raíces de $p(z)$ se pinta en rojo el punto correspondiente. De lo contrario tendrá color negro.

En la Figura 4.3 presentamos las gráficas resultantes, entre las cuales están las que corresponden a las regiones de interés determinadas por el mapa de estabilidad de los puntos fijos extraños.

Se ha utilizado el código en Matlab elaborado en [7], con tolerancia 10^{-3} y realizando 150 iteraciones en cada caso. Se indican los casos que han requerido de más iteraciones para ilustrarlos con mayor claridad.

La utilidad de los mapas de parámetros consiste en que, de un vistazo, podemos obtener información acerca de la estabilidad de los métodos de la familia. En las zonas negras los métodos tienen al menos un atractor más, diferente de 0 o ∞ , que puede ser un punto fijo extraño o un atractor periódico. Los métodos de interés son entonces los que corresponden a las zonas rojas.

Vale mencionar que algunas regiones negras desaparecen cuando se utilizan más iteraciones, lo que nos indica métodos estables, aunque de convergencia más lenta.



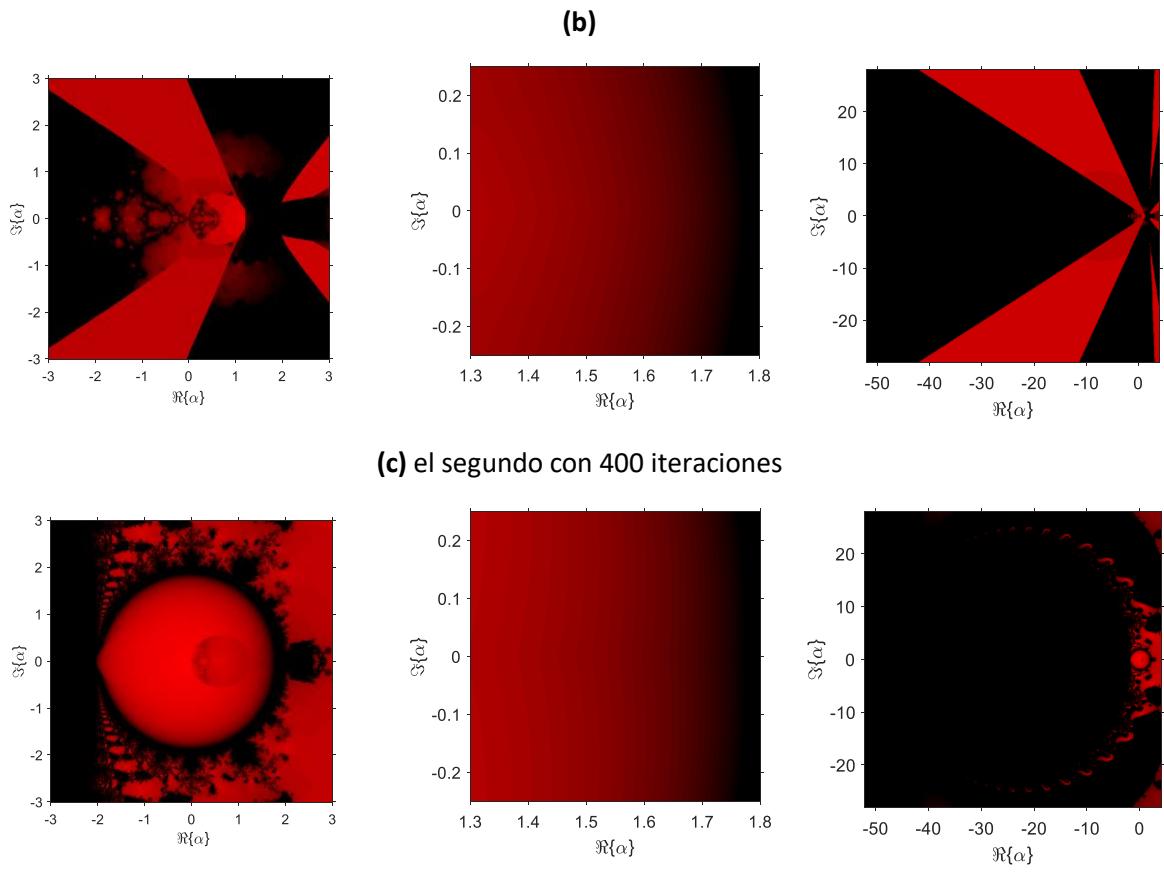


Figura 4.3: Planos de parámetros para (a) c1, (b) c2, (c) c3 y (d) c4.

4.1.4 Planos dinámicos

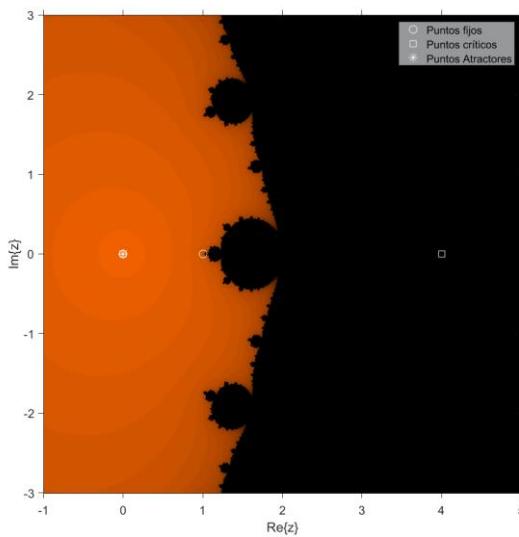
Para elaborar nuestros planos dinámicos tomaremos como semillas los valores de una cuadrícula de 800×800 puntos del plano complejo, con 50 iteraciones y tolerancia de 10^{-3} . Utilizamos los códigos en Matlab que aparecen en [7].

Cada punto tendrá un color diferente según el resultado del proceso iterativo, así:

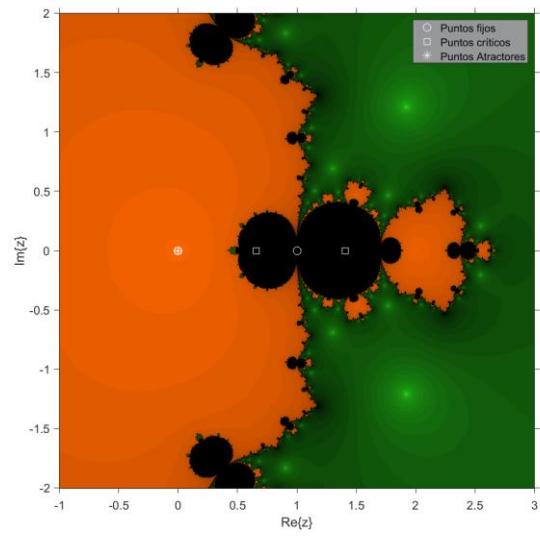
- Si hay convergencia a la raíz doble, color naranja.
- Si hay convergencia a la raíz simple, color verde.
- Si hay convergencia a puntos fijos extraños, colores azul y rojo.

En cualquier otro caso, que puede corresponder a un atractor periódico o a no convergencia por número insuficiente de iteraciones, el punto tendrá color negro.

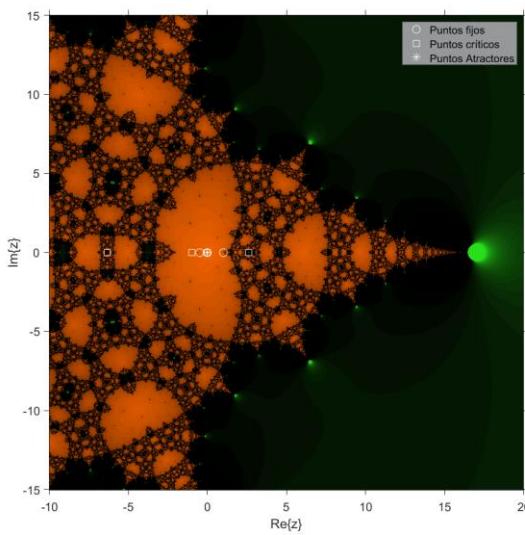
- ❖ En la Figura 4.4 dibujamos los planos dinámicos para los casos en donde hay menos de tres puntos fijos extraños: $\alpha = \{2, 14/9, -2, 2/3\}$.



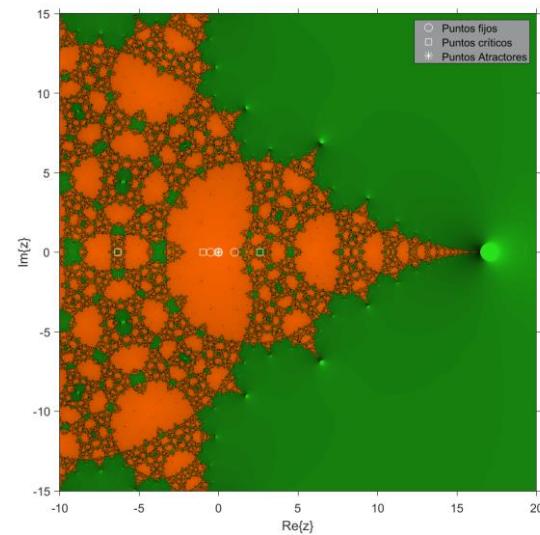
(a)



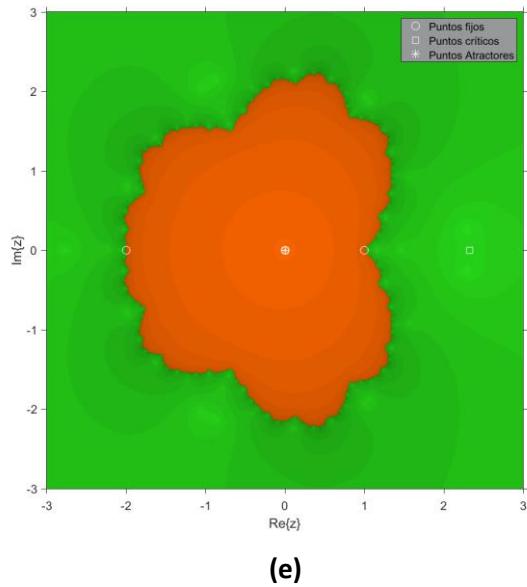
(b)



(c) con 50 iteraciones



(d) con 100 iteraciones



(e)

Figura 4.4: Planos dinámicos para (a) $\alpha = 2$, (b) $\alpha = 14/9$, (c) y (d) $\alpha = -2$ y (e) $\alpha = 2/3$.

En todos los casos los puntos fijos extraños son repulsores y por eso no vemos color azul o rojo.

Figura 4.4a: $\alpha = 2$ está en la zona de neutralidad de la raíz simple que para este caso no es atractora. Este método solo convergerá a la raíz doble o a la órbita periódica $\{-20001, 19999\}$.

Figura 4.4b: $\alpha = 14/9$ es el punto de intersección de las zonas de neutralidad de los tres puntos fijos extraños. Por ello tiene como único punto fijo extraño $z = 1$, con multiplicidad tres. Siendo $\alpha < 2$, también puede converger a la raíz simple. Las zonas negras son de convergencia *muy lenta* a 1.

Figuras 4.4c y 4.4d: $\alpha = -2$. Es un buen ejemplo para notar la influencia del número de iteraciones en la aparición de regiones negras cuando la convergencia es más lenta. Con más iteraciones, se hace mucho más nítido el complejo conjunto de Julia.

Figura 4.4e: $\alpha = 2/3$ es el más estable de este grupo de métodos pues siempre habrá convergencia a alguna de las raíces.

- ❖ En la Figura 4.5 presentamos los planos dinámicos para los métodos Chebyshev ($\alpha = 0$), Halley ($\alpha = 1/2$), Super-Halley ($\alpha = 1$) y Osada ($\alpha = \infty$) para raíces múltiples, $m=2$.

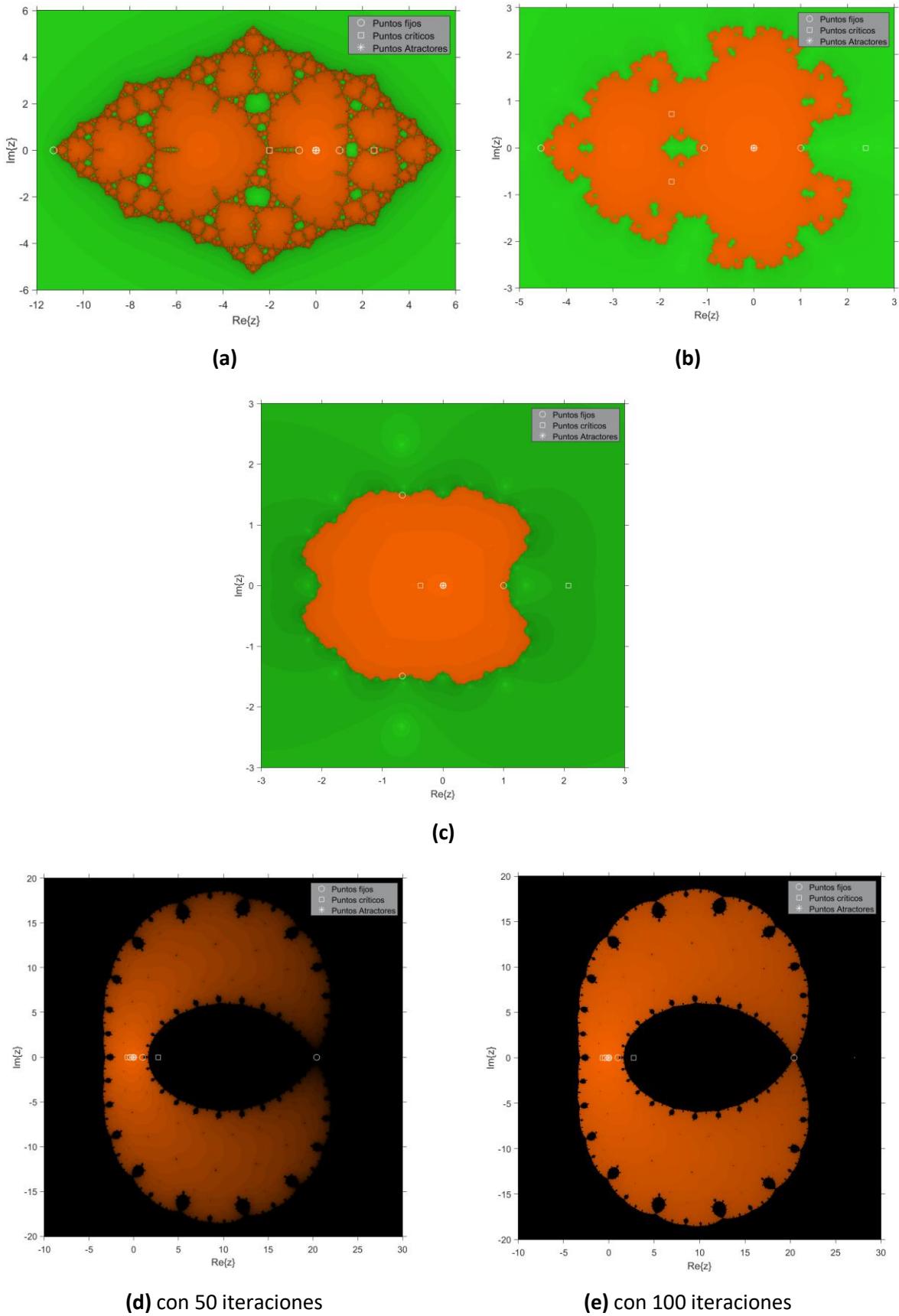


Figura 4.5: Planos dinámicos para (a) Chebyshev, (b) Halley, (c) super-Halley, (d) y (e) Osada.

Aunque cada uno de estos métodos tiene tres puntos fijos extraños, en ningún caso son atractores.

Los tres primeros métodos tienen áreas verdes de convergencia a la raíz simple dado que $\alpha < 2$.

Los métodos de Halley y Super-Halley parecen los más estables, con el conjunto de julia más reducido.

Super-Halley solo presenta cuencas de atracción inmediatas, es decir que el plano complejo queda dividido en solo dos regiones como ocurre con el método de Newton. Su región naranja es la más reducida de este grupo de métodos.

Los métodos de Chebyshev y Osada tienen una zona de convergencia más grande a la raíz doble, aunque el primero tiene un conjunto de Julia mucho más complejo y el segundo tiene una amplia zona de convergencia al atractor periódico $\{-6.5102, 2.9057\}$ y una más lenta convergencia a la raíz doble.

- ❖ En la Figura 4.6 presentamos dos casos con puntos fijos extraños atractores: el caso $\alpha = 3/2$ con $z = 1$ superatractor y el caso $\alpha = 1.58$ con $z_{e_1} = 0.6277$ y $z_{e_2} = 1.4952$ atractores.

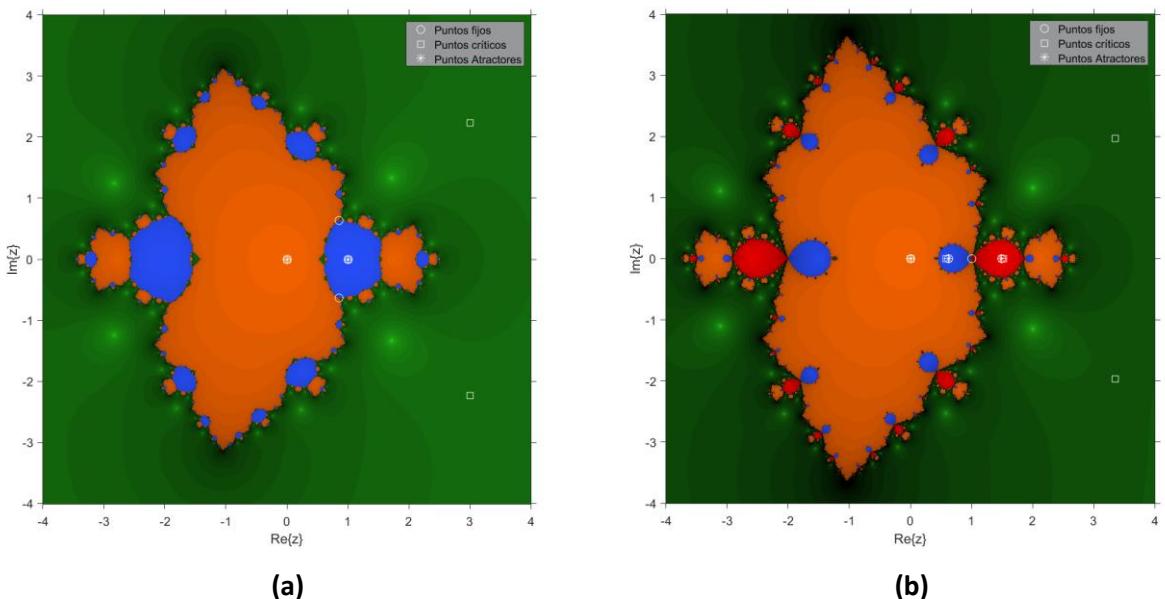


Figura 4.6: Planos dinámicos para (a) $\alpha = 3/2$ y (b) $\alpha = 1.58$

Los dos casos corresponden métodos inestables que pertenecen a zonas negras de los planos de parámetros.

4.2 Dinámica compleja del método CH4

4.2.1 Construcción del operador racional

Como en el caso anterior, realizaremos el estudio sobre un polinomio cualquiera de tercer grado con una raíz doble, para lo cual recurriremos al polinomio genérico $p(z) = (z - a)^2(z - b)$ después de demostrar el teorema del escalado.

Para el esquema CH4 tenemos:

$$G_f(z) = z - \left(\frac{m(2-m)}{2} + \frac{(2+m)m\mu}{(2+m)(1-\mu) - 2mt_f} \right) \frac{f(z)}{f'(z)},$$

$$t_f(z) = \frac{(m+2)(f'(z) - f'(y_f(z)))}{2mf'(z)}, y_f(z) = z - \frac{2m}{m+2} \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Teorema 4.7 (Teorema del escalado del método CH4).

Sean:

- $f(z)$ una función analítica en $\hat{\mathbb{C}}$ y $G_f(z)$ su operador de punto fijo correspondiente.
- $A(z) = \beta z + \gamma$ una aplicación afín con $\beta \neq 0$.
- $g(z) = \lambda(f \circ A)(z)$ y $G_g(z)$ su operador de punto fijo correspondiente.

Entonces $(A \circ G_g \circ A^{-1})(z) = G_f(z)$. Es decir que G_f y G_g son analíticamente conjugados mediante A .

Demostración.

Utilizaremos las igualdades $g'(z) = \lambda f'(A(z))\beta$ y $A(z_1 - z_2) = A(z_1) - \beta z_2$.

Dado que,

- $\frac{g(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))} = \frac{\lambda f(A(A^{-1}(z)))}{\lambda f'(A(A^{-1}(z)))\beta} = \frac{f(z)}{\beta f'(z)}$
- $y_g(A^{-1}(z)) = A^{-1}(z) - \frac{2m}{m+2} \frac{g(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))} = A^{-1}(z) - \frac{2m}{m+2} \frac{f(z)}{\beta f'(z)}$
- $A(y_g(A^{-1}(z))) = A(A^{-1}(z)) - \beta \frac{2m}{m+2} \frac{f(z)}{\beta f'(z)} = z - \frac{2m}{m+2} \frac{f(z)}{f'(z)} = y_f(z)$,
- $t_g(A^{-1}(z)) = \frac{(m+2)(g'(A^{-1}(z)) - g'(y_g(A^{-1}(z))))}{2mg'(A^{-1}(z))}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(m+2) \left(\lambda f' \left(A(A^{-1}(z)) \right) \beta - \lambda f' \left(A(y_g(A^{-1}(z))) \right) \beta \right)}{2m \lambda f' \left(A(A^{-1}(z)) \right) \beta} \\
&= \frac{(m+2) \left(\lambda f'(z) \beta - \lambda f' \left(y_f(z) \right) \beta \right)}{2m \lambda f'(z) \beta} \\
&= \frac{(m+2)(f'(z) - f'(y_f(z)))}{2m f'(z)} = t_f(z),
\end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
(AoG_g o A^{-1})(z) &= A \left(G_g \left(A^{-1}(z) \right) \right) \\
&= A \left(A^{-1}(z) - \left(\frac{m(2-m)}{2} + \frac{(2+m)m\mu}{(2+m)(1-\mu) - 2mt_f} \right) \frac{f(A^{-1}(z))}{f'(A^{-1}(z))} \right) \\
&= A(A^{-1}(z)) - \beta \left(\frac{m(2-m)}{2} + \frac{(2+m)m\mu}{(2+m)(1-\mu) - 2mt_f} \right) \frac{f(z)}{\beta f'(z)} \\
&= z - \left(\frac{m(2-m)}{2} + \frac{(2+m)m\mu}{(2+m)(1-\mu) - 2mt_f} \right) \frac{f(z)}{f'(z)} = G_f(z).
\end{aligned}$$

El operador racional que obtenemos al aplicar CH4 sobre $p(z)$ es

$$R_p(z, \alpha, a, b) = \frac{2ab(a+2b)^2 + a(a^2 - 20ab - 32b^2)z + 3a(a+14b)z^2 - 9az^3 - 3z^4}{3a^3 + 2a^2b + 8ab^2 + 8b^3 - (11a^2 + 20ab + 32b^2)z + 21(a+2b)z^2 - 21z^3}.$$

Esta complicada expresión depende de a y b .

Para evitar esto último y simplificar el estudio, consideramos la transformación de Möbius

$$M(z) = \frac{z-a}{z-b},$$

para que, conjugando el operador R_p con M , obtengamos un operador O_p que sea función únicamente de z . Como R_p y O_p son conjugados por M , su dinámica es equivalente.

Así,

$$Op(z) = (M \circ R_p \circ M^{-1})(z) = \frac{3z^4}{z^3 - 6z^2 + 8}. \quad (4.5)$$

Y el operador diferencial es

$$Op'(z) = \frac{3z^3(32 - 12z^2 + z^3)}{(8 - 6z^2 + z^3)^2}. \quad (4.6)$$

También calculamos

$$F_p(z) = \frac{1}{3}z(1 - 6z + 8z^3) \quad (4.7)$$

$$\text{y } F'_p(z) = \frac{1}{3} - 4z + \frac{32}{3}z^3. \quad (4.8)$$

4.2.2 Puntos fijos y puntos críticos

$z = 0$ y $z = \infty$ son puntos fijos ya que $Op(0) = 0$ y $Fp(0) = 0$.

Para hallar los puntos fijos extraños, resolvemos la ecuación $Op(z, \alpha) = z$ y hallamos el conjunto $\{0, 1, -2\}$.

Entonces tenemos dos puntos fijos extraños a saber $z_{e_1} = 1$ y $z_{e_2} = -2$.

Para encontrar los puntos críticos hacemos $Op'(z) = 0$ y encontramos el conjunto $\{0, 11.76897, 1.76850, -1.53747\}$

Hay entonces tres puntos críticos libres.

4.2.3 Estabilidad de los puntos fijos

- $z = 0$ es superatractor pues $Op'(0) = 0$.
- $z = \infty$ es atractor pues $F'_p(0) = 1/3 < 1$.
- $z_{e_1} = 1$ es repulsor ya que $Op'(1) = 7 > 1$.
- $z_{e_2} = -2$ es parabólico pues $Op'(-2) = 1$.

4.2.4 Plano dinámico

Elaboramos dos versiones del plano dinámico de este método con una cuadrícula de 800×800 , tolerancia de 10^{-3} y código en Matlab que aparece en [7]; una con 50 iteraciones y otra con 3500 iteraciones que mostramos en la Figura 4.7.

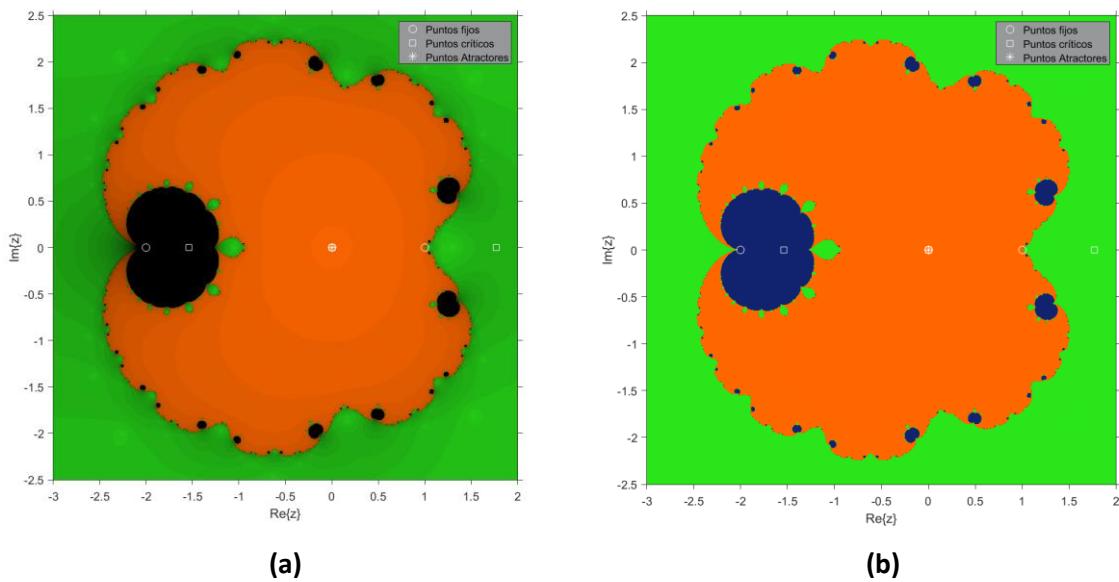


Figura 4.7: Planos dinámicos **(a)** con 50 iteraciones y **(b)** con 3500 iteraciones

De los puntos críticos libres {11.76897, 1.76850, -1.53747}:

- Los dos primeros están en la cuenca de atracción de la raíz simple.
 - El tercero está en una zona negra que no es cuenca de atracción de alguna órbita periódica; los puntos en las zonas negras en realidad convergen *muy lentamente* hacia $z = -2$, como se muestra en color azul en la Figura 4.8b que requirió de 3500 iteraciones. Entonces, en este caso en particular, podemos decir que el punto parabólico $z = -2$ es un atractor.

Capítulo 5. Ejemplos numéricos

En este capítulo evaluaremos numéricamente algunos de los métodos estudiados, a través de la búsqueda de las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ en dos casos diferentes.

Para cada método especificaremos cuál fue la raíz encontrada, cuantas iteraciones fueron necesarias, el ACOC obtenido, la diferencia entre las dos últimas evaluaciones de x y el valor de la función en la última iteración.

Los parámetros de entrada de los programas elaborados para tales fines comprenden:

- El valor de α que identifica el método.
- La función $f(x)$.
- La semilla x_0 .
- La tolerancia $\varepsilon = 10^{-100}$.
- El número máximo de iteraciones que fijamos en 1000.

Utilizaremos aritmética de precisión variable con 1000 dígitos de mantisa y criterios de parada $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ y $\|f_{k+1}\| < \varepsilon$.

5.1 Ejemplo con una raíz simple y una raíz doble

En este apartado nos proponemos ilustrar la búsqueda de la solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$, con

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

que cuenta con raíces $x = 2$ con multiplicidad 2 (Solución 1) y $x = -3$ con multiplicidad 1 (Solución 2).

Para ello contrastaremos el comportamiento de los siguientes métodos de la familia Chebyshev-Halley: Chebyshev ($\alpha = 0$), Halley ($\alpha = 1/2$), Super-Halley ($\alpha = 1$), Osada ($\alpha = \infty$), $\alpha = -3$, $\alpha = -2$, $\alpha = 14/9$, $\alpha = 1.6$ y $\alpha = 2$, para raíces simples ($m = 1$) y para raíces dobles ($m = 2$).

Recordamos que los esquemas correspondientes se obtienen a partir de la ecuación (3.10) y son

$$x_{k+1} = x_k - \left(1 + \frac{t}{2(1-\alpha t)}\right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (m = 1) \quad (5.1)$$

$$\text{y } x_{k+1} = x_k - \frac{(\alpha + 2 + (4 - 6\alpha)t_k)}{2(1 - \alpha t_k)} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, t_k = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2} \quad (m = 2). \quad (5.2)$$

También incluiremos los métodos CH4 correspondientes en este estudio.

Los valores de prueba serán $x_0 = \{0, 1, 3\}$ en la búsqueda de la raíz doble y $x_0 = \{-4, -2\}$ en la búsqueda de la raíz simple.

Resumimos los resultados en las Tablas 5.1 a 5.4.

Método: α	Semilla x_0	# Iteraciones	ACOC	$\ x_{k+1} - x_k\ $	$\ f_{k+1}\ $
0	0	9	3.0000	2.156e-258	2.325e-515
	1	7	3.0000	3.719e-166	6.914e-331
	3	7	3.0000	8.331e-215	3.470e-428
1/2	0	8	3.0000	7.357e-241	2.706e-480
	1	7	3.0000	4.691e-188	1.100e-374
	3	7	3.0000	1.613e-228	1.301e-455
1	0	7	3.0000	1.467e-201	1.077e-401
	1	7	3.0000	3.245e-284	5.267e-567
	3	7	3.0000	3.649e-285	6.656e-569
∞	0	9	3.0000	5.811e-257	1.688e-512
	1	7	3.0000	4.775e-117	1.140e-232
	3	7	3.0000	1.217e-189	7.405e-378
-3	0	10	3.0000	2.107e-147	2.220e-293
	1	7	3.0000	2.091e-135	2.187e-269
	3	7	3.0000	7.144e-198	2.552e-394
-2	0	>1000	-	-	-
	1	7	3.0000	4.019e-140	8.074e-279
	3	7	3.0000	3.104e-200	4.817e-399
14/9	0	8	3.0000	1.338e-213	8.956e-426
	1	7	3.0000	8.893e-158	3.955e-314
	3	7	3.0000	3.247e-165	5.271e-329
1.6	0	8	3.0000	1.876e-193	1.760e-385
	1	7	3.0000	3.585e-150	6.427e-299
	3	7	3.0000	1.543e-149	1.191e-297
2	0	10	2.0000	2.451e-135	3.004e-269
	1	9	2.0000	2.121e-118	2.248e-235
	3	9	2.0000	2.451e-135	3.004e-269
CH4	0	7	4.0000	6.994e-274	2.446e-546
	1	6	4.0000	5.698e-189	1.623e-376

	3	6	4.0000	7.139e-235	2.549e-468
--	---	---	--------	------------	------------

Tabla 5.1: Resultados obtenidos en la búsqueda de la raíz doble, métodos con $m = 2$

Método: α	Semilla x_0	# Iteraciones	ACOC	$\ x_{k+1} - x_k\ $	$\ f_{k+1}\ $
0	-4	13	2.0000	6.310e-166	1.578e-164
	-2	9*	3.0000	3.100e-219	4.806e-437
1/2	-4	169	1.0000	2.512e-102	5.025e-101
	-2	9*	3.0000	1.865e-264	1.738e-527
1	-4	339	1.0000	4.741e-102	7.902e-101
	-2	340	1.0000	5.742e-102	9.570e-101
∞	-4	>1000	-	-	-
	-2	>1000	-	-	-
-3	-4	>1000	-	-	-
	-2	13*	3.0000	4.616e-203	1.065e-404
-2	-4	9*	3.0000	5.497e-178	1.511e-354
	-2	>1000	-	-	-
14/9	-4	930	1.0000	5.655e-102	7.952e-101
	-2	933	1.0000	6.880e-102	9.675e-101
1.6	-4	>1000	-	-	-
	-2	>1000	-	-	-
2	-4	>1000	-	-	-
	-2	>1000	-	-	-
CH4	-4	212	1.0000	1.288e-102	4.829e-101
	-2	218	1.0000	1.486e-102	5.572e-101

*En realidad, aquí hay convergencia a la raíz doble.

Tabla 5.2: Resultados obtenidos en la búsqueda de la raíz simple, métodos con $m = 2$

Método: α	Semilla x_0	# Iteraciones	ACOC	$\ x_{k+1} - x_k\ $	$\ f_{k+1}\ $
0	0	237	1.0000	9.015e-101	1.04e-199
	1	237	1.0000	4.175e-101	2.231e-200
	3	237	1.0000	5.707e-101	4.17e-200
1/2	0	212	1.0000	8.794e-101	8.701e-200

	1	212	1.0000	3.920e-101	1.729e-200
	3	212	1.0000	4.697e-101	2.482e-200
1	0	169	1.0000	6.825e-101	4.141e-200
	1	169	1.0000	2.596e-101	5.991e-201
	3	168	1.0000	7.830e-101	5.450e-200
∞	0	334	1.0000	6.050e-101	7.328e-200
	1	334	1.0000	5.271e-101	5.562e-200
	3	334	1.0000	8.021e-101	1.288e-199
-3	0	292	1.0000	7.701e-101	9.803e-200
	1	290	1.0000	5.719e-101	5.406e-200
	3	290	1.0000	8.775e-101	1.273e-199
-2	0	281	1.0000	9.558e-101	1.444e-199
	1	280	1.0000	6.868e-101	7.454e-200
	3	281	1.0000	4.570e-101	3.300e-200
14/9	0	86	1.0000	6.855e-101	2.081e-200
	1	86	1.0000	1.209e-101	6.475e-202
	3	86	1.0000	7.873e-101	2.745e-200
1.6	0	114	1.0000	3.186e-101	4.010e-201
	1	113	1.0000	1.481e-101	8.663e-202
	3	114	1.0000	2.770e-101	3.031e-201
2	0	>1000	-	-	-
	1	>1000	-	-	-
	3	>1000	-	-	-
CH4	0	237	1.0000	4.779e-101	2.923e-200
	1	237	1.0000	3.924e-101	1.971e-200
	3	237	1.0000	5.803e-101	4.311e-200

Tabla 5.3: Resultados obtenidos en la búsqueda de la raíz doble, métodos con $m = 1$

Método: α	Semilla x_0	# Iteraciones	ACOC	$\ x_{k+1} - x_k\ $	$\ f_{k+1}\ $
0	-4	7	.9999	3.377e-106	8.442e-105
	-2	>1000	-	-	-
1/2	-4	7	3.0000	8.960e-138	2.240e-136
	-2	8	3.0000	2.269e-241	5.672e-240

1	-4 -2	7 7	3.0000 2.9999	2.996e-233 9.252e-114	7.489e-232 2.313e-112
∞	-4	9	3.0000	6.756e-198	1.689e-196
	-2	10	3.0000	4.087e-198	1.022e-196
-3	-4	8	3.0000	8.117e-190	2.029e-188
	-2	9	3.0000	3.331e-142	8.327e-141
-2	-4	8	3.0000	3.853e-210	9.631e-209
	-2	>1000	-	-	-
14/9	-4	8	3.0000	4.578e-269	1.144e-267
	-2	8	3.0000	5.292e-169	1.323e-167
1.6	-4	8	3.0000	9.818e-253	2.454e-251
	-2	8	3.0000	4.913e-162	1.228e-160
2	-4	8	3.0000	7.390e-111	1.847e-109
	-2	8	3.0000	7.390e-111	1.847e-109
CH4	-4	9	2.0000	1.492e-114	5.377e-188
	-2	10	2.0000	2.151e-189	1.040e-199

Tabla 5.4: Resultados obtenidos en la búsqueda de la raíz simple, métodos con $m = 1$

De los resultados de las Tablas 5.1 a 5.4 se pueden extraer las siguientes observaciones.

1. Las buenas condiciones de estabilidad demostradas por los métodos $m = 2$ en la búsqueda de la raíz doble, no se ratifican en la búsqueda de la raíz simple.

Los métodos Osada, $\alpha = 2, \alpha = -2$ no convergen a dicha raíz, como se muestra en los mapas dinámicos correspondientes (Figuras 5.1a, 5.1b, 5.1c). Hay que anotar que en este último caso la iteración de la semilla $x_0 = -4$ desemboca en la raíz doble.

El método $\alpha = -3$ es similar a los anteriores, aunque tiene la particularidad de tener un atractor extraño, de suerte que semillas muy cercanas a $x_0 = -4$ podrían desembocar en este atractor o en la raíz doble. Con $x_0 = -2$ encontramos la raíz doble y también podemos caer en resultados diferentes con valores cercanos (Figuras 5.1d, 5.1e, 5.1f).

En el caso $\alpha = 1.6$ sí hay convergencia a la raíz simple, solo que es más lenta. Disminuyendo la tolerancia o aumentando el número de iteraciones lo podemos constatar (Figuras 5.1g y 5.1h). Aquí también hay mucha inestabilidad para valores mayores cercanos a $x_0 = -2$.

El método $\alpha = 14/9$ requiere casi del máximo de iteraciones establecido para llegar a esta raíz (Figura 5.1i).

2. Otros casos $m = 2$ con convergencia a la raíz doble cuando se usan semillas alrededor de la raíz simple, son Chebyshev y Halley al iterar $x_0 = -2$ (Figura 5.2).
3. El método $\alpha = 2, m = 2$ presenta un ACOC = 2 .

En efecto, si $\alpha = 2$ entonces

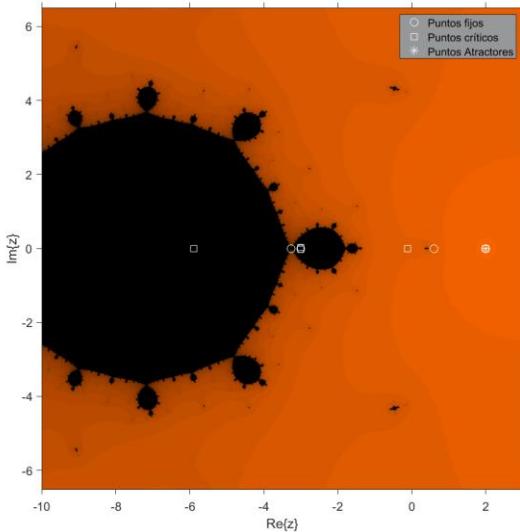
$$H = \frac{(\alpha + 2 + (4 - 6\alpha)t_k)}{2(1 - \alpha t_k)} = \frac{(4 - 8t_k)}{2(1 - 2t_k)} = \frac{4(1 - 2t_k)}{2(1 - 2t_k)} = 2,$$

por lo que el esquema resultante es:

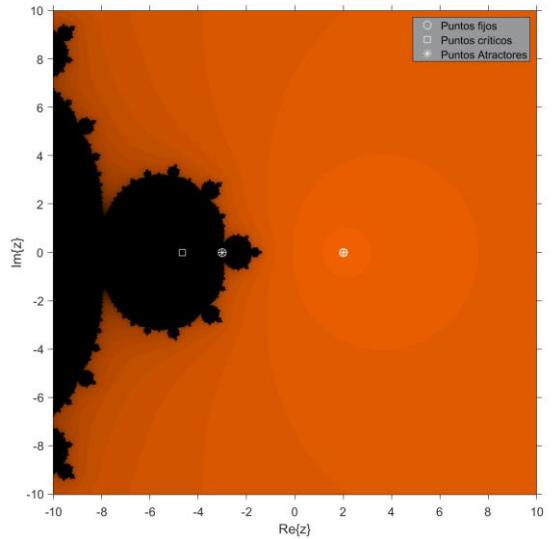
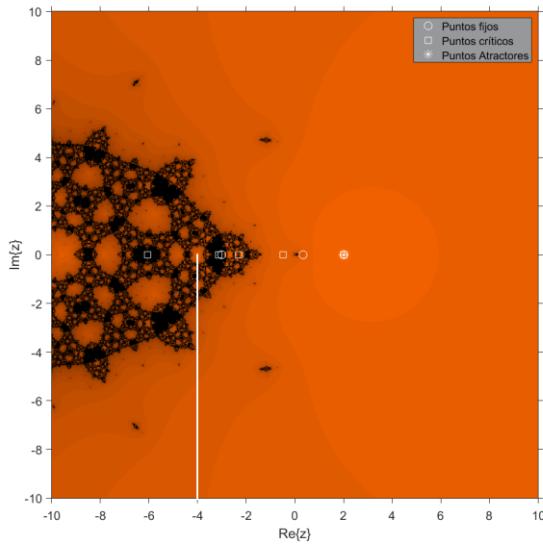
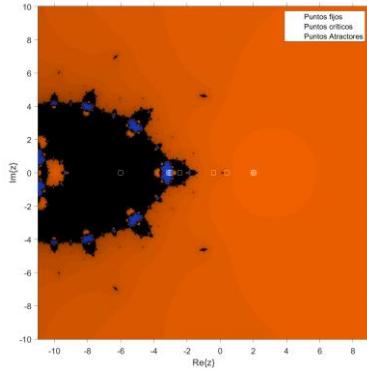
$$x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Es decir, tenemos Newton amortiguado que es de orden 2. Esto explica por qué presenta el mayor número de iteraciones.

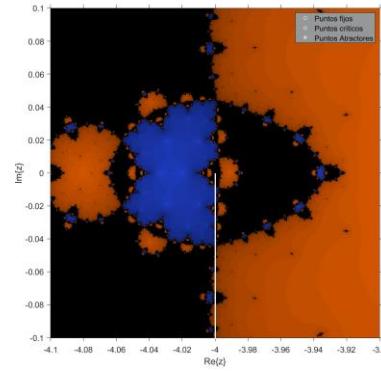
4. El método de Osada $m = 1$ presenta un ACOC de 2. En realidad, este método es el método de Newton, lo que se aprecia fácilmente haciendo $\alpha \rightarrow \infty$ en la ecuación 5.1.
5. El método $\alpha = -2, m = 2$ no converge cuando $x_0 = 0$. La Figura 5.3 ilustra la complejidad y riqueza del conjunto de Julia alrededor de cero a través de una secuencia de tres planos dinámicos en distintas escalas. Para $x_0 = 0$ el método diverge al infinito.
6. Para la gran mayoría de los métodos el valor de convergencia 3 cae a 1 al buscar la raíz cuya multiplicidad no corresponde a su diseño.
7. El método de Chebyshev $m = 1$ no converge cuando la semilla es $x_0 = -2$. En la Figura 5.4 vemos tres versiones del plano dinámico alrededor de este valor. Notamos que en distintas escalas se repiten las mismas formas que alternan regiones de convergencia a la raíz doble y a la raíz simple (experimentamos aquí la *autosimilitud* que caracteriza a los fractales). Por ejemplo, para $x_0 = -2.002$ hay convergencia a -3 ; mientras que para $x_0 = -1.998$ hay convergencia a 2 . O para $x_0 = -2.00002$ a -3 y para $x_0 = -1.99998$ a 2 .
8. De los métodos $m = 1, \alpha = 14/9$ y $\alpha = 1.6$ son los que mejor comportamiento muestran en la búsqueda de la raíz doble, mientras que $\alpha = 2$ es el único que no converge a ésta, como se ve en el plano dinámico de la Figura 5.5.
9. El método CH4, $m = 2$ tiene el mejor comportamiento en términos de número de iteraciones, y ofrece los resultados de mayor precisión, al encontrar la raíz doble. Esto se explica por ser el método con mayor índice de convergencia.



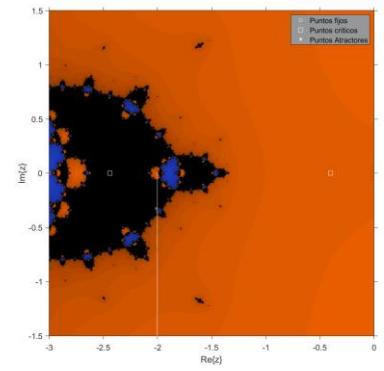
(a) Osada

(b) $\alpha = 2$ (c) $\alpha = -2$ 

(d)



(e)



(f)

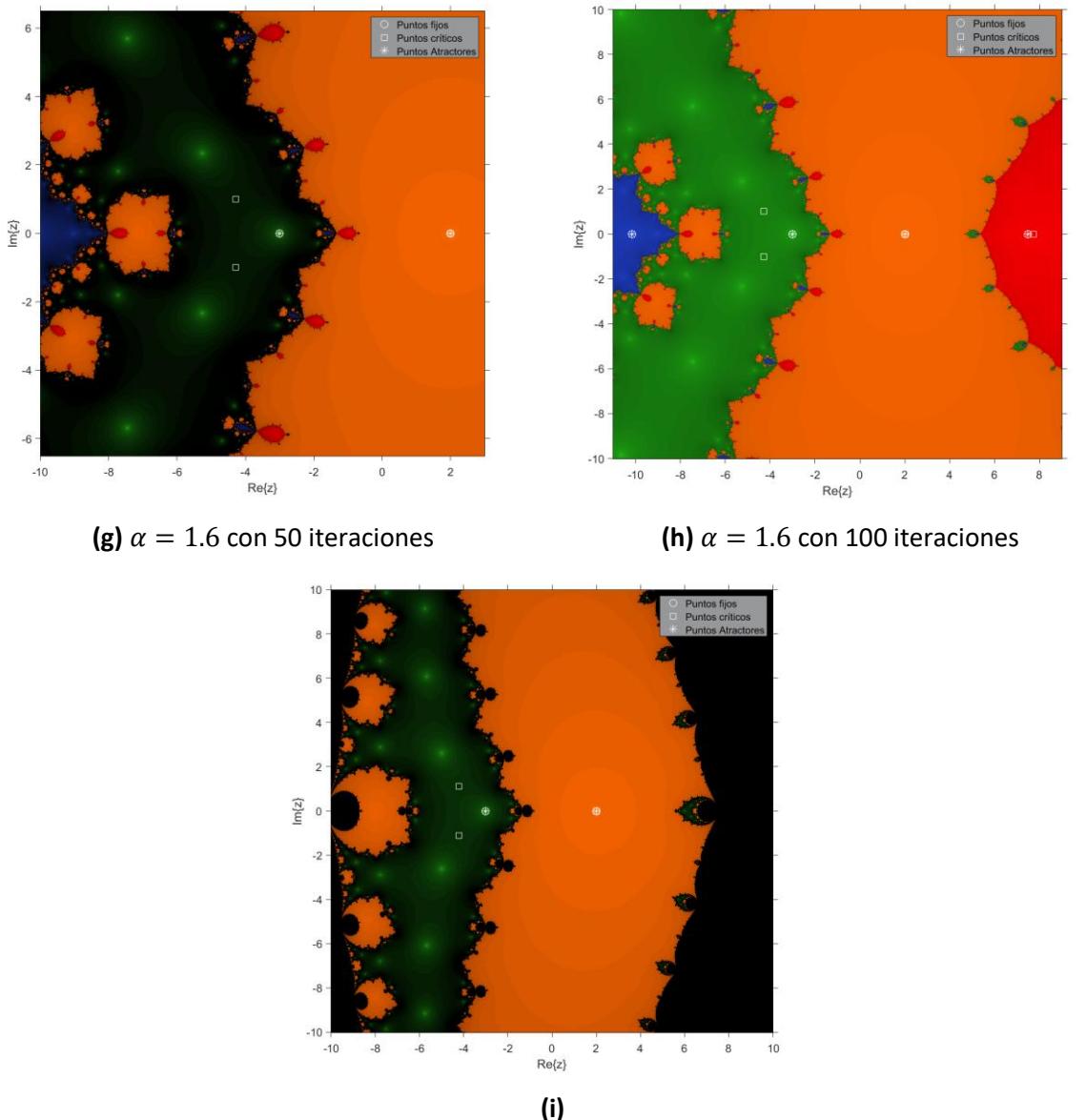


Figura 5.1: Planos dinámicos para métodos $m = 2$, convergencia a la raíz simple.

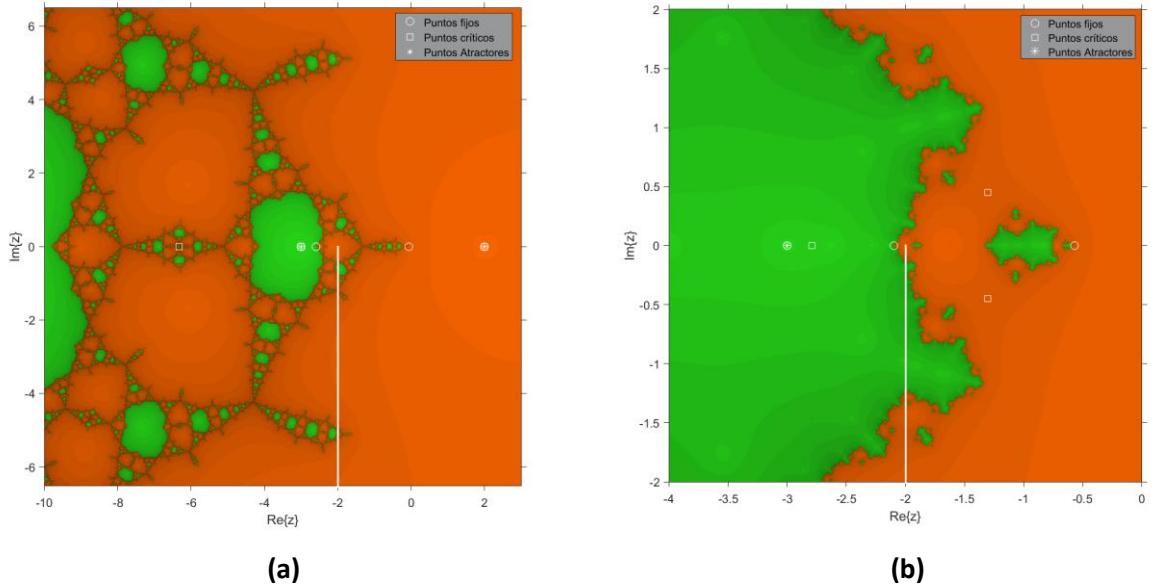


Figura 5.2: Planos dinámicos para (a) Chebyshev y (b) y Halley, convergentes a la raíz doble cuando

$$x_0 = -2.$$

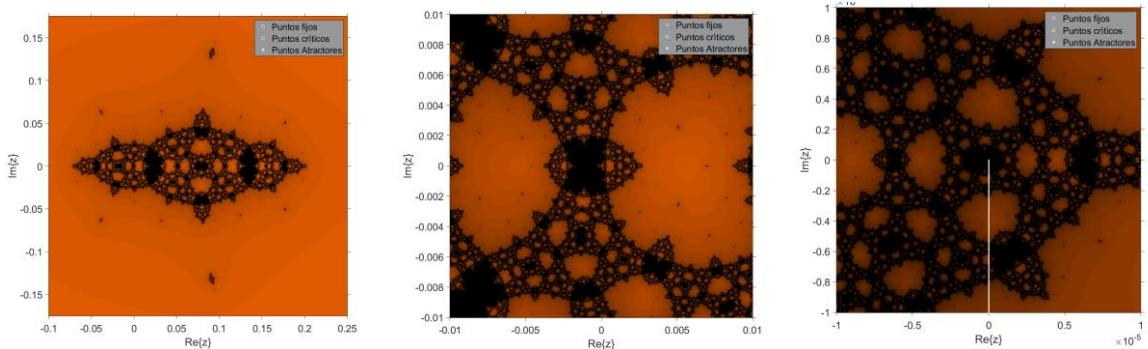


Figura 5.3: planos dinámicos de $\alpha = -2$, $m = 2$ alrededor de $x_0 = 0$ en tres escalas diferentes.

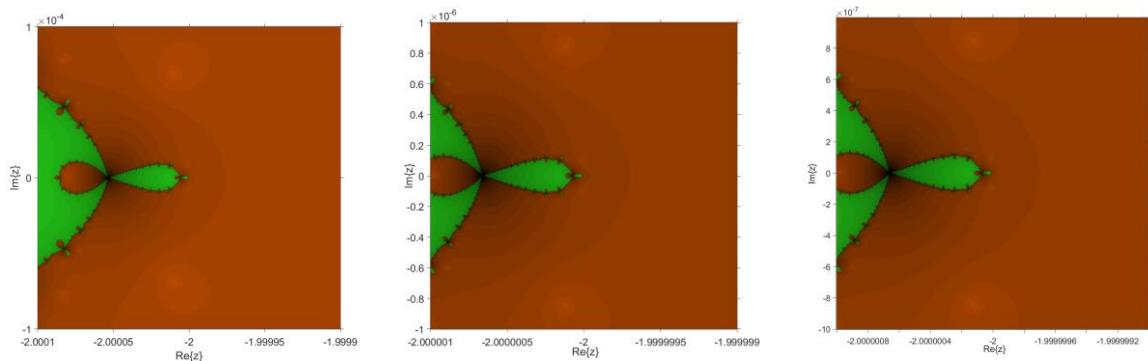


Figura 5.4: planos dinámicos de Chebyshev $m = 1$ alrededor de $x_0 = -2$ en tres escalas diferentes.

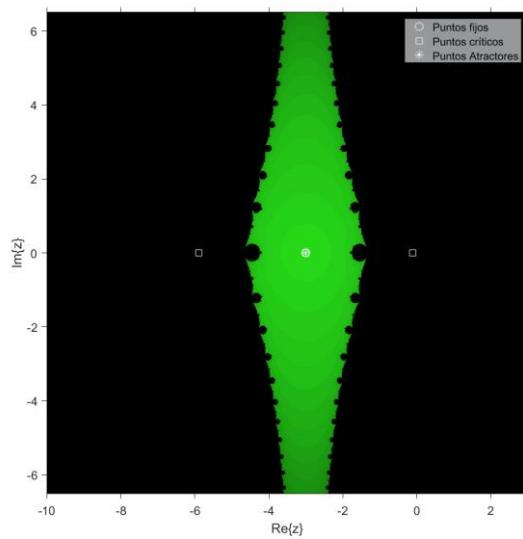


Figura 5.5: Plano dinámico para el método $\alpha = 2, m = 1$

5.2 Ejemplo con dos raíces dobles

En este segundo ejemplo pretendemos probar el método en situación diferente: una función con dos raíces dobles. No contaremos con planos dinámicos específicos para el problema, solo el estudio del Capítulo 4.

Trabajaremos con la función $f(x) = 1 - 2\sqrt{x} + x + 2\ln(x) - 2\sqrt{x}\ln(x) + \ln(x)^2$ cuyas raíces dobles son $x = 1$ (Solución 1) y $x = 12.3402$ (Solución 2).

Compararemos los métodos Chebyshev-Halley para raíces dobles correspondientes a $\alpha = \{-2, 0, 1/2, 28/41, 1, 2, \infty\}$. También incluiremos el método CH4. Las semillas serán $x_0 = \{-2, -1, 10^{-200}, 0.5, 1.5, 2, 2.5\}$

Los resultados numéricos se recogen en la Tabla 5.5.

Método: α	Semilla x_0	Solución	# Iteraciones	ACOC	$\ x_{k+1} - x_k\ $	$\ f_{k+1}\ $
-2	-2	2	9	3.0000	5.842e-122	1.282e-245
	-1	2	10	3.0000	5.949e-174	1.330e-349
	1e-200	1	90	3.0000	1.257e-153	3.952e-307
	0.5	1	8	3.0000	7.012e-237	1.229e-473
	1.5	1	8	3.0000	1.853e-106	8.586e-213
	2.0	2	9	3.0000	7.354e-140	2.032e-281

	2.5	2	9	3.0000	3.798e-131	5.421e-264
0	-2	2	9	3.0000	5.732e-101	1.235e-203
	-1	2	10	3.0000	9.624e-106	3.480e-213
	1e-200	1	58	3.0000	8.017e-118	1.607e-235
	0.5	1	7	3.0000	1.052e-104	2.765e-209
	1.5	1	8	3.0000	3.519e-279	3.096e-558
	2.0	2	10	3.0000	1.140e-270	4.887e-543
	2.5	2	8	3.0000	2.896e-127	3.152e-256
1/2	-2	1	7	3.0000	5.501e-158	7.564e-316
	-1	1	9	3.0000	1.436e-167	5.157e-335
	1e-200	1	113	3.0000	3.079e-191	2.369e-382
	0.5	1	7	3.0000	5.501e-158	7.564e-316
	1.5	1	7	3.0000	1.608e-152	6.465e-305
	2.0	1	8	3.0000	1.239e-218	0.837e-437
	2.5	1	8	3.0000	8.907e-171	1.983e-341
28/41	-2	1	8	4.0000	1.717e-164	7.368e-329
	-1	1	8	4.0000	9.342e-260	2.182e-519
	1e-200	-	>1000	-	-	-
	0.5	1	6	4.0000	3.731e-136	3.480e-272
	1.5	1	6	4.0000	2.003e-172	1.003e-344
	2.0	1	6	4.0000	3.952e-103	3.904e-206
	2.5	1	7	4.0000	2.714e-257	1.841e-514
1	-2	1	10	3.0000	1.260e-106	3.969e-213
	-1	1	10	3.0000	5.051e-153	6.379e-306
	1e-200	-	>1000	-	-	-
	0.5	1	8	3.0000	3.250e-148	2.641e-296
	1.5	1	7	3.0000	1.320e-123	4.356e-247
	2.0	1	8	3.0000	1.760e-156	7.740e-313
	2.5	-	>1000	-	-	-
2	-2	2	12	2.0000	1.053e-183	4.163e-369
	-1	2	12	2.0000	1.471e-119	8.126e-241
	1e-200	1	105	2.0000	1.463e-149	5.351e-299
	0.5	1	10	2.0000	5.964e-109	8.891e-218
	1.5	1	10	2.0000	2.079e-106	1.080e-212

	2.0	1	13	2.0000	3.893e-131	3.789e-262
	2.5	2	13	2.0000	6.322e-152	1.502e-305
∞	-2	2	9	3.0000	1.412e-122	7.493e-247
	-1	2	10	3.0000	2.342e-197	2.061e-396
	1e-200	1	95	3.0000	5.087e-225	6.468e-450
	0.5	1	8	3.0000	6.328e-201	1.001e-401
	1.5	2	11	3.0000	2.510e-263	2.367e-528
	2.0	2	10	3.0000	2.156e-105	1.747e-212
	2.5	2	10	3.0000	2.955e-237	3.282e-476
CH4	-2	2	9	4.0000	1.130e-132	4.797e-267
	-1	1	9	4.0000	8.736e-263	1.908e-525
	1e-200	1	97	4.0000	4.778e-294	5.707e-588
	0.5	1	6	4.0000	1.416e-135	5.016e-271
	1.5	1	6	4.0000	4.485e-116	5.028e-232
	2.0	2	8	4.0000	2.791e-207	2.926e-416
	2.5	-	>1000	-	-	-

Tabla 5.5: Resultados obtenidos en la búsqueda de las dos raíces.

De los resultados de la Tabla 5.5 se pueden realizar las siguientes observaciones.

1. Dado que la función sólo está definida para $x > 0$ es interesante experimentar que se puede trabajar con semillas negativas que incluso en algunos casos desembocan en la raíz más lejana. Esto nos recuerda lo que vemos en los planos dinámicos.
2. La mayoría de los métodos funcionan con una semilla muy cercana al cero, aunque con una cantidad notablemente mayor de iteraciones. Al respecto, Chebyshev es el de mejor comportamiento.
3. Llama la atención el comportamiento del método de Osada que desemboca la mayoría de las veces en la Solución 2 y es más lento que los demás métodos de orden tres. En el análisis de planos dinámicos del capítulo 4 se hizo una observación sobre su lentitud de convergencia a la raíz doble.
4. Los métodos de Halley y Super-Halley parecen ser los más estables en términos de la solución encontrada, lo que corresponde a la observación realizada acerca de sus planos dinámicos en el capítulo 4.
5. El método $\alpha = 28/41$ presenta un ACOC de 4.

Esto se debe a que, para este caso, la ecuación del error ((3.2) con $m=2$) es:

$$e_{k+1} = \left[\frac{(-10 + 9\alpha)A_1^2 + 4(2 - \alpha)A_2}{8(-2 + \alpha)} \right] e_k^3 + O(e_k^4);$$

haciendo nulo el término de orden tres y habiendo calculado previamente los valores de A_1 y A_2 se deduce que $\alpha = 28/41$. Proponemos este caso como una mera curiosidad ya que encontrarlo requiere del conocimiento previo de una raíz y del cálculo de derivadas de hasta cuarto orden. O del favor del azar.

Es claro por qué este método, que cuenta con segunda derivada y convergencia igual a 4, es el que parece mostrar mejor comportamiento en términos de menor número de iteraciones.

La convergencia igual a cuatro también permite explicar por qué el método CH4, $m = 2$ presenta el resultado de mayor precisión.

Capítulo 6. Conclusiones y líneas futuras

6.1 Conclusiones

Recordamos a continuación los objetivos que nos propusimos al iniciar este trabajo, refiriendo los correspondientes resultados obtenidos.

- ❖ *Recorrer el proceso de construcción de la Familia Chebyshev-Halley para raíces múltiples, a partir de la respuesta a una pregunta abierta.*

Partiendo de la familia

$$x_{k+1} = x_k - H \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$H = H(t_k, \alpha) = m(1 - \alpha) + \alpha \frac{1}{1 - t_k}; t = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'^2(x_k)},$$

hemos planteado la creación de un nuevo método parametrizando la expresión de H así:

$$H = H(t, b_1, b_2, b_3) = b_1 m + \frac{b_2}{1 - b_3 t}. \quad (6.1)$$

Al exigir orden de convergencia $p = 3$, hemos obtenido como resultado la familia Chebyshev-Halley para raíces múltiples:

$$H(t, \alpha) = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)((m-1)\alpha - 2m) + m^2 t}{2(1 - \alpha t)}. \quad (6.2)$$

Con $m = 1$ obtenemos también la conocida expresión para raíces simples.

- ❖ *Ilustrar la construcción de un conocido método de orden cuatro a partir de la familia anterior.*
- Pensando en mejorar la convergencia, hemos planteado la construcción de un método óptimo de dos pasos, orden 4, libre de segunda derivada y basado en la misma expresión de H en (6.1), de la siguiente manera:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \left(b_1 m + \frac{b_2}{1 - b_3 t} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad t_n = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'^2(x_n)}.$$

Hemos identificado el resultado obtenido con un método presentado por S.G. Li et al. en [28] (6.3).

- ❖ *Averiguar si algún esquema existente incluye a dicha familia.*

Hemos descrito el esquema que Rajni Sharma et al. desarrollan en [9]:

$$x_{k+1} = x_k - H \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} ; \quad H \in C^2(\mathbb{R}),$$

sin más condiciones sobre H , y hemos mostrado cómo la familia Chebyshev-Halley para raíces múltiples está incluida dentro de dicho esquema.

- ❖ *Realizar el estudio dinámico de los métodos construidos.*

Hemos analizado el comportamiento dinámico de los métodos (6.2) y (6.3) a través del estudio del operador racional asociado a la familia de polinomios $p(z) = (z - a)^2(z - b)$. Este estudio basta para tener una apreciación cualitativa de lo que ocurre con un polinomio cualquiera de grado tres con una raíz doble.

- ❖ *Realizar un estudio numérico de los métodos construidos a partir de dos ejemplos.*

Finalmente, hemos comparado el comportamiento numérico de algunos de los métodos estudiados en sus diseños para hallar raíces simples y para raíces dobles. Escogimos para ello un polinomio de grado tres con una raíz doble y una simple.

También hemos querido investigar el comportamiento numérico al resolver una ecuación con dos raíces dobles. Hemos analizado algunas particularidades y observado buenos resultados en términos de convergencia.

6.2 Líneas futuras

Una línea de trabajo hacia el futuro puede ser la de estudiar en detalle el comportamiento de los métodos CH3 sobre polinomios de mayor grado y distintas multiplicidades de las raíces.

Hay también una línea de investigación muy poco explorada, relacionada con los casos en que no se conoce el valor de m . Por ejemplo, para el caso de nuestra investigación, podríamos plantearnos la construcción de un método de un paso, con hasta tercera derivada, m desconocido y brindando una expresión para m .

Otra inquietud que nos queda es la de si podemos responder a la pregunta abierta que alimentó esta investigación con algún método libre de derivadas o llegando a algún método de orden mayor que 4.

Bibliografía

- [1] J. M. Rodríguez López, "Métodos Numéricos para La Aproximación De Raíces Múltiples De Ecuaciones No Lineales," Universidad de Salamanca, 2017.
- [2] S. Wolfram, *The Wolfram Physics Project: A Project to Find the Fundamental Theory of Physics*. 2020.
- [3] R. Sharma and A. Bahl, "General Family of Third Order Methods for Multiple Roots of Nonlinear Equations and Basin Attractors for Various Methods," *Adv. Numer. Anal.*, vol. 2014, no. 2, pp. 1–8, 2014.
- [4] A. Cordero and J. R. Torregrosa, "Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas," *Appl. Math. Comput.* 190, pp. 686–698, 2007.
- [5] A. M. Ostrowski, *Solutions of equations and systems of equations*. Academic Press, 1966.
- [6] H. T. Kung and J. F. Traub, "Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration," *J. ACM*, 21, pp. 643–651, 1974.
- [7] F. I. Chicharro *et al.*, "Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods," *Sci. World J.*, vol. 2013, no. 1, pp. 1–8, 2013.
- [8] P. Blanchard, "The dynamics of Newton's method," in *Proc. Symp. Appl. Math*, 1994, vol. 49, pp. 139–154.
- [9] R. L. Devaney, "The Mandelbrot set, the Farey tree, and the Fibonacci sequence," *Am. Math. Mon.*, vol. 106, no. 4, pp. 289–302, 1999.
- [10] P. Blanchard, "Nonlinear and global analysis," *Am. Math. Soc.*, pp. 85–141, 1984.
- [11] S. Amat, S. Busquier, and S. Plaza, "Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view," *Scientia*, vol. 10, no. 3, p. 35, 2004.
- [12] A. Cordero, J. García-Maimó, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, and P. Vindel, "Chaos in King's iterative family," *Appl. Math. Lett.*, vol. 26, no. 8, pp. 842–848, Aug. 2013.
- [13] A. Cordero, J. P. Jaiswal, and J. R. Torregrosa, "Stability analysis of fourth-order iterative method for finding multiple roots of non-linear equations," *Appl. Math. Nonlinear Sci.*, vol. 4, no. 1, pp. 43–56, 2019.
- [14] R. Behl, A. Cordero, S. S. Motsa, J. R. Torregrosa, and V. Kanwar, "An optimal fourth-order family of methods for multiple roots and its dynamics," *Numer. Algorithms*, vol. 71, no. 4, pp. 775–796, 2016.

- [15] P. Blanchard, “Complex analytic dynamics on the Riemann sphere,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, 11(1), pp. 85–141, 1984.
- [16] S. Amat, S. Busquier, and S. Plaza, “Dynamics of the King and Jarratt iterations,” *aequationes Math.*, vol. 69, no. 3, pp. 212–223, 2005.
- [17] A. Ralston and P. Rabinowitz, *A first course in numerical analysis*. New York: McGraw-Hill, 1978.
- [18] L. B. Rall, “Convergence of the Newton’s process to multiple solutions,” *Numer. Math.* 9, vol. 1, pp. 23–37, 1966.
- [19] E. Schröder, “On Infinitely Many Algorithms for Solving Equations,” no. TR-92-121, p. 57, 1992.
- [20] M. Kansal, V. Kanwar, and S. Bhatia, “On Some Optimal Multiple Root-Finding Methods and their Dynamics,” *Appl. Appl. Math. An Int. J.*, vol. 10, no. 1, pp. 349–367, 2015.
- [21] W. Werner, “Some improvement of classical methods for the solution of nonlinear equations,” in *Numerical Solution of nonlinear Equations, Lecture Notes in Mathematics*, 1981, pp. 426–440.
- [22] N. Osada, “An optimal multiple root-finding method of order three,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 51, no. 1, pp. 131–133, 1994.
- [23] J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Chelsea, New York, NY, USA, 1977.
- [24] E. Hansen and M. Patrick, “A family of root finding methods,” *Numer. Math.*, vol. 27, no. 3, pp. 257–269, 1976.
- [25] R. F. Lin, H. M. Ren, Z. Šmarda, Q. B. Wu, Y. Khan, and J. L. Hu, “New families of third-order iterative methods for finding multiple roots,” *J. Appl. Math.*, vol. 2014, 2014.
- [26] R. Thukral, “New Ninth Order Iterative Methods for Finding Multiple Roots of Nonlinear Equations,” *Am. J. Comput. Appl. Math.*, vol. 2014, no. 3, pp. 77–82, 2014.
- [27] R. Behl, A. Cordero, S. S. Motsa, and J. R. Torregrosa, “Multiplicity anomalies of an optimal fourth-order class of iterative methods for solving nonlinear equations,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 91, no. 1, pp. 81–112, 2018.
- [28] S. G. Li, L. Z. Cheng, and B. Neta, “Some fourth-order nonlinear solvers with closed formulae for multiple roots,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 1. pp. 126–135, 2010.
- [29] E. Mart, “CMMSE-Determination of multiple roots of nonlinear equations and applications,” vol. 53, pp. 880–892, 2015.

- [30] F. Soleymani, D. K. R. Babajee, and T. Lotfi, “On a numerical technique for finding multiple zeros and its dynamic,” *J. Egypt. Math. Soc.*, vol. 21, no. 3, pp. 346–353, Oct. 2013.
- [31] “On Efficient Iterative Numerical Methods for Simultaneous Determination of all Roots of Non-Linear Function.pdf.” .
- [32] J. Liang, X. Li, Z. Wu, M. Zhang, L. Wang, and F. Pan, “Fifth-order iterative method for solving multiple roots of the highest multiplicity of nonlinear equation,” *Algorithms*, vol. 8, no. 3, pp. 656–668, 2015.
- [33] Y. H. Geum, Y. I. Kim, and B. Neta, “A class of two-point sixth-order multiple-zero finders of modified double-Newton type and their dynamics,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 270, no. November, pp. 387–400, 2015.
- [34] Y. H. Geum, Y. I. Kim, and B. Neta, “A sixth-order family of three-point modified Newton-like multiple-root finders and the dynamics behind their extraneous fixed points,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 283, pp. 120–140, 2016.
- [35] R. Behl, A. Cordero, S. S. Motsa, and J. R. Torregrosa, “An eighth-order family of optimal multiple root finders and its dynamics,” *Numer. Algorithms*, vol. 77, no. 4, pp. 1249–1272, 2018.
- [36] Y. H. Geum, Y. I. Kim, and B. Neta, “Constructing a family of optimal eighth-order modified Newton-type multiple-zero finders along with the dynamics behind their purely imaginary extraneous fixed points,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 333, no. November, pp. 131–156, 2018.
- [37] M. Mora Jiménez, “Estabilidad de los métodos iterativos para la aproximación de raíces múltiples de ecuaciones no lineales,” Universitat Politècnica de València, 2019.
- [38] B. Neta, “New third order nonlinear solvers for multiple roots,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 202, no. 1, pp. 162–170, 2008.
- [39] C. Chun and B. Neta, “A third-order modification of Newton’s method for multiple roots,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 211, no. 2, pp. 474–479, 2009.
- [40] C. Chun, H. ju Bae, and B. Neta, “New families of nonlinear third-order solvers for finding multiple roots,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 57, no. 9, pp. 1574–1582, 2009.
- [41] J. Biazar and B. Ghanbari, “A new third-order family of nonlinear solvers for multiple roots,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 59, no. 10, pp. 3315–3319, 2010.
- [42] J. R. Sharma and R. Sharma, “New third and fourth order nonlinear solvers for computing multiple roots,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 217, no. 23, pp. 9756–9764, 2011.
- [43] J. R. Sharma and R. Sharma, “Modified Chebyshev-Halley type method and its variants for Funciones peso para métodos de resolución de ecuaciones no lineales con raíces múltiples

- computing multiple roots,” *Numer. Algorithms*, vol. 61, no. 4, pp. 567–578, 2012.
- [44] Á. Alberto, M. Ruiz, J. Manuel Gutiérrez Jiménez, N. Romero Alvarez, and C. Académico, “Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado TESIS DOCTORAL,” *Serv. Publicaciones, Univ. La Rioja*, 2012.

Family of Multiple-Root Finding Iterative Methods Based on Weight Functions

Francisco I. Chicharro ¹*¹, Rafael A. Contreras ¹ and Neus Garrido ¹

¹ Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología, Universidad Internacional de la Rioja, Av. La Paz 137, 26006 Logroño, Spain

* Correspondence: francisco.chicharro@unir.net

Received: date; Accepted: date; Published: date

Abstract: A straightforward family of one-point multiple-root iterative methods is introduced. The family is generated using the technique of weight functions. In the convergence analysis, the constraints that must satisfy the weight function for reaching order three are shown. In this sense, a family of iterative methods can be obtained with a suitable design of the weight function. A dynamical analysis is included in the manuscript, revealing the good properties of the family or a wide range of values of the parameter. In addition, a numerical test on academic and engineering multiple-root functions is performed.

Keywords: multiple-roots; iterative method; weight function; complex dynamics

1. Introduction

Solving nonlinear equation $f(x) = 0$ has been a difficult problem to handle for a long time in several branches of Science and Engineering. Despite Newton's method dates from the 17th century, it is at the end of the 20th century that computing drives research in the discipline of iterative methods. Hundreds of papers can be found covering this topic in the latest literature.

An initial classification splits the problem in methods without or with memory for single or multiple roots. The variety of publications is vast. Furthermore, the stability of the iterative procedures is also analyzed in several publications. Focusing on methods without memory, we can find complete analysis for single-root finding on simple two-step methods [1–4], as well as those that reach orders of convergence of value 16 [5–7] most of them collected in [8]. In a similar manner, multiple-root finding procedures – recently very aptly named as root-ratio methods [9] – are also present in the literature with a large variety of orders of convergence. In this sense, the higher order of convergence, the higher computational cost.

Iterative methods for finding single roots of a nonlinear equation usually loose their order of convergence when they are used for multiple roots. A classical example is Newton's method, with quadratic order of convergence for single roots, but it has linear convergence when it is applied for finding multiple roots. However, several modifications have been proposed in order to keep its quadratic order. Among them, we find the accelerated Newton's method (or Rall's method [10]) and the modified Newton's scheme (or Schröder's method [11]), based on applying Newton's iterative scheme to the functions $u_1(x) = f(x)^{1/m}$ and $u_2(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, respectively, and then obtaining the iterative expressions:

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

and

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)} f''(x_k). \quad (1)$$

In both cases, the problem becomes on finding a simple root of a nonlinear equation, so the order of convergence is again quadratic.

Linear combinations of these two previous methods can also generate schemes that hold the order of convergence two. Mora in [12] proposes the following parametric family

$$x_{k+1} = x_k - m(1 - \alpha) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \alpha \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

In particular, the method of the family obtained when $\alpha = 1$ is the well-known SuperHalley's method that has order of convergence three.

In this paper we focus on a simple idea for the generation of a class of one-step iterative methods for finding multiple roots of nonlinear equations. A specific case of weight function is developed, including a parameter and, therefore, a family of iterative methods is generated. We will select the members of the family whose basins of attraction are wider, ensuring the convergence of the method for a broad set of initial estimates. To this end, we perform a complex dynamics analysis, in which fixed and critical points – and their asymptotic behavior – allows the knowledge of the stability of the family. This analysis is more common for single root methods; however, there are papers that include it for multiple root methods [13–15].

This paper is organized as follows. In Section 2 we present the iterative one-step family based on one weight function, as well as its convergence analysis. The stability analysis of the family is performed in Section 3, where we find that the fulfillment of the Scaling Theorem simplifies the study. Section 4 covers the numerical analysis for specific members of the family on different nonlinear functions with multiple roots. Finally, Section 5 collects the main conclusions.

2. Convergence analysis of the parametric family

Family (2) can also be written as

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - H(t_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ H(t_k) &= H(t_k, \alpha) = m(1 - \alpha) + \alpha \frac{1}{1 - t_k}, \quad t_k = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Following this guideline and in order to design iterative schemes with order three for multiple roots, we propose the following triparametric family

$$x_{k+1} = x_k - H(t_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

where the weight function and its variable are given by

$$H(t_k) = H(t_k; b_1, b_2, b_3) = b_1 m + \frac{b_2}{1 - b_3 t_k}, \quad t_k = \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}.$$

Theorem 1 shows the conditions that the parameters b_1 and b_2 must satisfy for the family to reach the order of convergence three.

Theorem 1. *Let us consider $r \in I$ a multiple root with multiplicity $m > 1$ of a sufficiently differentiable function $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined in an open interval I . If the initial estimation x_0 is close enough to r , then iterative family (4) has order of convergence 3 when parameters satisfy*

$$b_1 = \frac{-m + (m + 1)b_3}{2b_3}, \quad b_2 = \frac{(-m + (m - 1)b_3)^2}{2b_3}. \quad (5)$$

In addition, its error equation is given by

$$e_{k+1} = \left[\frac{(-m(m+3) + (m+1)^2 b_3) A_1^2 + 2m(m-(m-1)b_3) A_2}{2m^2(-m+(m-1)b_3)} \right] e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4),$$

where $A_i = \frac{m!f^{(m+i)}(r)}{(m+i)!f^{(m)}(r)}$, $i = 1, 2, \dots$, and $e_k = x_k - r$ denotes the error in each iteration.

Proof. Considering the Taylor series expansions of $f(x_k)$, $f'(x_k)$ and $f''(x_k)$ around r and taking into account that $f^{(j)}(r) = 0$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ and $f^{(m)}(r) \neq 0$, we have

$$\begin{aligned} f(x_k) &= \frac{f^{(m)}(r)e_k^m}{m!} \left[1 + A_1 e_k + A_2 e_k^2 + A_3 e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4) \right], \\ f'(x_k) &= \frac{f^{(m)}(r)e_k^{m-1}}{(m-1)!} \left[1 + B_1 e_k + B_2 e_k^2 + B_3 e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4) \right], \\ f''(x_k) &= \frac{f^{(m)}(r)e_k^{m-2}}{(m-2)!} \left[1 + C_1 e_k + C_2 e_k^2 + C_3 e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

being

$$A_i = \frac{m!f^{(m+i)}(r)}{(m+i)!f^{(m)}(r)}, \quad B_i = \frac{(m-1)!f^{(m+i)}(r)}{(m+i-1)!f^{(m)}(r)}, \quad C_i = \frac{(m-2)!f^{(m+i)}(r)}{(m+i-2)!f^{(m)}(r)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

From (6), we obtain

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{e_k}{m} - \frac{A_1 e_k^2}{m^2} + \frac{1}{m^3} \left[(m+1)A_1^2 - 2mA_2 \right] e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4) \quad (7)$$

and

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2} = \frac{m-1}{m} + \frac{2A_1 e_k}{m^2} - \frac{3}{m^3} \left[(m+1)A_1^2 - 2mA_2 \right] e_k^2 \\ &\quad + \frac{4}{m^4} \left[(m+1)A_1^3 - m(3m+4)A_1 A_2 + 3m^2 A_3 \right] e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4). \end{aligned} \quad (8)$$

From (7) and (8), we get

$$e_{k+1} = e_k - H(t_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = K_1 e_k + K_2 e_k^2 + K_3 e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4), \quad (9)$$

where the coefficients K_i , $i = 1, 2, 3$, are given by

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 - b_1 - \frac{b_2}{m + b_3 - mb_3}, \\ K_2 &= \frac{1}{m} \left(b_1 + \frac{b_2(m-(m+1)b_3)}{(m-(m-1)b_3)^2} \right) A_1, \\ K_3 &= \frac{(-m(m+3) + (m+1)^2 b_3) A_1^2 + 2m(m-(m-1)b_3) A_2}{2m^2(-m+(m-1)b_3)}. \end{aligned} \quad (10)$$

In order to achieve order of convergence 3, we must solve equations $K_1 = 0$ and $K_2 = 0$. Then, we obtain the values for parameters b_1 and b_2 :

$$b_1 = \frac{-m + (m+1)b_3}{2b_3}, \quad b_2 = \frac{(-m + (m-1)b_3)^2}{2b_3}. \quad (11)$$

Finally, by using parameters (11) the error equation (9) turns into

$$e_{k+1} = \left[\frac{(-m(m+3) + (m+1)^2 b_3) A_1^2 + 2m(m-(m-1)b_3) A_2}{2m^2(-m+(m-1)b_3)} \right] e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4),$$

so the order of convergence is three. \square

If we set $b_3 = \alpha$ and parameters b_1 and b_2 from (5), the weight function of family (4) turns into

$$H(t_k, \alpha) = \frac{(m(3-m) + \alpha(m-1)^2) + m(m-(m+1)\alpha)t_k}{2(1-\alpha t_k)}. \quad (12)$$

After some algebraic manipulations, (12) can be written as a Chebyshev-Halley type expression:

$$H(t_k, \alpha) = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)((m-1)\alpha - 2m) + m^2 t_k}{2(1-\alpha t_k)}. \quad (13)$$

Let us note that $m = 1$ gives Chebyshev-Halley's family of iterative schemes for simple roots

$$x_{k+1} = x_k - \left(1 + \frac{t_k}{2(1-\alpha t_k)} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

From now on, we consider the third-order iterative family resulting after applying the previous conditions. This parametric family can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - H(t_k, \alpha) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ H(t_k, \alpha) &= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)((m-1)\alpha - 2m) + m^2 t_k}{2(1-\alpha t_k)}, \quad t_k = \frac{f(x_k) f''(t_k)}{f'(t_k)^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

Family (14) collects all Chebyshev-Halley's methods for single or multiple roots and only these. Some of the well-known methods of this family can be deduced from different values of α :

1. Chebyshev ($\alpha = 0$):

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{m(3-m)}{2} + \frac{m^2 t_k}{2} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (15)$$

2. Halley ($\alpha = \frac{1}{2}$):

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{m(m+1)}{2} + \frac{(1-m)(1+3m) + 2m^2 t_k}{2(2-t_k)} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (16)$$

3. Super-Halley ($\alpha = 1$):

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{(m+1) - mt_k}{2(1-t_k)} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (17)$$

4. Osada ($\alpha = \infty$):

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)^2}{2t_k} \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (18)$$

3. Dynamical analysis of the family

In this section, we are performing a dynamical analysis of the iterative family under study via complex dynamics. After a review of the basics on complex dynamics, we will apply the scaling theorem. The rational function after Möbius conjugation will give us an expression from which the fixed and critical points are obtained. Finally, some well-known representations, such as the stability,

the parameters or the dynamical plane, will return important information about the stability of the family.

3.1. Preliminaries on complex dynamics

In this part, the basics of the complex dynamics are revisited. For a more extensive explanation, see [16–18].

Let $Q : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ be a rational function, where $\hat{\mathbb{C}}$ is the Riemann sphere. The orbit of a point $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ is the set consisting of the successive applications of Q on the point z_0 , i.e.,

$$\{z_0, Q(z_0), Q^2(z_0), \dots, Q^n(z_0), \dots\}.$$

A point that remains unaltered with the application of Q is a **fixed point**, that satisfies $Q(z_f) = z_f$. The asymptotic behavior of the fixed points sorts them into attracting, repelling, neutral or superattracting, depending on the value of the multiplier $|Q'(z_f)|$. Table 1 gathers the conditions for classifying a fixed point inside one of the above-mentioned groups.

Table 1. Classification of fixed points

Value of $ Q'(z_f) $	< 1	> 1	$= 1$	$= 0$
Asymptotic behavior	Attracting	Repelling	Neutral	Superattracting

The evaluation of the infinity as a fixed point and its asymptotic behavior can be obtained with the technique presented in [19] and widely applied ([20] or [21], amongst others).

When the rational function is the result of the application of a function $f(z)$ on an iterative method, the fixed points match with the roots of f . In addition, there may appear more fixed points, that are named **strange fixed points**. The presence of these additional points may alter the stability of the iterative method, as long as its asymptotic behavior is not repelling.

A **critical point** z_c is a point that satisfies $Q'(z_c) = 0$. Again, the roots of f match with the critical points, and the additional points that do not match are named **free critical points**.

Finally, the **basin of attraction** of an attracting fixed point is the set of initial estimations whose orbit converge to this attracting fixed point, i.e.,

$$\mathcal{B}(z_f) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : Q^n(z_0) \rightarrow z_f, n \rightarrow \infty\}.$$

When the iterative expression includes a parameter, it is worth mentioning the associated graphic tools [22]. On the one hand, the unified stability plane gathers into one representation the regions of the parameter where the strange fixed points behave as attracting points, altering the stability of the method. On the other hand, the unified parameter plane represents the regions of the parameter where the free critical points converge to a root of the function f or to another point.

3.2. The rational function

In the following, we are going to analyze the stability of family (14) on cubic polynomials with double roots. We will use for this study the generic polynomial $p(z) = (z - a)^2(z - b)$, $a, b \in \mathbb{C}$. Previously, we will apply the Scaling Theorem in order to simplify this study.

For this purpose, let us recall the fixed point operator obtained when family (14) is applied to an analytical function $f(z)$ in $\hat{\mathbb{C}}$:

$$Q_f(z) = z - \frac{(m(3 - m) + \alpha(m - 1)^2) + m(m - (m + 1)\alpha)t_f(z)}{2(1 - \alpha t_f(z))} \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad (19)$$

where $t_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}$.

Theorem 2 (Scaling Theorem for family (14)). *Let $f(z)$ be an analytic function in $\hat{\mathbb{C}}$ and $Q_f(z)$ the fixed point operator obtained when family CH3 is applied to $f(z)$. Let us consider an affine map $A(z) = \beta z + \gamma$ with $\beta \neq 0$. Let us denote $g(z) = \lambda(f \circ A)(z)$, $\lambda \neq 0$, and $Q_g(z)$ the corresponding fixed point operator. Then:*

$$(A \circ Q_g \circ A^{-1})(z) = Q_f(z),$$

so Q_f and Q_g are affine conjugated by A .

Proof. First, let us consider the following equalities:

- $g'(z) = \lambda f'(A(z))A'(z) = \lambda f'(A(z))\beta$,
- $g''(z) = \lambda f''(A(z))\beta^2$,
- $A(z_1 - z_2) = A(z_1) - \beta z_2$.

Then we have

$$\begin{aligned} t_g(A^{-1}(z)) &= \frac{g(A^{-1}(z))g''(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))^2} = \frac{\lambda f(A(A^{-1}(z)))\lambda f''(A(A^{-1}(z)))\beta^2}{(\lambda f'(A(A^{-1}(z)))\beta)^2} \\ &= \frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2} = t_f(z) \end{aligned} \quad (20)$$

and

$$\frac{g(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))} = \frac{\lambda(f(A^{-1}(A(z))))}{\lambda(f'(A^{-1}(A(z)))\beta)} = \frac{f(z)}{\beta f'(z)}. \quad (21)$$

From (20) and (21), we obtain

$$\begin{aligned} (A \circ Q_g \circ A^{-1})(z) &= A(Q_g(A^{-1}(z))) \\ &= A\left(A^{-1}(z) - \frac{(m(3-m) + \alpha(m-1)^2) + m(m-(m+1)\alpha)t_g(A^{-1}(z))}{2(1-\alpha t_g(A^{-1}(z)))} \frac{g(A^{-1}(z))}{g'(A^{-1}(z))}\right) \\ &= A(A^{-1}(z)) - \beta \frac{(m(3-m) + \alpha(m-1)^2) + m(m-(m+1)\alpha)t_f(z)}{2(1-\alpha t_f(z))} \frac{f(z)}{\beta f'(z)} \\ &= z - \frac{(m(3-m) + \alpha(m-1)^2) + m(m-(m+1)\alpha)t_f(z)}{2(1-\alpha t_f(z))} \frac{f(z)}{f'(z)} = Q_f(z). \end{aligned}$$

□

The Scaling Theorem (Theorem 2) proves that the fixed point operators associated to family (14) applied to different analytic functions are affine conjugated by an affine map. So, the dynamical study of the roots of a cubic polynomial with a doble root can be reduced by an affine change of coordinates to the dynamics associated with the generic cubic polynomial $p(z) = (z-a)^2(z-b)$.

The rational operator obtained when family (14) is applied on $p(z)$ is

$$Q_p(z, \alpha, a, b) = z - \frac{(\alpha+2)(3z-2b-a)^2 + 2(4-6\alpha)(z-b)(3z-b-2a)}{2((3z-2b-a)^2 - 2\alpha(z-b)(3z-b-2a))} \frac{(z-a)(z-b)}{3z-b-a}, \quad (22)$$

which depends not only on α but also on parameters a and b .

In order to work with a rational operator with dependence only on a parameter, we apply Möbius transformation

$$M(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

and we obtain a rational operator that only depends on parameter α

$$Op(z, \alpha) = (M \circ Q_p \circ M^{-1})(z) = -\frac{z^3(2z + 10 - 9\alpha)}{\alpha z^3 + 12z^2(1 - \alpha) - 4z(2 - 3\alpha) - 8(2 - \alpha)}. \quad (23)$$

Fixed point operator $Op(z, \alpha)$ is affine conjugated to $Q_p(z, \alpha, a, b)$ by M , so the study of the dynamics is equivalent.

Since $M(a) = 0$, $M(b) = \infty$ and $M(\infty) = 1$, Möbius transformation has sent the roots a and b to 0 and ∞ , respectively, while the divergence is set in 1 . Now the fixed points of $Op(z, \alpha)$ are 0 and ∞ , which correspond to the roots of $p(z)$ with multiplicity 2 and 1 , respectively.

In order to study the asymptotic behaviour of the fixed points and to obtain the critical points of the rational operator, we consider its derivative, whose expression is

$$Op'(z, \alpha) = \frac{-2z^2(z^4\alpha - 24z^3(\alpha - 1) + 6z^2(6 - 13\alpha + 9\alpha^2) - 4z(36 - 56\alpha + 27\alpha^2) - 12(20 - 28\alpha + 9\alpha^2))}{(z^3\alpha - 12z^2(-1 + \alpha) + 4z(-2 + 3\alpha) + 8(\alpha - 2))^2} \quad (24)$$

However, the study of the fixed point ∞ requires a different analysis [19]. The point ∞ is a fixed point of $Op(z, \alpha)$ if, and only if, $z = 0$ is a fixed point of the function $F(z, \alpha) = \frac{1}{Op(1/z, \alpha)}$. In addition, ∞ is classified as attracting when $|F'(0, \alpha)| < 1$, repelling if $|F'(0, \alpha)| > 1$ and neutral when $|F'(0, \alpha)| = 1$. In this analysis, rational functions $F(z, \alpha)$ and $F'(z, \alpha)$ are given by

$$F(z, \alpha) = \frac{z(8z^3(-2 + \alpha) + 4z^2(-2 + 3\alpha) - 12z(-1 + z) + \alpha)}{z(-10 + 9\alpha) - 2}, \quad (25)$$

$$F'(z, \alpha) = \frac{24z^4(20 - 28\alpha + 9\alpha^2) + 8z^3(36 - 56\alpha + 27\alpha^2) - 12z^2(6 - 13\alpha + 9\alpha^2) + 48z(\alpha - 1) - 2\alpha}{(z(-10 + 9\alpha) - 2)^2}. \quad (26)$$

For all value of α it is satisfied $Op(0, \alpha) = 0$ and $F(0, \alpha) = 0$, so the roots $z = 0$ and $z = \infty$ are fixed points of the fixed point operator.

Now, we analyze the set of strange fixed points and free critical points of $Op(z, \alpha)$ and also the asymptotic behaviour of the fixed points.

Lemma 1. *The fixed point operator $Op(z, \alpha)$ has the following three strange fixed points*

$$z_{e_0} = 1, \quad z_{e_1} = \frac{2(-6 + 5\alpha - \sqrt{28 - 60\alpha + 27\alpha^2})}{2 + \alpha}, \quad z_{e_2} = \frac{2(-6 + 5\alpha + \sqrt{28 - 60\alpha + 27\alpha^2})}{2 + \alpha},$$

when $\alpha \in \mathbb{C} - \{-2, 2, 2/3, 14/9\}$.

Proof. Solving the equation $Op(z, \alpha) = z$, we obtain the strange fixed points z_{e_0} , z_{e_1} and z_{e_2} . On the one hand, the values $\alpha = \pm 2$ are roots of $-6 + 5\alpha - \sqrt{28 - 60\alpha + 27\alpha^2}$, so they cancel the numerator of z_{e_1} and z_{e_2} . On the other hand, $\alpha = 2/3$ and $\alpha = 14/9$ are roots of $28 - 60\alpha + 27\alpha^2$. In addition, $\alpha = 14/9$ is solution of the equations $z_{e_1} = 1$ and $z_{e_2} = 1$. Then, we consider this set of values of α and the associated fixed point operator is analyzed for each case.

- When $\alpha = -2$, we get

$$Op(z, -2) = \frac{z^3(14 + z)}{16 + 16z - 18z^2 + z^3}.$$

The solutions of $Op(z, -2) = z$ are $z = 0$, $z = 1$ and $z = \frac{1}{2}$, so the rational operator has two strange fixed points.

- If $\alpha = 2$,

$$Op(z, 2) = \frac{z^2}{2 - z}$$

and $z = 1$ is the only strange fixed point.

- When $\alpha = 2/3$, $Op(z, 2/3)$ turns into

$$Op(z, 2/3) = -\frac{3z^3}{-8 + 4z + z^2}.$$

The points $z = 0$, $z = 1$ and $z = -2$ are the solutions of $Op(z, 2/3)$. Then, there exist two strange fixed points.

- If $\alpha = 14/9$, the fixed point operator is

$$Op(z, 14/9) = -\frac{9(-2 + z)z^3}{-16 + 48z - 30z^2 + 7z^3}.$$

The only strange fixed point for this case is $z = 1$.

□

Lemma 2. *The critical points of the fixed point operator $Op(z, \alpha)$ are $z = 0$, corresponding to the double root of the polynomial, and four free critical points, corresponding to the roots of polynomial*

$$z^4 - 24z^3(-1 + \alpha) + 6z^2(6 - 13\alpha + 9\alpha^2) - 4z(36 - 56\alpha + 27\alpha^2) - 12(20 - 28\alpha + 9\alpha^2). \quad (27)$$

Proof. From (24), solving equation $Op'(z, \alpha) = 0$ we obtain the critical points $z = 0$ and the free critical points c_i , $i = 1, 2, 3, 4$, that correspond to the roots of polynomial (27). The expression of the free critical points is

$$\begin{aligned} c_1 &= B - C - \frac{1}{2}\sqrt{D + E}, \\ c_2 &= B - C + \frac{1}{2}\sqrt{D + E}, \\ c_3 &= B + C - \frac{1}{2}\sqrt{D - E}, \\ c_4 &= B + C + \frac{1}{2}\sqrt{D - E}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} A1 &= 144(-1 + \alpha)^2 - 4\alpha(6 - 13\alpha + 9\alpha^2), \\ A2 &= 18\sqrt[3]{9\alpha}(2 - 3\alpha + \alpha^2)^2, \\ A3 &= -72 + 228\alpha - 218\alpha^2 + 11\alpha^3 + 97\alpha^4 - 54\alpha^5 + 9\alpha^6, \\ A4 &= \sqrt{(-2 + \alpha)^4\alpha(864 - 4968\alpha + 11616\alpha^2 - 14162\alpha^3 + 9522\alpha^4 - 3357\alpha^5 + 486\alpha^6)}, \\ A5 &= 8\left(13 - \frac{6}{\alpha} - 9\alpha\right) + \frac{288(-1 + \alpha)^2}{\alpha^2}, \\ A6 &= 8(432 - 1404\alpha + 1602\alpha^2 - 772\alpha^3 + 135\alpha^4), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} A &= \frac{A2}{(A3 + A4)^{1/3}} + 6\sqrt[3]{3}\alpha(A3 + A4)^{1/3}, \\ B &= 6 - \frac{6}{\alpha}, \\ C &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A1 + A}{\alpha^2}}, \\ D &= A5 - \frac{A}{\alpha^2}, \\ E &= \frac{A6}{\alpha^3 C}. \end{aligned}$$

In particular, when $\alpha = 2$ there is only a free critical point, for $\alpha \in \{\infty, 2/3, 3/2, 4/3\}$ there exist two different free critical points, and if $\alpha \in \{0, 10/9, -5.66328, 1.59444, 1.58399\}$, the fixed point operator has three free critical points. \square

3.3. Asymptotic behavior of fixed and critical points

In order to design iterative schemes with stability depending on the initial estimations, it is desirable that the strange fixed points are repelling, so the iterative process does not converge to points different to the roots of the function.

According to Lemma 1, rational operator $Op(z, \alpha)$ has strange fixed points, so we must study its asymptotic behaviour to determine the values of parameter α that correspond to the methods of the family with the best dynamic properties.

Lemma 3. *Fixed point $z = 0$ is superattracting for all value of α . Fixed point $z = \infty$ is attracting when $|\alpha| < 2$, neutral if $|\alpha| = 2$, and repelling when $|\alpha| > 2$.*

Proof. On the one hand, from (24) we have $Op'(0, \alpha)$, so $z = 0$ is a superattracting fixed point.

On the other hand, from (26), $F'(0, \alpha) = -\frac{\alpha}{2}$. Then, $z = \infty$ is:

- Attracting if $\left| -\frac{\alpha}{2} \right| < 1$, that is, when $|\alpha| < 2$ (and superattracting when $\alpha = 0$).
- Neutral when $\left| -\frac{\alpha}{2} \right| = 1$, so $|\alpha| = 2$.
- Repelling if $\left| -\frac{\alpha}{2} \right| > 1$, and then $|\alpha| > 2$.

\square

Lemma 4. *The strange fixed point $z_{e_0} = 1$ of the rational function $Op(z, \alpha)$ is attracting inside the disk*

$$\left(\Re(\alpha) - \frac{68}{45} \right)^2 + \Im(\alpha)^2 < \left(\frac{2}{45} \right)^2,$$

where $\Re(\alpha)$ and $\Im(\alpha)$ denote the real and imaginary parts of α , respectively; repelling outside the disk; neutral when $\left(\Re(\alpha) - \frac{68}{45} \right)^2 + \Im(\alpha)^2 = \left(\frac{2}{45} \right)^2$, and superattracting if $\alpha = \frac{3}{2}$.

Proof. From (24), we get

$$Op'(1, \alpha) = \frac{6(-3 + 2\alpha)}{-4 + 3\alpha}.$$

Then, $z = 1$ is:

- Attracting if $\left| \frac{6(-3 + 2\alpha)}{-4 + 3\alpha} \right| < 1$.
- Neutral if $\left| \frac{6(-3 + 2\alpha)}{-4 + 3\alpha} \right| = 1$.

- Repelling: when $\left| \frac{6(-3+2\alpha)}{-4+3\alpha} \right| > 1$.
- Superattracting if $\left| \frac{6(-3+2\alpha)}{-4+3\alpha} \right| = 0$, that is when $\alpha = \frac{3}{2}$.

Developing $\left| \frac{6(-3+2\alpha)}{-4+3\alpha} \right| = 1$, we get $|6(-3+2\alpha)| = |-4+3\alpha|$, which corresponds to the circumference $(\Re(\alpha) - \frac{68}{45})^2 + \Im(\alpha)^2 = (\frac{2}{45})^2$. Then, we obtain the above results. \square

The asymptotic behaviour of the strange fixed points z_{e_1} and z_{e_2} is set through the derivatives

$$Op'(z_{e_1}, \alpha) = \frac{176 - 168\alpha + 36\alpha^2 + (-14 + 9\alpha)^{3/2}\sqrt{-2 + 3\alpha}}{9(-2 + \alpha)^2},$$

$$Op'(z_{e_2}, \alpha) = \frac{176 - 168\alpha + 36\alpha^2 - (-14 + 9\alpha)^{3/2}\sqrt{-2 + 3\alpha}}{9(-2 + \alpha)^2}.$$

However, the resulting expressions make difficult the analytical study. Instead of it, we represent the stability regions in the complex plane for each strange fixed point depending on the value of α .

Figures 1 and 2 represent the stability planes associated to the strange fixed points z_{e_1} and z_{e_2} , respectively. The real part of α is represented in the abscissas axis and the imaginary part of α is represented in the ordinate axis. White regions represent the values of α where the strange fixed point is attracting, while blue color represents the values of the parameter where the strange fixed point is repelling. The borders between the regions are the values where the strange fixed point is neutral.

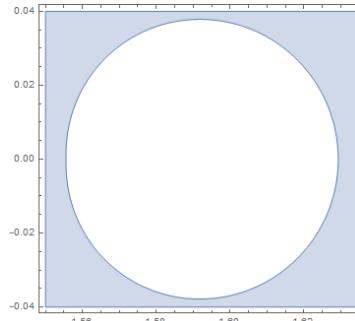


Figure 1. Stability plane of z_{e_1} for $(\Re(\alpha), \Im(\alpha)) \in [1.55, 1.63] \times [-0.04, 0.04]$

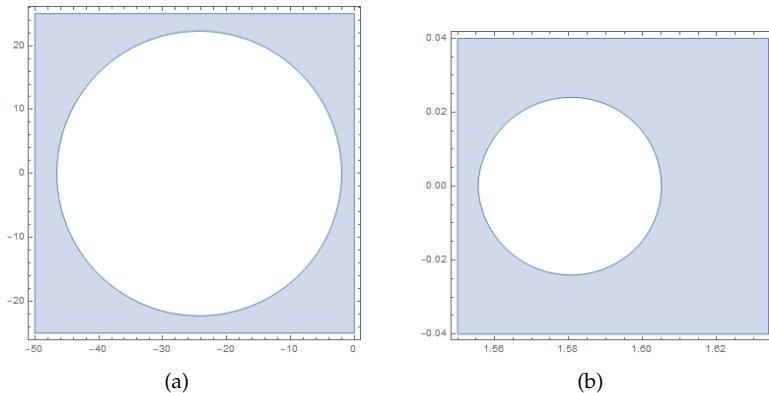


Figure 2. Stability plane of z_{e_2} for (a) $(\Re(\alpha), \Im(\alpha)) \in [-50, 0] \times [-25, 25]$; (b) $(\Re(\alpha), \Im(\alpha)) \in [1.55, 1.63] \times [-0.04, 0.04]$

In addition, Figure 2 shows the value of α in the complex plane where the strange fixed points and $z = \infty$ behave as attracting points. Let us remark that Figure 3(b) is a detail of the red region represented in Figure 3(a) where the root $z = \infty$ is attracting.

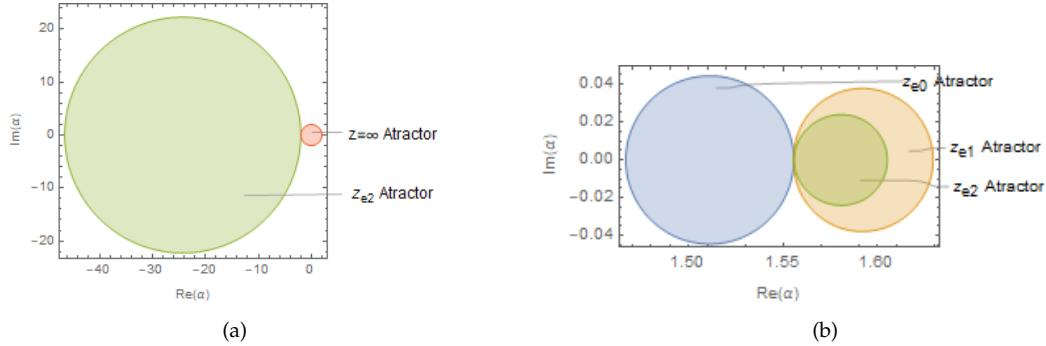


Figure 3. Asymptotic behaviour of the strange fixed points of $Op(z, \alpha)$ and $z = \infty$

According to Figure 3(a), the only attracting point outside the green and red regions is the double root $z = 0$. In order to choose the methods of the family with the best properties in terms of stability, we must avoid the areas represented with any colour other than white in Figure 3(b).

In a family of iterative schemes with dependence on a parameter, the parameters plane provide an overview of the stability of the family. In this paper, parameters planes are generated using a mesh of 800×800 points in the complex plane, where the real and imaginary part of parameter α are represented in the abscissas and ordinate axis, respectively. Each point in the plane corresponds to a value of α , that is, with a method of the iterative family. Taking a free critical point as initial estimation to iterate each method associated to a value of α , the point is represented in red when there is convergence to any root of the polynomial and otherwise, the point is plotted in black. Therefore, there exist points in the black regions, different to the roots 0 and ∞ , that behave as attracting points. These points can be strange fixed points or attracting periodic points. Then, the most stable methods of the family are located in the plane in the red regions.

According to Lemma 2, rational operator $Op(z, \alpha)$ has four free critical points. We can see in Figure 4 the parameters plane associated to each free critical point for $(\Re(\alpha), \Im(\alpha)) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$. They have been generated using Matlab and the implementation presented in [23]. The iterative process finishes when the difference between the point and some of the roots is lower than 10^{-3} with a maximum of 150 iterations.

Figure 4 shows wide red areas for the four free critical points. These areas allow us to select values of parameter α where the associated scheme converges to a root taking as initial iterate a free critical point. In addition, we have chosen from Figure 4 different values of α to generate the corresponding dynamical planes and then compare the stability of methods that belong to the same family.

The dynamical planes show the basins of attraction of an attracting point. Each point in the complex plane is taken as initial estimation to iterate the method and, according to the root to which its orbit converges, it is represented with a colour. In this paper, the dynamical planes have been generated in Matlab according to [23]. A mesh of 800×800 points in the complex plane are taken as initial estimations, being the stopping criteria a maximum of 50 iterations or a difference between the point and an attracting point lower than 10^{-3} .

We have denoted the basins of attraction of $z = 0$ and $z = \infty$ in orange or green, respectively. Moreover, colors blue and red denote the convergence to a strange fixed point. Finally, the point in the plane is depicted in black when its orbit is divergent or converges to any other attracting point different to the roots or the strange fixed points. Moreover, colors are lighter when less iterations are required until the convergence.

Figures 5 and 6 show the dynamical planes associated to values of α where the number of strange fixed points is lower than three (Lemma 1), that is $\alpha \in \{-2, 2/3, 14/9, 2\}$. In all the cases the strange fixed points are repelling, so we do not observe red or blue regions. In particular, for $\alpha = 2$ there is only convergence to the double root $z = 0$ or to the periodic orbit $\{-20001, 19999\}$.

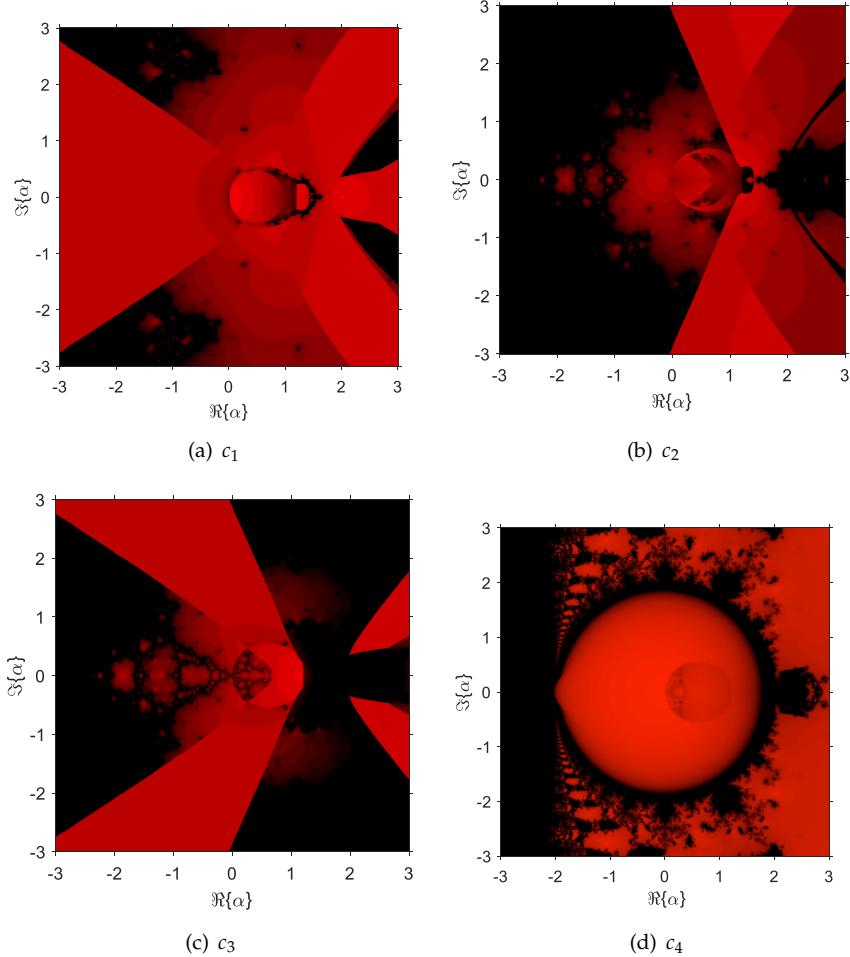


Figure 4. Parameters plane

In Figure 7 we can observe the dynamical planes corresponding to Chebyshev ($\alpha = 0$), Halley ($\alpha = \frac{1}{2}$), SuperHalley ($\alpha = 1$) and Osada's method ($\alpha = \infty$) for multiple roots taking $m = 2$. Although each of these methods has three strange fixed points, they are not attracting. As for the first three methods $\alpha < 2$, they can converge to the single root. Moreover, Osada's method has a wide black area of convergence to the attracting periodic orbit $\{-6.5102, 2.9057\}$.

Finally, we show in Figure 8 the dynamical planes associated with values of the parameter with attracting strange fixed points. For $\alpha = 3/2$, the strange fixed point $z_{e_0} = 1$ is superattracting, while if $\alpha = 1.58$, $z_{e_1} = 0.6277$ and $z_{e_2} = 1.4952$ are attracting, so we can observe thier basins of attraction represented in red and blue. Both values of α correspond to points represented in black in the parameters plane, so they are unstable methods.

4. Numerical test

In order to analyze the behavior of the family for solving multiple-root nonlinear equations, this section performs a numerical test on different problems.

The computations have been performed using MATLAB R2017b. We use of variable precision arithmetics with 50 digits of mantissa. We consider that the solution has been obtained when the absolute difference of two iterates $|x_{k+1} - x_k|$ is lower than 10^{-30} . If the iterative method needs more than 50 iterations to reach the solution, we consider that the procedure does not converge (N.C.).

We compare the features of our family for $\alpha \in \left\{-3, \frac{14}{9}, 2\right\}$ with other members included in the family like Chebyshev's ($\alpha = 0$) and SuperHalley's ($\alpha = 1$) methods.

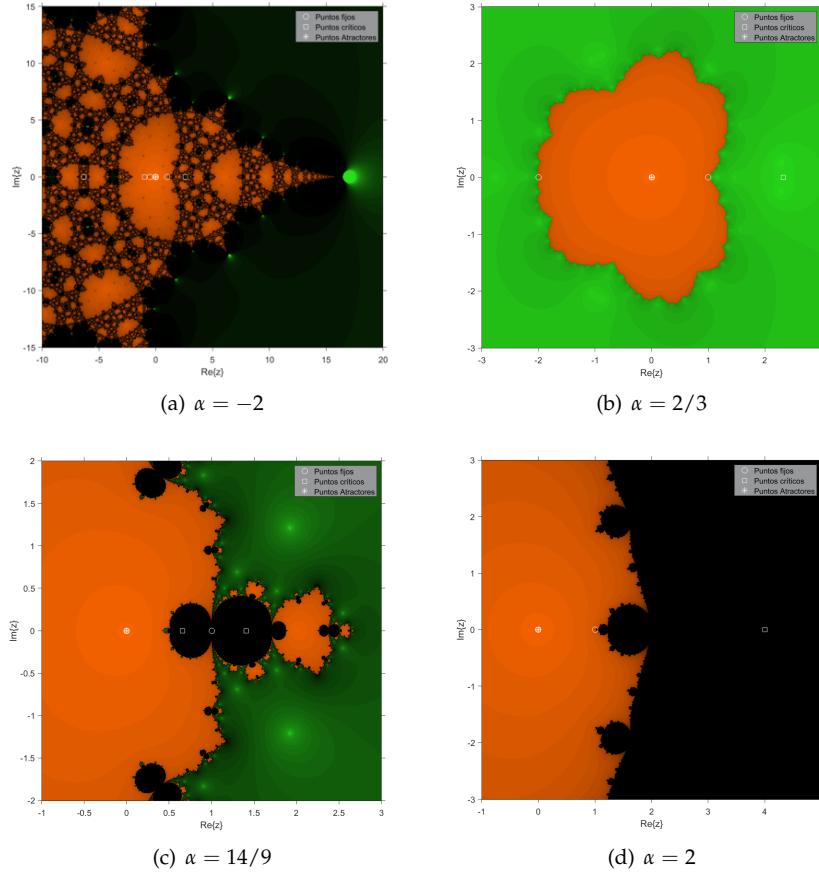


Figure 5. Dynamical planes for different values of α

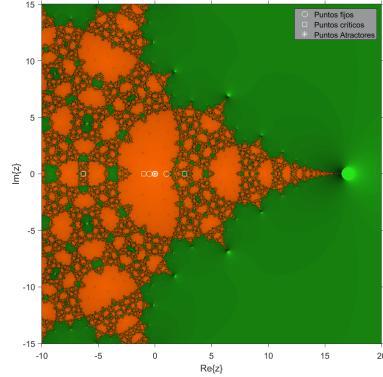


Figure 6. Dynamical plane for $\alpha = -2$ and a maximum of 100 iterations

Tables 2-4 collect the results of the numerical test on different nonlinear functions with multiple roots. They display the method, the initial guess (x_0), the amount of iterates to reach the multiple root (# iter), the difference between the two last iterates ($|x_{k+1} - x_k|$) and the approximated computational order of convergence (ACOC) [24].

The first nonlinear function under study is

$$f_1(x) = x^3 + x^2 - 8x + 12.$$

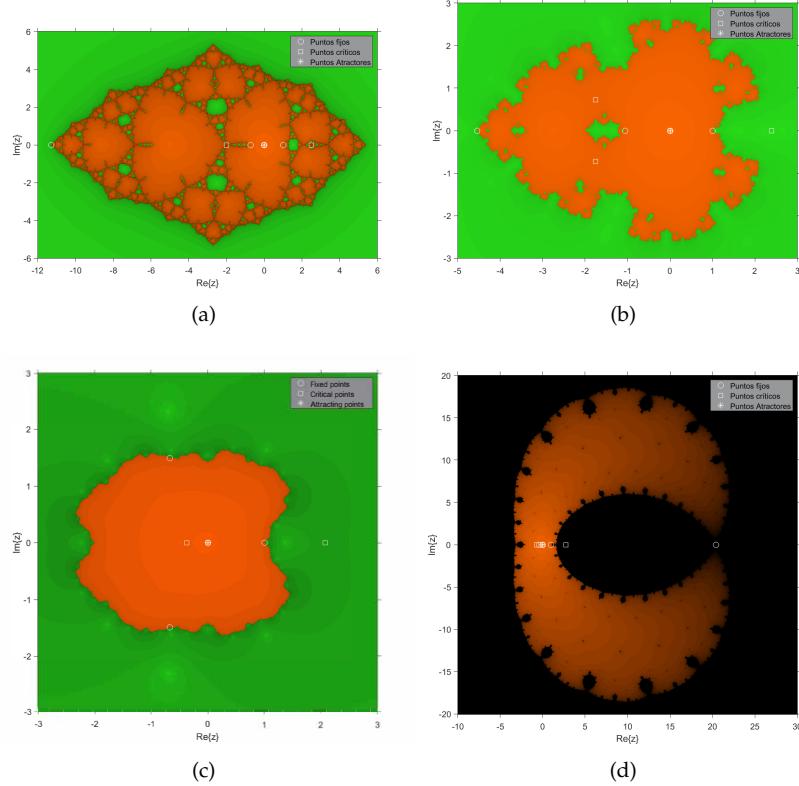


Figure 7. Dynamical planes for (a) Chebyshev; (b) Halley; (c) SuperHalley; (d) Osada

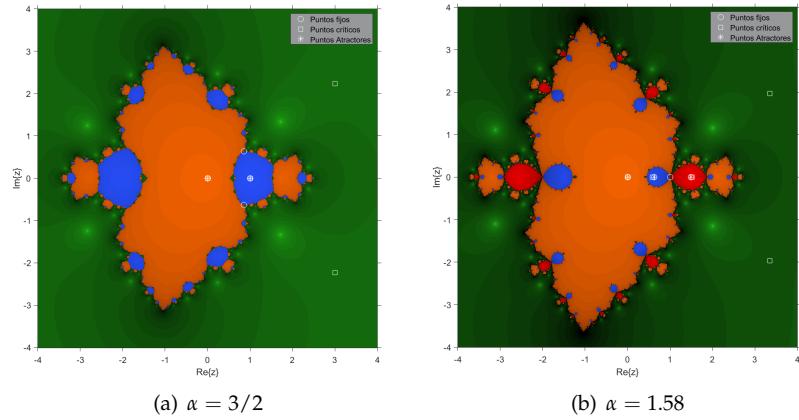


Figure 8. Dynamical planes for different values of α

Let us note that this function has a double real root for $x = 2$ and a single root for $x = -3$. Table 2 shows the results of the iterative methods for two different initial estimations for reaching the double real root.

Table 2. Numerical results for the test function f_1 .

Method	x_0	# iter	$ x_{k+1} - x_k $	ACOC
$\alpha = -3$		8	$3.8474 \cdot 10^{-49}$	3.0000
$\alpha = 14/9$		6	0	3.0001
$\alpha = 2$	0	7	$1.2512 \cdot 10^{-33}$	2.0000
Chebyshev		7	$3.1862 \cdot 10^{-58}$	3.0002
SuperHalley		5	$9.5586 \cdot 10^{-58}$	2.3879
$\alpha = -3$		5	0	2.9987
$\alpha = 14/9$		5	$4.1612 \cdot 10^{-55}$	3.0000
$\alpha = 2$	3	6	$1.2512 \cdot 10^{-33}$	2.0000
Chebyshev		5	$1.2745 \cdot 10^{-57}$	2.1248
SuperHalley		4	$2.6210 \cdot 10^{-31}$	3.0000

The second nonlinear function under study is

$$f_2(x) = 1 - 2\sqrt{2} + x + 2\ln(x) - 2\sqrt{x}\ln(x) + \ln^2(x),$$

that has two double real roots: $x = 1$ and $x = 12.3402$. Table 3 collects the values resulting from the application of the iterative methods to solve $f_2(x) = 0$.

Table 3. Numerical results for the test function f_2 .

Method	x_0	# iter	$ x_{k+1} - x_k $	ACOC
$\alpha = -3$		6	$1.7524 \cdot 10^{-57}$	2.9999
$\alpha = 14/9$		8	$4.4607 \cdot 10^{-57}$	3.0009
$\alpha = 2$	0.5	8	$8.9149 \cdot 10^{-55}$	2.0000
Chebyshev		5	$2.6222 \cdot 10^{-35}$	2.9979
SuperHalley		6	$8.4346 \cdot 10^{-50}$	3.0038
$\alpha = -3$		7	$9.0794 \cdot 10^{-47}$	2.9790
$\alpha = 14/9$		5	$1.0294 \cdot 10^{-50}$	2.9959
$\alpha = 2$	7	6	$9.2086 \cdot 10^{-34}$	1.9998
Chebyshev		6	$5.0979 \cdot 10^{-57}$	3.0003
SuperHalley		5	$4.8737 \cdot 10^{-49}$	3.0126

The third nonlinear function is

$$f_3 = \left(\ln(x) + \sqrt{x^2 + 1} - 2 \right)^9,$$

that has a root $x = 1.228$ with multiplicity 9. Table 4 displays the resulting results.

Table 4. Numerical results for the test function f_3 .

Method	x_0	# iter	$ x_{k+1} - x_k $	ACOC
$\alpha = -3$		6	$3.1862 \cdot 10^{-58}$	2.9998
$\alpha = 14/9$	3	6	0	2.9995
$\alpha = 2$	3	6	0	2.9997
SuperHalley		5	0	2.9076
$\alpha = -3$		7	0	2.9994
$\alpha = 14/9$	9	7	$9.1443 \cdot 10^{-56}$	2.9977
$\alpha = 2$		7	$3.1862 \cdot 10^{-58}$	2.9986
SuperHalley		6	$3.1862 \cdot 10^{-58}$	2.9468

5. Conclusions

Author Contributions: For research articles with several authors, a short paragraph specifying their individual contributions must be provided. The following statements should be used “conceptualization, F.C.; methodology, N.G.; software, R.C.; validation, R.C.; formal analysis, R.C.; investigation, F.C.; resources, N.G.; data curation, N.G.; writing—original draft preparation, R.C.; writing—review and editing, F.C.; visualization, R.C.; supervision, F.C.; project administration, F.C.; funding acquisition, F.C.”.

Funding: This research was partially supported by Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades under grant PGC2018-095896-B-C22 (MCIU/AEI/FEDER/UE).

Conflicts of Interest: “The authors declare no conflict of interest”.

1. Amat, S.; Busquier, S.; Plaza, S. Chaotic dynamics of a third-order Newton-type method. *J. Math. Anal. Appl.* **2010**, *366*, 24–32.
2. Chicharro, F.I.; Cordero, A.; Gutiérrez, J.M.; Torregrosa, J.R. Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations. *Appl. Math. Comput.* **2013**, *219*, 7023–7035.
3. Chicharro, F.I.; Cordero, A.; Garrido, N.; Torregrosa, J.R. Generating root-finder iterative methods of second order: convergence and stability. *Axioms* **2019**, *8*, 55.
4. Chun, C.; Lee, M.Y.; Neta, B.; Dzunic, J. On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics. *Appl. Math. Comput.* **2012**, *218*, 6427–6438.
5. Salimi, M.; Behl, R. Sixteenth-order optimal iterative scheme based on inverse interpolatory rational function for nonlinear equations. *Symmetry* **2019**, *11*, 691.
6. Babajee, D.K.R.; Thukral, R. On a 4-point sixteenth-order King family of iterative methods for solving nonlinear equations. *Int. J. Math. Math. Sci.* **2012**, *2012*, 979245.
7. Sharma, J.R.; Guha, R.K.; Gupta, P. Improved King’s methods with optimal order of convergence based on rational approximations. *Appl. Math. Lett.* **2013**, *26*, 473–480.
8. Cordero, A.; Torregrosa, J.R., *Advances in Iterative Methods for Nonlinear Equations*; Springer: Cartagena, Spain, 2016; chapter On the design of optimal iterative methods for solving nonlinear equations., pp. 79–12.
9. Petkovic, M.S.; Petkovic, L.D. Construction and efficiency of multipoint root-ratio methods for finding multiple zeros. *J. Comput. Appl. Math.* **2019**, *351*, 54–65.
10. Rall, L. Convergence of Newton’s process to multiple solutions. *Numer. Math.* **1966**, *9*, 23–37.
11. Schröder, E. On infinitely many algorithms. *Technical Report* **1992**, *57*, 92–121.
12. Mora, M. Estabilidad de los métodos iterativos para la aproximación de raíces múltiples de ecuaciones no lineales. Master’s thesis, Universitat Politècnica de València, 2019.
13. Behl, R.; Cordero, A.; Motsa, S.S.; Torregrosa, J.R. On developing fourth-order optimal families of methods for multiple roots and their dynamics. *Appl. Math. Comput.* **2015**, *265*, 520–532.
14. Cordero, A.; Jaiswal, J.P.; Torregrosa, J.R. Stability analysis of fourth-order iterative method for finding multiple roots of nonlinear equations. *Appl. Math. Nonl. Sci.* **2019**, *4*, 43–56.
15. Akram, S.; Zafar, F.; Yasmin, N. An optimal eighth-order family of iterative methods for multiple roots. *Mathematics* **2019**, *7*, 672.
16. Blanchard, P. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. *Bull. AMS* **1984**, *11*, 85–141.
17. Devaney, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*; Addison-Wesley: Redwood, CA, USA, 1989.
18. Schlag, W. *A Course in Complex Analysis and Riemann Surfaces*; American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 2014.
19. Gutiérrez, J.M.; Plaza, S.; Romero, N. Dynamics of a fifth-order iterative method. *Int. J. Comput. Math.* **2012**, *89*, 822–835.
20. Cordero, A.; Giménez-Palacios, I.; Torregrosa, J.R. Avoiding strange attractors in efficient parametric families of iterative methods for solving nonlinear problems. *Appl. Numer. Math.* **2019**, *137*, 1–18.
21. Amiri, A.; Cordero, A.; Darvishi, M.T.; Torregrosa, J.R. Stability analysis of a parametric family of seventh-order iterative methods for solving nonlinear systems. *Appl. Math. Comput.* **2018**, *323*, 43–57.
22. Chicharro, F.I.; Cordero, A.; Garrido, N.; Torregrosa, J.R. On the choice of the best members of the King family and the improvement of its convergence. *Math. Meth. Appl. Sci.* **2019**, *43*, 8051–8066.

23. Chicharro, F.I.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods. *Sci. World J.* **2013**, *2013*, 1–8.
24. Cordero, A.; Torregrosa, J.R. Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas. *Appl. Math. Comput.* **2007**, *190*, 686–698.