

Universidad Internacional de La Rioja (UNIR)

**Máster Universitario en Ingeniería Matemática y
Computación**

Un Método para Integrar Numéricamente Ecuaciones Variacionales

Trabajo Fin de Máster

Tipo de trabajo: Investigación

presentado por: Vinlasaca Viera, Danilo

Director/a: Jorba Cusco, Marc

Ciudad: Quito

Fecha: 23 de julio de 2020

Resumen

El presente Trabajo de Fin de Máster plantea la resolución de ecuaciones variacionales utilizando el método de Transporte de Jets que consiste en integrar una ecuación diferencial reemplazando las operaciones con números reales por operaciones con polinomios.

Este método proporciona una ventaja al calcular las ecuaciones variacionales mediante el uso de ordenadores debido a que el procedimiento estándar es linealizar el flujo de las ecuaciones diferenciales. Este procedimiento realizado a mano es tedioso y puede llevar a cometer errores cuando la función es complicada. El problema podría agravarse cuando tenemos la necesidad de integrar ecuaciones variacionales de grado más alto.

Es así, que la implementación del método Transporte de Jets permitirá encontrar la solución a este tipo de problema de manera óptima.

Palabras Clave: Ecuaciones variacionales, ecuaciones diferenciales, Transporte de Jets.

Abstract

The aim of the present Master's Thesis is the solution of variational equations using the Jet Transport method, which consists of integrating a differential equation replacing operations with real numbers for operations with polynomials.

This method provides an advantage in calculating variational equations using computers because the standard procedure is to linearize the flow of differential equations. This procedure done by hand is tedious and can carry out a mistake when the function is complicated. The problem could be exacerbated when we have the need to integrate higher degree variational equations.

Thus, the implementation of the Jets Transport method will optimally find the solution to this type of problem.

Keywords: Variational equations, Differential equations, Jet Transport

Índice de contenidos

1. Introducción	7
1.1 Justificación.....	8
1.2 Planteamiento del trabajo	8
1.3 Estructura de la memoria.....	9
2. Contexto y estado del arte.....	10
2.1 Ecuaciones diferenciales	13
2.1.1. Método de Euler	16
2.1.2. Método de Heun.....	16
2.1.3. Método de Runge-Kutta de orden 4.....	17
2.1.4. Análisis de errores en los métodos numéricos	18
2.1.5. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.....	19
2.1.6. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.....	20
2.1.7. Existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial.....	20
2.1.8. Dependencia de soluciones para problemas de valor inicial	22
2.2 Ecuaciones variacionales	22
2.3 Transporte de Jets	25
2.4 Álgebra de polinomios.....	27
3. Objetivos concretos y metodología de trabajo.....	32
3.1. Objetivo general.....	32
3.2. Objetivos específicos	32
3.2. Metodología del trabajo	32
4. Desarrollo específico de la contribución	34
4.1 Transporte de Jets para polinomios de una variable	34
4.1.1. Método de Euler modificado para Transporte de Jets.....	34
4.1.2. Método de Heun modificado para Transporte de Jets	37
4.1.3. Método de Runge-Kutta 4 modificado para Transporte de Jets	38
4.2 Transporte de Jets para polinomios de dos variables.....	40

4.2.1. Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales	43
4.2.2. Método de Runge-Kutta 4 para sistemas de ecuaciones diferenciales	48
4.2.2.1. Péndulo simple.....	48
4.2.2.2. Oscilador de Van der Pol	52
5. Conclusiones y trabajo futuro	56
5.1. Conclusiones.....	56
5.2. Líneas de trabajo futuro	56
6. Bibliografía	57

Índice de tablas

Tabla 1. Estimación del orden del método de Euler para la ecuación diferencial $x(t) = ex$..	36
Tabla 2. Convergencia del método de Runge-Kutta orden 4 para la ecuación diferencial $x(t) = 1 - 2tx$	39
Tabla 3. Convergencia del método de Euler para el sistema de ecuaciones diferenciales $x = y, y = -x$	45
Tabla 4. Convergencia del método de Runge-Kutta 4 para el sistema de ecuaciones diferenciales $x = y, y = -g/l \sin(x)$	49
Tabla 5. Convergencia del método de Euler para el sistema de ecuaciones diferenciales $x = y, y = \mu 1 - x^2 y - x$	53

Índice de figuras

Figura 1. Esquema del método de Transporte de jets [1].....	10
Figura 2. Proyección de las trayectorias del asteroide Apophis [2].....	11
Figura 3. Campo de direcciones de la solución a la ecuación diferencial $x = \text{sen}(t)$ (Fuente: elaboración propia)	15
Figura 4. Método explícito de Euler [12]	16
Figura 5. Método de Heun (Euler Modificado) [13].....	17
Figura 6. Método de Runge-Kutta de cuarto orden [13]	18
Figura 7. Representa del concepto de ecuación variacional. (Fuente: elaboración propia)...	23
Figura 8. Diagrama esquemático de la idea del Transporte de Jets. [1].....	26
Figura 9. Metodología de trabajo. (Fuente: elaboración propia)	33
Figura 10. Resultados de la ecuación diferencial $x(t) = ex$. (Fuente: elaboración propia).....	36
Figura 11. Gráfica del error cometido en la solución de la ecuación diferencial $x(t) = ex$. (Fuente: elaboración propia)	37
Figura 12. Resultados de la ecuación diferencial $x(t) = 1 - 2tx$. (Fuente: elaboración propia)	39
Figura 13. Gráfica del error cometido en la solución de la ecuación diferencial $x(t) = 1 - 2tx$. (Fuente: elaboración propia)	40
Figura 14. Resultados del sistema de ecuaciones diferenciales $x = y, y = -x$. (Fuente: elaboración propia)	44
Figura 15. Gráfica del error cometido en la solución de la ecuación diferencial $x = y, y = -x$. (Fuente: elaboración propia)	45
Figura 16. Derivadas de las ecuaciones variacional del sistema $x = y, y = -x$. (Fuente: elaboración propia)	46
Figura 17. Esquema del Transporte de Jet para el sistema de ecuaciones diferenciales $x = y, y = -x$. (Fuente: elaboración propia).....	47
Figura 18. Comparativa de los métodos de Euler 1 y Heun 2 modificados para transporte de jets para el Sistema $x = y, y = -x$. (Fuente: elaboración propia).....	47
Figura 19. Resultados del sistema de ecuaciones diferenciales $x = y, y = -g/l \text{sen}(x)$ por el método de Runge- Kutta 4. (Fuente: elaboración propia)	49
Figura 20. Gráfica del sistema de ecuaciones diferencial $x = y, y = -g/l \text{sen}(x)$ para diferentes valores de x.....	50
Figura 21. Esquema del Transporte de Jet para el sistema de ecuaciones diferenciales $x = y, y = -g/l \text{sen}(x)$. (Fuente: elaboración propia)	50

Figura 22. Derivadas de las ecuaciones variacional del sistema $x = y, y = -g/l \operatorname{sen}(x)$. (Fuente: elaboración propia)	51
Figura 23. Comparativa de los métodos de Euler y Runge-Kutta 4 modificado para transporte de jets para el sistema $x = y, y = -g/l \operatorname{sen}(x)$. (Fuente: elaboración propia)	52
Figura 24. Resultados del sistema de ecuaciones diferenciales $x = y, y = \mu 1 - x^2 y - x$. (Fuente: elaboración propia)	53
Figura 25. Esquema del Transporte de Jet para el sistema de ecuaciones diferenciales $x =$ $y, y = \mu 1 - x^2 y - x$. (Fuente: elaboración propia).....	54
Figura 26. Derivadas de las ecuaciones variacionales del sistema $x = y, y = \mu 1 - x^2 y - x$. (Fuente: elaboración propia)	54
Figura 27. Comparativa de los métodos de Heun y Runge-Kutta 4 para el sistema $x = y, y =$ $\mu 1 - x^2 y - x$. (Fuente: elaboración propia).....	55

1. Introducción

El estudio de las ecuaciones diferenciales tiene una importancia fundamental en las matemáticas debido a que gran parte de los fenómenos que ocurren en la naturaleza pueden ser descritos mediante modelos que incluyen ecuaciones diferenciales. Las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos (segunda ley de Newton, sistemas oscilantes, movimiento armónico simple), las leyes de conservación (masa, energía, carga eléctrica), el movimiento de cuerpos celestes, la transferencia de calor, la dinámica molecular, dinámica de fluidos, son ejemplos de fenómenos que pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales.

La solución a estas expresiones rara vez se puede obtener de forma analítica debido a su complejidad, sin embargo, se han desarrollado métodos que permiten obtener soluciones aproximadas bajo ciertas condiciones; esto sumado a los avances computacionales han permitido obtener valores cercanos a la soluciones analíticas.

Existen diversos métodos numéricos para integrar ecuaciones diferenciales los cuales utilizan algoritmos iterativos para obtener la solución en un conjunto discreto de valores. El más simple de estos es el método de Euler que consiste en aproximar la derivada de la ecuación diferencial en intervalos de tiempo pequeño. Este método se obtiene aplicando el desarrollo del polinomio de Taylor para un grado igual a uno. Otros métodos como la familia Runge-Kutta obtienen las soluciones promediando valores intermedios de la derivada en cada iteración. Estos se conocen como métodos de un paso debido a que únicamente dependen de la solución en el instante anterior.

En ocasiones es de interés conocer el comportamiento del sistema cuando existen variaciones en el instante inicial, este concepto está relacionado con el de ecuaciones variacionales el cual expande el entorno de la solución de una ecuación diferencial.

Una forma de resolver este problema es calculando las derivadas en cada paso, sin embargo, si se requiere reducir el error en la solución se pueden utilizar aproximaciones con polinomios de grado superior, esto es problemático porque es poco preciso y conlleva muchos cálculos.

Una alternativa más eficiente es el método de Transporte de Jets que utiliza una aritmética de polinomios en lugar del álgebra convencional de números reales obteniendo además de la solución a la ecuación diferencial, las soluciones a las ecuaciones variacionales.

1.1 Justificación

Una alternativa para resolver ecuaciones diferenciales de forma no analítica es lo que se conoce como métodos de integración numérica. En la actualidad existen diversos algoritmos que permiten encontrar la solución a partir de una condición inicial. Sin embargo, estos métodos no consideran las variaciones que pueden existir en el estado inicial del sistema, por ejemplo, perturbaciones o el conocimiento de más de un estado inicial.

La implementación de estas consideraciones conlleva desarrollos más complicados y tediosos debido a que para obtener la solución se debe ampliar la dimensión del sistema de ecuaciones diferenciales calculando las derivadas del campo vectorial. Del mismo modo existen campos vectoriales que están definidos numéricamente y no es posible calcular las ecuaciones variacionales a mano.

Lo que busca este Trabajo de Fin de Máster es el desarrollo de expresiones que expandan las condiciones iniciales por un entorno próximo a él. Es decir, dado los diferentes métodos de integración numérica que existen actualmente, se modificará el álgebra convencional de números reales ampliándola a un álgebra de polinomios.

La ventaja del método de Transporte de Jets es que proporciona además de la solución de la ecuación diferencial, las derivadas de la solución respecto a las condiciones iniciales. De este modo se implementarán algoritmos que estén enfocados a resolver problemas con un desarrollo más específico.

El uso de este procedimiento posee diversas aplicaciones, por ejemplo: se pueden obtener expansiones locales de aplicaciones Poincaré, permite analizar bifurcaciones de órbitas periódicas, propagar regiones del espacio fase o transportar funciones de probabilidad mediante el flujo de ecuaciones diferenciales.

1.2 Planteamiento del trabajo

El objetivo de este Trabajo de Fin de Máster es ampliar los criterios de solución de ecuaciones diferenciales implementando una aritmética de polinomios a los algoritmos de resolución que existen actualmente lo que se conoce como Transporte de Jets.

Para conseguir este objetivo se desarrollarán los algoritmos que permitan calcular las operaciones básicas con polinomios tales como suma, resta, producto, división, potencia, exponencial, logaritmo, seno y coseno. Una vez obtenidas estas expresiones para una y dos variables se implementarán en los algoritmos de integración numérica como Euler y la familia Runge-Kutta.

Posteriormente se validarán los resultados determinando el error de cada uno de los métodos, así como las soluciones de las ecuaciones variacionales y una representación esquemática del Transporte de Jets considerando un entorno a la condición inicial x_0 y la condición final x_t .

1.3 Estructura de la memoria

Este Trabajo de Fin de Máster consta de 4 partes: la primera trata el estado del arte el cual proporciona un contexto del tema en base a los estudios referentes a ecuaciones diferenciales, álgebra polinomial, ecuaciones variacionales y Transporte de Jets. Se mencionan los principales conceptos que se utilizan para explicar cada uno de los temas y subtemas.

En la segunda parte se presenta el objetivo general de la investigación que está enfocado en resolver ecuaciones variacionales a través del método de Transporte de Jets, los objetivos específicos y la metodología utilizada en este trabajo.

La tercera parte está enfocada en la investigación que consiste en el desarrollo del álgebra de polinomios para una y dos variables, la implementación de algoritmos en los métodos numéricos, la verificación de errores y orden de los métodos, la representación de las soluciones de las ecuaciones variacionales y los diagramas del Transporte de Jets.

Finalmente, en la cuarta parte, se presentan las conclusiones obtenidas en la investigación, así como las futuras líneas de trabajo donde se puede aplicar los desarrollos obtenidos en este trabajo.

2. Contexto y estado del arte

En este capítulo se resumen las aportaciones realizadas en los últimos años acerca del estudio de Transporte de Jets y sus aplicaciones. Se presenta la teoría de ecuaciones diferenciales y de métodos numéricos que son dos de los componentes principales para el desarrollo del método. También se presenta el desarrollo teórico del concepto de ecuaciones variacionales, Transporte de Jets y finalmente el estudio de los algoritmos relacionados con la aritmética de polinomios que constituye el otro componente esencial para desarrollar el método.

El estudio de Transporte de Jets en mecánica espacial ha sido tratado en [1] donde se analiza la propagación de incertidumbres no lineales en órbitas alrededor de la Tierra. En este trabajo el método es utilizado para propagar un entorno U alrededor de las condiciones iniciales de una órbita de referencia x_0 hacia un instante final x_t , de este modo es posible analizar cómo pequeñas variaciones en un instante inicial evolucionan a través del tiempo.

El desarrollo se basa en la implementación de una aritmética de polinomios multivariable que aplicado a la propagación de trayectorias permite calcular el riesgo de colisión con otros satélites, basura espacial y asteroides. Además, permite la detección de Estructuras Coherentes de Lagrange LCS en sistemas dinámicos.

El Transporte de Jets busca aplicar el siguiente polinomio [1]:

$$P_{t_0, x_0}(\xi) = x_0 + \xi = x_0 + (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$$

Una vez obtenida la expresión polinomial se puede utilizar cualquier método de integración numérica.

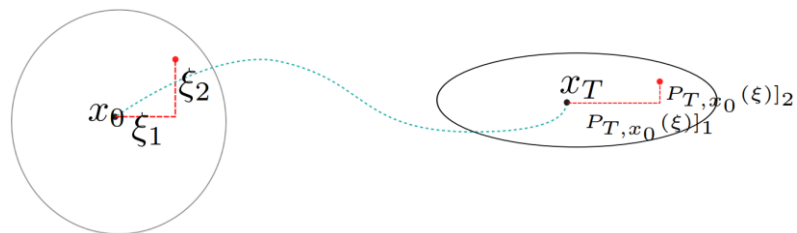


Figura 1. Esquema del método de Transporte de jets [1]

Otra aplicación al Transporte de Jets se estudia en [2] donde se analiza la trayectoria del asteroide Apophis cuyo movimiento representa un caso de Objetos Cercanos a la Tierra conocidos como NEOs por sus siglas en inglés.

El problema consiste en que para analizar el movimiento de sistemas dinámicos se requiere de estados iniciales que generalmente son desconocidos, a pesar de que la formulación de las leyes físicas del movimiento está dada. Por ejemplo, las leyes de Kepler sirven para describir el movimiento de cuerpos celestes.

En [2] el Transporte de Jets es utilizado para analizar los datos obtenidos de observaciones realizadas en asteroides como los cambios de posición y velocidad en función del tiempo.

Las ecuaciones del movimiento están dadas por [2]:

$$\ddot{X}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{11} \frac{Gm_j(X_j - X_i)}{r_{ji}^3}$$

$$\ddot{X}_a = \sum_{j=1}^{11} \frac{Gm_j(X_j - X_a)}{r_{ja}^3}$$

Para resolver este problema se utilizan aproximaciones de Taylor y métodos de integración numérica.

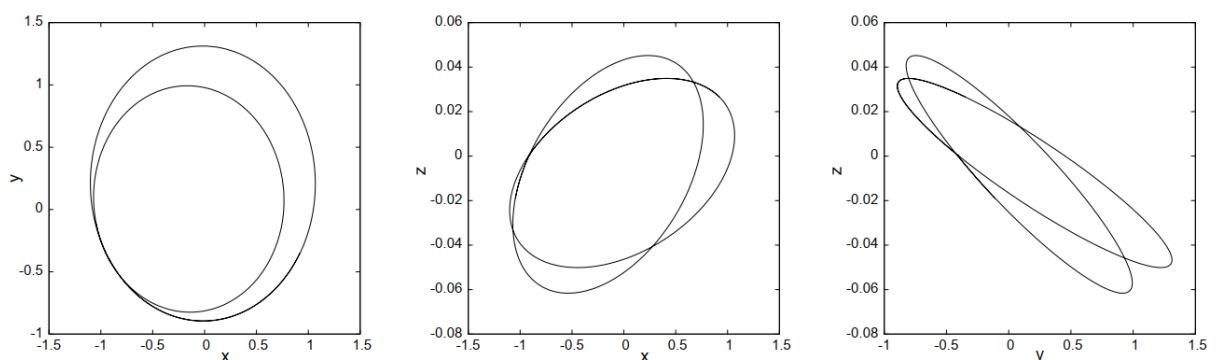


Figura 2. Proyección de las trayectorias del asteroide Apophis [2]

También se han desarrollado estudios a problemas de valor límite de dos puntos (TPBVP) y sus aplicaciones en el campo de la dinámica de naves espaciales y el diseño de maniobras de aerocaptura [3][4]. Para resolver problemas TPBVP se utilizan métodos de integración

numérica, sin embargo, estos no consideran el efecto de más de una condición inicial para lo cual se requiere desarrollar expansiones del flujo de las ecuaciones diferenciales aplicando desarrollos de Taylor.

La técnica utilizada se basa en la aplicación del método de Transporte de Jets para calcular las derivadas de las funciones, esto se obtiene sustituyendo el álgebra de números reales por un álgebra de polinomios.

La expresión general de un problema de valor inicial está dada por [3]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

El desarrollo consiste en modificar la condición inicial x_0 por un polinomio y aplicando cualquier método numérico se obtienen expresiones polinomiales en cada paso.

Estos algoritmos fueron aplicados para identificar órbitas alrededor del punto de libración del sistema Tierra-Luna y también para comprobar su utilidad en otros sistemas dinámicos.

El análisis de conjunciones orbitales ha sido presentado en [5][6] donde se determina mediante el método de Monte Carlo la probabilidad que tienen dos objetos espaciales de colisionar.

El desarrollo se basa en expansiones de Taylor de alto orden para aproximaciones de tiempo y distancia de objetos orbitantes con respecto a condiciones iniciales. Debido a la importancia que tiene el análisis de colisiones para las agencias espaciales es necesario determinar un indicador que mida las diferentes trayectorias que se calcula utilizando una integral multivariante.

El estudio implementa una modificación en el método de Monte Carlo al utilizar el Transporte de Jets en los algoritmos, tomando como condiciones iniciales la posición y la velocidad de dos objetos. La expresión que representa la probabilidad de colisión para las condiciones iniciales x_0^1 y x_0^2 está dada por la función de rendimiento [5]:

$$g(x_0^1, x_0^2) = D - d^*(x_0^1, x_0^2)$$

Una vez calculada la solución es posible determinar si dos objetos pueden colisionar o no.

Estudios más recientes acerca del Transporte de jets han sido realizados en [7] donde se estiman parámetros y estados no lineales para naves espaciales geoestacionarias, esta técnica es evaluada mediante simulaciones numéricas y comparada con los algoritmos de Kalman. Estas implementaciones se realizan en órbitas geosincrónicas, híbridas y cartesianas que permiten describir características físicas de las naves espaciales, así como información acerca de la posición de las estaciones.

De este modo se puede evidenciar que el Transporte de Jets se ha constituido como una herramienta de análisis de sistemas dinámicos sobre todo en mecánica espacial y en general en cualquier aplicación que incorpore perturbaciones en las condiciones iniciales de un sistema.

En la siguiente sección se estudia la teoría de ecuaciones diferenciales, los métodos numéricos de Euler, Heun, Runge-Kutta, sistemas de ecuaciones diferenciales y la teoría de existencia y unicidad en las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.1 Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una o más funciones desconocidas (variables dependientes) y una o más de sus derivadas con respecto a una o más variables independientes [8].

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse según el tipo como ecuaciones diferenciales ordinarias, si la función o funciones desconocidas dependen únicamente de una variable independiente por lo que sus derivadas serán ordinarias. En cambio, si la función o funciones dependen de más de una variable independiente se denominan ecuaciones diferenciales parciales y sus derivadas serán parciales [9].

El orden de una ecuación diferencial está dado por la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. El grado de la ecuación diferencial corresponde al grado de la derivada con mayor orden.

La representación de una ecuación diferencial ordinaria está dada por la expresión [8]:

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{[n-1]}, x^{[n]}) = 0$$

O puede ser descrita respecto su deriva:

$$x^{[n]} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{[n-1]})$$

Una ecuación diferencial se dice que es lineal si la variable dependiente y sus derivadas son de primer grado y los coeficientes de la variable dependiente y sus derivadas solo dependen de la variable independiente [8].

La expresión de una ecuación diferencial ordinaria lineal satisface la ecuación [9]:

$$a_n(t)x^{[n]} + a_{n-1}(t)x^{[n-1]} + \dots a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t)$$

Si una ecuación diferencial ordinaria no puede expresarse de esta forma se conoce como no lineal.

Hallar la solución de una ecuación diferencial es encontrar una expresión que satisfaga dicha ecuación diferencial, es decir, dada una función \emptyset definida en un intervalo I al sustituirla en la ecuación diferencial la reduce a una identidad.

Una solución de la forma $\emptyset(t) = x$ definida en un intervalo I , se llama explícita ya que la variable desconocida o dependiente está en función únicamente de la variable independiente y constantes. Una función de la forma $G(t, x) = 0$ es una solución implícita si define implícitamente a la función \emptyset en un intervalo I .

Los métodos analíticos para obtener soluciones se basan en el cálculo diferencial e integral, pero son escasas las ecuaciones diferenciales que pueden ser resueltas por estos métodos. Dentro de estos se tienen por ejemplo la solución por separación de variables, reducción a variables separadas, sustitución lineal, reducción lineal y transformaciones exactas [8].

Otro tipo de métodos para encontrar la solución de una ecuación diferencial son los cualitativos que se basan en procedimientos geométricos para obtener campos de direcciones o campos de pendientes [10]. A partir de una función $\dot{x} = f(t, x)$, en cada punto (t, x) se puede graficar una pequeña pendiente y una vez obtenidas suficientes marcas de pendiente se visualiza las soluciones en el campo de direcciones.

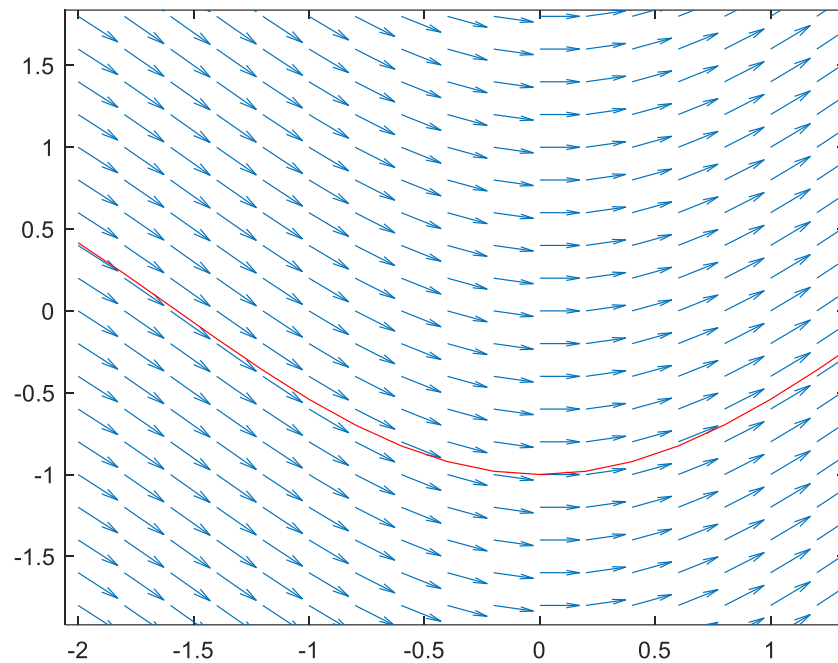


Figura 3. Campo de direcciones de la solución a la ecuación diferencial $\dot{x} = \sin(t)$ (Fuente: elaboración propia)

La utilidad de analizar los campos de direcciones radica en el análisis de las ecuaciones variacionales las cuales representan un flujo cercano a la solución de una ecuación diferencial.

Generalmente una ecuación diferencial tiene un número infinito de soluciones, es decir, se tiene una familia de soluciones que depende de una constante arbitraria. En los casos en que la solución no dependa de parámetros arbitrarios se tiene la solución particular.

Se conoce como problemas de valor inicial a aquellas ecuaciones diferenciales dónde se conocen las condiciones de la variable dependiente y sus derivadas para un valor de la variable independiente, este tipo de problema son conocidos como problemas de Cauchy. En cambio, si se conocen dos o más valores de la variable independiente se trata de un problema de valor de frontera [9].

Cuando se emplean ecuaciones diferenciales para modelar fenómenos complejos, en su mayoría, no es posible obtener una solución de forma explícita o implícita y se deben obtener aproximaciones. Los procedimientos para obtener tales aproximaciones se conocen como métodos numéricos [11].

Este tipo de procedimientos son los que constituyen la base para el método de Transporte de Jets debido que se trata de un método numérico que incorpora en sus algoritmos un álgebra de polinomios.

2.1.1. Método de Euler

Dado un problema de valor inicial: $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, el método de Euler establece una aproximación a un punto cercano a la solución basándose en la pendiente de la recta tangente evaluada en un punto (t, x) a partir de la condición inicial (t_0, x_0) . Para eso se divide el intervalo entre t_0 y t_f en N subintervalos de paso h , de manera que se obtiene un conjunto discreto de $N+1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_n en un intervalo $[x_0, b]$. La expresión de este método es la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n)$$

$$h = \frac{b - x_0}{N}$$

Este método no se utiliza en la práctica ya que la acumulación de error a lo largo de la solución es muy grande.

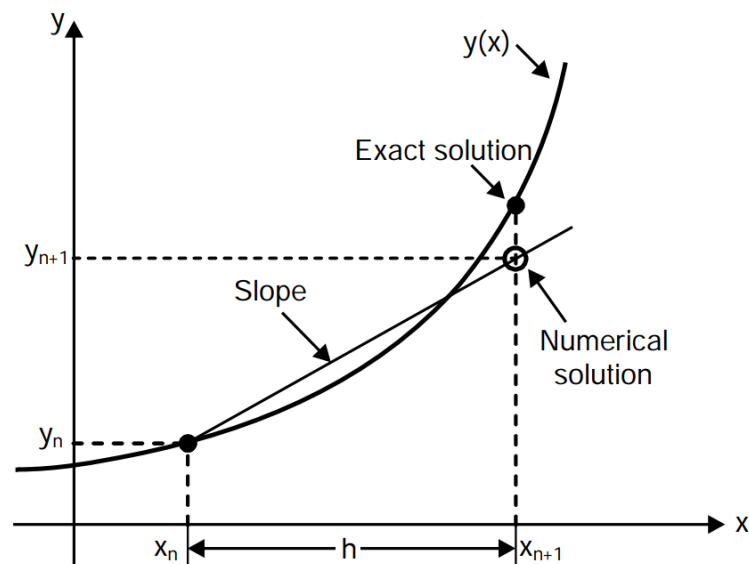


Figura 4. Método explícito de Euler [12]

2.1.2. Método de Heun

El método de Heun [12] utiliza una modificación en el cálculo de la pendiente en cada paso. A diferencia del método de Euler que utiliza una única pendiente entre cada par de puntos del intervalo (t_n, x_n) y (t_{n+1}, x_{n+1}) , el método de Heun utiliza un promedio entre las pendiente

calculada al inicio del intervalo y la estimación de la pendiente al final del intervalo. Este método puede escribirse de la siguiente forma [12]:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2)$$

Donde:

$$k_1 = f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = f(t_n + h, x_n + h \cdot k_1)$$

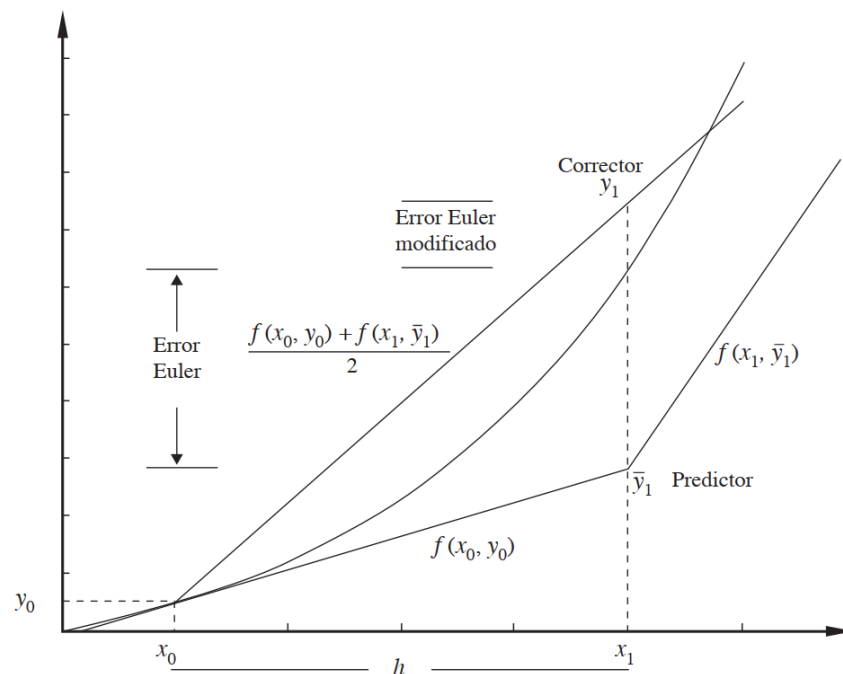


Figura 5. Método de Heun (Euler Modificado) [13]

2.1.3. Método de Runge-Kutta de orden 4

Los métodos de Runge-Kutta son una familia de técnicas numéricas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, estos métodos son clasificados de acuerdo a su orden el cual identifica el número de puntos dentro de un intervalo que son utilizados para encontrar el valor de la pendiente [12]. El método Runge-Kutta 4 es uno de los más utilizados y usa cuatro puntos para calcular la pendiente. Tiene la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde:

$$k_1 = h \cdot f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_n + h, x_n + k_3)$$

Para determinar el valor de x_{n+1} se utiliza el valor de x_n más el producto del paso h por una pendiente. Esta se obtiene del promedio ponderado de las pendientes en el cual la pendiente k_1 se utiliza para calcular la pendiente k_2 , la pendiente k_2 se utiliza para calcular la pendiente k_3 y esta para calcular la pendiente k_4 .

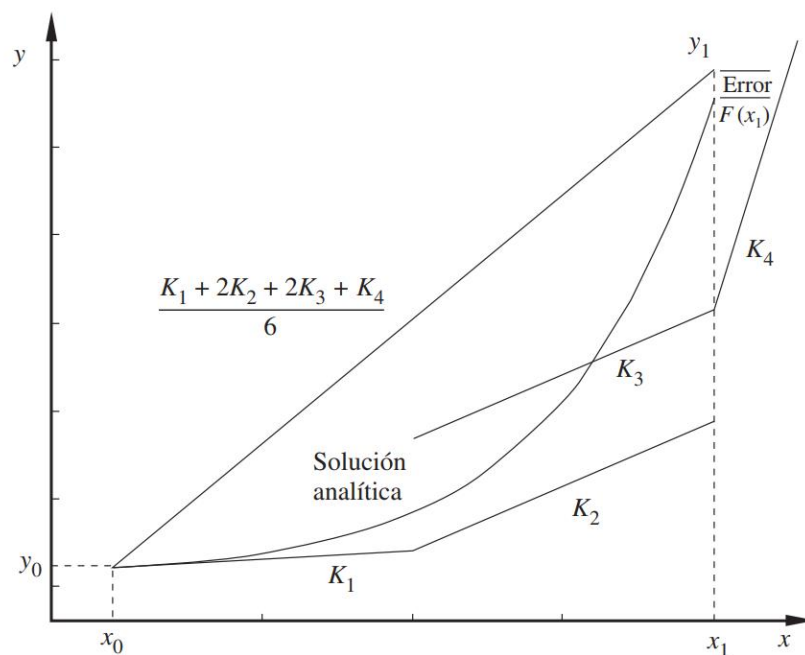


Figura 6. Método de Runge-Kutta de cuarto orden [13]

2.1.4. Análisis de errores en los métodos numéricos

Las aproximaciones numéricas en las soluciones a las ecuaciones diferenciales conllevan errores de diversos tipos. En primera instancia se pueden reducir aumentando el tamaño del paso, pero esto ocasiona mayores costes computacionales.

El error de redondeo se produce debido a que las operaciones realizadas en el cálculo numérico no se pueden registrar con una cantidad infinita de números lo que se convierte en

una pérdida de exactitud. Para minimizar este error se puede reducir el número de operaciones, es decir realizar una optimización de los algoritmos.

El error de truncamiento se produce al utilizar aproximaciones en las fórmulas matemáticas, por ejemplo, para determinar el error en los métodos numéricos se aproxima la solución utilizando desarrollos de la serie de Taylor:

$$x(n) = x(a) + \frac{x'(a)}{1!}(t-a) + \frac{x''(a)}{2!}(t-a)^2 + \dots + \frac{x^{[n]}(a)}{n!}(t-a)^n$$

El polinomio de Taylor para el método de Euler utiliza una aproximación de la primera derivada y se expresa de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n) + O(h^2)$$

Donde $O(h^2)$ representa los términos de orden mayor o igual a dos lo que se conoce como error de truncamiento del método de Euler [8].

El método de Runge-Kutta de orden 4 tiene un error local de $O(h^5)$ y un error global $O(h^4)$.

Una forma de reducir el error de truncamiento es disminuir el tamaño del paso h , sin embargo, puede significar un aumento en el error de redondeo, de este modo se debe tener un equilibrio al momento de optimizar los métodos.

2.1.5. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

En muchas aplicaciones se requiere estudiar fenómenos descritos por dos o más funciones desconocidas, en estos casos se habla de sistemas de ecuaciones. Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias representa la relación entre varias funciones desconocidas y sus primeras derivadas con respecto a una variable independiente [8].

Los sistemas donde el número de incógnitas corresponde al número de ecuaciones están representados por la siguiente expresión [14]:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga solución se requiere conocer n condiciones iniciales. El objetivo es encontrar n funciones x_1, x_2, \dots, x_n que satisfagan el sistema junto con las condiciones iniciales.

Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden son generalizaciones de los métodos para una sola ecuación diferencial ordinaria.

2.1.6. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n equivale a un sistema de n ecuaciones ordinarias de primer orden, para lo cual se deben definir nuevas variables dependientes como las derivadas sucesivas de x , tales que $x_1'(t) = x_2, x_2'(t) = x_3, \dots, x_n'(t) = x_{n+1}$.

De este modo una ecuación diferencial ordinaria de orden n se puede expresar como [14]:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2 \\ x_2'(t) = x_3 \\ \vdots \\ x_n'(t) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

La solución obtenida a través de esta sustitución conlleva a la función incógnita $x(t)$ así como a sus derivadas.

2.1.7. Existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial

Dado un problema de valor inicial de la forma $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ con la condiciones inicial $x(t_0) = x_0$ se debe verificar si la solución existe y es única. En esta ecuación \dot{x} representa la derivada con respecto a la variable independiente t , x representa el vector de las variables de estado y λ representa el vector de parámetros [15].

La solución a este tipo de problema está dada por la expresión $\phi(t_0) = x_0$ y está relacionada con la regularidad de la función que define la ecuación diferencial.

Se han realizado varios estudios que permiten demostrar la existencia y unicidad de las soluciones a problemas de valor inicial, por ejemplo en [15] se establece que dado los conjuntos abiertos $J \subseteq \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^n, \Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ así como una función $f: J \times U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ y las condiciones iniciales $(t_0, x_0, \lambda_0) \in J_0 \times U_0 \times \Lambda_0$, existe una función $\phi: J_0 \times J_0 \times U_0 \times \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cada punto $(t_1, x_1, \lambda_1) \in J_0 \times U_0 \times \Lambda_0$, la función $t \rightarrow \phi(t, t_1, x_1, \lambda_1)$ es la única solución definida en J_0 bajo las condiciones iniciales $x(t_1) = x_1$.

Otra forma de analizar la existencia es en base al teorema estándar [10] que establece que dado un problema de valor inicial de la forma $\dot{x} = f(t, x)$ con la condición inicial $x(t_0) = x_0$, si la función $f(t, y)$ es continua en un rectángulo $\{(t, x) | a < t < b, c < x < d\}$ y si (t_0, x_0) pertenece al rectángulo, existe una función $x(t)$ definida en el intervalo $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$, con $\epsilon > 0$, que es solución de la ecuación diferencial.

A pesar de que una función $f(t, x)$ sea continua, no garantiza la unicidad de las soluciones a un problema de Cauchy. Una forma de analizar este problema es que la función cumpla la condición de Lipschitz la cual establece que dado un subconjunto D en \mathbb{R}^{n+1} y una función $f(t, x), f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, se denomina f un función Lipschitz si existen una constante $L \geq 0$, tal que si (t, x_1) y (t, x_2) pertenecen a D , se verifica que:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

De este forma existe una única solución al problema $x(t)$ definida en el intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

Una vez obtenida la solución a un problema de valor inicial es de interés saber si esta solución es única, de no ser así, el análisis de todas las posibles soluciones llevaría a diferentes interpretaciones. El teorema de unicidad [10] establece que dada la función $f(t, x)$ y la derivada parcial de la función con respecto a x , $\frac{\partial f}{\partial x}$ en un rectángulo $\{(t, x) | a < t < b, c < x < d\}$, si (t_0, x_0) pertenece al rectángulo y las funciones $x_1(t), x_2(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial para todo t en el intervalo $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$, con $\epsilon > 0$, se tiene que $x_1(t) = x_2(t)$, por lo tanto la solución es única.

El teorema de unicidad garantiza que dos soluciones $x_1(t), x_2(t)$ sean iguales para el mismo problema de valor inicial en un intervalo t donde la función está definida.

2.1.8. Dependencia de soluciones para problemas de valor inicial

Al igual que la existencia y unicidad, es de interés saber cómo la solución de una ecuación diferencial depende de los datos y de los parámetros.

El teorema de dependencia continua [15] establece que si se cumple el teorema de existencia y unicidad, la solución de la ecuación diferencial $\phi: J_0 \times J_0 \times U_0 \times \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave y si la función f es infinitamente diferenciable, entonces ϕ también lo será.

Cuando un problema de valor inicial o de Cauchy está sujeto a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, estas no generan grandes cambios en las soluciones para un tiempo t finito, en otras palabras, dos ecuaciones próximas representan modelos poco distorsionados.

El teorema de dependencia con respecto a las condiciones iniciales establece que dada una función f continua en (t, x) que cumple la condición de Lipschitz para un problema del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_2 \end{cases}$$

Donde x_1 y x_2 representan las soluciones exactas definidas en un intervalo $|t - t_0| \leq h$ con $|x_1 - x_2| = \delta$ y con una constante k en un dominio D , entonces: $|x_1 - x_2| = \delta \cdot e^{kh}$ significa que la solución tiene dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales.

2.2 Ecuaciones variacionales

El estudio del movimiento de los planetas a través de sus órbitas y la predicción de la posición de los planetas ha sido uno de los problemas más antiguos de la astronomía. Se han realizado varios estudios como los presentados en [16] donde el uso del método de Transporte de Jets permite obtener las derivadas de las ecuaciones variacionales aplicado a la detección de Estructuras Coherentes de Lagrange. Estas estructuras permiten distinguir el comportamiento en distintas regiones del espacio fase en función de las órbitas presentes. Así, las ecuaciones variacionales permiten determinar los lugares donde las direcciones normales se expanden.

En los trabajos realizados por [17] se realiza una implementación del método de Wisdom-Holman para integraciones orbitales a largo plazo de sistemas planetarios. El método se utiliza para resolver numéricamente sistemas casi integrables teniendo en cuenta la capacidad de utilizar pasos largos de tiempo. Las ecuaciones variacionales son utilizadas para determinar

si las órbitas son caóticas mediante el factor de crecimiento exponencial medio de órbitas cercanas MEGNO, y también para calcular la escala de tiempo de Lyapunov.

El estudio de las propagaciones de un conjunto de incertidumbres en la dinámica orbital realizados en [18] utiliza el método de Transporte de Jets para determinar trayectorias de colisión de cuerpos celestes sin necesidad de integrar las ecuaciones variacionales asociadas.

El análisis de los sistemas dinámicos se utiliza para determinar las trayectorias de cuerpos orbitantes para lo cual se utilizan ecuaciones variacionales de primer orden. En [19] se extiende este concepto a órdenes superiores mediante la derivación explícita de las ecuaciones que caracterizan el movimiento.

Las estructuras de sistemas multidimensionales en [20] se utilizan para investigar componentes estocásticos del espacio fase. Permiten obtener imágenes de estructuras de resonancia, trayectorias de órbitas periódicas estables e inestables, y el estado caótico del sistema.

Una forma de estudiar el desorden presente en sistemas dinámicos es mediante el exponente de Lyapunov el cual mide la tasa de divergencia entre las trayectorias cercanas en el espacio fase [21]. En este trabajo las ecuaciones variacionales se utilizan para calcular este exponente mediante dos técnicas, el método variacional y el método de dos partículas analizando la distancia que existe entre dos trayectorias cercanas.

Dada una ecuación diferencial de la forma $\dot{x} = f(x, t)$, con solución $\phi(t, x_0)$, que satisface $\dot{\phi}(t, x_0) = f(\phi(t, x_0), t)$ para una condición inicial $\phi(0) = x_0$, el objetivo es expandir la condición inicial a condiciones cercanas a esta, las cuales generan otra ecuación diferencial $\psi(t)$. Una herramienta que predice esta nueva solución es lo que se conoce como ecuación variacional.

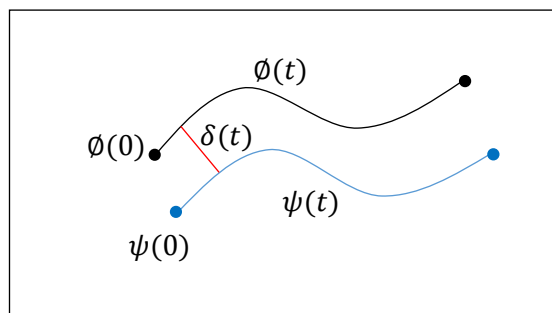


Figura 7. Representa del concepto de ecuación variacional. (Fuente: elaboración propia)

En la Figura 7, $\delta(t)$ representa la diferencia entre las soluciones $\phi(t)$ y $\psi(t)$, siendo $\delta(0)$ la diferencia entre las condiciones iniciales. La ecuación diferencial $\dot{\delta}(t)$ representa la evolución de esta diferencia.

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \psi(t) - \phi(t) \\ \dot{\delta}(t) &= \dot{\psi}(t) - \dot{\phi}(t) = f(\psi, t) - f(\phi, t) = f(\phi + \delta, t) - f(\phi, t)\end{aligned}$$

Aplicando expansiones de Taylor a esta expresión y considerando que $\delta(t)$ es una función del tiempo y esta es pequeña, se puede ignorar los términos de alto orden:

$$\dot{\delta}(t) \approx Df(\phi, t)\delta$$

La ecuación diferencial $\dot{\delta}(t)$ se refiere a la ecuación variacional de $\dot{x}(t)$ con respecto a la solución $\phi(t)$. Es decir, una ecuación variacional describe la evolución de la derivada de la solución de una ecuación diferencial y se origina al realizar las derivadas parciales [15].

La solución de las ecuaciones variacionales está dada por la matriz jacobiana del flujo de la ecuación diferencial respecto a las condiciones iniciales.

Dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$, con $a \in A$ y $f: A \rightarrow \mathbb{R}^M$ un campo vectorial diferenciable, se define la matriz jacobiana de f en un punto a a la aplicación $Df(a) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M) = Jf(a)$.

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}$$

Para ilustrar como son representadas las ecuaciones variacionales se propone un ejemplo [22] utilizando la ecuación de un sistema Hénon - Heiles:

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + (x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

Las ecuaciones hamiltonianas del movimiento son:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x \\ \dot{y} &= p_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= -x - 2xy \\ \dot{p}_y &= y^2 - x^2 - y\end{aligned}$$

Para este grupo de ecuaciones, las ecuaciones variacionales son:

$$\begin{aligned}\dot{\delta x} &= \delta p_x \\ \dot{\delta y} &= \delta p_y \\ \dot{\delta p}_x &= -(1 + 2y)\delta x - 2x\delta y \\ \dot{\delta p}_y &= -2x\delta x + (- + 2y)\delta y\end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se puede utilizar cualquier método de integración para resolver la ecuación principal y las ecuaciones variacionales.

2.3 Transporte de Jets

La solución numérica de una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales en los que se conocen las condiciones en un instante inicial, se basan en obtener mediante métodos numéricos iterativos la solución aproximada $\varphi(t, t_0, x_0)$ en un intervalo determinado. El término jet se refiere al polinomio truncado de Taylor de una función específica. El Transporte de Jets es una herramienta que permite transportar el jet de una función desde un instante inicial a un instante final [1].

El Transporte de Jets se basa en considerar un entorno U alrededor de la condición inicial x_0 para calcular la solución $\varphi(t, t_0, U_0)$ a diferencia de los métodos numéricos que encuentran la solución solo para la condición inicial x_0 .

Para propagar este entorno se utiliza expansiones de polinomios para aproximar el flujo asociado a la ecuación diferencial en un instante de referencia. Una vez obtenida la expresión polinomial se puede aplicar un método de integración numérica (Euler, Heun, Runge-Kutta) para obtener la solución de las ecuaciones variacionales asociadas a la ecuación diferencial ordinaria sin escribirlas explícitamente [1].

La ventaja del método de Transporte de Jet es que permite obtener esta solución sin realizar el cálculo explícito de las ecuaciones variacionales que implicaría la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales y por tanto un gran coste computacional.

El método de Transporte de Jets consiste en modificar la condición inicial por un polinomio $P_{t_0, x_0}(\xi) = x_0 + \xi$, donde ξ representa la propagación del entorno con respecto a x_0 [23] [16].

El polinomio resultante se extiende al siguiente paso y se continúa iterando hasta encontrar la solución en un instante final x_t .

En Figura 8, se presenta la idea esquemática de Transporte de Jets [1].

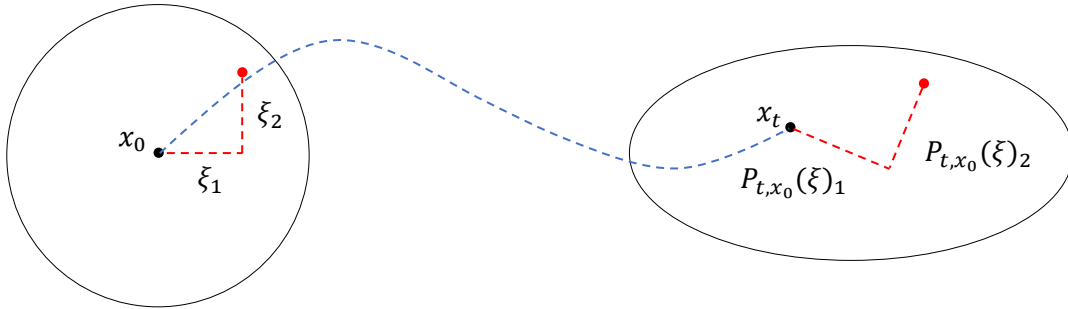


Figura 8. Diagrama esquemático de la idea del Transporte de Jets. [1]

El Transporte de Jets requiere básicamente dos componentes para ser implementado. En primer lugar, un álgebra de polinomios que contendrá todas las funciones básicas y en segundo lugar un método de integración numérica que implementará el álgebra de polinomios.

A continuación, se presenta un ejemplo [23] que demuestra el uso del Transporte de Jets utilizando la función $f(x) = (y, x)$ con el método de Euler.

En cada paso del algoritmo la solución está dada por la expresión:

$$x_{n+1} = x_n + h f(x_n)$$

Al reemplazar la condición inicial $x_0 = (x_0, y_0)$ por un polinomio se obtiene:

$$P_{0, x_0}(\xi_1, \xi_2) = (x_0 + \xi_1, y_0 + \xi_2)$$

Aplicando el método de Euler, el primer paso está dado por:

$$\begin{aligned} x_1 &= P_{h, x_0}(\xi) = P_{0, x_0}(\xi) + hf(P_{0, x_0}(\xi)) \\ x_1 &= \begin{pmatrix} x_0 + h y_0 \\ y_0 - h x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En esta expresión se observa que el primer término del polinomio corresponde a la solución aproximada mediante el método de Euler y las demás componentes del polinomio representan la solución de la ecuación variacional.

La expresión para el siguiente paso del algoritmo de Euler tiene la siguiente forma:

$$P_{2h,x_0}(\xi) = \begin{pmatrix} x_0 + 2hy_0 + h^2x_0 \\ y_0 - 2hx_0 - h^2y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - h^2 & 2h \\ 2h & 1 - h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo se obtiene la solución aproximada a la ecuación diferencial dada por el primer término del polinomio, y también se obtienen las soluciones de la ecuación variacional.

En este ejemplo se utiliza el método de Euler, pero cualquier otro método numérico puede ser utilizado, por ejemplo, con el método de Runge-Kutta de orden 4, la expresión para el primer paso es:

$$P_{0,x_0}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3}h^2 + \frac{1}{24}h^4 & \frac{2}{3}h - \frac{1}{12}h^3 \\ -\frac{2}{3}h + \frac{1}{12}h^3 & 1 - \frac{1}{3}h^2 + \frac{1}{24}h^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3}h^2 + \frac{1}{24}h^4 & \frac{2}{3}h - \frac{1}{12}h^3 \\ -\frac{2}{3}h + \frac{1}{12}h^3 & 1 - \frac{1}{3}h^2 + \frac{1}{24}h^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

2.4 Álgebra de polinomios

Uno de los componentes principales para aplicar el método de Transporte de Jets es el álgebra de polinomios. Esta sección se destina a presentar las fórmulas utilizadas para el manejo de polinomios las cuales han sido tratadas en [24] e implementadas en trabajos de integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias usando el método de Taylor [25]. En la primera parte se desarrollan las funciones para una variable que incluyen las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencia, exponencial, logaritmo, senos y cosenos, posteriormente se desarrolla el álgebra de polinomios para dos variables.

Un polinomio es una expresión de la forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

con $0 \leq n \in \mathbb{Z}$

El término a_i se denomina el coeficiente del polinomio, y n representa el grado [26].

Dado dos polinomios de grado n :

$$b(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad c(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

Se define la suma de polinomios como:

$$a(x) = b(x) \pm c(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (b_i \pm c_i) x^i$$

$$a(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

$$a(x) = (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \dots + (b_n + c_n)x^n$$

Cabe indicar que la suma infinita de términos se trunca hasta cierto grado n .

El producto de un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por un polinomio b_i se define como:

$$a(x) = \lambda b(x)$$

$$a(x) = \lambda(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n)$$

El producto de dos polinomios $b(x)$ y $c(x)$ se define como $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ donde:

$$a_n = \sum_{i=0}^n b_{n-i} c_i$$

Para la división, un polinomio $b(x)$ divide a otro polinomio $c(x)$, o $b(x)$ es factor de $c(x)$ si existe un polinomio $a(x)$ tal que $a(x) = b(x) c(x)$.

Aplicando la fórmula del producto se puede escribir la expresión anterior como:

$$a_n = \sum_{i=0}^n b_{n-i} c_i = b_n c_0 + \sum_{i=1}^n b_{n-i} c_i$$

Donde:

$$b_n = \frac{1}{c_0} \left[a_n - \sum_{i=1}^n b_{n-i} c_i \right]$$

La potencia de polinomios se expresa como $a(x) = [b(x)]^\alpha$, aplicando logaritmos y derivando ambos términos se tiene:

$$a'(x) b(x) = \alpha a(x) b'(x)$$

Desarrollando la fórmula anterior, se obtiene la expresión de la potencia de un polinomio:

$$a_n = \frac{1}{nb_0} \sum_{i=0}^{n-1} ((n-i)\alpha - i) b_{n-i} a_i$$

Para calcular la exponencial de un polinomio $a(x) = e^{b(x)}$, se utiliza logaritmos y se deriva:

$$a'(x) = a(x) b'(x)$$

Al desarrollar la expresión anterior, se obtiene el algoritmo para calcular la exponencial de un polinomio:

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) a_n b_{n-i}$$

El logaritmo de un polinomio puede expresarse como: $a(x) = \log(b(x))$, y derivando ambos lados de la expresión se tiene:

$$a'(x)b(x) = b'(x)$$

Una vez desarrolla la fórmula anterior, se obtiene la expresión del logaritmo de un polinomio:

$$a_n = \frac{1}{b_0} \left[b_n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) b_n a_{n-j} \right]$$

Las expresiones para calcular el seno $b_n = \sin(c_n)$, y el coseno $a_n = \cos(c_n)$ de una función están dadas por:

$$a_n = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j c_{n-j}(t) b_n$$

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j c_{n-j}(t) a_n$$

De la misma forma se han desarrollado expresiones que permiten calcular la n -ésima derivada de $a(t)$ para un instante de tiempo t [25].

$$1. Si $a(t) = b(t) \pm c(t)$, entonces $a^{[n]}(t) = b^{[n]}(t) \pm c^{[n]}(t)$$$

$$2. Si $a(t) = b(t) c(t)$, entonces $a^{[n]}(t) = \sum_{j=0}^n b^{[n-j]}(t) c^{[j]}(t)$$$

$$3. Si $a(t) = \frac{b(t)}{c(t)}$, entonces $a^{[n]}(t) = \frac{1}{c^{[0]}(t)} [b^{[n]}(t) - \sum_{j=1}^n c^{[j]}(t) a^{[n-j]}(t)]$$$

$$4. Si $a(t) = b(t)^\alpha$, entonces $a^{[n]}(t) = \frac{1}{nb^{[0]}(t)} \sum_{j=0}^{n-1} ((n-j)\alpha - j) b^{[n-j]}(t) a^{[j]}(t)$$$

$$5. Si $a(t) = e^{b(t)}$, entonces $a^{[n]}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) a^{[j]}(t) b^{[n-j]}(t)$$$

$$6. Si $a(t) = \ln b(t)$, entonces $a^{[n]}(t) = \frac{1}{b^{[0]}(t)} \left[b^{[n]}(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) b^{[j]}(t) a^{[n-j]}(t) \right]$$$

$$7. Si $a(t) = \cos c(t)$ y $b(t) = \sin c(t)$, entonces$$

$$a^{[n]}(t) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j b^{[n-j]}(t) c^{[j]}(t)$$

$$b^{[n]}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j a^{[n-j]}(t) c^{[j]}(t)$$

Para demostrar el uso de estas fórmulas se propone un ejemplo [25] utilizando la ecuación del oscilador de Van der Pol, que se utiliza en sistemas dinámicos con amortiguamiento y obedece a una ecuación diferencial de segundo grado de la siguiente forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Donde x es la posición, μ es un parámetro que indica la no linealidad y el amortiguamiento.

Escribiendo la ecuación en forma bidimensional se tiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (1 - x^2)y - x \end{cases}$$

Descomponiendo las dos ecuaciones diferenciales en operaciones más simples se tiene el sistema:

$$\begin{cases} u_1 = x \\ u_2 = y \\ u_3 = u_1 u_2 \\ u_4 = 1 - u_3 \\ u_5 = u_4 u_2 \\ u_6 = u_5 - u_1 \\ x' = u_2 \\ y' = u_6 \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas anteriormente descritas, se tiene:

$$\begin{aligned} u_1^{[n]}(t) &= x^{[n]}(t) \\ u_2^{[n]}(t) &= y^{[n]}(t) \\ u_3^{[n]}(t) &= \sum_{i=0}^n u_1^{[n-i]}(t) u_1^{[i]}(t) \\ u_4^{[n]}(t) &= -u_3^{[n]}(t) \\ u_5^{[n]}(t) &= \sum_{i=0}^n u_4^{[n-i]}(t) u_2^{[i]}(t) \\ u_6^{[n]}(t) &= u_5^{[n]}(t) - u_1^{[n]}(t) \\ x^{[n+1]}(t) &= \frac{1}{n+1} u_2^{[n]}(t) \\ y^{[n+1]}(t) &= \frac{1}{n+1} u_6^{[n]}(t) \end{aligned}$$

Desarrollando las expresiones para un cierto grado del polinomio se obtiene la solución de la ecuación diferencial para un instante dado.

La expresión utilizada para trabajar con polinomios de dos variables tiene la siguiente forma:

$$Z(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i C_{ij} x^{i-j} y^j$$

Donde C_{ij} representa el coeficiente de cada término.

Para un polinomio de grado uno con dos variables se tiene la siguiente expresión:

$$Z(x, y) = C_{00}x^0y^0 + C_{10}x^1y^0 + C_{11}x^0y^1 = C_{00} + C_{10}x + C_{11}y$$

3. Objetivos concretos y metodología de trabajo

En este capítulo se presenta el objetivo general de la investigación, así como los objetivos específicos.

3.1. Objetivo general

El objetivo general de esta investigación es generar un método para integrar numéricamente ecuaciones variacionales a través del método de Transporte de Jets.

Con este objetivo, se propone la creación de algoritmos utilizando la herramienta Matlab que permita resolver ecuaciones variacionales.

3.2. Objetivos específicos

Para conseguir el objetivo general se plantean una serie de objetivos específicos:

Desarrollar algoritmos que permitan calcular ecuaciones diferenciales mediante métodos numéricos.

Desarrollar un álgebra de polinomios para acoplarlos a los diferentes métodos de integración numérica.

Analizar el comportamiento del vector resultante al calcular la solución de las ecuaciones diferenciales.

3.2. Metodología del trabajo

El objetivo a alcanzar es la adaptación de los métodos de integración numérica existentes reemplazando la aritmética de números reales por un álgebra de polinomios.

Se empezará modificando el método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Una vez obtenido el algoritmo se realizarán pruebas comparando con las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales, esto permitirá verificar el error del orden

del método numérico. A continuación, se verificará la solución de las ecuaciones variacionales comparándola con las derivadas de la solución de la ecuación diferencial. Posteriormente se procederá a modificar el método de Runge-Kutta de cuarto orden adaptando el álgebra de polinomios a los algoritmos del método.

Una vez realizado la programación para una variable se implementarán los algoritmos para dos variables. Para esto se modificará el álgebra de polinomios descrita en el capítulo dos utilizando un polinomio lineal de dos variables.

Este desarrollo permite analizar las perturbaciones que existen en el estado inicial de un sistema y su evolución a través del tiempo.

En la Figura 9, se presenta el esquema de la metodología de este Trabajo de Fin de Máster.

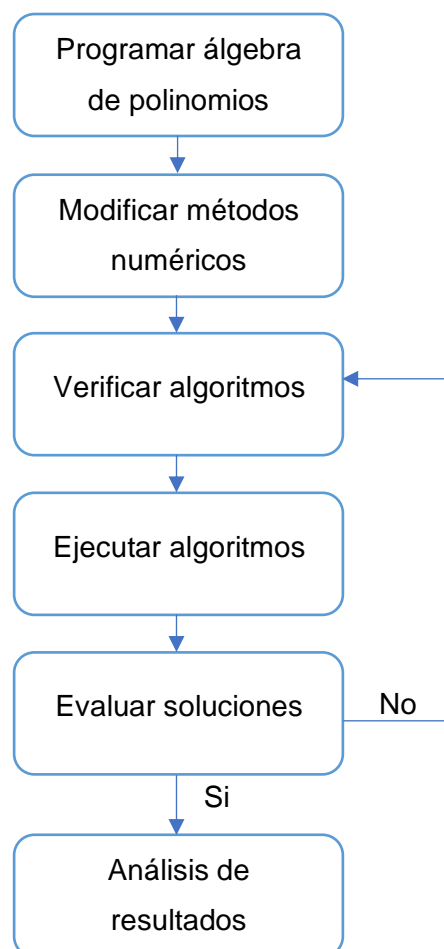


Figura 9. Metodología de trabajo. (Fuente: elaboración propia)

4. Desarrollo específico de la contribución

En este capítulo se explica el procedimiento realizado para la implementación del método de Transporte de Jets.

Se empezará desarrollando los algoritmos del álgebra de polinomios de una y dos variables para luego incorporarlos en los métodos numéricos de integración y posteriormente se evaluarán mediante la resolución de problemas.

4.1 Transporte de Jets para polinomios de una variable

4.1.1. Método de Euler modificado para Transporte de Jets

Para implementar el álgebra de polinomios, la condición inicial $x(t_0) = x_0$, se modifica por la expresión $j_0 = x_0 + y$, donde j_0 es la condición inicial del jet, de ese modo se implementa una variable y que representa la componente polinomial. El intervalo de análisis del método de Euler se mantiene, así como el paso h en cada iteración.

La expresión para calcular el valor aproximado de cada componente en el algoritmo de Euler está dada por la expresión:

$$x_{n+1} + a_{n+1}y = x_n + a_n + h \cdot f(t_n, x_n + a_n y)$$

Donde a_n representa la componente lineal del polinomio cuyo valor inicial a_0 es igual a 1.

De este modo, en cada paso se evalúa un polinomio en lugar de un solo número.

En cada paso la variable x y la variable a son almacenadas en un vector y no se pueden sumar ya que son independientes. Así, el vector resultante es de 2 columnas y $N+1$ filas, una destinada para la solución de la ecuación diferencial y otra para almacenar la componente lineal del polinomio.

El primer paso del método de Euler utiliza las condiciones iniciales x_0 y a_0 , sin embargo, algunos programas computacionales como Matlab trabajan como primera posición el número 1, por tanto, los algoritmos se modifican tomando en cuenta esta consideración, así las condiciones iniciales son: $x_1 = x_0$ y $a_1 = 1$.

Para el primer paso del algoritmo se tiene la siguiente expresión:

$$x_2 + a_2 y = x_1 + a_1 + h \cdot f(t_1, x_1 + a_1 y)$$

Para el segundo paso se tiene:

$$x_3 + a_3y = x_2 + a_2 + h \cdot f(t_2, x_2 + a_2)y$$

Una vez que se ha iterado hasta el límite del intervalo se obtiene un vector con la solución numérica y la solución del polinomio de primer grado. Este término representa la derivada de la solución de la ecuación diferencial respecto a condiciones iniciales $\frac{\partial x(t)}{\partial x_0}$.

Para expandir la condición inicial x_0 a un entorno U considerando un polinomio de segundo grado, se utiliza la expresión $x_n + a_ny + b_ny^2$, donde b_n representa el coeficiente de la componente de segundo grado del polinomio.

Para el primer paso del algoritmo de Euler se tiene la expresión:

$$x_2 + a_2y = x_1 + a_1 + h \cdot f(t_1, x_1 + a_1y + b_1y^2)$$

Las condiciones iniciales son $a_1 = 1$, $b_1 = 0$

De este modo en cada paso se almacena un vector de 3 columnas. En la primera columna se almacena la solución aproximada de la ecuación diferencial, en la segunda columna la primera componente del polinomio y en la tercera columna la componente de segundo orden del polinomio. Esta última componente del vector representa la segunda derivada de la solución con respecto a condiciones iniciales $\frac{\partial^2 x(t)}{\partial x_0 \partial x_0}$ dividido entre dos.

Para demostrar el algoritmo de Euler modificado mediante Transporte de Jets se realiza un ejemplo con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = e^x$$

Sujeto a la condición inicial $x(t_0) = x_0 = 1$.

La función con la cual se evalúa el polinomio es la función exponencial adaptada al algoritmo de Euler, de este modo el polinomio inicial tiene la forma del vector $[x_0 \ a_0 \ b_0]$ y al evaluarlo se obtiene en cada iteración el valor correspondiente a la solución aproximada, a la primera y la segunda derivada de la solución.

Debido a que se dispone de la solución exacta de la ecuación diferencial $x(t) = -\ln(e^{-x_0} - t + t_0)$, se calcula la primera y segunda derivada con respecto a las condiciones iniciales $\frac{\partial x(t)}{\partial x_0}$, $\frac{\partial^2 x(t)}{\partial x_0 \partial x_0}$.

En la Figura 10, se presentan las soluciones obtenidas al evaluar la ecuación diferencial con el método de Euler modificado para Transporte de Jets.

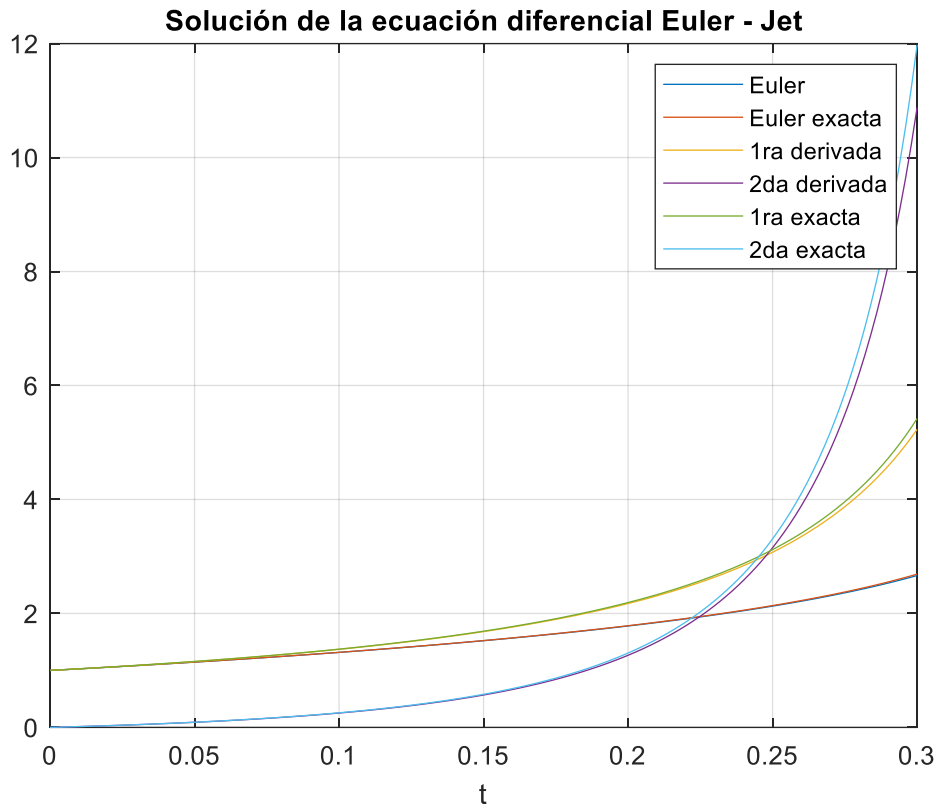


Figura 10. Resultados de la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = e^x$. (Fuente: elaboración propia)

En la Tabla 1, se presenta una estimación del orden del método de Euler, el cual se obtiene calculando el error máximo entre dos intervalos para un determinado número de pasos, luego aplicando la relación $\log_2\left(\frac{e_1}{e_2}\right)$, donde e_1, e_2 representa el error máximo en cada intervalo, se obtiene una estimación del orden del método.

Intervalos	Convergencia $x(t)$	
	Relación	Orden
N - 2N	1.7383	0.7976
2N - 4N	1.8489	0.8867
4N - 8N	1.9180	0.9396
8N - 16N	1.9572	0.9688
16N - 32N	1.9781	0.9841

Tabla 1. Estimación del orden del método de Euler para la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = e^x$

Se verifica que el orden del método de integración numérica de Euler es 1.

En la Figura 11, se presenta el error cometido en la solución de la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = e^x$.

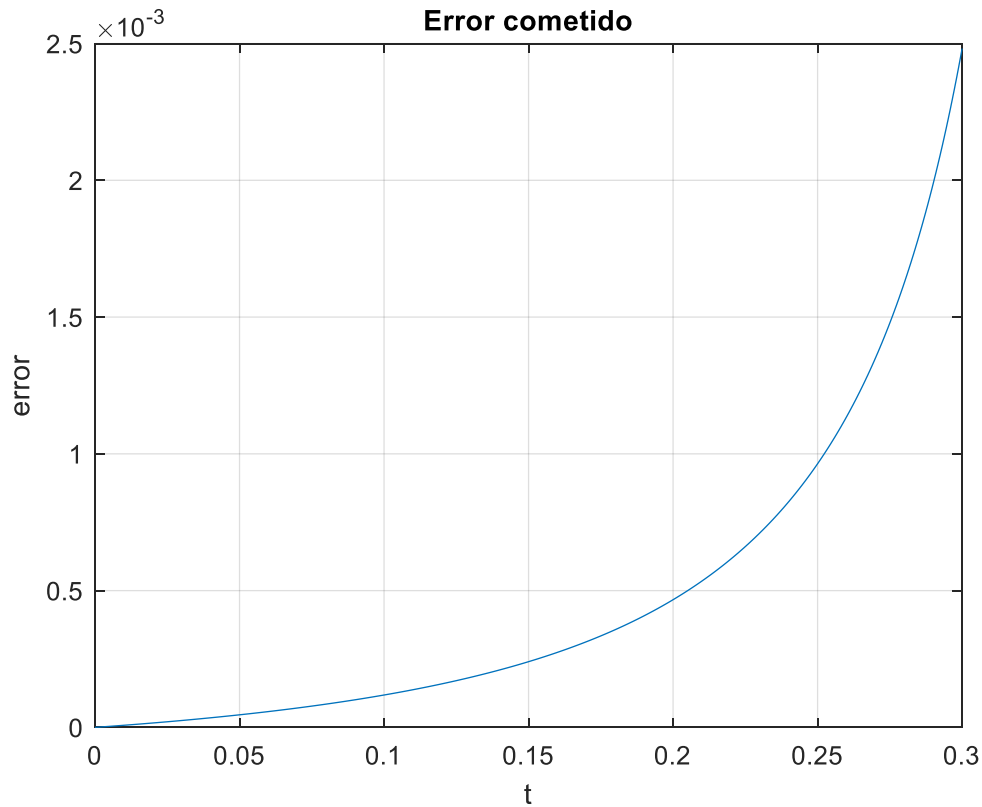


Figura 11. Gráfica del error cometido en la solución de la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = e^x$. (Fuente: elaboración propia)

4.1.2. Método de Heun modificado para Transporte de Jets

Para implementar el álgebra de polinomios en el método de Heun, se utiliza el mismo principio de sustitución polinomial que el método de Euler.

Dada la expresión:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2)$$

Se debe acoplar el polinomio de segundo orden $x_n + a_n y + b_n y^2$, para obtener las constantes k_1, k_2 del algoritmo:

$$k_1 = h \cdot f(t_n, x_n + a_n y + b_n y^2)$$

$$k_2 = f(t_n + h, x_n + a_n y + b_n y^2)$$

De este modo se obtiene un vector con tres componentes en lugar de una. La primera componente se refiere a la solución de la ecuación diferencial, las siguientes componentes representan las soluciones de la ecuación variacional asociada.

En caso de requerir soluciones variacionales de mayor orden basta con aumentar el grado del polinomio $x_n + a_n y + b_n y^2 + c_n y^3 + \dots$ y reemplazarlo en los algoritmos de los métodos numéricos.

4.1.3. Método de Runge-Kutta 4 modificado para Transporte de Jets

El principio de sustitución de números reales por el álgebra de polinomios utilizado en los métodos de Euler y Heun se aplica de la misma manera para el algoritmo de integración numérica de Runge-Kutta de orden 4, es decir, se reemplaza el polinomio de segundo orden $x_n + a_n y + b_n y^2$ en cada iteración. Así la expresión de este método está dada por:

$$x_{n+1} = x_n + a_n y + b_n y^2 + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Los coeficientes k_1, k_2, k_3, k_4 también son modificados para acoplar el polinomio.

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(t_n, x_n + a_n y + b_n y^2) \\ k_2 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + a_n y + b_n y^2 + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + a_n y + b_n y^2 + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= h \cdot f(t_n + h, x_n + a_n y + b_n y^2 + k_3) \end{aligned}$$

Al tratarse de componentes polinomiales, los términos x_n, a_n, b_n se almacenan en un vector de manera independiente.

Para demostrar el uso del método de Transporte de Jets en el algoritmo de Runge-Kutta 4, se resuelve la ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = (1 - 2t)x$$

La función con la cual se evalúa el polinomio es el producto ya que se trata de la multiplicación de un polinomio dado por el vector $[x_n \ a_n \ b_n]$ y un escalar $(1 - 2t)$. Al evaluar el polinomio se obtiene en cada iteración el valor correspondiente a la solución aproximada de la ecuación diferencial, así como la primera y la segunda derivada de la solución.

Debido a que se dispone de la solución exacta de esta ecuación diferencial $x(t) = x_0 \cdot e^{(t-t_0-t^2-t_0^2)}$, se calcula la primera y segunda derivada con respecto a las condiciones iniciales $\frac{\partial x(t)}{\partial x_0}$, $\frac{\partial^2 x(t)}{\partial x_0 \partial x_0}$.

En la Figura 12, se presentan las soluciones obtenidas al evaluar la ecuación diferencial con el método de Euler modificado para Transporte de Jets.

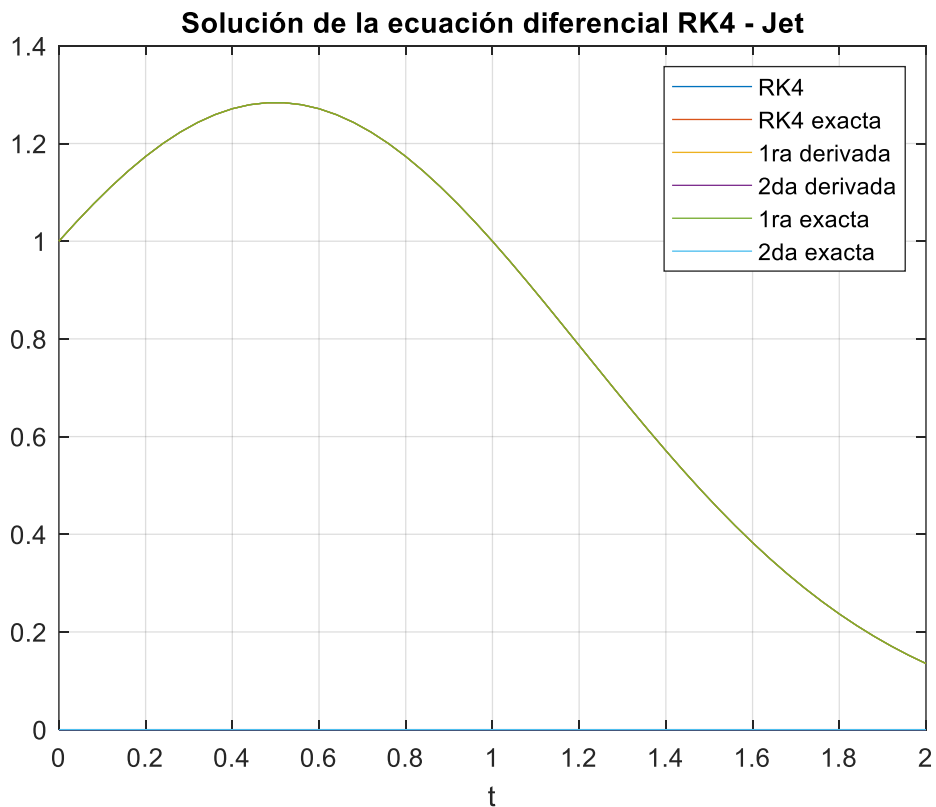


Figura 12. Resultados de la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = (1 - 2t)x$. (Fuente: elaboración propia)

En la Tabla 2, se presenta la estimación del orden del método de Runge-Kutta utilizando un número de subintervalos inicial $N=20$.

Intervalos	Convergencia $x(t)$	
	Relación	Orden
N - 2N	17.4389	4.1242
2N - 4N	16.7260	4.0640
4N - 8N	16.3638	4.0324
8N - 16N	16.1821	4.0163
16N - 32N	16.0905	4.0081

Tabla 2. Convergencia del método de Runge-Kutta orden 4 para la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = (1 - 2t)x$

Se verifica que el orden de este método de integración es 4.

En la Figura 11, se presenta el error cometido en la solución de la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = (1 - 2t)x$.

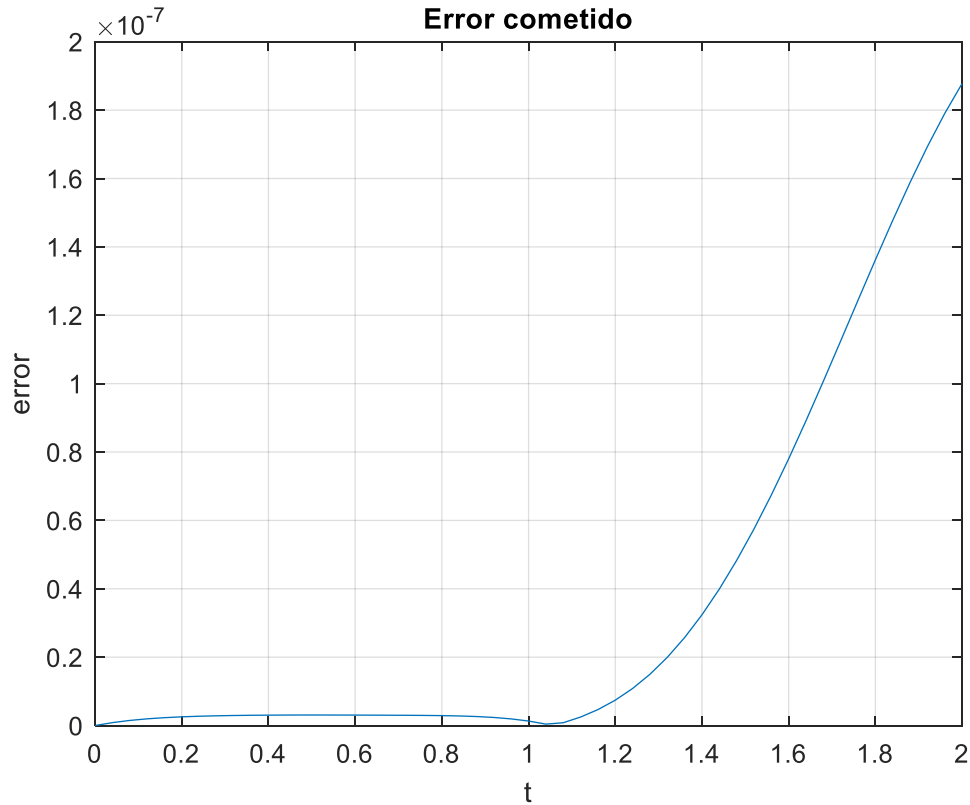


Figura 13. Gráfica del error cometido en la solución de la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = (1 - 2t)x$. (Fuente: elaboración propia)

4.2 Transporte de Jets para polinomios de dos variables

En la sección anterior se vio cómo resolver ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de Transporte de Jets considerando polinomios de una sola variable. Adicionalmente, se presentó los resultados utilizando un vector de tres columnas, las cuales representan a la solución de la ecuación diferencial, a la primera y segunda derivada de la ecuación variacional asociada. Se puede ampliar este estudio a sistemas o ecuaciones diferenciales de grado superior.

En esta investigación se considera un sistema formado por dos ecuaciones diferenciales $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ sujeto a las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $y(t_0) = y_0$

Para implementar el álgebra de polinomios con dos variables, las condiciones iniciales de los algoritmos de integración numérica están dados por las expresiones:

$$\begin{aligned}j_{1n}(p, q) &= x_n + a_n p + b_n q \\j_{2n}(p, q) &= y_n + c_n p + d_n q\end{aligned}$$

Donde j_{1n} y j_{2n} representan los polinomios para cada una de las variables, p y q representan las variables independientes de primer orden, a_n, c_n son los coeficientes de p , y b_n, d_n son los coeficientes de q .

En esta investigación se desarrolla polinomios de grado uno con dos variables, en trabajos futuros se puede ampliar a polinomios multivariados de grado superior.

Dados los polinomios P_n y Q_n la suma de polinomios con dos variables está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}P_n + Q_n &= x_n + a_n p + b_n q + y_n + c_n p + d_n q \\P_n + Q_n &= x_n + y_n + (a_n + c_n)p + (b_n + d_n)q\end{aligned}$$

El producto de un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por un polinomio P_n de dos variables es igual a:

$$\begin{aligned}S_n &= \lambda P_n \\S_n &= \lambda(x_n + a_n p + b_n q)\end{aligned}$$

El producto de dos polinomios P_n y Q_n se define como:

$$\begin{aligned}S_n &= P_n Q_n \\S_n &= (x_n + a_n p + b_n q)(y_n + c_n p + d_n q) \\S_n &= x_n y_n + x_n c_n p + x_n d_n q + y_n a_n p + a_n c_n p^2 + a_n d_n p q + y_n b_n q + b_n c_n p q + b_n d_n q^2 \\S_n &= x_n y_n + (x_n c_n + y_n a_n)p + (x_n d_n + y_n b_n)q + a_n c_n p^2 + (a_n d_n + b_n c_n)pq + b_n d_n q^2\end{aligned}$$

Para implementar el álgebra de polinomios en los métodos de integración se considera únicamente polinomios de grado uno, con lo cual la expresión anterior se reduce a:

$$S_n = x_n y_n + (x_n c_n + y_n a_n)p + (x_n d_n + y_n b_n)q$$

De este modo se puede escribir un algoritmo que calcule el producto a_n de dos polinomios b_n y c_n con dos variables:

$$a_n = \sum_{i=0, n-i \neq j, n-i > 0}^n b_{n-i} c_i$$

Las restricciones colocadas en el sumatorio eliminan la generación de polinomios de segundo grado.

Para la función exponencial $a(t) = e^{b(t)}$, también se deben realizar modificaciones al algoritmo de modo que proporcione únicamente los coeficientes de primero grado. Esto se consigue añadiendo restricciones en el sumatorio:

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0, (i > 1, i = n-i)}^{n-1} (n-i) a_n b_{n-i}$$

La función exponencial con dos variables e^{x+y} puede reemplazarse por la identidad $e^x \cdot e^y$ y aplicando las fórmulas del capítulo dos para la exponencial y el producto se puede obtener la solución.

Para calcular el logaritmo de un polinomio de dos variables se utilizan restricciones en el algoritmo:

$$a_n = \frac{1}{b_0} \left[b_n - \frac{1}{n} \sum_{j=1, (n > 2)}^{n-1} (n-j) b_n a_{n-j} \right]$$

El seno de dos variables $\text{sen}(x+y)$ y el coseno de dos variables $\cos(x+y)$ puede escribirse de la siguiente manera utilizando identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \text{sen}(x+y) &= \text{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \text{sen}(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x) \cos(y) - \text{sen}(x) \text{sen}(y) \end{aligned}$$

De esta forma se puede desarrollar las series de senos y cosenos para cada variable con las fórmulas dadas en el capítulo dos.

Las expresiones para calcular el seno $b_n = \text{sen}(c_n(x))$, y el coseno $a_n = \text{cos}(c_n(x))$ de una función $c_n(x)$ están dadas por:

$$a_n(x) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j c_{n-j}(x) b_n, \quad b_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j c_{n-j}(x) a_n$$

Las expresiones para calcular el seno $b_n = \text{sen}(c_n(y))$, y el coseno $a_n = \text{cos}(c_n(y))$ de una función $c_n(y)$ están dadas por:

$$a_n(y) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j c_{n-j}(y) b_n, \quad b_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j c_{n-j}(y) a_n$$

Posteriormente se puede implementar el producto de polinomios y obtener las funciones seno y coseno con dos variables. Esta forma de análisis es útil ya que al tratarse de polinomios de grado uno se optimizan los cálculos en lugar de la elaboración de algoritmos más complicados.

A continuación, se realizará la implementación del álgebra de polinomios de dos variables en los algoritmos de integración de los métodos de Euler de orden 1 y Runge-Kutta de orden 4 así como ejemplos para ilustrar su funcionalidad.

4.2.1. Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

La expresión para calcular el valor aproximado de cada componente en el algoritmo de Euler considerando dos variables está dada por la expresión:

$$j_{n+1}(p, q) = j_n(p, q) + h \cdot f(t_n, j_n(p, q))$$

Esta expresión considera tanto las soluciones de la ecuación diferencia $x(t), y(t)$ como las soluciones de las ecuaciones variacionales.

El primer paso del algoritmo de Euler tiene la siguiente forma:

$$j_1(p, q) = j_0(p, q) + h \cdot f(t_0, j_1(p, q))$$

Donde j_0 representa las condiciones iniciales del sistema.

Para demostrar el método de Euler en sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando Transporte de Jets, se realiza un ejemplo.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y \\ \dot{y}(t) = -x \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0 = 1, y(t_0) = y_0 = 1, t_0 = 0$.

Las componentes del jet tienen como condiciones iniciales $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 1, d_1 = 0$.

Una vez ejecutado el algoritmo se presentan los resultados junto a la comparativa de la solución exacta. Se utiliza un tamaño de paso $h = 0.01$ en un intervalo $t = [0,10]$.

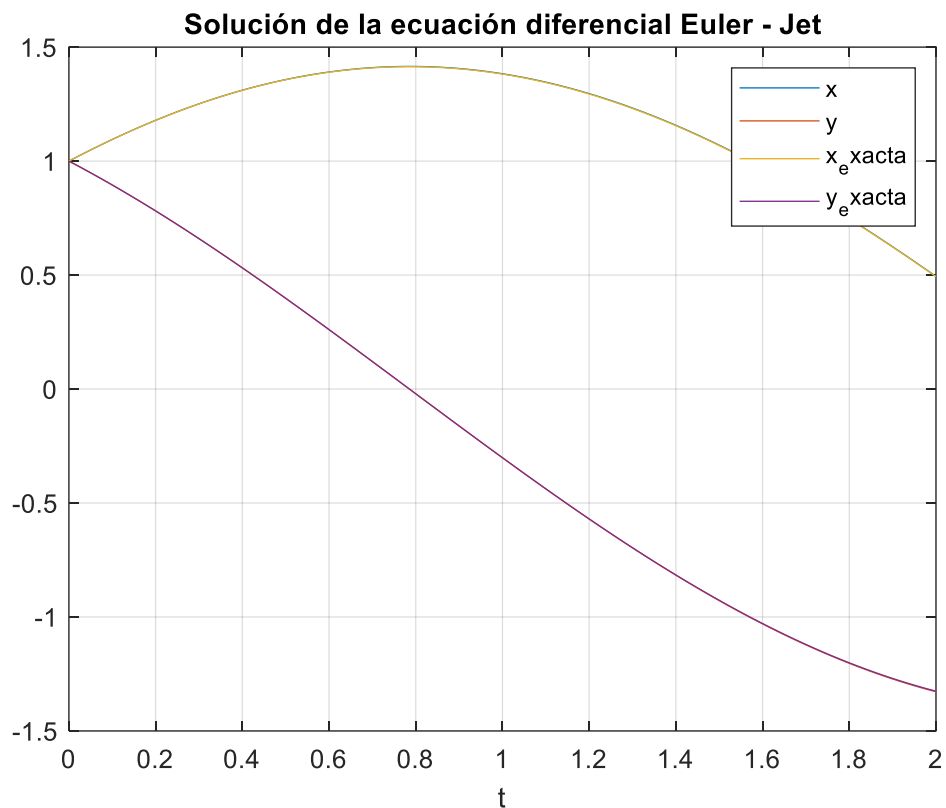


Figura 14. Resultados del sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$. (Fuente: elaboración propia)

Como se observa en la Figura 14, la primera solución obtenida mediante los métodos numéricos es la misma que se consigue aplicando el método de Transporte de Jets.

En la Tabla 3, se presenta una estimación del orden del método de Euler empezando con un número de subintervalos $N=20$.

Intervalos	Convergencia $x(t)$	
	Relación	Orden
N - 2N	2.8951	1.5336
2N - 4N	2.7728	1.4714
4N - 8N	2.4457	1.2902
8N - 16N	2.2248	1.1537
16N - 32N	2.1117	1.0784

Tabla 3. Convergencia del método de Euler para el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$

Se verifica que el orden de este método de integración numérica es 1.

En la Figura 15, se presenta el error cometido en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.

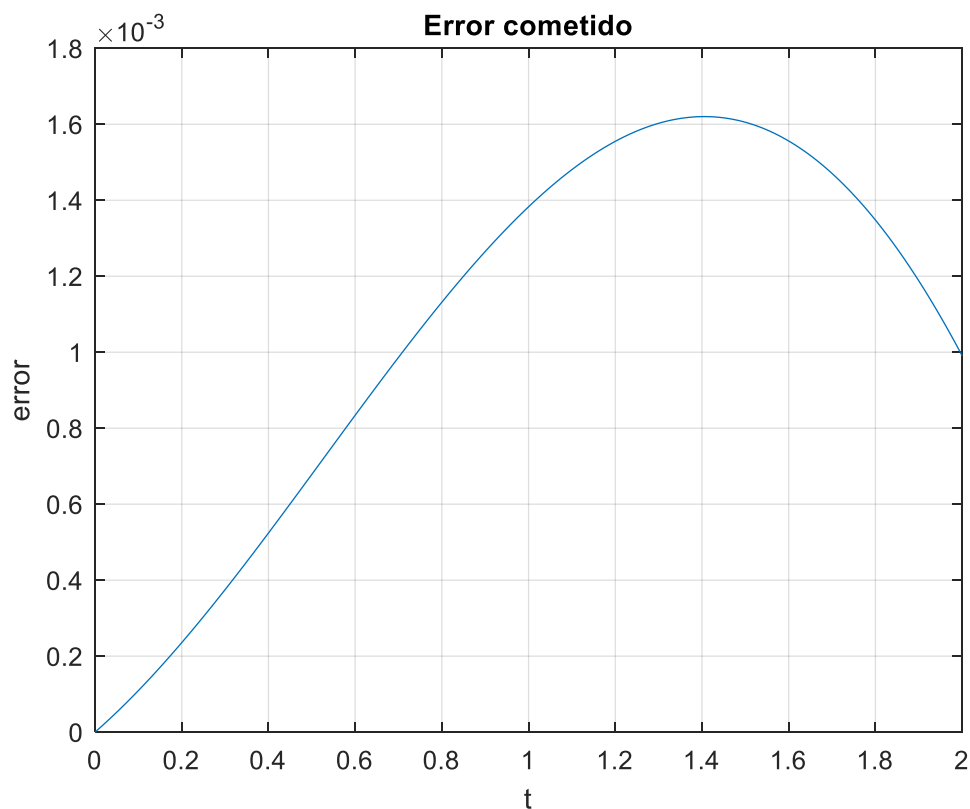


Figura 15. Gráfica del error cometido en la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$. (Fuente: elaboración propia)

La solución analítica de este sistema está dada por las expresiones:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) \\ y = -C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) \end{cases}$$

Al reemplazar las condiciones iniciales en este sistema, se tiene:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) \\ y = -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) \end{cases}$$

Para poder analizar el comportamiento de las ecuaciones variacionales se deriva las soluciones exactas con respecto a las condiciones iniciales x_0, y_0 con lo cual se obtiene un nuevo grupo de ecuaciones: $\frac{\partial x}{\partial x_0} = \cos(t), \frac{\partial x}{\partial y_0} = \sin(t), \frac{\partial y}{\partial x_0} = -\sin(t), \frac{\partial y}{\partial y_0} = \cos(t)$.

En la Figura 16, se compara las derivadas de las ecuaciones variacionales con la solución aproximada obtenida por el método de Transporte de Jets.

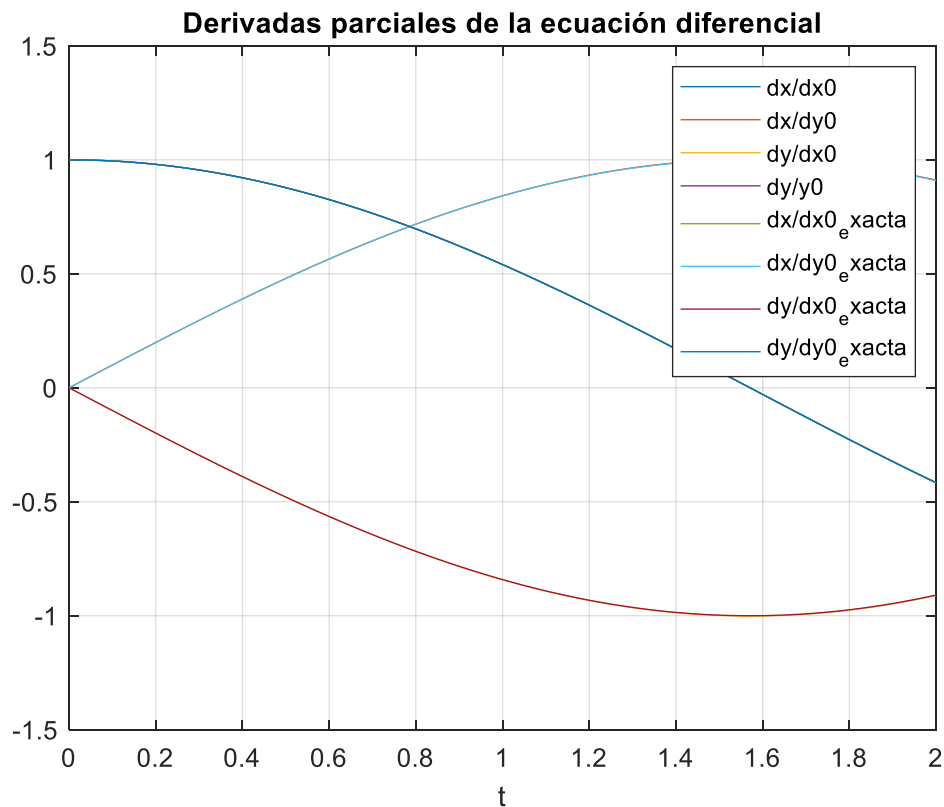


Figura 16. Derivadas de las ecuaciones variacional del sistema $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$. (Fuente: elaboración propia)

Al propagar la condición inicial a un entorno U se observa el cambio que ocurre desde la condición inicial U_{x_0} hasta el estado final U_{x_t} después de haber realizado el Transporte de Jets. El polinomio inicial está dado por la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que corresponde a la base canónica de \mathbb{R}^2 y transcurrido un tiempo t en el intervalo $[0,10]$, la matriz resultante es $\begin{bmatrix} -0.8823 & -0.5716 \\ 0.5716 & -0.8823 \end{bmatrix}$. De estas condiciones iniciales y finales se pueden

obtener los valores propios asociados y a partir de estos obtener los vectores propios correspondientes.

La Figura 17, muestra un esquema del Transporte de Jets para esta ecuación diferencial.

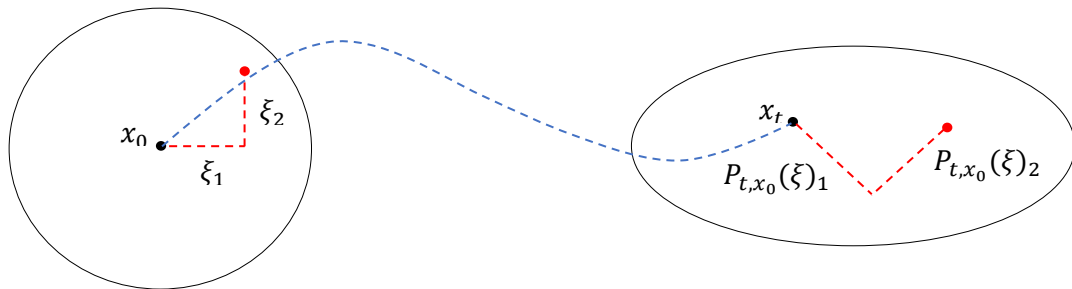


Figura 17. Esquema del Transporte de Jet para el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.
(Fuente: elaboración propia)

En la Figura 18, se muestra una comparativa de los métodos de Euler de orden 1 y Heun de orden 2 modificados para Transporte de Jets para el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, tomando un número de subintervalos $N=100$.

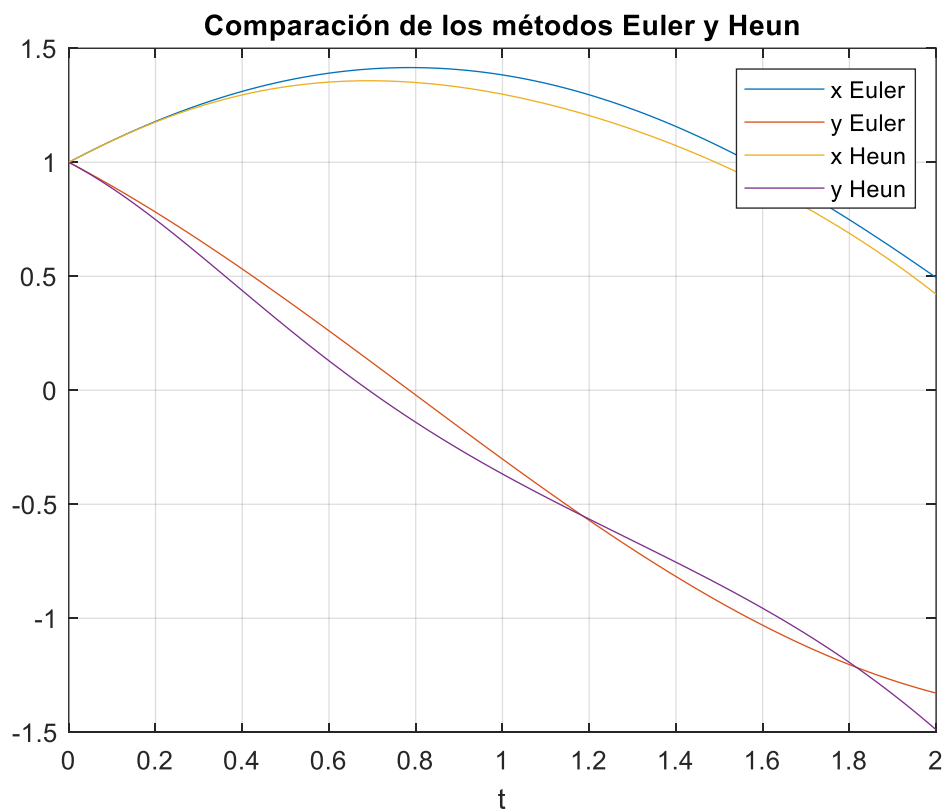


Figura 18. Comparativa de los métodos de Euler 1 y Heun 2 modificados para transporte de jets para el Sistema $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$. (Fuente: elaboración propia)

4.2.2. Método de Runge-Kutta 4 para sistemas de ecuaciones diferenciales

En el método de Runge-Kutta de orden 4 para sistemas de ecuaciones, las expresiones son reemplazadas por la función $j_n(p, q)$ que representa un vector que contiene dos variables lineales de grado uno.

Los coeficientes k_1, k_2, k_3, k_4 también son modificados al implementar el polinomio.

$$\begin{aligned}k_1 &= h \cdot f(t_n, j_n(p, q)) \\k_2 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}h, j_n(p, q) + \frac{1}{2}k_1\right) \\k_3 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}h, j_n(p, q) + \frac{1}{2}k_2\right) \\k_4 &= h \cdot f(t_n + h, j_n(p, q) + k_3)\end{aligned}$$

La expresión para cada paso está dada por:

$$j_{n+1} = j_n(p, q) + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

4.2.2.1. Péndulo simple

Para demostrar la aplicación del método de Transporte de Jets, se presenta como ejemplo el movimiento de un péndulo de masa m sujeto por una varilla rígida de longitud l , sin rozamiento.

La expresión que caracteriza este movimiento está dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(x)$$

Transformando la expresión a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{l} \sin(x) \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0 = 1, y(t_0) = y_0 = 1, t_0 = 0, g = 10, l = 1$.

Las componentes del jet tienen como condiciones iniciales $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 1, d_1 = 0$.

Si las oscilaciones del péndulo son de una amplitud baja se puede realizar la siguiente aproximación: $\text{sen}(x) \approx x$

Una vez ejecutado el algoritmo se presentan los resultados utilizando un tamaño de paso $h = 0.01$ en un intervalo $t = [0,10]$.

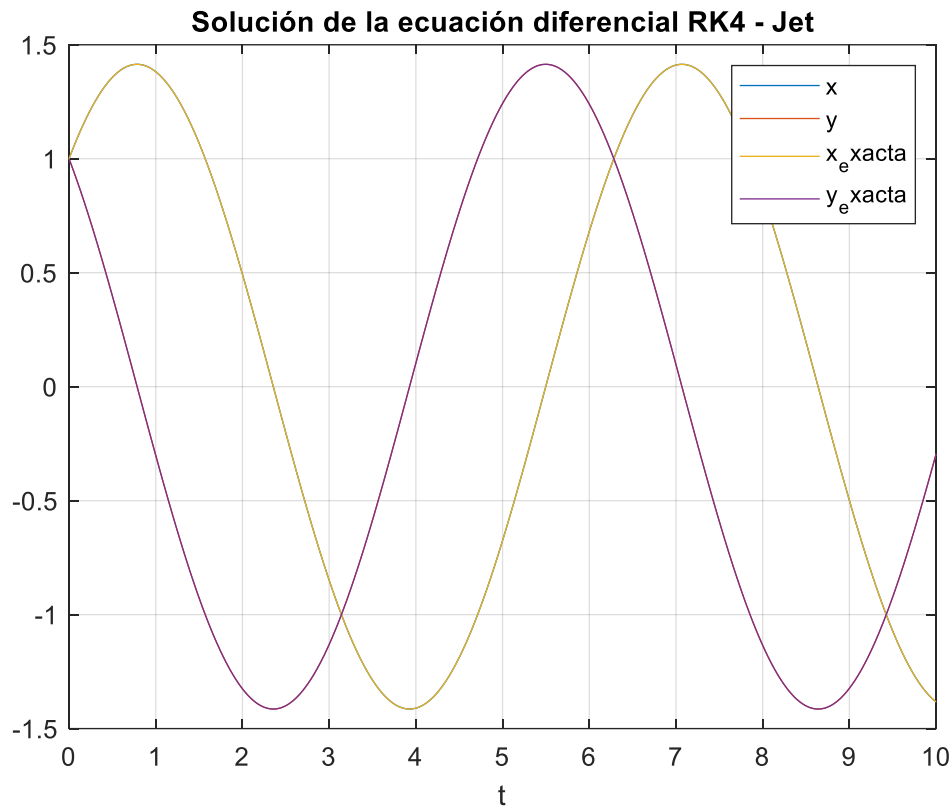


Figura 19. Resultados del sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y, \dot{y} = -g/l \text{sen}(x)$ por el método de Runge-Kutta 4. (Fuente: elaboración propia)

En la Tabla 4, se presenta una estimación del orden del método de Runge-Kutta 4 empezando con un número de subintervalos $N=20$.

Intervalos	Convergencia $x(t)$	
	Relación	Orden
N - 2N	16.1009	4.0091
2N - 4N	16.1833	4.0164
4N - 8N	16.0953	4.0086
8N - 16N	16.0485	4.0044
16N - 32N	16.0245	4.0022

Tabla 4. Convergencia del método de Runge-Kutta 4 para el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y, \dot{y} = -g/l \text{sen}(x)$

Se verifica que el orden de este método de integración numérica es 4.

En la Figura 20, se presenta la gráfica del espacio fase para el péndulo simple.

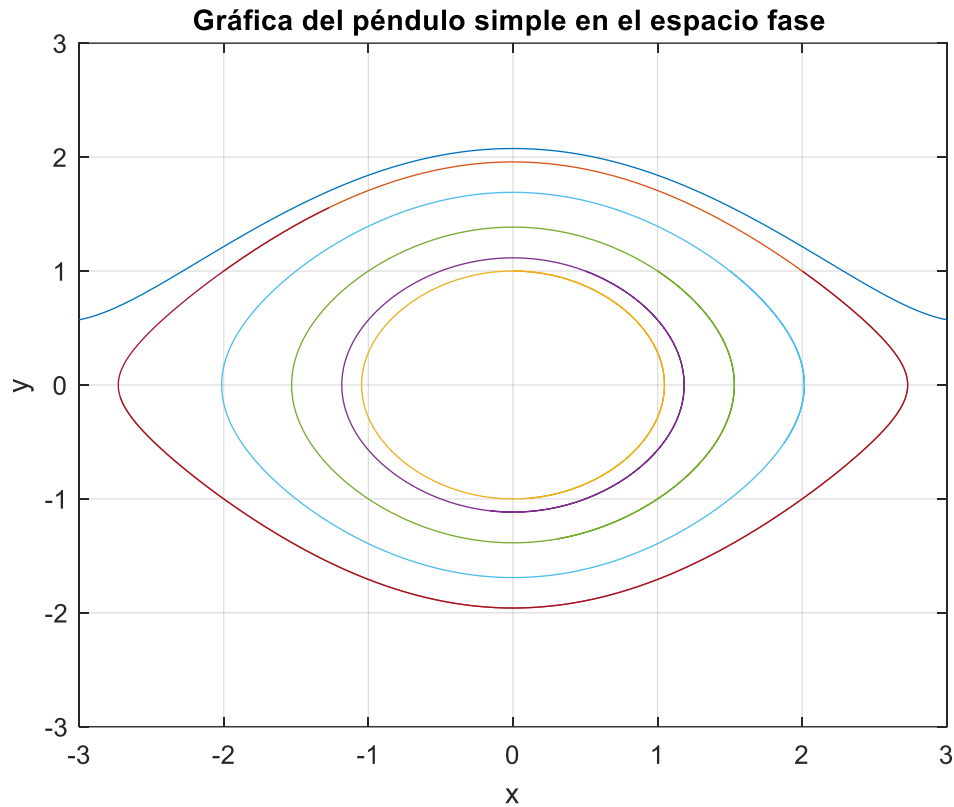


Figura 20. Gráfica del sistema de ecuaciones diferencial $\dot{x} = y, \dot{y} = -g/l \sin(x)$ para diferentes valores de x

La representación esquemática del Transporte de Jets para un péndulo simple se obtiene a partir de las condiciones iniciales dadas por la matriz $[1 \ 0; \ 0 \ 1]$ y transcurrido un tiempo t en el intervalo $[0,10]$ la matriz resultante es $[-1.5474 \ -0.0746; \ 0.5535 \ 1.6092]$. Una vez calculado los valores propios y los correspondientes vectores propios se puede realizar la representación de los entornos inicial U_{x_0} y final U_{x_t} para este sistema de ecuaciones diferenciales.

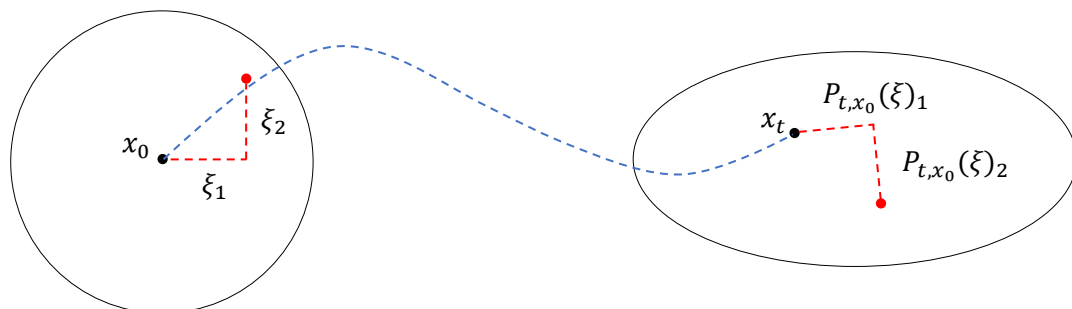


Figura 21. Esquema del Transporte de Jet para el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y, \dot{y} = -g/l \sin(x)$.
(Fuente: elaboración propia)

Representado el entorno de propagación de la condición inicial y final, se presentan las derivadas parciales de la ecuación diferencial con respecto a las condiciones iniciales $\frac{\partial x}{\partial x_0}$, $\frac{\partial x}{\partial y_0}$, $\frac{\partial y}{\partial x_0}$, $\frac{\partial y}{\partial y_0}$, donde x, y representan las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones iniciales x_0, y_0 .

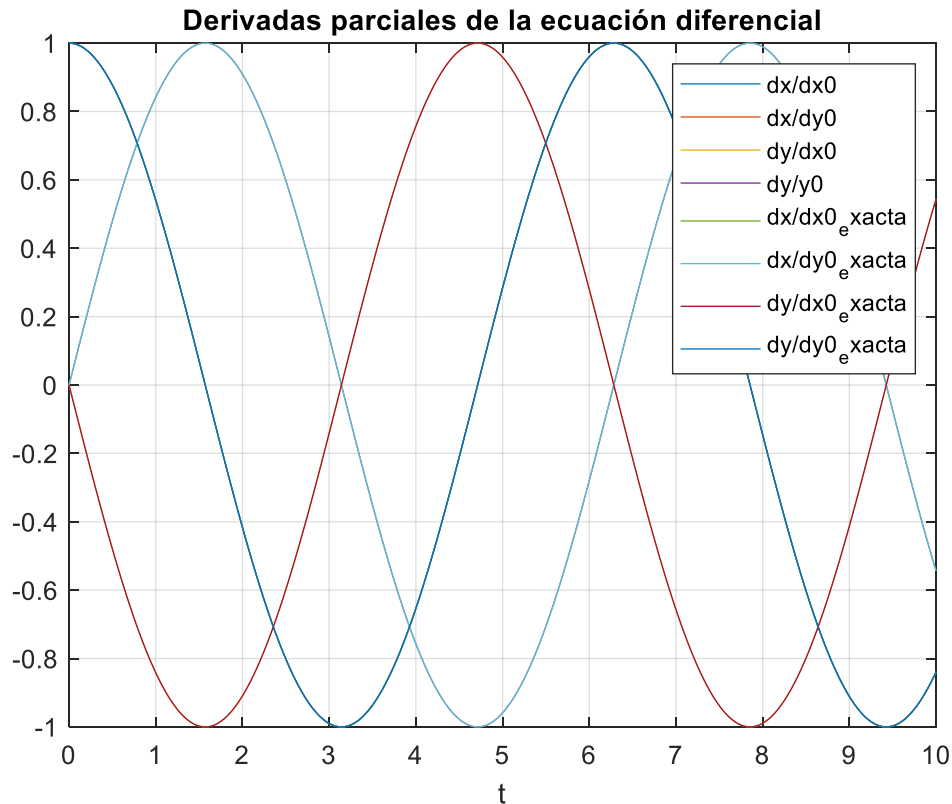


Figura 22. Derivadas de las ecuaciones variacional del sistema $\dot{x} = y, \dot{y} = -g/l \sin(x)$. (Fuente: elaboración propia)

En la Figura 23, se realiza una comparación de las soluciones obtenidas por el método de Euler y Runge-Kutta 4 modificado para Transporte de Jets.

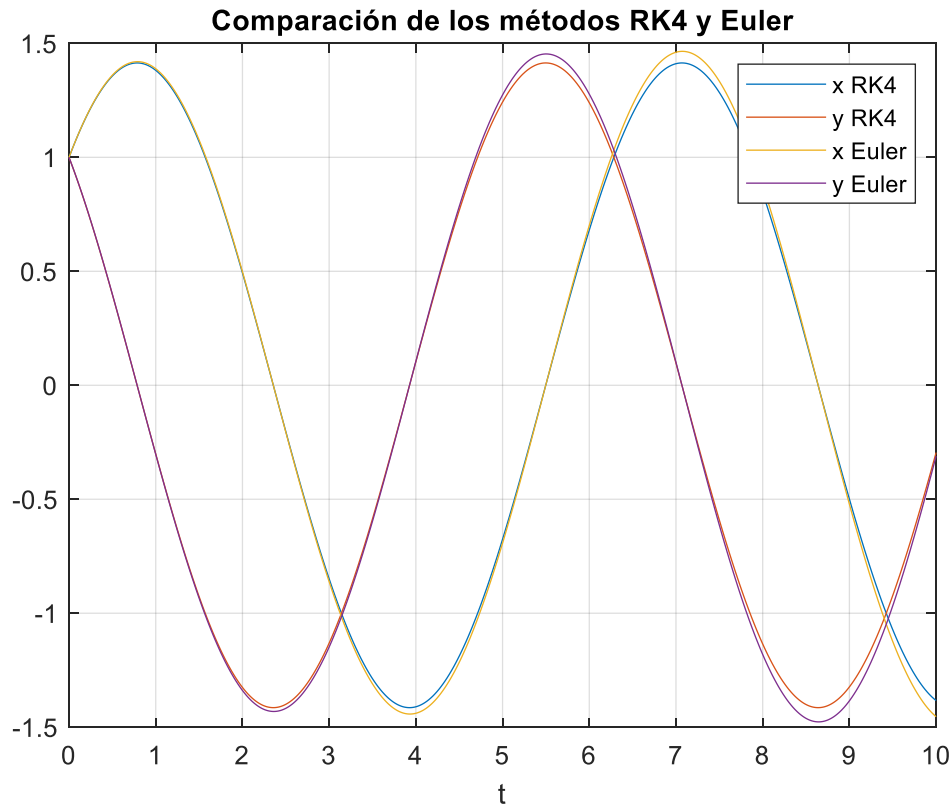


Figura 23. Comparativa de los métodos de Euler y Runge-Kutta 4 modificado para transporte de jets para el sistema $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -g/l \sin(x)$. (Fuente: elaboración propia)

4.2.2.2. Oscilador de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol en sistema dinámicos es un oscilador con amortiguamiento no lineal. La expresión que caracteriza este movimiento a través del tiempo está dada por una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Donde $x(t)$ representa la posición en función del tiempo t , y μ es un parámetro que representa la no linealidad y el amortiguamiento.

Transformando la expresión a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2) y - x \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0 = 2$, $y(t_0) = y_0 = 0$, $t_0 = 0$, $\mu = 1$.

Las componentes del jet tienen como condiciones iniciales $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 1$, $d_1 = 0$.

Una vez ejecutado el algoritmo de integración numérica modificado para Transporte de Jets se presentan los resultados junto a la comparativa de la solución exacta. Se utiliza un tamaño de paso $h = 0.01$ en un intervalo $t = [0,10]$.

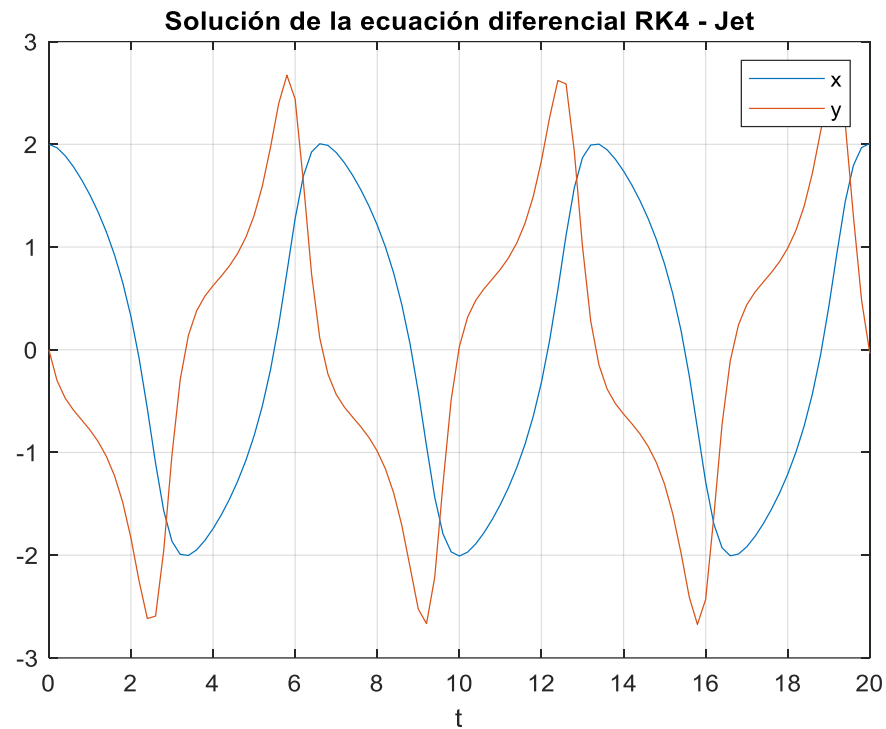


Figura 24. Resultados del sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x$. (Fuente: elaboración propia)

En la Tabla 5, se presenta una estimación del orden del método de Runge-Kutta 4 empezando con un número de subintervalos $N=20$.

Intervalos	Convergencia $x(t)$	
	Relación	Orden
N-2N	15.1663	3.9228
2N-4N	15.6426	3.9674
4N-8N	15.8489	3.9863
8N-16N	15.9297	3.9936
16N-32N	15.9654	3.9969

Tabla 5. Convergencia del método de Euler para el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x$

Se verifica que el orden de este método de integración numérica es 4.

Para representar de forma esquemática el Transporte de Jets para un oscilador con amortiguamiento no lineal es necesario obtener los valores y vectores propios de la matriz de condiciones iniciales $[1 \ 0; 0 \ 1]$ y la matriz obtenida después de transcurrido un tiempo t $[-1.5474 \ -0.0746; 0.5535 \ 1.6092]$.

La Figura 25, muestra el entorno inicial U_{x_0} y final U_{x_t} con los vectores normalizados.

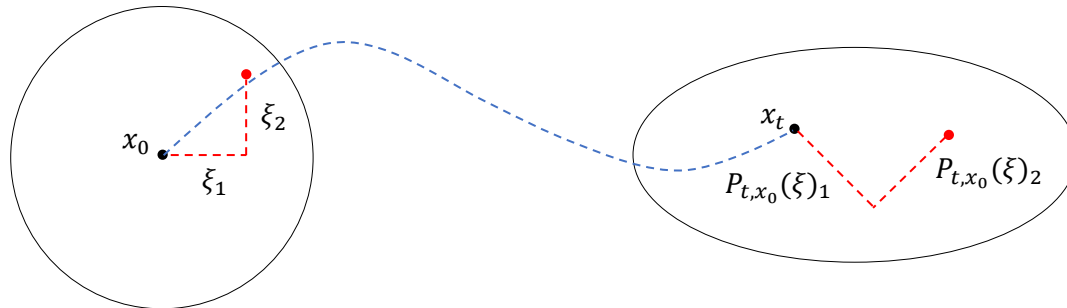


Figura 25. Esquema del Transporte de Jet para el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y, \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x$. (Fuente: elaboración propia)

Después de representado el entorno de propagación de la condición inicial y final, se presenta las derivadas de las ecuaciones variacionales asociadas a este sistema. Se obtienen las derivadas parciales con respecto a las condiciones iniciales $\frac{\partial x}{\partial x_0}, \frac{\partial x}{\partial y_0}, \frac{\partial y}{\partial x_0}, \frac{\partial y}{\partial y_0}$, donde x, y representan las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones iniciales x_0, y_0 .

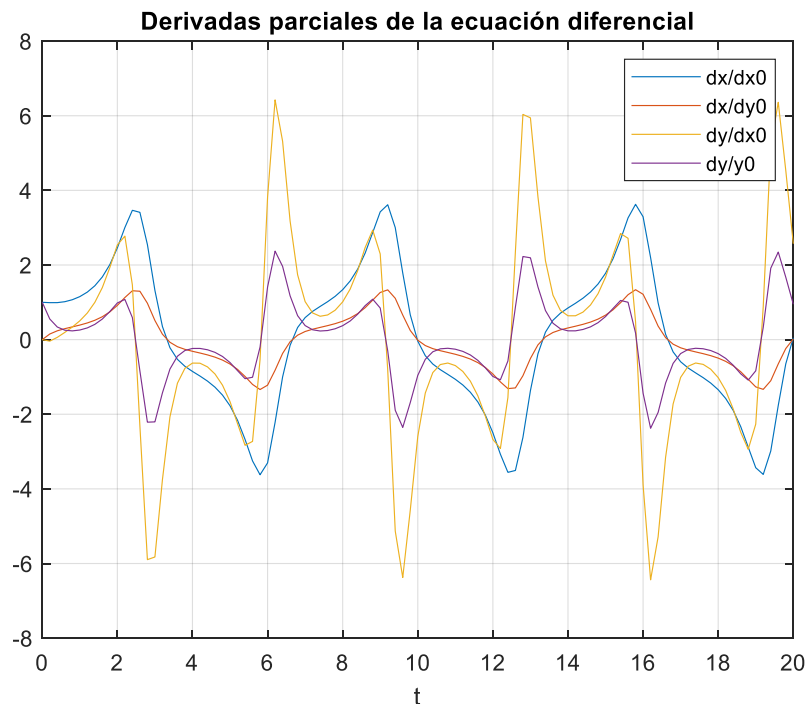


Figura 26. Derivadas de las ecuaciones variacionales del sistema $\dot{x} = y, \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x$. (Fuente: elaboración propia)

En la Figura 27, se presenta la comparativa de los métodos de Heun y Runge-Kutta de orden 4 para el sistema dado por la ecuación del oscilador de Van der Pol tomando un número de intervalos $N=100$.

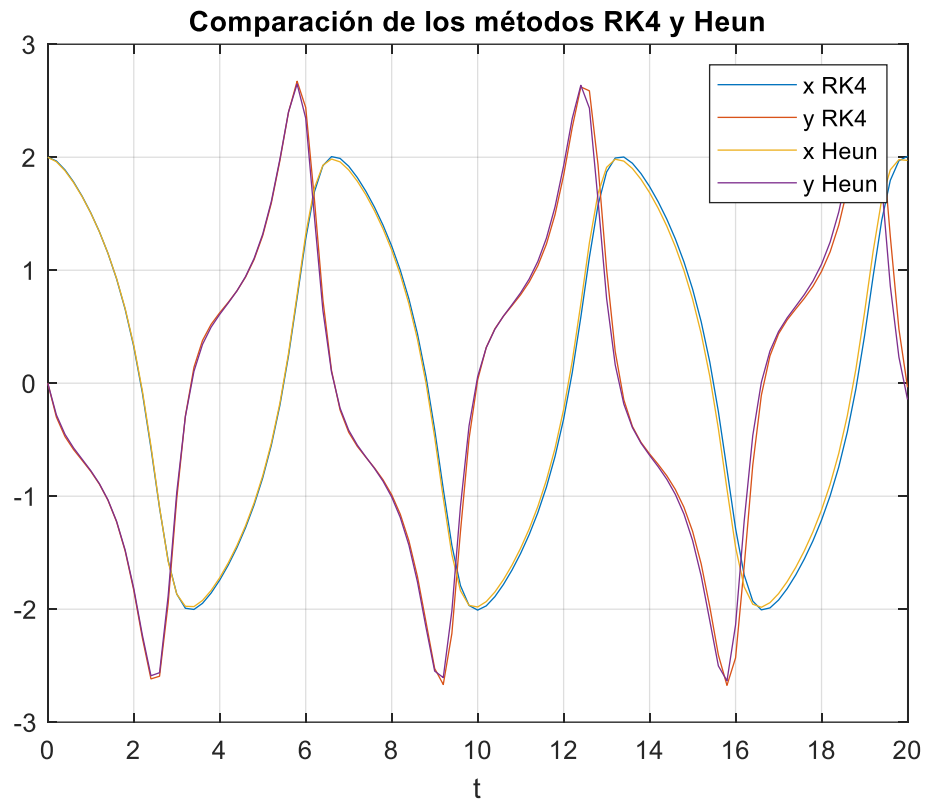


Figura 27. Comparativa de los métodos de Heun y Runge-Kutta 4 para el sistema $\dot{x} = y, \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x$.
(Fuente: elaboración propia)

5. Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

El método de Transporte de Jets es una herramienta que permite expandir el flujo de un problema dado por una ecuación diferencial respecto a las condiciones iniciales y obtener mediante la implementación de un álgebra de polinomios y un integrador numérico, expansiones de flujo asociadas a un entorno inicial.

Los resultados obtenidos por el método de Transporte de Jets permiten analizar la evolución de la solución a una ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales a lo largo del tiempo, tal evolución corresponde a las soluciones de las ecuaciones variacionales.

El desarrollo del álgebra de polinomios para una y dos variables constituye una herramienta útil para ser aplicada en los métodos de integración numérica debido a su importancia en la obtención de soluciones de las ecuaciones variacionales, evitando así el desarrollo manual de derivadas.

El error obtenido en las soluciones depende del método numérico de integración y de la precisión del paso, se observó que a mayor orden del método se obtiene una mejor aproximación de las soluciones tanto de la ecuación diferencial como de la variacional, sin embargo, hay que considerar el coste computacional que conlleva realizar aproximaciones para pasos muy pequeños.

5.2. Líneas de trabajo futuro

En la presente investigación se plantea el desarrollo del Transporte de Jets utilizando polinomios lineales con una y dos variables, para trabajos futuros se puede ampliar a polinomios de grado superior multivariables.

Del mismo modo se puede aplicar los algoritmos desarrollados en esta investigación para obtener formas normales de aplicaciones Poincaré alrededor de órbitas periódicas, calcular expansiones locales de alto orden de variedades estables, centrales e inestables, convertir un cálculo numérico simple en una demostración rigurosa mediante una combinación de aritméticas intervalares y estimaciones analíticas utilizando precisión extendida.

6. Bibliografía

- [1] D. Pérez Palau, J. J. Masdemont, and G. Gómez, “Jet Transport propagation of uncertainties for orbits around the Earth,” *Int. Astronaut. Congr.*, pp. 1–8, 2013.
- [2] E. M. Alessi, A. Farrés, A. Vieiro, C. Simó, and À. Jorba, “Jet Transport and Applications to NEOs,” *Proc. 1st IAA Planet. Def. Conference*, pp. 1–9, 2009.
- [3] P. Di Lizia, R. Armellin, and M. Lavagna, “Application of high order expansions of two-point boundary value problems to astrodynamics,” *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, vol. 102, pp. 355–375, 2008.
- [4] P. Di Lizia, R. Armellin, F. Bernelli-Zazzera, and M. Berz, “High order optimal control of space trajectories with uncertain boundary conditions,” *Acta Astronaut.*, vol. 93, pp. 217–229, Jan. 2014.
- [5] A. Morselli, R. Armellin, P. Di Lizia, and F. Bernelli Zazzera, “A high order method for orbital conjunctions analysis: Monte Carlo collision probability computation,” *Adv. Sp. Res.*, vol. 55, no. 1, pp. 311–333, 2015.
- [6] M. Rasotto *et al.*, “Differential Algebra Space Toolbox for Nonlinear Uncertainty Propagation in Space Dynamics,” *Int. Conf. Astrodyn. Tools Tech.*, pp. 1–11, 2016.
- [7] J. Chen, J. J. Masdemont, G. Gómez, and J. Yuan, “Jet transport-based nonlinear state and parameter estimation for geostationary spacecraft,” *Acta Astronaut.*, vol. 164, no. December, pp. 321–333, 2019.
- [8] D. G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones al modelado*, vol. 45, no. 12. 2002.
- [9] M. R. Spiegel, *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. 1983.
- [10] P. Blanchard, R. Devaney, and G. Hall, *Differential Equations*, Fourth Edi. 2011.
- [11] S. S. Sastry, *Introductory Method of Numerical Analysis*. 2006.
- [12] R. V. Dukkipati, *NUMERICAL METHODS*. 2010.
- [13] A. Nieves Hurtado and F. Domínguez Sánchez, *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. 2014.
- [14] R. Kumar Gupta, *Numerical Methods Fundamentals and Applications*. 2019.

- [15] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*. 2006.
- [16] D. Pérez-Palau, J. Masdemont, and G. Gómez, *The jet transport applied to the detection of Lagrangian Coherent Structures*. 2014.
- [17] H. Rein and D. Tamayo, "WHFAST: A fast and unbiased implementation of a symplectic Wisdom-Holman integrator for long-term gravitational simulations," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 452, pp. 376–388, 2015.
- [18] A. Wittig, P. Di Lizia, R. Armellin, K. Makino, F. Bernelli-Zazzera, and M. Berz, "Propagation of large uncertainty sets in orbital dynamics by automatic domain splitting," *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, vol. 122, no. 3, pp. 239–261, 2015.
- [19] H. Rein and D. Tamayo, "Second-order variational equations for N-body simulations," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 459, no. 3, pp. 2275–2285, 2016.
- [20] P. M. Cincotta, C. M. Giordano, and C. Simó, "Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits," *Phys. D Nonlinear Phenom.*, vol. 182, pp. 151–178, 2003.
- [21] G. Tancredi, A. Sánchez, and F. Roig, "A Comparison Between Methods To Compute Lyapunov Exponents," *Astron. J.*, vol. 121, no. 2, pp. 1171–1179, 2001.
- [22] C. Skokos and E. Gerlach, "Numerical integration of variational equations," *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.*, vol. 82, no. 3, 2010.
- [23] D. Pérez-Palau, "Dynamical transport mechanisms in celestial mechanics and astrodynamics problems," 2015.
- [24] M. D. MacLaren, "M. D. MacLaren, "The Art of Computer Programming. Volume 2: Seminumerical Algorithms (Donald E. Knuth)," *Addison-Wesley*, vol. 2, pp. 306–308, 1970.
- [25] À. Jorba and M. Zou, "A software package for the numerical integration of odes by means of high-order taylor methods," *Exp. Math.*, vol. 14, no. 1, pp. 99–117, 2005.
- [26] P. A. Fuhrmann, *A Polynomial Approach to Linear Algebra*, Second., vol. 3, no. 2. 2015.