



UNIVERSIDAD INTERNACIONAL
DE LA RIOJA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN
CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

TESIS DOCTORAL

**Estudio sobre convergencia y dinámica de los métodos de
Newton, Stirling y alto orden**

Memoria presentada por

Cristina Amorós Canet
para optar al grado de Doctora
por la Universidad Internacional de La Rioja

Dirigida por los Doctores:

Juan Antonio Sicilia Montalvo
e
Íñigo Sarría Martínez de Mendivil

Madrid, 2020



UNIVERSIDAD INTERNACIONAL
DE LA RIOJA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN
CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

TESIS DOCTORAL

**Estudio sobre convergencia y dinámica de los métodos de
Newton, Stirling y alto orden**

Memoria presentada por

Cristina Amorós Canet
para optar al grado de Doctora
por la Universidad Internacional de La Rioja

Dirigida por los Doctores:

Juan Antonio Sicilia Montalvo
e
Íñigo Sarría Martínez de Mendivil

Madrid, 2020

Dedicatoria

A mis hijos: Gonzalo, Candela, Mateo, Carlota, Sara y Alejandra.
GRACIAS. Os quiero.

Agradecimientos

'La virtud de un hombre debe medirse por sus obras cotidianas'

(Pascal)

¡Cuántas veces me habré imaginado escribiendo esta parte de la tesis!

Hace 12 años, comencé mis estudios de doctorado en la Universidad Complutense de Madrid y por el camino, se han ido quedando jalones, hitos, vida al fin y al cabo, idas y venidas que han ido forjando lo que soy y reflejando en esta tesis, una historia de la que hoy, me siento muy orgullosa.

Uno de los grandes aprendizajes que gracias a esta tesis me llevo para siempre, es que “sola, no se puede”. Uno puede pensar que está preparado, que es capaz, que vale, pero en estos 12 años, Dios se ha encargado de enseñarme a mirarme al espejo para reconocer, no sólo mi lado más vulnerable, sobre todo, una mano tendida.

Por ello y, en primer lugar, agradezco de corazón el trabajo que han realizado mis directores de tesis, Juan Antonio Sicilia Montalvo, quien es además mi tutor, e Íñigo Sarría Martínez de Mendivil.

Desde que comenzó este proyecto me han animado, me han aconsejado, me han guiado, me han corregido y en todo momento han estado dispuestos a entenderme, a adaptarse y a ayudarme. Ojalá recibáis pronto ese “ciento por uno” en lo que más necesitéis.

También quiero dar las gracias a Ángel Alberto Magreñán Ruíz, por mostrarme el mundo de los métodos iterativos, por abrirme esta puerta casi sin preguntar y por toda la ayuda prestada para que la investigación haya salido adelante.

Agradezco enormemente la ayuda, la sencillez y la comprensión de Rubén González Crespo, por no dudar nunca de mí, por su insistencia y por el tiempo dedicado cuando no había tiempo para dedicar. “La grandeza se demuestra en lo pequeño”

Pero me vais a permitir que sobre todo dé las gracias a mi familia, a cada uno de ellos, que me han sostenido, me han renovado cada día y han luchado conmigo.

“A través de las misteriosas ecuaciones del amor” han hecho posible que después de tanto tiempo, esta tesis vea cumplida su misión.

Por último, quisiera dar las gracias a mi padre, por ayudarme a hacer “clic” en la vida y en las matemáticas.

Gracias a ti, que por quererme me exigiste, porque me creíste capaz hoy puedo disfrutarlas, porque gracias a ti, elegí Matemáticas.

La exactitud de la ciencia para sentir que todo tiene un porqué, para sentir que me sigues guiando, para decirte desde aquí, que esta tesis, “va por ti”.

Resumen

Numerosos problemas de la ciencia, la ingeniería o la economía requieren de la búsqueda de soluciones de una ecuación. En muy pocos casos es posible plantear dichos problemas mediante una ecuación lineal, siendo necesario recurrir a ecuaciones o sistemas de orden superior. En contadas ocasiones, es posible determinar una solución de manera exacta. Por lo que es necesario recurrir a técnicas que nos permitan resolver estos problemas. Entre las distintas técnicas encontramos los métodos iterativos que nos permiten encontrar una solución aproximada del problema.

Los métodos iterativos generan una sucesión de valores a partir de un punto inicial, que, bajo ciertas condiciones, convergen a la solución buscada. El estudio de la convergencia de los métodos iterativos se basa en la convergencia de la sucesión de valores obtenida usando el método iterativo. Existen distintos tipos de convergencia y su estudio permite caracterizar los métodos iterativos.

El orden de convergencia determina la velocidad con la que el método iterativo converge a la solución del problema. Existen métodos iterativos con distinto orden de convergencia y esto nos permite seleccionar el método que mejor se ajuste al problema planteado. Existen otras características de los métodos iterativos que permiten diferenciarlos: el número de puntos necesarios para determinar cada paso de la iteración, el uso de derivadas en los esquemas

iterativos o el número de pasos necesarios para determinar el siguiente valor de la iteración. También se pueden distinguir métodos óptimos en función de la conjetura de Kung Traub. La conjetura de Kung Traub viene dada por $p < 2^{d-1}$, siendo p el orden de convergencia y d el número de evaluaciones de la función en cada paso de la iteración, siendo métodos óptimos cuando se da la igualdad.

El método de Newton ha sido objeto de estudio en numerosas investigaciones. Es un método de orden de convergencia dos, de un paso y óptimo. Sin embargo, como ocurre en todos los métodos iterativos el dominio de convergencia es pequeño, es decir, es necesario conocer con mucha precisión el intervalo donde se encuentra ubicada la solución del problema. Para aumentar el dominio de convergencia se emplean constantes más ajustadas que permiten encontrar la solución con mayor precisión.

El método de Stirling es un método con características similares al método de Newton en cuanto a orden de convergencia y coste computacional. Este método suele ser empleado como una alternativa cuando el método de Newton falla. Sin embargo, el método de Stirling no puede ser aplicado en muchos casos debido a la hipótesis contractiva que deben cumplir las funciones no lineales. Para aumentar la aplicabilidad de este método sustituimos la hipótesis contractiva por condiciones más débiles sobre el operador no lineal.

Por otra parte, los métodos de Newton y Stirling son métodos de orden bajo y, aunque en la práctica el más usado es Newton, la velocidad de convergencia puede ser considerada lenta. Para resolver este inconveniente se estudia una familia paramétrica de alto orden de convergencia. Cuando se trabaja con métodos iterativos con parámetros es preciso estudiar la estabilidad del método, según los valores de dichos parámetros. La estabilidad se analiza a través de las representaciones gráficas del método iterativo: el plano de parámetros y los planos dinámicos.

Debido a la importancia que tienen los métodos iterativos en la resolución de problemas de ingeniería hace que su estudio sea indispensable en educación superior. Teniendo en cuenta el alto componente teórico que presentan los

métodos iterativos se usa una herramienta didáctica que permite visualizar el comportamiento dinámico.

La memoria de la investigación realizada recoge los contenidos anteriormente descritos y es presentada bajo el compendio de artículos en publicaciones científicas.

Abstract

Many problems in science, engineering, or economy involve the search of the solution of an equation. In very few cases it is possible the modelling these problems using a linear equation, being necessary use to higher order equations or systems. On rare occasions, it is possible to determine a solution exactly. So it is necessary to employ to techniques that allow us to solve these problems. Among the different techniques found, the iterative methods that allow us to find an approximate solution to the problem.

Iterative methods generate a sequence of values from a starting point, which, under certain conditions, converge to the desired solution. The study of the convergence of the iterative methods is based on the convergence of the sequence of values obtained using the iterative method. There are different types of convergence and their study allows characterizing the iterative methods.

The order of convergence determines the speed with which the iterative method converges to the solution of the problem. There are iterative methods with different order of convergence and this allows us to select the method that best suits the problem posed. There are other characteristics of the iterative methods that allow them to be differentiated: the number of points necessary to determine each step of the iteration, the use of derivatives in the iterative schemas, or the number of steps necessary to determine the next value of the iteration. Optimal methods can also be distinguished based on the Kung Traub

conjecture. The Kung Traub conjecture is given by $p < 2^{d-1}$, where p is the order of convergence and d is the number of evaluations of the function in each step of the iteration, being optimal methods when equality is given.

Newton's method has been the subject of study in numerous investigations. It is a method of order of convergence two, one-step and optimal. However, as in all iterative methods, the domain of convergence is small, that is, it is necessary to know very precisely the interval where the solution to the problem is located. Tighter constants are used to increase the convergence domain, which allows finding the solution with greater precision.

The Stirling method is a method with characteristics similar to Newton's method in terms of order of convergence and computational cost. This method is usually used as an alternative when Newton's method fails. However, the Stirling method cannot be applied in many cases due to the contractive hypothesis that nonlinear functions must fulfill. To increase the applicability of this method, we substitute the contractive hypothesis for weaker conditions on the nonlinear operator.

On the other hand, the Newton and Stirling methods are low order methods and, although in practice the most widely used is Newton, the speed of convergence can be considered slow. To solve this problem, a parametric family of high order of convergence is studied. When working with iterative methods with parameters, it is necessary to study the stability of the method, according to the values of those parameters. Stability is analyzed through the graphical representations of the iterative method: the parameter plane and the dynamic planes.

Due to the importance of iterative methods in solving engineering problems, their study is indispensable in higher education. Taking into account the great theoretical component that iterative methods present, a didactic tool is used that allows visualizing dynamic behavior.

The memory of the research carried out includes the contents previously described and is presented under the compendium of articles in scientific publications.

Índice

1. Introducción.....	1
2. Contexto y estado del arte.....	9
2.1 Métodos iterativos.....	12
2.1.1 Análisis de la convergencia.....	14
2.1.2 Método de Newton	16
2.1.3 Método de Stirling.....	18
2.1.4 Métodos de alto orden.....	19
2.2 Dinámica compleja.....	21
2.2.1 Introducción a la dinámica compleja.....	23
2.2.2 Conjugación topológica.....	25
2.2.3 Representaciones gráficas	26
2.3 Operadores definidos en un espacio de Banach	31
3. Objetivos.....	35
4. Discusión integradora.....	39
5. Artículos que componen esta tesis doctoral.	45
5.1 Artículo 1	47
5.2 Artículo 2.....	61
5.3 Artículo 3	73
5.4 Artículo 4	89
6. Conclusiones y trabajo futuro.....	101
6.1 Conclusiones	103
6.2 Trabajo futuro	107
7. Bibliografía	109

Índice de Figuras

2.1. Conjunto de Mandelbrot.....	22
2.2. Cuencas de atracción asociadas al método de Newton para el polinomio cúbico $p(z) = z^3 - 1$	25
2.3. Diagrama de iteración gráfica con dos y cincuenta pasos	27
2.4. Diagrama de Feigenbaum	28
2.5. Plano dinámico del método de Newton aplicado al polinomio $p(z) = z^2 - 1$	29
2.6. Plano dinámico del método de Newton aplicado al polinomio $p(z) = z^3 - 1$	30
6.1. Metodología de trabajo en la mejora del método de Newton	103
6.2. Metodología de trabajo en la mejora del método de Stirling.....	105
6.3. Metodología de trabajo en el estudio de una familia paramétrica de métodos de alto orden	106

Esta tesis es un compendio de artículos científicos. A continuación, se muestran las referencias completas de las publicaciones que forman la tesis en el orden en el que se ha desarrollado la investigación.

Título	<i>New Improvement of the Domain of Parameters for Newton's Method</i>
Revista	Mathematics
ISSN	2227-7390
Editorial	mdpi
Volumen	8
Páginas	103-115
Año	2020
DOI	10.3390/math8010103
Estado	Publicado
Factor de Impacto(2018)	1.747 (JCR)
Ranking	Q1 posición: 28 de 324
Página web	https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues/Computational_Methods_Analysis_Applications_2020

Título	<i>Extending the Applicability of Stirling's Method</i>
Revista	Mathematics
ISSN	2227-7390
Editorial	mdpi
Volumen	8
Páginas	35-45
Año	2019
DOI	10.3390/math8010035
Estado	Publicado
Factor de Impacto(2018)	1.747(JCR)
Ranking	Q1 posición: 28 de 324
Página web	https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues/Multipoint_Methods_Solution_Nonlinear_Equations

Título	<i>Study of a High Order Family: Local Convergence and Dynamics</i>
Revista	Mathematics
ISSN	2227-7390
Editorial	mdpi
Volumen	7
Páginas	225-239
Año	2019
DOI	10.3390/math7030225
Estado	Publicado
Factor de Impacto(2018)	1.747 (JCR)
Ranking	Q1 posición: 28 de 324
Página web	https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues/Iterative_Methods_Solving_Nonlinear_Equations_Systems

Título	<i>Aplicación Didáctica en la Educación Superior para la Enseñanza de Métodos Iterativos</i>
Libro	Innovación Educativa en la Sociedad Digital
ISBN	978-84-1324-493-8
Editorial	Dykinson
Páginas	929-938
Año	2019
Estado	Publicado
Ranking	13 de 104 (SPI)

Capítulo 1.

Introducción

'No hay rama de la matemática por abstracta que sea que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real' (Lobachevski)

Las matemáticas, desde el origen de esta ciencia, han estado al servicio de la sociedad tratando de dar respuesta a los problemas que surgían. Hoy en día sigue siendo así, el desarrollo de las matemáticas está ligado a la demanda de otras ciencias que necesitan dar solución a situaciones concretas y reales.

La mayoría de los problemas de ciencia e ingeniería no pueden resolverse usando ecuaciones lineales, es por tanto que hay que recurrir a las ecuaciones no lineales para modelizar dichos problemas (Amat, 2008; véase también Argyros y Magreñán, 2017, 2018), entre otros. El conflicto que presentan las ecuaciones no lineales es que solo en unos pocos casos es posible encontrar una solución única, por tanto, en la mayor parte de los casos, para resolverlas hay que recurrir a los métodos iterativos. Los métodos iterativos generan, a partir de un punto inicial, una sucesión que puede converger o no a la solución. Existen numerosos métodos iterativos, cada uno de ellos con propiedades concretas y que, bajo ciertas condiciones, se puede garantizar la obtención de solución en el problema planteado. Una de las características más destacadas de los métodos iterativos es el orden de convergencia. El orden de convergencia es un indicador de la velocidad del método en alcanzar la solución de la ecuación, cuanto mayor es el orden de convergencia la velocidad de convergencia es mayor.

Esta tesis engloba el estudio de métodos iterativos de distinto orden de convergencia. Por un lado, se tienen los métodos de Newton y Stirling, ambos métodos tienen orden de convergencia dos, por tanto, tardan mucho en alcanzar la solución. Otra dificultad que presentan estos métodos son las limitaciones debidas a su aplicabilidad.

La limitación que presenta el método de Newton está relacionada con el dominio de convergencia. El dominio de convergencia del método de Newton es pequeño, esto quiere decir que se debe conocer con bastante precisión el intervalo donde se encuentra ubicada la solución de nuestro problema. De aquí surge el primer motivo que nos lleva a mejorar los estudios realizados hasta la fecha: **Ampliar el dominio de convergencia para lograr una mayor aplicabilidad del método.**

Por otra parte, el método de Stirling presenta una gran limitación en su enunciado original que se fundamenta en base a condiciones contractivas. Estas condiciones no se cumplen en muchos casos y, por tanto, la realidad, es que el método de Stirling deja de ser una alternativa para la resolución de ecuaciones no lineales. Debido a este problema surge el segundo motivo con la finalidad de emplear este método iterativo en más problemas no lineales: **Encontrar criterios de convergencia más suaves que los ya existentes, para aumentar la aplicabilidad del método de Stirling.**

Para suplir la limitación en cuanto a la velocidad de convergencia que presentan los métodos de convergencia cuadrática, surgen los métodos iterativos de alto orden. El número de estudios de investigación realizados para mejorar estos métodos ha aumentado en los últimos años. En esta investigación se plantea una familia paramétrica de métodos iterativos de orden alto, para el análisis de la convergencia local. Cuando se trabajan métodos de alto orden, es preciso que el estudio de la convergencia esté ligado al estudio de la estabilidad del método iterativo, ya que cuanto mayor es el orden de convergencia menor es la estabilidad del método. La estabilidad de los métodos iterativos se estudia a través de las representaciones en dinámica compleja, que permiten detectar de manera visual en qué puntos el método es estable. De aquí surge el tercer motivo que suscita esta investigación: **Estudiar la convergencia local y analizar el comportamiento dinámico de una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden.**

Dada la actual importancia, que tiene la aplicación de los métodos iterativos en todos los campos de la ciencia, es importante que los estudios de Educación Superior, relacionados con la ingeniería estén al corriente de las innovaciones que se llevan a cabo en esta área. Es por ello importante, la implementación de los nuevos métodos iterativos empleando una herramienta pedagógica que sirva de ayuda para el aprendizaje de esta materia que presenta un componente abstracto muy alto. La computación se pone al servicio de la educación y de las matemáticas poniendo al alcance de los alumnos la posibilidad de comprender cómo es el comportamiento dinámico de los métodos iterativos. De esto se deriva

el último motivo que se lleva a cabo en este estudio: **Aplicar una herramienta didáctica a una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden de convergencia.**

Esta tesis se fundamenta bajo el modelo de compendio de publicaciones cuyos resultados garantizan el cumplimiento de los objetivos marcados en este trabajo de investigación. El resto del documento de la memoria de tesis se organiza de la siguiente forma.

El capítulo 2 es el correspondiente al contexto y estado del arte, en él se introducen conceptos previos, que se desarrollarán en los capítulos siguientes, y las innovaciones que se han realizado en el campo de esta investigación. Este capítulo comienza con una introducción a los métodos iterativos, haciendo especial mención a los métodos sobre los que se han realizado mejoras en este trabajo, y especificando algunos de los principales avances que se han ido realizando. A continuación, se introducen los conceptos fundamentales de dinámica compleja, necesarios para la comprensión de los capítulos siguientes. Para finalizar este capítulo se introducen los operadores definidos en espacios de Banach.

En el capítulo 3 se plantean los objetivos de la tesis y que sirven de esquema para la realización de la investigación. Se ha planteado un objetivo general y para marcar el plan de trabajo unos objetivos específicos.

En el capítulo 4, teniendo en cuenta los objetivos planteados, se desarrollan las ideas que han llevado a cabo la elaboración de los artículos que componen la tesis y justificando la unidad temática de las mismas.

A continuación, el capítulo 5 recoge una copia de los cuatro artículos publicados, ordenados siguiendo el hilo conductor presentado en el capítulo 4, los cuales forman el compendio de la tesis y describen la mayor parte del trabajo realizado de la misma.

El artículo presentado en la sección 5.1 con título: 'New Improvement of the Domain of Parameters for Newton's Method' presenta una mejora del dominio de convergencia de los métodos iterativos para encontrar la solución única de

ecuaciones no lineales en espacios de Banach. En general los dominios de convergencia son pequeños y esto limita la aplicabilidad de los métodos iterativos. La idea implica la construcción de un conjunto más pequeño que en estudios anteriores que contenga a las iteraciones y una constante de Lipschitz menor. En consecuencia, se obtiene un análisis de la convergencia local y semilocal más fino. Para desarrollar esta técnica se emplea el método de Newton.

El artículo presentado en la sección 5.2 con título: 'Extending the Applicability of Stirling's Method' propone aumentar la aplicabilidad del método de Stirling. El método de Stirling se considera como una alternativa al método de Newton cuando éste falla en la convergencia de la solución de la ecuación no lineal. Al igual que el método de Newton se caracteriza por tener convergencia cuadrática y un coste computacional comparable. Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente el método de Stirling tiene deficiencias, ya que la convergencia del método está limitada por las condiciones contractivas. La novedad de este artículo radica en el hecho de que las condiciones de convergencia planteadas en este estudio no requieren de hipótesis contractivas, ampliando así la aplicabilidad del método.

El artículo presentado en la sección 5.3 con título: 'Study of a High Order Family: Local Convergence and Dynamics' presenta el estudio de la dinámica y el análisis de la convergencia local de una familia paramétrica de métodos iterativos para aproximar la solución localmente única de una ecuación no lineal. El estudio de la convergencia local se realiza empleando condiciones de Lipschitz donde el radio de la bola de convergencia es mayor que en estudios anteriores. También se analiza la dinámica del método con la finalidad de estudiar su estabilidad.

En la sección 5.4 se presenta la publicación con título: 'Aplicación Didáctica en la Educación Superior para la Enseñanza de Métodos Iterativos'. Ante la dificultad que presentan los alumnos que cursan la asignatura 'Sistemas dinámicos, discretos y continuos' del Máster de Ingeniería Matemática y Computación de la Universidad Internacional de La Rioja se propone una

herramienta pedagógica, para solventar los problemas de distinción entre los planos paramétricos y dinámicos (Sarría, 2018). Actualmente los métodos iterativos están en continua evolución tratando de buscar métodos que converjan mejor y más rápido. Por tanto, es necesario mostrar a los alumnos los avances que se realizan en este campo y se propone el estudio de la familia paramétrica de la publicación (Amorós et al., 2019), para la utilización de dicha herramienta.

Por último, en el capítulo 6 se desarrollan las conclusiones del trabajo realizado en base a los resultados obtenidos en los artículos publicados, se plantean futuras líneas de investigación relacionadas con el estudio que se ha llevado a cabo y se incluyen los datos relativos a la calidad de las publicaciones. Este capítulo se divide en dos apartados: en la sección 6.1 se incluye un resumen de los resultados obtenidos dando respuesta a los objetivos previamente fijados. La sección 6.2 incluye futuras líneas de investigación en base a los resultados de esta tesis doctoral.

Capítulo 2.

Contexto y estado del arte

'Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, solo se revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella' (Gauss)

La mayoría de los problemas presentes en la naturaleza precisa de modelización para prever su comportamiento. Algunos de estos problemas han podido ser resueltos mediante el planteamiento de una ecuación lineal pero la realidad es que la mayoría precisa de ecuaciones no lineales. Esto provoca que la solución no pueda ser encontrada de manera única y haya que recurrir a diferentes técnicas de resolución para encontrar una solución aproximada del problema.

Una de las técnicas empleadas para la resolución de este tipo de ecuaciones son los métodos iterativos. Los métodos iterativos crean una sucesión de valores que bajo ciertas circunstancias converge a la solución buscada. No todos los métodos iterativos se comportan de la misma manera ante una misma situación. Los métodos iterativos están caracterizados por el orden de convergencia, la estabilidad, la eficiencia computacional o el rango de valores para los cuales el método es válido, entre otros, permitiendo así, elegir el método adecuado en cada problema.

En la sección 2.1 se presenta una introducción de las características de los distintos métodos iterativos, así como una revisión del estado del arte centrandolo la atención en los métodos de Newton, Stirling y métodos de alto orden de convergencia. La revisión del estado del arte permite detectar la cantidad de estudios que se han realizado y que, aún se pueden mejorar los resultados existentes en cuanto al dominio de convergencia, la estimación del error y las condiciones que garantizan la convergencia.

Otro factor que entra en juego para el análisis de los métodos iterativos es el estudio de la dinámica compleja. El análisis dinámico permite realizar comparaciones mediante representaciones gráficas más allá de los resultados numéricos. Los principales conceptos de la dinámica compleja que se han utilizado a lo largo de este trabajo se encuentran en la sección 2.2.

Para terminar este capítulo en la sección 2.3 se dan definiciones de operadores definidos en espacios de Banach y otros conceptos importantes como la derivada de Fréchet.

2.1 Métodos iterativos

Como se ha señalado previamente la mayor parte de los problemas de las ciencias relacionadas con las matemáticas, como la ingeniería, la física, la computación, la química, biología, economía,... precisan de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Evidencias de esta necesidad puede verse en estudios (Argyros, 2008; véase también Argyros et al., 2019 o Behl et al., 2019, Petkovic et al., 2013), entre otras muchas referencias. En la mayoría de los problemas que precisan de este tipo de ecuaciones no es posible encontrar una solución única y se debe recurrir a una solución aproximada.

Los métodos iterativos permiten encontrar una solución aproximada, bajo ciertas condiciones de una ecuación

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

donde $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una función real definida en un intervalo abierto I . Sin pérdida de generalidad podríamos definir la función trabajando sobre variable compleja, de forma, que la ecuación (1) se reescribe como $f(z) = 0$ para $f: I \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

En base a los criterios que definen los métodos iterativos se consideran distintas clasificaciones que permiten distinguir unos de otros y elegir el más adecuado para cada situación. Se consideran métodos **con o sin memoria** en función de los datos necesarios para obtener el siguiente valor en cada iteración. Un método sin memoria solo precisa del valor obtenido en la iteración anterior:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

Mientras que un método con memoria precisa de los valores obtenidos en las iteraciones anteriores:

$$x_{n+1} = \phi(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

En función del número de pasos en cada iteración se obtienen los métodos de un paso o multipaso. Un método de un paso sigue el esquema desarrollado en la ecuación (2) empleando d evaluaciones de la función o sus derivadas en cada paso. Sin embargo, un método multipaso viene determinado de la forma:

$$\begin{aligned} y_n &= \varphi(x_n), \\ x_{n+1} &= \phi(x_n, y_n), \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Traub (1964) demostró que para diseñar un método de un paso de orden p es necesario que en la expresión se incluyan derivadas de orden $p - 1$ como mínimo. Los métodos multipaso han despertado gran interés en las últimas décadas ya que permiten aumentar el número de pasos para lograr aumentar el orden de convergencia, sin incrementar el número de evaluaciones de la función o de sus derivadas.

Por último, en cuanto a la caracterización de los métodos iterativos se destaca métodos con o libres de derivadas. En muchas ocasiones las ecuaciones con las que se trabajan, el cálculo de las derivadas puede resultar difícil. Una técnica empleada habitualmente para eliminar las derivadas es la sustitución de éstas por esquemas de diferencias finitas.

Una vez presentados los distintos esquemas de métodos iterativos otro comportamiento a tener en cuenta cuando se trabaja con estos métodos es el análisis de la convergencia.

2.1.1 Análisis de la convergencia

Como se ha definido al inicio de este capítulo, los métodos iterativos crean una sucesión de valores a partir de un punto inicial, así el análisis de la convergencia de los métodos iterativos se centra en el estudio de la convergencia de la sucesión de valores que tienden a la solución buscada. El estudio de la convergencia de los métodos iterativos se divide en tres categorías:

El análisis de la **convergencia local** se basa en condiciones específicas sobre la función $f(x)$ que define la ecuación (1) y en la información de la solución α de la misma.

El análisis de la **convergencia semilocal** se basa en condiciones específicas sobre la función $f(x)$ que define la ecuación (1) y en la información sobre el punto de partida x_0 del método iterativo considerado.

El análisis de la **convergencia global** se basa en condiciones específicas sobre la función $f(x)$ que define la ecuación (1) sobre un rango de valores donde está definida.

A continuación, se define uno de los conceptos más importantes en el estudio de los procesos iterativos, es el de **orden de convergencia**.

Definición 1.1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a un valor x^* . Si existe una constante $C \in (0,1)$ y $p \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^* - x_{n+1}|}{|x^* - x_n|^p} = C \quad (5)$$

diremos que $\{x_n\}$ es convergente de orden p .

El orden de convergencia de un método iterativo viene determinado por la velocidad con la que se alcanza la solución de la ecuación (1). Cuando un método iterativo tiene un alto orden de convergencia en cada iteración se aproxima más a la solución que un método con un orden de convergencia bajo. Por tanto, con estos métodos se necesitarán menos iteraciones para encontrar una

aproximación a la solución con una tolerancia determinada. La relación que existe entre el orden y la velocidad de convergencia puede consultarse en (Ortega y Rheinboldt, 1970).

En relación con el orden de convergencia existen otros parámetros que permiten comparar cuantitativamente entre sí distintos métodos.

Ostrowski (1966), define el índice de eficiencia como

$$I = p^{1/d} \tag{6}$$

donde p es el orden de convergencia del método, según la definición 1, y d es el número de evaluaciones de la función f y sus derivadas, que se realizan en cada iteración.

La conjetura de Kung y Traub (1974), establece que el orden de convergencia de un método sin memoria con d evaluaciones funcionales por cada iteración cumple:

$$p \leq 2^{d-1} \tag{7}$$

2.1.2 Método de Newton

El método de Newton es el método iterativo más conocido para resolver problemas que siguen el esquema de la ecuación (1). El método de Newton consiste en construir una sucesión de la forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0 \quad (8)$$

a partir de un punto inicial x_0 . En condiciones adecuadas la sucesión $\{x_n\}$ será convergente. Según los criterios establecidos previamente en la clasificación de los métodos iterativos, el método de Newton es de un paso, tiene convergencia cuadrática y es un método óptimo.

Ha sido objeto de estudio para numerosos matemáticos, puede consultarse en (Ezquerro et al., 2010), para conocer los orígenes de este método. La generalización del método de Newton (5) a espacios de Banach se debe a Kantorovich, que permite reescribir la ecuación (1) de la forma (Kantorovich, 1982):

$$F(x) = 0 \quad (9)$$

donde F es un operador definido entre dos espacios de Banach X e Y , y la expresión del método Newton-Kantorovich viene dada por:

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0 \quad (10)$$

donde $F'(x_n)$ es un operador lineal definido entre dos espacios de Banach X e Y y $F'(x_n)^{-1}$ es su inverso. Por tanto, en cada iteración del método de Newton-Kantorovich hay que invertir un operador lineal o resolver la ecuación asociada $F'(x_n)u_n = -F(x_n)$ siendo $x_{n+1} = x_n + u_n$. Para profundizar más sobre el método de Newton-Kantorovich puede consultarse (Ezquerro et al., 2010 o Potra y Pták, 1984).

Partiendo de las condiciones de Newton-Kantorovich, sobre la función F , éstas limitan los casos en los que se puede emplear del método de Newton por la exigencia sobre el operador F (Kantorovich, 1982). En los últimos años se han realizado mejoras sobre las condiciones del operador que permiten ampliar la aplicabilidad del método de Newton. En (Cianciaruso y Pascale, 2006) empleando sucesiones mayorizantes y condiciones más débiles sobre el operador F se dan estimaciones del error más precisas, mejorando los resultados anteriores como (Hernández, 2001b). En (Argyros, 2008) se recopilan los resultados existentes hasta la fecha sobre el análisis de la convergencia local y semilocal y permite su aplicación en la ingeniería, modelado de sistemas económicos-dinámicos y ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. En (Ren y Argyros, 2010) se amplía el radio de convergencia bajo la condición de Hölder continua de la función F . En (Argyros y Hilout, 2012, 2013) se analiza el estudio de la convergencia del método de Newton y mejora los resultados anteriores como, (Argyros, 2004) caracterizado por considerar el operador F como Fréchet diferenciable y emplear sucesiones mayorizantes o en (Argyros y Hilout, 2010; véase también Argyros et al., 2011, Ortega y Rheinboldt 1970), donde trabajan con criterios de convergencia más débiles. Mostrando mejoras de estos resultados en (Argyros et al., 2019), bajo las hipótesis de que la función F de la ecuación (9) y su derivada de Fréchet satisfacen algunas condiciones generalizadas de Newton-Mysouskii dan estimaciones precisas sobre los radios de convergencia.

A partir del método de Newton se han obtenido otros métodos que se derivan de él. Cómo es el caso del método de Newton amortiguado o relajado como puede verse en (Magreñán, 2013 o Magreñán y Gutiérrez, 2015). Este método consiste en la aplicación de un parámetro amortiguador en cada paso de la iteración que modifica las propiedades del método de Newton. En estudios recientes como (Amat, 2013) se estudia la convergencia semilocal del método de Newton relajado de dos pasos y en (Amat, Magreñán y Romero, 2016) una mejora sobre la elección del parámetro amortiguado.

2.1.3 Método de Stirling

El método de Stirling es una alternativa útil al método de Newton para aproximar puntos fijos de la ecuación (1), lo que supone considerar:

$$x = F(x) \quad (11)$$

donde F es un operador definido en un espacio X de Banach. Al igual que el método de Newton tiene orden de convergencia dos y se define de la forma:

$$x_{n+1} = x_n - [I - F'(y_n)]^{-1}[x_n - F(x_n)], \quad y_n = F(x_n), \quad n \geq 0 \quad (12)$$

Este método ha sido estudiado bajo hipótesis contractivas (Stirling, 1730) y (Rall, 1975), sobre el operador involucrado, limitando la aplicabilidad del mismo. Para solventar la dificultad que presenta el método de Stirling se han realizado estudios para eliminar las hipótesis contractivas a cambio de otras condiciones más suaves de la función F .

En (Argyros, 1995) se proporcionan resultados de convergencia y estimaciones del error considerando espacios de Banach y una norma generalizada definida de un espacio lineal a un espacio de Banach. En (Argyros, 2003) se presenta el estudio de la convergencia local y semilocal basada en criterios del tipo Kantorovich no necesariamente contractivas, mejorando los resultados en (Maruster, Georege y Argyros, 2017). En otros estudios como (Parhi y Gupta, 2010a, 2010b, 2011), se estudia la convergencia semilocal asumiendo que la primera derivada Fréchet del operador es Hölder continua. Se mejoran los resultados anteriores imponiendo una condición de continuidad sobre el operador F , una condición más débil que Lipschitz o Hölder dada en estudios anteriores en (Parhi, Singh y Gupta, 2016).

2.1.4 Métodos de alto orden

Existen otros métodos con órdenes de convergencia mayores, Halley, Chebyshev, súper-Halley, Steffensen, Jarrat..., ver (Gutiérrez y Hernandez, 1998 o Kou y Argyros, 1993). Al igual que con los métodos de Newton y Stirling se han realizado estudios para mejorar los dominios de convergencia y las condiciones sobre el operador involucrado. La principal dificultad de estos métodos es la utilización de las derivadas que limitan su aplicabilidad, así los principales avances se centran en proponer técnicas para su eliminación. Algunas de las publicaciones relevantes sobre estas mejoras (Amat, Hernández y Romero, 2008; véase también Argyros y George, 2015; Argyros y Gonzalez, 2015; Chicharro et al., 2013; Li, Liu y Kou, 2014).

Otro de los objetivos en el estudio de los métodos iterativos es obtener métodos con un **orden de convergencia alto** y que sean **óptimos**. Los estudios realizados en esta línea de investigación son muy numerosos, algunos ejemplos (Argyros y George, 2015; Argyros y González, 2015; Lofti et al., 2015; Magreñán, 2016), entre otras muchas referencias que se podrían citar.

Por tanto, para lograr aumentar el orden de convergencia se suele recurrir a incrementar el número de pasos en los métodos iterativos, dando lugar a métodos multipaso de la forma (4).

Pero además de recurrir a esquemas multipaso otra técnica que se emplea para aumentar el orden de convergencia es la composición de dos métodos iterativos (Ortega y Rheinboldt, 1970). Pero esto también presenta un inconveniente ya que el número de evaluaciones funcionales en cada iteración se verá afectado. La relación entre las evaluaciones de una función y sus derivadas en cada iteración permite comparar distintos métodos iterativos en función del índice de eficiencia (Ostrowski, 1966). Y en función de la conjetura de Kung-Traub, si se da la igualdad en la ecuación (7), permite caracterizar métodos óptimos.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de los estudios realizados al emplear las dos técnicas anteriormente descritas dando lugar a métodos óptimos de orden de convergencia cuatro, ocho o dieciséis, como en (Cordero et al., 2016), y otros métodos de alto orden de convergencia no óptimos, como en (Honorato, Plaza y Romero, 2011). Entre los métodos de orden de convergencia cuatro destacamos las publicaciones: (Cordero y Torregrosa, 2011), los autores diseñan una familia de orden cuatro con la composición de los métodos de Newton y Steffensen, y en (Chicharro et al., 2015), considerando los mismos métodos se emplea una aproximación de la derivada del operador F de (9), en lugar de calcular la derivada, lo que permite aplicar el método a situaciones en las que es difícil el cálculo de la derivada. En (Cordero et al., 2016) se estudia la convergencia de una familia paramétrica de orden cuatro. En (Magreñán, 2014) se estudia una familia paramétrica de tipo Jarrat, mejorando el orden de convergencia hasta cinco, mejorando la aplicabilidad el método anterior, en (Argyros y Gonzalez, 2015), con hipótesis que afectan solo a la primera derivada de Fréchet.

Entre las publicaciones de referencia de los métodos iterativos de orden superior a cuatro se pueden destacar: En (Cordero et al., 2013) se estudia el método formado por la composición de los métodos de Chebyshev y Halley mejorando la convergencia hasta sexto orden. En (Budzko, 2015) se analiza una familia de métodos paramétricos más estable que los esquemas de Newton, Traub u Ostrowski, con convergencia de sexto orden o en (Wang y Kou, 2011) en el que se estudia una variante del método de Jarrat analizando la convergencia semilocal con relaciones de recurrencia, entre otros textos que se podrían citar.

Llegando incluso a obtener métodos iterativos de orden dieciséis como en (Artidiello, 2014), en este estudio se consideran funciones peso o en (Magreñán, 2018), donde también se realiza el estudio de la convergencia de un método de este orden.

Ante el abanico que existe de los diferentes métodos iterativos, se puede decir, sin pérdida de generalidad, que para cada situación existe un método

mejor que otro, no hay un método que valga para cualquier situación y en términos de velocidad, dominios de convergencia... se puede elegir el método adecuado para cada problema. Existen publicaciones de referencia en las que los métodos se centran en resolver un determinado tipo de ecuación, como es el caso de (Magreñán, 2014), en el que se estudia una familia paramétrica del tipo Jarrat de orden cuatro aplicada a polinomios cuadráticos, en (Artidiello et al., 2014) empleando un método óptimo de orden dieciséis aplicado a funciones tridimensionales o en (Gutiérrez et al., 2010), que se aplica a polinomios cuadráticos una familia de métodos iterativos entre otros textos.

2.2 Dinámica compleja

Un sistema dinámico es un sistema que cambia con el tiempo. La trayectoria de una partícula, la propagación de una epidemia, la evolución de la población, los modelos económicos... son ejemplos de sistemas dinámicos.

Cuando trabajamos con un sistema dinámico nos interesa el comportamiento que van a tener a lo largo del tiempo, no solo la solución analítica como ocurre en otras disciplinas matemáticas en las que conocer la solución es el objetivo del problema, que es lo que ocurre con los sistemas estáticos que al contrario de lo que ocurre con los dinámicos, estos no cambian con el tiempo.

Aunque en menor medida que el estudio realizado en los últimos años en los métodos iterativos se ha producido también un avance en la dinámica compleja. Partiendo de publicaciones de referencia como son (Blanchard, 1984, 1994; véase también Devaney, 1992), el estudio clásico de la dinámica compleja se basaba en la solución analítica. Gracias a la revolución que ha supuesto la evolución de la computación, la dinámica compleja asociada a los métodos iterativos también ha supuesto una gran innovación, permitiendo estudiar el comportamiento dinámico de los métodos iterativos en gran cantidad de situaciones diferentes.

Los sistemas dinámicos se clasifican en función del tratamiento del tiempo. Siendo sistemas dinámicos discretos aquellos en los que el tiempo se mide en instantes discretizados, en instantes de tiempo concretos. Si el tiempo es medido de manera continua, se tiene un sistema dinámico continuo que viene representado por ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales.

Uno de los ejemplos más conocidos por sus características dinámicas es el conjunto de Mandelbrot (Mandelbrot 1977 y 1987). El conjunto de Mandelbrot viene determinado por la familia de funciones $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda$, dicho conjunto dentro de su simplicidad presenta un comportamiento dinámico muy interesante, como puede verse en la Figura 2.1.

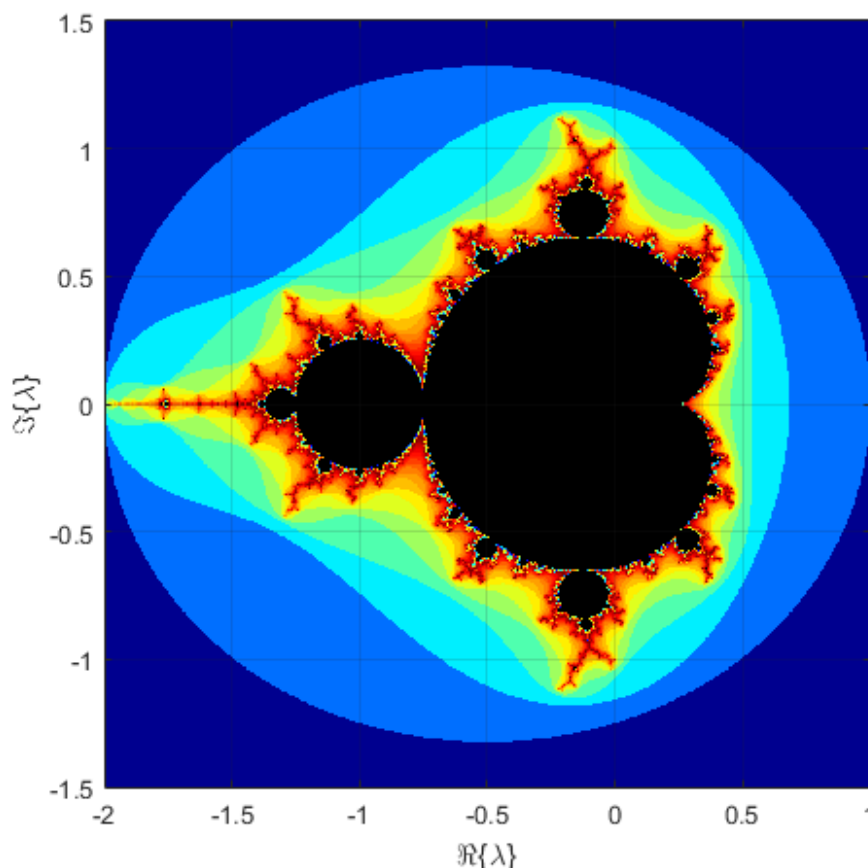


Figura 2.1. Conjunto de Mandelbrot (Chicharro, 2017).

El análisis dinámico consiste en la aplicación de punto fijo de los esquemas iterativos sobre determinados polinomios no lineales. Como resultado de este

análisis se obtienen los puntos fijos que generalmente coinciden con las raíces del polinomio. La dinámica de estos puntos permite caracterizar el método iterativo determinando su estabilidad. La representación gráfica de los métodos permite obtener conclusiones sobre las propiedades de dichos métodos.

2.2.1 Introducción a la dinámica compleja

En este apartado se van a introducir los conceptos más importantes relacionados con la dinámica, aplicada sobre variable compleja. El planteamiento sobre variable real es muy similar.

Definición 2.1. Sea $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la esfera de Riemann (Blanchard, 1982) y sean $P(z)$ y $Q(z)$ dos polinomios complejos, tales que no tengan factores comunes se define la función $R: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$.

Puntos fijos, puntos críticos y puntos periódicos

Definición 2.2. Los **puntos fijos** son los que cumplen $R(z^*) = z^*$ y según sea el valor de $|R'(z^*)|$ se define la característica dinámica de ellos. Así el punto fijo, z^* , es:

- Punto fijo superatractor si $|R'(z^*)| = 0$
- Punto fijo atractor si $0 < |R'(z^*)| < 1$
- Punto fijo repulsor si $|R'(z^*)| > 1$
- Punto fijo indiferente si $|R'(z^*)| = 1$

Definición 2.3. Se llaman **puntos fijos extraños** a los puntos fijos del operador que no coinciden con las raíces del polinomio sobre el que se aplica.

Definición 2.4. Se llama **órbita** de un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ al conjunto formado por la aplicación sucesiva de R sobre el punto: $\{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}$. Donde

$R^k(z) = \overbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}^k$ es la composición de R consigo misma k veces.

Definición 2.5. Los **puntos periódicos**, se definen de manera similar a los puntos fijos. Un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ es periódico de periodo P si, $R^P(z_0) = z_0$ y $R^k(z_0) \neq z_0$ para todo $k < P$.

Definición 2.6. Se llama **autovalor o multiplicador** de un punto fijo, z^* , al valor $\tau = |(R^P)'(z^*)|$ que da lugar a la órbita de periodo P . Así los puntos periódicos también se pueden clasificar según la característica dinámica como:

- Punto periódico superatractor si $\tau = 0$
- Punto periódico atractor si $0 < |\tau| < 1$
- Punto periódico repulsor si $|\tau| > 1$
- Punto periódico indiferente si $|\tau| = 1$

Definición 2.7. Los puntos tales que $R'(z) = 0$, se llaman **puntos críticos**, en particular los puntos críticos son superatractores. Los puntos críticos que no coinciden con las raíces del polinomio se denominan **puntos críticos libres** y tendrán un papel fundamental en el estudio del comportamiento dinámico del método.

El estado final de las órbitas de cualquier punto del plano complejo determina las cuencas de atracción.

Definición 2.8. La **cuenca de atracción** de un punto fijo, $z^* \in \hat{\mathbb{C}}$ atractor, es el conjunto de los puntos del plano cuyas iteraciones convergen hacia el punto fijo, es decir, $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z) \rightarrow z^*, n \rightarrow \infty\}$.

La Figura 2.2 muestra las cuencas de atracción del método de Newton cuando se aplica sobre el polinomio cúbico $p(z) = z^3 - 1$. A pesar de que se entrará en mayor detalle sobre este aspecto en la sección 2.2.3, mencionar que cada cuenca de atracción se representa con un color diferente. De esta forma un punto de las diferentes regiones azules, su órbita tenderá al punto fijo correspondiente a dicha cuenca, de la misma forma ocurre para las cuencas de color amarillo y rojo.

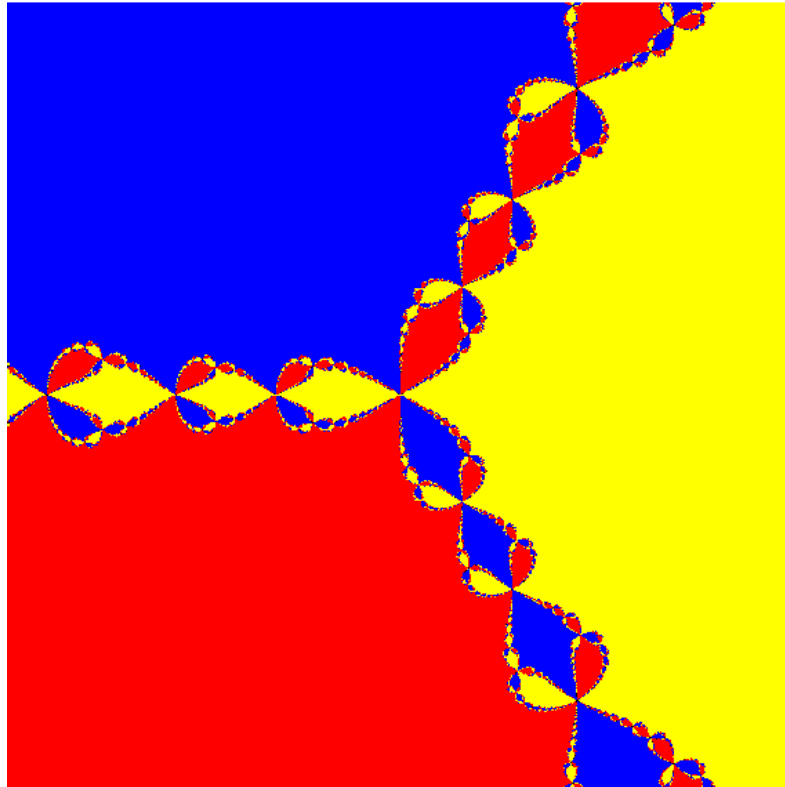


Figura 2.2. Cuencas de atracción asociadas al método de Newton para el polinomio cúbico $p(z) = z^3 - 1$ (Sarría, 2018).

2.2.2 Conjugación topológica

Un concepto muy importante para comprender el comportamiento de las aplicaciones racionales, desde el punto de vista dinámico, es el de conjugación. Para introducir este concepto se emplea la transformación de Möbius que son aplicaciones racionales de grado 1.

Definición 2.9. Se llama **transformación de Möbius** $h: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de parámetros $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ a la función $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ tales que $ad - cd \neq 0$.

Cuando se trabaja con funciones racionales que dependen de parámetros, las conjugaciones topológicas, en algunos casos, permiten reducir el número de parámetros involucrados. Para un estudio más amplio sobre conjugaciones pueden consultarse algunos textos como (Beardon, 1991; Gutiérrez y Plaza, 2013), entre otras referencias que se podrían citar.

Definición 2.10. De esta forma sean $R_1, R_2: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dos funciones racionales, son **conjugadas** si y solo si existe una transformación de Möbius, tal que $h \circ R_1 \circ h^{-1}(z) = R_2(z), \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$.

En el siguiente teorema se resumen las principales propiedades de las conjugaciones topológicas:

Teorema 2.11. Sean $R_1, R_2: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dos funciones y $\varphi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una conjugación topológica entre $R_1(z)$ y $R_2(z)$ tal que se satisface $\varphi \circ R_1 \circ \varphi^{-1}(z) = R_2(z), \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$.

Entonces:

- $\varphi^{-1}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, es también una conjugación topológica entre $R_2(z)$ y $R_1(z)$.
- $\varphi \circ R_1^n(z) = R_2^n \circ \varphi(z), \forall n \in \mathbb{N}$.
- p es un punto periódico de $R_1(z)$ si y solo si $\varphi(p)$ es un punto periódico de $R_2(z)$. Además, p y $\varphi(p)$ tienen el mismo periodo.
- Si p es un punto periódico de $R_1(z)$ y $\varphi'(p)$ no se anula en la órbita de p , entonces p y $\varphi(p)$ tienen la misma característica dinámica (atractor, repulsor, indiferente...)
- Si p es un punto periódico de $R_1(z)$ con cuenca de atracción $\mathcal{B}(p)$, entonces la cuenca de atracción de $\varphi(p)$ es $\varphi(\mathcal{B}(p))$.
- Los puntos periódicos de $R_1(z)$ son densos en $\hat{\mathbb{C}}$, si y solo si, los puntos periódicos de $R_2(z)$ son densos en $\hat{\mathbb{C}}$.

2.2.3 Representaciones gráficas

Las representaciones gráficas permiten visualizar las características de los métodos iterativos. Se distinguen las representaciones en dinámica real y compleja.

Representación en dinámica real

Los métodos iterativos que trabajan sobre variable real pueden representar los datos gráficamente empleando, el método de iteración gráfica o el diagrama de Feigenbaum, también llamado diagrama de bifurcaciones.

El método de **iteración gráfica** consiste en la representación de la órbita de un punto inicial y los puntos fijos del método, ver Figura 2.3. De manera que se representa sobre el mismo gráfico las funciones $y = x$ e $y = O(x)$, siendo el operador de punto fijo. Los puntos de corte entre las dos funciones determinan los puntos fijos del método. Partiendo de un punto inicial x_0 , se sitúa sobre la función $y = x$ y se traza una vertical hasta $y = O_f(x)$. Seguidamente se traza una horizontal hasta $y = x$. El proceso se repite hasta que se alcanza un punto fijo o por el contrario diverge a infinito.

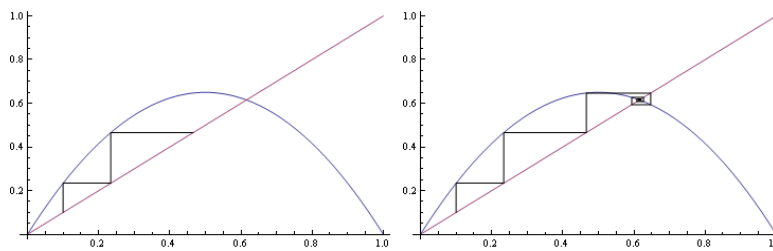


Figura 2.3. Diagrama de iteración gráfica con dos y cincuenta pasos (Sarría, 2018).

El **diagrama de Feigenbaum** es empleado en los métodos iterativos que presentan parámetros permitiendo detectar para qué rango de valores el método tiene un comportamiento u otro. El diagrama representa para distintos valores del parámetro los distintos puntos finales para un determinado valor inicial x_0 , ver Figura 2.4.

El diagrama de Feigenbaum permite determinar el rango de valores en los que el método va a tener un comportamiento u otro.

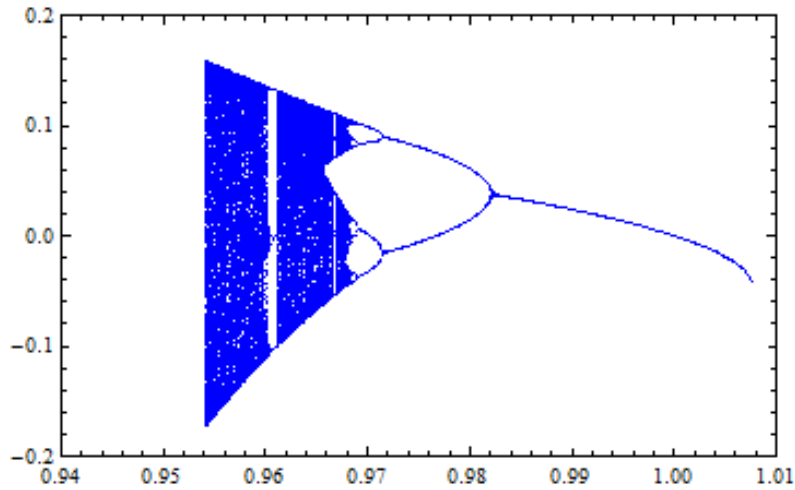


Figura 2.4. Diagrama de Feigenbaum (Sarría, 2018).

En (Magreñán, 2014) se puede encontrar una descripción detallada del método de iteración gráfica y el diagrama de Feigenbaum, además se introduce un nuevo concepto fruto de la combinación de la información obtenida con los dos métodos anteriores denominado: **plano de convergencia**.

Representaciones en dinámica compleja

Al igual que las representaciones en dinámica real, existen dos representaciones principales para el análisis de la dinámica compleja. Por un lado, se tiene el plano dinámico cuyo objetivo es representar el estado final de la órbita de los puntos iniciales. Por otro lado, el plano paramétrico que aporta información importante sobre los distintos valores del parámetro cuando se trabaja con una familia paramétrica de métodos iterativos.

El **plano dinámico** determina sobre cuál de los puntos fijos atractores va a tender la órbita inicial de dicho punto para todos los puntos del plano complejo. Para ello, se representa con colores diferentes cada uno de los puntos fijos atractores y cada punto inicial con el color del punto atractor fijo al que converge.

Para entender el comportamiento del plano dinámico se ilustra un ejemplo conocido como el problema de Cayley. El cual consiste en analizar las cuencas de

atracción de cada una de las raíces del polinomio complejo sobre el cual se aplica el método de Newton, puede consultarse (Magreñán, 2013) para profundizar en el problema. Para polinomios cuadráticos de la forma $p(z) = z^2 - a$, con $a \in \mathbb{C}$, el problema es sencillo ya que las cuencas de atracción se corresponden con cada uno de los semiplanos que definen ambas raíces, como se puede observar en la Figura 2.5 particularizando para el caso $p(z) = z^2 - 1$. Donde se puede observar dos semiplanos. Para los puntos de partida situados en la región $\{z \in \hat{\mathbb{C}}: \text{Re}(z) < 0\}$ convergen a la raíz $z^* = -1$ y los puntos que parten desde la región $\{z \in \hat{\mathbb{C}}: \text{Re}(z) > 0\}$ convergen a la raíz $z^* = 1$. En la separación de ambas regiones, el eje imaginario, donde el método presenta un comportamiento caótico.

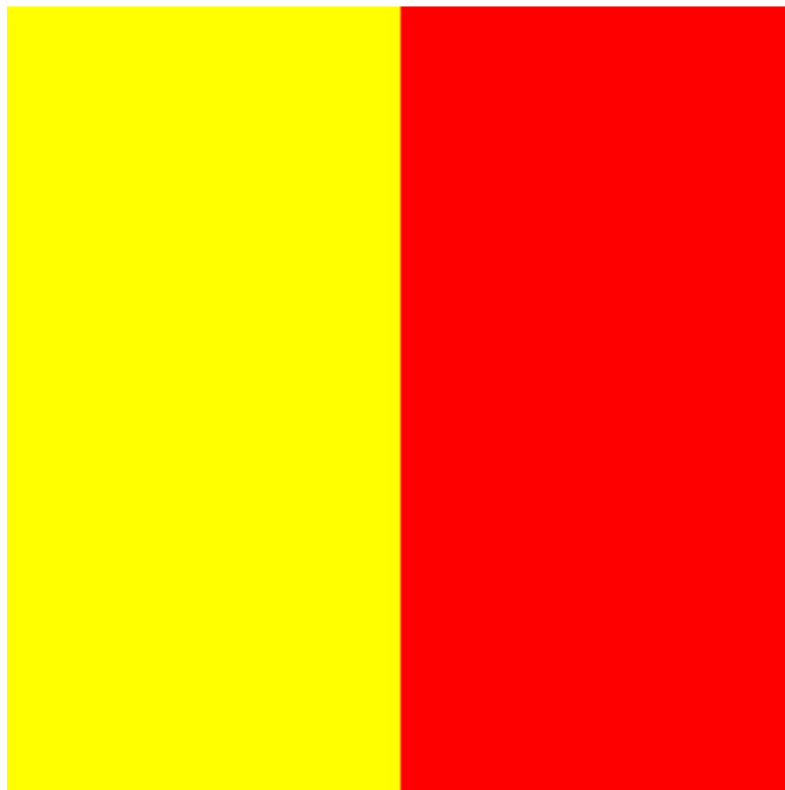


Figura 2.5. Plano dinámico del método de Newton aplicado al polinomio $p(z) = z^2 - 1$ (Sarría, 2018).

Sin embargo, al considerar los polinomios de tercer grado de la forma: $p(z) = z^3 - a$, se encontró que no era capaz de resolverlo. Esto es debido a la caracterización de las cuencas de atracción que tienen los polinomios de tercer grado, como se puede observar en la Figura 2.6. Para el caso concreto $p(z) = z^3 -$

1, la situación es mucho más complicada. La separación entre las tres raíces $\left\{1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$, no es tan claro como en el ejemplo anterior y es comprensible que Cayley encontrara dificultades para analizar esta situación. Este tipo de comportamientos fue estudiado años después. En 1977, Mandelbrot introduce el concepto fractal en sus libros, que ayuda a entender este comportamiento dinámico que presentan los polinomios cúbicos (Mandelbrot, 1977, 1987).

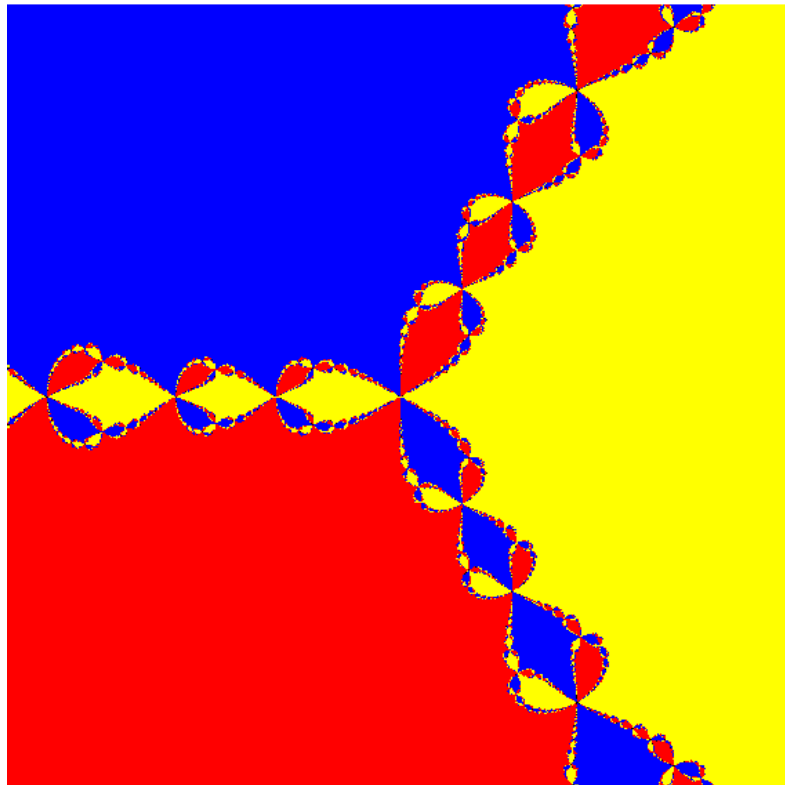


Figura 2.6. Plano dinámico del método de Newton aplicado al polinomio $p(z) = z^3 - 1$ (Sarría, 2018).

Por otro lado, se tiene el **plano paramétrico** que es una herramienta fundamental para el estudio de las familias paramétricas de métodos iterativos. La finalidad del plano paramétrico es obtener la información de los parámetros que aseguran la convergencia del método. Lo primero que se hace al trabajar con este tipo de familias es representar el plano paramétrico para visualizar los valores de los parámetros que aseguran la convergencia del método y trasladar la información al plano dinámico para comprobar que los resultados esperados funcionan debidamente. La aplicación de estas técnicas ha dado lugar a una serie

de publicaciones relevantes en la materia que muestran el estudio de planos dinámicos muy interesantes, incluyendo comportamientos periódicos y otras anomalías (Amat et al., 2005, 2008, 2010; Chicharro et al., 2013; Chun et al., 2012; Cordero et al., 2013; Gutiérrez et al., 2010; o Magreñán y Argyros, 2014).

Por último, para cerrar este capítulo y en relación con la investigación que se ha llevado a cabo en esta tesis, es necesario definir algunos conceptos y teoremas relacionados con los espacios de Banach.

2.3 Operadores definidos en un espacio de Banach

Esta sección comienza con la definición de un espacio de Banach y a continuación, se citan algunos de los principales resultados sobre operadores en espacios de Banach.

Definición 2.12. (Espacio de Banach). Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} , una norma sobre X es una aplicación $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$;
- $\|x\| = 0$, si y solo si $x = 0$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in X$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Un espacio vectorial dotado de una norma es un **espacio normado**. Definiendo $d(x, y) = \|x - y\|$ se obtiene una distancia en X . Un espacio normado que es completo para la distancia inducida por la norma es un **espacio de Banach**.

Sea $F: X \rightarrow Y$ un operador definido entre dos espacios de Banach X e Y . Se desea estudiar la resolución de una ecuación $F(x) = 0$, bajo ciertas condiciones sobre el operador F . Para un estudio más profundo de los espacios de Banach pueden consultarse (Argyros, 2007; véase también Gutiérrez, 2006 o González, 2009).

Se denota por $\mathcal{L}(X, Y)$ al conjunto de los operadores lineales y acotados entre los espacios X e Y . Particularizando el caso $\mathcal{L}(X)$, cuando $X = Y$. Sea $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, se denota $\mathcal{D}(L)$ al dominio y $\mathcal{R}(L)$ a su rango. Se tiene que L es invertible si existe un operador L^{-1} tal que:

- $L^{-1}Lx = x, \forall x \in \mathcal{D}(L),$
- $LL^{-1}x = x, \forall x \in \mathcal{R}(L).$

Al operador L^{-1} se denomina inverso de L y es también un operador lineal.

A continuación, se citan algunos resultados de inversión de operadores dados en un espacio X sobre sí mismo.

Lema 2.13. (Banach). Sea $L \in \mathcal{L}(X)$ verificando que:

$$\|L\| \leq k < 1$$

Entonces el operador $I - L$ tiene inverso continuo y además

$$\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - k}.$$

Del lema anterior se derivan dos resultados ligeramente diferentes:

Lema 2.14. Sea $L \in \mathcal{L}(X)$. Existe L^{-1} si y solo si existe un operador invertible $M \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\|I - ML\| < 1.$$

En este caso,

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - ML)^n M$$

y

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|I - ML\|}$$

Lema 2.15. Sea $L \in \mathcal{L}(X)$. Existe L^{-1} si y solo si existe un operador invertible $M \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\|M - L\| < \frac{1}{\|M^{-1}\|}$$

En este caso,

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - M^{-1}L)^n M^{-1}$$

y

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|I - M^{-1}L\|} \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|M^{-1}\|\|M - L\|}$$

A continuación, se presentan algunos resultados importantes relativos al cálculo diferencial e integral en espacios de Banach.

Definición 2.16. Sea $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $x_0 \in X$, si $\forall x \in X$ se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + hx) - F(x_0)}{h} = L(x)$$

Entonces F es diferenciable Gâteaux, o débilmente diferenciable en x_0 . Así el operador lineal L es la derivada de Gâteaux de F en x_0 , y se denota por $L = dF(x_0)$.

Definición 2.17. Si el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + hx) - F(x_0)}{h} = L(x)$$

Es uniforme en el conjunto $\{x \in X; \|x\| = 1\}$, entonces F se dice diferenciable Fréchet y en este caso, al operador lineal L se llama derivada de Fréchet (o diferencial de Fréchet) de F en x_0 y se denota por $L = F'(x_0)$.

Teorema 2.18. (Convergencia del Método de Stirling bajo condiciones contractivas, ver Rall (1973)).

Si

$$\|F'(x)\| < 1, x \in D$$

La sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_{n+1} = x_n - [I - F'(y_n)]^{-1}[x_n - F(x_n)], \quad y_n = F(x_n), \quad n \geq 0$$

Converge a la única solución $x^* \in D$ de la ecuación $F(x) = 0$ para cualquier punto inicial x_0 . Además,

$$\|x^* - x_0\| \leq \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)^n \frac{\|x_0 - F(x_0)\|}{1-\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A continuación, un ejemplo ilustrativo de la limitación que supone la condición contractiva del método de Stirling. Consideramos la función $G(x) = \frac{x^2}{2}$ con $x \in [-1, 1]$, entonces no se cumple la condición ya que $\|G'(x)\| \leq 1$.

Capítulo 3.

Objetivos

‘La verdad se encuentra en la simplicidad y no en la multiplicidad y confusión de las cosas’ (Newton)

La aplicación de los distintos métodos iterativos en los diferentes campos de la ciencia pone de manifiesto que no existe un criterio único para aplicar a todos los problemas y que es necesario analizar los criterios de convergencia de métodos iterativos de orden bajo, así como los de orden alto. Cuando se trabaja con familias paramétricas también es preciso analizar el comportamiento dinámico que presentan. En base a esto se enuncia el objetivo principal de la tesis y los objetivos específicos a satisfacer y que han servido de guía para el desarrollo de la misma.

Objetivo principal:

Mejorar los resultados de la convergencia de los métodos iterativos de orden dos y alto orden, así como analizar el comportamiento dinámico de una familia paramétrica.

En relación con el objetivo general de este estudio surgen varios objetivos específicos que marcan la trayectoria de esta investigación.

Objetivo 1:

Mejorar la aplicabilidad de los métodos de orden cuadrático.

Objetivo 2:

Extender el dominio de convergencia del método de Newton para encontrar la solución local en espacios de Banach.

Objetivo 3:

Encontrar criterios de convergencia del método de Stirling más suaves que los ya existentes.

Objetivo 4:

Estudiar la convergencia de una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden de convergencia.

Objetivo 5:

Analizar el comportamiento dinámico de una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden de convergencia.

Objetivo 6:

Aplicar una herramienta didáctica a una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden de convergencia.

Capítulo 4.

Discusión integradora

‘Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay más allá’ (Hipatia de Alejandría)

El estudio de numerosos problemas en diversas áreas tales como biología, química, economía, física, ciencias ambientales e ingeniería, entre otras muchas disciplinas, precisan de ecuaciones no lineales para resolverlos. La dificultad de encontrar una solución única nos lleva a recurrir a los métodos iterativos.

Se considera la aproximación a la solución local única z^* de la ecuación (1) no lineal. Donde F es un operador Fréchet diferenciable definido en un subconjunto convexo D de un espacio de Banach B_1 , con valores en un espacio de Banach B_2 .

Sin embargo, el dominio de convergencia de estos métodos es pequeño tanto para el caso local como para el semilocal. En el caso del método de Newton muy utilizado y estudiado, comenzando con el trabajo de Kantorovich (1982) y continuando con trabajos de investigación en la línea desarrollada en el capítulo 2. Todos estos trabajos tratan de extender el dominio de convergencia empleando la condición de Lipschitz en F' y comenzando con un punto inicial, z_0 , situado cerca de la solución z^* . Las condiciones de convergencia suficientes pueden verse en (Amat et al., 2016; Argyros y Hilout, 2012). La novedad de estos estudios tratan de ampliar aún más la aplicabilidad del método de Newton mediante la introducción de sucesiones mayorizantes más precisas con los mismos criterios que en los estudios de (Argyros y Hilout, 2012, 2013). Así, en este nuevo conjunto las constantes de Lipschitz son más ajustadas obteniendo las siguientes ventajas respecto a trabajos anteriores:

- Los criterios de convergencia semilocal y local son más débiles, lo que implica la posibilidad de un mayor número de puntos iniciales.
- Los límites superiores de las distancias $\|z_{n+1} - z_n\|$ y $\|z_n - z^*\|$ son más estrictos lo que lleva a menos iteraciones para conseguir la precisión deseada.
- Información más precisa sobre la ubicación del punto.

Estas ventajas se consiguen sin añadir condiciones adicionales porque las nuevas constantes de Lipschitz son casos particulares de las antiguas. Por lo tanto, debido a que el dominio de convergencia del método de Newton es pequeño, afecta reduciendo la aplicabilidad del método, pero con las mismas

condiciones suficientes que en estudios anteriores y con, al menos, teniendo información igual de precisa sobre la ubicación de la solución, se consiguen límites superiores más ajustados permitiendo así una mejora en la aplicabilidad del método. De esta manera se trabaja en conseguir los objetivos 1: *‘Mejorar la aplicabilidad de los métodos de orden cuadrático’* y 2: *‘Extender el dominio de convergencia del método de Newton para encontrar la solución local en espacios de Banach’*. Pues ampliando el dominio de convergencia del método de Newton también se consigue aumentar la aplicabilidad de este método.

Por otra parte, aunque el método de Newton se puede usar en la mayoría de las situaciones, en ocasiones este método falla en la convergencia de la solución. En estas situaciones, el método de Stirling es una alternativa. Al igual que el método de Newton, se caracteriza por tener una convergencia cuadrática con criterios similares y requiere el mismo coste computacional. Sin embargo, el método de Stirling presenta deficiencias ya que los criterios de convergencia requieren condiciones contractivas, como puede verse en el Teorema 2.18 de la sección 2.3. En el estudio realizado para analizar la convergencia local y semilocal del método de Stirling se desarrollan relevantes teoremas y lemas planteando condiciones más suaves, similares a los criterios de convergencia de Kantorovich, a cambio de eliminar las condiciones contractivas y conseguir aumentar la aplicabilidad de este método. Así se consiguen los objetivos 1: *‘Mejorar la aplicabilidad de los métodos de orden cuadrático’* y 3: *‘Encontrar criterios de convergencia del método de Stirling más suaves que las ya existentes’* planteados en este trabajo de investigación. Por lo tanto, eliminando las hipótesis contractivas a cambio de criterios más suaves de convergencia local y semilocal, también se consigue aumentar la aplicabilidad de este método.

El gran inconveniente que presentan los métodos de Newton y Stirling es el orden de convergencia, pues al ser cuadrático tardan mucho en alcanzar la solución. Debido a esto surge el interés en estudiar métodos que converjan más rápido, en concreto el análisis de la convergencia local de una familia paramétrica de cuatro pasos definida para cada $n \geq 0$ dada por:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \alpha F'(x_n)^{-1}F(x_n) \\ z_n = y_n - C_1 F'(x_n)^{-1}F(y_n) \\ v_n = z_n - C_2 F'(x_n)^{-1}F(z_n) \\ x_{n+1} = z_n - C_3 F'(x_n)^{-1}F(v_n) \end{cases} \quad (13)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro, x_0 es el punto inicial y $C_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas continuas. Los métodos numéricos de un paso son un caso particular del método anterior. Particularizando para valores concretos se tiene el método de Artidiello et al. (2014), el método de Petrovic et al. (2013), el método de Wang et al. (2011), el método de Cordero et al. (2013), el método de Zhao et al. (2012) o el método de Džunić y Petrovic (2012). Sin embargo, en los estudios anteriores el análisis de la convergencia de todos estos métodos se realiza con desarrollos en serie de Taylor, que involucran hasta la tercera derivada, aunque en el esquema iterativo solo aparezca la primera. En este trabajo la demostración del teorema de convergencia local de la familia paramétrica de cuatro pasos definida en el método (13) se realiza usando sólo hipótesis que afectan hasta la primera derivada, ya que el cálculo de la segunda y tercera derivadas implica cálculos tediosos. También se proporciona información más precisa del radio de convergencia. Estos resultados se enuncian en forma de teoremas y en el artículo de la sección 5.3 se encuentran estos resultados. Con estos resultados se satisface el objetivo 4: '*Estudiar la convergencia de una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden de convergencia*'.

Por otra parte, se estudia la dinámica compleja de un caso particular en el método (13) el cual consiste en seleccionar:

$$\begin{cases} C_1(x_n) = F'(y_n)^{-1}F(x_n) \\ C_2(x_n) = F'(z_n)^{-1}F(x_n) \\ C_3(x_n) = F'(y_n)^{-1}F(x_n) \end{cases} \quad (14)$$

Los resultados del estudio de la dinámica proporcionan la estabilidad de esta familia paramétrica de cuatro pasos que pueden verse en el artículo de la sección 5.3. Por tanto, se trabaja en conseguir el objetivo 5: '*Analizar el comportamiento*'.

dinámico de una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden de convergencia' de esta tesis.

Además, en matemáticas avanzadas, debido a los diferentes problemas que presentan los estudiantes se necesitan usar diferentes alternativas, evidencias de estos problemas pueden verse en (Burrows et al., 2018; Dejam, 2019; Jordan et al., 2019 o Kou y Dejam, 2019; Nakakoji y Wilson, 2018; Prieto et al., 2019). Por un lado, es necesario abordar el conocimiento de diferentes métodos iterativos con la finalidad de aplicar el que mejor resuelva el problema planteado. Por ello, es importante el conocimiento de métodos iterativos sencillos de un paso con un orden de convergencia bajo y métodos más complejos, multipaso y que involucran parámetros. Por otra parte, debido a la dificultad de los conceptos introducidos en una asignatura que trabaja con métodos numéricos, hace necesario la creación de una metodología adaptada a estas circunstancias, ver (Sarría, 2018). En esta línea de investigación nos lleva a adaptar el esquema iterativo de la familia desarrollada en la publicación de la sección 5.3 y cuya aplicación puede verse en la sección 5.4. Consiguiendo así el objetivo 6: '*Aplicar una herramienta didáctica a una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden de convergencia.*' marcado en esta tesis doctoral.

Capítulo 5.

Artículos que componen esta tesis doctoral

'La matemática es el trabajo del espíritu humano que está destinado tanto a estudiar como a conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla'. (Galois)

5.1 Artículo 1

Título	<i>New Improvement of the Domain of Parameters for Newton's Method</i>
Autores - Afiliación	
Nombre	Cristina Amorós
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)
Nombre	Ioannis K. Argyros
Universidad	Cameron University (Estados Unidos)
Nombre	Daniel González
Universidad	Universidad de las Américas (Ecuador)
Nombre	Ángel Alberto Magreñán
Universidad	Universidad de La Rioja (España)
Nombre	Samundra Regmi
Universidad	Cameron University (Estados Unidos)
Nombre	Íñigo Sarría
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)

Article

New Improvement of the Domain of Parameters for Newton's Method

Cristina Amorós ¹, Ioannis K. Argyros ², Daniel González ³ , Ángel Alberto Magreñán ^{4,*} ,
Samundra Regmi ²  and Íñigo Sarría ¹ 

¹ Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología, UNIR, 26006 Logroño, Spain; cristina.amoros.c@unir.net (C.A.); inigo.sarría@unir.net (Í.S.)

² Department of Mathematics Sciences, Cameron University, Lawton, OK 73505, USA; iargyros@cameron.edu (I.K.A.); samundra.regmi@cameron.edu (S.R.)

³ Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de las Americas, Quito 170517, Ecuador; daniel.gonzalez.sanchez@udla.edu.ec

⁴ Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de la Rioja, 26004 Logroño, Spain

* Correspondence: angel-alberto.magrenan@unirioja.es

Received: 26 November 2019; Accepted: 4 January 2020; Published: 8 January 2020



Abstract: There is a need to extend the convergence domain of iterative methods for computing a locally unique solution of Banach space valued operator equations. This is because the domain is small in general, limiting the applicability of the methods. The new idea involves the construction of a tighter set than the ones used before also containing the iterates leading to at least as tight Lipschitz parameters and consequently a finer local as well as a semi-local convergence analysis. We used Newton's method to demonstrate our technique. However, our technique can be used to extend the applicability of other methods too in an analogous manner. In particular, the new information related to the location of the solution improves the one in previous studies. This work also includes numerical examples that validate the proven results.

Keywords: domain; Newton's method; improvement

1. Introduction

Consider, approximating a locally unique solution z^* of a nonlinear equation

$$F(z) = 0, \tag{1}$$

such that F is defined on a convex subset D of a Banach space B_1 with values in a Banach space B_2 and is a Fréchet-differentiable operator.

The study of numerous problems in diverse areas such as Mathematics, Mathematical: Biology, Chemistry, Economics, Physics, Environmental Sciences, and Engineering to mention a few leads to finding a solution of some equation involving abstract space valued operators. The difficulty in finding a solution of such equation in a closed form focuses us to resort to the development of iterative methods. However, the convergence domain of these methods is small in general for the semi-local as well as the local convergence case. In the case of the widely used Newton's method, several attempts have been made starting with the seminal work by Kantorovich [1] and continuing with the works by others [1–21].

All are trying to extend the convergence domain using Lipschitz type conditions on the operator F' and starting close enough to the solution z^* . We refer the reader to the sufficient convergence criteria (3)–(7) for a background. The novelty of our paper is that we further extend the applicability of Newton's method by introducing a more precise set than in earlier studies containing the using

criteria (3)–(7). Then, in this new set, the Lipschitz constants are tighter, resulting in the following advantages (A) over the earlier works:

- (A₁) At least as weak sufficient semi-local and local convergence criteria (leading to more initial points)
- (A₂) Tighter upper bounds on the distances $\|z_{n+1} - z_n\|$ and $\|z_n - z^*\|$ (leading to fewer iterations to obtain a predetermine accuracy)
- (A₃) At least as precise information on the location of the solution.

The advantages (A) are not arrived at under additional conditions because in practice the new Lipschitz constants are special cases of the old ones, see Figure 1.

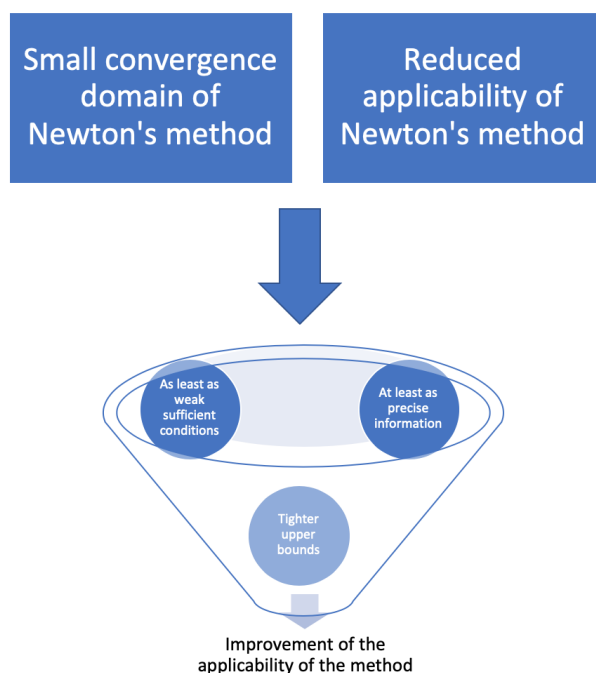


Figure 1. General sketch of the problem.

Moreover, in advanced mathematics, we need to use different alternatives since we all know the different problems that students present [22–27].

It can also be easily seen that our technique can be used to extend the applicability of other methods along the same lines.

Newton’s method for each $n \geq 0$ is defined by

$$z_{n+1} = z_n - F'(z_n)^{-1}F(z_n) \tag{2}$$

such that z_0 is an initial point. This is the most common methodology for approximating z^* generating a sequence $\{z_n\}$. Define open and closed balls $B(z, \rho)$, $\bar{B}(z, \rho)$ in B_1 with radius $\rho > 0$ and center $z \in B_1$.

The Newton–Kantorovich Theorem [1] is the most reputable semi-local convergence result for Newton’s method using the hypotheses:

Hypothesis 1 (H₁). *There exists $z_0 \in D$ with $F'(z_0)^{-1} \in L(B_2, B_1)$ and a parameter $\eta \geq 0$ such that*

$$\|F'(z_0)^{-1}F(z_0)\| \leq \eta.$$

Hypothesis 2 (H_2). *There exists a parameter $L > 0$ and, for each $z, z^1 \in D$ such that*

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(z) - F'(z^1))\| \leq L\|z - z^1\|$$

and

Hypothesis 3 (H_3). *There exists a closed ball $\bar{B}(z_0, R) \subseteq D$ for some $R > 0$.*

The renowned and well known Kantorovich hypothesis is based on the sufficient convergence criterion

$$h = 2L\eta \leq 1. \tag{3}$$

Commonly, the convergence domain of Newton’s method is based on the parameters L and η being small. In order to enlarge the convergence domain, Argyros et al. [7,8] provide sufficient convergence criteria for Newton’s method based on improvements and more precise sequences than before [1,19].

The new conditions are:

$$h_1 = 2C_1\eta \leq 1, \tag{4}$$

$$h_2 = 2C_2\eta \leq 1, \tag{5}$$

$$h_3 = 2C_3\eta \leq 1, \tag{6}$$

$$h_4 = 2C_4\eta \leq 1, \tag{7}$$

where

$$C_1 = \frac{A_0 + L}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{8} \left(L + 4A_0 + \sqrt{L^2 + 8A_0L} \right),$$

$$C_3 = \frac{1}{8} \left(4A_0 + \sqrt{A_0L + 8A_0^2} + \sqrt{A_0L} \right), \quad C_4 = \frac{1}{\eta_0},$$

such that the small positive root of a quadratic polynomial [5–8] is η_0 and $A_0 > 0$ is the center Lipschitz constant, where

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(x) - F'(z_0))\| \leq A_0\|x - z_0\| \quad \text{for each } x \in D, \tag{8}$$

whose existence is always implied by (H_2). We have that

$$A_0 \leq L \tag{9}$$

is true and $\frac{L}{A_0}$ can be randomly large [7]. Notice that condition (8) is not an added (H_2) hypothesis, since in practice the computation of parameter L implies the computation of A_0 as a special case. Keep in mind that, if $A_0 = L$, conditions (4)–(7) reduce to criterion (3). However, if $A_0 < L$, we have [7,8]

$$h \leq 1 \Rightarrow h_1 \leq 1 \Rightarrow h_2 \leq 1 \Rightarrow h_3 \leq 1 \Rightarrow h_4 \leq 1, \tag{10}$$

$$\frac{h_1}{h} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \frac{h_2}{h} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad \frac{h_3}{h_1} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \frac{h_3}{h} \rightarrow 0 \tag{11}$$

and

$$\frac{h_3}{h_2} \rightarrow 0, \quad \frac{h_3}{h_1} \rightarrow 0, \quad \text{as } \frac{A_0}{L} \rightarrow 0. \tag{12}$$

The main findings of this study are related to the distance involved and the improvement of the semi-local criteria (3)–(7) using parameters tighter than A_0 and L and restricting the domain. Similar ideas are used to improve error limits and expand radius convergence in the case of the local convergence.

The document is divided as follows: In Section 2 the results of the local and semi-local convergence are presented. In Section 3, we conclude with numerical examples, and, in the final section, we provide the conclusions.

2. Convergence Analysis

To begin, we analyze the semi-local convergence analysis of Newton’s method. Next, a new version of the Newton–Kantorovich Theorem [1] is stated in Theorem 2, whereas, in Theorem 1, we state the Newton–Kantorovich theorem for comparison purposes.

Theorem 1. *Suppose conditions (H_1) – (H_3) and (3) are verified. Then, the sequence $\{z_n\}$ is well defined by Newton’s method for each $n \geq 0$, belongs in the ball $B(z_0, R)$, and converges to a unique solution $z^* \in \bar{B}(z_0, R)$ of Equation (1), where*

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - h}}{L}.$$

Next, we state a semi-local convergence result improving the Kantorovich Theorem.

Theorem 2. *Suppose that there exist $z_0 \in D$, $\eta \geq 0$, $\gamma \geq 1$, and $A_\gamma > 0$, such that*

$$F'(z_0)^{-1} \in L(B_2, B_1),$$

$$\|F'(z_0)^{-1}F(z_0)\| \leq \eta,$$

$$D_\gamma = \bar{B}(z_0, \gamma\eta) \subseteq D,$$

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq A_\gamma\|x - y\| \quad \text{for each } x, y \in D_\gamma,$$

$$h_\gamma = 2A_\gamma\eta \leq 1$$

and

$$R_\gamma \leq \gamma\eta,$$

where

$$R_\gamma = \frac{1 - \sqrt{1 - h_\gamma}}{A_\gamma}.$$

Then, the sequence $\{z_n\}$ is well defined by Newton’s method for each $n \geq 0$, belong in a ball $B(z_0, R_\gamma)$, and converge to a unique solution $z^* \in \bar{B}(z_0, R_\gamma)$ of Equation (1).

Proof. The hypotheses (H) of Theorem 1 are verified immediately on D_γ , if $\bar{B}(z_0, R)$, L , h , R are replaced by D_γ , A_γ , h_γ and R_γ , respectively. \square

Next, we need to introduce an alternative to condition (H_2) :

Hypothesis 2' (H'_2) . *For each $x, y \in B\left(z_0, \frac{1}{A_0}\right) \cap D := D_1$, there exists a parameter $M > 0$*

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq M\|x - y\|.$$

Notice that $M \leq L$ holds in general.

Next, we consider criterion (6) and improve a semi-local result given in [7].

Theorem 3. Suppose that condition (6) and conditions $(H_1), (H'_2)$ and (H_3) are verified with

$$r_3 = \eta + \frac{A_0\eta^2}{2(1-\alpha)(1-A_0\eta)},$$

and

$$\alpha = \frac{2M}{M + \sqrt{M^2 + 8A_0M}}.$$

Then, the sequence $\{z_n\}$ is well defined by Newton's method for each $n \geq 0$, belongs in the ball $B(z_0, r_3)$, and converges to a unique solution $z^* \in \bar{B}(z_0, r_3)$ of Equation (1).

Proof. It follows by simply noticing that the iterates are such that $z_n \in D_1$, which is a more precise location than D used in previous works leading to $M \leq L$ ($D_1 \subseteq D$). Then, the proof is analogous to the corresponding in Theorem 2 with M replacing L . \square

The next theorem improves the result of Theorem 3.

Theorem 4. Suppose that there exist $z_0 \in D, \eta \geq 0, \gamma \geq 1, M_\gamma > 0$ and $A_{0,\gamma} \geq 0$ such that

$$F'(z_0)^{-1} \in L(B_2, B_1),$$

$$\|F'(z_0)^{-1}F(z_0)\| \leq \eta,$$

$$D_\gamma \subseteq D,$$

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(x) - F'(z_0))\| \leq A_{0,\gamma}\|x - z_0\| \quad \text{for each } x \in D_\gamma,$$

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq M_\gamma\|x - y\| \quad \text{for each } x, y \in D_{0,\gamma} := D_\gamma \cap B(z_0, \frac{1}{A_{0,\gamma}}),$$

$$h_{3,\gamma} = 2A_{3,\gamma}\eta \leq 1,$$

and

$$r_{3,\gamma} \leq \gamma\eta,$$

where

$$A_{3,\gamma} = \frac{1}{8} \left(4A_{0,\gamma} + \sqrt{M_\gamma A_{0,\gamma} + 8A_{0,\gamma}^2} + \sqrt{A_{0,\gamma} M_\gamma} \right),$$

$$r_{3,\gamma} = \eta + \frac{A_{0,\gamma}\eta^2}{2(1-\alpha_\gamma)(1-A_{0,\gamma}\eta)},$$

and

$$\alpha_\gamma = \frac{2M_\gamma}{M_\gamma + \sqrt{M_\gamma^2 + 8A_{0,\gamma}M_\gamma}}.$$

Then, the sequence $\{z_n\}$ is well defined by Newton's method for each $n \geq 0$, belongs in the ball $B(z_0, r_{3,\gamma})$, and converges to a unique solution $z^* \in \bar{B}(z_0, r_{3,\gamma})$ of Equation (1).

Proof. The result follows immediately from Theorem 2, if we replace $D_\gamma, A_\gamma, h_\gamma, R_\gamma$ by $D_{0,\gamma}, A_{0,\gamma}, h_{3,\gamma}$ and $r_{3,\gamma}$, respectively. \square

Next, we consider criterion (7) and present a semi-local improving the convergence result of Newton's method given in [8].

Theorem 5. Suppose that conditions $(H_1), (H_2), (H'_2), (H_3), (8)$ and $D_\gamma \subset D$ are verified, and there exist $K_0 > 0, K > 0$ such that

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(z_1) - F'(z_0))\| \leq K_0\|z_1 - z_0\|,$$

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(z_0 + \theta(z_1 - z_0)) - F'(z_0))\| \leq K\theta\|z_1 - z_0\| \quad \text{for each } \theta \in [0, 1],$$

$$h_4 = 2A_4\eta \leq 1,$$

where

$$z_1 = z_0 - F'(z_0)^{-1}F(z_0),$$

$$A_4 = \frac{1}{2\eta_0} \leq 1,$$

$$\alpha_0 = \frac{L(t_2 - t_1)}{2(1 - A_0t_2)},$$

$$t_1 = \eta, \quad t_2 = \eta + \frac{K\eta^2}{2(1 - K_0\eta)},$$

$$r_4 = \eta + \left(1 + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha}\right) \frac{K\eta^2}{2(1 - K_0\eta)}.$$

η_0 is defined by

$$\eta_0 = \begin{cases} \frac{1}{A_0 + K_0}, & \text{if } B = LK + 2\alpha(A_0(K - 2K_0)) = 0, \\ \text{positive root of } p, & \text{if } B > 0, \\ \text{small positive root of } p, & \text{if } B < 0, \end{cases}$$

and

$$p(t) = (LK + 2\alpha A_0(K - 2K_0))t^2 + 4\alpha(A_0 + K_0)t - 4\alpha.$$

Then, the sequence $\{z_n\}$ is well defined by Newton's method for each $n \geq 0$, belongs in a ball $B(z_0, r_4)$, and converges to a unique solution $z^* \in \bar{B}(z_0, r_4)$ of Equation (1).

Proof. As in the proof below Theorem 2. \square

The next theorem improves the result of Theorem 5.

Theorem 6. Suppose that there exist $z_0 \in D$, $\eta \geq 0$, $\gamma \geq 1$, $K_{0,\gamma} > 0$, $K_\gamma > 0$, $M_\gamma > 0$, and $A_{0,\gamma} \geq 0$ such that

$$F'(z_0)^{-1} \in L(B_2, B_1),$$

$$\|F'(z_0)^{-1}F(z_0)\| \leq \eta,$$

$$D_\gamma \subseteq D,$$

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(z_1) - F'(z_0))\| \leq K_{0,\gamma}\|z_1 - z_0\|,$$

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(z_0 + \theta(z_1 - z_0)) - F'(z_0))\| \leq K_\gamma\theta\|z_1 - z_0\| \quad \text{for each } \theta \in [0, 1],$$

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(x) - F'(z_0))\| \leq A_{0,\gamma}\|x - z_0\| \quad \text{for each } x \in D_\gamma,$$

$$\|F'(z_0)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq M_\gamma\|x - y\| \quad \text{for each } x, y \in D_{1,\gamma} := D_\gamma \cap B\left(z_0, \frac{1}{A_{0,\gamma}}\right),$$

$$h_{4,\gamma} = 2A_{4,\gamma}\eta \leq 1,$$

and

$$r_{4,\gamma} \leq \gamma\eta,$$

where

$$z_1 = z_0 - F'(z_0)^{-1}F(z_0),$$

$$\alpha_{0,\gamma} = \frac{M_\gamma(t_2 - t_1)}{2(1 - A_{0,\gamma}t_2)},$$

$$t_1 = \eta, \quad t_2 = \eta + \frac{K_\gamma\eta^2}{2(1 - K_{0,\gamma}\eta)},$$

$$r_{4,\gamma} = \eta + \left(1 + \frac{\alpha_{0,\gamma}}{1 - \alpha_\gamma}\right) \frac{K_\gamma\eta^2}{2(1 - K_{0,\gamma}\eta)}.$$

$\eta_{0,\gamma}$ is defined by

$$\eta_{0,\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{A_{0,\gamma} + K_{0,\gamma}}, & \text{if } B = M_\gamma K_\gamma + 2\alpha_\gamma(A_{0,\gamma}(K_\gamma - 2K_{0,\gamma})) = 0, \\ \text{positive root of } p_\gamma, & \text{if } M_\gamma K_\gamma + 2\alpha_\gamma A_{0,\gamma}(K_\gamma - 2K_{0,\gamma}) > 0, \\ \text{small positive root of } p_\gamma, & \text{if } M_\gamma K_\gamma + 2\alpha_\gamma A_{0,\gamma}(K_\gamma - 2K_{0,\gamma}) < 0, \end{cases}$$

and

$$p_\gamma(t) = (M_\gamma K_\gamma + 2\alpha_\gamma A_{0,\gamma}(K_\gamma - 2K_{0,\gamma}))t^2 + 4\alpha_\gamma(A_{0,\gamma} + K_{0,\gamma})t - 4\alpha_\gamma.$$

Then, the sequence $\{z_n\}$ is well defined by Newton’s method for each $n \geq 0$, belongs in the ball $B(z_0, r_{4,\gamma})$, and converges to a unique solution $z^* \in \bar{B}(z_0, r_{4,\gamma})$ of Equation (1).

Proof. The hypotheses of Theorem 2 are verified by replacing corresponding sets and Lipschitz parameters as done previously too. \square

Similarly, we state a local convergence result of Newton’s methods.

Theorem 7 ([5,7]). Suppose that there exist $z^* \in D$, $a_0 > 0$, and $l > 0$ such that

$$F(z^*) = 0,$$

$$F'(z^*)^{-1} \in L(B_2, B_1),$$

$$\|F'(z^*)^{-1}(F'(x) - F'(z^*))\| \leq a_0\|x - z^*\| \quad \text{for each } x \in D$$

$$\|F'(z^*)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq l\|x - y\| \quad \text{for each } x, y \in D_2 := D \cap B\left(z^*, \frac{1}{A_0}\right),$$

and

$$\bar{B}(z^*, \varrho) \subset D,$$

where

$$\varrho = \frac{2}{2a_0 + l}.$$

Then, the sequence $\{z_n\}$ for $z_0 \in B(z^*, \varrho) \setminus \{z^*\}$ is well defined by Newton’s method for each $n \geq 0$, belongs in a ball $B(z^*, \varrho)$, and converges to a z^* . In addition, the limit point z^* is the only solution of Equation (1) in $\bar{B}(z^*, T) \cap D$ for $T \in \left[\varrho, \frac{2}{a_0}\right)$.

Proof. See the comments below Theorem 2 for the analogous proof. \square

The next Theorem improves the result of Theorem 7.

Theorem 8. Suppose that there exist $z^* \in D$, $\delta \geq 1$, $a_{0,\delta} > 0$, and $a_\delta > 0$ such that

$$F(z^*) = 0, \quad F'(z^*)^{-1} \in L(B_2, B_1),$$

$$\|F'(z^*)^{-1}(F'(x) - F'(z^*))\| \leq a_{0,\delta}\|x - z^*\| \quad \text{for each } x \in D_\delta,$$

$$\|F'(z^*)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq a_\delta\|x - y\| \quad \text{for each } x, y \in D_3 := D_\delta \cap B(z^*, \frac{1}{a_{0,\delta}}),$$

$$D_\delta = \overline{B}(z^*, \delta\|z_0 - z^*\|) \subseteq D \quad \text{for } z_0 \in D,$$

and

$$\varrho_\delta \leq \delta\|z_0 - z^*\|,$$

with

$$\varrho_\delta = \frac{2}{2a_{0,\delta} + a_\delta}.$$

Then, the sequence $\{z_n\}$ generated for $z_0 \in B(z^*, \varrho_\delta) \setminus \{z^*\}$ is well defined by Newton's method for each $n \geq 0$, belongs in a ball $B(z^*, \varrho_\delta)$, and converges to a limit z^* . Moreover, the limit point z^* is the only solution of Equation (1) in $\overline{B}(z^*, T) \cap D$ for $T \in [\varrho_\delta, \frac{2}{a_{0,\delta}})$.

Proof. The Theorem proven by the hypotheses of Theorem 8 is satisfied on the domain D_δ . \square

Remark 1. (a) Given $\xi > \eta$ and $\eta \neq 0$, we considered $D = B(z_0, \xi)$, then $\gamma \in [1, \frac{\xi}{\eta}]$.

(b) Given $\gamma = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2A_\gamma\eta}}$, then condition $R_\gamma \leq \gamma\eta$ equality is fulfilled. If γ is given by $\gamma = 2$, then again $R_\gamma \leq \gamma\eta$, since we have that $R_\gamma \leq 2\eta = \gamma\eta$.

(c) Then, we have that

$$A_{0,\gamma} \leq L,$$

$$A_\gamma \leq L,$$

$$K_{0,\gamma} \leq K_0,$$

and

$$K_\gamma \leq K.$$

Therefore, we get that

$$h \leq 1 \Rightarrow h_\gamma \leq 1,$$

$$h_3 \leq 1 \Rightarrow h_{3,\gamma} \leq 1,$$

and

$$h_4 \leq 1 \Rightarrow h_{4,\gamma} \leq 1$$

only if $A_{0,\gamma} = L$, $A_\gamma = L$, $K_{0,\gamma} = K_0$ and $K_\gamma = K$. The reciprocal is given.

Note also that the new major sequences are more accurate than the corresponding previous sequences. As an example, the majority sequences $\{t_n\}$, $\{\bar{t}_n\}$ defined by Newton's method, corresponding to criteria $h \leq 1$ and $h_\gamma \leq 1$, are given as:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \eta, \quad t_{n+1} = t_n + \frac{L(t_n - t_{n-1})^2}{2(1 - Lt_n)},$$

$$\bar{t}_0 = 0, \quad \bar{t}_1 = \eta, \quad \bar{t}_{n+1} = \bar{t}_n + \frac{A_\gamma(\bar{t}_n - \bar{t}_{n-1})^2}{2(1 - A_{0,\gamma}\bar{t}_n)}.$$

Then, using mathematical induction, it immediately follows that:

$$\bar{t}_n \leq t_n,$$

$$0 \leq \bar{t}_{n+1} - \bar{t}_n \leq t_{n+1} - t_n,$$

and

$$R_\gamma \leq R.$$

If $A_\gamma < L$, strict inequality remains with $n \geq 2$ in the first inequality and for $n \geq 1$ in the second case. Furthermore, it is clear that $R_\gamma < R$. Therefore, the location information of the solution z^* beats the previous information. Similarly, there are corresponding improved sequences to the other “h” and “h $_\gamma$ ” conditions. Finally, it should be taken into account that the majorizing sequences corresponding to the conditions (5)–(7) have already been proven to be more precise than the sequence $\{t_n\}$ corresponding to condition (4).

(d) If $D = B(z^*, \xi)$ for some $\xi > \|z_0 - z^*\|$, then δ can be chosen so that $\delta \in \left[1, \frac{\xi}{\|z_0 - z^*\|}\right)$ for $z_0 \neq z^*$.

(e) We have that

$$a_{0,\delta} \leq a_0$$

and

$$a_\delta \leq l.$$

Therefore, we get that

$$q \leq q_\delta.$$

Moreover, if $a_{0,\delta} < a_0$ or $a_\delta < l$, then $q < q_\delta$. The corresponding error limits are also improved, since we have

$$\|z_{n+1} - z^*\| \leq \frac{l\|z_n - z^*\|^2}{2(1 - a_0\|z_n - z^*\|)}.$$

It should be noted that, if $a_0 = l$, then Theorem 2.8 reduces to the corresponding by Rheinboldt [20] and Traub [21]. The radius found independently by these authors is given by

$$\bar{q} = \frac{2}{3l}.$$

However, if $a_0 < l$, then our radius is such that

$$\bar{q} < q < q_\delta$$

and

$$\frac{\bar{q}}{q} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ as } \frac{a_0}{l} \rightarrow 0.$$

Therefore, our convergence radius q can be at most three times greater than \bar{q} .

Remark 2. The result with the new Lipschitz constants improves the ones in [13], since the new are smaller than the old ones.

3. Numerical Examples

Example 1. In the same case as Example 1, let $p = \frac{49}{100}$ and $\gamma = \frac{19}{10}$. Then, we have that $\eta = \frac{17}{100}$, $\gamma\eta = \frac{323}{1000}$ and $R_\gamma = 0.258l \dots < 0.323 < 1 - p$. Hence, the hypotheses of Theorem 2 are satisfied.

Example 2. Let $B_1 = B_2 = C[0, 1]$, and let $\Omega = \{x \in C[0, 1]; \|x\| \leq R\}$, where $R > 0$ and operator F can be expressed as

$$F(x)(s) = x(s) - f(s) - \lambda \int_0^1 G(s, t)x(t)^3 dt, \quad x \in C[0, 1], s \in [0, 1],$$

considering $f \in C[0, 1]$, λ is the real parameter, and G is the famous Green function.

If we choose $z_0(s) = f(s) = 1$, it follows $\|I - F'(z_0)\| \leq 3|\lambda|/8$. Thus, if $|\lambda| < 8/3$, the inverse at the starting point is defined and choosing $\lambda = 1$, $\gamma = 6$ and $R = 2$, we obtain

$$\begin{aligned} \eta &= 0.2, \\ A_6 &= 1.64, \\ A_{0,6} &= 1.52, \\ A_{3,6} &\approx 12.37, \\ \alpha_6 &\approx 0.51, \\ r_{3,6} &\approx 0.29, \end{aligned}$$

and

$$2A_{3,6}\eta \approx 0.66 \leq 1.$$

Then, Newton’s method converges by our conditions.

Example 3. Let $B_1 = B_2 = \mathbb{R}^3$, $D = \bar{B}(0, 1)$. Define F on D for $v = (x, y, z)^T$ by

$$F(v) = \left(e^x - 1, \frac{e - 1}{2}y^2 + y, z \right)^T. \tag{13}$$

Then, the Fréchet derivative is computable, and it is easy to see that $z^* = (0, 0, 0)$, $F'(z^*) = F'(z^*)^{-1} = \text{diag}\{1, 1, 1\}$, $a_0 = e - 1, l < \bar{l} = e$ and $\bar{g} = 0.24 < g = 0.38$, where $l = e^{\frac{1}{e-1}}$, $a_0 < l < \bar{l}$ so the (A) advantages hold. Then, Newton’s method converges.

4. Conclusions

A new technique has been developed to extend the convergence domain of Newton’s method. The novelty of it is that no additional criteria are needed than in earlier studies [7,8] for convergence in both the local as well as the semi-local convergence of Newton’s method. We have given the sufficient convergence criteria of earlier studies and then demonstrated the superiority of our new criteria. Due to locality of our results, we cannot say anything about global results in a Banach space setting unless $D = B_1$. These are the limitations (disadvantages) of our study. However, the extensions are already given by advantages (A). Numerical advantages have been used to further validate the theoretical results.

Author Contributions: Conceptualization, C.A., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S.; methodology, C.A., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S.; validation, C.C., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S.; formal analysis, C.A., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S.; investigation, C.A., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S.; resources, C.A., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S.; writing—original draft preparation, C.A., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S.; writing—review and editing, C.A., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S.; visualization, C.A., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S.; supervision, C.A., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S.; project administration, C.A., I.K.A., D.G., Á.A.M., S.R., and Í.S. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: Research is supported in part by Séneca 20928/PI/18 and by MINECO PGC2018-095896-B-C21.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

1. Kantorovich, L.V.; Akilov, G. *Functional Analysis*; Pergamon Press: Oxford, UK, 1982.
2. Amat, S.; Busquier, S.; Bermúdez, C.; Magreñán, Á.A. On a two-step relaxed Newton-type method. *Appl. Math. Comput.* **2013**, *219*, 11341–11347. [[CrossRef](#)]

3. Amat, S.; Magreñán, Á.A.; Romero, N. On the election of the damped parameter of a two-step relaxed Newton-type method. *Nonlinear Dyn.* **2016**, *84*, 9–18. [[CrossRef](#)]
4. Argyros, I.K.; González, D.; Magreñán, Á.A. A Semilocal Convergence for a Uniparametric Family of Efficient Secant-Like Methods. *J. Funct. Spaces* **2014**, *2014*, 467980. [[CrossRef](#)]
5. Argyros, I.K. *Convergence and Application of Newton-Type Iterations*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2008.
6. Argyros, I.K.; Hilout, S. *Numerical Methods in Nonlinear Analysis*; World Scientific Publishing: Hackensack, NJ, USA, 2013.
7. Argyros, I.K.; Hilout, S. Weaker conditions for the convergence of Newton's method. *J. Complex.* **2012**, *28*, 364–387. [[CrossRef](#)]
8. Argyros, I.K.; Hilout, S. On an improved convergence analysis of Newton's method. *Appl. Math. Comput.* **2013**, *225*, 372–386. [[CrossRef](#)]
9. Argyros, I.K.; Magreñán, Á.A. *Iterative Methods and Their Dynamics with Applications: A Contemporary Study*; CRC Press: Boca Ratón, FL, USA, 2017.
10. Argyros, I.K.; Magreñán, Á.A.; Orcos, L.; Sarría, Í. Unified local convergence for Newton's method and uniqueness of the solution of equations under generalized conditions in a Banach space. *Mathematics* **2019**, *7*, 463. [[CrossRef](#)]
11. Argyros, I.K.; Magreñán, Á.A.; Orcos, L.; Sarría, Í. Advances in the semilocal convergence of Newton's method with real-world applications. *Mathematics* **2019**, *7*, 299. [[CrossRef](#)]
12. Cordero, A.; Gutiérrez, J.M.; Magreñán, Á.A.; Torregrosa, J.R. Stability analysis of a parametric family of iterative methods for solving nonlinear models. *Appl. Math. Comput.* **2016**, *285*, 26–40. [[CrossRef](#)]
13. Kou, J.; Wang, B. semi-local convergence of a modified multi-point Jarratt method in Banach spaces under general continuity conditions. *Numer. Algorithms* **2012**, *60*, 369–390.
14. Lotfi, T.; Magreñán, Á.A.; Mahdiani, K.; Rainer, J.J. A variant of Steffensen-King's type family with accelerated sixth-order convergence and high efficiency index: Dynamic study and approach. *Appl. Math. Comput.* **2015**, *252*, 347–353. [[CrossRef](#)]
15. Magreñán, Á.A. Different anomalies in a Jarratt family of iterative root-finding methods. *Appl. Math. Comput.* **2014**, *233*, 29–38.
16. Magreñán, Á.A.; Argyros, I.K. A new tool to study real dynamics: The convergence plane. *Appl. Math. Comput.* **2014**, *248*, 215–224. [[CrossRef](#)]
17. Magreñán, Á.A. On the local convergence and the dynamics of Chebyshev-Halley methods with six and eight order of convergence. *J. Comput. Appl. Math.* **2016**, *298*, 236–251. [[CrossRef](#)]
18. Magreñán, Á.A.; Gutiérrez, J.M. Real dynamics for damped Newton's method applied to cubic polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **2015**, *275*, 527–538. [[CrossRef](#)]
19. Ren, H.; Argyros, I.K. Convergence radius of the modified Newton method for multiple zeros under Hölder continuous derivative. *Appl. Math. Comput.* **2010**, *217*, 612–621. [[CrossRef](#)]
20. Rheinboldt, W.C. *An Adaptive Continuation Process for Solving Systems of Nonlinear Equations*; Banach Center Publications, Polish Academy of Science: Warszawa, Poland, 1978; Volumn 3, pp. 129–142.
21. Traub, J.F. *Iterative Methods for the Solution of Equations*; Series in Automatic Computation; Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, USA, 1964.
22. Burrows, A.; Lockwood, M.; Borowczak, M.; Janak, E.; Barber, B. Integrated STEM: Focus on Informal Education and Community Collaboration through Engineering. *Edu. Sci.* **2018**, *8*, 4. [[CrossRef](#)]
23. Nakakoji, Y.; Wilson, R. First-Year Mathematics and Its Application to Science: Evidence of Transfer of Learning to Physics and Engineering. *Edu. Sci.* **2018**, *8*, 8. [[CrossRef](#)]
24. Prieto, M.C.; Palma, L.O.; Tobías, P.J.B.; León, F.J.M. Student assessment of the use of Kahoot in the learning process of science and mathematics. *Edu. Sci.* **2019**, *9*, 55. [[CrossRef](#)]
25. Dejam, M. Advective-diffusive-reactive solute transport due to non-Newtonian fluid flows in a fracture surrounded by a tight porous medium. *Int. J. Heat Mass Transf.* **2019**, *128*, 1307–1321. [[CrossRef](#)]

26. Jordán, C.; Magreñán, Á.A.; Orcos, L. Considerations about flip education in the teaching of advanced mathematics. *Edu. Sci.* **2019**, *9*, 227. [[CrossRef](#)]
27. Kou, Z.; Dejam, M. Dispersion due to combined pressure-driven and electro-osmotic flows in a channel surrounded by a permeable porous medium. *Phys. Fluids* **2019**, *31*, 056603. [[CrossRef](#)]



© 2020 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

5.2 Artículo 2

Titulo	<i>Extending the Applicability of Stirling's Method</i>
Autores - Afiliación	
Nombre	Cristina Amorós
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)
Nombre	Ioannis K. Argyros
Universidad	Cameron University (Estados Unidos)
Nombre	Ángel Alberto Magreñán
Universidad	Universidad de La Rioja (España)
Nombre	Samundra Regmi
Universidad	Cameron University (Estados Unidos)
Nombre	Rubén González
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)
Nombre	Juan Antonio Sicilia
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)

Article

Extending the Applicability of Stirling's Method

Cristina Amorós ¹, Ioannis K. Argyros ², Á. Alberto Magreñán ³ , Samundra Regmi ² ,
Rubén González ^{1,*}  and Juan Antonio Sicilia ¹ 

¹ Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología, Universidad Internacional de La Rioja, 26006 Logroño, Spain; cristina.amoros@unir.net (C.A.); juanantonio.sicilia@unir.net (J.A.S.)

² Department of Mathematics Sciences, Cameron University, Lawton, OK 73505, USA; iargyros@cameron.edu (I.K.A.); samundra.regmi@cameron.edu (S.R.)

³ Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain; angel-alberto.magrenan@unirioja.es

* Correspondence: ruben.gonzalez@unir.net

Received: 30 November 2019; Accepted: 28 December 2019; Published: 31 December 2019



Abstract: Stirling's method is considered as an alternative to Newton's method when the latter fails to converge to a solution of a nonlinear equation. Both methods converge quadratically under similar convergence criteria and require the same computational effort. However, Stirling's method has shortcomings too. In particular, contractive conditions are assumed to show convergence. However, these conditions limit its applicability. The novelty of our paper lies in the fact that our convergence criteria do not require contractive conditions. Hence, we extend its applicability of Stirling's method. Numerical examples illustrate our new findings.

Keywords: Stirling's method; Newton's method; convergence; Fréchet derivative; banach space

1. Introduction

In this work we deal with finding a fixed point x^* of the equation

$$x = F(x), \quad (1)$$

where F is a Fréchet-differentiable operator defined on a convex subset D of a Banach space X with values into itself. By I we denote the identity linear operator in $L(X, X)$. The symbol $L(X, X)$ stands for the space of bounded linear operators from X into X .

Many applications from different areas, including education, reduce to dealing with Equation (1) utilizing mathematical modelling [1–24]. However, the solution x^* is found in closed form only in rare cases. This problem leads to the usage of methods that are iterative in nature.

We study Stirling's method given for all $n = 0, 1, 2, \dots$ by

$$x_{n+1} = x_n - (I - F'(F(x_n)))^{-1}(x_n - F(x_n)), \quad (2)$$

where $x_0 \in D$. Further we will introduce an operator $\Gamma(x) \in L(X, X)$ such that $\Gamma(x) = (I - F'(F(x)))^{-1}$ with $x \in D$, and denote $\Gamma_0 = \Gamma(x_0)$ for use in later Sections.

This method converges quadratically as Newton's method does, and also requires the same computational effort (see details in [1,22]). It is considered to be a useful alternative in cases where Newton's method fails to converge (see such examples in [22]). However, the usage of Stirling's method has a drawback, since the convergence criteria require contractions. We have detected some other problems listed in Remarks 3 and 4. These drawbacks limit the applicability of Stirling's method.

In order to extend its applicability, we do not use contractive conditions in our semi-local as well as the local convergence results.

The rest of the work is structured as follows. Section 2 includes the semi-local convergence analysis. Section 3 contains the local analysis. The numerical results are given in Section 4.

2. Semi-Local Convergence Analysis

Let $L_0 > 0, L > 0$ and $\gamma \geq 0$. Consider a real sequence $\{t_n\}$ as

$$t_0 = 0, t_1 = \gamma, t_{n+2} = t_{n+1} + \frac{L(t_{n+1} - t_n)^2}{2(1 - L_0 t_{n+1})}. \tag{3}$$

Next, we study the convergence of sequence $\{t_n\}$ by developing relevant lemmas and theorems.

Lemma 1. *Suppose that*

$$h = L_1 \gamma < \frac{1}{2}, \tag{4}$$

where

$$L_1 = \frac{1}{8}(L + 4L_0 + \sqrt{L^2 + 8L_0L}).$$

Then, sequence $\{t_n\}$ generated for $t_0 = 0$ by (4) is increasing, converges to its unique least upper bound t^* , so that

$$d_1 \leq t^* \leq d_2, \tag{5}$$

where

$$d_1 = \frac{1 - \exp[-\frac{L_0 \gamma}{(1-L_0 \gamma)(1-\delta L_0 \gamma)}]}{L_0}$$

$$d_2 = \frac{1 - \exp[\frac{2L_0 \gamma}{2-L_0 \gamma} + \frac{2\delta_1}{2-\delta_1}]}{L_0},$$

$$\delta = \frac{L}{2L_0(1 - L_0 \gamma)^2}$$

and

$$\delta_1 = \frac{L}{2L_0} \left(\frac{\delta}{1 - \delta}\right)^2.$$

Proof. It is convenient to first simplify sequence $\{t_n\}$. Define sequence $\{\alpha_n\}$ by $\alpha_n = 1 - L_0 t_n$. Then, by (4) we can write $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1 - L_0 \gamma, \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{L(\alpha_n - \alpha_{n-1})^2}{2L_0 \alpha_n}$. Moreover, define sequence $\{\theta_n\}$ by $\theta_n = 1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$. Then, we can write $\theta_1 = L_0 \gamma, \theta_{n+1} = \frac{L}{2L_0} \left(\frac{\theta_n}{1 - \theta_n}\right)^2$. We have by (4) that $\delta \theta_1 < 1$ and $0 < \theta_2 < \theta_1$. Suppose that $0 < \theta_k < \theta_{k-1}$ and $\delta \theta_k < 1$. Then, we get in turn that

$$\theta_{k+1} = \frac{L}{2L_0} \left(\frac{\theta_k}{1 - \theta_k}\right)^2 < \delta \theta_k^2 < \theta_k \tag{6}$$

and

$$\delta \theta_{k+1} < \delta \theta_k < 1. \tag{7}$$

Hence, $\{\beta_n\}$ is a decreasing sequence, so $\alpha_n = (1 - \beta_n)\alpha_{n-1}$ and $t_n = \frac{1 - \alpha_n}{L_0}$ are also decreasing sequences. In particular,

$$\alpha_n = (1 - \beta_n)\alpha_{n-1} = \dots = (1 - \beta_n) \dots (1 - \beta_1)\alpha_0 = (1 - \beta_n) \dots (1 - \beta_0).$$

From $0 < \beta_1 = L_0\gamma < 1$, we get $0 < \alpha_n < 1$, so $t_n = \frac{1-\alpha_n}{\gamma} < \frac{1}{\gamma}$. That is sequence $\{t_n\}$ is increasing, bounded from above by $\frac{1}{L_0}$, so it converges to t^* .

Next, we show (4). We can write

$$\alpha^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \beta_n),$$

or

$$\log \frac{1}{\alpha^*} = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1 - \beta_n}.$$

Using the estimate

$$2 \frac{t-1}{t+1} \leq \log t \leq \frac{t^2-1}{2t} \text{ for } t > 1,$$

we get first an upper bound for $\log \frac{1}{\alpha^*}$ by (5) and (6) and the inequality $2^n \geq n + 1$ for $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{\alpha^*} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n(2 - \beta_n)}{2(1 - \beta_n)} \leq \frac{1}{1 - \beta_1} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+1} \\ &\leq \frac{1}{\delta(1 - \beta_1)} \sum_{n=1}^{\infty} (\delta\theta_1)^{2^n} \leq \frac{1}{\delta(1 - \beta_1)} \sum_{n=1}^{\infty} (\delta\beta_1)^n \\ &= \frac{\beta_1}{(1 - \beta_1)(1 - \delta\beta_1)}, \end{aligned}$$

which together with $t^* = \frac{1-\alpha^*}{L_0}$ imply $t^* \leq d_2$. The lower bound in (4) is obtained similarly from the estimate:

$$\log \frac{1}{\alpha^*} \geq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2 - \alpha_n} > \frac{2\alpha_1}{2 - \alpha_1} + \frac{2\alpha_2}{2 - \alpha_2}.$$

□

Lemma 2. Suppose that

$$h = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Then, sequence $\{t_n\}$ is increasingly converging to $\frac{1}{L_0}$.

Proof. We have $\alpha_n = (1 - L_0R)^n, \beta_n = L_0\gamma$ and $t_n = \frac{1-(1-L_0\gamma)^n}{L_0}$. Then, by (8), we get $0 \leq L_0\gamma < 1$. □

In what follows the set denoted by $U(x, a)$ is a ball with center $x \in X$ and of radius $a > 0$.

To simplify, the notation, by $\| \cdot \|$ in this work, we denote the operator norm or the norm on the Banach space. The semi-local convergence analysis is based on the conditions (C):

(C₁) $F : D \subset X \rightarrow X$ is a Fréchet differentiable operator and there exist $x_0 \in D, c > 0, \gamma \geq 0$ such that $\Gamma_0 = (I - F'(F(x_0)))^{-1} \in L(X, X)$ with

$$\|I - F'(F(x_0))\| \leq c$$

and

$$\|\Gamma_0(x_0 - F(x_0))\| \leq \gamma.$$

(C₂) There exist $a_0 \in [0, 1), b_0 > 0$ such that for each $x \in D$

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq a_0\|x - x_0\|$$

and

$$\|\Gamma_0(F'(F(x)) - F'(F(x_0)))\| \leq b_0 \|F(x) - F(x_0)\|.$$

(C₃) Let $r_0 = \frac{1}{a_0 b_0}$ and $D_0 = D \cap U(x_0, r_0)$. There exist $b > 0, b_1 > 0$ such that for each $x, y \in D_0$

$$\|\Gamma_0(F'(x) - F'(y))\| \leq b \|x - y\|$$

and

$$\|F'(F(x)) - F'(F(x_0))\| \leq b_1 \|F(x) - F(x_0)\|.$$

(C₄) Hypotheses of Lemmas 1 and 2 hold with

$$L = 2b(c + \frac{b_1}{b_0} + \frac{1}{2})$$

and

$$L_0 = a_0 b_0.$$

(C₅)

$$\frac{\|F(x_0) - x_0\|}{1 - a_0} \leq t^*.$$

(C₆) The ball $\bar{U}(x_0, t^*)$ is constructed such that

$$\bar{U}(x_0, t^*) \subseteq D.$$

We suppose from now on that the conditions (C) hold.

Next, the semi-local convergence result is given for Stirling’s method (2).

Theorem 1. Under conditions (C), sequence $\{x_n\}$ generated by Stirling’s method (2) is well defined, remains in $U(x_0, t^*)$ for each $n = 0, 1, 2, \dots$ and converges to $x^* \in \bar{U}(x_0, t^*)$ which satisfies $x^* = F(x^*)$ with Q-order of convergence 2. Moreover, the following estimates hold

$$\|x_n - x^*\| \leq t^* - t_n,$$

and x^* is the only fixed point of F in $U(x_0, t^{**})$, with

$$t^{**} = \frac{2}{b} - (2a_0 + 1)t^*.$$

Proof. Let $x \in \bar{U}(x_0, t^*)$. We get by (C₂) and (C₅) that

$$\|F(x) - x_0\| \leq \|F(x) - F(x_0)\| + \|F(x_0) - x_0\| \leq a_0 \|x - x_0\| + \|F(x_0) - x_0\| \leq a_0 t^* + \|F(x_0) - x_0\| \leq t^*,$$

so $F(x) \in \bar{U}(x_0, t^*)$. Using (C₂) and the Lemmas 1 and 2, we have in turn that

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0(\Gamma(x) - \Gamma_0)\| &= \|\Gamma_0((F'(F(x)) - F'(F(x_0))))\| \\ &\leq b_0 a_0 \|x - x_0\| = L_0 \|x - x_0\| \leq L_0 t^* < 1. \end{aligned} \tag{9}$$

By the Lemma of Banach on invertible operators [21] (Perturbation Lemma 2.3.2, p. 45) $\Gamma(x)^{-1} \in L(\mathcal{X}, X)$, and

$$\|\Gamma(x)(I - F'(F(x_0)))\| \leq \frac{1}{1 - L_0 \|x - x_0\|}. \tag{10}$$

Using Stirling’s method (2):

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} - F(x_{k+1}) &= F(x_{k+1}) - F(x_k) - F(x_{k+1}) + F(x_k) \\
 &= F'(y_k)(x_{k+1} - x_k) - (F(x_{k+1}) - F(x_k)) \\
 &= \int_0^1 [F'(y_k) - F'(x_k + \theta(x_{k+1} - x_k))](x_{k+1} - x_k)d\theta.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Then, in view of (C₂), (C₃) and Equation (11), we obtain in turn that

$$\begin{aligned}
 &||\Gamma_0(x_{k+1} - F(x_{k+1}))|| \\
 \leq & b \int_0^1 ||y_k - x_k - \theta(x_{k+1} - x_k)|| |x_{k+1} - x_k| d\theta \\
 \leq & b[||y_k - x_k|| + \frac{1}{2}||x_{k+1} - x_k||] |x_{k+1} - x_k| \\
 \leq & b[(||I - F'(F(x_0))|| + ||F'(y_k) - F'(F(x_0))||) + ||x_{k+1} - x_k|| + \frac{1}{2}||x_{k+1} - x_k||] |x_{k+1} - x_k| \\
 \leq & b(c + \frac{b_1 a_0}{a_0 b_0} + \frac{1}{2}) ||x_{k+1} - x_k||^2 \\
 = & \frac{L}{2} ||x_{k+1} - x_k||^2.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Next, we can connect the preceding estimates on sequence {x_k} with {t_k}. Indeed, we get by (C₁) and Equation (3) that

$$||x_1 - x_0|| = ||\Gamma_0(x_0 - F(x_0))|| \leq \gamma = t_1 = t_1 - t_0.$$

By induction, Equations (3), (4), (10) and (12), we have in turn that

$$\begin{aligned}
 ||x_{k+1} - x_k|| &= ||\Gamma_k(x_k - F(x_k))|| \leq ||\Gamma_k(I - F'(F(x_0)))|| ||\Gamma_0(x_k - F(x_k))|| \\
 &\leq \frac{L(t_k - t_{k-1})^2}{2(1 - L_0 t_k)} = t_{k+1} - t_k.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Hence, {t_k} defined by Equation (3) is a majorizing sequence for {x_k}. By Lemmas 1 and 2, sequence {t_k} is complete as convergent to t*. It then follows by Equation (13) that sequence {x_k} is also complete so it converges to some x* ∈ Ū(x₀, t*). By the estimate (see (12))

$$||\Gamma_0(x_{k+1} - F(x_{k+1}))|| \leq \frac{L}{2} ||x_{k+1} - x_k||^2 \leq \frac{L}{2} (t_{k+1} - t_k)^2, \tag{14}$$

we deduce that x* = F(x*) by letting k → ∞. Estimate ||x_n - x*|| ≤ t* - t_n follows from Equation (13) and for λ = $\frac{L}{2(1-L_0 t^*)}$, we get that

$$\begin{aligned}
 ||x_{k+1} - x_k|| &\leq \frac{L}{2(1 - L_0 t_k)} ||x_k - x_{k-1}||^2 \\
 &\leq \lambda ||x_k - x_{k-1}||^2,
 \end{aligned}$$

which implies that the Q-order convergence of Stirling’s method (2) is two. Furthermore, to show the uniqueness part, let $y^* \in U(x_0, t^{**})$ with $F(y^*) = y^*$. Define the operator Q by $Q = - \int_0^1 \Gamma_0 F'(x^* + \theta(y^* - x^*))d\theta$. In view of (C₂) and (C₃), we obtain in turn that

$$\begin{aligned} \|I - (\Gamma_0 - Q)\| &= \left\| \int_0^1 \Gamma_0 [F'(x^* + \theta(y^* - x^*)) - F'(F(x_0))]d\theta \right\| & (15) \\ &\leq b \int_0^1 \|x^* + \theta(y^* - x^*) - F(x_0)\|d\theta \\ &\leq b[\|F(x^*) - F(x_0)\| + \frac{1}{2}\|x^* - x_0\| + \frac{1}{2}\|y^* - x_0\|] \\ &\leq b[(a_0 + \frac{1}{2})t^* + \frac{1}{2}t^{**}] < 1. \end{aligned}$$

Then, by (15) $(\Gamma_0 - Q)^{-1} \in L(X, X)$. Finally, we obtain $y^* = x^*$ using the identity

$$0 = \Gamma_0(y^* - F(y^*) - x^* + F(x^*)) = (\Gamma_0 - Q)(y^* - x^*).$$

□

Remark 1.

(a) The Stirling’s method usual conditions corresponding to (C₂) (first condition) are given by [22]:

$$(C_2)' \quad \|F'(x)\| \leq a \text{ for each } x \in D \text{ and } a \in [0, 1).$$

That is, operator F must be a contraction on D. Moreover, the convergence of Stirling’s method was shown in [22] under (C₂), $D_0 = D$ and $a \in (0, \frac{1}{3}]$. However, in the present study no such assumption is made. Hence, the applicability of Stirling’s method (2) is extended. Notice also that we can have $a_0 \leq a, b_0 \leq b$ and c can be chosen as $b = cb_1$.

- (b) Estimate (4) is similar to the sufficient convergence Kantorovich-type criteria for the semi-local convergence of Newton’s method given by us in [4]. However, the constants \bar{b}_0 and \bar{b} are the center-Lipschitz and Lipschitz constants for operator F (see also part (e)).
- (c) If set D_0 is switched by $D_1 = D \cap U(x_1, r_0 - \|x_0 - F(x_0)\|)$, since $D_1 \subseteq D$ and the iterates remain in D_1 the results can be improved even further. The corresponding constants to b and b_1 will be at least as small.
- (d) In view of the proof of Theorem 1, scalar sequence $\{s_n\}$ defined by

$$s_0 = 0, s_1 = R, s_{n+1} = s_n + \frac{k_n(s_n - s_{n-1})^2}{1 - L_0 s_n},$$

is also a majorizing sequence for Stirling’s method (2), where

$$k_n = ab(c + b_1 a_0 s_n + \frac{1}{2}) < L$$

$$s_n \leq t_n,$$

$$s_{n+1} - s_n \leq t_{n+1} - t_n$$

and

$$s^* = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq t^*.$$

(e) Newton’s method for Equation (1) is given for all $n = 0, 1, 2, \dots$ by

$$y_{n+1} = y_n - (I - F'(y_n))^{-1}(y_n - F(y_n)).$$

Consider, items $\bar{c}, \bar{\gamma}, \bar{L}_0, \bar{L}, \bar{L}_1, \bar{\Gamma}_0, \bar{b}_0, \bar{b}, \bar{b}_1, \bar{r}_0, \bar{D}_0$ and \bar{h} , corresponding to $c, \gamma, L_0, L, L_1, \Gamma_0, b_0, b, b_1, r_0, D_0$ and h respectively as

$$\begin{aligned} \|I - F'(x_0)\| &\leq \bar{c}, \\ \|\bar{\Gamma}_0(x_0 - F(x_0))\| &\leq \bar{\gamma}, \\ \|\bar{\Gamma}_0(F'(x) - F'(x_0))\| &\leq \bar{b}_0\|x - x_0\|, \\ \|\bar{\Gamma}_0(F'(x) - F'(y))\| &\leq \bar{b}\|x - y\|, \\ \bar{L} &= 2\bar{b}(\bar{c} + \frac{\bar{b}_1}{\bar{b}_0} + \frac{1}{2}), \bar{b}_1 = \bar{b}_0, \\ \bar{L}_0 &= \bar{a}_0\bar{b}_0, \\ \bar{r}_0 &= \frac{1}{\bar{a}_0\bar{b}_0}, \\ \bar{D}_0 &= D \cap U(x_0, \bar{r}_0), \end{aligned}$$

and

$$\bar{h} = \bar{L}_1, \bar{\gamma} \leq \frac{1}{2},$$

where

$$\bar{L}_1 = \frac{1}{8}(\bar{L} + 4\bar{L}_0 + \sqrt{\bar{L}^2 + 8\bar{L}_0\bar{L}}).$$

The scalar sequence \bar{t}_n is defined as

$$\bar{t}_0 = 0, \bar{t}_1 = \bar{\gamma}, \bar{t}_{n+2} = \bar{t}_{n+1} + \frac{\bar{L}(\bar{t}_{n+1} - \bar{t}_n)^2}{2(1 - \bar{L}_0\bar{t}_{n+1})}$$

Then, Stirling’s method sufficient convergence criteria, error bounds and information on the uniqueness of the solution are better than Newton’s method when the “bar” constants and sets are smaller than the non bar constants. Similar favorable comparison can be made in the local convergence case that follows.

3. Local Convergence

The conditions (\mathcal{H}) are used in the local convergence analysis of Stirling’s method (2):

(\mathcal{H}_1) $F : D \subset X \rightarrow X$ is a Fréchet differentiable operator, and there exists $x^* \in D$ such that $\Gamma_* = (I - F'(x^*))^{-1} \in L(X, X)$ and $F(x^*) = x^*$.

(\mathcal{H}_2) There exist $\mu \in (0, 1), \zeta_0 > 0$ such that for each $x \in D$

$$\|F(x) - F(x^*)\| \leq \mu\|x - x^*\|$$

and

$$\|\Gamma_*(F'(F(x)) - F'(F(x^*)))\| \leq \zeta_0\|F(x) - F(x^*)\|.$$

(\mathcal{H}_3) Let $D_0^* = D \cap U(x^*, R_0), R_0 = \frac{1}{\zeta_0\mu}$. There exists $\zeta > 0$ such that for each $x, y \in D_0^*$

$$\|\Gamma_*(F'(x) - F'(y))\| \leq \zeta\|x - y\|.$$

(\mathcal{H}_4) The ball $\bar{U}(x^*, R)$ is constructed such that $\bar{U}(x^*, R) \subseteq D$, where

$$R = \frac{1}{(\mu + \frac{1}{2})\zeta + \mu\zeta_0}.$$

Theorem 2. Suppose that conditions (\mathcal{H}) hold. Then, sequence $\{x_n\}$ generated for $x_0 \in U(x^*, R) - \{x^*\}$ by Stirling’s method (2) is well defined in $U(x^*, R)$, remains in $U(x^*, R)$ for each $n = 0, 1, 2, \dots$ and converges to $x^* \in \bar{U}(x^*, R)$. Moreover, the following inequality holds

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \frac{\xi(\mu + \frac{1}{2})\|x_n - x^*\|^2}{1 - \mu\tilde{\xi}_0\|x_n - x^*\|}. \tag{16}$$

Furthermore, if $R_1 = \frac{2}{\xi}$, x^* is the only fixed point of F on $U(x^*, R_1)$.

Proof. We shall show using mathematical induction that sequence $\{x_n\}$ is well defined, remains in $U(x^*, R)$ and converges to x^* so that (16) is satisfied. We have by (\mathcal{H}_1) and (\mathcal{H}_2) for $x \in U(x^*, R)$ that

$$\|F(x) - x^*\| = \|F(x) - F(x^*)\| \leq \mu\|x - x^*\| \leq R,$$

so $F(x) \in U(x^*, R)$. Then by (\mathcal{H}_2)

$$\begin{aligned} \|\Gamma_*(I - F'(F(x))) - \Gamma_*\| &= \|\Gamma_*(F'(F(x)) - F'(F(x^*)))\| \\ &\leq \tilde{\xi}_0\|F(x) - F(x^*)\| \leq \tilde{\xi}_0\mu\|x - x^*\| \leq \tilde{\xi}_0\mu R < 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Hence, $\Gamma(x) \in L(X, X)$ and

$$\|\Gamma(x)(I - F(F(x^*)))\| \leq \frac{1}{1 - \mu_0\tilde{\xi}_0\|x - x^*\|}. \tag{18}$$

In particular, (18) holds for $x = x_0$, which shows that x_1 is well defined by Stirling’s method for $n = 0$. We can write by (\mathcal{H}_1) that

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= x_0 - x^* - (I - F'(F(x_0)))^{-1}(x_0 - F(x_0)) \\ &= (I - F'(F(x_0)))^{-1}[F(x_0) - F(x^*) - F'(F(x_0))(x_0 - x^*)] \\ &= (I - F'(F(x_0)))^{-1}[\int_0^1 (F'(x^* + \theta(x_0 - x^*)) - F'(F(x_0)))(x_0 - x^*)d\theta]. \end{aligned} \tag{19}$$

We get in turn by (\mathcal{H}_2) and (\mathcal{H}_3)

$$\begin{aligned} &\|\Gamma_* \int_0^1 (F'(x^* + \theta(x_0 - x^*)) - F'(F(x_0)))(x_0 - x^*)d\theta\| \\ &\leq \xi \int_0^1 \|x^* + \theta(x_0 - x^*) - F(x_0)\| \|x_0 - x^*\| d\theta \\ &\leq \xi[\|F(x^*) - F(x_0)\| + \theta\|x_0 - x^*\|] d\theta \\ &\leq \xi(\mu + \frac{1}{2})\|x_0 - x^*\| \end{aligned} \tag{20}$$

Then, by (18)–(20), we get that also

$$\begin{aligned} \|x_1 - x^*\| &\leq \|(I - F'(F(x_0)))^{-1}\Gamma_*\| \\ &\leq \frac{\xi(\mu + \frac{1}{2})\|x_0 - x^*\|^2}{1 - \mu\tilde{\xi}_0\|x_0 - x^*\|} \leq \|x_0 - x^*\| < R, \end{aligned}$$

so (16) holds for $n = 0$ and $x_1 \in U(x^*, R)$. Switch x_0 by x_k in the preceding estimates, we arrive at (16). In view of the estimate $\|x_{k+1} - x^*\| < \|x_k - x^*\| < R$, we conclude that $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ and $x_{k+1} \in U(x^*, R)$. Let $x_0 = x^*$ in (15) to show the uniqueness part. \square

Remark 2. The local results in the literature use $(C_2)'$ and $D_0^* = D$. But (H_2) is weaker than $(C_2)'$. Hence, we extend the applicability of Stirling’s method (2) in the local case too.

4. Numerical Example with Concluding Remarks

In the next example, we compare Stirling’s method with Newton’s method.

Example 1. Let $D = X = \mathbb{R}$. Consider function F on D as

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x, & x \leq 3 \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 3, & 3 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{3}(x - 7), & x \geq 4. \end{cases}$$

Clearly, the quadratic polynomial joins smoothly with the linear parts.

- (I) Semilocal case (i). If we choose $x_0 = 3$, we see that $x_1 = y_1 = x^* = 0$. Moreover, the semi-local convergence criteria of Theorem 1 are satisfied (with $\gamma = 0, a_0 = \frac{1}{3}$ and $c = \frac{4}{3}$).
- (II) Local convergence criteria of Theorem 2 (with $\mu = \frac{1}{3}$, since the derivative of the quadratic polynomial satisfies $\frac{1}{3}|2x - 7| \leq \frac{1}{3}$ for all $x \in [3, 4]$).
- (III) In Tables 1 and 2 we present some cases in which Stirling’s method stands better than Newton’s one.

Table 1. Iteration of Newton’s and Stirling’s method with different starting points.

Iteration	Newton’s Method	Stirling’s Method
0	3.4975	3.4975
1	−646.501	0.0618766
2	-1.13687×10^{-13}	0

Table 2. Iteration of Newton’s and Stirling’s method with different starting points.

Iteration	Newton’s Method	Stirling’s Method
0	3.5	3.5
1	∞	0.0625
2	−	0

In the current study, we have successfully demonstrated our claims on Stirling’s method by focusing on very classic problems, but in the future we will consider studying other complex problems such as solving symmetric ordinary differential equations with a more favorable theory.

Author Contributions: All authors have equally contributed to this work. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: Research supported in part by Séneca 20928/PI/18 and by MINECO PGC2018-095896-B-C21.

Conflicts of Interest: The authors have no conflict of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses, or interpretation of data; in the writing of the manuscript, or in the decision to publish the results.

References

- Argyros, I.K. Stirling's method and fixed points of nonlinear operator equations in Banach spaces. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.* **1995**, *23*, 13–20.
- IArgyros, I.K. A new iterative method of asymptotic order $1 + \sqrt{2}$ for the computation of fixed points. *Int. J. Comput. Math.* **2005**, *82*, 1413–1428. [[CrossRef](#)]
- Argyros, I.K.; Chen, D. Results on the Chebyshev method in Banach spaces. *Proyecciones* **1993**, *12*, 119–128. [[CrossRef](#)]
- Argyros, I.K.; Hilout, S. Weaker conditions for the convergence of Newton's method. *J. Complex.* **2012**, *28*, 364–387. [[CrossRef](#)]
- Argyros, I.K. A unifying local–semilocal convergence analysis and applications for two–point Newton–like methods in Banach space. *J. Math. Anal. Appl.* **2004**, *298*, 374–397. [[CrossRef](#)]
- Argyros, I.K.; Magreñán, Á.A. *Iterative Methods and Their Dynamics with Applications: A Contemporary Study*; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2017.
- Burrows, A.; Lockwood, M.; Borowczak, M.; Janak, E.; Barber, B. Integrated STEM: Focus on Informal Education and Community Collaboration through Engineering. *Educ. Sci.* **2018**, *8*, 4. [[CrossRef](#)]
- Cianciaruso, F.; De Pascale, E. Estimates of majorizing sequences in the Newton-Kantorovich method: A further improvement. *J. Math. Anal. Appl.* **2006**, *332*, 329–335. [[CrossRef](#)]
- Cordero, A.; Gutiérrez, J.M.; Magreñán, Á.A.; Torregrosa, J.R. Stability analysis of a parametric family of iterative methods for solving nonlinear models. *Appl. Math. Comput.* **2016**, *285*, 26–40. [[CrossRef](#)]
- Chun, C.; Stanica, P.; Neta, B. Third order family of methods in Banach spaces. *Comput. Math. Appl.* **2011**, *61*, 1665–1675. [[CrossRef](#)]
- Grout, I. Remote Laboratories as a Means to Widen Participation in STEM Education. *Educ. Sci.* **2017**, *7*, 85. [[CrossRef](#)]
- Hernández, M.Á. The Newton Method for Operators with H'older Continuous First Derivate. *J. Optim. Theory Appl.* **2001**, *109*, 631–648. [[CrossRef](#)]
- Kantorovich, L.V.; Akilov, G.P. *Functional Analysis*; Pergamon Press: Oxford, UK, 1982.
- Laforce, M.; Noble, E.; Blackwell, C. Problem-Based Learning (PBL) and Student Interest in STEM Careers: The Roles of Motivation and Ability Beliefs. *Educ. Sci.* **2017**, *7*, 92. [[CrossRef](#)]
- LeTendre, G.; McGinnis, E.; Mitra, D.; Montgomery, R.; Pendola, A. The American Journal of Education: Challenges and opportunities in translational science and the grey area of academic. *Rev. Esp. Pedag.* **2018**, *76*, 413–435. [[CrossRef](#)]
- Magreñán, Á.A. Different anomalies in a Jarratt family of iterative root-finding methods. *Appl. Math. Comput.* **2014**, *233*, 29–38.
- Magreñán, Á.A.; Argyros, I.K. A new tool to study real dynamics: The convergence plane. *Appl. Math. Comput.* **2014**, *248*, 215–224. [[CrossRef](#)]
- Magreñán, Á.A. On the local convergence and the dynamics of Chebyshev-Halley methods with six and eight order of convergence. *J. Comput. Appl. Math.* **2016**, *298*, 236–251. [[CrossRef](#)]
- Magreñán, Á.A.; Gutiérrez, J.M. Real dynamics for damped Newton's method applied to cubic polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **2015**, *275*, 527–538. [[CrossRef](#)]
- Nakakoji, Y.; Wilson, R. First-Year Mathematics and Its Application to Science: Evidence of Transfer of Learning to Physics and Engineering. *Educ. Sci.* **2018**, *8*, 8. [[CrossRef](#)]
- Ortega, J.M.; Rheinboldt, W.C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*; Academic Press: New York, NY, USA, 1970.
- Rall, L.B. Convergence of Stirling's method in Banach spaces. *Aequ. Math.* **1975**, *12*, 12–20. [[CrossRef](#)]
- Rheinboldt, W.C. An adaptive continuation process for solving systems of nonlinear equations. *Pol. Acad. Sci. Banach. Cent. Publ.* **1978**, *3*, 129–142. [[CrossRef](#)]
- Traub, J.F. *Iterative Methods for the Solution of Equations*; Prentice-Hall Series in Automatic Computation: Englewood Cliffs, NJ, USA, 1964.





5.3 Artículo 3

Titulo	<i>Study of a High Order Family: Local Convergence and Dynamics</i>
Autores - Afiliación	
Nombre	Cristina Amorós
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)
Nombre	Ioannis K. Argyros
Universidad	Cameron University (Estados Unidos)
Nombre	Rubén González
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)
Nombre	Ángel Alberto Magreñán
Universidad	Universidad de La Rioja (España)
Nombre	Lara Orcos
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)
Nombre	Íñigo Sarría
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)

Article

Study of a High Order Family: Local Convergence and Dynamics

Cristina Amorós ¹, Ioannis K. Argyros ², Ruben González ¹ , Á. Alberto Magreñán ³,
Lara Orcos ⁴ and Íñigo Sarria ^{1,*} 

¹ Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología, Universidad Internacional de La Rioja, 26006 Logroño, Spain; cristina.amoros@unir.net (C.A.); ruben.gonzalez@unir.net (R.G.)

² Department of Mathematics Sciences, Cameron University, Lawton, OK 73505, USA; iargyros@cameron.edu

³ Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain; angel-alberto.magrenan@unirioja.es

⁴ Facultad de Educación, Universidad Internacional de La Rioja, 26006 Logroño, Spain; lara.orcos@unir.net

* Correspondence: inigo.sarria@unir.net

Received: 10 December 2018; Accepted: 25 February 2019; Published: 28 February 2019



Abstract: The study of the dynamics and the analysis of local convergence of an iterative method, when approximating a locally unique solution of a nonlinear equation, is presented in this article. We obtain convergence using a center-Lipschitz condition where the ball radii are greater than previous studies. We investigate the dynamics of the method. To validate the theoretical results obtained, a real-world application related to chemistry is provided.

Keywords: high order; sixteenth order convergence method; local convergence; dynamics

1. Introduction

A well known problem is that of approximating a locally unique solution x^* of equation

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

where F is a differentiable function defined on a nonempty convex subset D of S with values in Ω , where Ω can be \mathbb{R} or \mathbb{C} . In this article, we are going to deal with it.

Mathematics is always changing and the way we teach it also changes as it is presented in [1,2]. In the literature [3–8], we can find many problems in engineering and applied sciences that can be solved by finding solutions of equations in a way such as (1). Finding exact solutions for this type of equation is not easy. Only in a few special cases can we find the solutions of these equations in closed form. We must look for other ways to find solutions to these equations. Normally we resort to iterative methods to be able to find solutions. Once we propose to find the solution iteratively, it is mandatory to study the convergence of the method. This convergence is usually seen in two different ways, which gives rise to two different categories, the semilocal convergence analysis and the local convergence analysis. The first of these, the semilocal convergence analysis, is based on information around an initial point, which will provide us with criteria that will ensure the convergence of an iteration procedure. On the other hand, the local convergence analysis is generally based on information about a solution to find values of the calculated radii of the convergence balls. The local results obtained are fundamental since they provide the degree of difficulty to choose the initial points.

We must also deal with the domain of convergence in the study of iterative methods. Normally, the convergence domain is very small and it is necessary to be able to extend this convergence domain without adding any additional hypothesis. Another important problem is finding more accurate

estimates of error in distances. $\|x_{n+1} - x_n\|, \|x_n - x^*\|$. Therefore, to extend the domain without the need for additional hypotheses and to find more precise estimates of the error committed, in addition to the study of dynamic behavior, will be our objectives in this work.

The iterative methods can be applied to polynomials, and the dynamic properties related to this method will give us important information about its stability and reliability. Recently in some studies, authors such as Amat et al. [9–11], Chun et al. [12], Gutiérrez et al. [13], Magreñán [14–16], and many others [8,13,17–30] have studied interesting dynamic planes, including periodic behavior and other anomalies detected. For all the above, in this article, we are going to study the parameter spaces associated with a family of iterative methods, which will allow us to distinguish between bad and good methods, always speaking in terms of their numerical properties.

We present the dynamics and the local convergence of the four step method defined for each $n = 0, 1, 2, \dots$ by

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \alpha F'(x_n)^{-1} F(x_n) \\ z_n &= y_n - C_1(x_n) F'(x_n)^{-1} F(y_n) \\ v_n &= z_n - C_2(x_n) F'(x_n)^{-1} F(z_n) \\ x_{n+1} &= z_n - C_3(x_n) F'(x_n)^{-1} F(v_n), \end{aligned} \tag{2}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ is a parameter, x_0 is an initial point and $C_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ are continuous functions given. Numerous methods of more than one step are particular cases of the previous method (2). For example, for certain values of the parameters this family can be reduced to:

- Artidiello et al. method [31]
- Petković et al. method [32]
- Kung-Traub method [29]
- Fourth order King family
- Fourth order method given by Zhao et al. in [33]
- Eighth order method studied by Dzunic et al. [34].

It should be noted that to demonstrate the convergence of all methods after the method (2), in all cases Taylor expansions have been used as well as hypotheses involving derivatives of order greater than one, usually the third derivative or greater. However, in these methods only the first derivative appears. In this article we will perform the analysis of local convergence of the method (2) using hypotheses that involve only the first derivative of the function F . In this way we save the tedious calculation of the successive derivatives (in this case the second and third derivatives) in each step. The order of convergence (COC) is found using and an approximation of the COC (ACOC) using that do not require the usage of derivatives of order higher than one (see Remark 1). Our objective will also be able to provide a computable radius of convergence and error estimates based on the Lipschitz constants.

We must also realize that there are a lot of iterative methods to approximate solutions of nonlinear equations defined in \mathbb{R} or \mathbb{C} [32,35–38]. These studies show that if the initial point x_0 is close enough to the solution x^* , the sequence $\{x_n\}$ converges to x^* . However, from the initial estimate, how close to the solution x^* should it be? In these cases, the local results do not provide us with information about the radius of the convergence ball for the corresponding method. We will approach this question for the method (2) in Section 2. Similarly, we can use the same technique with other different methods.

2. Method's Local Convergence

Let us define, respectively, $U(v, \rho)$ and $\bar{U}(v, \rho)$ as open and closed balls in S , of radius $\rho > 0$ and with center $v \in \Omega$.

To study the analysis of local convergence of the method (2), we are going to define a series of conditions that we will name (C):

(C₁) $F : D \subset \Omega \rightarrow \Omega$ is a differentiable function.

We know that exist a constant $x^* \in D, L_0 > 0$, such that for each $x \in D$ is fulfilled

(C₂) $F(x^*) = 0, F'(x^*) \neq 0$.

(C₃) $\|F'(x^*)^{-1}(F'(x) - F'(x^*))\| \leq L_0\|x - x^*\|$

Let $D_0 := D \cap U(x^*, \frac{1}{L_0})$. There exist constants $L > 0, M \geq 1$ such that for each $y \in D_0$

(C₄) $\|F'(x^*)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq L\|x - y\|$

(C₅) $\|F'(x^*)^{-1}F'(x)\| \leq M$.

There exist parameters γ_i and continuous nondecreasing functions $\psi_i : [0, \gamma_i) \rightarrow \mathbb{R}$ such that $i = 0, 1, 2, 3$:

(C₆) $\gamma_{i+1} \leq \gamma_i \leq \frac{1}{L_0}$

and

(C₇) $\psi_i(t) \rightarrow a + \infty$ or a number greater than 0 as $t \rightarrow \gamma_i^{-1}$. For $\alpha \in \mathbb{R}$, consider the functions

$q_j : [0, \gamma_j) \rightarrow \mathbb{R} \quad j = 0, 1, 2, 3$ by

$$q_j(t) = \begin{cases} M|1 - \alpha|, & j = 0 \\ M^{i+j}|1 - \alpha| \prod_{i=0}^j \psi_1(t) \cdots \psi_j(t), & j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

(C₈) $p_j := q_j(0) < 1, \quad j = 0, 1, 2, 3$,

(C₉) $C_i : \Omega \rightarrow \Omega$ are continuous functions such that for each $x \in D_0, \|C_i(x)\| \leq \psi_i(\|x - x^*\|)$ and

(C₁₀) $U(x^*, r) \subset D$ for some $r > 0$ to be appointed subsequently.

We are going to introduce some parameters and some functions for the local convergence analysis of the method (2). We define the function g_0 on the interval $[0, \frac{1}{L_0})$ by

$$g_0(t) = \frac{1}{2(1 - L_0t)}(Lt + 2M|1 - \alpha|)$$

and parameters r_0, ϱ_A by

$$r_0 = \frac{2(1 - M|1 - \alpha|)}{2L_0 + L}, \quad \varrho_A = \frac{2}{2L_0 + L}.$$

Then, since $p_0 = M|1 - \alpha| < 1$ by (C₈), we have that $0 < r_0 < \varrho_A, g_0(r_1) = 1$ and for each $t \in [0, r_1) 0 \leq g_0(t) < 1$. Define functions g_i, h_i on the interval $[0, \gamma_i)$ by

$$g_i(t) = (1 + \frac{M\psi_i(t)}{1 - L_0t})g_{i-1}(t)$$

and

$$h_i(t) = g_i(t) - 1$$

for $i = 1, 2, 3$. We have by (C₈) that $h_i(0) = p_j - 1 < 0$ and by (C₆) and (C₇) $h_i(t) \rightarrow a$ positive number or $+\infty$. Applying the intermediate value theorem, we know that functions h_i have zeros in the interval $[0, \gamma_i)$. Denote by r_i the smallest such zero. Set

$$r = \min\{r_j\}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{3}$$

Therefore, we can write that

$$0 \leq r < r_A \tag{4}$$

moreover for each $j = 0, 1, 2, 3, t \in [0, r)$

$$0 \leq g_j(t) < 1. \tag{5}$$

Now, making use of the conditions (C) and the previous notation, we will show the results of local convergence for the method (2).

Theorem 1. *Let us assume that (C) conditions hold, if we take the radius r in (C_{10}) that has been defined previously. Then, the sequence $\{x_n\}$ generated by our method (2) and considering $x_0 \in U(x^*, r) \setminus \{x^*\}$ is well defined, remains in the ball $U(x^*, r)$ for each $n \geq 0$ and converges to the solution x^* . On the other hand, we see that the estimates are true:*

$$\|y_n - x^*\| \leq g_0(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\| < \|x_n - x^*\| < r, \tag{6}$$

$$\|z_n - x^*\| \leq g_1(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\| < \|x_n - x^*\|, \tag{7}$$

$$\|v_n - x^*\| \leq g_2(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\| < \|x_n - x^*\| \tag{8}$$

and

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq g_3(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\| < \|x_n - x^*\|, \tag{9}$$

where the “ g ” functions are defined previously. Furthermore, for

$$T \in [r, \frac{2}{L_0}) \tag{10}$$

the unique solution of equation $F(x) = 0$ in $\bar{U}(x^*, T) \cap D$ is the bound point x^* .

Proof. Using mathematical induction we shall prove estimates (6) and (10). By hypothesis $x_0 \in U(x, r) \setminus \{x^*\}$, the conditions (C_1) , (C_3) and (3), we have that

$$\|F'(x^*)^{-1}(F'(x_0) - F'(x^*))\| \leq L_0\|x_0 - x^*\| < L_0r < 1. \tag{11}$$

Taking into account the Banach lemma on invertible functions [5,7,39] we can write that $F'(x_0)^{-1} \in L(S, S)$ and

$$\|F'(x_0)^{-1}F'(x^*)\| \leq \frac{1}{1 - L_0\|x_0 - x^*\|}. \tag{12}$$

consequently, y_0 is well defined by the first substep of the method (2) for $n = 0$. We can set using the conditions (C_1) and (C_2) that

$$F(x_0) = F(x_0) - F(x^*) = \int_0^1 F'(x^* + \theta(x_0 - x^*))(x_0 - x^*)d\theta. \tag{13}$$

Remark that $\|x^* + \theta(x_0 - x^*) - x^*\| = \theta\|x_0 - x^*\| < r$, so $x^* + \theta(x_0 - x^*) \in U(x^*, r)$. Then, using (13) and condition (C_5) , we have that

$$\|F'(x^*)^{-1}F(x_0)\| \leq \left\| \int_0^1 F'(x^*)^{-1}F'(x^* + \theta(x_0 - x^*))(x_0 - x^*)d\theta \right\| \leq M\|x_0 - x^*\|. \tag{14}$$

In view of conditions (C_2) , (C_4) , (3) and (5) (for $j = 0$) and (12) and (14), we obtain that

$$\begin{aligned}
 \|y_0 - x^*\| &= \|x_0 - x^* - F'(x_0)^{-1}F(x_0) + (1 - \alpha)F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \\
 &\leq \|x_0 - x^* - F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| + |1 - \alpha| \|F'(x_0)^{-1}F'(x^*)\| \|F'(x^*)^{-1}F(x_0)\| \\
 &\leq \|F'(x_0)^{-1}F'(x^*)\| \int_0^1 F'(x^*)^{-1}(F'(x^* + \theta(x_0 - x^*)) - F'(x_0))(x_0 - x^*)d\theta \\
 &\quad + \frac{|1 - \alpha|M\|x_0 - x^*\|}{1 - L_0\|x_0 - x^*\|} \\
 &\leq \frac{L\|x_0 - x^*\|^2}{2(1 - L_0\|x_0 - x^*\|)} + \frac{|1 - \alpha|M\|x_0 - x^*\|}{1 - L_0\|x_0 - x^*\|} \\
 &= g_0(\|x_0 - x^*\|)\|x_0 - x^*\| < \|x_0 - x^*\| < r,
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

which evidences (6) for $n = 0$ and $y_0 \in U(x^*, r)$. Then, applying (C_9) condition, (3) and (5) (for $j = 1$), (12) and (14) (for $y_0 = x_0$) and (15), we achieve that

$$\|z_0 - x^*\| \leq g_1(\|x_0 - x^*\|)\|x_0 - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\|,
 \tag{16}$$

which displays (7) for $n = 0$ and $z_0 \in U(x^*, r)$. In the same way, we show estimates (8) and (9) for $n = 0$ and $v_0, x_1 \in U(x^*, r)$. Just substituting x_0, y_0, z_0, v_0, x_1 by $x_k, y_k, z_k, v_k, x_{k+1}$ in the preceding estimates, we deduce that (6)–(9). Using the estimates $\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\| < r, c = g_3(\|x_0 - x^*\|) \in [0, 1)$, we arrive at $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ and $x_{k+1} \in U(x^*, r)$. We have yet to see the uniqueness, let $y^* \in \bar{U}(x^*, T)$ be such that $F(y^*) = 0$. Define $B = \int_0^1 F'(y^* + \theta(x^* - y^*))d\theta$. Taking into account the condition (C_2) , we obtain that

$$\|F'(x^*)^{-1}(B - F'(x^*))\| \leq \frac{L_0}{2}\|y^* - x^*\| \leq \frac{L_0}{2}T < 1.
 \tag{17}$$

Hence, $B \neq 0$. Using the identity $0 = F(y^*) - F(x^*) = B(y^* - x^*)$, we can deduce that $x^* = y^*$. \square

Remark 1.

1. Considering (10) and the next value

$$\begin{aligned}
 \|F'(x^*)^{-1}F'(x)\| &= \|F'(x^*)^{-1}(I + F'(x) - F'(x^*))\| \\
 &\leq \|F'(x^*)^{-1}(F'(x) - F'(x^*))\| + 1 \\
 &\leq L_0\|x_0 - x^*\| + 1
 \end{aligned}$$

we can clearly eliminate the condition (10) and M can be turned into

$$M(t) = 1 + L_0t \text{ or what is the same } M(t) = M = 2, \text{ because } t \in [0, \frac{1}{L_0}).$$

2. The results that we have seen, can also be applied for F operators that satisfy the autonomous differential equation [5,7] of the form

$$F'(x) = P(F(x)),$$

where P is a known continuous operator. As $F'(x^*) = P(F(x^*)) = P(0)$, we are able to use the previous results without needing to know the solution x^* . Take for example $F(x) = e^x - 1$. Now, we can take $P(x) = x + 1$. However, we do not know the solution.

3. In the articles [5,7] was shown that the radius q_A has to be the convergence radius for Newton’s method using (10) and (11) conditions. If we apply the definition of r_1 and the estimates (8), the convergence radius r of the method (2) it can no be bigger than the convergence radius q_A of the second order Newton’s method. The convergence ball given by Rheinboldt [8] is

$$q_R = \frac{2}{3L_1}. \tag{18}$$

In particular, for $L_0 < L_1$ or $L < L_1$ we have that

$$q_R < q_A$$

and

$$\frac{q_R}{q_A} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ as } \frac{L_0}{L_1} \rightarrow 0.$$

That is our convergence ball r_1 which is maximum three times bigger than Rheinboldt’s. The precise amount given by Traub in [28] for q_R .

4. We should note that family (3) stays the same if we use the conditions of Theorem 1 instead of the stronger conditions given in [15,36]. Concerning, for the error bounds in practice we can use the approximate computational order of convergence (ACOC) [36]

$$\zeta = \frac{\ln \frac{\|x_{n+2} - x_{n+1}\|}{\|x_{n+1} - x_n\|}}{\ln \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|x_n - x_{n-1}\|}}, \text{ for each } n = 1, 2, \dots$$

or the computational order of convergence (COC) [40]

$$\zeta^* = \frac{\ln \frac{\|x_{n+2} - x^*\|}{\|x_{n+1} - x^*\|}}{\ln \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|x_n - x^*\|}}, \text{ for each } n = 0, 1, 2, \dots$$

And these order of convergence do not require higher estimates than the first Fréchet derivative used in [19,23,32,33,41].

Remark 2. Let’s see how we can choose the functions in the case of the method (2). In this case we have that

$$\overline{C}_1\left(\frac{F(y_n)}{F(x_n)}\right) = C_1(x_n), \quad \overline{C}_2\left(\frac{F(y_n)}{F(x_n)}, \frac{F(z_n)}{F(y_n)}\right) = C_2(x_n), \quad \overline{C}_3\left(\frac{F(y_n)}{F(x_n)}, \frac{F(z_n)}{F(y_n)}, \frac{F(v_n)}{F(z_n)}\right) = C_3(x_n)$$

To begin, the condition (C_3) can be eliminated because in this case we have $\alpha = 1$. Then, if $x_n \neq x^*$, the following inequality holds

$$\begin{aligned} & \| (F'(x^*)(x_n - x^*))^{-1} [F(x_n) - F(x^*) - F'(x^*)(x_n - x^*)] \| \\ & \leq \|x_n - x^*\|^{-1} \frac{L_0}{2} \|x_n - x^*\| = \frac{L_0}{2} \|x_n - x^*\| < \frac{L_0}{2} r < 1. \end{aligned}$$

Hence, we have that

$$\|F'(x_n)^{-1}F(x^*)\| \leq \frac{1}{\|x_n - x^*\|(1 - \frac{L_0}{2}\|x_n - x^*\|)}.$$

Consequently, we get that

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(y_n)}{F(x_n)} \right\| &= \|F'(x_n)^{-1}F'(x^*)\| \|F'(x^*)^{-1}F(y_n)\| \\ &\leq \frac{M\|y_n - x^*\|}{\|x_n - x^*\|(1 - \frac{L_0}{2}\|x_0 - x^*\|)} \\ &\leq \frac{Mg_0(\|x_n - x^*\|)}{1 - L_0\|x_n - x^*\|}. \end{aligned} \tag{19}$$

Similarly, we obtain

$$\begin{aligned} \|F(y_n)^{-1}F'(x^*)\| &\leq \frac{1}{\|y_n - x^*\|(1 - \frac{L_0}{2}\|y_n - x^*\|)}, \\ \left\| \frac{F(z_n)}{F(y_n)} \right\| &\leq \frac{M(1 + \frac{M\psi_1(\|x_n - x^*\|)}{1 - L_0\|x_n - x^*\|})}{1 - \frac{L_0}{2}g_0(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\|}, \\ \|F(z_n)^{-1}F'(x^*)\| &\leq \frac{1}{\|z_n - x^*\|(1 - \frac{L_0}{2}\|y_n - x^*\|)}, \end{aligned} \tag{20}$$

and

$$\left\| \frac{F(z_n)}{F(y_n)} \right\| \leq \frac{M(1 + \frac{M\psi_2(\|x_n - x^*\|)}{1 - L_0\|x_n - x^*\|})}{1 - \frac{L_0}{2}g_0(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\|}, \tag{21}$$

Let us choose $C_i, i = 1, 2, 3, 4$ as in [31]:

$$C_1(a) = 1 + 2a + 4a^3 - 3a^4 \tag{22}$$

$$C_2(a, b) = 1 + 2a + b + a^2 + 4ab + 3a^2b + 4ab^2 + 4a^3b - 4a^2b^2 \tag{23}$$

and

$$C_3(a, b, c) = 1 + 2a + b + c + a^2 + 4ab + 2ac + 4a^2b + a^2c + 6ab^2 + 8abc - b^3 + 2bc. \tag{24}$$

As these functions, they fulfill the terms imposed in Theorem 1 in [31], So, we have that the order of convergence of the method (2) has to reach at least order 16.

Set

$$a = a(t) = \frac{Mg_0(t)}{1 - L_0t}, \tag{25}$$

$$b = b(t) = \frac{M(1 + \frac{M\psi_1(t)}{1 - L_0t})}{1 - \frac{L_0}{2}t}, \tag{26}$$

$$c = c(t) = \frac{M(1 + \frac{M\psi_2(t)}{1 - L_0t})}{1 - \frac{L_0}{2}t}, \tag{27}$$

and

$$\gamma_i = \frac{1}{L_0}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Then it follows from (19)–(24) that functions ψ_i can be defined by

$$\psi_1(t) = 1 + 2a + 4a^3 + 3a^4 \tag{28}$$

$$\psi_2(t) = 1 + 2a + b + a^2 + 4ab + 3a^2b + 4ab^2 + 4a^3b + 4a^2b^2 \tag{29}$$

and

$$\psi_3(t) = 1 + 2a + b + c + a^2 + 4ab + 2ac + 4a^2b + a^2c + 6ab^2 + 8abc + b^3 + 2bc. \tag{30}$$

3. Dynamical Study of a Special Case of the Family (2)

In this article, the concepts of critical point, fixed point, strange fixed point, attraction basins, parameter planes and convergence planes are going to be assumed. We refer the reader to see [5,7,16,38] to recall the basic dynamical concepts.

In this third section we will study the complex dynamics of a particular case of the method (2), which consists in select:

$$C_1(x_n) = F'(y_n)^{-1}F'(x_n),$$

$$C_2(x_n) = F'(z_n)^{-1}F'(x_n)$$

and

$$C_3(x_n) = F'(y_n)^{-1}F'(x_n).$$

Let be a polynomial of degree two with two roots, that they are not the same. If we apply this operator on the previous polynomial and using the Möebius map $h(z) = \frac{z-A}{z-B}$, we obtain

$$G(z, \alpha) = \frac{z^8(1 - \alpha + z)^8}{(-1 - z + \alpha z)^8}. \tag{31}$$

The fixed points of this operator are:

- 0
- ∞
- And 15 more, which are:
 - 1 (related to original ∞).
 - The roots of a 14 degree polynomial.

In Figure 1 the bifurcation diagram of all fixed points, extraneous or not, is presented.

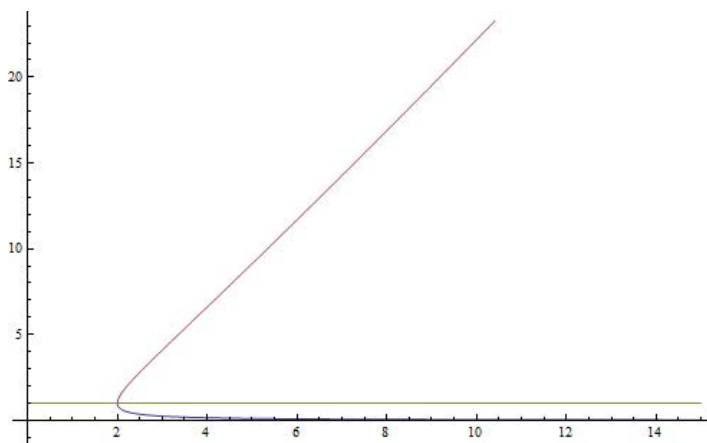


Figure 1. Fixed points’s bifurcation diagram.

Now, we are going to compute the critical points, i.e., the roots of

$$G'(z, \alpha) = -\frac{8(-1+\alpha-z)^7 z^7 (-1+\alpha-2z-z^2+\alpha z^2)}{(-1-z+\alpha z)^9}$$

The free critical points are: $cp_1(\alpha) = -1 + \alpha$, $cp_2(\alpha) = \frac{1-\sqrt{-(-2+\alpha)\alpha}}{-1+\alpha}$ and $cp_3(\alpha) = \frac{1+\sqrt{-(-2+\alpha)\alpha}}{-1+\alpha}$. We also have the following results.

Lemma 1.

(a) If $\alpha = 0$

(i) $cp_1(\alpha) = cp_2(\alpha) = cp_3(\alpha) = -1.$

(b) If $\alpha = 2$

(i) $cp_1(\alpha) = cp_2(\alpha) = cp_3(\alpha) = 1.$

You can easily verify that for every value of α we have to $cp_2(\alpha) = \frac{1}{cp_3(\alpha)}$

It is easy to see that there is only one independent critical point. So, we assume that $cp_2(\alpha)$ is the only free critical point without loss of generality. Taking $cp_2(\alpha)$, we perform the study of the parameter space associated with the free critical point. This will allow us to find the some members of the family, and we want to stay with the best members.

We are going to show different planes of parameters. In Figure 2 we show the parameter spaces associated to critical point $cp_2(\alpha)$. Now let us paint a point of cyan if the iteration of the method starting in $z_0 = cp_1(\alpha)$ converges to the fixed point 0 (related to root A) or if it converges to ∞ (allied to root B). That is, the points relative to the roots of the quadratic polynomial will be painted cyan and a point is painted in yellow if the iteration converges to 1 (related to ∞). Therefore, all convergence will be painted cyan. On the other hand, convergence to strange fixed points or cycles appears in other colors. As an immediate consequence, all points of the plane that are not cyan are not a good choice of α in terms of numerical behavior.

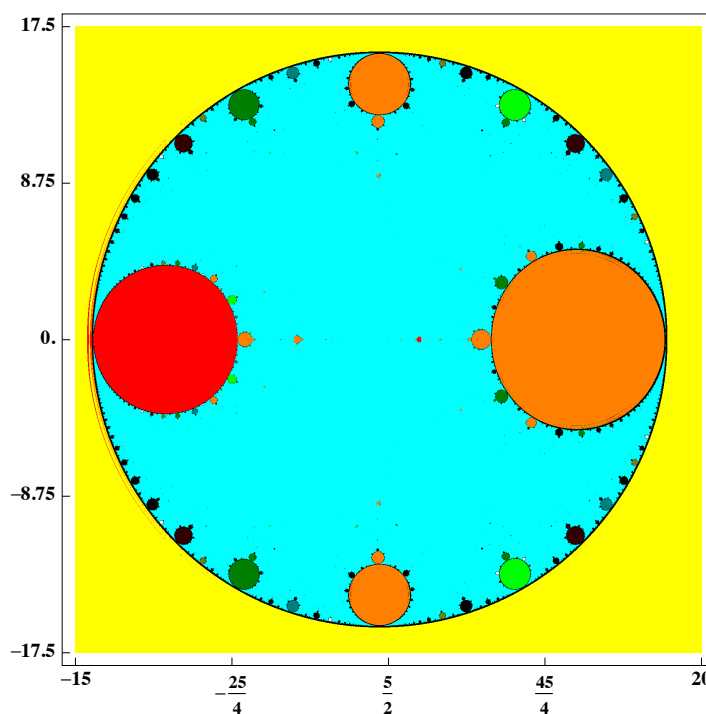


Figure 2. Parameter space of the free critical point $cp_2(\alpha)$.

Once we have detected the anomalies, we can go on to describe the dynamic planes. To understand the colors we have used in these dynamic planes, we have to indicate that if after a maximum of 1000 iterations and with a tolerance of 10^{-6} convergence has not been achieved to the roots, we have painted in black. Conversely, we colored in magenta the convergence to 0 and colored in cyan the convergence to ∞ . Then, the cyan or magenta regions identify the convergence.

If we focus our attention on the region shown in Figure 2, it is clear that there are family members with complicated behaviors. We will also show dynamic planes in Figures 3 and 4, of a family member with convergence regions to any of the strange fixed points.

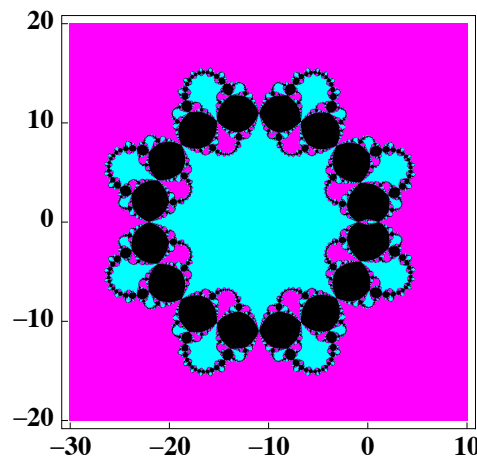


Figure 3. Attraction basins associated to $\alpha = -10$.

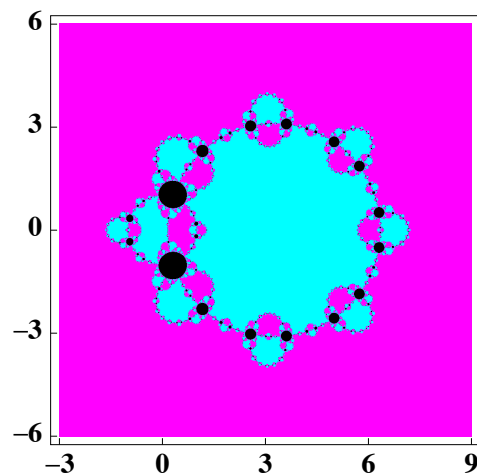


Figure 4. Attraction basins associated to $\alpha = 4.25$.

In the following figures, we will show the dynamic planes of family members with convergence to different attracting n -cycles. For example, in the Figures 5 and 6, we see the dynamic planes to an attracting 2-cycle and in the Figure 7 the dynamic plane of family members with convergence to an attracting 3-cycle that was painted in green in the parameter planes.

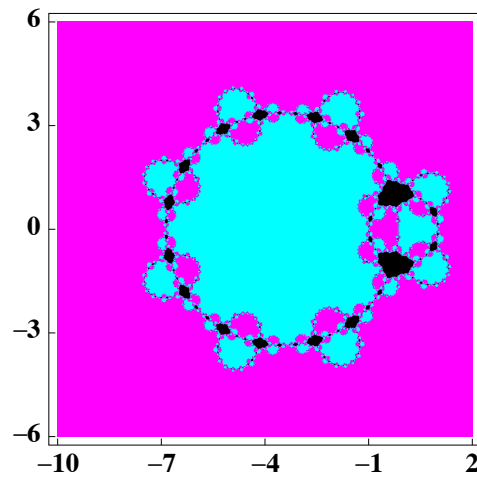


Figure 5. Attraction basins associated to $\alpha = -2.5$.

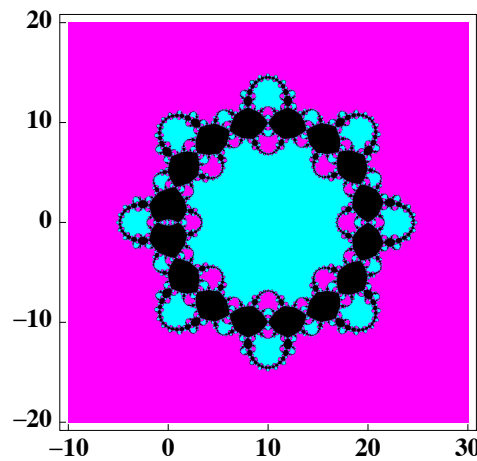


Figure 6. Attraction basins associated to $\alpha = 11$.

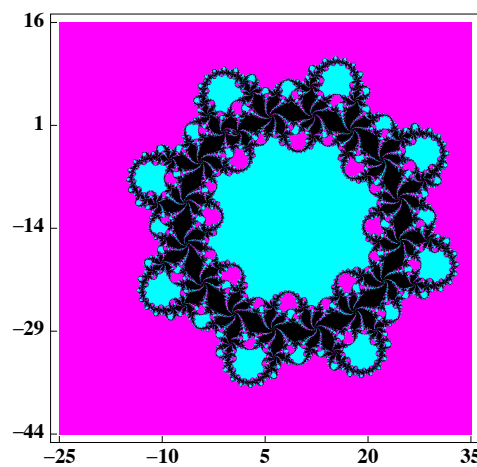


Figure 7. Attraction basins associated to $\alpha = 10 - 13i$.

Other particular cases are shown in Figures 8 and 9. The basins of attraction for different α values in which we see the convergence to the roots of the method can be seen.

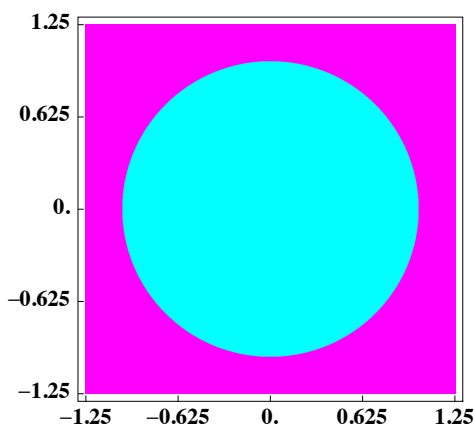


Figure 8. Attraction basins associated to $\alpha = 0.5$.

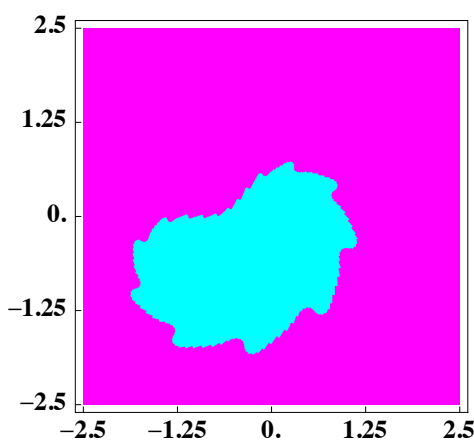


Figure 9. Attraction basins associated to $\alpha = -0.5i$.

4. Example Applied

Next, we want to show the applicability of the theoretical part previously seen in a real problem. Chemistry is a discipline in which many equations are handled. In this concrete case, let us consider the quartic equation that can describe the fraction or amount of the nitrogen-hydrogen feed that is turned into ammonia, which is known as fractional conversion and is shown in [42,43].

If the pressure is 250 atm. and the temperature reaches a value of 500 °C, the previous equation reduces to: $g(x) = x^4 - 7.79075x^3 + 14.7445x^2 + 2.511x - 1.674$. We define S as all real line, D as the interval $[0, 1]$ and $\zeta = 0$. We consider the function F defined on D . If we now take the functions $\psi_i(t)$ with $i = 1, 2, 3$ and choosing the value of $\alpha = 1.025$, we obtain: $L_0 = 2.594 \dots$, $L = 3.282 \dots$. It is clear that in this case $L_0 < L$, so we improve the results. Now, we compute $M = 1.441 \dots$. Additionally, computing the zeros of the functions previously defined, we get: $r_0 = 0.227 \dots$, $q_A = 0.236 \dots$, $r_1 = 0.082 \dots$, $r_2 = 0.155 \dots$, $r_3 = 0.245 \dots$, and as a result of it we get $r = r_1 = 0.082 \dots$. Then we can guarantee that the method (2) converges for $\alpha = 1.025$ due to Theorem 1. The applicability of our family of methods is thus proven.

Author Contributions: All authors have contributed equally in writing this article. All authors read and approved the final manuscript

Funding: This research was funded by Programa de Apoyo a la investigación de la fundación Séneca-Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia19374/PI/14' and by the project MTM2014-52016-C2-1-P of the Spanish Ministry of Science and Innovation.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest

References

1. Tello, J.I.C.; Orcos, L.; Granados, J.J.R. Virtual forums as a learning method in Industrial Engineering Organization. *IEEE Latin Am. Trans.* **2016**, *14*, 3023–3028. [[CrossRef](#)]
2. LeTendre, G.; McGinnis, E.; Mitra, D.; Montgomery, R.; Pendola, A. The American Journal of Education: Challenges and opportunities in translational science and the grey area of academic. *Rev. Esp. Pedagog.* **2018**, *76*, 413–435. [[CrossRef](#)]
3. Argyros, I.K.; González, D. Local convergence for an improved Jarratt-type method in Banach space. *Int. J. Interact. Multimed. Artif. Intell.* **2015**, *3*, 20–25. [[CrossRef](#)]
4. Argyros, I.K.; George, S. Ball convergence for Steffensen-type fourth-order methods. *Int. J. Interact. Multimed. Artif. Intell.* **2015**, *3*, 27–42. [[CrossRef](#)]
5. Argyros, I.K.; Magreñán, Á.A. *Iterative Methods and Their Dynamics with Applications: A Contemporary Study*; CRC-Press: Boca Raton, FL, USA, 2017.
6. Behl, R.; Sarría, Í.; González-Crespo, R.; Magreñán, Á.A. Highly efficient family of iterative methods for solving nonlinear models. *J. Comput. Appl. Math.* **2019**, *346*, 110–132. [[CrossRef](#)]
7. Magreñán, Á.A.; Argyros, I.K. *A Contemporary Study of Iterative Methods: Convergence, Dynamics and Applications*; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 2018.
8. Rheinboldt, W.C. An adaptive continuation process for solving systems of nonlinear equations. *Pol. Acad. Sci.* **1978**, *3*, 129–142. [[CrossRef](#)]
9. Amat, S.; Busquier, S.; Plaza, S. Dynamics of the King and Jarratt iterations. *Aequ. Math.* **2005**, *69*, 212–223. [[CrossRef](#)]
10. Amat, S.; Busquier, S.; Plaza, S. Chaotic dynamics of a third-order Newton-type method. *J. Math. Anal. Appl.* **2010**, *366*, 24–32. [[CrossRef](#)]
11. Amat, S.; Hernández, M.A.; Romero, N. A modified Chebyshev's iterative method with at least sixth order of convergence. *Appl. Math. Comput.* **2008**, *206*, 164–174. [[CrossRef](#)]
12. Chicharro, F.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods. *Sci. World J.* **2013**, *2013*, 780153. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
13. Gutiérrez, J.M.; Hernández, M.A. Recurrence relations for the super-Halley method. *Comput. Math. Appl.* **1998**, *36*, 1–8. [[CrossRef](#)]
14. Kou, J.; Li, Y. An improvement of the Jarratt method. *Appl. Math. Comput.* **2007**, *189*, 1816–1821. [[CrossRef](#)]
15. Li, D.; Liu, P.; Kou, J. An improvement of the Chebyshev-Halley methods free from second derivative. *Appl. Math. Comput.* **2014**, *235*, 221–225. [[CrossRef](#)]
16. Magreñán, Á.A. Different anomalies in a Jarratt family of iterative root-finding methods. *Appl. Math. Comput.* **2014**, *233*, 29–38.
17. Budzko, D.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. A new family of iterative methods widening areas of convergence. *Appl. Math. Comput.* **2015**, *252*, 405–417. [[CrossRef](#)]
18. Bruns, D.D.; Bailey, J.E. Nonlinear feedback control for operating a nonisothermal CSTR near an unstable steady state. *Chem. Eng. Sci.* **1977**, *32*, 257–264. [[CrossRef](#)]
19. Candela, V.; Marquina, A. Recurrence relations for rational cubic methods I: The Halley method. *Computing* **1990**, *44*, 169–184. [[CrossRef](#)]
20. Candela, V.; Marquina, A. Recurrence relations for rational cubic methods II: The Chebyshev method. *Computing* **1990**, *45*, 355–367. [[CrossRef](#)]
21. Ezquerro, J.A.; Hernández, M.A. New iterations of R-order four with reduced computational cost. *BIT Numer. Math.* **2009**, *49*, 325–342. [[CrossRef](#)]
22. Ezquerro, J.A.; Hernández, M.A. On the R-order of the Halley method. *J. Math. Anal. Appl.* **2005**, *303*, 591–601. [[CrossRef](#)]
23. Ganesh, M.; Joshi, M.C. Numerical solvability of Hammerstein integral equations of mixed type. *IMA J. Numer. Anal.* **1991**, *11*, 21–31. [[CrossRef](#)]
24. Hernández, M.A. Chebyshev's approximation algorithms and applications. *Comput. Math. Appl.* **2001**, *41*, 433–455. [[CrossRef](#)]
25. Hernández, M.A.; Salanova, M.A. Sufficient conditions for semilocal convergence of a fourth order multipoint iterative method for solving equations in Banach spaces. *Southwest J. Pure Appl. Math.* **1999**, *1*, 29–40.

26. Jarratt, P. Some fourth order multipoint methods for solving equations. *Math. Comput.* **1966**, *20*, 434–437. [[CrossRef](#)]
27. Ren, H.; Wu, Q.; Bi, W. New variants of Jarratt method with sixth-order convergence. *Numer. Algorithms* **2009**, *52*, 585–603. [[CrossRef](#)]
28. Traub, J.F. *Iterative Methods for the Solution of Equations*; Prentice-Hall Series in Automatic Computation: Englewood Cliffs, NJ, USA, 1964.
29. Wang, X.; Kou, J.; Gu, C. Semilocal convergence of a sixth-order Jarratt method in Banach spaces. *Numer. Algorithms* **2011**, *57*, 441–456. [[CrossRef](#)]
30. Cordero, A.; Torregrosa, J.R.; Vindel, P. Dynamics of a family of Chebyshev-Halley type methods. *Appl. Math. Comput.* **2013**, *219*, 8568–8583. [[CrossRef](#)]
31. Artidiello, S.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R.; Vassileva, M.P. Optimal high order methods for solving nonlinear equations. *J. Appl. Math.* **2014**, *2014*, 591638. [[CrossRef](#)]
32. Petković, M.; Neta, B.; Petković, L.; Džunić, J. *Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations*; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 2013.
33. Zhao, L.; Wang, X.; Guo, W. New families of eighth-order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations. *Wseas Trans. Math.* **2012**, *11*, 283–293.
34. Džunić, J.; Petković, M. A family of Three-Point methods of Ostrowski's Type for Solving Nonlinear Equations. *J. Appl. Math.* **2012**, *2012*, 425867. [[CrossRef](#)]
35. Chun, C. Some improvements of Jarratt's method with sixth-order convergence. *Appl. Math. Comput.* **1990**, *190*, 1432–1437. [[CrossRef](#)]
36. Cordero, A.; Torregrosa, J.R. Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas. *Appl. Math. Comput.* **2007**, *190*, 686–698. [[CrossRef](#)]
37. Ezquerro, J.A.; Hernández, M.A. Recurrence relations for Chebyshev-type methods. *Appl. Math. Optim.* **2000**, *41*, 227–236. [[CrossRef](#)]
38. Magreñán, Á.A. A new tool to study real dynamics: The convergence plane. *Appl. Math. Comput.* **2014**, *248*, 215–224. [[CrossRef](#)]
39. Rall, L.B. *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations*; Robert E. Krieger: New York, NY, USA, 1979.
40. Weerakon, S.; Fernando, T.G.I. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Appl. Math. Lett.* **2000**, *13*, 87–93. [[CrossRef](#)]
41. Cordero, A.; García-Maimó, J.; Torregrosa, J.R.; Vassileva, M.P.; Vindel, P. Chaos in King's iterative family. *Appl. Math. Lett.* **2013**, *26*, 842–848. [[CrossRef](#)]
42. Gopalan, V.B.; Seader, J.D. Application of interval Newton's method to chemical engineering problems. *Reliab. Comput.* **1995**, *1*, 215–223.
43. Shacham, M. An improved memory method for the solution of a nonlinear equation. *Chem. Eng. Sci.* **1989**, *44*, 1495–1501. [[CrossRef](#)]



© 2019 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

5.4 Artículo 4

Título	<i>Aplicación Didáctica en la Educación Superior para la Enseñanza de Métodos Iterativos</i>
Autores - Afiliación	
Nombre	Cristina Amorós
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)
Nombre	Íñigo Sarría
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)
Nombre	Lara Orcos
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)
Nombre	Ángel Alberto Magreñán
Universidad	Universidad de La Rioja (España)
Nombre	Juan Antonio Sicilia
Universidad	Universidad Internacional de La Rioja (España)

CAPÍTULO 11.

APLICACIÓN DIDÁCTICA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR PARA LA ENSEÑANZA DE MÉTODOS ITERATIVOS

Cristina Amorós Canet⁽¹⁾, Íñigo Sarría Martínez de Mendivil⁽¹⁾, Lara Orcos Palma⁽¹⁾
Ángel Alberto Magreñán Ruiz⁽²⁾ y Juan Antonio Silicia Montalvo⁽¹⁾

(1) *Universidad Internacional de La Rioja*

(2) *Universidad de La Rioja*

1. INTRODUCCIÓN

El interés del estudio tiene como punto de partida que, en numerosos estudios relacionados en los diferentes campos de la ciencia, o en la ingeniería o en estudios económicos precisan de ecuaciones para resolverlos. Dichas ecuaciones, en la mayor parte de los casos son no lineales. Por lo que para resolverlas se hace necesario recurrir a métodos iterativos para obtener una solución aproximada de la ecuación

$$F(x) = 0 \quad (1)$$

En muy pocas ocasiones es posible encontrar una solución exacta de este tipo de ecuaciones. Los métodos iterativos ver Argyros et al (2007), Argyros et al (2015), Behl et al (2017), nos permiten encontrar una solución aproximada de una ecuación no lineal, pero no todos los métodos iterativos se comportan de la misma manera. El análisis de la convergencia, la estabilidad, el rango de valores para los que el método es válido, su eficiencia computacional o el dominio de convergencia, entre otros, caracterizan los distintos métodos iterativos.

Dada la actual importancia de los métodos iterativos en las distintas ramas de la ingeniería hace imprescindible su conocimiento en asignaturas especializadas. Es por ello por lo que hace necesario incluir la enseñanza de los métodos iterativos en los planes de enseñanza. Existe un factor importante a la hora de poner en práctica estos conocimientos en el aula. Los alumnos presentan dificultades a la hora de entender el comportamiento de la dinámica de los métodos iterativos. El comportamiento de la dinámica de los métodos iterativos es más sencillo de comprender si empleamos herramientas visuales que permiten utilizar los planos de parámetros o dinámicos de manera correcta dependiendo de la situación que se esté planteando.

Concretamente encontramos las dificultades anteriormente señaladas en una asignatura del Máster de Ingeniería Matemática y Computación de la Universidad Internacional de La Rioja en la que se estudia la dinámica de un método iterativo.

2. MÉTODO

Como se ha comentado anteriormente, el interés de este trabajo parte de la asignatura ‘Sistemas dinámicos discretos y continuos’ del Máster en Ingeniería Matemática y Computación de la Universidad Internacional de La Rioja. El estudio de los sistemas dinámicos discretos supone gran parte del contenido de la asignatura y es donde se detectan las dificultades con la asimilación de conceptos que no se han logrado alcanzar debido a la complejidad teórica de los mismos. Los alumnos presentan dificultades a la hora de elegir entre los planos dinámicos y paramétricos, cuál deben usar.

2.1. Planos paramétricos y dinámicos

A partir de la aplicación de los métodos iterativos simples se obtienen planos dinámicos, mientras que los planos paramétricos surgen de emplear métodos iterativos con parámetros. En los métodos iterativos paramétricos se debe fijar previamente el valor del parámetro que presenta complicaciones, viendo los planos paramétricos para que una vez fijado dicho parámetro se pueda dibujar el plano dinámico. Así, cuando se trabaja con una familia paramétrica de métodos iterativos primero hay que trabajar con el plano paramétrico para obtener la información de los parámetros que aseguran la convergencia del método y trasladar la información al plano dinámico para comprobar que los resultados esperados funcionan debidamente.

El plano dinámico nos da la información acerca de las cuencas de atracción de los puntos críticos libres que permiten estudiar el comportamiento dinámico de los métodos iterativos.

2.2. Evidencias de la dificultad

El modelo pedagógico de la Universidad Internacional de La Rioja es online con sesiones presenciales virtuales de la asignatura una vez por semana. El sistema de evaluación se basa en una evaluación continua que se lleva a cabo mediante las entregas de trabajos durante el transcurso de la asignatura y un examen presencial al final de la

misma. Por tanto, esto conlleva un esfuerzo por parte de los alumnos de realizar un aprendizaje autónomo en la materia que estén cursando.

Esta confusión que manifiestan los alumnos a la hora de interpretar los planos paramétricos y dinámicos provoca un bloqueo a la hora de seguir avanzando en el estudio del método iterativo y no llegan a alcanzar a comprender estos conceptos matemáticos.

Con esta dificultad y teniendo en cuenta el perfil de los estudiantes que cursan este Máster: alumnos mayores, con trabajos, cargas familiares... En definitiva, estudiantes con poco tiempo para estudiar. Todo esto repercute el aprendizaje de los alumnos a la hora de entregar los trabajos.

Las evidencias de este hecho anteriores a la implementación de la herramienta pedagógica muestran que el porcentaje de trabajos entregados de alumnos que cursan la asignatura de ‘Sistemas dinámicos, discretos y continuos’ es inferior al 50%. En las conclusiones se pondrá de manifiesto la mejora en el aprendizaje autónomo gracias a la utilización del software.

2.3. Herramienta didáctica

El plan de mejora consiste en el diseño de una herramienta programada en Matlab con la finalidad de proporcionar una perspectiva más visual al concepto del estudio dinámico de los métodos iterativos. Pues la visualización permite acercarnos al pensamiento matemático avanzado, Rodríguez-Vásquez (2003). Concretamente el software empleado permite obtener el plano dinámico o paramétrico dependiendo de la función que se esté trabajando. Si el método o el polinomio carecen de parámetros, únicamente permite seleccionar el plano dinámico. En el caso de contar con parámetros, no permite obtener los planos dinámicos, sin establecer previamente el valor de dicho parámetro.

El programa utilizado para la creación de los planos paramétricos y dinámicos es MATLAB. Consta de un total de 26 archivos, que permiten diseñar esta herramienta didáctica. La primera opción que permite realizar es introducir la función polinómica que deseamos resolver y escoger el método iterativo entre una amplia variedad, entre los que está el método que desarrollaremos en el siguiente apartado. A continuación, el programa dibuja el plano de parámetros.

Con el plano de parámetros se puede fijar el valor del parámetro y obtener el plano dinámico correspondiente. Una vez obtenido el plano dinámico proporciona información

sobre los puntos fijos y críticos, y también es posible visualizar las órbitas de los puntos elegidos, ver Figura (1).

3. RESULTADOS

A continuación, se va a desarrollar el estudio de una familia paramétrica de métodos iterativos con la aplicación a la herramienta pedagógica

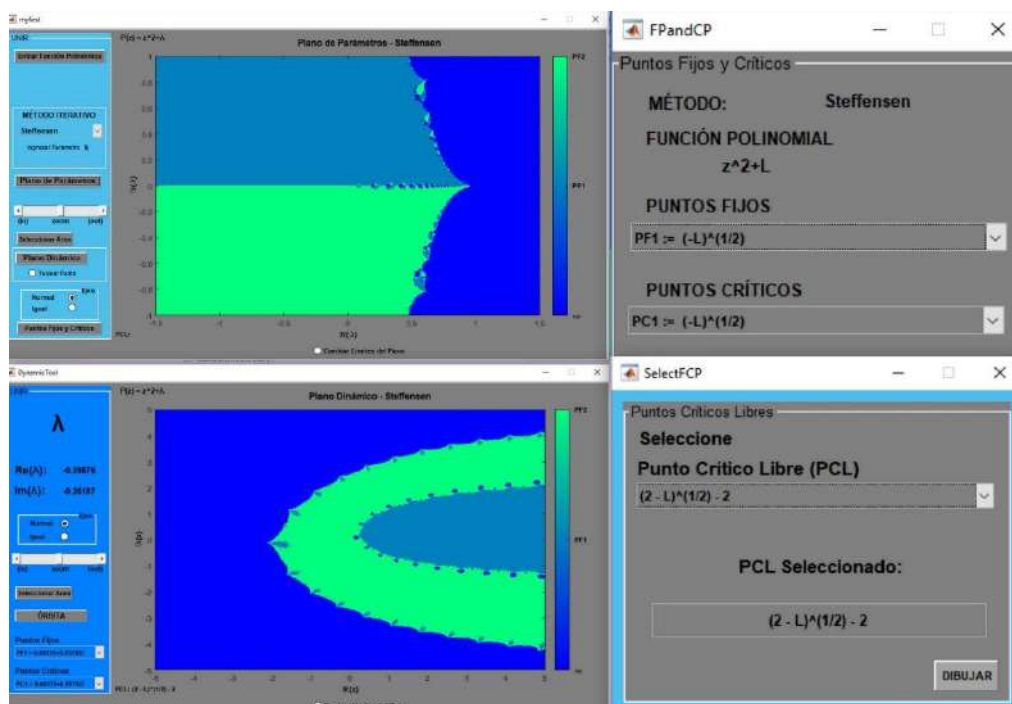


Figura 1. Herramienta didáctica. Planos paramétrico y dinámico. Puntos críticos.

3.1. Método iterativo paramétrico

Dada la ecuación (1) donde F es una función diferenciable y para lo sucesivo, está definida en un subconjunto convexo no vacío $D \subseteq S$ con S un conjunto que toma valores dentro del conjunto $\Omega = \{ \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C} \}$. Sea x^* una solución única local de la ecuación (1).

Se puede clasificar la convergencia en dos categorías: el análisis de la convergencia semilocal y el análisis de la convergencia local. El análisis de la convergencia semilocal se basa en la información obtenida del punto inicial x_0 , el cuál nos proporciona criterios que aseguren la convergencia del método iterativo. Por otro lado, el análisis de la convergencia local se basa en la información obtenida de la solución para buscar valores que permitan establecer el radio de convergencia. Los resultados obtenidos del análisis

de la convergencia local son fundamentales ya que nos dan información del grado de dificultad en la elección de los puntos iniciales.

Debemos también tener en cuenta el dominio de convergencia en el estudio de métodos iterativos. Normalmente el dominio de convergencia es pequeño, esto hace que sea necesario agrandarlos sin que esto suponga añadir hipótesis adicionales. Otro aspecto importante es conseguir estimaciones más precisas del error entre la distancia de dos iteraciones sucesivas: $\|x_{n+1} - x_n\|, \|x_n - x^*\|$.

Por tanto, este estudio se basa en agrandar el dominio de convergencia sin añadir hipótesis adicionales y encontrar estimaciones más precisas del error cometido, además del estudio del comportamiento dinámico.

Las propiedades dinámicas relacionadas con el método iterativo nos dan información importante acerca de la estabilidad y fiabilidad del método. En recientes estudios, autores como Amat et al (2005,2008,2010). , Chicharro et al. (2013), Gutiérrez et al. (1998), Magreñán (2013,2014), han estudiado planos dinámicos muy interesantes incluyendo comportamientos periódicos y otras anomalías. Teniendo en cuenta todo lo anterior se estudia una familia de métodos iterativos de cuatro pasos con parámetros, los cuales nos permiten distinguir entre buenos y malos métodos en términos de sus propiedades numéricas, definida para cada $n = 0,1,2, \dots$ por:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \alpha F'(x_n)^{-1} F(x_n) \\ z_n &= y_n - A_1(x_n) F'(x_n)^{-1} F(y_n) \quad (2) \\ v_n &= z_n - A_2(x_n) F'(x_n)^{-1} F(z_n) \\ x_{n+1} &= z_n - A_3(x_n) F'(x_n)^{-1} F(v_n) \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro, x_0 es el punto inicial y A_i son funciones continuas dadas. Los métodos numéricos de un paso son un caso particular del método anterior. Para determinados valores de los parámetros tenemos métodos conocidos.

3.1 Convergencia local

El estudio de la convergencia de los métodos derivados de (2) se realiza con series de Taylor y desarrollos que emplean hasta la tercera derivada, aunque en la definición del método solo aparezca la primera derivada. Es sabido que en la mayoría de los casos la aplicación de las derivadas implica cálculos tediosos, es por ello por lo que se llega un análisis de la convergencia local del método (2) usando solo hipótesis que involucran la primera derivada de la función F , proporcionando la estimación del error y el orden de convergencia empleando las constantes de Lipschitz.

Obsérvese también que, en particular, hay una gran cantidad de métodos iterativos para aproximar soluciones de ecuaciones no lineales definidas en \mathbb{R} o \mathbb{C} . Estos resultados muestran que si el punto inicial x_0 está suficientemente cerca de la solución x^* entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a x^* . Pero ¿cuánto de cerca tiene que estar la solución del punto inicial? Los resultados del estudio de la convergencia local, ver Amorós et al (2019), se consiguen unos resultados que aseguran bolas de convergencia con un radio de convergencia mayor que en estudio anteriores.

3.2 Aplicación de la herramienta pedagógica al método iterativo paramétrico

En esta sección vamos a estudiar la dinámica compleja de un caso particular del método (2) el cual consiste en seleccionar:

$$A_1(x_n) = F'(y_n)^{-1} \cdot F'(x_n)$$

$$A_2(x_n) = F'(z_n)^{-1} \cdot F'(x_n)$$

$$A_3(x_n) = F'(y_n)^{-1} \cdot F'(x_n)$$

Si se aplica este operador a un polinomio cuadrático con dos raíces distintas A y B, y empleando la transformación de Möebius $h(z) = \frac{z-A}{z-B}$ que lleva la raíz A al 0, la raíz B al ∞ y el ∞ al 1, obtenemos que el operador racional asociado a la familia de métodos iterativos es:

$$G(z, \alpha) = \frac{z^{8(1-\alpha+z)^8}}{(-1-z+\alpha z)^8} \quad (3)$$

Los puntos fijos de este operador son $z = 0$ y $z = \infty$ y 15 más las cuales 1 está relacionado con el ∞ y las restantes son raíces de un polinomio de grado 14.

Se calculan los puntos críticos de (3), es decir, las raíces de $G'(z, \alpha) = 0$:

$$G'(z, \alpha) = \frac{-8(1-\alpha+z)^7 z^7 (-1+\alpha-2z-z^2+\alpha z^2)}{(-1-z-\alpha z)^9}$$

Es claro que $z = 0$ y $z = \infty$ son puntos críticos. Los puntos críticos libres son:

$$cp_1(\alpha) = 2(-1+\alpha), cp_2(\alpha) = \frac{1 - \sqrt{-(-2+\alpha)\alpha}}{-1+\alpha}; cp_3(\alpha) = \frac{1 + \sqrt{-(-2+\alpha)\alpha}}{-1+\alpha}$$

Un punto crítico libre no es más que un punto crítico (anula la derivada) pero que no es solución de la ecuación. El estudio de los puntos críticos libres del método nos da información sobre el comportamiento dinámico.

Tenemos que:

$$\text{Si } \alpha = 0; cp_1(\alpha) = cp_2(\alpha) = cp_3(\alpha) = -1$$

$$\text{Si } \alpha = 2; cp_1(\alpha) = cp_2(\alpha) = cp_3(\alpha) = 1$$

Es posible verificar fácilmente que $cp_2(\alpha) = \frac{1}{cp_3(\alpha)}$

Es fácil ver que sólo hay un punto crítico independiente. Así que, asumimos que $cp_2(\alpha)$ es el punto crítico libre, sin pérdida de generalidad. Tomando $cp_2(\alpha)$ se realiza el estudio del espacio de parámetros asociado al punto crítico libre. Esto permite encontrar algunos miembros de la familia del método y quedarnos sólo con los parámetros en los que detectemos las anomalías.

En la figura (2) se muestra el espacio de parámetros asociado al punto crítico $cp_2(\alpha)$. De color cian aparecen pintados los puntos que comienzan con el punto $z_0 = cp_1(\alpha)$ y convergen al punto fijo 0 (relativo a la raíz de A) o si convergen a ∞ (relativo a la raíz de B). Es decir, los puntos relativos a las raíces del polinomio cuadrático se pintarán de cian y los puntos en amarillo indican la convergencia a 1. Por tanto, todos los puntos que converjan se pintarán de cian. Por otra parte, la convergencia de los puntos fijos extraños o los ciclos aparecen en otros colores. Como consecuencia, todos los puntos del plano que no son cian no son una buena elección de α en términos de comportamiento numérico.

Una vez que se han detectado las anomalías, se puede describir el plano dinámico. Para entender los colores usados en el plano dinámico de la Figura (3), a partir de 1000 iteraciones y con una tolerancia de 10^{-6} los puntos que no convergen a las raíces se consideran divergentes y se pintan en negro. Se pinta de magenta la convergencia a 0 y en cian la convergencia a ∞ . Las regiones en cian y magenta indican la convergencia.

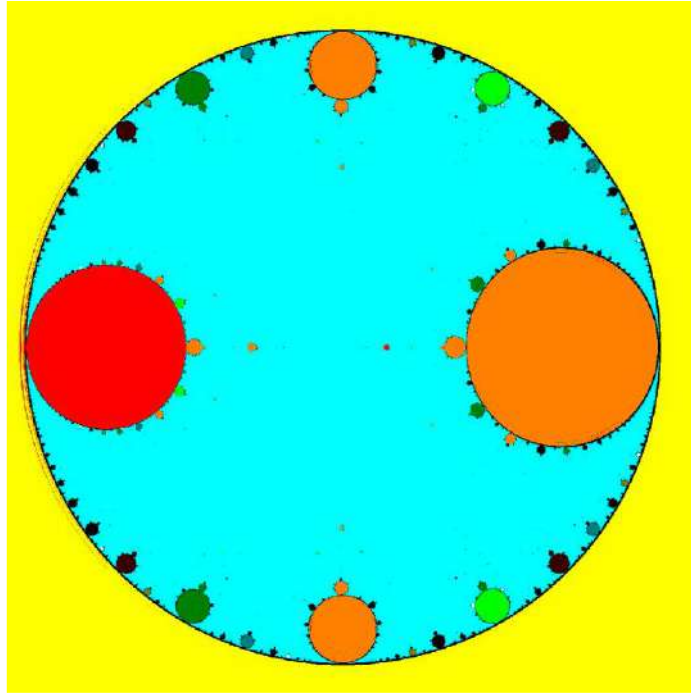


Figura 2. Espacio de parámetros asociado al punto crítico libre $cp_2(\alpha)$.

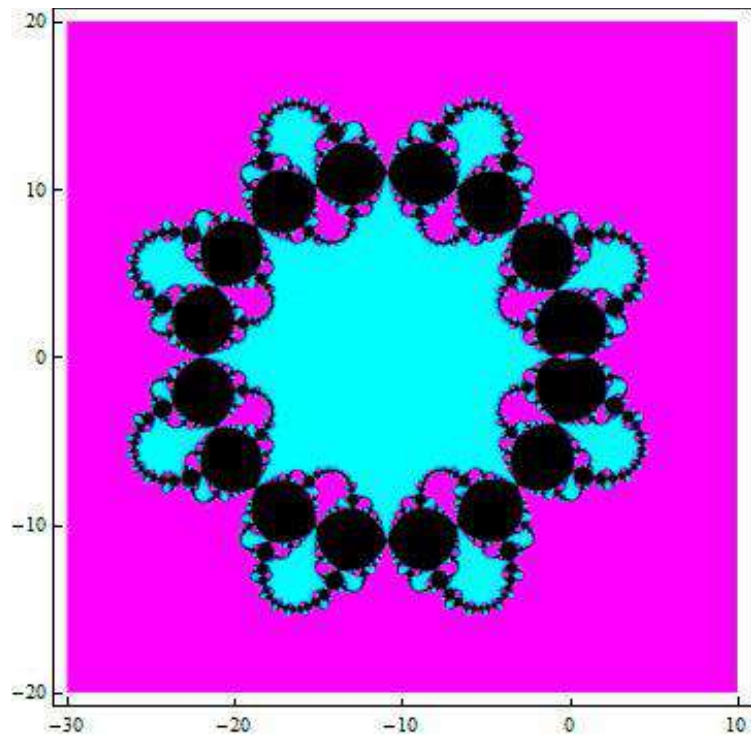


Figura 3. Cuencas de atracción asociadas al método con $\alpha = 11$.

4. DISCUSIÓN

A continuación, se muestra un problema real del planteamiento teórico visto anteriormente. La química es una disciplina que precisa de ecuaciones, concretamente se considera una ecuación cuadrática que describe la cantidad de materia de nitrógeno-hidrógeno que se convierte en amoníaco que se conoce cómo conversión fraccionaria y aparece en Gopalan y Seader(1995) y Shacham (1989).

Para 250 atm y 500°C, la ecuación es:

$$f(x) = x^4 - 7.79075x^3 + 14.744x^2 + 2.511x - 1.674$$

Aplicando el estudio de la convergencia local para métodos iterativos de alto orden ver Amorós et al (2019), se obtiene que para $\alpha = 1.025$ se asegura la convergencia del método.

5. CONCLUSIONES

La aplicación de la herramienta pedagógica en la impartición de la asignatura ‘Sistemas dinámicos, discretos y continuos’ supone que más del 60% de los alumnos matriculados realice las entregas de los trabajos propuestos en la evaluación continua de la asignatura. El estudio estadístico realizado ver Sarría (2018) muestra una mejora significativa de los resultados obtenidos con la utilización del software, pues mejoran los resultados de los trabajos entregados y ayuda a que los conceptos se entiendan mejor. Para futuras investigaciones se llevará a cabo la implementación de más métodos iterativos con la herramienta y un estudio estadístico completo con más datos de estudiantes con la finalidad de solventar las dificultades planteadas.

REFERENCIAS

Amat, S., Busquier, S. y Plaza, S. (2005). Dynamics of the King and Jarratt iterations, *Aequationes Math.* 69 (3), 212–223.

Amat, S., Busquier, S. y Plaza, S. (2010). Chaotic dynamics of a third-order Newton-type method, *J. Math. Anal. Appl.* 366, (1), 24–32.

Amat, S., Hernández, M.A. y Romero, N. (2008). A modified Chebyshev’s iterative method with at least sixth order of convergence, *Appl. Math. Comput.* 206(1), 164-174.

Amorós, C., Argyros, I. K., González, R., Magreñán, Á. A., Orcos, L., y Sarría, Í. (2019). Study of a high order family: Local convergence and dynamics. *Mathematics*, 7(3), 225.

Argyros, I. (2007). *Computational theory of iterative methods*. Elsevier.

Argyros, I. K., y Gonzalez, D. (2015). Local convergence for an improved Jarratt-type method in Banach space. *IJIMAI*, 3(4), 20-25.

Argyros, I. K., y George, S. (2015). Ball convergence for Steffensen-type fourth-order methods. *IJIMAI*, 3(4), 27-42.

Argyros, I. K., y Magreñán, Á. A. (2017). *Iterative Methods and their dynamics with applications: A Contemporary Study*. CRC Press.

Behl, R., Sarría, Í., González, R., y Magreñán, Á. A. (2019). Highly efficient family of iterative methods for solving nonlinear models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 346, 110-132.

Chicharro, F. I., Cordero, A., y Torregrosa, J. R. (2013). Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods. *The Scientific World Journal*.

Balaji, G. V., y Seader, J. D. (1995). Application of interval Newton's method to chemical engineering problems. *Reliable Computing*, 1(3), 215-223.

Gutiérrez, J. M., y Hernández, M. A. (1998). Recurrence relations for the super-Halley method. *Computers & Mathematics with Applications*, 36(7), 1-8.

Magreñán, Á.A., Argyros, I.K. A. (2018). *Contemporary Study of Iterative Methods: Convergence, Dynamics and Applications*. Elsevier,

Magreñán, Á.A. (2013). *Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado*, Tesis, Universidad de La Rioja.

Magreñán, Á. A. (2014). Different anomalies in a Jarratt family of iterative root-finding methods. *Applied Mathematics and Computation*, 233, 29-38.

Rheinboldt, W.C. An adaptive continuation process for solving systems of nonlinear equations. *Pol. Acad. Sci.* 1978, 3, 129–142.

Sarría Martínez de Mendivil, Í. (2018). *Mejora en la enseñanza y estudio de la dinámica de métodos iterativos*, Tesis, Universidad Internacional de La Rioja.

Shacham, M. (1989). An improved memory method for the solution of a nonlinear equation. *Chemical Engineering Science*, 44, 1495-1501.

Capítulo 6.

Conclusiones y trabajo futuro

‘El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos’. (Fourier)

En este capítulo se resumen las conclusiones del trabajo realizado en base a los resultados obtenidos en los artículos publicados y se plantean futuras líneas de investigación relacionadas con el estudio que se ha llevado a cabo.

6.1 Conclusiones

En esta sección se analizan los objetivos señalados en el capítulo 3, que han sido alcanzados con el trabajo desarrollado en esta investigación y que corresponden a los resultados obtenidos en cada una de las publicaciones que conforman esta tesis.

El objetivo principal planteado en el capítulo 3 de este trabajo era:

Mejorar los resultados de la convergencia de los métodos iterativos de orden dos y alto orden, así como analizar el comportamiento dinámico de una familia paramétrica.

Este objetivo se ha cumplido como consecuencia del logro de los objetivos específicos, también redactados en el capítulo 3. A continuación, se analiza cómo se han logrado cada uno de los objetivos específicos.

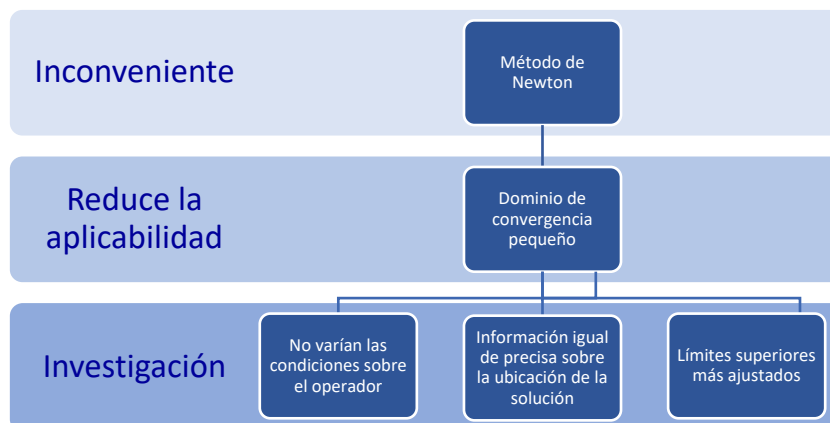


Figura 6.1. Metodología de trabajo en la mejora del método de Newton (Elaboración propia).

El **objetivo 1:** *Mejorar la aplicabilidad de los métodos de orden cuadrático* y el **objetivo 2:** *Extender el dominio de convergencia del método de Newton para encontrar la solución local en espacios de Banach.* Y se han cumplido con el trabajo publicado en el primer artículo que se encuentra en la sección 5.1. En este trabajo se ha desarrollado una nueva técnica para extender el dominio de convergencia del método de Newton. En la Figura 6.1 se desarrolla la metodología que se ha llevado a cabo en esta investigación. El inconveniente que presenta el método de Newton es que los dominios de convergencia son pequeños lo cual reduce la aplicabilidad de este método. La novedad de la investigación desarrollada es que no se necesitan criterios adicionales a los dados en estudios anteriores para la convergencia, tanto para la convergencia local como para la semilocal del método de Newton. Se dan los criterios suficientes de estudios anteriores, relativos a las condiciones sobre el operador y a la ubicación de la solución con información igual de precisa, y se ha demostrado la superioridad de los nuevos criterios. Esta superioridad de los nuevos criterios se refleja en la extensión de los dominios de convergencia. Y esta extensión de los dominios se ha logrado a través de un mayor ajuste en los límites superiores de los teoremas que garantizan la convergencia. Una limitación de este estudio es que, debido a la localidad de los resultados, no se pueden demostrar los resultados globales al tratarse de entornos de espacios de Banach a menos que se tenga $D = B_1$. Sin embargo, evidencias de las ventajas de este estudio se encuentran en el artículo de la sección 5.1 con un ejemplo numérico que validan los resultados obtenidos.

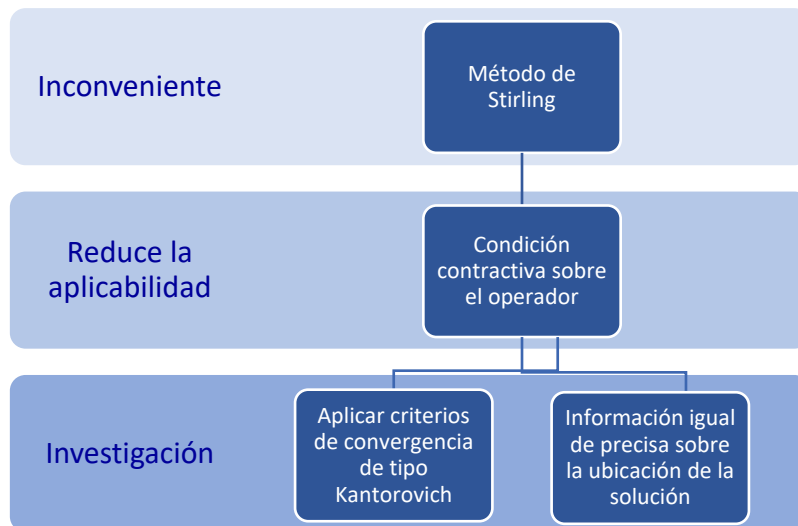


Figura 6.2. Metodología de trabajo en la mejora del método de Stirling (Elaboración propia).

El **objetivo 1**: *Mejorar la aplicabilidad de los métodos de orden cuadrático* y el **objetivo 3**: *Encontrar criterios de convergencia del método de Stirling más suaves que las ya existentes*. Los objetivos han sido satisfechos con los resultados publicados en el segundo artículo que se encuentra en la sección 5.2. En la Figura 6.2 se desarrolla la metodología que se ha llevado a cabo en esta investigación. El principal inconveniente que presenta el método de Stirling, es la condición contractiva sobre el operador para garantizar la convergencia del método. La principal aportación es que se dan condiciones de convergencia más suaves que las condiciones contractivas, y quedan demostrados los lemas y teoremas dados en el propio artículo. Estas condiciones de convergencia más suaves consisten en reemplazar la condición contractiva por condiciones del tipo Kantorovich. De esta forma se logra mejorar la aplicabilidad del método de Stirling. Para validar los resultados en el artículo, se emplea un ejemplo numérico clásico que ratifica las afirmaciones, ya que con las condiciones de convergencia desarrolladas y con la misma información sobre la ubicación de la solución, el método de Stirling es una alternativa al método de Newton y puede llegar a obtener mejores resultados en cuanto a la convergencia.

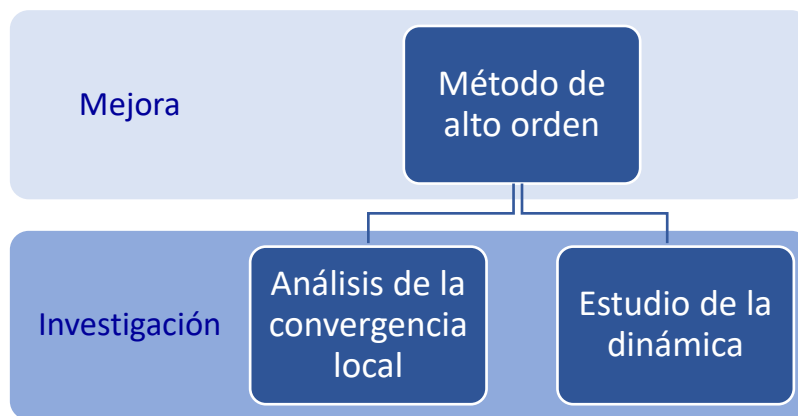


Figura 6.3. Metodología de trabajo en el estudio de una familia paramétrica de métodos de alto orden (Elaboración propia).

El **objetivo 4**: *Estudiar la convergencia de una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden de convergencia* y el **objetivo 5**: *Analizar el comportamiento dinámico de una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden de convergencia*. Se han cumplido con los resultados obtenidos en la publicación del tercer artículo de la sección 5.3. En la Figura 6.3 se desarrolla la metodología que se ha llevado a cabo en esta investigación. Mediante teoremas se demuestra la convergencia local de la familia paramétrica, así como se desarrolla el estudio de la dinámica compleja, para un caso concreto, y poder estudiar la estabilidad del método. En este artículo para demostrar la validez de los resultados teóricos se plantea un problema real. El cual consiste en considerar la ecuación cuadrática que define la fracción o cantidad de materia de nitrógeno-hidrógeno que se convierte en amoníaco, lo que se denomina conversión fraccionaria. Aplicando la familia paramétrica desarrollada en este artículo para este ejemplo concreto, los resultados validan los resultados teóricos desarrollados en esta investigación.

El **objetivo 6**: *Aplicar una herramienta didáctica a una familia paramétrica de métodos iterativos de alto orden de convergencia*, se alcanza con la cuarta publicación que compone esta investigación y que se encuentra en la sección 5.4. En el cual se pone de manifiesto la aplicación de la herramienta didáctica (Sarría, 2018), y como se ha considerado en el marco de esta tesis, la importancia de trasladar

nuevas metodologías didácticas en los estudios superiores para lograr una mejora en la asimilación de los conceptos más abstractos.

6.2 Trabajo futuro

Siguiendo la línea de investigación que se ha marcado durante la realización de esta tesis quedan abiertas unas líneas de trabajo para continuar con el estudio y alcanzar metas más ambiciosas:

- Aplicar los criterios de convergencia del método de Newton a más métodos iterativos para aumentar el dominio de convergencia siguiendo el mismo esquema utilizado.
- Aplicar el método de Stirling a ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales para comprobar que se cumplen los resultados planteados en el artículo de la sección 5.2.
- Analizar la convergencia y estudiar la dinámica de nuevas familias paramétricas.
- Ampliar la utilización de la herramienta pedagógica a más métodos iterativos, con la finalidad de mostrar a los alumnos que estudian matemáticas avanzadas los métodos más novedosos en relación con este campo de innovación matemática.

Capítulo 7. Bibliografía

*'La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas,
sino hacer las cosas complicadas simples'. (Gudder)*

- Amat, S., Busquier, S. & Plaza, S. (2005). Dynamics of the King and Jarratt iterations. *Aequationes Math.* 69 ,3, 212–223.
- Amat, S., Busquier, S. & Plaza, S. (2010). Chaotic dynamics of a third-order Newton-type method. *Math. Anal. Appl.* 366, 1, 24–32.
- Amat, S.; Busquier, S.; Bermúdez, C.; Magreñán, Á.A. (2013). On a two-step relaxed Newton-type method. *Appl. Math. Comput.*, 219, 11341–11347.
- Amat, S.; Hernández, M.A.; Romero, N. (2008). A modified Chebyshev's iterative method with at least sixth order of convergence. *Appl. Math. Comput.* 206, 164–174.
- Amat, S.; Magreñán, Á.A.; Romero, N. (2016). On the election of the damped parameter of a two-step relaxed Newton-type method. *Nonlinear Dyn.* 84, 9–18.
- Amorós, C., Argyros, I.K., González, D., Magreñán, Á.A., Regmi, S., Sarría, Í. (2020). New improvement of the Domain of Parameters for Newton's Method. *Mathematics*, 8, 103.
- Amorós, C., Argyros, I.K., González, R., Magreñán, Á.A., Orcos, L., Sarría, Í. (2019). Study of a High Order Family: Local Convergence and Dynamics. *Mathematics* 7, 225.
- Amorós, C., Argyros, I.K., Magreñán, Á. A. Regmi, S., González, R., Sicilia, J.A. (2020). Extending the Applicability of Stirling's Method. *Mathematics* ,8 , 35.
- Amorós, C., Sarría, I., Magreñán, A. A., Orcos, L. (2019). Aplicación didáctica en Educación Superior para la enseñanza de métodos iterativos. *Innovación Educativa en la Sociedad Digital*. Dykinson. 929-938.
- Argyros, I. K. (2007). *Computational theory of iterative methods*. Elsevier.
- Argyros, I.K. (1995). Stirling's method and Fixed points of nonlinear operator equations in Banach spaces, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* 23, 13-20
- Argyros, I.K. (2003). On The Convergence and Application of Stirling's Method. *Applicationes Mathematicae*, 30, 109-119.

- Argyros, I.K. (2004). A unifying local–semilocal convergence analysis and applications for two–point Newton–like methods in Banach space. *J. Math. Anal. Appl*, 298, 374–397.
- Argyros, I.K. (2005). A new iterative method of asymptotic order $1 + \sqrt{2}$ for the computation of fixed points. *Int. J. Comput. Math*, 82, 1413–1428.
- Argyros, I.K. (2008). *Convergence and Application of Newton–Type Iterations*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany.
- Argyros, I.K.; Chen, D. (1993). Results on the Chebyshev method in Banach spaces. *Proyecciones*, 12, 119–128.
- Argyros, I.K.; Ezquerro, J.A.; Gutiérrez, J.M.; Hernández, M.A.; Hilout, S. (2011). On the semilocal convergence of efficient Chebyshev–Secant-type methods; *Elsievier*. 235, 10, 3195–3206.
- Argyros, I.K.; George, S. (2015). Ball convergence for Steffensen–type fourth-order methods. *Int. J. Interact. Multimed. Artif. Intell.*, 3, 27–42.
- Argyros, I.K.; González, D. (2015). Local convergence for an improved Jarratt–type method in Banach space. *Int. J. Interact. Multimed. Artif. Intell.* 3, 20–25.
- Argyros, I.K.; González, D.; Magreñán, Á.A. (2014). A Semilocal Convergence for a Uniparametric Family of Efficient Secant-Like Methods. *J. Funct. Spaces*, 467980.
- Argyros, I.K.; Hilout, S. (2010). Extending the Newton-Kantorovich hypothesis for solving equations. *Elsevier*, 234, 10, 2993–3006.
- Argyros, I.K.; Hilout, S. (2012). Weaker conditions for the convergence of Newton’s method. *J. Complex*, 28, 364–387.
- Argyros, I.K.; Hilout, S. (2013). On an improved convergence analysis of Newton’s method. *Appl. Mah. Comput.*, 225, 372–386.
- Argyros, I.K., Magreñán, Á.A. (2017). *Iterative methods and their dynamics with applications: A contemporary study*. CRC Press.

- Argyros, I.K.; Magreñán, Á.A.; Orcos, L.; Sarría, Í. (2019). Unified local convergence for Newton's method and uniqueness of the solution of equations under generalized conditions in a Banach space. *Mathematics*, 7, 463.
- Argyros, I.K.; Magreñán, Á.A.; Orcos, L.; Sarría, Í. (2019). Advances in the semilocal convergence of Newton's method with real-world applications. *Mathematics*, 7, 299.
- Artidiello, S.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R.; Vassileva, M.P. (2014). Optimal high order methods for solving nonlinear equations. *J. Appl. Math.*, 591638.
- Balaji, G. V., y Seader, J. D. (1995). Application of interval Newton's method to chemical engineering problems. *Reliable Computing*, 1(3), 215-223.
- Beardon, A. F. (1991). *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- Behl, R.; Sarría, Í.; González-Crespo, R.; Magreñán, Á.A. (2019). Highly efficient family of iterative methods for solving nonlinear models. *J. Comput. Appl. Math.* 346, 110-132.
- Blanchard, P. (1984). *Nonlinear and global analysis*. American Mathematical Society, 85-141.
- Blanchard, P. (1994). *Complex dynamical systems*. American Mathematical Society, 139-154.
- Bruns, D.D.; Bailey, J.E. (1977). Nonlinear feedback control for operating a nonisothermal CSTR near an unstable steady state. *Chem. Eng. Sci.* 32, 257-264.
- Budzko, D.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. (2015). A new family of iterative methods widening areas of convergence. *Appl. Math. Comput.* 252, 405-417.
- Burrows, A.; Lockwood, M.; Borowczak, M.; Janak, E.; Barber, B. (2018). Integrated STEM: Focus on Informal Education and Community Collaboration through Engineering. *Edu. Sci.* 2018, 8, 4.
- Candela, V.; Marquina, A. (1990a). Recurrence relations for rational cubic methods I: The Halley method. *Computing* 44, 169-184.

- Candela, V.; Marquina, A. (1990b). Recurrence relations for rational cubic methods II: The Chebyshev method. *Computing*, 45, 355–367.
- Chicharro, F.I. (2017). '*Análisis dinámico y aplicaciones de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales*'. Tesis doctoral. Doctorado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Politécnica de Valencia.
- Chicharro, F. I. , Cordero, A. y Torregrosa, J. R. (2015). Dynamics and Fractal Dimension of Stefensen-Type Methods. *Algorithms* 8, 271-279.
- Chicharro, F.; Cordero, A.; Torregrosa, J.R. (2013). Drawing dynamical and parameters planes of iterative families and methods. *Sci. World J.*, 780153.
- Chicharro, F.I., Cordero, A., Gutiérrez, J.M. y Torregrosa, J.R. (2013). 'Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations'. *Applied Mathematics and Computation* 219, 7023-7035.
- Chun, C. (1990). Some improvements of Jarratt's method with sixth-order convergence. *Appl. Math. Comput.* 190, 1432–1437.
- Chun, C., Lee, M. Y., Neta, B. y Džunić, J. (2012). 'On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics'. *Applied Mathematics and Computation* 218, 6427-6438.
- Chun, C.; Stanica, P.; Neta, B. (2011). Third order family of methods in Banach spaces. *Comput. Math. Appl.* 61, 1665–1675.
- Cianciaruso, F.; De Pascale, E. (2006). Estimates of majorizing sequences in the Newton-Kantorovich method: A further improvement. *J. Math. Anal. Appl.* 332, 329–335.
- Cordero, A., García-Maimo, J., J. R. Torregrosa, J.R., Vassileva, M. P., y Vindel, P. (2013). 'Chaos in King's iterative family'. *Applied Mathematics Letters* 26, 842-848.
- Cordero, A.; Gutiérrez, J.M.; Magreñán, Á.A.; Torregrosa, J.R. (2016). Stability analysis of a parametric family of iterative methods for solving nonlinear models. *Appl. Math. Comput.* 285, 26–40.

- Cordero, A. , Magreñán, Á. A., Quemada, C. y Torregrosa, J.R. (2016). 'Stability study of eighth-order iterative methods for solving nonlinear equations' *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 291, 348-357.
- Cordero, A. y Torregrosa, J.R. (2011). 'A class of Steffensen type methods with optimal order of convergence'. *Applied Mathematics and Computation* 217, 7653-7659.
- Cordero, A.; Torregrosa, J.R. (2007). Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas. *Appl. Math. Comput.* 190, 686-698.
- Cordero, A.; Torregrosa, J.R.; Vindel, P. (2013). Dynamics of a family of Chebyshev-Halley type methods. *Appl. Math. Comput.* 219, 8568-8583.
- Dejam, M. (2019). 'Advective-diffusive-reactive solute transport due to non-Newtonian fluid flows in a fracture surrounded by a tight porous medium.' *Int. J. Heat Mass Transf.* 2019, 128, 1307-1321.
- Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. Westview Press.
- Džunić, J.; Petkovic, M. (2012). A family of Three-Point methods of Ostrowski's Type for Solving Nonlinear Equations. *J. Appl. Math.* 425867.
- Ezquerro, J. A. ; Gutierrez, J. M. ; Hernandez, M.A.; Romero, N y Rubio, M. J. (2010). El método de Newton: de Newton a Kantorovich, *La Gaceta de la RSME* 13, nº 1, 53-76.
- Ezquerro, J.A.; Hernández, M.A. (2000). Recurrence relations for Chebyshev-type methods. *Appl. Math. Optim*, 41, 227-236.
- Ezquerro, J.A.; Hernández, M.A. (2005). On the R-order of the Halley method. *J. Math. Anal. Appl.* 303, 591-601.
- Ezquerro, J.A.; Hernández, M.A. (2009). New iterations of R-order four with reduced computational cost. *BIT Numer. Math.* 49, 325-342.
- Ganesh, M.; Joshi, M.C. (1991). Numerical solvability of Hammerstein integral equations of mixed type. *IMA J. Numer. Anal*, 11, 21-31.

- Giraldo, A., Sastre, M. A. (2002). *Sistemas dinámicos discretos y caos*, Fundación general de la Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.
- Gopalan, V.B.; Seader, J.D. (1995). Application of interval Newton's method to chemical engineering problems. *Reliab. Comput.* 1, 215–223.
- Grout, I. (2017). Remote Laboratories as a Means to Widen Participation in STEM Education. *Educ. Sci.* 7, 85.
- Gutiérrez, J.M., Hernández, M.A. y Romero, N. (2010). 'Dynamics of a new family of iterative processes for quadratic polynomials'. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233, 2688-2695.
- Gutiérrez, J.M.; Hernández, M.A. (1998). Recurrence relations for the super-Halley method. *Comput. Math. Appl.* 36, 1–8.
- Gutiérrez, J.M., Plaza, S.(2013). *Estudio dinámico del método de Newton para resolver ecuaciones no lineales*. Tesis Doctoral. Universidad de La Rioja. La Rioja.
- Hernández, M.A. (2001a). Chebyshev's approximation algorithms and applications. *Comput. Math. Appl.* 41, 433–455.
- Hernández, M.Á. (2001b). The Newton Method for Operators with Hölder Continuous First Derivate. *J. Optim. Theory Appl.* 109, 631–648.
- Hernández, M.A.; Salanova, M.A. (1999). Sufficient conditions for semilocal convergence of a fourth order multipoint iterative method for solving equations in Banach spaces. *Southwest J. Pure Appl. Math.* 1, 29–40.
- Honorato, G., Plaza, S. y Romero, N. (2011). 'Dynamics of a high-order family of iterative methods'. *Journal of Complexity* 27, 221-229.
- Jarratt, P. (1966). Some fourth order multipoint methods for solving equations. *Math. Comput.* 20, 434–437.
- Jordán, C.; Magreñán, Á.A.; Orcos, L. (2019). Considerations about flip education in the teaching of advanced mathematics. *Edu. Sci.* 9, 227.
- Kantorovich, L.V.; Akilov, G. (1982). *Functional Analysis*; Pergamon Press: Oxford, UK.

- Kou, J., Argyros, I.K. (1993). A note on the Halley method in Banach spaces, *Appl. Math. Comput.*, 58, 215–225.
- Kou, Z.; Dejam, M. (2019). Dispersion due to combined pressure-driven and electro-osmotic flows in a channel surrounded by a permeable porous medium. *Phys. Fluids* 31, 056603.
- Kou, J.; Li, Y. (2007). An improvement of the Jarratt method. *Appl. Math. Comput.* 189, 1816–1821.
- Kou, J.; Wang, B. (2012). A semi-local convergence of a modified multi-point Jarratt method in Banach spaces under general continuity conditions. *Numer. Algorithms* 60, 369–390.
- Kung, H.T. y Traub, J.F. (1974). 'Optimal order of one-point and multipoint iteration'. *J. Assoc. Comput. Math.* 21, 643-651.
- Laforce, M.; Noble, E.; Blackwell, C. (2017). Problem-Based Learning (PBL) and Student Interest in STEM Careers: The Roles of Motivation and Ability Beliefs. *Educ. Sci.* 7, 92.
- LeTendre, G.; McGinnis, E.; Mitra, D.; Montgomery, R.; Pendola, A. (2018). The American Journal of Education: Challenges and opportunities in translational science and the grey area of academic. *Rev. Esp. Pedag.* 76, 413–435.
- Li, D.; Liu, P.; Kou, J. (2014). An improvement of the Chebyshev-Halley methods free from second derivative. *Appl. Math. Comput.* 235, 221–225.
- Lotfi, T.; Magreñán, Á.A.; Mahdiani, K.; Rainer, J.J. (2015). A variant of Steffensen-King's type family with accelerated sixth-order convergence and high efficiency index: Dynamic study and approach. *Appl. Math. Comput.* 252, 347–353.
- Magreñán, Á. A. (2013). '*Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado*'. Tesis Doctoral - Doctorado en Matemáticas: Universidad de La Rioja.
- Magreñán, Á.A. (2014). Different anomalies in a Jarratt family of iterative root-finding methods. *Appl. Math. Comput.* 233, 29–38.

- Magreñán, Á.A. (2016). On the local convergence and the dynamics of Chebyshev-Halley methods with six and eight order of convergence. *J. Comput. Appl. Math.* 298, 236-251.
- Magreñán, Á.A.; Argyros, I.K. (2014). A new tool to study real dynamics: The convergence plane. *Appl. Math. Comput.* 248, 215-224.
- Magreñán, Á.A.; Argyros, I.K. (2018). *A Contemporary Study of Iterative Methods: Convergence, Dynamics and Applications*; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands.
- Magreñán, A.A, Argyros, I.K., Sarría Í., Sicilia, J.A. (2018). Local convergence and the dynamics for a family of High Convergence Order Method For Solving Nonlinear Equations with Applications. *AIP Conference Proceedings*.
- Magreñán, Á.A.; Gutiérrez, J.M. (2015). Real dynamics for damped Newton's method applied to cubic polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* 275, 527-538.
- Mandelbrot, B. (1977). *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman & Co.
- Mandelbrot, B. (1987). *Los objetos fractales: Forma, azar y dimensión*, Tustquets.
- Maruster, S., George, S., Argyros, I. K. (2017). On the Convergence of Stirling's Method for Fixed Points Under Not Necessarily Contractive Hypotheses, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 3, 1071-1081.
- Nakakoji, Y.; Wilson, R. (2018). First-Year Mathematics and Its Application to Science: Evidence of Transfer of Learning to Physics and Engineering. *Edu. Sci.* 8, 8.
- Ortega, J.M.; Rheinboldt, W.C. (1970). *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*; Academic Press: New York, NY, USA.
- Ostrowski, A. M. (1966). *Solutions of equations and systems of equations*. Academic Press.
- Parhi, S.K. and Gupta, D.K. (2010a). Relaxing convergence conditions for Stirling's method, *Mathematical methods in the Applied Sciences*, 33, 224-232.

- Parhi, S.K. and Gupta, D.K. (2010b). Semilocal convergence of Stirling's method under Hölder continuous first derivative in Banach spaces, *International Journal of Computer Mathematics*, 87, 2752-2759.
- Parhi, S.K. and Gupta, D.K. (2011). Convergence of Stirling's method under weak differentiability condition, *Mathematical methods in the Applied Sciences*, 34, 168-175.
- Parhi, S. K., Singh, S., Gupta, D. K. (2016). Semilocal convergence of Stirling's method for fixed points in Banach spaces, *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 9, 243-257.
- Petkovic, M.; Neta, B.; Petkovic, L.; Džunić, J. (2013). *Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations*; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands.
- Potra, F.A., Pták, V. (1984). *Nondiscrete induction and iterative processes*. Research Notes in Mathematics, 103. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA.
- Prieto, M.C.; Palma, L.O.; Tobías, P.J.B.; León, F.J.M. (2019). Student assessment of the use of Kahoot in the learning process of science and mathematics. *Edu. Sci.* 9, 55.
- Rall, L.B. (1975). Convergence of Stirling's method in Banach spaces. *Aequ. Math.* 12, 12-20.
- Rall, L.B. (1979). *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations*; Robert E. Krieger: New York, NY, USA.
- Ren, H.; Argyros, I.K. (2010). Convergence radius of the modified Newton method for multiple zeros under Hölder continuous derivative. *Appl. Math. Comput.* 217, 612-621.
- Ren, H.; Wu, Q.; Bi, W. (2009). New variants of Jarratt method with sixth-order convergence. *Numer. Algorithms* 52, 585-603.
- Rheinboldt, W.C. (1978). *An Adaptive Continuation Process for Solving Systems of Nonlinear Equations*; Banach Center Publications, Polish Academy of Science: Warszawa, Poland, 3, 129-142.

- Sarría, Í. (2018). *'Mejora en la enseñanza y estudio de la dinámica de métodos iterativos.'* Tesis Doctoral. Doctorado en Sociedad del Conocimiento y acción en los ámbitos de la educación, la comunicación, los derechos y las nuevas tecnologías. Universidad Internacional de La Rioja. Madrid.
- Shacham, M. (1989). An improved memory method for the solution of a nonlinear equation. *Chem. Eng. Sci.* 44, 1495–1501.
- Tello, J.I.C.; Orcos, L.; Granados, J.J.R. (2016). Virtual forums as a learning method in Industrial Engineering Organization. *IEEE Latin Am. Trans.* 14, 3023–3028.
- Traub, J.F. (1964). *Iterative Methods for the Solution of Equations; Series in Automatic Computation*; Prentice–Hall: Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Wang, X.; Kou, J.; Gu, C. (2011). Semilocal convergence of a sixth-order Jarratt method in Banach spaces. *Numer. Algorithms* 57, 441–456.
- Weerakon, S.; Fernando, T.G.I. (2000). A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Appl. Math. Lett.* 13, 87–93.
- Zhao, L.; Wang, X.; Guo, W. (2012). New families of eighth-order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations. *Wseas Trans. Math.* 11, 283–293.

