

UNIVERSIDAD
INTERNACIONAL
DE LA RIOJA

unir

**Universidad Internacional de La Rioja
Máster universitario en Ingeniería Matemática y
Computación**

Análisis de Perturbaciones En Trayectorias de Baja Energía

Trabajo Fin de Máster

Tipo de trabajo: Desarrollo Teórico

Presentado por: Juan David Aguilar

Director: Daniel Pérez Palau

Ciudad: Bogotá

Fecha: 2 Febrero 2020

Resumen

Palabras Clave: Mecánica Espacial, Trayectorias, Sistemas Dinámicos, Perturbaciones

Este trabajo busca encontrar que rango de perturbaciones pueden hacer que una órbita de baja energía desaparezca entre dos órbitas periódicas Lyapunov, el anterior objetivo es importante para cualquier misión espacial debido a la influencia de las perturbaciones en su trayectoria. Para generar una trayectoria de baja energía, nos posicionamos en el sistema Tierra-Luna y utilizando las variedades invariantes de cada órbita periódica, buscamos en que puntos estas variedades se intersecan dando inicio a la trayectoria de baja energía, a partir de esta trayectoria aplicamos dos tipos de perturbaciones, la primera es una perturbación aleatoria en cada uno de los componentes de la aceleración, de esta forma logramos encapsular diferentes perturbaciones en una sola, y la segunda perturbación es la presión de radiación solar.

A partir de los resultados obtenidos encontramos que la presión de radiación solar causa que la trayectoria se pierda incluso utilizando diferentes coeficientes de reflectividad. Cuando se utiliza la perturbación aleatoria se observa que la órbita no se mantiene incluso utilizando magnitudes en el orden de $2.6979 \times 10^{-11} \frac{km}{s^2}$ y $2.6979 \times 10^{-10} \frac{km}{s^2}$, en este caso se genera divergencias más grandes que con la perturbación de radiación solar.

Los anteriores resultados rectifican que las órbitas periódicas Lyapunov son inestables por lo que un desvío en la dirección inestable nos va a alejar exponencialmente. Podemos concluir que será necesario aplicar métodos de control para que una nave espacial dentro de la trayectoria de baja energía se mantenga en ella.

Abstract

Keywords: Orbital Mechanics, Dynamical Systems, Perturbations

This work aims to find the range of values produced by a perturbation that could cause a low-energy orbit between two periodic Lyapunov orbits to disappear; the previous objective is essential for any space mission because the perturbations can cause the spacecraft to lose his trajectory. To do it, we position our problem in the Earth-Moon system, and using the manifolds of each Lyapunov periodic orbit, we can find at which points these manifolds intersect, forming the low energy trajectory between both orbits.

We applied two types of perturbations, the first one is a random perturbation in each component of acceleration, in this way we manage to encapsulate different types of perturbations in one and the second perturbation is the solar radiation pressure. From the results obtained, we found that solar radiation pressure causes the trajectory to diverge in a small amount.

When we use random perturbation, the orbit also diverges even using small magnitudes $1e - 5$ or $1e - 4$. The previous results confirm a periodic Lyapunov property which states that both orbits are unstable in our system causing that a small deviation in the unstable direction takes us exponentially away. We can conclude that it is necessary to apply control methods to maintain a spacecraft within the low energy path that remains in it.

Índice de contenidos

1. Introducción.....	10
1.1 Justificación	12
1.2 Planteamiento del trabajo	12
1.3 Estructura de la memoria.....	12
2. Contexto y estado del arte.....	13
2.1 Métodos Numéricos	13
2.1.1 Método de solución para ecuaciones no lineales.....	13
2.1.2 Métodos de solución para ecuaciones diferenciales	14
2.1.2.1 Método Runge-Kutta de Orden 4	14
2.1.2.2 Adaptive Runge-Kutta-Fehlberg.....	15
2.1.4 Correcciones Diferenciales.....	16
2.1.4.1 Disparo Simple	16
2.1.5 Aplicaciones de Poincaré	17
2.2 Mecánica Espacial.....	18
2.2.1 Problema de los Tres Cuerpos	19
2.2.2 Puntos fijos del Sistema	21
2.2.3 Estabilidad en los puntos de Lagrange.....	23
2.2.4 Órbita Periódica.....	24
2.2.5 Matriz de transición de estados y Monodromía	24
2.2.6 Estabilidad de la Órbita Periódica.....	26
2.2.7 Variedades Invariantes.....	26
2.2.8 Conexiones Homoclínicas y heteroclínicas.....	27
2.2.9 Órbitas periódicas en PCRTBP	28
2.3.1 Lyapunov Orbits	29
2.3.2 Halo.....	30
2.3.3 Distant Prograde Orbits	30

2.3.4 Distant Retrograde Orbits.....	31
2.4 Misiones Espaciales.....	31
2.4.1 ISEE-3/ICE.....	31
2.4.2 WMAP.....	32
2.4.3 SOHO.....	33
2.4 Presión de Radiación solar.....	33
3. Objetivos concretos y metodología de trabajo.....	36
3.1. Objetivo general.....	36
3.2. Objetivos específicos.....	36
3.2. Metodología del trabajo.....	36
4. Desarrollo específico de la contribución.....	38
4.1 Calculo de los puntos de Lagrange.....	38
4.2 Calculo de los Órbitas Periódicas Lyapunov.....	40
4.2.1 Metodología.....	40
4.2.2 Comprobación de los Órbitas Periódicas.....	44
4.3 Generar Variedades Invariantes.....	45
4.4 Encontrar Intersecciones entre Variedades Invariantes.....	48
4.5 Encontrar Trayectoria de Baja Energía.....	50
4.6 Variación de Parámetros.....	52
4.7 Análisis de Perturbaciones.....	54
4.7.1 Presión de radiación solar.....	55
4.7.1.1 Radiación Solar en trayectoria con un nivel de energía $C = 3.0946$.....	55
4.7.1.2 Radiación Solar en trayectoria con un nivel de energía $C = 3.1340$.....	57
4.7.2 Perturbación Aleatoria.....	59
4.7.2.1 Perturbación Aleatoria en trayectoria con un nivel de energía $C = 3.0946$	59
4.7.2.2 Perturbación Aleatoria en trayectoria con un nivel de energía $C = 3.1340$	61
5. Conclusiones y trabajo futuro.....	63

5.1. Conclusiones	63
5.2. Líneas de trabajo futuro	63
6. Bibliografía	64
7. Anexos	67
7.1 Documento Formato Revista	67
I. INTRODUCCIÓN	68
II. CREACIÓN DE ORBITAS LYAPUNOV	68
III. GENERACIÓN DE TRAYECTORIA DE BAJA ENERGÍA	69
7.2 Formato Poster	76
7.3 Tablas de Conversión	77

Índice de tablas

Tabla 1, Tipos de Estabilidad [17]	26
Tabla 2 Experimentos realizados a bordo de la ISEE—3/ICE. Fuente [25].....	32
Tabla 3 Constante de Reflectividad según material [29].....	35
Tabla 4. Puntos de Lagrange	39
Tabla 5 Diferencias entre vector de posiciones y velocidades entre una órbita periódica.....	44
Tabla 6. Tipos de Materiales y su Coeficiente de absorción Cr [29]	55
Tabla 7 Diferencia Media entre cada componente $x y x y$ de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación (fuente propia)	55
Tabla 8 Desviación Estándar entre cada componente $x y x y$ de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación (fuente propia)	56
Tabla 9 Diferencia entre el ultimo componente $x y x y$ de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación (fuente propia)	57
Tabla 10 Diferencia Media entre cada componente $x y x y$ de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación $C = 3.1340$ (fuente propia).....	57
Tabla 11 Desviación Estándar entre cada componente $x y x y$ de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación (fuente propia).....	58
Tabla 12 Diferencia Media entre último vector de Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbaciones $C = 3.0946$ (fuente propia)	60
Tabla 13 Numero de trayectorias que están en la zona (fuente propia).....	60
Tabla 14 Desviación estándar entre último vector de Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbaciones $C = 3.0946$ (fuente propia).....	60
Tabla 15 Diferencia Media entre último vector de Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbaciones $C = 3.1340$ (fuente propia)	61
Tabla 16 Desviación estándar entre último vector de Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbaciones $C = 3.1340$ (fuente propia).....	61
Tabla 17 Numero de trayectorias que están en la zona (fuente propia).....	62
Tabla 18 Diferencia Media entre cada componente $x y x y$ de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación $C = 3.1340$ (fuente propia)	73
Tabla 19 Tabla de conversiones de Unidades Normalizadas de Distancia a Kilómetros	77

Tabla 20 Tabla de conversiones de Unidades Normalizadas de Velocidad a Kilómetros por segundo77

Índice de figuras

Figura 1 Trayectoria de baja energía de GRAIL-A y GRAIL-B [5].....	11
Figura 2 Representación gráfica de una aplicación de Poincaré [10]	17
Figura 3 Puntos de Lagrange (Fuente: elaboración propia.).....	21
Figura 4 Conexión homoclínica en el sistema $x' = y, y' = -x^3 + x$ [18].....	27
Figura 5 : Conexión heteroclínica en el sistema $x' = x^2 - 1, y' = -xy$ [18].....	28
Figura 6 Lyapunov Orbit (Fuente: elaboración propia).....	29
Figura 7 Órbitas periódicas Halo [15]	30
Figura 8 Distant Prograde Orbits [22]	30
Figura 9 Distant Retrograde Orbits (DRO) [24].....	31
Figura 10 Órbita realizada por WMAP desde la Tierra hasta L2 [26].....	32
Figura 11. Órbita de SOHO alrededor del punto Lagrange L1 [28].....	33
Figura 12. Variación del Flujo solar [15]	34
Figura 13. Metodología del Trabajo (Fuente propia).....	37
Figura 14 Grafica de la quintica para L2. (Fuente: elaboración propia)	38
Figura 15 Puntos de Lagrange en el sistema Tierra-Luna (Fuente: elaboración propia).....	40
Figura 16 Muestra de la Familia de Órbitas Lyapunov sobre los puntos de Lagrange L1 (Rojo) y L2 (Azul). (Fuente: elaboración propia).....	42
Figura 17 Constante de Jacobi de órbitas periódicas Lyapunov Roja L1 y Azul L2 (Fuente: elaboración propia).....	43
Figura 18. Análisis de crecimiento de Constante de Jacobi (Fuente propia).....	43
Figura 19 Constante de Jacobi de órbitas periódicas Lyapunov Roja L1 y Azul L2 (Fuente: elaboración propia).....	44
Figura 20 Órbita periodica Lyapunov (Fuente: elaboración propia)	45
Figura 21 Variedades Invariantes Estables en órbita periódica Lyapunov con una constante de Jacobi de 3.0946. (Fuente: elaboración propia).....	47
Figura 22 Variedades Invariantes Estables en órbita periódica Lyapunov con una constante de Jacobi de 3.1340. (Fuente: elaboración propia).....	47

Figura 23 Variedades Invariantes Estables en órbita periódica Lyapunov con una constante de Jacobi de 3.1367. (Fuente: elaboración propia).....	48
Figura 24 Aplicaciones de Poincare utilizando las variedades invariantes de órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable (Fuente: elaboración propia).....	49
Figura 25 Aplicaciones de Poincare utilizando las variedades invariantes de órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable (Fuente: elaboración propia).....	49
Figura 26 Aplicaciones de Poincare utilizando las variedades invariantes de órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable (Fuente: elaboración propia).....	50
Figura 27 Trayectoria de baja energía sobre las órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constante de Jacobi 3.0946 (Fuente: elaboración propia).	51
Figura 28 Trayectoria de baja energía sobre las órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constante de Jacobi 3.1340 (Fuente: elaboración propia).	51
Figura 29 Trayectoria de baja energía sobre las órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constante de Jacobi 3.0946 (Fuente: elaboración propia).	52
Figura 30 Variedades Invariantes Estables en órbita periódica Lyapunov con diferentes constantes de Jacobi (Fuente: elaboración propia)	53
Figura 31 Aplicaciones de Poincare utilizando las variedades invariantes de órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable con diferentes constantes de Jacobi (Fuente: elaboración propia)	53
Figura 32 Trayectoria de baja energía sobre las órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constantes de Jacobi diferentes (Fuente: elaboración propia)	54
Figura 33 Trayectoria de baja energía utilizando presión solar (Fuente propia).....	56
Figura 34 Trayectoria de baja energía utilizando presión solar $C = 3.1340$ (Fuente propia) .	58
Figura 35 Trayectoria de baja energía utilizando Perturbación Aleatoria y un nivel de energía $C = 3.0946$ (Fuente propia)	61
Figura 36 Trayectoria de baja energía utilizando Perturbación Aleatoria y un nivel de energía $C = 3.1340$ (Fuente propia)	62

1. Introducción

En la historia reciente del desarrollo espacial se han distinguido diferentes tipos de trayectorias de transferencia entre el sistema Tierra-Luna u otro tipo de órbitas periódicas, entre las cuales podemos destacar: transferencias directas convencionales, transferencia de bajo empuje y transferencia de baja energía.

Las transferencias directas convencionales solo utilizan la gravedad entre los cuerpos para transferirse, la misión más conocida en donde se utilizó este método es Apollo 11 aunque muchas otras misiones han aplicado este tipo de transferencia como lo son Luna 1 – Luna 24. La principal característica de este tipo de transferencia es el corto tiempo que toma para alcanzar su objetivo; por ejemplo, la misión realizada por USRR Luna 24 [1], la cual es la última sonda enviada a Luna por Rusia, despegó de la tierra el 9 de agosto de 1976 y después de algunas correcciones tardó aproximadamente tres días en llegar a la Luna, donde se extrajo material lunar, y regresó a la tierra el 23 de agosto de 1976. La desventaja que posee este tipo de transferencia es la alta velocidad que alcanza, requiriendo un alto gasto de combustible para aterrizar en el destino.

Las transferencias de bajo empuje se caracterizan por utilizar motores de bajo empuje, los cuales reducen el gasto de combustible en comparación a los motores de propulsión, pero demandan mayor tiempo en la trayectoria. La misión SMART-1 (Small Missions for Advanced Research in Technology), creada por la agencia espacial europea utilizó este tipo de transferencia, la cual empleaba un propulsor de iones [2] alimentado por paneles solares; los objetivos de esta misión eran analizar la topografía de la Luna, la textura de la superficie y distribución de materiales. Finalmente, la misión finalizó el 3 de septiembre de 2006 cuando deliberadamente el vehículo espacial fue estrellado en la Luna.

Por último, las transferencias de baja energía o trayectorias de baja energía, se caracterizan por utilizar las propiedades dinámicas del sistema para encontrar trayectorias que disminuyan el uso de combustible, sin embargo, una desventaja es que incrementa el tiempo gastado en la trayectoria; por ejemplo, una misión de transferencia Tierra-Luna puede tomar entre 94 – 114 días [3], esta es una gran diferencia, si la comparamos con la misión Luna 24 que tomó tres días aproximadamente.

Aun así, las trayectorias de baja energía poseen otras ventajas [4]:

- Requieren menos combustible, no solamente durante el trayecto sino al llegar al destino; por ejemplo, si se utilizará una trayectoria directa se tendría que gastar combustible para disminuir la velocidad igualando a la velocidad de rotación de la Luna, en cambio las trayectorias de baja energía llegan al destino a la misma velocidad de rotación del objetivo, la Luna, en el caso de una transferencia Tierra-Luna.
- Dan la posibilidad de crear trayectorias para múltiples objetivos; por ejemplo, al estar en una órbita periódica Lyapunov en el sistema Tierra-Luna se puede dirigir a otra órbita periódica Lyapunov u orbitar diferentes puntos de Lagrange del sistema incrementando la vida útil del satélite.
- Permiten crear trayectorias desde la Luna a cualquier parte de la Tierra, a diferencia de trayectorias directas que requieren estar en ciertas ventanas de tiempo y posición para alcanzar lugares específicos en el planeta.

Por las ventajas que ofrece utilizar trayectorias de baja energía cada vez más misiones espaciales están utilizando este tipo de trayectorias como: ICE, WIND, ACE, WMAP, SOHO, GRAILS y GENESIS [2]. Un ejemplo es la misión GRAILS (Gravity Recovery and Interior Laboratory) [2], creada por la NASA y lanzada al espacio el 10 de septiembre del 2011, con el objetivo de medir el campo gravitacional de la Luna, para ello se lanzaron dos satélites GRAIL-A y GRAIL-B los cuales se acercaban y separaban el uno del otro midiendo los cambios de velocidad, de esta forma, se obtuvo la información del campo gravitacional de la Luna. En la Figura 1 se puede observar la trayectoria de baja energía que se utilizó, como se observa, los satélites se alejan del sistema Tierra-Luna para luego alcanzar el destino.

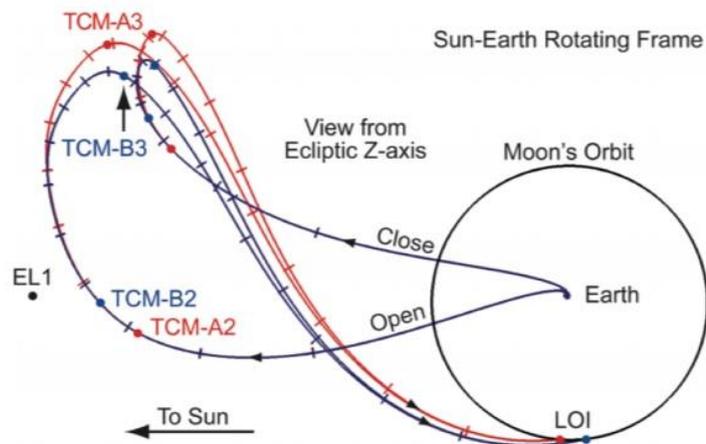


Figura 1 Trayectoria de baja energía de GRAIL-A y GRAIL-B [5].

1.1 Justificación

En la actualidad, aunque se conoce la solución analítica para el problema de dos cuerpos, esta solución solo es una aproximación a lo que vemos debido a que no tiene en cuenta muchas de las alteraciones producidas por otros cuerpos o fuerzas. Todas estas perturbaciones pueden causar que la trayectoria se desvíe en grandes ordenes de magnitud; por ejemplo, satélites artificiales situados en la órbita baja terrestre deben tener en cuenta la perturbación causada por el arrastre de la atmosfera, sino fuese así, se estrellarían en la Tierra como fue el caso de Sputnik-1 [2].

Lo que se busca determinar en este trabajo es el rango de perturbaciones que pueden desviar una nave espacial u objeto que se halle en una trayectoria de baja energía. En la actualidad se han descubierto diferentes tipos de perturbaciones que afectan la trayectoria como lo son: la resistencia atmosférica, las perturbaciones gravitacionales, presión de radiación solar, entre otras. Por lo que es importante considerar hasta que magnitud estas perturbaciones pueden hacer que la trayectoria se desvíe.

1.2 Planteamiento del trabajo

El principal objetivo es medir el rango de perturbaciones que puede causar que la trayectoria de baja energía se desvíe de su curso normal. Para poder conseguir esto se debe identificar una trayectoria de baja energía, esta trayectoria estará ubicada entre las órbitas periódicas Lyapunov que se encuentran cerca de los puntos de Lagrange L1 y L2 en el sistema Tierra-Luna. Al encontrar dicha trayectoria de baja energía se aplicará dos tipos de perturbaciones: la primera será la presión de radiación solar y la segunda una perturbación aleatoria con el objetivo de mirar hasta que valores la trayectoria se pierde.

1.3 Estructura de la memoria

Este trabajo se divide en cinco partes: La primera es la sección de Estado del Arte, donde hacemos referencia a los conceptos que se van a utilizar durante el desarrollo de este trabajo y se divide en varias subsecciones, explicando y/o dando ejemplos del uso de estos métodos. La segunda sección explica en detalle los objetivos que tiene este estudio al igual que los pasos necesarios para conseguirlos. La tercera parte se enfoca en el desarrollo de la investigación, explicando todos los procesos utilizados y los resultados. Por último, se presentarán las conclusiones de este trabajo y las posibles líneas de trabajo que existen.

2. Contexto y estado del arte

Esta sección se dividirá en dos partes: La primera explicará los métodos que se utilizarán para desarrollar este trabajo. La última parte, se mostrará brevemente la historia de la mecánica espacial explicando cómo se relacionan los métodos presentados en este trabajo y la aplicación de estos en las misiones espaciales realizadas los últimos años.

2.1 Métodos Numéricos

Cuando no existe una solución analítica al problema se suele utilizar otros métodos que nos permitan realizar una aproximación a la solución. Estos métodos pertenecen a la rama de métodos numéricos [6].

En este estudio se utilizan métodos numéricos para hallar la solución aproximada de las ecuaciones diferenciales. En nuestro caso, nos concentraremos en los problemas de valor inicial, es decir, basados en un o unos puntos iniciales se obtendrá una solución aproximada en el intervalo deseado, este intervalo puede variar, pero depende de los parámetros utilizados en el método.

Específicamente el problema de valor inicial busca resolver [7]:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y(s)) ds$$

Por lo que, se debe aproximar la integral, la forma en que lo hacemos crea diferentes tipos de métodos.

La siguiente sección se dividirá en dos partes la primera explicará los métodos de solución para ecuaciones no lineales y la segunda parte mostrará los métodos para la aproximación de ecuaciones diferenciales.

2.1.1 Método de solución para ecuaciones no lineales

Cuando se desea conocer en qué puntos x hacen que una función f sea cero, decimos que estamos buscando las raíces de la función $f(x) = 0$, lo que es equivalente a hallar la solución.

El método que se utilizará para hallar las raíces en este trabajo se llama Newton-Raphson, puede ser derivado por la expansión de Taylor en $f(x)$ cerca de x [8]

$$f(x_{i+1}) = f(x) + f'(x)(x_{i+1} - x) + O.S$$

Donde se descarta los términos de orden superior y se despeja x_{i+1} obteniendo la expresión iterativa del método.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Como se puede observar, la anterior fórmula es iterativa y depende de dos factores, el primer factor se basa en que la función $f(x)$ debe tener una derivada $f'(x)$, el segundo factor radica en que la solución alcanzada va a depender del valor inicial utilizado x_i .

2.1.2 Métodos de solución para ecuaciones diferenciales

Se desea hallar la solución a $y' = f(t, y)$, la cual en muy pocos casos se puede encontrar de forma analítica, por lo que se busca una aproximación a $y \approx \varphi(t; t_0, y_0)$; es decir, al definir un t_0 tiempo inicial y y_0 posición inicial buscamos aproximar el valor de y en el tiempo t .

La solución debe cumplir con $f(t; \varphi(t; t_0, y_0)) = \varphi'(t; t_0, y_0)$; en otras palabras, la tangente de las curvas debe ser la misma para $f(t, y)$ y $\varphi(t; t_0, y_0)$ en el tiempo t para lograrlo existen muchos métodos, en esta sección se analizarán dos: Método Runge-Kutta de orden 4 y Adaptive Runge-Kutta-Fehlberg.

2.1.2.1 Método Runge-Kutta de Orden 4

Este método permite resolver numéricamente una ecuación diferencial ordinaria basada en un valor inicial. El método utiliza la siguiente aproximación a la integral [7].

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_k, y(t_k))$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y(t_k) + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y(t_k) + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_{k+1}, y(t_k) + hk_3)$$

Este método es iterativo y depende de las condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$, donde t_{k+1} va a aumentar basados en $t_{k+1} = t_k + h$ en cada iteración, lo anterior implica que la distancia del orden o grilla h es fija y tomar valores pequeños va a permitir tener soluciones en intervalos más pequeños, pero implica más tiempo de ejecución y mayor acumulación de errores [9].

2.1.2.2 Adaptive Runge-Kutta-Fehlberg

Este método propone variar el tamaño de h en función de una estimación del error local; es decir, se eligen dos métodos uno más eficaz que el otro y se comparan los resultados, esta comparación es la estimación del error local, si la diferencia de estos valores es más grande que una tolerancia fijada se cambia el tamaño de h . A continuación se muestran todas las reglas para el cambio del tamaño del nodo [9]:

$$y(t_k) - \bar{y}(t_k) \gg \varepsilon \Rightarrow h = h/2$$

$$y(t_k) - \bar{y}(t_k) \ll \varepsilon \Rightarrow h = 2h$$

$$y(t_k) - \bar{y}(t_k) \approx \varepsilon \Rightarrow h = h$$

Específicamente este método utiliza dos Runge-Kutta, uno de 4-orden y otro de 5-orden, el orden de más se logra con solo agregar una evaluación del campo vectorial. Esto trae varias ventajas computacionalmente pues dos métodos distintos requerirían que por cada intervalo se ejecuten ambos métodos duplicando el tiempo de ejecución, pero en este caso solo implica evaluar una función adicional [9].

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1480}{2565}k_2 + \frac{2191}{4104}k_3 - \frac{1}{5}k_4$$

$$k_1 = h * f(t_k, y(t_k))$$

$$k_2 = h * f\left(t_k + \frac{h}{4}, y(t_k) + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = h * f\left(t_k + \frac{3h}{8}, y(t_k) + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

$$k_4 = h * f\left(t_k + \frac{12h}{13}, y(t_k) + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7297}{2197}k_3\right)$$

$$k_5 = h * f\left(t_k + h, y(t_k) + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

$$k_5 = h * f(t_k + 0.5h, y(t_k) - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

2.1.4 Correcciones Diferenciales

Los métodos de correcciones diferenciales permiten resolver problemas de valor inicial de dos límites (two-point boundary value problema TPBVP), en particular se utilizará el método de disparo simple, para generar una órbita periódica, la cual se puede definir como un problema de TPBVP.

2.1.4.1 Disparo Simple

Este método parte en que posemos un vector X de n cantidad de elementos:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Y se desea cumplir con las siguientes restricciones:

$$F(X_c) = \begin{bmatrix} F_1(x_{c1}) \\ F_2(x_{c2}) \\ F_3(x_{c3}) \\ \vdots \\ F_n(x_{cn}) \end{bmatrix} = 0$$

Como se desconoce el valor de X_c , se aplica la expansión de Taylor sobre $F(X_0)$ donde X_0 es el valor inicial para hallar X_c .

$$F(X_c) = F(X_0) + DF(X_0)(X_c - X_0) + O.S$$

Al omitir los términos de orden superior y reemplaza $F(X_c) = 0$ se obtiene:

$$0 \approx F(X_0) + DF(X_0)(X_c - X_0)$$

La matriz $DF(X_0)$ es la Jacobiana formada por las derivadas parciales del vector de restricciones con respecto a las condiciones iniciales.

$$DF(X_0) = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

Es conveniente expresar la ecuación de forma general:

$$0 = F(X_j) + DF(X_j)(X_{j+1} - X_j)$$

Al igualar la expresión a X_{j+1} se obtiene el método iterativo de disparo simple:

$$X_{j+1} = X_j - DF(X_j)^{-1}F(X_j)$$

La anterior fórmula es la misma expresión del método de Newton en forma matricial, es importante tener en cuenta que la matriz Jacobiana debe tener el mismo número de filas y columnas; es decir, el número de restricciones debe ser el mismo que variables en el sistema.

2.1.5 Aplicaciones de Poincaré

Las aplicaciones de Poincaré nos permiten convertir un sistema dinámico continuo en uno discreto, esto se logra creando una superficie que interseca el flujo del sistema de forma transversal, como se observa en la Figura 2

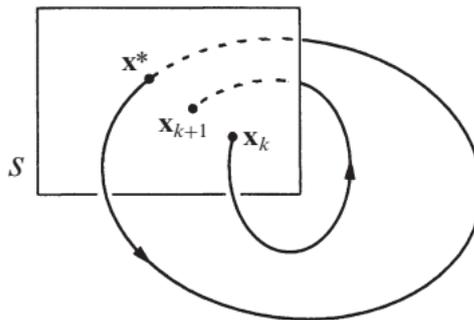


Figura 2 Representación gráfica de una aplicación de Poincaré [10]

La aplicación de Poincaré genera una función iterativa, pero con una dimensión u orden menor; es decir, si la función continua $\dot{x} = f(x)$ tiene dimensión n la función iterativa tendrá orden $n - 1$ y será $x_{k+1} = P(x_k)$. Esto permite, en nuestro caso, analizar la estabilidad de la órbita periódica y encontrar los campos invariantes.

En la siguiente sección se mostrará cómo ha cambiado la Mecánica Espacial desde civilizaciones antiguas hasta nuestros días y se explicará temas importantes para el desarrollo de este trabajo.

2.2 Mecánica Espacial

El área de la Mecánica Espacial ha sido estudiada desde principios de la humanidad, tenemos ejemplos de esto en los Mayas, con el calendario Maya y no solo ellos, sino diferentes tribus indígenas de Centroamérica poseían su calendario [11]. A diferencia de sucesos esporádicos como terremotos, tsunamis, etc. la regularidad que ofrecen los astros permite utilizarlos como medidas de tiempo. Durante mucho tiempo otras civilizaciones estudiaron los astros pero uno de los puntos de inflexión es conocido como la “Revolución Copernicana”, antes de este momento se creía en la hipótesis propuesta por Claudius Ptolemaus [12] donde se expone que la Tierra era el centro del Sistema Solar y el Sol como otros cuerpos celestes giraban alrededor de la Tierra, esta hipótesis no concordaba con las observaciones, debido a la irregularidad que tenían los planetas.

En este momento Nicholas Copernicus postula [13] la teoría de un Sistema Solar donde el Sol es el centro y los planetas giran en torno al Sol, utilizando una trayectoria circular para describir el movimiento. Pero solo cuando se junta el trabajo de Kepler [14] con sus tres leyes y las leyes de Newton, se tienen las bases de la Mecánica Espacial Actual, pues se puede describir el movimiento de los planetas en nuestro Sistema Solar.

Otro gran avance fue la solución del problema de los dos cuerpos, la cual posee las siguientes restricciones [15]:

- Se debe utilizar un marco de referencia inercial.
- Las masas de los cuerpos son esferas.
- Ninguna otra fuerza interactúa en el sistema solo la fuerza gravitacional.

Las bases para la solución de este problema son las leyes de Newton. Se sabe que la fuerza es igual a la masa por la aceleración y la fuerza ejercida por un cuerpo sobre otro es:

$$F = \frac{-G * m_1 * m_2}{r^2} * \left(\frac{R}{r}\right)$$

Siendo R un vector, generalmente con tres dimensiones (x, y, z) [15], G La constante gravitacional universal, m_1 la masa del primer cuerpo y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. La anterior ecuación permite definir las fuerzas de los dos cuerpos:

$$F_{g_sat} = m_{sat} a_{sat} = \frac{-G * m_{sat} * m_{sol}}{r^2} * \left(\frac{R}{r}\right)$$

$$F_{g_pla} = m_{sol} a_{sol} = \frac{-G * m_{sat} * m_{sol}}{r^2} * \left(\frac{R}{r}\right)$$

Hay que tener en cuenta que la solución analítica no tiene en cuenta todas las perturbaciones que pueden existir; por ejemplo, la tierra no es perfectamente esférica o la fuerza que ejerce la atmosfera sobre un satélite. Además, en este caso se asume que solo existen dos cuerpos, en el caso de querer un tercer cuerpo o n cuerpos bajo el mismo sistema, simplemente se debería sumar todas las fuerzas que interactúan con la masa a estudiar [15].

$$\ddot{r}_i = -G \left(\sum_{j=1; j \neq i}^n \frac{m_j * r_{ji}}{r_{ji}^3} \right); \quad r_{ji} = r_i - r_j; \quad i = 1 \dots n$$

La anterior fórmula se muestra para n cuerpos, cuando se utilizan tres cuerpos $n = 3$, se denomina “*Problema de los Tres cuerpos*”. Una característica al utilizar más de dos cuerpos es la inexistencia de la solución analítica requiriendo utilizar otros métodos que imponen restricciones a las ecuaciones del movimiento.

2.2.1 Problema de los Tres Cuerpos

El problema de los tres cuerpos posee varias subclases dependiendo al tipo de restricciones que se le aplican; por ejemplo, existen:

- Problema de los Tres cuerpos restringido.
- Problema de los Tres cuerpos restringido Circular.
- Problema de los Tres cuerpos Plano Circular Restringido.

El enfoque de este trabajo será el Problema de los Tres cuerpos Plano Circular Restringido también llamado en inglés “Planar Circular Restricted Three Body Problem” (PCTBP) [15]:

- Solo se estudiarán tres cuerpos.
- La masa del tercer cuerpo es despreciable.
- El primer y segundo cuerpo se mueven en órbitas circulares alrededor del centro de masa.

- Se asume que no existe movimiento en el eje z .

Además de las restricciones listadas anteriormente, se fija el eje de coordenadas no inercial en el centro de masa, al ser no inercial los planetas giran a una velocidad constante sobre la circunferencia provocando que se pueda analizar el problema fijando los planetas dentro del eje de coordenadas obteniendo las ecuaciones del movimiento para este sistema [15].

$$\mu = \frac{m_2}{m_2 + m_1}$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

Siendo $\ddot{x} - 2\dot{y} - x$, $\ddot{y} + 2\dot{x} - y$ la aceleración de Coriolis del sistema y los términos de la derecha representan la fuerza gravitatoria del cuerpo 1 y el cuerpo 2, respectivamente. Las anteriores ecuaciones diferenciales no poseen solución analítica, pero sirven de base para hallar la integral de Jacobi [16], la cual no varía dentro de una misma órbita y se interpreta como la energía del sistema. El término $\frac{v^2}{2}$ hace referencia a la energía cinética y el resto de los términos $-\frac{(x^2 + y^2)}{2} - \frac{2(1 - \mu)}{r_2} - \frac{2\mu}{r_2}$ a la energía potencial.

$$C = \frac{v^2}{2} - \frac{(x^2 + y^2)}{2} - \frac{2(1 - \mu)}{r_2} - \frac{2\mu}{r_2}$$

Esta ecuación nos va a permitir hallar regiones en el sistema donde el movimiento está prohibido; es decir, como v^2 no puede ser negativo la siguiente desigualdad se debe cumplir:

$$0 \leq (x^2 + y^2) + \frac{2(1 - \mu)}{r_2} + \frac{2\mu}{r_2} + 2C$$

Cuando esta igualdad no se cumple tenemos regiones donde el movimiento está prohibido, además la constante de Jacobi C , permite comprobar la trayectoria generada por los integradores numéricos, pues esta constante no sufre variación durante toda la órbita.

Además, de obtener las ecuaciones de movimiento podemos analizar las características de estas mediante su dinámica, esto lo hacemos al encontrar los puntos fijos del sistema.

2.2.2 Puntos fijos del Sistema

Los puntos fijos son espacios donde al variar el tiempo en la función su ubicación no cambia. En el caso continuo, son los puntos donde la ODE es igual a cero $\dot{x} = f(x) = 0$

En el sistema CRTBP, a estos puntos se les llama Puntos de Lagrange, se obtienen igualando las ecuaciones de velocidad y aceleración a cero. Como se puede observar en la Figura 3. se obtienen 5 puntos L1-L5.

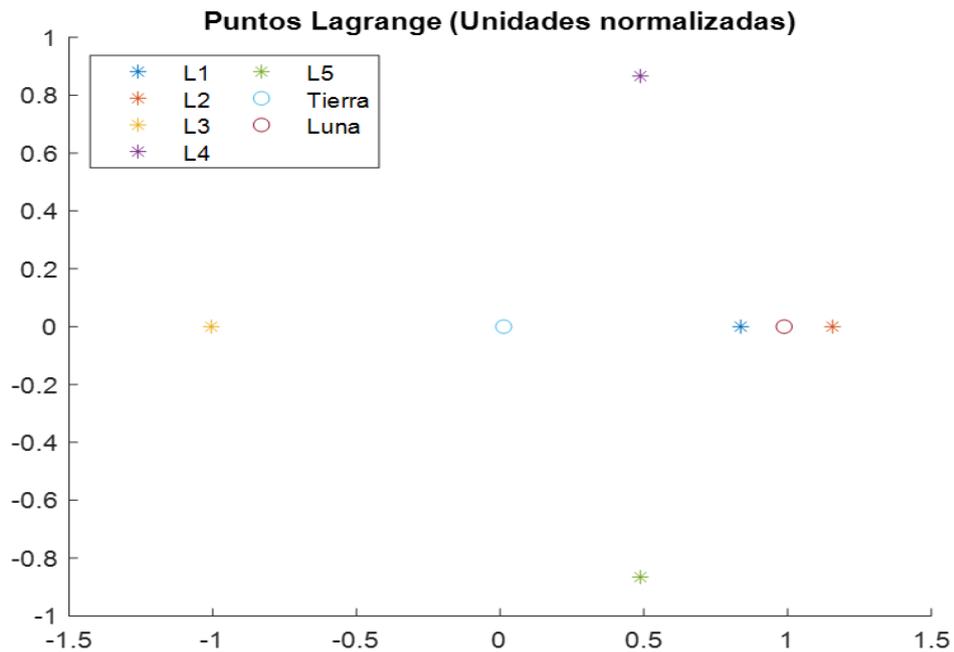


Figura 3 Puntos de Lagrange (Fuente: elaboración propia.)

Como se mencionó estos puntos se hallan cuando $\dot{x} = 0, \ddot{x} = 0, \dot{y} = 0, \ddot{y} = 0, \dot{z} = 0, \ddot{z} = 0$ en las ecuaciones del movimiento.

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}$$

Esto implica igualar la velocidad y aceleración a cero, obteniendo las siguientes fórmulas:

$$x = -\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3}$$

$$y = -\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

$$0 = -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3}$$

El hecho que $z = 0$, implica que todos los puntos de Lagrange son planos. Además, si $y = 0$ se observa que existen puntos de Lagrange en el plano x para hallarlos se reemplaza $x = 0, y = 0$ en la ecuación de movimiento.

$$0 = -\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{\left(\sqrt{(x+\mu)^2}\right)^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{\left(\sqrt{(x+\mu-1)^2}\right)^3} - x$$

Para la anterior expresión no existe una solución exacta, no obstante, si se utiliza el método de Newton podemos hallar aproximaciones a las raíces, para lo anterior aplicamos una transformación a las ecuaciones [3].

$$x_1 = 1 - \mu - \gamma_1$$

$$x_2 = 1 - \mu + \gamma_2$$

$$x_3 = -\mu - \gamma_3$$

Donde γ_{1-3} representa el desplazamiento hasta el planeta más cercano, x_1 hace referencia al punto ubicado entre los dos planetas, x_2 al punto más cercano al segundo cuerpo, y x_3 es el punto más cercano al primer cuerpo. Al aplicar estos cambios se obtiene tres quinticas [15] donde las raíces representan los puntos de Lagrange L1, L2 y L3.

$$x^5 + (3-u)x^4 + (3-2u)x^3 - ux^2 - 2ux - u = 0$$

$$x^5 - (3-u)x^4 + (3-2u)x^3 - ux^2 + 2ux - u = 0$$

$$x^5 + (2+u)x^4 + (1+2u)x^3 - (1-u)x^2 - 2(1-u)x - (1-u) = 0$$

Los puntos L4 y L5 se obtienen cuando $y \neq 0, z = 0$, al realizar este cambio en las ecuaciones del movimiento se tendrá que $r_1 = r_2$, esto nos da la posibilidad de despejar los valores para x, y

$$L4, L5: x = \frac{1}{2} - u \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.2.3 Estabilidad en los puntos de Lagrange

Los puntos fijos o los puntos de Lagrange se hallan cuando $\dot{x} = 0, \ddot{x} = 0, \dot{y} = 0, \ddot{y} = 0, \dot{z} = 0, \ddot{z} = 0$, ahora supongamos que un punto fijo es λ siendo $f(\lambda) = 0$ cierto, si se perturba este punto $\lambda + \delta$, se encuentran dos casos. En el primero la función evaluada en $\phi(t; \lambda + \delta)$ estará limitada $|\phi(t; \lambda + \delta) - \phi(\lambda)| < \beta$ hasta un valor β , a esta propiedad la llamaremos “estable”. En el segundo caso la función evaluada en $\phi(t; \lambda + \delta)$ diverge de $f(x)$ o no estará limitada por ningún valor por lo que el punto fijo es “inestable” [10].

Si se aplica el anterior concepto a este trabajo, se observa que se necesitará encontrar los autovalores de la matriz $A(t)$ para hallar la estabilidad de los puntos de Lagrange [4], debido a que los puntos fijos no salen del plano; es decir, $z = z' = 0$, el análisis de este trabajo está restringido al caso plano.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} & 0 & \lambda & -2 \\ 0 & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}} & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda^4 + \left(4 - \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}}\right) \lambda^2 + \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}}$$

$$\frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} = U_{xx}; \quad \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}} = U_{yy}; \quad \beta_1 = 2 - \frac{U_{xx} + U_{yy}}{2}; \quad \beta_2 = -U_{xx}U_{yy}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \left(\sqrt{-\beta_1 + (\beta_1 + \beta_2)}\right)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \left(\sqrt{-\beta_1 - (\beta_1 + \beta_2)}\right)$$

Al evaluar los puntos fijos colineales (L1, L2, L3) en la anterior ecuación se obtienen puntos inestables pues poseen al menos un autovalor real positivo $R(\lambda) > 0$, además poseen raíces imaginarias indicando que existe movimiento oscilatorio [4] sobre los puntos L1, L2 y L3 como lo son las órbitas Lyapunov que se analizarán en este trabajo.

Los autovalores para los puntos L4 y L5 generan raíces puramente imaginarias $R(\lambda) = 0$ cuando el parámetro de masa μ es pequeño, si ocurre el caso contrario, se observa que posee una parte real e imaginaria.

2.2.4 Órbita Periódica

En sistemas dinámicos podemos comprobar la existencia de una órbita periódica cuando poseemos autovalores complejos [10]

$$X' = AX$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

Para el anterior sistema de ecuaciones se encuentran los autovalores $\pm i\beta$, además se encuentran el autovector para el autovalor $i\beta$ obteniendo:

$$\begin{bmatrix} -i\beta & \beta \\ -\beta & -i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = e^{i\beta t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Siendo la solución al sistema, además se puede aplicar la fórmula de Euler para simplificar la solución utilizando senos y cosenos:

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{bmatrix}$$

Siendo c_1, c_2 las constantes que permiten generar la solución a cualquier valor inicial. Esto indica que las soluciones son funciones periódicas $f(x) = f(x + T)$; es decir, después de evaluar la función en un tiempo posterior se vuelve a obtener el mismo punto, donde T es el periodo o el tiempo que se demora en regresar al mismo valor de la función $f(x)$. En una órbita periódica circular se tendrá que el periodo $T = \frac{\text{circunferencia}}{\text{velocidad}} = \frac{2\pi r}{v}$ [16] donde r representa la amplitud, en este caso, el radio del círculo.

2.2.5 Matriz de transición de estados y Monodromía

Las trayectorias en los problemas de tres cuerpos son calculadas utilizando métodos como Runge-Kutta o Adaptive Runge-Kutta pero existen infinitas trayectorias, por lo que se necesita alguna manera de medir el efecto de los cambios en las condiciones iniciales sobre la posición

final propuesta por los métodos numéricos. Este estudio es posible gracias a la matriz de transiciones de estados en inglés “state transition matrix” (STM).

En nuestro caso, el estado inicial es una matriz $X = [x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}]$ pero también puede ser de la forma $X = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]$. La matriz de transiciones de estados es la derivada parcial de X respecto a cada una de las condiciones iniciales [4].

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial X(t)}{\partial X(t_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0} \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz STM durante otros momentos t se utiliza:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

$$\frac{\partial \dot{X}(t)}{\partial X(t)} = A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{z}} & 0 & 2 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{z}} & -2 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{z}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo $\Phi(t_0, t_0) = I$. La matriz $A(t)$ va a depender de cuantas variables tengamos en nuestras condiciones iniciales, el caso anterior muestra la matriz de CRTBP. En este trabajo se utilizará menos condiciones iniciales debido a $z = 0$ PCRTBP, donde $X = [x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}]$, la matriz $A(t)$ toma la forma:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{y}} & 0 & 2 \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuando se tiene una órbita periódica y se propaga la matriz STM durante todo un periodo, se obtiene la matriz de monodromía; es decir, en la matriz de monodromía solo existe en órbitas periódicas y contiene la información necesaria para calcular la estabilidad de cualquier punto de la órbita periódica.

2.2.6 Estabilidad de la Órbita Periódica

La matriz de monodromía permite calcular la estabilidad de una órbita periódica; es decir, si perturbamos un cuerpo que está en la órbita periódica y vemos que se aleja exponencialmente se dice que es inestable, en el caso contrario, se afirma que es estable. Esto se puede comprobar calculando los autovalores de la matriz de monodromía y verificando los resultados en la Tabla 1.

Autovalor	Estabilidad
Reales y $ \lambda < 1$	Estable, la perturbación decae exponencialmente
Real y $ \lambda > 1$	Inestable, la perturbación crece exponencialmente
Imaginario	La perturbación oscila

Tabla 1, Tipos de Estabilidad [17]

En la mayoría de los casos cuando se utiliza PCRTBP se encuentra autovalores de la matriz de monodromía con los siguientes valores [4]:

$$\left(\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, 1, 1 \right)$$

El par de autovalores unitarios se debe a que existen dos elementos fijos: El primero es la característica misma de la órbita periódica, por lo que un estado cercano a esta no sufrirá cambio. La segunda proviene de la constante de Jacobi, al no cambiar para toda la órbita. Es importante destacar que el par de autovalores iguales a uno no se toman en cuenta para definir la estabilidad de la órbita.

2.2.7 Variedades Invariantes

Basados en la sección anterior, cuando se posee una órbita periódica que tiene al menos un autovalor inestable se afirma que la órbita es inestable, esto da la posibilidad de que también existan autovalores estables dentro de la misma órbita. Lo anterior tiene muchas implicaciones, pues si se presenta un desvío de la órbita periódica inestable en la dirección del autovector inestable nos vamos a alejar de la órbita, ocurre lo contrario si se realiza en la

dirección estable. En caso de desviarnos en otra dirección vamos a tomar componentes de la dirección estable e inestable al mismo tiempo.

Todas las posibles trayectorias en la dirección del autovector inestable se les denomina campo invariante inestable X^U , en el caso del autovector estable se le denomina campo invariante estable X^S . [10]

2.2.8 Conexiones Homoclínicas y heteroclínicas

Una propiedad muy importante que poseen tanto las variedades invariantes estables como inestables es la capacidad de tener una intersección consigo mismas; es decir, si el campo invariante estable $X^S(p)$ del punto fijo p se propaga en el tiempo y tiene una intersección con el campo invariante inestable $X^U(p)$, se afirma que existe un punto homoclínico como se puede ver en la Figura 4.

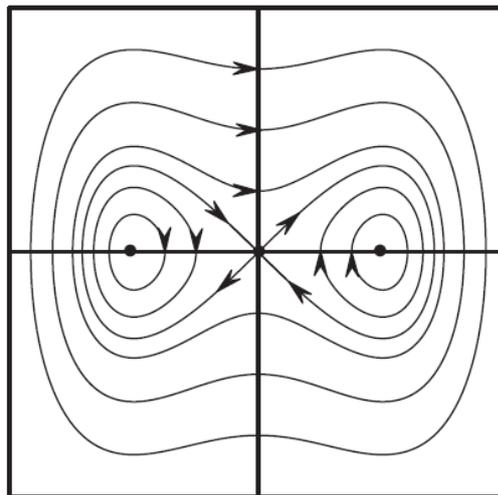


Figura 4 Conexión homoclínica en el sistema $x' = y, y' = -x^3 + x$ [18]

Ocurre algo parecido en el caso de puntos heteroclínicos, en este caso la intersección ocurre entre $X^u(p_1)$ y $X^s(p_2)$ de otro punto fijo en el sistema, como se muestra en la Figura 5.

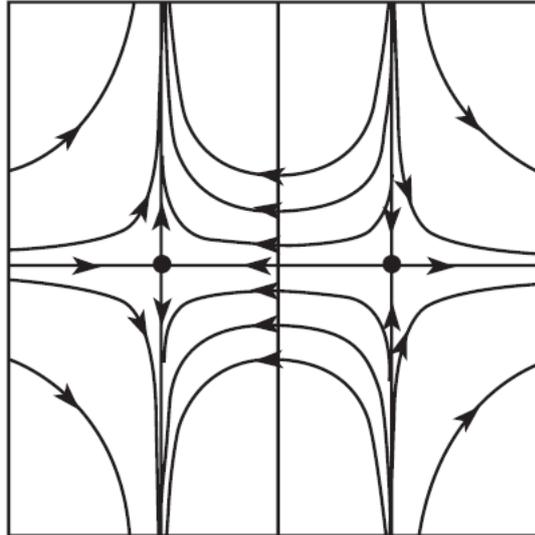


Figura 5 : Conexión heteroclínica en el sistema $x' = x^2 - 1, y' = -xy$ [18]

Lo anterior tiene muchas implicaciones pues se ha comprobado que existen tanto conexiones heteroclínicas en el sistema CRTBP [19] como homoclínicas [17]; es decir podemos encontrar trayectorias que nos permitan trasladarnos a diferentes puntos fijos en el sistema con un gasto mínimo de recursos.

2.2.9 Órbitas periódicas en PCRTBP

En esta sección se muestra el proceso para encontrar aproximaciones a las órbitas periódicas en el PCRTBP [15]. El primer paso es trasladar el origen del sistema de coordenadas a uno de los puntos fijos de Lagrange L_i ,

$$x' = x - (1 - \mu + \gamma)$$

$$y' = y$$

$$z = z$$

Donde γ representa la distancia del L_i al cuerpo primario más pequeño. Este paso afecta las ecuaciones del movimiento [15]:

$$\ddot{x}' - 2\dot{y}' - (1 + 2)x' = 0$$

$$\ddot{y}' + 2\dot{x}' + y' = 0$$

$$\ddot{z}' - 2z' = 0$$

Para la solución dentro del plano $x - y$ se obtienen dos raíces reales y dos imaginarias, estas raíces representan modos de movimiento, lo que permite encontrar un límite a la solución [15]

$$x = -kA_y \cos(\delta t + \theta)$$

$$y = A_y \sin(\delta t + \theta)$$

$$z = A_z \sin(\beta t + \varphi)$$

Estas ecuaciones permiten describir el movimiento en las cercanías de un punto de Lagrange, donde A_y representa las amplitudes del plano, A_z fuera del plano, δ la frecuencia del plano y β la frecuencia fuera del plano, si estos dos últimos valores son iguales o tienen un múltiplo en común (conmensuradas) generan órbitas periódicas.

De esta manera, se puede comprobar que existen diferentes tipos de órbitas periódicas alrededor de los puntos de Lagrange como lo son:

2.3.1 Lyapunov Orbits

Las órbitas de Lyapunov son órbitas planas; es decir, el componente A_z es cero. Son de gran utilidad pues se pueden utilizar para transferirse desde el L1 hasta L2 sin realizar mucho gasto de recursos [4] o permitir que una vela solar navegue el espacio para realizar experimentos [20].

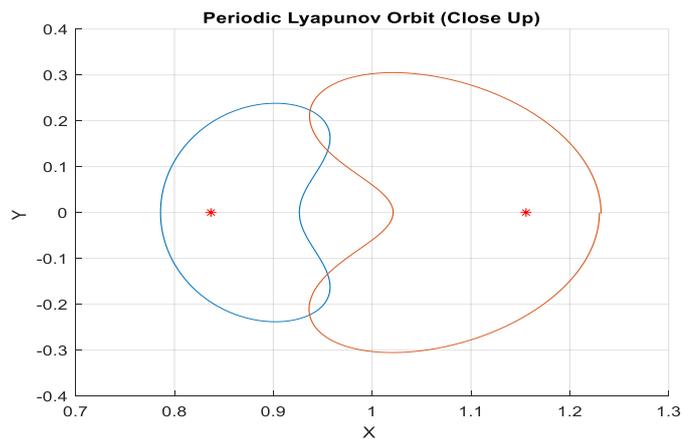


Figura 6 Lyapunov Orbit (Fuente: elaboración propia)

2.3.2 Halo

Las órbitas Halo son órbitas periódicas tridimensionales y se hallan cuando δ y β son iguales. Son de utilidad pues permiten una comunicación directa con la Tierra pues se pueden posicionar en el punto de Lagrange L1 permitiendo crear un punto de comunicación para misiones en la Luna. [21]

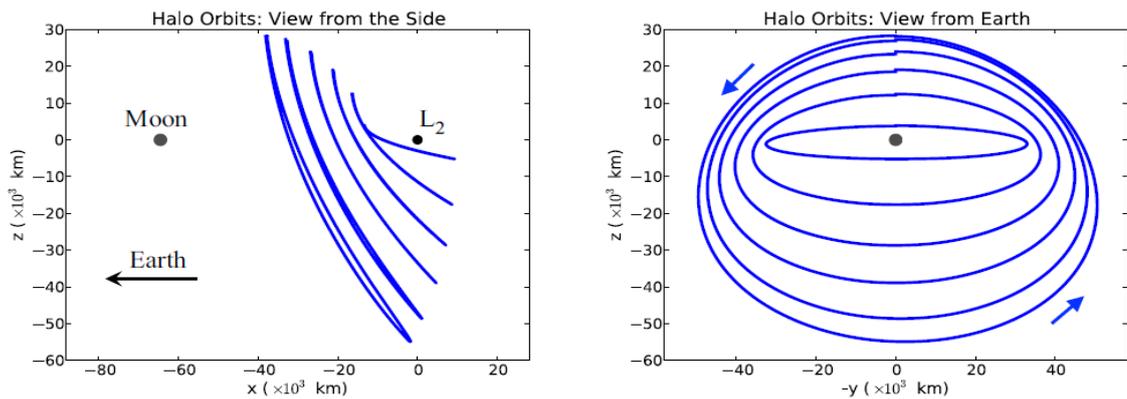


Figura 7 Órbitas periódicas Halo [15]

2.3.3 Distant Prograde Orbits

Son órbitas periódicas tridimensionales que se encuentran entre la familia de L1 y L2 de órbitas Lyapunov. Estas órbitas tienen bastante utilidad pues desde una órbita Lyapunov es sencillo pasar a estas órbitas [4].

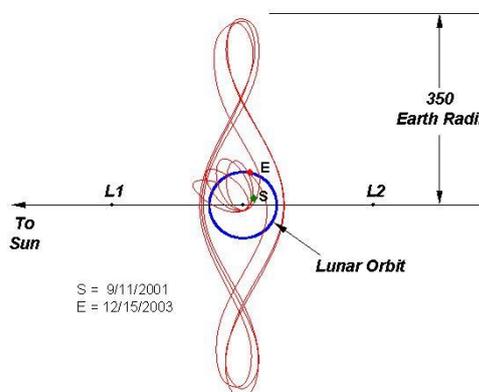


Figura 8 Distant Prograde Orbits [22]

2.3.4 Distant Retrograde Orbits

Son órbitas periódicas que existen alrededor del cuerpo más pequeño. Son de utilidad pues se pueden utilizar para transferir una nave espacial desde la Luna hasta Marte. [23]

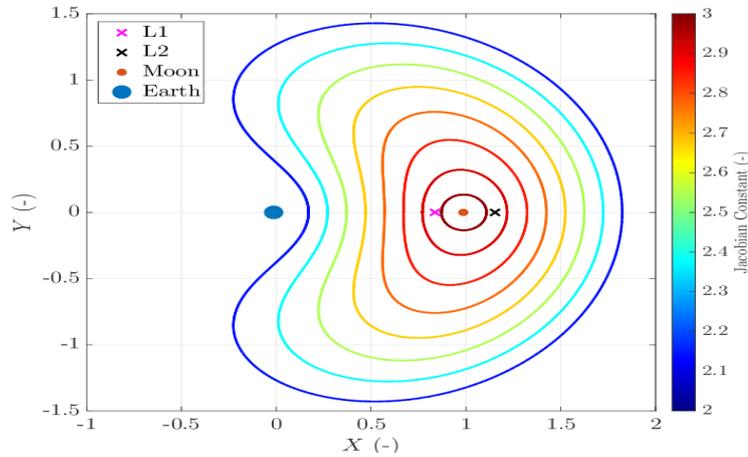


Figura 9 Distant Retrograde Orbits (DRO) [24]

En las siguientes secciones se analizará las diferentes misiones espaciales que han utilizado los conceptos anteriores, ya sea para ubicar una órbita periódica o trasladarse entre diferentes puntos en el espacio.

2.4 Misiones Espaciales

En los últimos años ha existido un gran interés en desarrollar trayectorias de baja energía, como lo demuestran las misiones ISEE-3, WMAP, SOHO, Genesis, WIND, GRAIL, entre otras. Estas misiones utilizan las características de la dinámica del sistema para transferirse a diferentes puntos minimizando el gasto de combustible pues en toda misión espacial esta es una restricción que se posee.

2.4.1 ISEE-3/ICE

Fue la primera misión en dirigirse a una órbita periódica Halo situada en el punto de Lagrange L_1 del sistema Sol-Tierra donde se realizó múltiples experimentos. El objetivo de ubicarse en una órbita periódica alrededor L_1 radica que en este punto no interfiere otro cuerpo celeste y permite tener una comunicación constante con la Tierra.

Título del Experimento
Solar Wind Plasma
Plasma Composition
Magnetometer
Plasma Waves
Low Energy Cosmic Waves

Tabla 2 Experimentos realizados a bordo de la ISEE—3/ICE. Fuente [25]

Posteriormente, la misión cambio de nombre a “International Cometary Explorer” (ICE) pues intercepto el cometa Giacobinni-Zinner utilizando las características de la dinámica del sistema [25].

2.4.2 WMAP

El principal objetivo de la misión Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) era revelar las condiciones existentes al comienzo del universo midiendo la radiación cósmica de fondo de microondas [26]. Para poder realizar la misión, esta se debía situar en una órbita Lissajous sobre el punto L2 Sol-Tierra, evitando la radiación que emiten otros cuerpos celestes, esto se logró utilizando las variedades invariantes que existen entre dos órbitas periódicas obteniendo una trayectoria de baja energía como se muestra en la Figura 10.

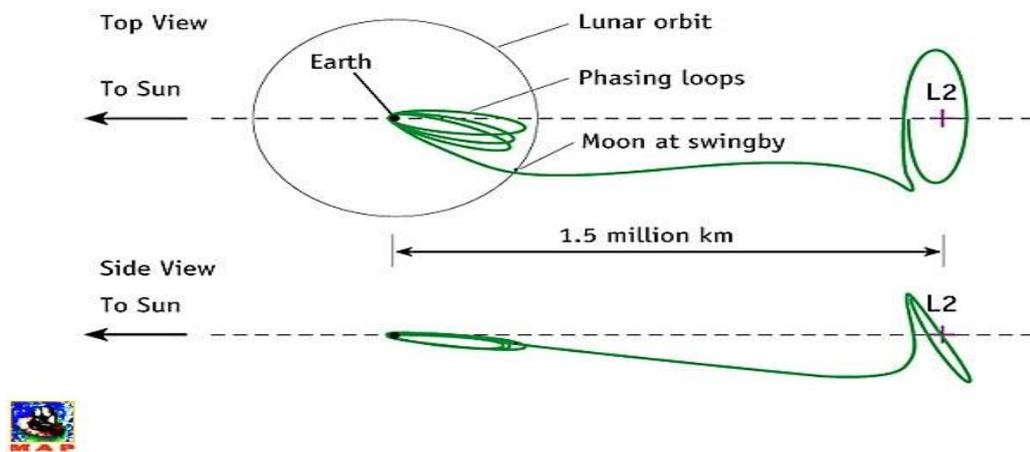


Figura 10 Órbita realizada por WMAP desde la Tierra hasta L2 [26]

2.4.3 SOHO

La misión Solar and Heliospheric Observatory tiene como objetivo analizar el viento solar, la estructura y dinámica interna del Sol [27]. Se encuentra en una órbita Halo sobre el punto de Lagrange L_1 del sistema Sol-Tierra, lo que le permite evadir la interferencia que genera el Sol al momento de comunicarse con la Tierra, además esta ubicación le permite tener una comunicación sin interrupciones con SOHO como lo muestra la Figura 11.

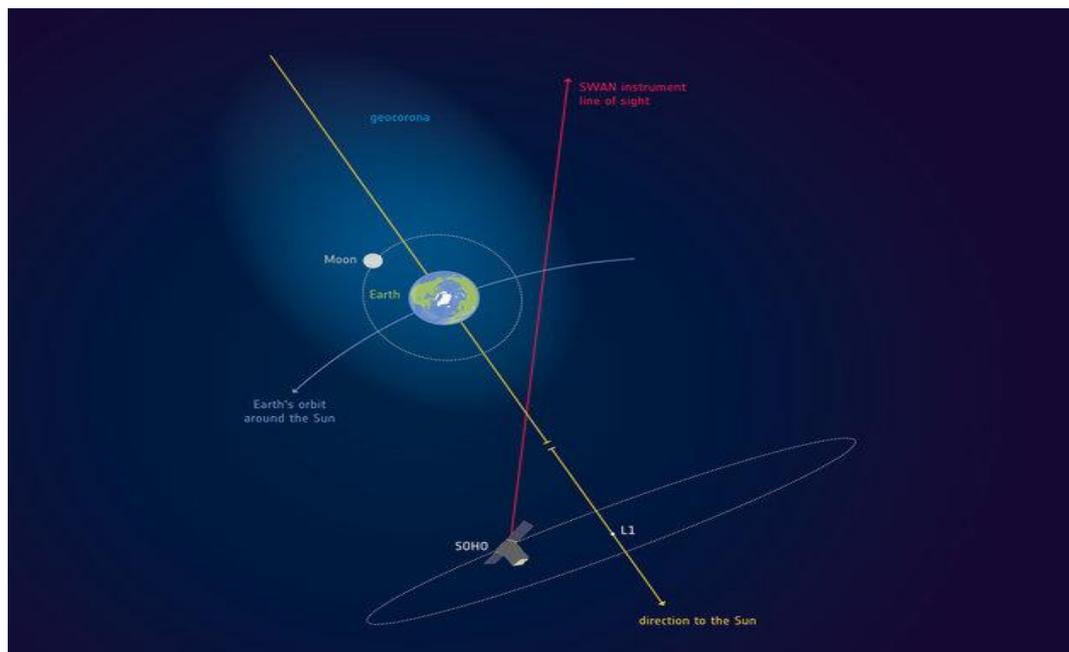


Figura 11. Órbita de SOHO alrededor del punto Lagrange L_1 [28]

2.4 Presión de Radiación solar

La presión de radiación solar es una fuerza que ejerce los fotones irradiados por el Sol sobre un satélite debido a la absorción o reflexión de estos [29]. Para determinar el valor de la presión de radiación solar necesitamos encontrar el flujo solar o la constante de radiación solar:

$$\phi = 1367 \frac{W}{m^2}$$

Aunque este valor se toma como una constante en realidad es variable con el tiempo [15] como se muestra en la Figura 12.

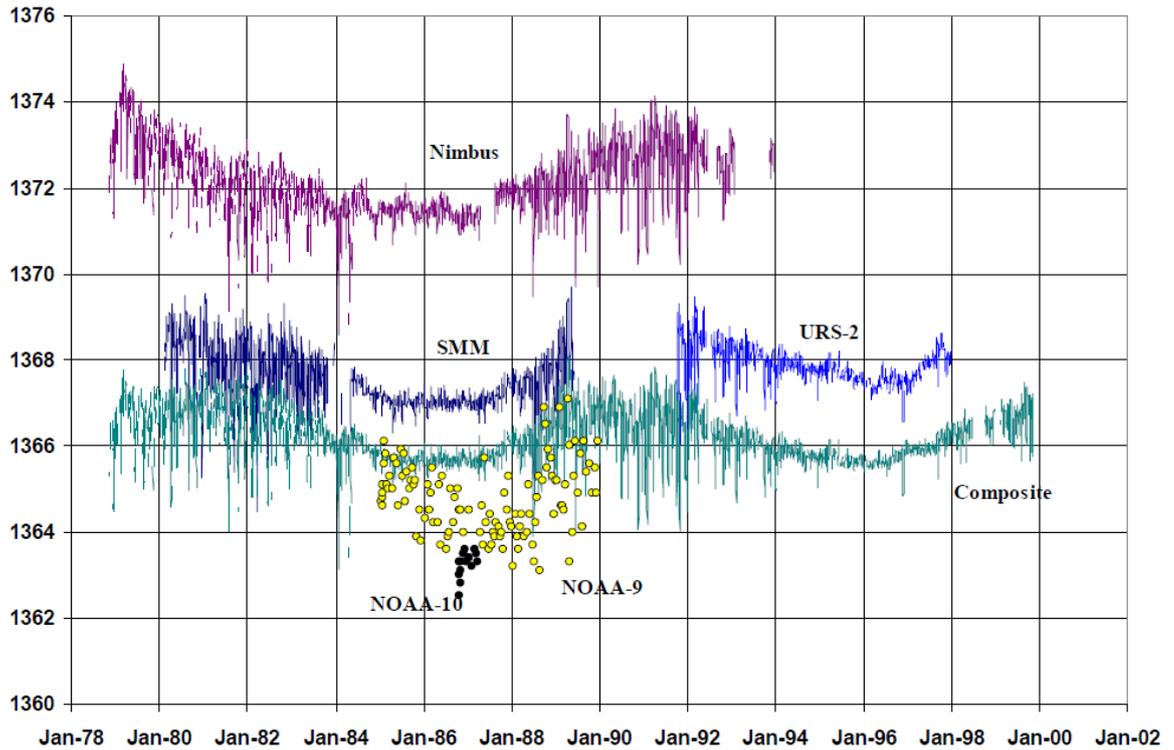


Figura 12. Variación del Flujo solar [15]

Debido a su alta variabilidad en este trabajo se utiliza el valor de $1367 \frac{W}{m^2}$. Esta constante permite encontrar la presión solar p_{srp}

$$E = mc^2$$

$$p_{srp} = mc = \frac{E}{c}$$

En este caso E es el flujo solar y c la velocidad de la luz:

$$p_{srp} = \frac{1367 \frac{W}{m^2}}{3 * 10^8 \frac{m}{s}} = 4.57 * 10^{-6} \frac{Ws}{m^3} = 4.57 * 10^{-6} \frac{N}{m^2}$$

Con estos valores se puede definir la fuerza que ejerce la presión de radiación solar [29]:

$$F_{srp} = -p_{srp} c_r \frac{A}{m} \frac{r_{sol}}{r_{sol}^3} AU^2$$

Donde c_r representa la constante de reflectividad del satélite este valor depende de los materiales del satélite.

Material	c_r
Panel Solar	1.21
Antena de Aluminio	1.30
Vela Solar de Aluminio	1.88

Tabla 3 Constante de Reflectividad según material [29]

La variable A representa el área del satélite, m la masa del satélite, r_{sol} la distancia del satélite al sol y AU es la unidad astronómica.

3. Objetivos concretos y metodología de trabajo

Este capítulo nos explica el objetivo general y los objetivos específicos que se van a desarrollar durante el transcurso de este trabajo.

3.1. Objetivo general

El principal objetivo de este trabajo es identificar el rango de perturbaciones que pueden hacer que una trayectoria de baja energía se desvíe. Para ello se utilizará dos perturbaciones: la presión de radiación solar y una perturbación aleatoria. Este análisis se realizará entre dos órbitas periódicas Lyapunov en el sistema Tierra-Luna.

3.2. Objetivos específicos

Para poder lograr el objetivo de identificar el rango de perturbaciones, se deben alcanzar varios objetivos específicos:

- Calcular los puntos de Lagrange.
- Generar una órbita periódica Lyapunov sobre L1 y L2.
- Generar las variedades invariantes para las órbitas periódicas Lyapunov.
- Utilizar las aplicaciones de Poincare para identificar intersecciones entre las variedades invariantes.
- Generar las trayectorias de baja energía.
- Analizar las perturbaciones en el sistema.

3.2. Metodología del trabajo

El primer paso que se debe alcanzar es calcular los cinco puntos de Lagrange en el sistema Tierra-Luna, pues a partir de los puntos L1 y L2 vamos a calcular las órbitas periódicas Lyapunov. Estos puntos permitirán conocer donde en el sistema Tierra-Luna la velocidad y aceleración es cero, y serán los puntos de partida para generar las órbitas periódicas Lyapunov con el método de disparo simple y continuación.

El paso anterior se realizará para tres orbitas Lyapunov con constante de Jacobi distintas $C = 3.0946$, $C = 3.1340$ y $C = 3.1367$. Después se deben generar las variedades invariantes estables e inestables de estas órbitas.

Según lo anterior, se utilizará la herramienta aplicaciones de Poincare para encontrar conexiones heteroclínicas entre las variedades invariantes de ambas órbitas, lo que permitirá identificar los puntos necesarios para generar la trayectoria de baja energía, por último, se analizará como las perturbaciones afectan estas órbitas.



Figura 13. Metodología del Trabajo (Fuente propia)

4. Desarrollo específico de la contribución

Este capítulo explica en detalle cada paso para completar los objetivos generales y específicos de este trabajo.

4.1 Calculo de los puntos de Lagrange

Basados en el sistema Tierra-Luna, se calcula los puntos de Lagrange hallando las raíces de las quinticas que se muestran a continuación:

$$L1 : x^5 - (3 - \mu)x^4 + (3 - 2\mu)x^3 - \mu x^2 + 2\mu x - \mu = 0$$

$$L2 : x^5 + (3 - \mu)x^4 + (3 - 2\mu)x^3 - \mu x^2 - 2\mu x - \mu = 0$$

$$L3 : x^5 + (2 + \mu)x^4 + (1 + 2\mu)x^3 - (1 - \mu)x^2 - 2(1 - \mu)x - (1 - \mu) = 0$$

Es importante definir el parámetro μ pues todas las ecuaciones del movimiento utilizadas en este trabajo están normalizadas, en nuestro caso $\mu = \frac{m_{Moon}}{m_{Earth} + m_{Moon}} = 0.012150113762633$.

Se utiliza el método de Newton para hallar las raíces de las ecuaciones, con respecto al valor inicial se aplicó dos métodos, el primero fue utilizar $r_{ini} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ como se recomienda [17], el segundo fue generar las gráficas en el intervalo deseado y se eligió valores cercanos a cero.

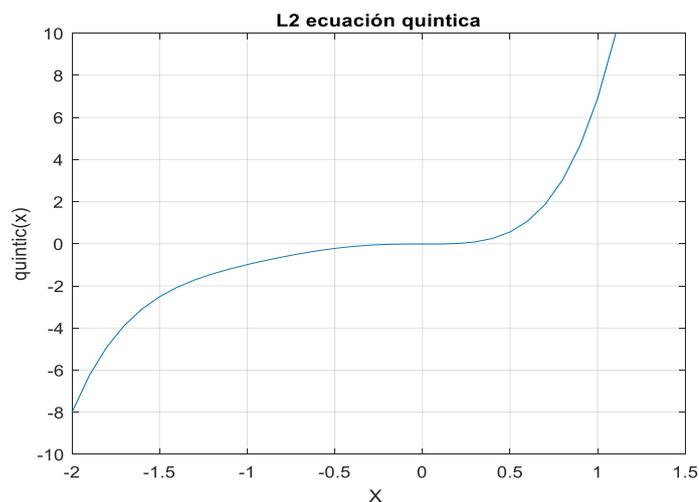


Figura 14 Gráfica de la quintica para L2. (Fuente: elaboración propia)

Este mismo procedimiento se repitió para los otros puntos, donde $r_{ini} = (\frac{2}{3})^{\frac{1}{3}}$ obtenía mayor precisión. El resultado de este proceso se muestra en la Tabla 4. Como se mencionó anteriormente, estos puntos ocurren cuando las velocidades y la aceleración de las ecuaciones de movimiento se igualan a cero.

$$0 = x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{r_2^3}$$

$$0 = y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

Estas fórmulas también nos permiten comprobar si los valores obtenidos son puntos de Lagrange. Al evaluar la función en los puntos obtenidos, se deberá obtener valores muy cercanos a cero, los resultados son representados por la columna $f(x) = 0$ en la Tabla 4 y en la Figura 15 se observa la ubicación en el sistema Tierra-Luna.

Puntos Lagrange Tierra-Luna	Unidades Normalizadas			$f(x) = 0$	
	x	y	z	x	y
L1	0.83691744	0	0	1.1102e-16	0
L2	1.15623430	0	0	-9.9920e-16	0
L3	-1.00506244	0	0	3.5148e-10	0
L4	0.487849886	0.8660254	0	-1.2490e-16	-3.3307e-16
L5	0.487849886	-0.8660254	0	-1.2490e-16	3.3307e-16

Tabla 4. Puntos de Lagrange

Los anteriores puntos de Lagrange son independientes de las constantes de Jacobi que utilizemos debido a que se ubican en el mismo sistema Tierra-Luna. En la siguiente sección se analizará cómo generar dos órbitas periódicas Lyapunov sobre los puntos de Lagrange L1 y L2 utilizando diferentes niveles de energía.

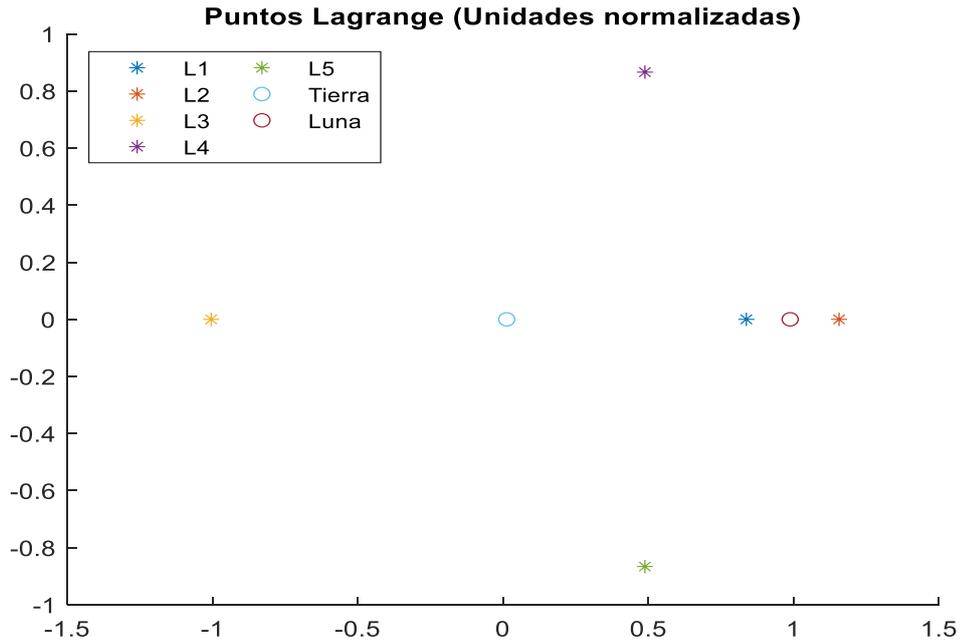


Figura 15 Puntos de Lagrange en el sistema Tierra-Luna (Fuente: elaboración propia)

4.2 Calculo de los Órbitas Periódicas Lyapunov

En este trabajo se utilizará el método de disparo simple y el de continuación para generar las órbitas periódicas Lyapunov sobre los puntos L1 y L2 de Lagrange.

Una restricción para hallar trayectorias de baja energía es tener órbitas periódicas con la misma constante de Jacobi o el mismo nivel de energía, para poder cumplir con esta restricción se debe generar una muestra de la familia de órbitas Lyapunov sobre los dos puntos L1 y L2 calculando para cada una su constante de Jacobi.

4.2.1 Metodología

En la sección 2.1.4 se detalló la implementación general del método de disparo simple, en este trabajo utilizaremos una pequeña variación de este, pero se obtendrá los mismos resultados.

El objetivo es encontrar órbitas periódicas que sean simétricas en el plano y , obteniendo las siguientes condiciones iniciales:

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix}$$

Después se integra numéricamente las ecuaciones del movimiento hasta que $y = 0$, pues es el punto donde se genera una órbita periódica, alcanzando:

$$X(t_f) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$\delta X(t_f) \approx \Phi(t_0, t_f) \delta X(t_0) + \dot{X}(t_f) \delta(t_f)$$

Donde $\delta X(t_f)$ representa la desviación del estado final dada por las variaciones hechas, $\delta X(t_0)$ la desviación al estado inicial, $\delta(t_f)$ la desviación del periodo debido al cambio en el estado inicial y $\Phi(t_0, t_f)$ es la matriz de transición de estados. Si se reemplaza las variables para este caso se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \delta x_f \\ \delta y_f \\ \delta \dot{x}_f \\ \delta \dot{y}_f \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \dot{y}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \delta(t_f)$$

En nuestro caso muchas de las variables son cero, siendo preferible hallar las fórmulas a las variables $\delta \dot{x}_f$ y $\delta \dot{y}_f$ directamente [4]:

$$\delta \dot{x}_f = \phi_{31} \delta x_0 + \phi_{34} \delta \dot{y}_0 + \dot{x}(t_f) \delta(t_f)$$

$$\delta \dot{y}_f = \phi_{41} \delta x_0 + \phi_{44} \delta \dot{y}_0 + \dot{y}(t_f) \delta(t_f)$$

Siendo x_0 fija su variación es cero $\delta x_0 = 0$ reduciendo la expresión a:

$$\delta \dot{x}_f = \phi_{34} \delta \dot{y}_0 + \dot{x} \delta(t_f)$$

$$\delta \dot{y}_f = \phi_{44} \delta \dot{y}_0 + \dot{y} \delta(t_f)$$

Como se desea que $\dot{x} = 0$, se puede definir $\delta \dot{x}_f = \dot{x}$ y $\delta \dot{y}_f = 0$ dado que la órbita es simétrica en el plano y :

$$\dot{x} = \phi_{34} \delta \dot{y}_0 + \dot{x} \delta(t_f)$$

$$0 = \phi_{44} \delta \dot{y}_0 + \dot{y} \delta(t_f)$$

Despejando $\delta(t_f)$ se obtiene:

$$\delta(t_f) = -\frac{\phi_{44} \delta \dot{y}_0}{\dot{y}}$$

Reemplazando $\delta(t_f)$ conseguimos

$$\delta\dot{y}_0 = \left(\varphi_{3,4} - \frac{\ddot{x}\phi_{24}}{\dot{y}} \right)^{-1} \dot{x}$$

De esta forma, variamos \dot{y} para obtener $\dot{x} = 0$:

$$\dot{y} = \dot{y} - \delta\dot{y}_i$$

El anterior proceso solo funciona para amplitudes muy pequeñas en el orden de 10^{-4} , si se quiere obtener amplitudes más grandes se debe utilizar el método de continuación numérica. El método se basa en dos órbitas periódicas X_{p1} y X_{p2} y genera la propuesta de X_{p3} añadiendo la diferencia de $X_{p1} - X_{p2}$ al vector X_{p3} :

$$X_{p3} = (x_3 + (x_1 - x_2), 0, 0, V_3 + (V_1 - V_2))$$

Una muestra del resultado del proceso anterior se muestra en la Figura 16.

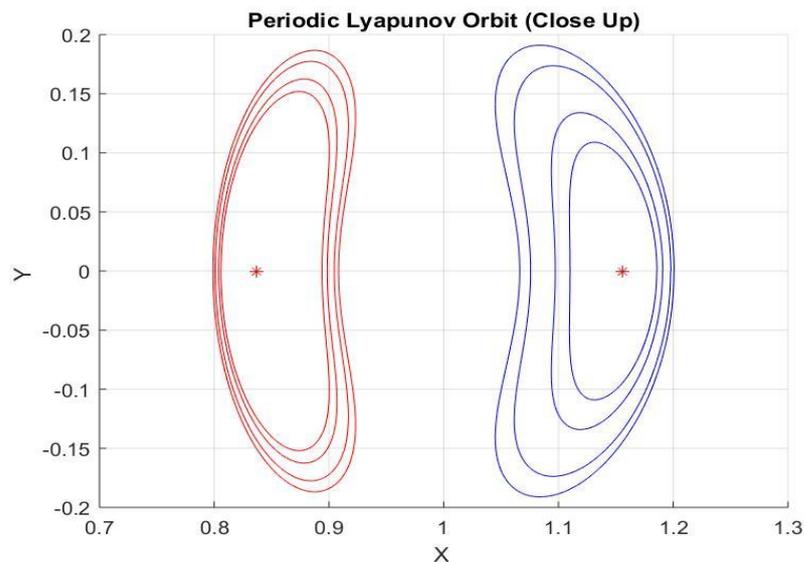


Figura 16 Muestra de la Familia de Órbitas Lyapunov sobre los puntos de Lagrange L1 (Rojo) y L2 (Azul). (Fuente: elaboración propia)

Durante cada paso del proceso anterior se almacenó la siguiente información:

- Amplitud de la Órbita.
- Constante de Jacobi.
- Periodo de la Órbita.
- Vector de posición y velocidad.

- Número de la iteración.

Esto nos permite generar gráficas, las cuales relacionan la constante de Jacobi con otras variables como la amplitud y el periodo.

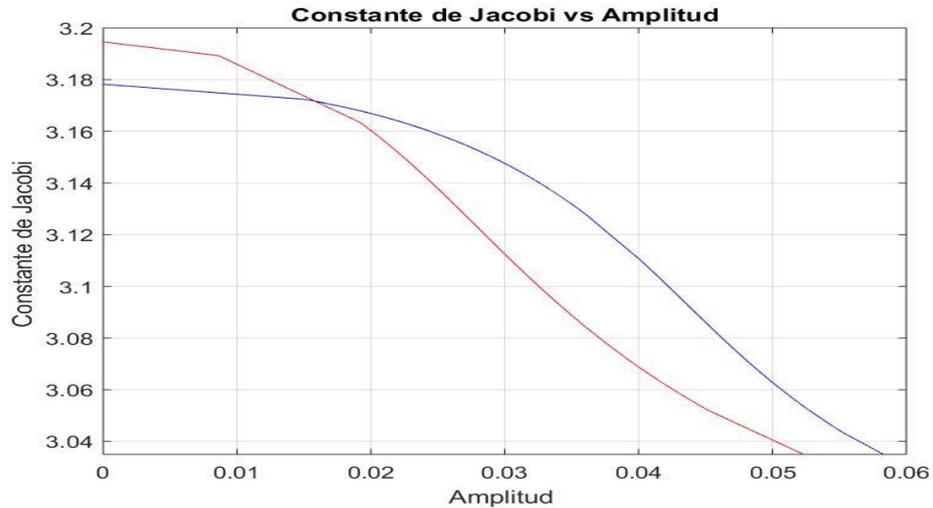


Figura 17 Constante de Jacobi de órbitas periódicas Lyapunov Roja L1 y Azul L2 (Fuente: elaboración propia)

Como vimos en el capítulo del Estado del Arte, una órbita periódica posee una amplitud y periodo, ambas se relacionan por medio de la constante de Jacobi, esta constante nos permite definir las regiones donde el movimiento no es posible, restringiendo el periodo y amplitud de las órbitas Lyapunov.

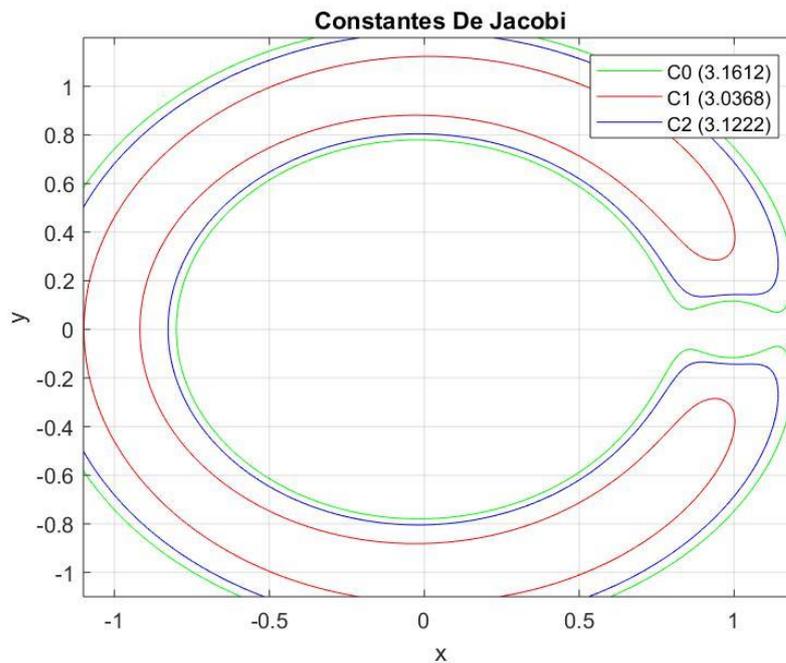


Figura 18. Análisis de crecimiento de Constante de Jacobi (Fuente propia)

Como se puede observar en la Figura 18. A una mayor constante de Jacobi el área donde se restringe el movimiento es más grande, por este motivo las órbitas periódicas Lyapunov tienen menos periodo y amplitud a mayores valores de la constante, el caso contrario ocurre cuando la constante es pequeña, pues existe mayor espacio para que la amplitud y periodo crezcan.

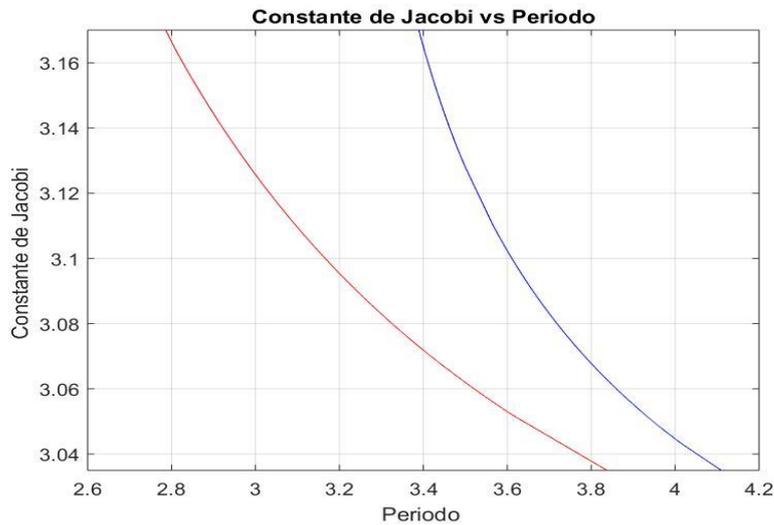


Figura 19 Constante de Jacobi de órbitas periódicas Lyapunov Roja L1 y Azul L2 (Fuente: elaboración propia)

4.2.2 Comprobación de los Órbitas Periódicas

Para comprobar que el proceso de generar las órbitas periódicas es correcto se puede seleccionar una condición inicial X y propagarla por el periodo de la órbita, la cual si es periódica debería llegar al mismo punto. Por lo cual, se selecciona una condición inicial $X_0 = [0.803317447531649, 0, 0, 0.333418772378925]$ teniendo una constante de Jacobi de 3.0946, si se integra numéricamente hasta $T_{periodo} = 3.205886$ se obtienen los siguientes resultados:

	x	y	Vx	Vy
$X_0 - X_f$	0.14e10-4	-0.07e10-4	0.32e10-4	-0.14e10-4

Tabla 5 Diferencias entre vector de posiciones y velocidades entre una órbita periódica

Como se observa los valores están cercanos a la condición inicial y generan una órbita como la que se muestra en la Figura 20.

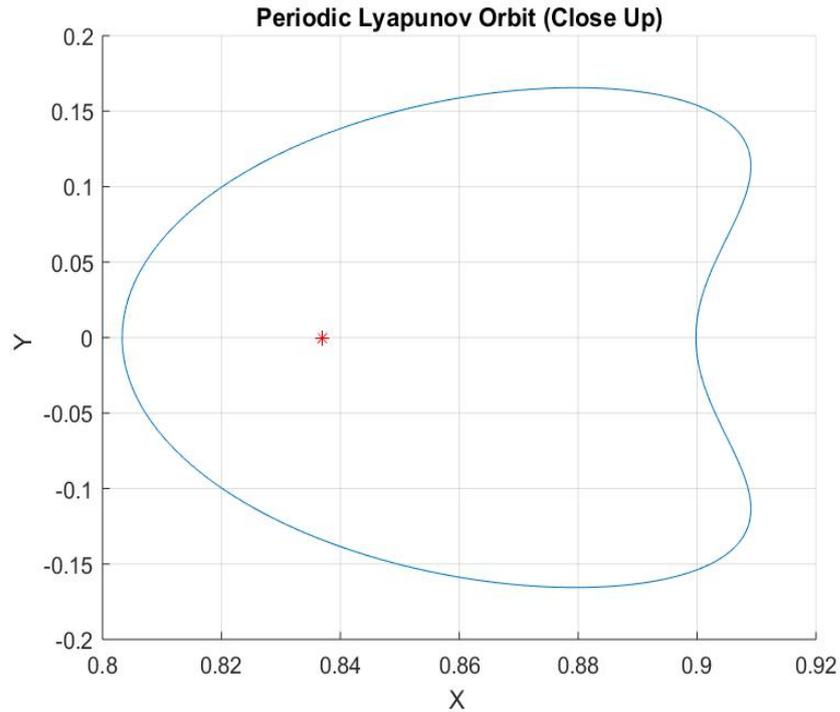


Figura 20 Órbita periódica Lyapunov (Fuente: elaboración propia)

En la siguiente sección, se mostrará como generar las variedades estables e inestables sobre las órbitas periódicas elegidas.

4.3 Generar Variedades Invariantes

Debemos calcular las variedades invariantes de dos órbitas periódicas Lyapunov ubicadas alrededor de los puntos de Lagrange L1 y L2, respectivamente, con el objetivo de identificar una trayectoria de baja energía entre estas dos órbitas. Esto se logra utilizando las características dinámicas del problema de PCRTBP, como se observó cada órbita periódica Lyapunov es inestable, por lo que posee un campo invariante estable y uno inestable.

Se puede utilizar las propiedades “heteroclínicas” del problema [19] para encontrar un campo invariante de L1 que se conecta con L2. De esta manera, se encontrará una trayectoria de baja energía que permite transportarnos entre dos puntos del sistema con un gasto de recursos bajo.

El procedimiento para calcular las variedades invariantes se llama “globalización de las variedades invariantes” [17] en el cual se debe:

- Encontrar la aproximación lineal al campo invariante estable e inestable basados en los autovectores de la matriz de monodromía.
- Hallar los estados iniciales en las direcciones de las variedades invariantes.
- Integrar numéricamente las ecuaciones del movimiento utilizando los estados iniciales.

En el primer paso, se genera la matriz de monodromía basados en propagar la STM por un periodo determinado T , después se puede calcular los autovalores y autovectores de la misma, como se detalló en la Sección 2.2.6, estos tienen la forma $(\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, 1, 1)$ donde $\lambda_1 > 1$ [17]; esto quiere decir que se tendrá un autovalor inestable λ_1 y otro inestable λ_2 , con sus respectivos autovectores estable Y^s e inestable Y^u , los autovectores nos permitirán generar las aproximaciones locales a las variedades invariantes utilizando la siguientes fórmulas [17]:

$$X_i^s = X_i + \varepsilon \frac{Y^s}{|Y^s|}$$

La anterior fórmula permite encontrar los estados iniciales en la dirección del campo invariante estable, para el caso inestable solo debemos utilizar el auto vector inestable:

$$X_i^u = X_i + \varepsilon \frac{Y^u}{|Y^u|}$$

Donde ε corresponde a la magnitud de desplazamiento, la cual está en el orden de 10^{-6} [17]. Es importante destacar que las anteriores fórmulas solo permiten encontrar aproximaciones locales a las variedades invariantes.

Por último, se utiliza estos estados iniciales para integrar numéricamente las ecuaciones del movimiento hacia adelante y atrás, esto nos va a permitir generar la aproximación a las variedades invariantes para las dos órbitas periódicas Lyapunov sobre los puntos L1 y L2 de Lagrange

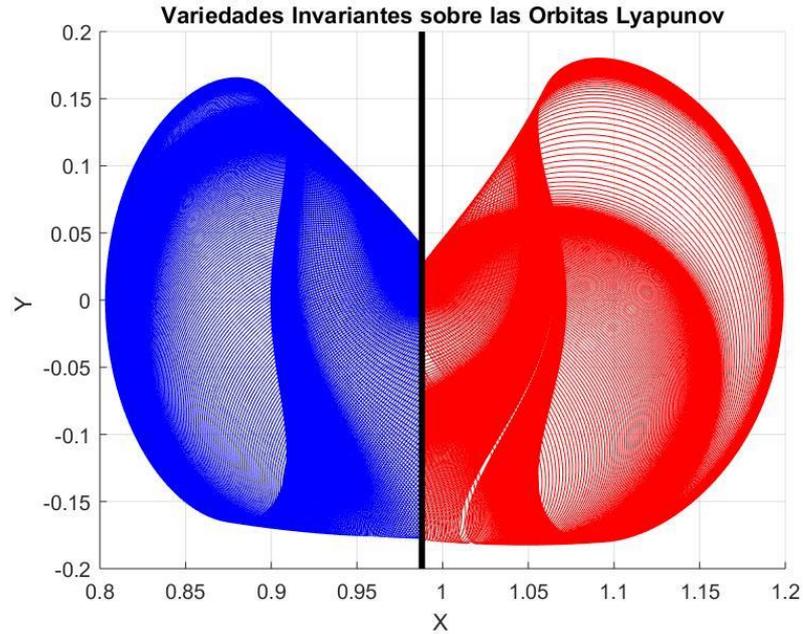


Figura 21 Variedades Invariantes Estables en órbita periódica Lyapunov con una constante de Jacobi de 3.0946. (Fuente: elaboración propia)

En la Figura 21, se muestra en color azul el campo invariante inestable X^u de la órbita periódica alrededor de L1 y con color rojo el campo invariante estable X^s para la órbita periódica L2 con una constante de Jacobi de $C = 3.0946$.

El anterior proceso se realizó tomando otros niveles de energía $C = 3.1340$ y $C = 3.1367$

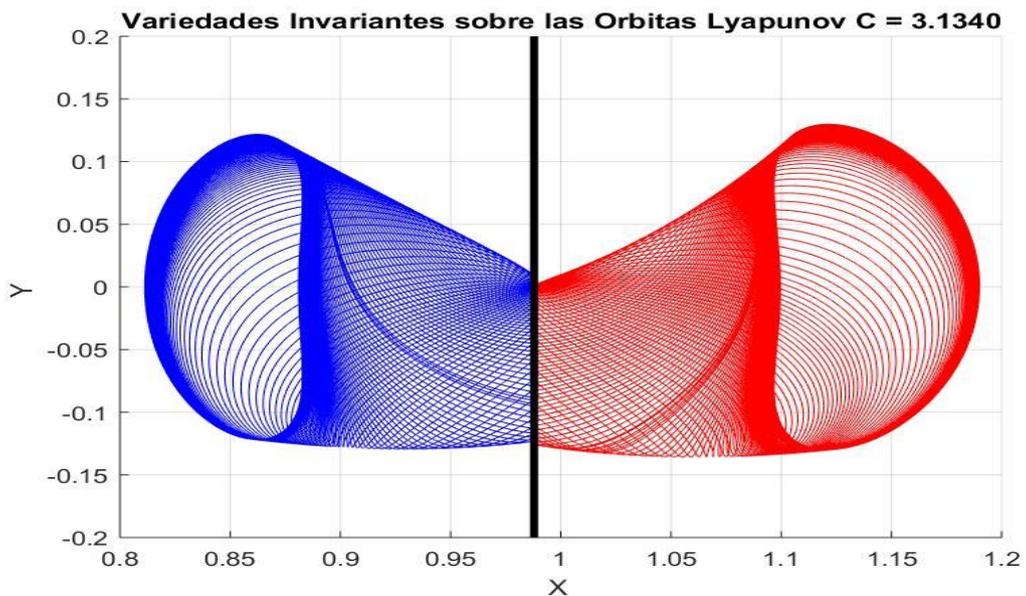


Figura 22 Variedades Invariantes Estables en órbita periódica Lyapunov con una constante de Jacobi de 3.1340. (Fuente: elaboración propia)

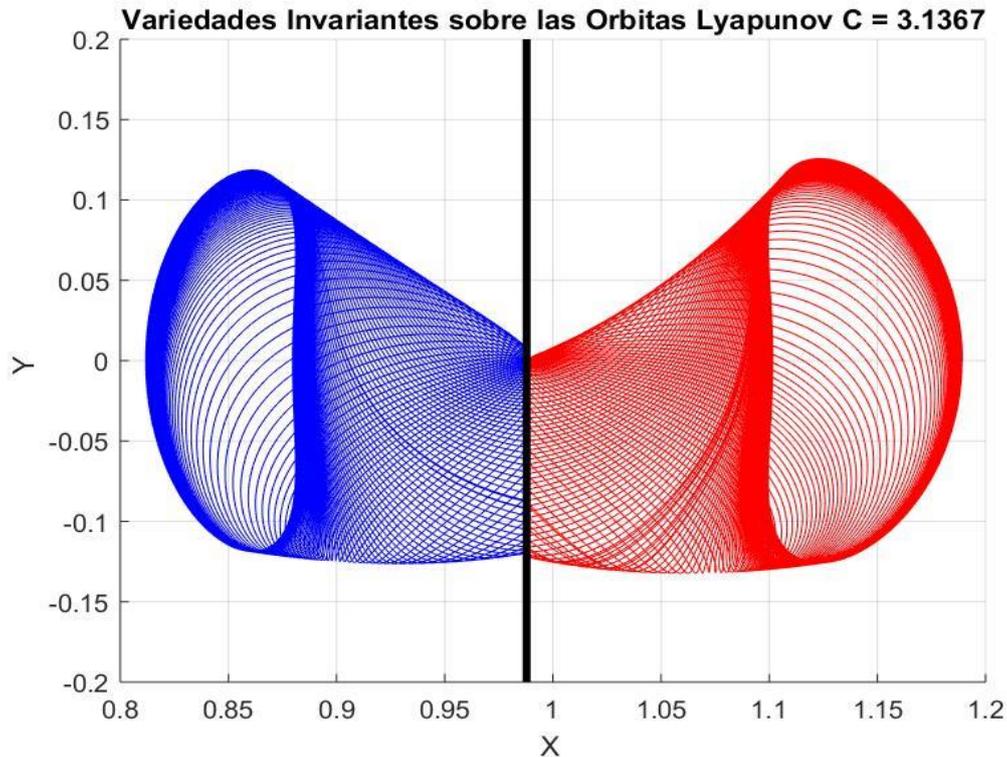


Figura 23 Variedades Invariantes Estables en órbita periódica Lyapunov con una constante de Jacobi de 3.1367. (Fuente: elaboración propia)

Para encontrar los puntos exactos donde ocurren las conexiones heteroclínicas se debe crear una aplicación de Poincare y buscar intersecciones entre las dos variedades invariantes, en la siguiente Sección se detalla este proceso.

4.4 Encontrar Intersecciones entre Variedades Invariantes

En la sección 4.3 se obtuvo los estados iniciales X_i^s , X_i^u que nos permiten hallar aproximaciones locales a las variedades invariantes, para encontrar las intersecciones entre las variedades invariantes debemos utilizar la aplicación de Poincare, en particular se creó una sección de Poincare donde $x = 1 - \mu$ y $y < 0$; es decir, todo punto que cumpla con las condiciones anteriores será guardado en una lista. El anterior proceso se realizó en Matlab llamando a la función “callPoincareMap”, esta función recibe como parámetros los estados iniciales X_i^s , X_i^u e integra numéricamente estos estados verificando los puntos que cumplen con la sección de Poincare almacenándolos en una variable local. El resultado del proceso anterior utilizando una constante de Jacobi $C = 3.0946$ se muestra en la Figura 24.

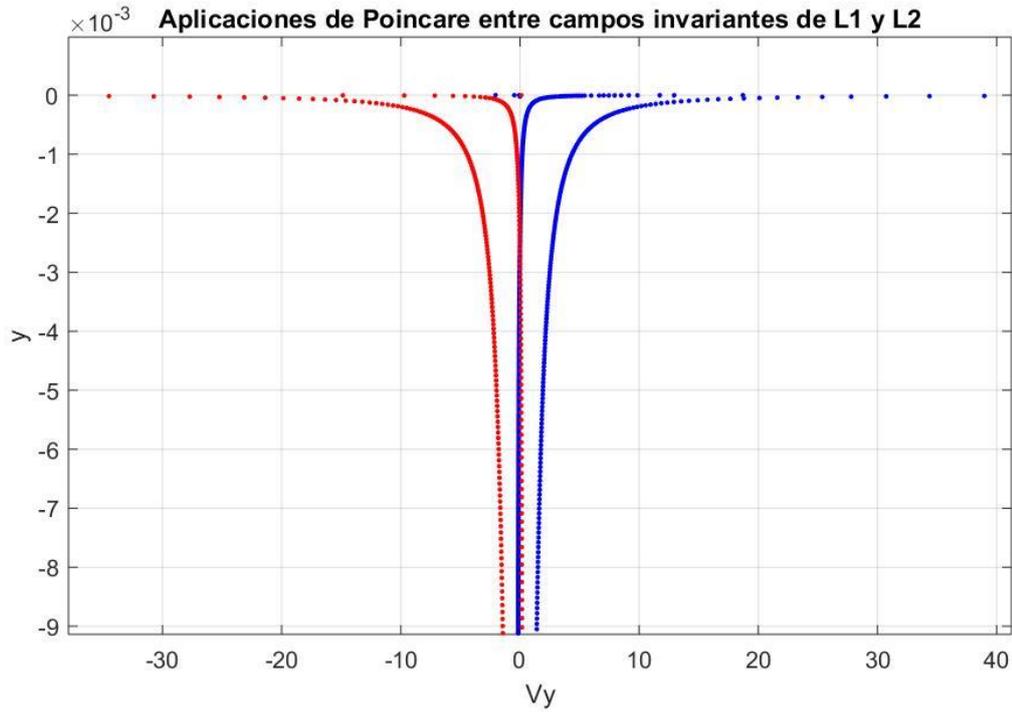


Figura 24 Aplicaciones de Poincare utilizando las variedades invariantes de órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable (Fuente: elaboración propia)

El anterior proceso se realizó tomando otros niveles de energía $C = 3.1340$ y $C = 3.1367$

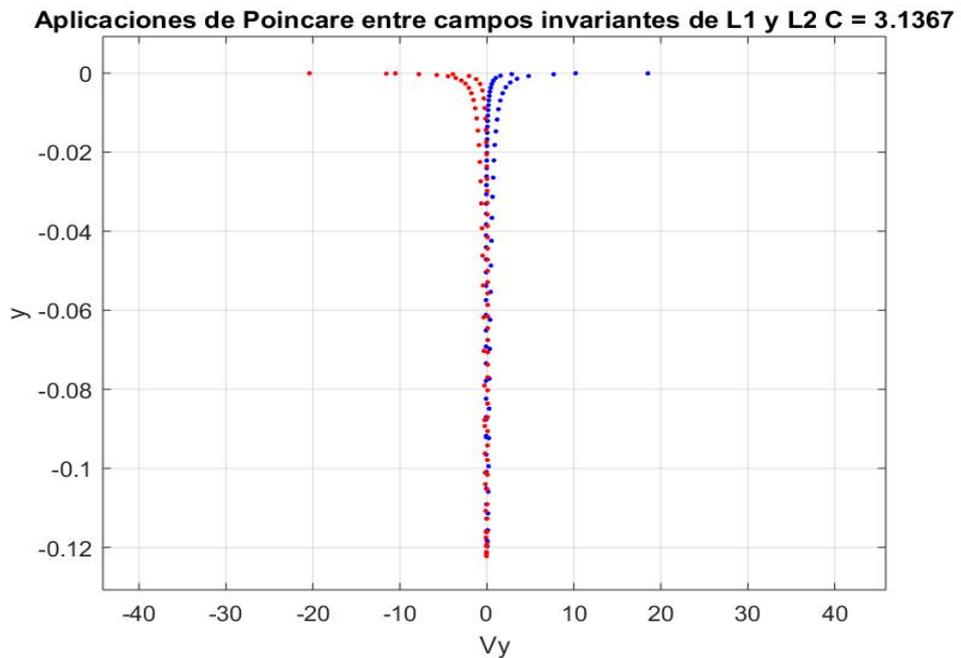


Figura 25 Aplicaciones de Poincare utilizando las variedades invariantes de órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable (Fuente: elaboración propia)

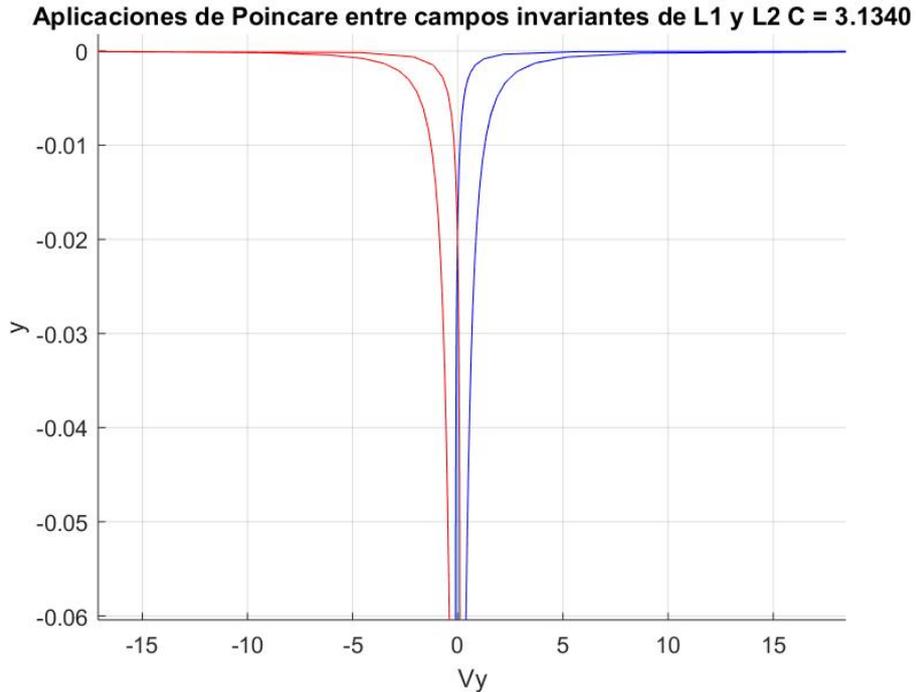


Figura 26 Aplicaciones de Poincare utilizando las variedades invariantes de órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable (Fuente: elaboración propia)

El siguiente paso es hallar que puntos de la aplicación de Poincare poseen la siguiente característica $y_s \approx y_u ; Vy_s \approx Vy_u$, estos son los puntos donde existe una conexión heteroclínica entre las variedades invariantes. El proceso anterior se realizó en Excel donde buscamos que puntos cumplieran con la restricción dentro de un rango de confianza de $1e - 6$ o menor.

En la siguiente sección se analizará cómo utilizar las conexiones heteroclínicas para generar una trayectoria de baja energía.

4.5 Encontrar Trayectoria de Baja Energía

Para generar la trayectoria de baja energía se necesita un estado inicial $X = [x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}]$, el cual se pueda propagar adelante y hacia atrás, creando una trayectoria que viaja entre las dos órbitas periódicas de Lyapunov. Se conoce y, \dot{y} , $x = 1 - \mu$ debido a la aplicación de Poincare, solo se requiere hallar \dot{x} , esto se realiza utilizando la ecuación de energía [17].

$$E = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - \frac{(x^2 + y^2)}{2} - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

$$\dot{x} = \sqrt{-\dot{y}^2 - 2 \left(-\frac{(x^2 + y^2)}{2} - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \right) + 2E}$$

Al obtener $X = [x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}]$ se puede integrar numéricamente hacia delante y atrás las ecuaciones del movimiento, obteniendo como resultado la trayectoria de baja energía deseada.

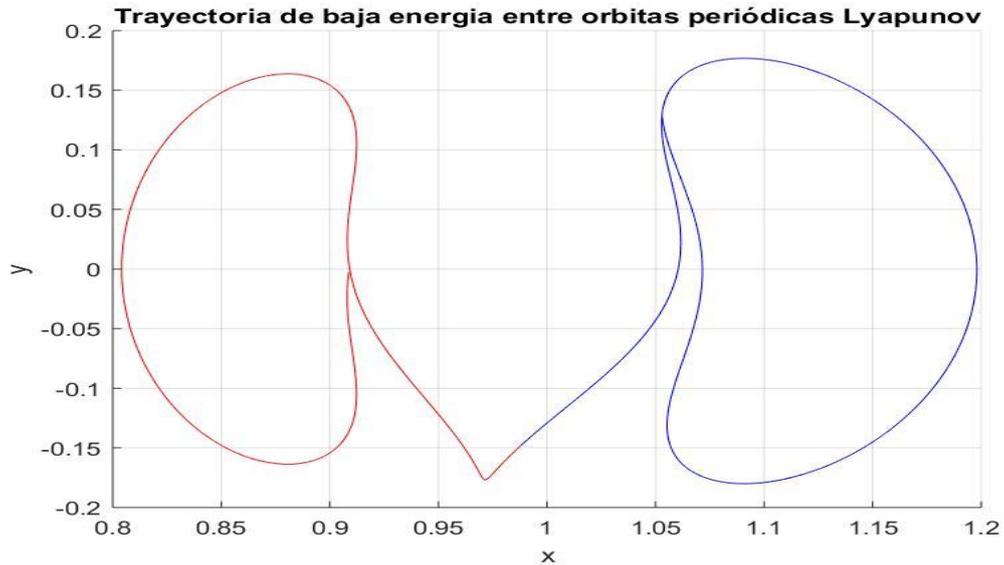


Figura 27 Trayectoria de baja energía sobre las órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constante de Jacobi 3.0946 (Fuente: elaboración propia)

Como se puede observar en la Figura 27 esta trayectoria viaja entre las dos órbitas periódicas Lyapunov.

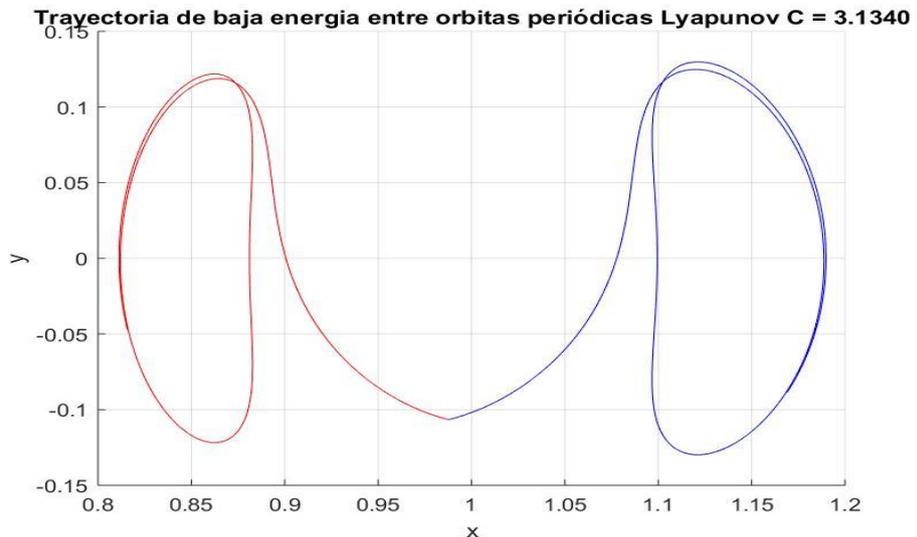


Figura 28 Trayectoria de baja energía sobre las órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constante de Jacobi 3.1340 (Fuente: elaboración propia)

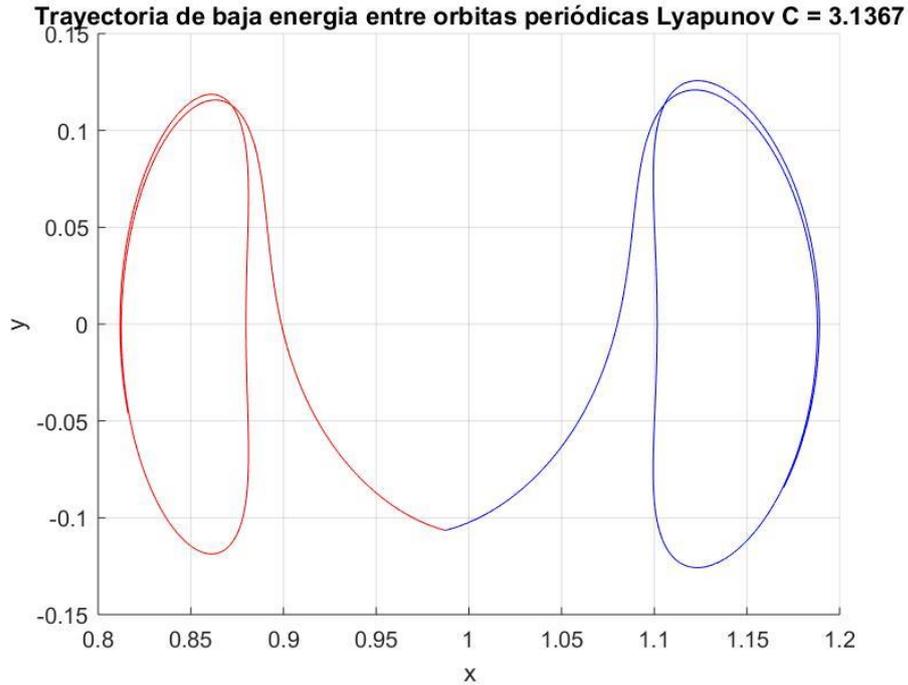


Figura 29 Trayectoria de baja energía sobre las órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constante de Jacobi 3.0946 (Fuente: elaboración propia)

La diferencia entre las órbitas de baja energía mostrada en la Figura 27, 28 y 29 se basa en los valores que toma la amplitud y el periodo de cada órbita; por tanto, al aumentar el valor de la constante de Jacobi o en nivel de energía, el periodo y amplitud disminuye como se observa en las figuras 27, 28 y 29.

4.6 Variación de Parámetros

En las secciones anteriores se detalló el proceso para generar las trayectorias de baja energía fijando el mismo nivel de energía para ambas órbitas Lyapunov. En esta sección se analizará qué ocurre cuando se utiliza diferentes niveles de energía.

Se utilizará $C = 3.1150$ y $C = 3.1455$ para generar las variedades invariantes y la aplicación de Poincare. Los resultados se muestran en la Figura 30, donde se observa la diferencia en las amplitudes y periodos de ambas orbitas debido al uso de diferentes niveles de energía, además se busca la existencia de conexiones heteroclínicas generando una aplicación de Poincare.

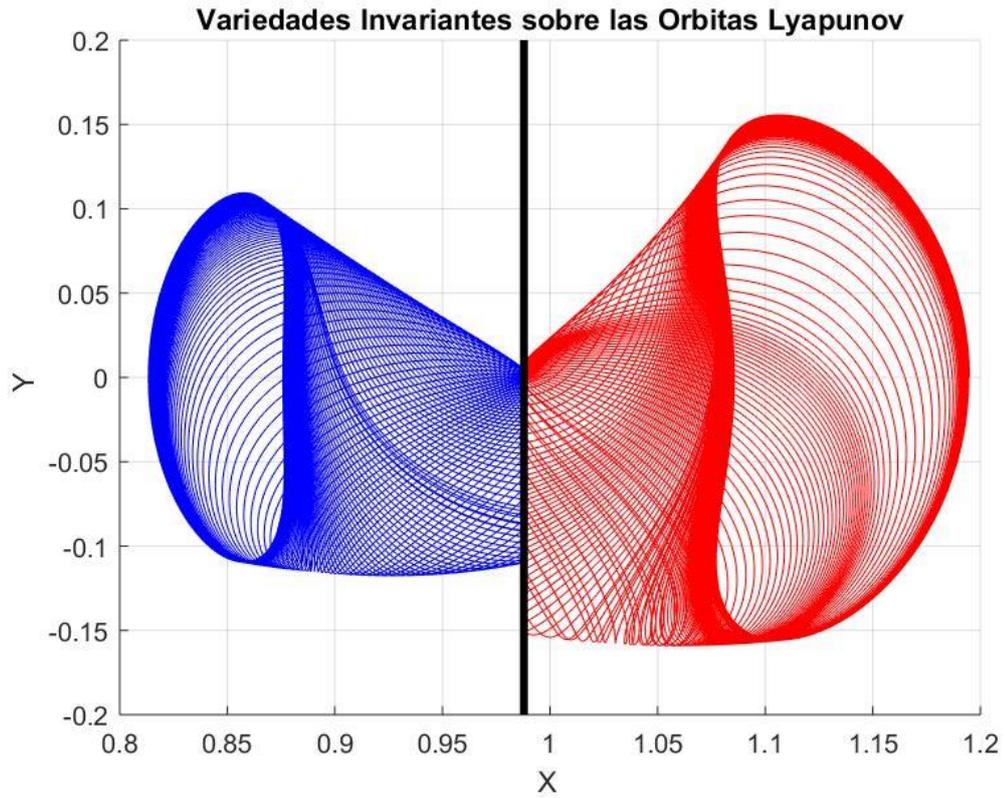


Figura 30 Variedades Invariantes Estables en órbita periódica Lyapunov con diferentes constantes de Jacobi (Fuente: elaboración propia)

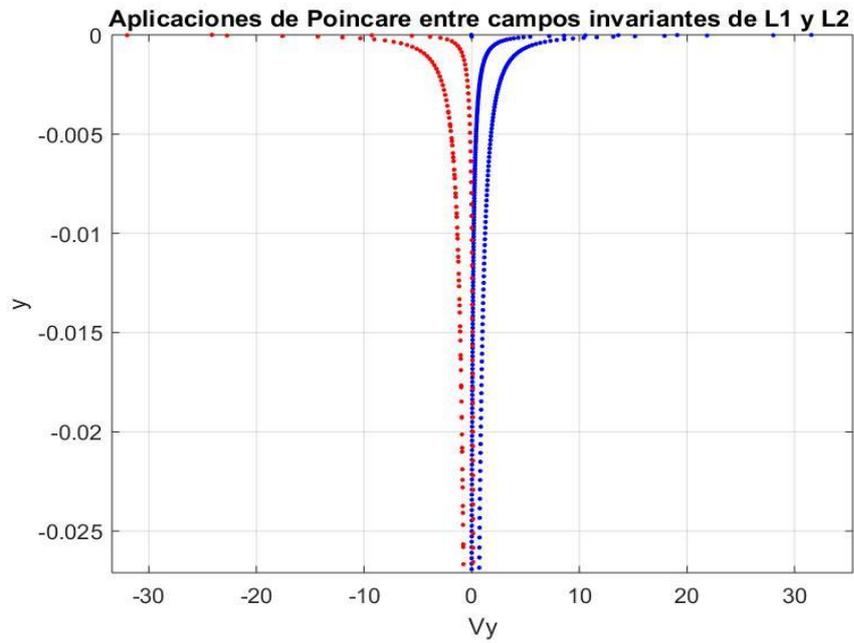


Figura 31 Aplicaciones de Poincare utilizando las variedades invariantes de órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable con diferentes constantes de Jacobi (Fuente: elaboración propia)

A primera vista la Figura 31 muestra la misma estructura de anteriores aplicaciones, pero al buscar valores que cumplan $y_s \approx y_u ; V y_s \approx V y_u$, no se hallan. Lo más cercano que se encuentra genera un salto en el valor de y como se observa en la Figura 32.

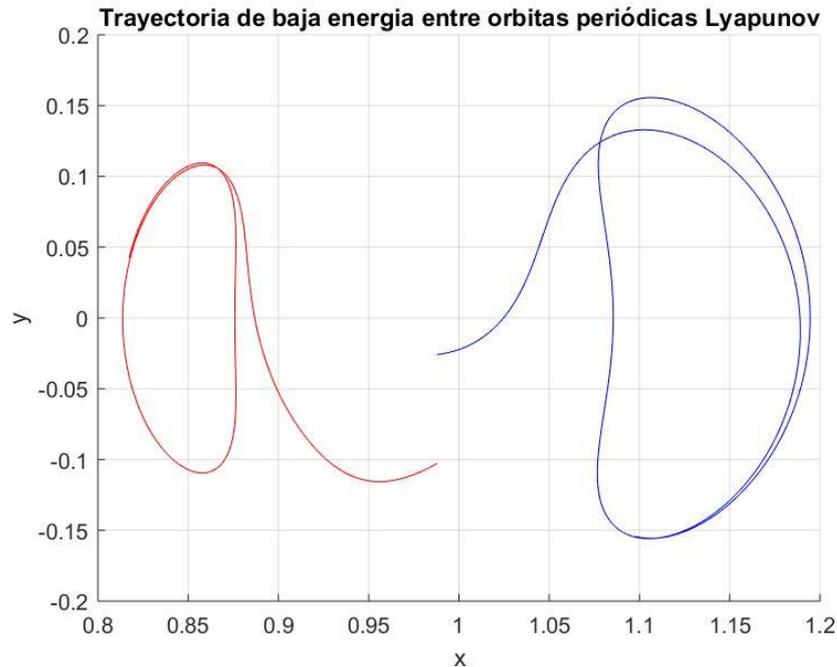


Figura 32 Trayectoria de baja energía sobre las órbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constantes de Jacobi diferentes (Fuente: elaboración propia)

Si la diferencia entre y_s, y_u no fuese tan grande se pueden realizar maniobras para alcanzar el punto y_s de la variedad estable, de hecho, se suele utilizar este procedimiento en misiones espaciales cuando por restricciones de la misión no se posee el mismo nivel de energía en ambas órbitas periódicas [4].

4.7 Análisis de Perturbaciones

Después de encontrar la trayectoria de baja energía se implementaron dos tipos de perturbaciones:

- Presión de Radiación Solar.
- Perturbación aleatoria.

Con el objetivo de encontrar hasta que rango de valores la órbita de baja energía seguía existiendo.

4.7.1 Presión de radiación solar

La radiación solar comprime fotones, aunque estos últimos no poseen masa si poseen energía y momento [16], lo cual genera una fuerza cuando estas interactúan con el satélite, a la perturbación generada se le denomina presión de radiación solar y depende de tres variables: la masa del satélite, su superficie y la reflectividad (coeficiente de absorción dado por los materiales). En este trabajo se utiliza los siguientes parámetros para estos valores [29]:

- Área afectada por presión solar: 110.5
- Masa del satélite: 8000 kg
- Coeficiente de reflectividad: 1.21 – 1.88

Se toma el área del satélite y su masa como valores fijos, y variamos el coeficiente de reflectividad o absorción del satélite, este coeficiente depende del material utilizado.

Material	ϵ	C_r
Panel Solar	0.21	1.21
Antena de Alta Ganancia	0.30	1.30
Vela Solar	0.88	1.88

Tabla 6. Tipos de Materiales y su Coeficiente de absorción C_r [29]

4.7.1.1 Radiación Solar en trayectoria con un nivel de energía $C = 3.0946$

Se utiliza la órbita de baja energía encontrada en la sección 4.5 y adicionamos la presión de radiación solar en el cálculo, obteniendo los siguientes resultados:

e	Diferencia Media entre Trayectorias sin Perturbación y con Perturbación				
	C_r	x	y	Vx	Vy
0,21	1,21	4,09E-03	5,98E-03	1,28E-02	1,79E-02
0,31	1,31	4,65E-03	6,43E-03	1,46E-02	2,03E-02
0,41	1,41	5,22E-03	6,79E-03	1,58E-02	2,33E-02
0,51	1,51	5,78E-03	7,09E-03	1,67E-02	2,54E-02
0,61	1,61	6,32E-03	7,31E-03	1,71E-02	2,80E-02
0,71	1,71	6,84E-03	7,49E-03	1,74E-02	3,04E-02
0,81	1,81	7,32E-03	7,62E-03	1,77E-02	3,20E-02
0,9	1,9	7,73E-03	7,71E-03	1,79E-02	3,34E-02

Tabla 7 Diferencia Media entre cada componente x y \dot{x} y y y \dot{y} de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación (fuente propia)

En la Tabla 7 se muestra la diferencia media entre cada componente del vector para toda la órbita generada; es decir, tomamos todos las posiciones x, y y las velocidades \dot{x}, \dot{y} de la órbita perturbada y hallamos la diferencia entre los mismos componentes x, y, \dot{x}, \dot{y} de la órbita sin perturbación, finalmente, realizamos la media por cada componente.

Al aplicar radiación solar solo se obtienen diferencias en el orden de $1e - 3$ o $1e - 2$. Estas diferencias hacen que la órbita cambie, pero se logra viajar entre las dos órbitas periódicas Lyapunov como se muestra en la Figura 33.

Desviación Estándar entre Trayectorias sin Perturbación y con Perturbación					
e	Cr	x	y	Vx	Vy
0,21	1,21	1,01E-02	1,98E-02	8,40E-02	6,43E-02
0,31	1,31	1,22E-02	2,10E-02	9,01E-02	7,54E-02
0,41	1,41	1,42E-02	2,18E-02	9,26E-02	8,56E-02
0,51	1,51	1,59E-02	2,24E-02	9,37E-02	9,43E-02
0,61	1,61	1,75E-02	2,28E-02	9,23E-02	1,02E-01
0,71	1,71	1,89E-02	2,31E-02	8,96E-02	1,10E-01
0,81	1,81	2,00E-02	2,33E-02	9,08E-02	1,14E-01
0,9	1,9	2,08E-02	2,35E-02	9,15E-02	1,18E-01

Tabla 8 Desviación Estándar entre cada componente x y \dot{y} de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación (fuente propia)

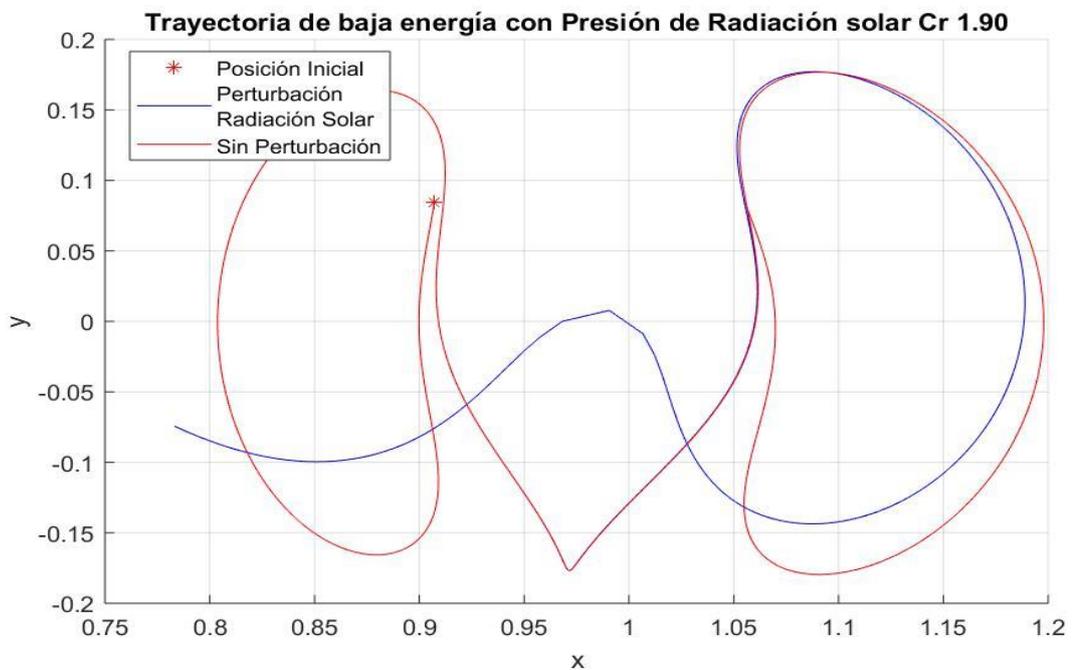


Figura 33 Trayectoria de baja energía utilizando presión solar (Fuente propia)

En la Tabla 8, se muestra la desviación de los datos con respecto a las medias encontradas en la Tabla 7, como se observa estos valores no varían mucho de la media pues están en el orden de $1e - 2$.

Además de hallar la diferencia media durante toda la órbita, también se calcula la diferencia con respecto al último punto x y \dot{x} y y de ambas órbitas, como se muestra en la Tabla 9. Estos valores se encuentran en el orden de $1e - 1$ hasta $1e - 4$ donde la posición x es la más afectada al incrementar el coeficiente de reflexión C_r .

Tabla 9 Diferencia entre el ultimo componente x y \dot{x} y y de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación (fuente propia)

Diferencia entre Trayectorias sin Perturbación y con Perturbación para la última posición						
e	Cr	x	y	Vx	Vy	
0,21	1,21	4,77E-04	4,08E-02	1,74E-01	1,46E-01	
0,31	1,31	1,50E-03	3,76E-02	1,75E-01	1,37E-01	
0,41	1,41	3,50E-03	3,44E-02	1,76E-01	1,28E-01	
0,51	1,51	5,51E-03	3,11E-02	1,77E-01	1,18E-01	
0,61	1,61	7,55E-03	2,78E-02	1,79E-01	1,09E-01	
0,71	1,71	9,61E-03	2,44E-02	1,80E-01	9,86E-02	
0,81	1,81	1,17E-02	2,09E-02	1,82E-01	8,80E-02	
0,9	1,9	1,36E-02	1,78E-02	1,83E-01	7,81E-02	

4.7.1.2 Radiación Solar en trayectoria con un nivel de energía $C = 3.1340$

Se desarrolla un análisis similar, utilizando un nivel de energía distinto $C = 3.1340$, como se muestra en la Tabla 10, los resultados se alejan de la órbita sin perturbación o ideal en una mayor magnitud que los encontrados en la Tabla 7.

Diferencia Media entre Trayectorias sin Perturbación y con Perturbación					
e	Cr	x	y	Vx	Vy
0,21	1,21	7,60E-02	1,09E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,31	1,31	7,60E-02	1,09E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,41	1,41	7,59E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,51	1,51	7,59E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,61	1,61	7,58E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,71	1,71	7,57E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,81	1,81	7,57E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,9	1,9	7,56E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01

Tabla 10 Diferencia Media entre cada componente x y \dot{x} y y de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación $C = 3.1340$ (fuente propia)

Además, la magnitud de la desviación estándar aumenta; es decir, se obtiene más incertidumbre cuando se aumenta el nivel de energía o se reduce la amplitud y el periodo de las órbitas.

Desviación Estándar entre Trayectorias sin Perturbación y con Perturbación					
e	Cr	x	y	Vx	Vy
0,21	1,21	1,01E-01	7,74E-02	5,58E-02	1,44E-01
0,31	1,31	1,01E-01	7,75E-02	5,58E-02	1,44E-01
0,41	1,41	1,01E-01	7,75E-02	5,58E-02	1,44E-01
0,51	1,51	1,01E-01	7,75E-02	5,58E-02	1,44E-01
0,61	1,61	1,01E-01	7,75E-02	5,58E-02	1,44E-01
0,71	1,71	1,01E-01	7,75E-02	5,58E-02	1,44E-01
0,81	1,81	1,00E-01	7,75E-02	5,58E-02	1,44E-01
0,9	1,9	1,00E-01	7,75E-02	5,58E-02	1,44E-01

Tabla 11 Desviación Estándar entre cada componente x y \dot{x} y y y \dot{y} de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación (fuente propia)

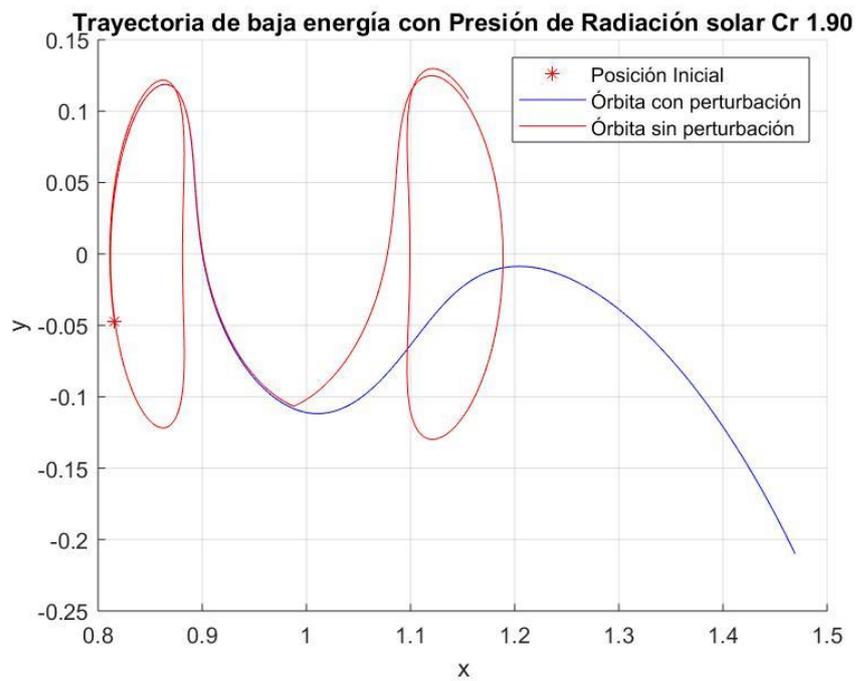


Figura 34 Trayectoria de baja energía utilizando presión solar $c = 3.1340$ (Fuente propia)

4.7.2 Perturbación Aleatoria

En este caso se añade valores aleatorios a cada uno de los componentes de la aceleración $A_{xtotal} = A_x + A_p \cos(\theta)$; $A_{ytotal} = A_y + A_p \sin(\theta)$ durante toda la trayectoria. El valor A_x, A_y representan los componentes de aceleración sin perturbación, A_p es un valor fijo, y θ es un valor aleatorio entre 1 y 2π ; es decir, se amplía la magnitud de la aceleración por un valor fijo A_p pero la dirección θ es aleatoria. Al utilizar una perturbación de forma aleatoria se logra abstraer todas las posibles perturbaciones en una sola y así hallar hasta que rangos se destruye la órbita de baja energía.

Al añadir un valor aleatorio a la definición de la función, en las ecuaciones del movimiento se generan espacios donde la función no es diferenciable creando problemas para métodos de integración numérica como Runge-Kutta, para resolver este problema se genera una interpolación utilizando los valores aleatorios; concretamente, generamos 20 valores aleatorios por cada órbita, luego utilizamos la función "spline" de Matlab para crear la interpolación entre los valores aleatorios, más tarde, el valor aleatorio θ es tomado de la interpolación creada, este proceso nos permite tener valores aleatorios y al mismo tiempo la función es diferenciable para todo el periodo calculado.

Para analizar el efecto que tiene la perturbación aleatoria en una trayectoria de baja energía se toma una muestra de 10.000 órbitas, donde cada órbita posee un valor de θ basado en la función de interpolación, para después hallar la diferencia entre el último vector x y \dot{x} y el vector de una órbita sin perturbación; lo anterior, nos permite identificar si se cumple el objetivo de transportarse entre dos órbitas periódicas Lyapunov. Además, se escogió una zona, la cual nos indicará cuantas órbitas estarán cerca de alcanzar el último vector x y \dot{x} dado por la órbita sin perturbación.

4.7.2.1 Perturbación Aleatoria en trayectoria con un nivel de energía $C = 3.0946$

La Tabla 12 muestra la media de diferencias entre el último vector de la órbita sin perturbación y con perturbación aleatoria, como se observa los valores obtenidos son bastante grandes en magnitud para todas las variables x y \dot{x} ; es decir, la perturbación aleatoria causa una gran divergencia con respecto a una trayectoria sin perturbación como se observa en la Figura 35.

Se encuentran resultados similares en la Tabla 13, donde se muestra la cantidad de veces que el vector final estuvo dentro de la zona definida por el intervalo x : [1.04, 1.08] y y : [0, 0.1], esto indica que la probabilidad de llegar a una zona deseada es de 0.029% utilizando una perturbación aleatoria.

Media de ultimo vector de la Trayectoria entre Perturbación y Sin Perturbación					
Ap	x	y	Vx	Vy	# trayectorias
1,E-05	0,2699163	0,8129327	0,3668544	0,6677267	10.000
1,E-04	1,3629112	1,281692279	0,933777191	0,62759746	10.000

Tabla 12 Diferencia Media entre último vector de Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbaciones $c = 3.0946$ (fuente propia)

Ap	# trayectorias Zona	# trayectorias
1,E-05	29	10.000
1,E-04	3	10.000

Tabla 13 Numero de trayectorias que están en la zona (fuente propia)

Desviación Estándar de última posición de la Trayectoria					
Ap	x	y	Vx	Vy	# trayectorias
1,E-05	0,43970	0,71401	0,51606	0,32151	10.000
1,E-04	0,78693	1,17027	0,95825	0,28349	10.000

Tabla 14 Desviación estándar entre último vector de Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbaciones $C = 3.0946$ (fuente propia)

Es importante destacar que los resultados obtenidos utilizaron una magnitud de la aceleración A_p de $1e - 5$ y $1e - 4$, estos valores son en unidades de tiempo y distancia normalizadas, si se quisiera transformar en unidades $\frac{km}{s^2}$, se debe tener en cuenta que una unidad normalizada de distancia equivale a $0.384467 \times 10^6 km$ y una unidad normalizada de tiempo equivale a $0.377496 \times 10^6 s$ [30], basado en lo anterior, las magnitudes de perturbación utilizadas son $2.6979 \times 10^{-11} \frac{km}{s^2}$ y $2.6979 \times 10^{-10} \frac{km}{s^2}$, respectivamente.

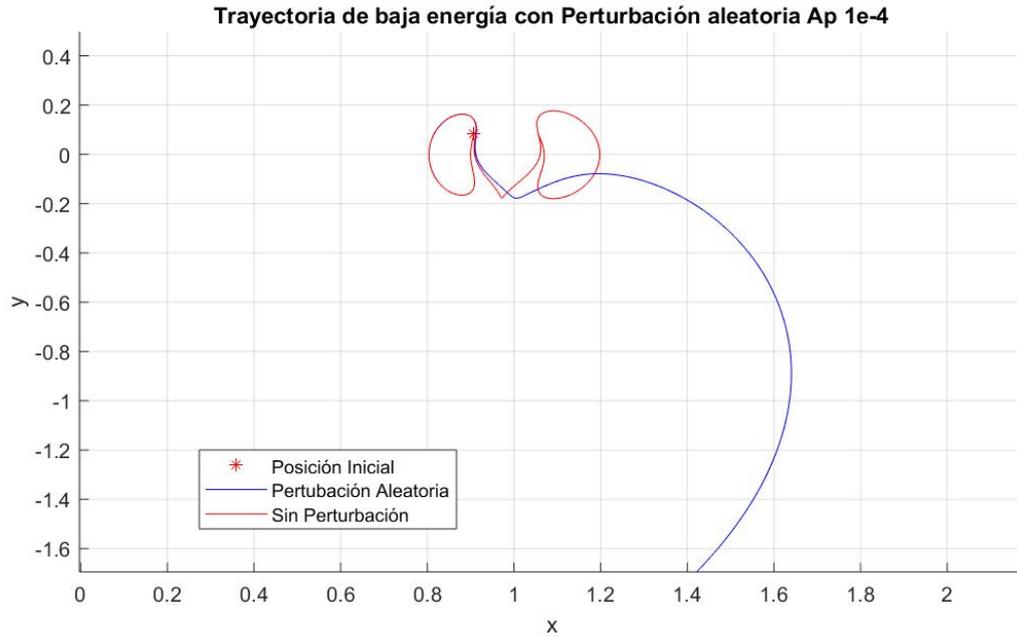


Figura 35 Trayectoria de baja energía utilizando Perturbación Aleatoria y un nivel de energía $C = 3.0946$ (Fuente propia)

4.7.2.2 Perturbación Aleatoria en trayectoria con un nivel de energía $C = 3.1340$

Se realiza el mismo procedimiento utilizando un nivel de energía $C = 3.1340$, se obtiene resultados similares de gran divergencia con respecto a la posición deseada como se observa en la Tabla 15.

Media de ultimo vector de la Trayectoria entre Perturbación y Sin Perturbación					
Ap	x	y	Vx	Vy	# trayectorias
1,E-05	0,7806514	1,7859884	1,5701024	0,6125374	10.000
1,E-04	1,0971255	1,207065804	1,01484904	0,38883991	10.000

Tabla 15 Diferencia Media entre último vector de Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbaciones $C = 3.1340$ (fuente propia)

Desviación Estándar de última posición de la Trayectoria					
Ap	x	y	Vx	Vy	# trayectorias
1,E-05	0,53829	0,89021	0,76887	0,34116	10.000
1,E-04	0,55043	0,89963	0,91153	0,30094	10.000

Tabla 16 Desviación estándar entre último vector de Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbaciones $C = 3.1340$ (fuente propia)

Ap	# trayectorias Zona	# trayectorias
1,E-05	11	10.000
1,E-04	20	10.000

Tabla 17 Numero de trayectorias que están en la zona (fuente propia)

El número de orbitas que terminaron dentro de la zona especificada por el intervalo x : [1.04, 1.08] y y : [0, 0.1] ha incrementado con respecto a la perturbación con menor nivel de energía, pero sigue siendo muy bajo, en general la perturbación aleatoria genera una gran divergencia llevando a la trayectoria a perder el objetivo como se muestra en la Figura 36.

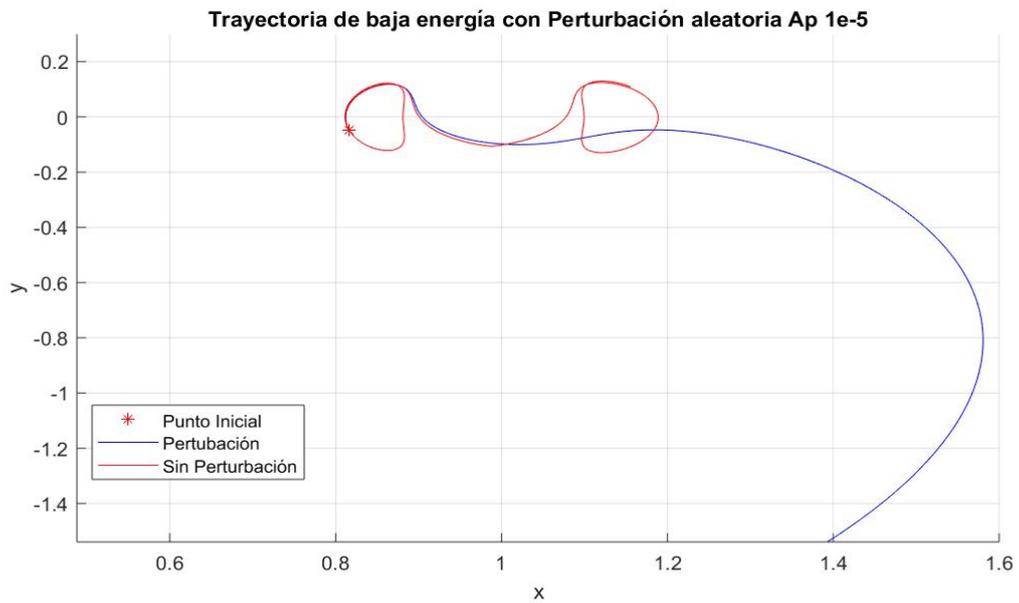


Figura 36 Trayectoria de baja energía utilizando Perturbación Aleatoria y un nivel de energía $C = 3.1340$ (Fuente propia)

5. Conclusiones y trabajo futuro

Este capítulo se mostrará las conclusiones obtenidas en este trabajo y las posibles líneas que se desprenden del mismo.

5.1. Conclusiones

Se destaca tres conclusiones: La primera, muestra como las perturbaciones si pueden causar que la trayectoria de baja energía se desvíe de gran manera aun si las magnitudes de la perturbaciones poseen valores muy bajos $2.6976 \times 10^{-11} \frac{km}{s^2}$, esto se debe a que las órbitas Lyapunov sobre L1 y L2 son inestables; es decir, si nos desviamos de ellas nos vamos a alejar exponencialmente. El anterior problema tiene solución pues como se puede observar en la Figura 33 esta perturbación no hace que la trayectoria desde $x = 1 - \mu$ hacia las órbitas periódicas Lyapunov se dañe, por lo que se puede utilizar técnicas de control de posición y velocidad cuando nos encontremos en las órbitas periódicas pues sabemos que velocidad debemos tener para mantenernos en ellas.

La segunda se basa en la diferencia de resultados obtenidos al cambiar los niveles de energía en las orbitas, se encontró que dicho cambio afecta la relación con las perturbaciones utilizadas, por ejemplo, cuando se emplea la radiación solar como perturbación, el cambio a una órbita con mayor energía generó una mayor divergencia en la órbita.

Por último, se encontró los rangos de valores en los cuales una órbita de baja energía se pierde al aplicar dos tipos de perturbaciones, además, se descubrió la necesidad de emplear métodos correctivos de órbita durante una misión espacial, pues las perturbaciones incluso con magnitudes muy pequeñas generan una gran divergencia.

5.2. Líneas de trabajo futuro

El presente trabajo se basó en el sistema Tierra-Luna para generar la trayectoria de baja energía sobre las órbitas Lyapunov, una posible línea de trabajo que se desprende es la creación de trayectorias de baja energía para puntos más distantes en el sistema solar; por ejemplo, podemos crear una conexión entre el sistema Sol-Tierra y el sistema Sol-Marte para hallar así trayectorias de baja energía entre la Tierra y Marte, de igual forma, se puede realizar para otros planetas como los son Júpiter y Saturno pues estos planetas pueden ser base de futuras estaciones espaciales.

6. Bibliografía

- [1] A. A. Siddiqi, «A Chronology of Deep Space and Planetary Probes 1958–2000,» *Monographs in Aerospace History* , nº 24, 2002.
- [2] A. A. Siddiqi, *Beyond Earth A CHRONICLE OF DEEP SPACE EXPLORATION, 1958–2016*, NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION, 2017.
- [3] R. E. Pritchett, «NUMERICAL METHODS FOR LOW-THRUST TRAJECTORY OPTIMIZATION,» 2016.
- [4] R. L. A. Jeffrey S. Parker, *LOW-ENERGY LUNAR TRAJECTORY DESIGN*, 2013.
- [5] K. K. F. Ralph B. Roncoli, «Mission Design Overview for the Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL) Mission,» 2010.
- [6] S. R. K. J. R. K. Iyengar, *Numerical Methods*, 2009.
- [7] A. C. Barbero, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, 2009.
- [8] J. Kiusalaas, *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*, Cambridge University Press.
- [9] W. Shen, *An Introduction to Numerical Computation*, World Scientific.
- [10] S. H. Strogatz, «NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS,» CRC Press, 2015.
- [11] M. D. :. T. C. F. H. Guatemala, *Maya Daykeeping : Three Calendars From Highland Guatemala*, 2009: University Press Of Colorado, Weeks, John M., Prager, Christian M., Sachse, Frauke.
- [12] C. Ptolemaus, *Mathematike Sintaxis*, 170.
- [13] N. Copernicus, *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, 1543.
- [14] Kepler, *Harmonices Mundi Libri V*, 1619.

- [15] D. A. Vallado, Fundamentals of Astrodynamics and Applications, Space Technology , 2013.
- [16] H. D. Curtis, Orbital Mechanics for Engineering Students (Aerospace Engineering), 2013.
- [17] W. L. M. M. E. R. S. Koon Sang, Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design.
- [18] S. S. D. R. Hirsh Morris, DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS, AND INTRODUCTION TO CHAOS, Elsevier, 2004.
- [19] W. L. M. E. , R. D. Koon Sang, «Heteroclinic Connections between Periodic Orbits and Resonance Transitions in Celestial Mechanics,» 2000.
- [20] S. H. R. N. Jeannette Heiligers, «Solar Sail Lyapunov and Halo Orbits».
- [21] J. S. P. G. H. B. a. N. D. K. Hill, A Lunar L2 Navigation, Communication, and Gravity Mission, 2006.
- [22] NASA, «https://www-istp.gsfc.nasa.gov/orbits/menu_orbits.html,» [En línea].
- [23] M. D. C. K. H. D. B. S. M. V. Davide Conte, «Earth-Mars transfers through Moon Distant Retrograde Orbits,» *Acta Astronautica*, vol. 143, pp. 372-379, 2018.
- [24] L. & L. M. Bucci, Coupled Dynamics of Large Space Structures in Lagrangian Points., 2016.
- [25] R. W. Farquhar, «The flight of ISEE-3/ICE: origins, mision history, and a legacy,» *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2001.
- [26] NASA, «NASA,» [En línea]. Available: <https://map.gsfc.nasa.gov/mission/>. [Último acceso: 18 10 2019].
- [27] NASA, «NASA,» [En línea]. Available: <https://soho.nascom.nasa.gov/about/about.html>. [Último acceso: 18 10 2019].
- [28] ESA,
«http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Earth_s_atmosphere_stretches_out_to_the_Moon_and_beyond,» [En línea].

- [29] G. Monderbruck, «Satellite Orbits, models, methods and applications,» Springer.
- [30] Y. C. J. F. C. S. Jianping Yuan, Low Energy Flight: Orbital Dynamics and Mission Trajectory Design, Springer, 2019.
- [31] J. D. Meiss, Differential Dynamical Systems, Revised Edition.
- [32] P. Robert, NUMERICAL METHODS FOR LOW-THRUST TRAJECTORY OPTMIZATION, 2016.

7. Anexos

7.1 Documento Formato Revista

Análisis de Perturbaciones En Trayectorias de Baja Energía

Perturbation Analysis in low-energy trajectories.

Juan Aguilar Varela

Universidad Internacional de la Rioja, Bogota, Colombia
juandavid@unir.com

Resumen— Este trabajo busca encontrar que rango de perturbaciones pueden hacer que una órbita de baja energía desaparezca entre dos órbitas periódicas Lyapunov, el anterior objetivo es importante para cualquier misión espacial debido a la influencia de las perturbaciones en su trayectoria. Para generar una trayectoria de baja energía, nos posicionamos en el sistema Tierra-Luna y utilizando las variedades invariantes de cada órbita periódica buscamos en que puntos estas variedades se intersecan dando inicio a la trayectoria de baja energía, a partir de esta trayectoria aplicamos dos tipos de perturbaciones, la primera es una perturbación aleatoria en cada uno de los componentes de la aceleración, de esta forma logramos encapsular diferentes perturbaciones en una sola y la segunda perturbación es la presión de radiación solar.

A partir de los resultados obtenidos encontramos que la presión de radiación solar causa que la trayectoria se pierda incluso utilizando diferentes coeficientes de reflectividad. Cuando utilizamos la perturbación aleatoria vemos que la órbita no se mantiene incluso utilizando magnitudes en el orden de $1e - 5$ o $1e - 4$, en este caso se genera divergencias más grandes que con la perturbación de radiación solar.

Los anteriores resultados rectifican que las órbitas periódicas Lyapunov son inestables por lo que un desvío en la dirección inestable nos va a alejar exponencialmente. Podemos concluir que será necesario aplicar métodos de control para que una nave espacial dentro de la trayectoria de baja energía se mantenga en ella.

Palabras clave— Mecánica Espacial, Perturbaciones, Sistemas Dinámicos, Trayectorias

Abstract— This work aims to find the range of values produced by a perturbation that could cause a low-energy orbit between two periodic Lyapunov orbits to disappear; the previous objective is essential for any space mission because the perturbations can cause the spacecraft to lose his trajectory. To do it, we position our problem in the Earth-Moon system, and using the manifolds of each Lyapunov periodic orbit, we can find at which points these manifolds intersect, forming the low energy trajectory between both orbits.

We applied two types of perturbations, the first one is a random perturbation in each component of acceleration, in this way we manage to encapsulate different types of perturbations in one and the second perturbation is the solar radiation pressure. From the results obtained, we found that solar radiation pressure causes the trajectory to diverge in a small amount.

When we use random perturbation, the orbit also diverges even using small magnitudes $1e - 5$ or $1e - 4$. The previous results confirm a periodic Lyapunov property which states that both orbits are unstable in our system causing that a small deviation in the unstable direction takes us exponentially away. We can conclude that it is necessary to apply control methods to maintain a spacecraft within the low energy path that remains in it.

Key Word — Dynamical Systems, Orbital Mechanics, Perturbations, Trajectories

I. INTRODUCCIÓN

Las orbitas de baja energía han sido muy utilizadas en diferentes misiones espaciales [1] [2] [3] durante varios años pues permiten realizar trayectorias de largas distancias sin mucho gasto de recursos, lo que busca determinar este trabajo es que rango de perturbaciones pueden hacer que una nave espacial u objeto que se encuentre en una de estas orbitas se desvíe perdiendo el curso original de la misión, en la actualidad se han descubierto diferentes tipos de perturbaciones [4] [5] que afectan la trayectoria como lo son la resistencia atmosférica, las perturbaciones gravitacionales, presión de radiación solar entre otras por lo que es importante considerar hasta que magnitud estas perturbaciones pueden hacer que la trayectoria se desvíe.

Para poder conseguir esto debemos identificar una trayectoria de baja energía, esta trayectoria estará ubicada entre las orbitas periódicas Lyapunov que se encuentran cerca de los puntos de Lagrange L1 y L2 en el sistema Tierra-Luna, Al encontrar dicha trayectoria de baja energía aplicaremos dos tipos de perturbaciones la primera será la presión de radiación solar y la segunda una perturbación aleatoria con el objetivo de mirar hasta que valores la trayectoria se pierde.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: sección II muestra el proceso para formar las orbitas Lyapunov, la sección III explica como generar la trayectoria de baja energía, la sección IV analiza el sistema aplicando las perturbaciones antes mencionadas y por último la sección V muestra las conclusiones del artículo.

II. CREACIÓN DE ORBITAS LYAPUNOV

Para generar las orbitas periódicas Lyapunov en el sistema Tierra-Luna debemos hallar los puntos de Lagrange del mismo sistema, pues estas orbitas se ubican sobre los puntos de Lagrange L1 y L2, esto se puede realizar hallando las raíces de las quinticas [6]

$$L1 : x^5 - (3 - \mu)x^4 + (3 - 2\mu)x^3 - \mu x^2 + 2\mu x - \mu = 0$$

$$L2 : x^5 + (3 - \mu)x^4 + (3 - 2\mu)x^3 - \mu x^2 - 2\mu x - \mu = 0$$

$$\mu = \frac{m_{Moon}}{m_{Earth} + m_{Moon}} = 0.012150113762633$$

Utilizamos el método de Newton para resolver las quinticas obteniendo los resultados mostrados en la Tabla 1.

Puntos Lagrange	Unidades Normalizadas		
	x	y	z
L1	0.83691744	0	0
L2	1.15623430	0	0
L3	-1.00506244	0	0
L4	0.487849886	0.8660254	0
L5	0.487849886	-0.8660254	0

Tabla 1. Puntos de Lagrange en el Sistema Tierra-Luna

Basados en los puntos de Lagrange L1 y L2 podemos generar las orbitas periódicas Lyapunov utilizando el método de tiro simple y el de continuación. [7]

El método de tiro simple nos permite encontrar órbitas periódicas que sean simétricas en el plano y, obteniendo las condiciones iniciales

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix}$$

Después integramos numéricamente las ecuaciones del movimiento hasta que $y = 0$, pues es el punto donde sabemos que formamos una órbita periódica, alcanzando

$$X(t_f) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$\delta X(t_f) \approx \Phi(t_0, t_f)\delta X(t_0) + \dot{X}(t_f)\delta(t_f)$$

Donde $\delta X(t_f)$ representa la desviación del estado final transmitida por las variaciones hechas, $\delta X(t_0)$ la desviación al estado inicial, $\delta(t_f)$ la desviación del periodo debido al cambio en el estado inicial y $\Phi(t_0, t_f)$ es la matriz de transición de estados. Si

reemplazamos las variables para nuestro caso tenemos

$$\begin{bmatrix} \delta x_f \\ \delta y_f \\ \delta \dot{x}_f \\ \delta \dot{y}_f \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \dot{y}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \delta(t_f)$$

Como en nuestro caso muchas de las variables son cero, es preferible hallar las fórmulas a las variables $\delta \dot{x}_f$ y $\delta \dot{y}_f$ directamente [8]

$$\delta \dot{x}_f = \phi_{31} \delta x_0 + \phi_{34} \delta \dot{y}_0 + \ddot{x}(t_f) \delta(t_f)$$

$$\delta \dot{y}_f = \phi_{41} \delta x_0 + \phi_{44} \delta \dot{y}_0 + \ddot{y}(t_f) \delta(t_f)$$

Siendo x_0 fija su variación es cero $\delta x_0 = 0$ reduciendo la expresión a

$$\delta \dot{x}_f = \phi_{34} \delta \dot{y}_0 + \ddot{x}(t_f) \delta(t_f)$$

$$\delta \dot{y}_f = \phi_{44} \delta \dot{y}_0 + \ddot{y}(t_f) \delta(t_f)$$

Como deseamos que $\dot{x} = 0$, podemos definir $\delta \dot{x}_f = \dot{x}$ y $\delta \dot{y}_f = 0$ dado que la órbita es simétrica en el plano y

$$\dot{x} = \phi_{34} \delta \dot{y}_0 + \ddot{x}(t_f) \delta(t_f)$$

$$0 = \phi_{44} \delta \dot{y}_0 + \ddot{y}(t_f) \delta(t_f)$$

Despejamos $\delta(t_f)$ obteniendo

$$\delta(t_f) = -\frac{\phi_{44} \delta \dot{y}_0}{\ddot{y}}$$

reemplazando $\delta(t_f)$ conseguimos

$$\delta \dot{y}_0 = \left(\phi_{34} - \frac{\ddot{x} \phi_{24}}{\ddot{y}} \right)^{-1} \dot{x}$$

De esta forma variamos \dot{y} para obtener $\dot{x} = 0$

$$\dot{y} = \dot{y} - \delta \dot{y}_i$$

El anterior proceso solo funciona para amplitudes muy pequeñas en el orden de 10^{-4} si queremos obtener amplitudes más grandes debemos utilizar el método de continuación numérica, El método se basa en dos órbitas periódicas X_{p1} y X_{p2} y genera la propuesta de X_{p3} añadiendo la diferencia de $X_{p1} - X_{p2}$ al vector X_{p3}

$$X_{p3} = (x_3 + (x_1 - x_2), 0, 0, V_3 + (V_1 - V_2))$$

El resultado de aplicar el método de tiro simple y continuación se muestra en la Figura 1.

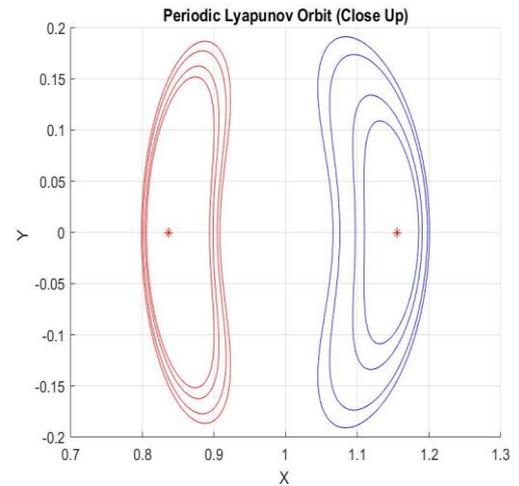


Figura 1. Muestra de la Familia de Orbitas Lyapunov sobre los puntos de Lagrange L1 y L2. (Fuente: elaboración propia)

Durante el proceso anterior se almaceno la siguiente información:

- Amplitud de la Órbita.
- Constante de Jacobi.
- Periodo de la Órbita.
- Vector de posición y velocidad.

Esta información nos permite hallar que orbitas Lyapunov poseen la misma constante de Jacobi, la cual es una restricción que se debe tener para tener una trayectoria de baja energía entre dos orbitas periódicas [8].

III. GENERACIÓN DE TRAYECTORIA DE BAJA ENERGÍA

Para generar la trayectoria de baja energía, necesitamos hallar las intersecciones entre las variedades invariantes de ambas orbitas periódicas Lyapunov, en especial, buscamos que la variedad inestable de L1 toque a la variedad estable de L2.

El procedimiento para calcular las variedades invariantes se llama “globalización de las variedades invariantes” [7] en el cual se debe:

- Encontrar la aproximación lineal al campo invariante estable e inestable basados en los auto vectores de la matriz de monodromía.
- Hallar los estados iniciales en las direcciones de las variedades invariantes.
- Integrar numéricamente las ecuaciones del movimiento utilizando los estados iniciales.

En el primer paso generamos la matriz de monodromía basados en propagar la matrix de transición de estados por un periodo determinado T , después podemos calcular los autovalores y auto vectores de la misma, en el caso de CRTBP estos autovalores poseen la forma $(\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, 1, 1)$ donde $\lambda_1 > 1$ [7]; esto quiere decir que tendremos un autovalor inestable λ_1 y otro inestable λ_2 con sus respectivos auto vectores estable Y^s e inestable Y^u , los auto vectores nos permitirán generar las aproximaciones locales a las variedades invariantes utilizando la siguientes formulas [7]

$$X_i^s = X_i + \varepsilon \frac{Y^s}{|Y^s|}$$

La anterior formula nos permite encontrar los estados iniciales en la dirección del campo invariante estable para el caso inestable solo debemos utilizar el auto vector inestable

$$X_i^u = X_i + \varepsilon \frac{Y^u}{|Y^u|}$$

Es importante destacar que las anteriores formulas solo nos permiten encontrar aproximaciones locales a las variedades invariantes. Por último, utilizamos estos estados iniciales para integrar numéricamente las ecuaciones del movimiento hacia adelante y atrás esto nos va a permitir generar la aproximación a las variedades invariantes para las dos orbitas periódicas Lyapunov sobre los puntos L1 y L2 de Lagrange

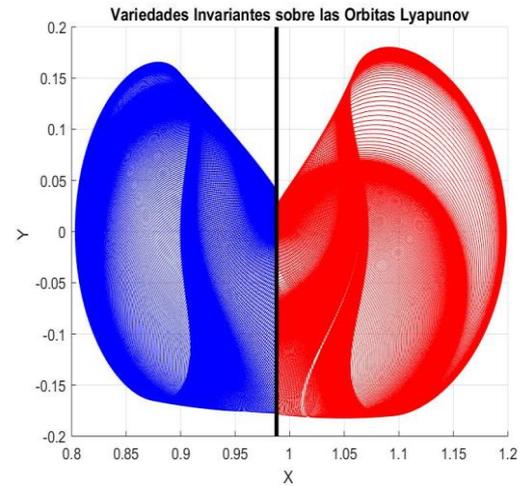


Figura 2. Variedades invariantes sobre ambas orbitas Lyapunov

En la Figura 2. se nos muestra en color azul el campo invariante inestable X^u de la órbita periódica alrededor de L1 y con color rojo el campo invariante estable X^s para la órbita periódica L2, además se puede observar varias conexiones heteroclinicas entre ambas variedades invariantes; es decir, si alteramos la órbita en la dirección inestable L1 podríamos conectarnos a la variedad invariante estable de L2 creando así una trayectoria de baja energía.

Para encontrar los puntos exactos donde ocurre esta conexión heteroclinica debemos crear una aplicación de Poincare, en particular creamos una sección de Poincare donde $x = 1 - \mu$ y $y < 0$; es decir, todo punto que cumpla con las condiciones anteriores será guardado en una lista. El anterior proceso se realizó en Matlab llamando a la función "callPoincareMap", esta función recibe como parámetros los estados iniciales X_i^s, X_i^u e integra numéricamente estos estados verificando los puntos que cumplen con la sección de Poincare almacenándolos en una variable local. El resultado del anterior proceso se muestra en la figura 3.

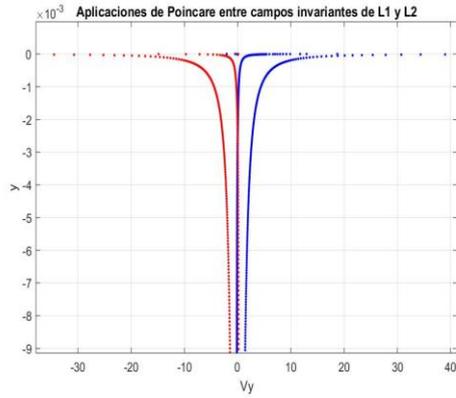


Figura 3. Aplicaciones de Poincare utilizando las variedades invariantes de orbitas periódicas Lyapunov Rojo variedad inestable Azul variedad estable (Fuente: elaboración propia)

El siguiente paso es hallar que puntos de la aplicación de Poincare poseen la siguiente característica $y_s \approx y_u ; Vy_s \approx Vy_u$, estos son los puntos donde existe una conexión heteroclinica entre las variedades invariantes. El proceso anterior se realizó en Excel donde buscamos que puntos cumplieran con la restricción dentro de un rango de confianza de $1e - 6$ o menor.

Para generar la trayectoria de baja energía necesitamos un estado inicial $X = [x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}]$ el cual podamos propagar adelante y hacia atrás, donde la órbita generada viaja entre las dos órbitas periódicas de Lyapunov. Conocemos $y, \dot{y}, x = 1 - \mu$ debido a la aplicación de Poincare, solo necesitamos hallar \dot{x} , esto lo hacemos utilizando la ecuación de energía [7].

$$E = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - \frac{(x^2 + y^2)}{2} - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

$$\dot{x} = \sqrt{-\dot{y}^2 - 2 \left(-\frac{(x^2 + y^2)}{2} - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \right) + 2E}$$

Al obtener $X = [x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}]$ podemos integrarlas numéricamente hacia delante y atrás las ecuaciones del movimiento obteniendo teniendo la trayectoria de baja energía deseada.

El anterior proceso se realizó para diferentes niveles de energía $C = 3.0946, C = 3.1340$ y $C = 3.1367$ como se muestra en las Figura 4, Figura 5 y Figura 6.

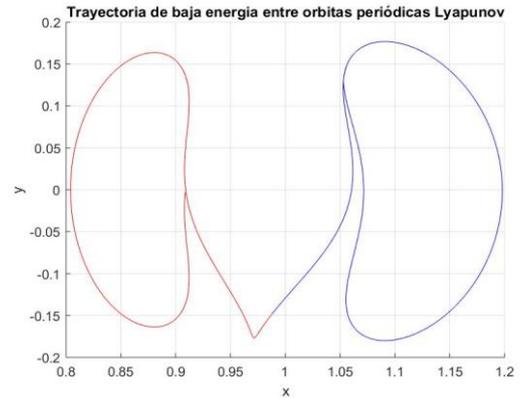


Figura 4. Trayectoria de baja energía entre las orbitas periódicas Lyapunov, Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constante de Jacobi $C = 3.0946$ (Fuente: elaboración propia)

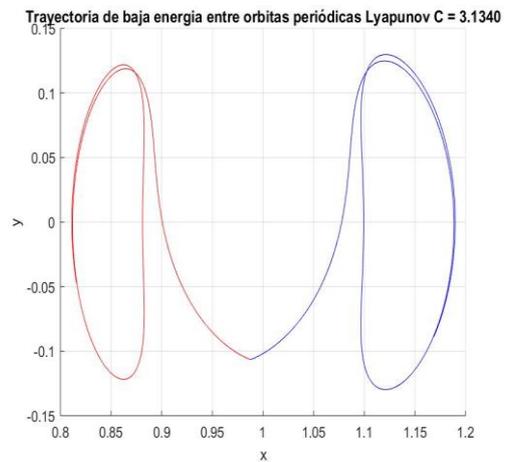


Figura 5. Trayectoria de baja energía entre las orbitas periódicas Lyapunov, Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constante de Jacobi $C = 3.1340$ (Fuente: elaboración propia)

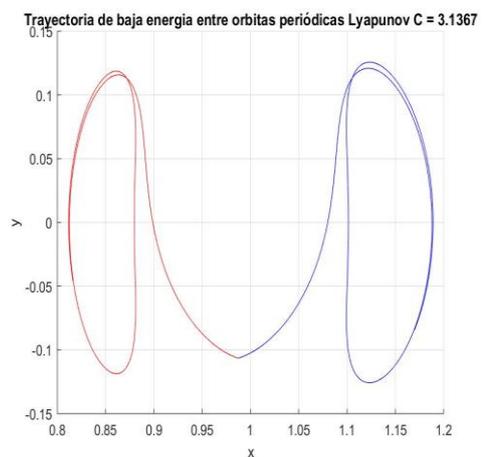


Figura 6. Trayectoria de baja energía entre las orbitas periódicas Lyapunov, Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constante de Jacobi $C = 3.1367$ (Fuente: elaboración propia)

IV. ANÁLISIS DE PERTURBACIONES

Después de encontrar la trayectoria de baja energía se implementaron dos tipos de perturbaciones:

- Presión de Radiación Solar
- Perturbación aleatoria

La radiación solar comprime fotones, aunque estos últimos no poseen masa si poseen energía y momento [5] lo cual genera una fuerza cuando estas interactúan con el satélite, a la perturbación generada se le denomina presión de radiación solar y depende de tres variables, la masa del satélite, su superficie y de la reflectividad (coeficiente de absorción dado por los materiales), en este trabajo utilizamos los siguientes parámetros para estos valores [4]:

- Área afectada por presión solar: 110.5
- Masa del satélite: 8000 kg
- Coeficiente de reflectividad: 1.21 – 1.88

Se toma el área del satélite y su masa como valores fijos y variamos el coeficiente de reflectividad o absorción del satélite, este coeficiente depende del material utilizado.

Material	ϵ	C_r
Panel Solar	0.21	1.21
Antena de Alta Ganancia	0.30	1.30
Vela Solar	0.88	1.88

Tabla 2. Tipos de Materiales y su Coeficiente de absorción C_r [4]

Este proceso lo repetimos para los diferentes niveles de energía utilizados $C = 3.0946$ y $C = 3.1340$.

En la órbita de baja energía con un nivel de energía $C = 3.0946$ adicionamos la perturbación de radiación solar en el cálculo obteniendo los siguientes resultados.

e	Cr	x	y	Vx	Vy
0,21	1,21	4,09E-03	5,98E-03	1,28E-02	1,79E-02
0,31	1,31	4,65E-03	6,43E-03	1,46E-02	2,03E-02
0,41	1,41	5,22E-03	6,79E-03	1,58E-02	2,33E-02
0,51	1,51	5,78E-03	7,09E-03	1,67E-02	2,54E-02

0,61	1,61	6,32E-03	7,31E-03	1,71E-02	2,80E-02
0,71	1,71	6,84E-03	7,49E-03	1,74E-02	3,04E-02
0,81	1,81	7,32E-03	7,62E-03	1,77E-02	3,20E-02
0,9	1,9	7,73E-03	7,71E-03	1,79E-02	3,34E-02

Tabla 3 Diferencia Media entre cada componente x y \dot{x} y de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación (fuente propia)

En la Tabla 3 se nos muestra la diferencia media entre cada componente del vector para toda la órbita generada; es decir, tomamos todas las posiciones x, y y las velocidades \dot{x}, \dot{y} de la órbita perturbada y hallamos la diferencia entre los mismos componentes x, y, \dot{x}, \dot{y} de la órbita sin perturbación finalmente realizamos la media por cada componente.

Al aplicar la perturbación de radiación solar se obtienen diferencias en el orden de $1e - 3$ o $1e - 2$. Estas diferencias hacen que la órbita discrepe, pero aun logra viajar entre las dos órbitas periódicas Lyapunov como se muestra en la Figura 7.

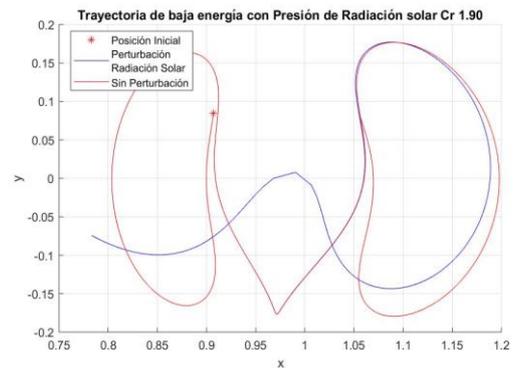


Figura 7 Trayectoria de baja energía utilizando presión solar (Fuente propia)

Desarrollamos un análisis similar, utilizando un nivel de energía distinto $C = 3.1340$, como se muestra en la tabla 4, los resultados se alejan de la órbita sin perturbación o ideal en una mayor magnitud que los encontrados en la tabla 3.

e	Cr	x	y	Vx	Vy
0,21	1,21	7,60E-02	1,09E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,31	1,31	7,60E-02	1,09E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,41	1,41	7,59E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,51	1,51	7,59E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,61	1,61	7,58E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01

0,71	1,71	7,57E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,81	1,81	7,57E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01
0,9	1,9	7,56E-02	1,08E-01	8,77E-02	2,12E-01

Tabla 18 Diferencia Media entre cada componente x y \dot{x} y de la Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbación $C = 3.1340$ (fuente propia)

En este caso la perturbación genera una discrepancia mayor que con un nivel de energía menor como se muestra en la Figura 8 pues ya no se logra crear una trayectoria entre las dos órbitas periódicas Lyapunov.

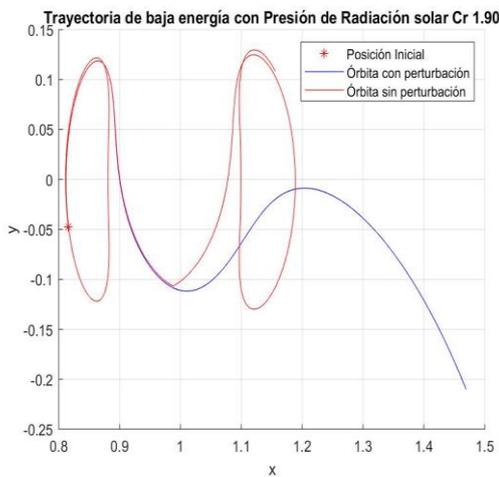


Figura 8 Trayectoria de baja energía utilizando presión solar $C = 3.1340$ (Fuente propia)

Para el segundo caso de perturbación, añadimos valores aleatorios a cada uno de los componentes de la aceleración

$$A_{xtotal} = A_x + A_p \cos(\theta)$$

$$A_{ytotal} = A_y + A_p \sin(\theta)$$

durante toda la trayectoria. El valor A_x, A_y representan los componentes de aceleración sin perturbación, A_p es un valor fijo y θ es un valor aleatorio entre 1 y 2π ; es decir, ampliamos la magnitud de la aceleración por un valor fijo A_p pero la dirección θ es aleatoria. Utilizando una perturbación de forma aleatoria nos permitirá abstraer todas las posibles perturbaciones en una sola y así hallar hasta que rangos se destruye la órbita de baja energía.

Para analizar el efecto que tiene la perturbación aleatoria en una trayectoria de baja energía tomamos una muestra de 10.000 órbitas, donde cada órbita

poseía un valor de θ aleatorio que se mantenía durante toda la órbita para después hallar la diferencia entre el último vector x y \dot{x} y el vector de una órbita sin perturbación.

Lo anterior nos permite identificar si se cumple el objetivo de transportarse entre dos órbitas periódicas Lyapunov. Además, se escogió una zona, la cual nos indicaría cuantas órbitas estarían cerca de alcanzar el último vector x y \dot{x} dado por la órbita sin perturbación.

Aplicamos la perturbación aleatoria sobre una trayectoria de baja energía con una constante de Jacobi $C = 3.0946$, los resultados se muestran en la tabla 11. vemos la media de diferencias entre el último vector de la órbita sin perturbación y con perturbación aleatoria, como se observa los valores obtenidos son bastante grandes en magnitud para todas las variables x y \dot{x} ; es decir, la perturbación aleatoria causa una gran divergencia con respecto a una trayectoria sin perturbación como se ve en la Figura 9.

Se encuentran resultados similares en la tabla 12, donde se nos muestra la cantidad de veces que el vector final estuvo dentro de la zona definida por el intervalo $x: [1.04, 1.08]$ y $y: [0, 0.1]$, esto nos indica que la probabilidad de llegar a una zona deseada es de 0.029% utilizando una perturbación aleatoria.

A_p	x	y	V_x	V_y
1,E-05	0,26991 63	0,8129327	0,3668544	0,667726 7
1,E-04	1,36291 12	1,2816922 79	0,9337771 91	0,627597 46

Tabla 11 Diferencia Media entre último vector de Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbaciones $C = 3.0946$ (fuente propia)

A_p	# trayectorias Zona	# trayectorias
1,E-05	29	10.000
1,E-04	3	10.000

Tabla 12 Numero de trayectorias que están en la zona (fuente propia)

Es importante destacar que los resultados obtenidos utilizaron una magnitud de la aceleración A_p muy bajo $1e - 5$ y $1e - 4$, debido al alto impacto que tiene esta perturbación en la trayectoria, si

aumentamos A_p a valores mas altos veremos una divergencia aún mayor.

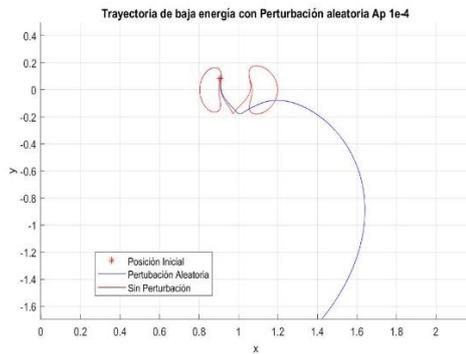


Figura 9 Trayectoria de baja energía utilizando Perturbación Aleatoria y un nivel de energía $C = 3.0946$ (Fuente propia)

Por último, realizamos el mismo proceso utilizando un nivel de energía distinto $C = 3.1340$ obteniendo resultados similares de gran divergencia con respecto a la posición deseada como se observa en la tabla 13.

Ap	x	y	Vx	Vy
1,E-05	0,780651 4	1,7859884	1,5701024	0,6125374
1,E-04	1,097125 5	1,20706580 4	1,0148490 4	0,3888399 1

Tabla 13 Diferencia Media entre último vector de Órbita de baja energía sin perturbación y con perturbaciones $C = 3.1340$ (fuente propia)

Ap	# trayectorias Zona	# trayectorias
1,E-05	11	10.000
1,E-04	20	10.000

Tabla 14 Numero de trayectorias que están en la zona (fuente propia)

El número de orbitas que terminaron dentro de la zona especificada por el intervalo $x: [1.04, 1.08]$ y $y: [0, 0.1]$ ha incrementado con respecto a la perturbación con menor nivel de energía, pero sigue siendo muy bajo, en general la perturbación aleatoria genera una gran divergencia llevando a la trayectoria a perder el objetivo como se muestra en la Figura 10.

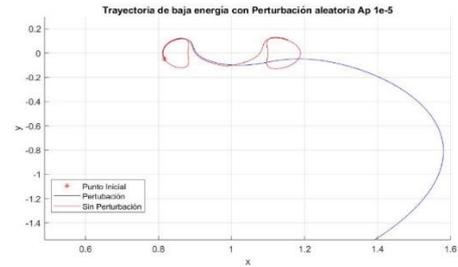


Figura 10 Trayectoria de baja energía utilizando Perturbación Aleatoria y un nivel de energía $C = 3.1340$ (Fuente propia)

V. CONCLUSIONES

Podemos destacar tres conclusiones la primera nos muestra como las perturbaciones si pueden causar que la trayectoria de baja energía se desvíe de gran manera aun si las perturbaciones poseen valores en el orden de $1e - 4$, esto se debe a que las órbitas Lyapunov sobre L1 y L2 son inestables; es decir, si nos desviamos de ellas nos vamos a alejar exponencialmente, el anterior problema tiene solución pues como se puede observar en la Figura 33 esta perturbación no hace que la trayectoria desde $x = 1 - \mu$ hacia las órbitas periódicas Lyapunov se dañe por lo que podemos utilizar técnicas de control de posición y velocidad cuando nos encontremos en las órbitas periódicas pues sabemos que velocidad debemos tener para mantenernos en ellas.

La segunda se basa en la diferencia de resultados obtenidos al cambiar los niveles de energía en las orbitas, encontramos que dicho cambio afecta la relación con las perturbaciones utilizadas, por ejemplo, cuando utilizamos la radiación solar como perturbación el cambio a una órbita con mayor energía genero una mayor divergencia en la órbita.

Por último, hallamos los rangos de valores en los cuales una órbita de baja energía se pierde al aplicar dos tipos de perturbaciones, además, encontramos la necesidad de emplear métodos correctivos de órbita durante una misión espacial pues las perturbaciones incluso con magnitudes muy pequeñas generar una gran divergencia.

VI. REFERENCIAS

- [1] R. W. Farquhar, «The flight of ISEE-3/ICE: origins, mision history, and a legacy,» *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2001.
- [2] NASA, «NASA,» [En línea]. Available: <https://map.gsfc.nasa.gov/mission/>. [Último acceso: 18 10 2019].
- [3] NASA, «NASA,» [En línea]. Available: <https://soho.nascom.nasa.gov/about/about.html>. [Último acceso: 18 10 2019].
- [4] G. Monterbruck, «Satellite Orbits, models, methods and applications,» Springer.
- [5] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students (Aerospace Engineering)*, 2013.
- [6] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications, Space Technology* , 2013.
- [7] W. L. M. M. E. R. S. Koon Sang, *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*.
- [8] R. L. A. Jeffrey S. Parker, *LOW-ENERGY LUNAR TRAJECTORY DESIGN*, 2013.
- [9] A. C. Barbero, *Problemas resueltos de métodos numéricos*, 2009.

7.2 Formato Poster

Análisis de Perturbaciones En Trayectorias de Baja Energía

Juan David Aguilar

INTRODUCCIÓN

- Este trabajo busca encontrar que rango de perturbaciones pueden hacer que una órbita de baja energía desaparezca entre dos órbitas periódicas Lyapunov, el anterior objetivo es importante para cualquier misión espacial debido a la influencia de las perturbaciones en su trayectoria. Para generar una trayectoria de baja energía, nos posicionamos en el sistema Tierra-Luna y utilizando las variedades invariantes de cada órbita periódica buscamos en que puntos estas variedades se intersecan dando inicio a la trayectoria de baja energía.
- A partir de esta trayectoria aplicamos dos tipos de perturbaciones, la primera es una perturbación aleatoria en cada uno de los componentes de la aceleración, de esta forma logramos encapsular diferentes perturbaciones en una sola y la segunda perturbación es la presión de radiación solar.

MÉTODOS

- Utilizamos el método de disparo simple y continuación para generar las órbitas periódicas Lyapunov en el sistema Tierra-Luna, almacenando el vector de posición, velocidad y el nivel de energía de la órbita.

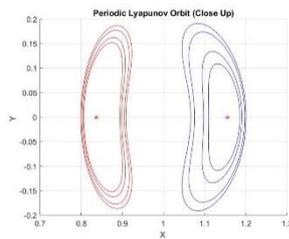


Figura 1. Muestra de la Familia de Órbitas Lyapunov sobre los puntos de Lagrange L1 (Rojo) y L2 (Azul). (Fuente: elaboración propia)

- El método globalización de las variedades invariantes, nos permite calcular las variedades invariantes de las órbitas periódicas Lyapunov.

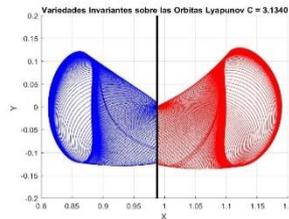


Figura 2 Variedades Invariantes Estables en órbita periódica Lyapunov con una constante de Jacobi de 3.1340. (Fuente: elaboración propia)

- Para encontrar los puntos exactos donde ocurre una conexión heteroclinica en nuestro sistema debemos crear una aplicación de Poincare, en particular creamos una sección de Poincare donde $x = 1 - \mu$ y $y < 0$
- El siguiente paso es hallar que puntos de la aplicación de Poincare poseen la siguiente característica $y_s \approx y_u ; V y_s \approx V y_u$, estos son los puntos donde existe una conexión heteroclinica entre las variedades invariantes.
- Para generar la trayectoria de baja energía necesitamos un estado inicial $X = [x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}]$ el cual podamos propagar adelante y hacia atrás, donde la órbita generada viaja entre las dos órbitas periódicas de Lyapunov. Conocemos $y, \dot{y}, x = 1 - \mu$ debido a la aplicación de Poincare, solo necesitamos hallar \dot{x} , esto lo hacemos utilizando la ecuación de energía [1].

REFERENCIAS

[1] W. L. M. M. E. R. S. Koon Sang, Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design.
 [2] G. Monterbruck, «Satellite Orbits, models, methods and applications,» Springer

OBJETIVOS

- Generar una órbita periódica Lyapunov sobre L1 y L2.
- Generar las variedades invariantes para las órbitas periódicas Lyapunov
- Utilizar las aplicaciones de Poincare para identificar intersecciones entre las variedades invariantes.
- Generar trayectoria de baja energía.
- Analizar perturbaciones en el sistema.

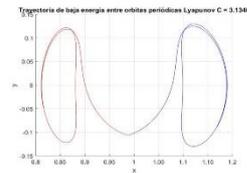


Figura 3. Trayectoria de baja energía entre las órbitas periódicas Lyapunov, Rojo variedad inestable Azul variedad estable, Constante de Jacobi $C = 3.1340$. (Fuente: elaboración propia)

- Perturbación Presión de Radiación Solar: Se toma el área del satélite y su masa como valores fijos y variamos el coeficiente de reflectividad o absorción del satélite, este coeficiente depende del material utilizado.

Material	r	C_r
Panel Solar	0.21	1.21
Antena de Alta Ganancia	0.30	1.30
Vela Solar	0.88	1.88

Tabla 1. Tipos de Materiales y su Coeficiente de absorción C_r [2]

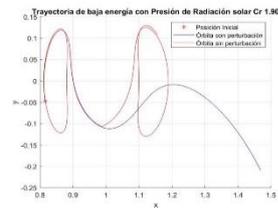


Figura 4 Trayectoria de baja energía utilizando presión solar $C_r = 3.1340$ (Fuente propia)

Perturbación Aleatoria: Añadimos valores aleatorios a cada uno de los componentes de la aceleración

$$A_{x_{total}} = A_x + A_p \cos(\theta)$$

$$A_{y_{total}} = A_y + A_p \sin(\theta)$$

durante toda la trayectoria. El valor A_x, A_y representan los componentes de aceleración sin perturbación, A_p es un valor fijo y θ es un valor aleatorio entre 1 y 2π .

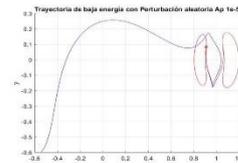


Figura 5 Trayectoria de baja energía utilizando Perturbación Aleatoria y un nivel de energía $C = 3.0946$. (Fuente: elaboración propia)

CONCLUSIONES

- A partir de los resultados obtenidos encontramos que la presión de radiación solar causa que la trayectoria se pierda incluso utilizando diferentes coeficientes de reflectividad. Cuando utilizamos la perturbación aleatoria vemos que la órbita no se mantiene incluso utilizando magnitudes en el orden de $1e - 5$ o $1e - 4$, en este caso se genera divergencias más grandes que con la perturbación de radiación solar.
- Los anteriores resultados rectifican que las órbitas periódicas Lyapunov son inestables por lo que un desvío en la dirección inestable nos va a alejar exponencialmente. Podemos concluir que será necesario aplicar métodos de control para que una nave espacial dentro de la trayectoria de baja energía se mantenga en ella.

7.3 Tablas de Conversión

Unidad Normalizada distancia	Km
1	384.467
1,3629112	523.994
0,8129327	312.546
0,78693	302.549
0,2699163	103.774
9,43E-02	36.255
4,08E-02	15.686
1,01E-02	3.883
9,61E-03	3.695
3,50E-03	1.346
4,77E-04	183

Tabla 19 Tabla de conversiones de Unidades Normalizadas de Distancia a Kilómetros

Unidad Normalizada Velocidad	Km/s
1	1,01846642
0,933777191	0,95102071
0,6677267	0,68005722
0,51606	0,52558978
9,01E-02	0,09176382
8,77E-02	0,08931951
5,58E-02	0,05683043
3,34E-02	0,03401678
2,80E-02	0,02851706
1,79E-02	0,01823055
1,28E-02	0,01303637

Tabla 20 Tabla de conversiones de Unidades Normalizadas de Velocidad a Kilómetros por segundo