APLICACION DE LA TEORIA DE LOS NUMEROS CONGRUENTES A LA ARITMETICA ESCOLAR (*)

El fin propuesto en esta investigación ha sido determinar la superioridad existente entre tres procedimientos, utilizados para comprobar los resultados de las operaciones aritméticas.

«Comprobar una operación es otra operación por medio de la cual se obtiene la casi seguridad de no haber cometido error al ejecutar la operación primera» (1).

«Comprobación hace referencia a la enseñanza de ciertos procedimientos, empleados para verificar los resultados de las operaciones aritméticas» (2).

Es muy distinta la posición del alumno que sabe que su «cuenta» o su problema está bien o mal hecho simplemente porque se lo ha dicho el profesor, que la de aquel otro que ha llegado a comprobarlo por sí mismo y que al encontrar el fallo o el error, ha vuelto hacia sí, ha reflexionado y ha deducido que la mayoría de sus equivocaciones son o porque olvida las unidades que lleva, o porque estima mal la cifra del cociente... ; es más formativo que el mismo sujeto compruebe su trabajo, pues como dice Crespo Pereira, «el aprender lo hecho por otro es algo muy diferente al hacer por sí mismo el original de la cosa» (3).

El niño que sabe sumar también sabrá hacer la prueba correspondiente, puesto que, desde un punto de vista didáctico, se tiende a que la prueba de una operación sea más fácil que la operación en sí, pues si no no tendría ningún interés.

De aquí que el momento más indicado para su aprendizaje sea el de la operación correspondiente.

---

* Agradezco de modo singular los asesoramientos de los doctores García Hoz y Fernández Huerta.

(1) Dalmau Carles: *Aritmética razonada.* Madrid, 1947, pág. 31.

(2) Pérez Somoza: *Motodología de la aritmética elemental.* La Habana, 1930.

(3) Crespo Pereira: *La enseñanza de las matemáticas.* «Rev. Educación», mayo, 1954.

Nos referimos a dos tipos de pruebas:

a) Prueba de multiplicar.

b) Prueba de los nueves en sus dos modalidades: aspa y artificio de Gosart.

Es a esta última a la que aplicamos el título del trabajo, ¿qué aplicación puede tener la congruencia a la aritmética escolar?

A primera vista, no parece que pueda tener sentido; pero analizando su contenido, observamos que la prueba de los nueves está intimamente ligada a la congruencia, asi como ésta lo está a la divisibilidad; de este mutuo apoyo podemos deducir la condición necesaria y suficiente para que dos números sean congruentes, respecto de un módulo (que en nuestro caso sería el 9) y es que su diferencia sea un múltiplo de m.

Para hacer la prueba por nueve, de la multiplicación, se buscan los residuos de la división por 9 del multiplicando, del multiplicador y del producto; se multiplican los dos primeros entre sí, y su producto, dividido por 9, debe dar un residuo igual al del producto de los números propuestos.

En la división se sigue el mismo proceso, tomando el dividendo como producto, cuyos factores son el divisor y el cociente.

La modalidad que introduce Gossart es con el fin de simplificar, y consiste en la reducción a dígitos sin intervención de la resta.

El valor que pudiéramos otorgar a la prueba de los nueves es el de estar sólidamente fundamentada en la teoría de la congruencia, a la vez que nos proporciona sencillez de aprendizaje y una mayor exactitud y rapidez.

Proceso seguido en la investigación.—Los sujetos elegidos corresponden a los grados 9.º, 10 y 11 del grupo escolar Zumalacárregui, de Madrid, con una edad de nueve a trece años y un nivel intelectual medio.

Durante todo el proceso se procuró que las condiciones fueran las mismas: horario, tiempo de enseñanza, ejercicios..., etc.

Primeramente se aplicó una prueba inicial, compuesta de una serie de operaciones correspondientes a los tres métodos A), B) y C, con el fin de conocer el estado inicial de los sujetos. Como los resultados diferían mucho entre sí, nos vimos obligados a comenzar una etapa de aprendizaje, con el fin de lograr datos equivalentes. Al cabo de quince días aplicamos una prueba intermedia, con los siguientes resultados:

Grado 9.º: 62 por 100.
Grado 10.º: 71 por 100.
Grado 11.º: 83 por 100.

Como estos resultados no eran satisfactorios, continuamos la explicación hasta obtener un nivel superior al 80 por 100.

Obtenidas todas las puntuaciones, era preciso utilizar un método que pudiera darnos luz para interpretar los resultados: éste ha sido el Análisis de varianza, del cual nos hemos servido, y cuya aplicación hemos llevado a cabo por medio del *Diseño Factorial* 2 × 2. (4).

La utilización de este método nos permite encontrar no sólo los factores de cada método y de cada variante, sino también la interacción entre los métodos y las variantes. Dada su simplicidad mediante una sola comprobación, podemos hallar la homogeneidad de varianzas y medias de los diferentes grupos.

A lo largo de la experiencia se ha mantenido la superioridad del método A) en exactitud, y del B), en rapidez. En ambos casos es necesario determinar si las diferencias encontradas son solamente atribuibles al influjo del azar o bien responden a una distinción real, conseguida por uno u otro método.

Para resolverlo, comenzamos efectuando las operaciones correspondientes, primero, a la homogeneidad de medias; segundo, a la homogeneidad de varianzas.

El proceso seguido en ambos casos es el siguiente:

1.º Puntuaciones obtenidas por los sujetos en las distintas pruebas.

2.º Totalización.

3.º Puntuaciones obtenidas al cuadrado.

4.º Totalización de las columnas al cuadrado.

(4) FERNÁNDEZ HUERTA, J.: *Diseño factorial* 2 × 2. «Rev. E. de Pedagogía», núm. 52, págs. 294-301.

Logrados estos valores, podemos determinar *la homogeneidad de medias*:

1.° Determinar la suma total de cuadrados.

Para lograrlo, el procedimiento más fácil consiste en totalizar todos los cuadrados de las puntuaciones obtenidas, puede hacerse sumando los totales de las tres columnas de cuadrados.

$$987 + 212 = 1.199$$

Al total se le resta el resultado obtenido por el cuadrado de la suma de las puntuaciones, dividido por el número total de sujetos.

$$146 + 30 = 176 \; ; \; 176^2 = 30.976$$

$$30.976 : 156 = 262,6 \; ; \; 1.199 - 262,6 = 936,4$$

2.° Determinar la suma del cuadrado entre las medias.

Para llevarlo a cabo, basta la suma de los cuadrados de las sumas de las columnas originales y la división del total entre el número de alumnos. Del resultado obtenido se resta el cociente de dividir el cuadrado de las sumas de puntuaciones por el número total de alumnos:

$$31.316 + 900 = 32.216 \; ; \; 32.216 : 52 = 619,7$$

$$619,5 - 262,6 = 356,9$$

3.° Determinación de la suma de cuadrados dentro de cada grupo.

Se obtiene por la diferencia entre la suma de cuadrados total y la suma de cuadrados entre las medias:

$$936,4 - 356,9 = 579,5$$

4.° Estudio de las varianzas.

TABLA I.—Análisis de varianza en el estudio de la homogeneidad de medias.

MULTIPLICACION

Grado: 10.º Prueba: 1.ª Métodos: A, B, C.

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Entre grupos.....	518,6	2	259,3	48	Rechazada
Dentro de grupos.	897,6	153	5,4		
TOTAL......	1.346,2	155			

5.º Se comparan los cuadrados entre grupos y dentro de los grupos, teniendo en cuenta que en igualdad estadística supone indiferenciación entre las medias.

F) Es el cociente entre los cuadrados medios, teniendo que ser mayor que 1, según las tablas elaboradas por Snedecor.

Teniendo en cuenta que el nivel obtenido, según estas tablas, es al 5 por 100, rechazamos la hipótesis de la homogeneidad de medias. Su diferenciación no puede atribuirse a factores fortuitos, sino que algunas de las medias obtenidas es científicamente diferenciable de las demás.

El mismo proceso de la multiplicación es el que hemos seguido en la división, cuyos resultados exponemos concretamente:

1.º $544 + 509 = 1.053$.

$$80 + 71 = 151 : \ 151^2 = 22.801$$
$$22.801 : 156 = 146,1 ; \ 1.053 - 146 = 907$$

2.º $6.400 + 5.041 = 11.441 ; \ 11.441 : 52 = 220$.

$$220 - 146 = 74$$

3.º $907 - 74 = 833$.

4.º Estudio de las varianzas.

TABLA II.—Análisis de varianza en el estudio de la homogeneidad de medias.

DIVISION

Grado: 1.° Prueba. 1.ª Método: A, B, C.

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Entre grupos...	833	2	37	6,8	Rechazada
Dentro de grupos	907	153	5,4		
TOTAL	74	155			

5.° La diferencia entre las medias es inferior que la multiplicación; pero también encontramos un nivel al 1 por 100, puesto que es igual a 6,8.

Hemos puesto como ejemplo los resultados correspondientes al grado 10.° y a la prueba 1.ª. Para evitar que el trabajo se alargue excesivamente, como el proceso a seguir es el mismo, ponemos a continuación una tabla que compendia todos los resultados correspondientes a la prueba tercera (5).

Grados: 9.°, 10.° y 11.ª Métodos: A, B, C. Prueba: 3.ª.

TABLA III.—Análisis de varianza en el estudio de la homogeneidad de medias.

Origen de varianza	EXACTITUD		RAPIDEZ	
	Multiplicación	División	Multiplicación	División
Grado 9.°....	16,1	5,8	33	45,2
Grado 10.°....	27	9,3	48	7,2
Grado 11.ª....	8,7	12,7	31,4	8,9

(5) Véase trabajo de Licenciatura: *Aplicación de la teoría de los números congruentes a la Aritmética escolar.* Madrid, septiembre, 1956.

Los resultados obtenidos nos hacen ver que en los tres grados existe una heterogeneidad científica de medias; lo mismo en exactitud que en rapidez, porque las puntuaciones alcanzan el nivel 1 por 100 de las tablas de Snedecor; por tanto, la hipótesis queda rechazada y comprobamos que alguna de las medias obtenidas es diferenciable del promedio general.

Si a esta diferencia de medias unimos la homogeneidad de varianzas, podemos dar por buena la investigación y afirmar que, efectivamente, hay cierta superioridad de un método sobre otro.

Tabla IV.—Homogeneidad de varianzas.

	EXACTITUD		RAPIDEZ	
	Multiplicación	División	Multiplicación	División
Grado 9.º...	5,885	0,697	1,419	0,802
Grado 10.º....	7,205	2,105	8,139	2,472
Grado 11.º....	4,143	8,667	8,310	5,885

Los valores presentes nos muestran cómo en los tres grados no ha existido ninguna anormalidad que haya podido influir en aprendizaje, ya que en todos encontramos un nivel mínimo al 1 por 100 de las tablas de χ^2 Tampoco es necesario recurrir a la fórmula de corrección. La variación de los valores de las varianzas en los diferentes grados cae dentro del margen atribuible al muestreo fortuito.

Hemos llegado a ello, siguiendo el proceso siguiente:

Grado 9.º. Prueba 3.ª. Métodos A, B, C.

Multiplicación

1.º Determinar la varianza de cada grupo. Suma de cuadrados entre grados de libertad.

$$2.626 - (128.164 : 51) = 113$$
$$1.653 - (69.696 : 51) = 283,5$$
$$1.484 - (45.796 : 51) = 897,1$$

2.º Hallar el logaritmo decimal de las varianzas.

$$\log 113 = 2,45367$$
$$\log 283,5 = 2,45255$$
$$\log 897,1 = 2,95284$$

3.º Totalizar las varianzas y los logaritmos.

$$1.293,6 \,;\; 7,85.846$$

4.º Hallar el logaritmo de: Suma de varianzas, entre número de grupos.

$$1.293,6 : 3 = 431,6$$
$$\log 431,6 = 2,63508$$

5.º Multiplicar dicho logaritmo por el número de grupos.

$$2,63508 \times 3 = 7,90324$$

6.º Restar este producto de la suma de los logaritmos anteriores.

$$7,90524 - 7,85846 = 0,04678$$

7.º Multiplicación de dicha diferencia por 2,3026 (log. 10) y por el número de elementos en cada grupo menos uno.

$$0,04678 \times 2,3026 + 50 = 5.885.445.600 = 5,885$$

8.º Para evaluar el resultado de la χ^2. hallada se considerará con un número de grados de libertad igual al número de grupos menos una (niveles al 5 por 100 y 1 por 100) (6).

9.º Si el valor es significativo se aplica la fórmula de corrección.

Una vez hallada la homogeniedad de Medias y Varianzas, podemos afirmar que, efectivamente, existe una diferencia entre los tres métodos.

(6) Fernández Huerta, J.: *El criterio extrínseco en la determinación de la normalidad* «R. E. P.», núm. 44, págs. 517-527.

TABLA V.—Homogenidad de varianzas.

GRUPO	n	n-1	S^2	log. S^2
1.................	51	50	113	2,85 307
2........	51	50	283,5	2,85.255
3.	51	50	897,1	2,95.284
			1 293,6	7,85.846

El método A supera al B y C en exactitud. El método B supera al A y C en rapidez. Es, pues, el C el que ocupa un lugar inferior al ser superado por los otros dos ; por ello prescindimos de él y nos ocupamos del B y del A.

Inmediatamente nos planteamos el siguiente problema : ¿Se puede afirmar que esta diferencia entre el método B y el A es verdaderamente significativa o sólo se debe al azar?

Para solucionarlo aplicamos la siguiente fórmula, por la que obtenemos la significación de la diferencia entre las medias.

$$\frac{\text{M. A.} - \text{M. B.}}{S_{(A-B)}}$$

TABLA VI.—Significación de la diferencia entre las medias.

	EXACTITUD		RAPIDEZ	
	Multiplicación	**División**	**Multiplicación**	**División**
Grado 9.°....	13,6	4,1	10,9	17,9
Grado 10.°....	21	5,5	4,6	18,3
Grado 11.°..	10,6	11,4	10,2	2,1

Con estos resultados nos queda un amplio margen de seguridad para operar con uno u otro método. En los tres grados y en la multiplicación y división alcanzan un nivel superior al 1 por 100 de la tabla de T, excepto el último caso—G.º 11 división—, que sólo alcanza el nivel 5 por 100.

Como resultado final y a la vista de los resultados ponemos a continuación las conclusiones deducidas:

1.ª Superioridad científica del método A sobre el B en exactitud.

2.ª Superiridad científica del método B sobre el A en rapidez.

3.ª La superioridad del método A en exactitud es mayor en la multiplicación que en la división.

4.ª La superioridad del método B en rapidez es mayor en la división que en la multiplicación.

5.ª Tanto el método A como el B superan al C en exactitud y rapidez.

Si lo que pretendemos es llevar a la práctica uno u otro método, la elección dependerá del fin que el docente se proponga en su labor; bien eligiendo el A si lo que busca es una mayor exactitud, bien el B si lo que pretende es una mayor rapidez. Uno y otro llevan consigo un amplio margen de seguridad y confianza.

M.ª Pilar Mardomingo Sanz
Licenciada en Pedagogía

BIBLIOGRAFIA

Ballard Ph. B.: *Teaching the Essentials of Arithmetic*. London. 1928. XXI, 260 págs.

Beltrán Salieti, J.: *Principales errores que se cometen en las operaciones aritméticas*. «Rev. Psicología y Pedagogía aplicadas. Escuela especial de orientación y aprovechamiento». Valencia, 1954.

Buyse, R.: *Etudes et recherches louvanistes sur le calcul elementaire*. Actas del Congreso de Pedagogía Internacional. Instituto San José de Calasanz. Madrid, 1950

Crespo Pereira, R.: *La enseñanza de las matemáticas*. «Rev. de Educación». Mayo, 1954. Año III, vol. VII, núm. 21, págs. 11-114.

DALMAU CARLES: *Aritmética razonada.* Madrid, 1947.

DU PASQUIERS: *Le developpement de la notion de nombre.* Paris, 1921.

EYARALAR, J. M.: *Metodología de las matemáticas.* Madrid, 1933. 408 págs.

FERNÁNDEZ HUERTA: *Fundamentos didácticos de la aritmética.* «Rev. Pedagógica de la Sección Femenina: Consigna». Enero, 1956.

FERNÁNDEZ HUERTA, J.: *Las primeras operaciones aritméticas.* «Consigna». Marzo, 1956.

FOUCHE, A.: *La pedagogia de las mathematiques.* París, 1952, 154 págs.

HERNÁNDEZ RUIZ, S.: *Metodología de la aritmética en la escuela primaria.* Méjico. Ed. Atlante. 1950.

KILPATRICK, E. A.: *An Experiment in Memorizing versus Indental Learning Journal of educational Psychology.* Vol. III, 1916.

MERCANTE, Victor: *Metodología de las matemáticas.* Cabaut y Cía. B. A.

MYERS: *The prevention and correction of errors in Arithmetic.* Chicago The Plymouth-Press. 1925.

OFERMAN, J. A.: *An experimental study of certain factors and fecting transfer of training in arithmetic.* 1931.

PAUNERO: *La matemáticas en la educación.* Sevilla, 1935.

PÉREZ SOMOZA, J. E.: *Metodología de la aritmética elemental.* Habana, 1930.

REED, H. B.: *Psicología de las materias de enseñanza primaria.* Edit. Hispano-Americana. Méjico, 1942. 630 págs.

REY PASTOR: *Análisis algebraico.* Madrid, 1946.

SCHONELL, F. J.: *Diagnosi of individual Dificulties in Arithmetic.* Toronto Clarke Irvin Cy.

STUDIES *in arithmetic.* University of London Press. 1939. Teaching of arithmetic. New York, 1035. 289 págs. Chicago, 1951.

THORNDIKE, E.: *The Psychology of Arithmetic.* Mac Millan New York, 1923.

VILLAREJO, E.: *Iniciación al cálculo aritmético.* «Bordon», núm. 35, 1953.