Universidad Internacional de La Rioja

Facultad de Educación

**Trabajo fin de máster**

# Primeros contactos con el álgebra, siguiendo los pasos de los grandes matemáticos.


**Presentado por:** Claudia Loewenstein

**Tipo de trabajo:** Propuesta de intervención

**Director/a:** Beatriz Morales Romo

**Ciudad:** Zaragoza

**Fecha:** Octubre 2017

*"Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia*
*de su historia como las Matemáticas."*
E.T. Bell

## Resumen

Hoy en día las matemáticas se presentan a los alumnos como un producto acabado, obvio e inamovible. Sin embargo, solo basta con hacer un breve repaso por la historia para poder comprobar que las matemáticas han seguido un camino muy largo, lleno de obstáculos, hasta su desarrollo actual. La historia del álgebra no ha sido diferente, teniendo que pasar casi veinte siglos para convertir el álgebra retórica de los griegos en el álgebra simbólica de Vieta.

¿Por qué intentamos entonces introducirles a los alumnos el lenguaje algebraico directamente? ¿No sería más conveniente que siguieran los pasos de los grandes matemáticos, superando los obstáculos que se encontraron a lo largo de la historia?

El presente trabajo tiene como objetivo desarrollar una propuesta de unidad didáctica, para que los alumnos comprendan mejor el nivel de abstracción que requiere el manejo de las letras que representan las incógnitas. Para ello se presenta en primer lugar un marco teórico, que documenta las dificultades y errores que se dan en el aprendizaje del álgebra, resume la historia del álgebra desde los egipcios hasta los tiempos modernos y describe el método genético. Posteriormente se desarrolla una propuesta de intervención, que permite introducir el álgebra haciendo pasar a los alumnos de 1º de la ESO por el camino que recorrieron los grandes matemáticos hasta el desarrollo del lenguaje algebraico tal y como lo conocemos en la actualidad.

Se concluye, que la introducción del álgebra a partir del método genético, puede contribuir a evitar obstáculos cognitivos, didácticos y epistemológicos en su aprendizaje, así como prevenir la aparición de errores, aumentando el interés por la materia, en particular por el álgebra, y consiguiendo mejorar el rendimiento de los alumnos. Finalmente, se plantean unas líneas de acción futuras, para llevar la historia de las matemáticas a otros niveles educativos.


**Palabras clave:** matemáticas, álgebra, método genético, historia, propuesta didáctica.

## Abstract

Mathematics are nowadays introduced to students as a fixed, finished and obvious product. However, it is enough to review briefly their history to verify that they have followed a very long path, full of obstacles, until its current development. The history of algebra has not been different, spending almost twenty centuries to change the rhetorical algebra of the Greeks to the symbolic algebra of Vieta.

Why then are we trying to introduce algebraic language directly to the students? Would it not be more convenient that they followed the steps of the great mathematicians, overcoming the obstacles that these have faced throughout history?

The objective of this paper is to develop a didactic unit proposal so that students can better understand the level of abstraction needed to handle the letters that represent the unknowns. To this end, a theoretical framework is presented, which documents the difficulties and mistakes that arise when learning algebra, summarizes the history of algebra from the Egyptians until modern days and describes the genetic method. Afterwards, an intervention proposal is developed, which allows algebra to be introduced in a way that enables students from 1 ESO to go through the path that great mathematicians have crossed until the state of the algebraic language as it is known today.

In conclusion, the introduction of algebra using the genetic method can contribute to avoid cognitive, didactic and epistemological obstacles in its learning as well as to prevent the appearance of mistakes while enhancing the interest in the subject, particularly to algebra, and facilitating the improvement of the students' performance. Finally, some future action plans are presented to take the history of mathematics to other educational levels.

**Keywords**: mathematics, algebra, genetic method, history, didactic proposal.

# Índice

## Índice de Tablas



## Índice de Ilustraciones

# 1. Introducción

## 1.1. Justificación

El aprendizaje de las matemáticas, y con ello la adquisición de la competencia matemática, es un eje fundamental en todas las etapas escolares, pero es quizás en la etapa de secundaria, cuando empieza a tomar un valor aún más elevado. El desarrollo de los conocimientos matemáticos se hace indispensable en la vida humana, ya que se necesita para desenvolverse en la vida diaria, puesto que nuestra vida gira alrededor de números, operaciones y razonamientos. El aprendizaje de las matemáticas juega además un importante papel en el desarrollo del razonamiento crítico, contribuye a la formación intelectual y promueve el desarrollo de la creatividad y del pensamiento lógico. Las matemáticas en definitiva, no se tratan de aprender a calcular ejercicios, sino que van mucho más allá implicando otras competencias y campos.

El álgebra en particular, es una rama de las matemáticas especialmente útil y valiosa para los seres humanos, pero que debido a su particular lenguaje, supone un gran reto para los alumnos de secundaria. El álgebra representa una herramienta nueva, muy poderosa y necesaria para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas, pero a su vez es un lenguaje complejo y totalmente nuevo, que los alumnos deben aprender a dominar (Esquinas, 2008). Según MacGregor (2004, citado en Serres, 2011) "el razonamiento algebraico implica análisis de situaciones reales, formulación de relaciones críticas como ecuaciones, aplicación de técnicas para resolver las ecuaciones, e interpretación de los resultados" (p., pero la realidad es otra y los estudiantes aprenden "una colección de reglas a ser memorizadas y trucos a ser ejecutados, que no tienen coherencia lógica" ni aplicación en el mundo real. Se necesita por tanto de un cambio en la forma de presentar los contenidos, para que los alumnos puedan reconocer la utilidad que presenta el lenguaje algebraico para su vida diaria.

En la introducción del álgebra en 1º de la ESO, se hacen latentes las múltiples dificultades que experimentan los alumnos con su aprendizaje. Problemas con el concepto de igualdad, confusión en la operación aritmética prioritaria, dificultades con la naturaleza de los números, sobre todo con los negativos, y naturalmente la difícil comprensión del lenguaje algebraico, están a la orden del día en las clases en las que se sigue un método convencional de enseñanza, realizando los primeros contactos con el álgebra de una forma abrupta, introduciendo directamente letras, que representan variables de un valor desconocido.

Es por ello que la transición de la aritmética al álgebra se debe de hacer de una forma progresiva, introduciendo el lenguaje algebraico paso a paso y de forma coherente, para que el alumno consiga sentar unas bases firmes que lo acompañarán durante toda la vida. Se hace pues necesario idear un proceso de enseñanza más cuidado, en el que el alumno como protagonista, sea consciente de las dificultades que conlleva el uso de este nuevo lenguaje y pueda identificar los puntos clave en la resolución de ecuaciones.

Si nos remitimos a la historia del álgebra, muchos de los grandes matemáticos han tenido que padecer numerosas dificultades con el uso del lenguaje algebraico, siendo necesario en su evolución, una emancipación de la escritura alfabética. Durante más de veinte siglos el álgebra ha tenido que pasar por tres fases históricas: fase retórica de los griegos, la etapa sincopada de Diofanto hasta llegar al álgebra simbólica de Vieta, que, tras ser perfeccionada por Descartes, posee finalmente la formulación que conocemos hoy en día.

En este trabajo se busca proponer una Unidad Didáctica que reproduzca a grandes rasgos los procesos históricos que se han desarrollado hasta la formulación actual del álgebra, asociando el desarrollo histórico de esta rama con el aprendizaje del alumno en esta primera toma de contacto, aplicando el denominado método genético. Se busca por tanto, hacer pasar al alumno por estas fases históricas del álgebra, para intentar sortear las dificultades que encuentran los estudiantes, superando los obstáculos que se encontraron los grandes matemáticos.

## 1.2. Planteamiento del problema

Las matemáticas se presentan hoy en día a los alumnos como un conjunto de conocimientos y procedimientos cerrados, se les enseñan fórmulas, teoremas y reglas establecidas e inamovibles, se les familiariza con símbolos, signos y notaciones, sin explicarles ni su origen, ni su propósito. Esta forma de introducción de las matemáticas como producto final, la reduce a un campo deductivo, dejando atrás aspectos inductivos y constructivos tan necesarios para su correcta comprensión. Es por ello que se hace necesaria una presentación de las matemáticas como un conjunto de conocimientos que han evolucionado con el tiempo, y que continuarán evolucionando en el futuro (Godino, 2004), reforzando así en el aprendizaje de los alumnos el uso del razonamiento empírico inductivo.

La introducción de los alumnos en el álgebra en los primeros años de la educación Secundaria no es muy diferente. Tras llevar varios años inmersos en la aritmética, se encuentran ante un universo nuevo: el álgebra, su lenguaje particular, su nivel de abstracción. El paso del pensamiento aritmético al algebraico supone un obstáculo didáctico en el desarrollo del conocimiento de los alumnos, que si no es dirigido y sorteado adecuadamente, puede llevar a grandes dificultades en la adquisición del lenguaje algebraico. Estas dificultades además, si no se resuelven a tiempo, pueden acompañar al alumno a lo largo de toda la educación Secundaria, creando un punto débil en el desarrollo de la competencia matemática.

Hoy en día se presenta en el entorno escolar un fenómeno didáctico que Gascón denomina "aritmetización del álgebra escolar" (1998). Este fenómeno describe la dominancia en la cultura escolar de una manera simplista de interpretar el álgebra elemental como una generalización de la aritmética. El álgebra es entendida así como resultados explícitos de procedimientos implícitos en la aritmética. Pero, como bien indican Kieran y Filloy: "el álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones" (1989, p. 229). Los alumnos, en sus primeros contactos con el álgebra, siguen usando los métodos que usaban en la aritmética, y que hasta ahora les habían dado buenos resultados. Cuando comprueban sin embargo, que el álgebra no se trata de sólo un proceso, sino de un objeto particular y muy útil de las matemáticas, se encuentran con un conflicto, una ruptura epistemológica, que, según la teoría de Piaget, debe de asimilarse y acomodarse dentro de la estructura cognitiva existente, para para garantizar un aprendizaje significativo.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

Desarrollar una propuesta de unidad didáctica siguiendo el método genético, para que los alumnos comprendan mejor el nivel de abstracción que requiere el manejo de las letras que representan las incógnitas.

### 1.3.2. Objetivos específicos

Para conseguir el objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las principales dificultades que experimentan los alumnos en los primeros contactos con el álgebra.

- Analizar la historia del álgebra para descubrir los principales pasos que se siguieron para llegar a la formulación actual.

- Proponer una secuenciación de actividades que permitan el paso por las fases históricas del desarrollo del álgebra.

- Introducir actividades que, aparte de trabajar la competencia matemática, trabajen las otras seis competencias clave, indispensables para lograr que los alumnos alcancen un pleno desarrollo personal, social y profesional.

- Impulsar el trabajo colaborativo entre los alumnos, realizando diferentes configuraciones en las actividades grupales, fomentando los debates, la investigación y la creatividad.

- Sortear las dificultades que existen en la introducción del álgebra, a partir de la introducción de los conceptos con el método genético.

# 2. Marco teórico o conceptual

En los siguientes puntos de este apartado se presenta la fundamentación teórica que ha permitido desarrollar, más adelante, la propuesta didáctica objetivo de este trabajo.

En primer lugar se ha revisado la normativa actual relativa a la educación, encuadrando un marco legislativo nacional y regional, correspondiente a la Comunidad Autónoma de Aragón. A partir de este marco legislativo se han extraído los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables incluidos en la propuesta, así como las competencias clave que se trabajan a partir de ella.

En segundo lugar se ha buscado información bibliográfica acerca de las dificultades que experimentan los alumnos en el aprendizaje del álgebra y los errores que cometen prestando especial atención al origen de éstos (Socas 2011 y 2012; Ruano, Socas y Palarea 2003; Palarea y Socas 1994; Gallarado y Rojano 1988; Socas 2008; Kieran y Filloy 1989).

Por último, se ha realizado un repaso a la teoría existente sobre la historia del álgebra, con el fin de analizar las fases que compusieron la creación de los conceptos algebraicos a tratar en la propuesta. La historia del álgebra se ha analizado especialmente a partir de las obras de Boyer (2010) y Kline (2012), dos de los referentes en este tema. Para culminar se presenta el marco teórico correspondiente al método genético (González 1991; Kline 1998; Ruiz, Bosch y Gascón 2015).

## 2.1 Marco legislativo

Las leyes que se han tenido en cuenta en la realización del presente Trabajo Fin de Máster aplican al ámbito nacional y regional. En el ámbito regional se han considerado las leyes correspondientes a la Comunidad Autónoma de Aragón, lugar de residencia de la autora. Las leyes consultadas son las siguientes:

### 2.1.1. Marco legislativo nacional

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE). Cuyo texto es modificado por:

- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE).

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

### 2.1.2. Marco legislativo regional

- Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, del Gobierno de Aragón, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

## 2.2 Dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra

Son numerosos los estudios que se han ocupado con problemas teóricos en la enseñanza del álgebra en las últimas décadas. Esto demuestra la relevancia de la temática, tanto a nivel escolar, como a nivel de investigación, siendo la determinación de obstáculos para el aprendizaje del álgebra uno de los objetivos más importantes de la didáctica de las matemáticas (Gallardo y Rojano, 1988). Tal y como apunta Socas "Las dificultades y los errores en el aprendizaje de las Matemáticas han sido y son hoy un foco de estudio e investigación en Educación Matemática, en el que a pesar de su antigüedad, [...], hay cuestiones importantes aún no resueltas." (2011, p.10).

Según Socas (2011), en la investigación sobre las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas se pueden identificar tres etapas. Una primera etapa en la que se hacen recuentos del número de soluciones incorrectas en situaciones problemáticas y se analizan los tipos de errores presentados, para detectar qué factores del contenido matemático derivan a ese error. En la segunda etapa, llevada a cabo a partir de la década de los ochenta, se indaga sobre el error, profundizando en el proceso de construcción de los contenidos matemáticos por parte del alumnado, intentando identificar patrones comunes. En esta etapa de estudio sin embargo, no se consiguió dar una explicación al origen de los diferentes tipos de errores detectados, siendo necesario encontrar aún un trato adecuado de los mismos. La mayor parte de estudios sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra se centran en esta etapa de estudio. En la tercera etapa se da un paso más, analizando las dificultades que se dan en el aprendizaje del álgebra de una manera global, estudiando los orígenes de los errores y proponiendo procedimientos para corregirlos.

Socas (2011) apunta a la organización de las dificultades en cinco categorías según su procedencia, asociadas a:

- La complejidad de los objetos de las matemáticas
- Los procesos del pensamiento matemático
- Los procesos de enseñanza desarrollados para su aprendizaje
- Los procesos del desarrollo cognitivo
- Las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas

En cuanto a los errores, Socas (2011) propone su análisis desde tres ejes con el fin de estudiar su origen:

- Obstáculo: cognitivo, didáctico y epistemológico
- Ausencia de sentido: semiótico, estructural y autónomo
- Actitudes afectivas: emociones, actitudes y creencias

### 2.2.1. Errores con origen en obstáculos

Cuando hablamos de obstáculo, nos referimos a un conocimiento adquirido, “que ha mostrado su efectividad en ciertos contextos” (Ruano, Socas y Palarea, 2003, p. 313). En el caso del álgebra, los alumnos llegan a la etapa de secundaria con unos conocimientos básicos de aritmética que les son suficientes para resolver los algoritmos con los que se han encontrado hasta entonces. Cuando se les plantean problemas algebraicos intentan hacer uso del conocimiento anterior, pero al revelarse éstos inadaptados a la nueva problemática, los alumnos cometen errores que se constituyen en obstáculos. Los así denominados obstáculos didácticos, pueden tener diferentes orígenes, tal y como detalla Brousseau: ontogénico, didáctico o epistemológico. Los obstáculos de origen ontogénico son los surgen a partir de las limitaciones en el desarrollo del niño. Los de origen didáctico surgen a raíz de una elección o de un proyecto de sistema educativo. Los obstáculos de origen epistemológico son inherentes al rol constitutivo en el conocimiento, se pueden encontrar en la historia de los propios conceptos. Los obstáculos suelen ser resistentes, y lo son más cuanto mejor adquiridos estén (Palarea y Socas, 1994).

En este punto es importante destacar, que el análisis histórico de la construcción del conocimiento matemático es una herramienta fundamental en la búsqueda de los obstáculos de origen epistemológico, sin ser sin embargo, la única herramienta disponible, siendo necesaria la existencia de pruebas complementarias.

Dentro de los obstáculos cognitivos se recoge el área de dificultades que Gallardo y Rojano denominan "Dualidad de la Operación" (1988). Estas dificultades se generan a causa de que las letras no son muy intuitivas como designación de valores simbólicos, por lo que los alumnos no las reconocen en primera instancia como un número. Al encontrarse una letra en una operación el alumno tiende a ejecutar acciones de inmediato, resistiéndose a aceptar una expresión algebraica como resultado. La dificultad de la comprensión de lo que significa la letra, si una variable o una incógnita, fue observado también a través de las investigaciones de Socas y Palarea (1997, citado en Serres, 2008).

Otra dificultad de este tipo es la relacionada con la diferencia entre la adición aritmética y la adición algebraica. En la aritmética el signo "+" es una pregunta, es decir, describe lo que se pide calcular. Sin embargo en álgebra, la expresión "x+3" nos da tanto lo que se pide, como el resultado. El cambio de dirección del proceso, en el que en el enunciado se da tanto la operación a realizar como el resultado, crea grandes confusiones.

La concatenación de símbolos también supone una gran dificultad para los alumnos en los inicios con el álgebra. En aritmética la concatenación implica adición, como en la numeración de valor posicional (Palarea y Socas, 1994). En el álgebra la concatenación denota multiplicación. Así, si le decimos a un alumno que el valor de x es 2 y le presentamos la expresión 4x, nos dirán que el resultado es 42, omitiendo el signo implícito de multiplicación que hay entre 4 y x.

### 2.2.2. Errores con origen en ausencia de sentido

Este tipo de errores se originan en los distintos estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos. Estos estadios con el estadio semiótico, el estructural y el autónomo. En el estadio semiótico, los nuevos signos y objetos matemáticos son caracterizados por otros ya conocidos. En el estadio estructural, los nuevos objetos y signos se estructuran de acuerdo a los a la organización de los objetos y signos antiguos. En el estadio autónomo, los nuevos objetos y signos se organizan con una estructura y significado propio (Socas, 2012). En general, tal como apunta Socas, "los modos de pensamiento provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático" (2012, p. 4)

Ruano et al. (2003) proponen la diferenciación de este tipo de errores en tres etapas distintas:

a) Errores del álgebra que están en la aritmética.
b) Errores de procedimiento.
c) Errores del álgebra debidos a características propias del lenguaje algebraico.

a) Errores del álgebra que están en la aritmética

El álgebra se considera normalmente como una generalización de la aritmética. Si bien es importante dominar los procesos y nociones aritméticas, el álgebra "requiere un cambio en el pensamiento [...] a proposiciones más generales sobre números y operaciones." (Kieran y Filloy, 1989). En todo caso, es común encontrar dificultades en el álgebra que provienen no del álgebra en sí, sino de problemas en el aprendizaje de la aritmética. Dentro de estos errores encontramos errores en las operaciones con fracciones, errores en el uso del paréntesis y en el orden de las operaciones, errores en la jerarquía convencional de las operaciones, uso inapropiado de fórmulas o reglas, mal uso de la propiedad distributiva, errores en el cálculo de potencias y raíces, errores relativos al uso de recíprocos, errores de cancelación, entre otros.

b) Errores de procedimiento

Este tipo de errores se dan cuando el alumno usa fórmulas o reglas de procedimiento de una manera incorrecta. Es por ejemplo el caso de los problemas, cuando se sigue un procedimiento inapropiado para conseguir resolverlos.

c) Errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico

Dentro de los errores propios del álgebra, la forma de ver el signo igual es una de las mayores dificultades a las que se enfrentan los alumnos. Al comenzar con el álgebra, los alumnos no ven el signo igual como un símbolo de equivalencia entre ambos miembros de una ecuación, sino que lo asocian a una acción, a tener que hacer algo. En el álgebra el signo de igualdad tiene un carácter dual (Gallardo y Rojano, 1988), por un lado como operador y por otro como equivalencia. Al enfatizar la noción de operador en la solución de ecuaciones, se pueden dar errores de "casi igualdad", tal como describen en sus estudios Gallardo y Rojano. Los alumnos guiados por sus conocimientos aritméticos, piensan que el resultado debería encontrarse en el lado derecho de una ecuación, pero, si se encuentran con ecuaciones en las cuales la incógnita se encuentra en este lado, les causa un verdadero conflicto, llegando incluso a violar las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad (Kieran y Filloy, 1989). La forma de ver el signo igual se extiende incluso durante los años de universidad, aunque se ha llegado a comprobar que una pobre comprensión de la equivalencia no representa falta de destreza o familiaridad con las ecuaciones lineales.

Gallardo y Rojano (1988) identificaron una serie de áreas de dificultad comunes en el aprendizaje del algebra, a través de un estudio clínico realizado. Las áreas identificadas se enumeran a continuación:

I. En cuanto a las **operaciones:**

1. Dualidad de la operación
2. Lectura de la operación
3. Inversión de operaciones
4. Naturaleza dual de la igualdad

II. En cuanto a la **naturaleza de los números:**

1. Enteros positivos
2. Enteros negativos
3. Racionales e irracionales
4. Polisemia de la incógnita

III. Métodos primitivos; el tanteo.
IV. Métodos escolarizados: el esquema.
V. Semántica y sintaxis del algebra elemental

1. Invención de un problema a partir de una ecuación dada
2. Lectura de la ecuación
3. Creación de códigos extra algebraicos

VI. El corte didáctico en el estudio de las ecuaciones lineales. Polisemia de la x.

### 2.2.3. Errores con origen en actitudes afectivas

La investigación en el dominio afectivo ha adquirido cada vez mayor relevancia, ya que se ha comprobado la influencia que éste ejerce en el aprendizaje, y por tanto es necesario conocer las creencias, actitudes y emociones que experimentan los alumnos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La actitud es el resultado de varias componentes, la afectiva, relacionada con lo que se siente hacia las matemáticas, la comportamental y de implicación, la cognoscitiva y contextual, que se ve influenciada por la opinión propia y de los que rodean al alumno, y las creencias sobre sí mismo con relación a la materia.

Las actitudes afectivas hacia el álgebra pueden producir errores de distinta naturaleza como faltas de concentración, bloqueos, olvidos, etc.

## 2.3 Historia del álgebra

Dentro de la historia de las matemáticas el lenguaje matemático ha ocupado un lugar especial. Las palabras para expresar ideas numéricas aparecieron muy lentamente a través de los años. Es así como las palabras para expresar números aparecieron incluso posteriormente que los signos, ya que la dificultad que suponía establecer frases bien moduladas para identificar un número concreto era mucho mayor que expresar los números en forma de barras, puntos, muescas en palos, entre otros (Boyer, 2010).

La tendencia natural del lenguaje se ha desarrollado de lo concreto a lo abstracto, encontrándose con numerosas dificultades en la historia, tal como lo describe Boyer

(1986): "Los miles de años que necesitó el hombre para extraer los conceptos abstractos de situaciones concretas repetidas son testigo de las dificultades que se han debido encontrar y superar para establecer unas bases, incluso muy primitivas, para la matemática." (p. 23)

La presencia de problemas algebraicos se remonta a la época de los **egipcios**, habiéndose encontrado en el Papiro de Ahmes problemas que no se refieren a objetos concretos, si no que requieren la solución de ecuaciones, equivalentes hoy en día a las ecuaciones lineales. A la incógnita, que hoy en día llamamos "x", se le conocía entonces como "aha" o "montón". (Boyer, 2010). Es así como el problema 24, pide la solución del montón: "si el montón y un séptimo del montón es igual a 19". Para resolver el problema, en el Papiro se supone un valor concreto para la incógnita, y se compara posteriormente el valor obtenido con el resultado pedido, para pasar a obtener mediante proporciones la respuesta correcta.

Los **babilonios**, con su sistema de numeración cuneiforme, alcanzaron una gran habilidad numérica y algebraica, tanto es así que constituyen en cierta medida el punto de partida del álgebra. Estaban familiarizados con la resolución de la ecuación completa de segundo grado, ya que habían desarrollado una gran flexibilidad de las operaciones algebraicas que les permitían transformar términos de una igualdad sumando igualdades, multiplicando cantidades a ambos miembros, factorizando y usando muchas otras herramientas que conocemos hoy en día. Las incógnitas las representaban por medio de las palabras "longitud", "anchura", "área" y "volumen".

En los textos babilónicos se pueden encontrar los tres tipos de ecuaciones cuadráticas en los que se clasificaron este tipo de ecuaciones en la época antigua:

1) $x^2 + px = q$
2) $x^2 = px + q$
3) $x^2 + q = px$

Por otra parte, en cuanto a las ecuaciones cúbicas, los babilonios resolvían las cúbicas puras consultando las tablas de cubos y raíces cúbicas que habían elaborado. Las ecuaciones cúbicas mixtas del tipo $x^3 + x^2 = a$ las resolvían a partir de las tablas de valores $n^3 + n^2$ de las que disponían. Los casos de ecuaciones cúbicas más generales los resolvían a través de sustituciones, por medio de las cuales convertían la ecuación a una del tipo mixto estándar, cuya solución consultaban en las tablas, para después calcular la incógnita. Lo más notable de los babilónicos es que consiguieron hacer todo este tipo de operaciones sin disponer de la notación que utilizamos hoy en día, formulando y resolviendo los problemas algebraicos de una forma completamente verbal, pero llegando aun así, a un nivel de abstracción remarcable.

Con los **griegos** el álgebra tomó un nuevo significado. Los problemas en los que dada la suma y el producto de los lados de un rectángulo, se pedía hallar los lados, que habían sido tratados por medio de un álgebra aritmética por los babilonios, exigían un trato diferente, llevando así al desarrollo de un álgebra geométrica. De esta manera determinaron una serie de procedimientos de "aplicación de áreas" (Boyer, 2010), por los cuales conseguían resolver las ecuaciones cuadráticas. Tal como describe Boyer, el álgebra geométrica griega era artificial y difícil, pero que suponía una herramienta muy cómoda para los geómetras griegos. Otros problemas sin embargo, como el trato geométrico que le daban a la identidad $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, resultan mucho más fáciles de comprender si los simbolizamos con cuadrados y rectángulos como lo hacían en aquella época. El álgebra geométrica de los griegos fue recogida en el Libro II de los Elementos de Euclides, en el que se demuestran 14 proposiciones algebraicas a partir de figuras y construcciones geométricas.

El más importante de los algebristas griegos fue **Diofanto** de Alejandría, quien marcó un rumbo nuevo del álgebra, separándose de los métodos geométricos griegos y volviendo a las raíces del álgebra babilónica. A diferencia de los babilonios, en su obra *Arithmetica*, Diofanto se dedica a la resolución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas (Boyer, 2010). El gran legado de Diofanto sin embargo, no fue la solución de problemas indeterminados por el cual tanto se le conoce, sino la transición al lenguaje algebraico sincopado que incorporó en su obra. Diofanto hace un uso sistemático de algunas abreviaturas para designar potencias de números y operaciones entre ellos. A la incógnita la llama *aritmo,* y representa sus potencias por medio de los símbolos que se recogen a continuación (Requena, 1998):

Tabla 1: Simbología usada por Diofanto

| $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ | $x^6$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta^{\gamma}$ | $K^{\gamma}$ | $\Delta^{\gamma}\Delta$ | $\Delta^{\gamma}K$ | $K^{\gamma}K$ |

Fuente: elaboración propia

Los coeficientes numéricos los incluía después de las potencias de la incógnita, no usaba ningún signo para la adición, pero si para la sustracción, el cual situaba justo antes de los términos que había que restar. Consiguiendo así escribir los polinomios de una manera casi tan clara como lo hacemos con la notación actual. En honor a Diofanto, las ecuaciones con coeficientes enteros cuyas soluciones son también números enteros se denominan hoy en día "ecuaciones diofánticas".

Por su parte los **indios** hicieron también progresos en álgebra. Para describir las operaciones se valieron de abreviaturas de palabras y de algunos símbolos. Cuando tenían más de una incógnita en una operación, usaban palabras que denotaban colores para describir cada una de ellas. Así llamaban incógnita a la primera, la siguiente negro, luego azul, amarillo y así sucesivamente. El álgebra hindú por lo tanto, era un álgebra cuasisimbólica.

Las contribuciones más importantes al álgebra por parte de los indios corren a cargo de **Brahmagupta**, el cual solucionó ecuaciones cuadráticas incluyendo las dos raíces. De esta manera Brahmagupta fue el primero en incorporar los números negativos, el cero y los números irracionales en el álgebra. El álgebra hindú se destaca por su desarrollo del análisis indeterminado, al que Brahmagupta hizo varias contribuciones (Boyer, 2010). Al igual que la de Diofanto, el álgebra de Brahmagupta era un álgebra sincopada, con las incógnitas representadas por medio de abreviaturas de palabras y las operaciones indicadas con símbolos o palabras.

Es con los avances de los **árabes**, con los que el álgebra tuvo un verdadero resurgimiento, siendo los artífices de las bases que llevaron al desarrollo del álgebra europea moderna. Los árabes tomaron y mejoraron los símbolos numéricos de los indios y la idea de la notación posicional. Sin embargo, no usaron ningún tipo de simbolismo algebraico, teniendo un álgebra completamente retórica, dando un paso atrás respecto a los avances de Diofanto. Los árabes rechazaron los números negativos, pero trabajaron libremente con los números irracionales. De hecho, el nombre que le damos hoy en día a esta rama de las matemáticas lo debemos a los árabes, y en especial al matemático y astrónomo Mohammed ibn-Musa Al-Khowarizmi. Álgebra proviene de la palabra *al-jabr*, que significa restauración o completación. Pero el término en sí se deriva de la obra más importante de Al-Kohwarizmi, *Al-jabr wa´l muqabalah*, en la que se expone de manera directa y elemental la resolución de ecuaciones, en especial las de segundo grado.

**Al-Khowarizmi** expone en su obra *De numero indorum* el sistema de numeración de una forma muy completa, por lo que este sistema se conoció más adelante como "el de Al-Khowarizmi" derivando al nombre "algorismi" y denominándose finalmente como algoritmo. El álgebra de Al-Khowarizmi se basa en los trabajos de Brahmagupta, pero a diferencia de éste, no usa ningún tipo de sincopación, usando un álgebra completamente retórica, utilizando incluso palabras para escribir los números. Su álgebra muestra influencias babilonias y griegas, y ejecuta algunas operaciones igual que Diofanto (Kline, 2012). La obra Al-jabr jugó un papel muy importante en la historia del álgebra, ya que desarrolla la solución de los seis tipos de ecuaciones posibles al combinar ecuaciones lineales y cuadráticas con raíz positiva. Al no considerar más que sumas en ambos lados de la igualdad, distingue entre tres tipos diferentes de ecuaciones de segundo grado completas. En la siguiente tabla se recogen los seis tipos de ecuaciones que desarrolla Al-Khowarizmi:

Tabla 2: Tipos de ecuaciones de Al-Khowarizmi

| | |
|---|---|
| Cuadrado de la cosa igual a cosas | $x^2 = bx$ |
| Cuadrado de la cosa igual a número | $x^2 = c$ |
| Cosas igual a número | $bx = c$ |
| Cuadrado de la cosa más cosas igual a número | $x^2 + bx = c$ |
| Cuadrado de la cosa más número igual a cosas | $x^2 + c = bx$ |
| Cuadrado de la cosa igual a cosas más número | $x^2 = bx + c$ |

Fuente: (Moreno, 2010)

Al-Khowarizmi reconoce las dos raíces de las ecuaciones cuadráticas, pero da únicamente las soluciones reales y positivas, pudiendo ser éstas irracionales. La exposición de sus soluciones es tan sistemática y exhaustiva que proporcionan un algoritmo clave para dominar su resolución. Lo que es nuevo en Al-Khowarizmi "no son pues los métodos de resolución, sino el establecimiento de un conjunto completo de formas canónicas todas ellas resolubles y la organización posterior de la aplicación a los problemas cuyas soluciones se organizan por esas formas canónicas." (Puig, 1997, p. 30). Es precisamente por este motivo por el que se le podría dar a este singular árabe el título de "padre del álgebra".

Otra de las grandes figuras de las matemáticas árabes fue Omar **Khayyam**, quien extendió el álgebra de Al-Khowarizmi hasta las ecuaciones cúbicas, las cuales resolvía por métodos geométricos, utilizando para ello las intersecciones de cónicas.

Khayyam no admitía sin embargo las raíces negativas ni consideraba todos los puntos de intersección de las secciones cónicas.

Tuvieron que pasar cientos de años, para que sucedieran avances en las matemáticas en general y en el álgebra en particular. Llegamos así a la Edad Media y nos encontramos con Leonardo di Pisa, más conocido como **Fibonacci**. Su gran obra *Liber Abaci* no trata del ábaco, sino que trata métodos y problemas algebraicos, recomendando el uso de los numerales hindú-arábigos. Al ser hijo de un mercader, Leonardo viajó mucho, aprendiendo los métodos algebraicos árabes y su numeración. Fibonacci se basó en muchas fuentes variadas, lo que llevó a que su obra recogiera métodos que eran demasiado avanzados para la comprensión de sus contemporáneos, por lo que no gozó de la popularidad esperada. Por otro lado, Jordano Nemorario, contemporáneo de Fibonacci, hizo un avance considerable al usar en su obra *Arithmetica*, letras para representar números, facilitando la formulación de teoremas algebraicos.

En el Renacimiento una de las figuras más representativas en lo que respecta al desarrollo del álgebra, es el fraile y matemático Luca **Pacioli**. Su obra *Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita*, se considera hoy en día el primer libro de álgebra impreso (Boyer, 2010), llegando a tener una gran influencia en su época. La parte de su obra dedicada al álgebra incluye las soluciones de las ecuaciones lineales y de segundo grado. La novedad en la obra de Pacioli es el uso que hace de las abreviaturas, utilizando las letras ya comunes en Italia p y m para representar la suma y la resta, e incorporando las abreviaturas *co*, *ce*, *cu* y *ae* para referirse a la *cosa* (incógnita), *censo* (el cuadrado de la cosa), *cuba* (el cubo de la incógnita) y *aequalis* (igual). El álgebra de Pacioli se caracterizó por tanto por ser retórica con un uso creciente de sincopación por medio de abreviaturas. Aparte de Pacioli, muchos otros autores se referían a la incógnita como cosa, llegando a conocerse el álgebra como el arte "cósica".

El álgebra germánica del Renacimiento introdujo el uso de los símbolos + y – para las operaciones aritméticas básicas de sumar y restar, desplazando las letras *p* y *m* usadas por los italianos. Se empiezan a usar además las fracciones decimales y el símbolo moderno de la raíces.

El año 1545 se suele considerar, tal como señala Boyer (1986), como "el que marca el comienzo del período moderno de la matemática", año en el cual Jerónimo

**Cardano** publica su *Ars magna* y con ella la solución de la ecuación cúbica y de la ecuación cuártica. Las soluciones de este tipo de ecuaciones fueron publicadas por Cardano, si bien la solución de la cúbica se debe a Niccolo Tartaglia y la de la cuártica a Ludovico Ferrari. El álgebra de Cardano era poco sincopada, por lo que las soluciones de las ecuaciones ocupaban varias páginas en estilo retórico. Los descubrimientos publicados en *Ars magna* supusieron un gran estímulo para intentar generalizar sus soluciones a ecuaciones de grado mayor que cuatro. Por otro lado la solución de la ecuación cúbica confronta con el problema abierto de las raíces cuadradas de números negativos, abriendo así una nueva puerta a los números imaginarios.

La figura central y más brillante de la transición del Renacimiento al mundo moderno fue François **Viète**, quien hizo sus mayores contribuciones en el campo del álgebra. En aritmética defendía el uso de fracciones decimales en lugar de las sexagesimales. En álgebra, siguiendo la idea de Diofanto de emplear letras, Viéte fue el primero en usarlas sistemáticamente, con el propósito no sólo de representar una incógnita o sus potencias, sino también de representar los coeficientes generales. De esta manera hacía una distinción clara entre parámetro e incógnita, usando una consonante para representar una cantidad conocida (parámetro) y una vocal para la cantidad desconocida (incógnita). A pesar de disponer de otros simbolismos existentes en su época, Viéte no llegó a usarlos todos, por lo que su álgebra continuó siendo sincopada. Seguía usando abreviaturas para expresar las potencias de la incógnita, la multiplicación, la división y la igualdad. Otra de las aportaciones importantes de Viéte, es que estableció una distinción entre la aritmética y el álgebra. Al álgebra la denominaba *logistica speciosa*, al razonar sobre "tipos" o "especies", y a la arimética *logistica numerosa* al tratar de números (Boyer, 2010).

Thomas **Harriot** dio un paso más respecto a Viéte, recuperando la idea de Stifel de escribir las potencias de la incógnita como vocales seguidas. Así por ejemplo, el cubo de la incógnita lo escribía como *AAA*. Harriot introdujo también los signos $>$ y $<$ para "mayor que" y "menor que", e hizo uso del signo de igualdad.

En el siglo XVII, con René **Descartes** el álgebra da un nuevo vuelco. Descartes retoma el uso de letras de Viéte e incorpora mejoras, usando las primeras letras del alfabeto para las cantidades conocidas y las últimas para las incógnitas, tal como se hace actualmente. Descartes acusaba al álgebra de ser un arte confuso y oscuro que desconcierta a la mente (Boyer, 2010), pero también acusa a la geometría de apoyarse demasiado en diagramas. Por tanto, Descartes se propone tomar lo mejor del álgebra y la geometría para corregir los defectos de ambas mutuamente. En su obra *La géométrie* Descartes muestra cómo interpretar geométricamente las operaciones algebraicas y se centra en aplicar el álgebra a problemas geométricos.

En el resto del siglo XVII y XVIII el álgebra adquiere su forma actual con la unificación y generalización del simbolismo, y a través de la clasificación y desarrollo de los diferentes métodos descubiertos (Corbalán, 2000).

A pesar de ser ya enunciado por D'Alembert con la introducción de los números complejos, no es hasta el siglo XIX cuando **Gauss** en su tesis doctoral demuestra el teorema fundamental del álgebra, el cual afirma que toda ecuación polinómica $f(x)=0$ tiene al menos una raíz, ya sean los coeficientes reales o complejos (Boyer, 1986). La demostración de Gauss se basa en consideraciones geométricas que no acababan de convencerle, por lo que publicó dos demostraciones más intentando conseguir una demostración puramente algebraica.

Desde que en el siglo XVI se publicaran las soluciones de las ecuaciones cúbicas y cuárticas, los intentos de resolver las ecuaciones quínticas habían sido múltiples. Nils Henrick **Abel** en su intento por conseguirlo, decidió realizar la inversión del problema, preguntándose qué condiciones debían cumplir las raíces para que una ecuación tenga solución. De esta manera consiguió demostrar que la ecuación de quinto grado no es resoluble por radicales. Con ello llegó a la conclusión de que no puede haber ninguna fórmula general que dé las raíces de una ecuación de grado mayor que 4 (Boyer, 1986).

George **Peacock** fue uno de los ingleses destacados en el desarrollo del álgebra. Con la publicación de su obra *Treatise on Algebra* intentó dar una estructura lógica al álgebra de la época, similar a los que Euclides consiguió con su obra los *Elementos*. Peacock fue además "un profeta en el desarrollo del álgebra abstracta" (Boyer, 1986). Otro de los ingleses destacados en esta rama fue **Hamilton**, descubridor de los cuaterniones. Para llegar a su descubrimiento Hamilton pasó primero los números complejos binarios a ternas de números ordenados, para después pasar a cuaternas de la forma $a+bi+cj+dk$. Por su parte **Boole** en su obra *Investigation of the Laws of Though*, construyo la lógica formal como un nuevo tipo de álgebra, la cual se conoce hoy en día como álgebra de los conjuntos o álgebra de la lógica.

El siguiente paso en la historia del álgebra lo da **Galois**, cuyas investigaciones se centraban en determinar las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones polinómicas por radicales. A diferencia de Abel, Galois buscó un criterio válido para todas las ecuaciones. El procedimiento elaborado por Galois consistía en "crear una estructura asociada a los coeficientes de la ecuación [...] y estudiar las características de los diferentes tipos de grupos que pueden aparecer." (Corbalán, 2000). Así, según como sean los grupos de coeficientes, define si la ecuación tiene solución por radicales. Este planteamiento que dio al problema, conocido hoy en día como teoría de Galois, fue una de las contribuciones más importantes del siglo XIX al álgebra, zanjando así lo que hasta entonces era su cuestión principal.

Con los avances de los matemáticos ingleses y tras las contribuciones de Galois, el álgebra tradicional daba paso al álgebra moderna, o álgebra abstracta. Con ello el álgebra deja de ser la ciencia de resolver ecuaciones, para ser el estudio de las estructuras algebraicas. El álgebra moderna ha seguido evolucionando hasta nuestros tiempos, llegando a encontrarse aplicaciones no solo en las matemáticas, sino en muchas otras ciencias.

## 2.4 Método genético

Como ya se comentó anteriormente, las matemáticas se suelen ofrecer a los alumnos como una ciencia cerrada, perdiendo su visión dinámica, y dejando atrás su evolución y desarrollo, descartando así la posibilidad de mostrar que es una ciencia en proceso continuo de cambio. La historia de las matemáticas nos da en este marco, una herramienta pedagógica para despertar la capacidad crítica del alumno, nos permite advertir los problemas que dieron lugar a los diferentes conceptos, y nos muestra el recorrido en la evolución de éstos (González, 1991).

La tendencia lógico deductiva de las últimas décadas en el campo matemático, ha hecho que esta ciencia se separe de la experiencia, retomando teorías anteriores de forma acumulativa, prescindiendo por tanto de las obras originales. Sin embargo, para lograr una comprensión completa y profunda de los conceptos fundamentales de una disciplina científica se necesita del conocimiento de su historia, tal como indica González (1991). Los alumnos deben por tanto de ser conscientes de que los conceptos que se les enseñan son el resultado de una larga evolución histórica.

En cuanto a las dificultades matemáticas, la historia nos brinda un punto excepcional de referencia, ya que es indudable, que las dificultades que encontraron los grandes matemáticos, supondrán grandes obstáculos para los alumnos. Una manera de sortear estas dificultades es superarlas de la misma manera en que lo hicieron los matemáticos a lo largo de los años, reviviendo paso a paso lo vivido para llegar a los conceptos complejos actuales.

Es importante apuntar, tal como sostienen Farmaki y Paschos (2007 citado en Rodríguez-Vásquez, Romero-Valencia y Henao-Saldarriaga, 2015) "que la historia puede ser un factor de motivación para los estudiantes para su aprendizaje y estudio de la matemática, ayudando a mantener el interés y entusiasmo de los alumnos en la asignatura." (p. 469), por lo que la introducción de la historia de la matemática en clase, podría evitar la aparición de errores originarios de la actitud afectiva.

La historia de las matemáticas puede usarse dentro de la enseñanza de diversas maneras: como introducción histórica a los temas a tratar, como indicaciones o notas históricas en los apuntes, como indicación de la corriente y etapa matemática a la que corresponde el temario, o mediante el método genético, el cual proseguiremos a describir más detalladamente.

El método genético "intenta reconstruir el clima psicológico que envuelve a cada momento creador que haya supuesto un salto cualitativo en la Historia de las Matemáticas" (González, 1991, p. 286). La práctica de este método permite conseguir una comprensión más profunda de los conceptos, a partir del seguimiento a grandes rasgos de la evolución histórica que ha llevado a la formulación del concepto aprendido. De esta manera los alumnos pueden ir siendo conducidos desde los planteamientos más básicos, hasta las formulaciones más abstractas, siguiendo el camino que los grandes matemáticos han seguido para llegar al alto nivel del conocimiento científico. Morris Kline, defensor de este método, señala que: "cada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si quiere alcanzar el nivel de pensamiento que mucha generaciones han alcanzado." (1998, p. 34). El método genético pretende en cierta forma alejarse de la tan impuesta lógica en las matemáticas, para acercar al alumno a una matemática más intuitiva

En cuanto al recorrido histórico es importante dejarle claro al alumno que éste no ha estado exento de complicaciones, pero no es necesario hacer pasar al alumno por ellas, intentando definir un camino recto a seguir. Es relevante en todo caso que la contextualización histórica se haga de manera que queden claras las necesidades que llevaron a la evolución del concepto, que se comprenda la motivación histórica pertinente.

La introducción del método genético en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y con él la introducción de la historia de las matemáticas en clase, permite además trabajar varias competencias clave del currículo como la conciencia y expresiones culturales, ya que el método vincula las matemáticas con la filosofía y las ciencias sociales.

Tras analizar la evolución del álgebra elemental como saber a enseñar en el sistema educativo español, Ruiz et al (2015) proponen un modelo epistemológico de referencia (MER) relacionado con el desarrollo histórico del algebra en la matemática. De esta manera esquematizan la evolución del saber sabio en tres etapas:

1. Álgebra como sector de las matemáticas sabias, encargado de la resolución de problemas aritméticos. Esta etapa va desde sus inicios hasta el Renacimiento.
2. Desarrollo de la teoría de ecuaciones. Álgebra como método para operar los diferentes tipos de formas y de ecuaciones. En esta etapa, que transcurre desde el Renacimiento hasta Descartes, el álgebra se constituye como nueva rama de las matemáticas.
3. Algebrización de todos los ámbitos de la matemática, como la geometría, la teoría de números, el análisis matemático y el cálculo infinitesimal.

En relación con la evolución histórica Ruiz et al interpretan el álgebra elemental como “una herramienta que permite llevar a cabo una actividad de modelización que acaba por afectar a todos los sectores de la matemática mediante un proceso que denominamos proceso de algebrización.” (2015, p. 114).

El álgebra escolar que se presenta en la etapa de la ESO en España se ubica en la parte más elemental de la segunda etapa de evolución, consistiendo en la comprensión de enunciados de problemas algebraicos y el posterior planteamiento y resolución de una ecuación. En la propuesta de intervención que se presenta a continuación, se trabajará a partir del método genético las primeras dos etapas de algebrización, procurando en todo momento, conseguir una disminución de las dificultades de aprendizaje de los alumnos.

# 3. Propuesta de intervención

## 3.1 Presentación

Tal como se describe en la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, “Las Matemáticas en el 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria pretenden continuar el proceso, iniciado en Primaria, de construir los fundamentos del razonamiento lógico-matemático”. El álgebra es una de las ramas de las matemáticas que más contribuyen a desarrollar este razonamiento lógico en los alumnos.

Con el fin de evitar el surgimiento de errores y dificultades posteriores a causa del mal uso de su peculiar lenguaje, la introducción al álgebra que se da en el primer curso de la ESO debe de ser cuidada, yendo de lo concreto a lo abstracto, avanzando de una manera progresiva al ritmo de las necesidades de los alumnos.

El objetivo principal del presente TFM es diseñar una propuesta didáctica que permita introducir el álgebra a partir del método genético, es decir, haciendo pasar a los alumnos por el camino que recorrieron los grandes matemáticos hasta el desarrollo del lenguaje algebraico tal y como lo conocemos en la actualidad. De esta manera se pretende sentar unas bases sólidas en este campo para conseguir una comprensión profunda de la temática.

Para conseguir este objetivo se plantea en primer lugar un contexto y destinatarios de esta propuesta de intervención, enmarcándola dentro de la legislación actual vigente. Teniendo en cuenta los contenidos, competencias y estándares a alcanzar se proponen una serie de objetivos didácticos a conseguir a lo largo de la unidad didáctica propuesta. Posteriormente se plantean una serie de actividades en las que se va avanzando a lo largo de la historia desde el álgebra retórica hasta llegar al álgebra simbólica. Para ello se aprovecha la historia de las matemáticas, como fuente inagotable de material didáctico que es (González, 2004), aportando problemas interesantes a la vez que motivantes. Finalmente se presenta una evaluación de la propuesta con el fin de valorar su potencial implantación en el aula.

## 3.2 Contexto y destinatarios

La presente propuesta de intervención va dirigida a los alumnos de 1º de ESO de la asignatura de Matemáticas. Los contenidos a trabajar mediante el método genético están incluidos dentro del Bloque 2: Números y Álgebra de dicha asignatura.

En cuanto al centro en el que se imparte se asume un instituto con recursos mínimos de TIC´s, contando por tanto con: una pizarra digital por aula, un ordenador por aula aparte del aula de informática, conexión a internet y que los alumnos dispongan de unas bases del uso de estas tecnologías.

El número de alumnos por clase se supone de 27, el cual es el número máximo de alumnos por aula objetivo que se establece el Decreto 30/2016, de 22 de marzo, del Gobierno de Aragón. La propuesta se plantea teniendo en cuenta un grupo de alumnos heterogéneo, con diversas capacidades de aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, en el desarrollo de la metodología no se tienen en cuenta necesidades educativas especiales, las cuales requieren una atención personalizada del docente, acorde a las necesidades del alumno.

## 3.3 Objetivos didácticos

Los objetivos específicos de la propuesta de intervención están relacionados con los objetivos generales de etapa recogidos en el Artículo 11. Objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria del Real Decreto 1105/2015, de 26 de diciembre. En este Artículo se detallan los objetivos referentes a los logros que el estudiante debe alcanzar al finalizar la Secundaria Obligatoria, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificadas a tal fin. De manera más específica, mediante el método genético que se emplea en la propuesta para la introducción del lenguaje algebraico, se trabajan los siguientes objetivos de etapa (p.177):

*f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.*

*j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.*

Los objetivos específicos a alcanzar mediante el método de la propuesta de intervención se recogen a continuación:

1. Reconocer la utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos
2. Conocer la nomenclatura relativa a las expresiones algebraicas y sus elementos a lo largo de la historia y utilizarlas.
3. Calcular el valor numérico de operaciones algebraicas sencillas
4. Conocer y comprender los conceptos y la nomenclatura relativa a las ecuaciones y sus elementos a lo largo de la historia y utilizarlos.
5. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.
6. Utilizar los contenidos estudiados para resolver problemas de la vida real.

## 3.4 Competencias

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), en su compromiso por conseguir los objetivos educativos de la Unión Europea, desarrolla un sistema educativo basado en competencias. Con la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), se va un paso más hacia delante poniendo el énfasis en un modelo de currículo basado en competencias. Estas competencias clave se establecen en la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, y se muestran a continuación con las siglas que se reconocerán en sucesivas menciones:

a) Comunicación lingüística. (CL)
b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. (CMCT)
c) Competencia digital. (CD)
d) Aprender a aprender. (CAA)
e) Competencias sociales y cívicas. (CSC)

f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. (SIEE)
g) Conciencia y expresiones culturales. (CEE)

A través de las actividades que se proponen en la presente propuesta se busca que el alumno adquiera e integre efectivamente las siete competencias del currículo. Esta propuesta de intervención busca la adquisición de nuevas capacidades y conocimientos para los alumnos, que potencien su desarrollo no solo en el campo de las matemáticas, sino además que le ayuden en su aprendizaje permanente y en formarse como ciudadanos íntegros. Mediante el aprendizaje colaborativo se potenciarán las competencias en comunicación lingüística (CCL), sociales y cívicas (CSC). La WebQuest planteada dentro de las actividades a realizar permite también trabajar las competencias aprender a aprender (CAA), el sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE), la competencia digital (CD) y la conciencia y expresiones culturales (CEC).

La competencia de conciencia y expresiones culturales se trabaja de una forma muy profunda, ya que la historia de las matemáticas es el hilo conductor de la propuesta, y con ello los alumnos serán conscientes de la herencia cultural que nos han dejado los grandes matemáticos a lo largo de siglos, aprenderán a aplicar diferentes habilidades de pensamiento, y por último, apreciarán y valorarán la ciencia de las matemáticas como una obra que se ha nutrido del trabajo de cientos de personas.

## 3.5 Contenidos

Los contenidos y criterios de evaluación que se detallan a continuación han sido extraídos de la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

*Bloque 2: Números y álgebra*

Contenidos:

- Iniciación al lenguaje algebraico.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.

- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.
- Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.
- Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas.
- Transformación y equivalencias.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución. Interpretación de la solución.
- Ecuaciones sin solución.
- Resolución de problemas

Criterios de evaluación:

- Crit.MA.2.6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas. (CMCT)

- Crit.MA.2.7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado, aplicando para su resolución métodos algebraicos. (CMCT)

Estándares de aprendizaje evaluables

Los estándares recogidos en la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, corresponden a la asignatura de Matemáticas para los cursos de 1º y 2º de la ESO. Por tanto, los estándares que se detallan a continuación se encuentran adaptados a lo que los alumnos deben de alcanzar finalizado el 1º de ESO.

Est.MA.2.6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.

Est.MA.2.6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.

Est.MA.2.6.3. Utiliza las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.

Est.MA.2.7.1. Comprueba, dada una ecuación, si un número es solución de la misma.

Est.MA.2.7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer grado, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

En el Anexo I se recoge una tabla detallada con los objetivos didácticos, estándares y contenidos correspondientes.

## 3.6 Temporalización

La propuesta de intervención se desarrolla a lo largo de diez sesiones de trabajo en clase, en las que se pretende cubrir los contenidos y objetivos planteados. En la siguiente tabla se recogen las sesiones con las correspondientes actividades, objetivos didácticos, estándares de aprendizaje, competencias que se trabajan y evidencias de evaluación. La tabla se encuentra también disponible en el Anexo II.

Tabla 3: Temporalización de la propuesta

| Objetivo didáctico | Estándar | Sesión | Actividades | Tiempo | Competencias | Evidencias de evaluación |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.1.12.1. | 1, 2 | Introducción: ¿Qué es el álgebra?<br>WebQuest Historia del Álgebra | 2h | CM, CL, CSC, CAA, SIEE, CD, CEC | Mural didáctico. Plantilla de seguimiento del trabajo en grupo |
| | | | | | | |
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 3 | Lenguaje algebraico. Los egipcios - tanteo. Los babilonios. | 1h | CM, CL, CEC | Plantilla de observación |
| | | | | | | |
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 4 | Lenguaje algebraico. Los griegos - Diofanto. Los árabes - Al-Khowarizmi. | 1h | CM, CL, CEC | Plantilla de observación |
| | | | | | | |
| 1,2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 5 | Lenguaje algebraico. La evolución de las letras: Pacioli, Viéte y Descartes. | 1h | CM, CL, CEC | Plantilla de observación |
| | | | | | | |
| 3 | Est.MA.2.6.2. | 6 | Valor numérico - juego con tarjetas. | 1h | CM | Resultados del juego |
| | | | | | | |
| 4 | Est.MA.2.6.3.<br>Est.MA.1.5.1. | 7 | Monomios, igualdad y ecuaciones.<br>Balanza de ecuaciones. | 1h | CM, CD, CL, CSC | Informe |
| | | | | | | |
| 5 | Est.MA.2.7.1. | 8 | Resolución de ecuaciones de primer grado. Dominó. | 1h | CM, CAA, CEC | Resultados del juego |
| | | | | | | |
| 6 | Est.MA.2.7.2.<br>Est.MA.1.2.4.<br>Est.MA.1.6.2. | 9 | Problemas de la vida cotidiana. Batalla de problemas | 1h | CM, CAA, CSC, CL | Coevaluación de problemas |
| | | | | | | |
| 1, 2, 3, 4, 5 | | 10 | Evaluación final | 1h | CM, CAA, SIEE | Examen |

Fuente: elaboración propia

En la primera sesión se pretende motivar al alumnado para seguir aprendiendo mediante la actividad de la WebQuest. Tras las dos primeras sesiones se mantendrá una metodología activa, procurando siempre la implicación de los alumnos en las actividades y en ir formando su propio aprendizaje. El desarrollo de los contenidos se trabajará por tanto mediante metodologías variadas, que tengan en cuenta los diferentes estilos de aprendizaje de los alumnos y que promuevan un aprendizaje significativo de las matemáticas. Aparte de la historia, que es el eje vertebrador de la propuesta, se le da una especial atención al juego como elemento didáctico.

Al inicio de cada clase los alumnos realizarán un pequeño resumen, de forma oral, de lo trabajado la sesión anterior, para captar la atención del alumnado. Es importante prestar especial atención al feedback que se reciba de los alumnos, a través de estos resúmenes, de la evaluación continua y de la participación en clase, para ajustar la metodología y los tiempos de clase a las necesidades de todo el alumnado.

## 3.7 Actividades

A continuación, con el fin de exponer las actividades de manera conjunta, se recoge una tabla explicativa de las diferentes sesiones y actividades a realizar en la propuesta.

Tabla 4: Actividades, recursos y tipo de actividad

| Objetivo didáctico | Estándar | Sesión/ Tiempo | Actividades | Recursos | Tipo de actividad | Competencias |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.1.12.1. | 1, 2<br>2h | Introducción: ¿Qué es el álgebra?<br>WebQuest Historia del Álgebra | Pizarra digital<br>Ordenadores en sala de informática<br>Webquest | Debate sobre el álgebra.<br>Explicación de objetivos de la UD.<br>WebQuest sobre historia del álgebra (Anexo III).<br>Elaboración de mural didáctico y presentación del trabajo realizado.<br>Trabajo en grupos de 4 personas. | CM, CL, CSC, CAA, SIEE, CD, CEC |
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 3<br>1h | Lenguaje algebraico.<br>Los egipcios - tanteo.<br>Los babilonios. | Pizarra digital<br>Hojas de problemas | Resolución de problemas del papiro de Rhind<br>Resolución de problemas babilonios.<br>Trabajo individual y en parejas. | CM, CL, CEC |
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 4<br>1h | Lenguaje algebraico.<br>Los griegos - Diofanto. Los árabes - Al-Khowarizmi. | Pizarra digital<br>Video problema camellos | Resolución de problemas de Diofanto.<br>Resolución de problemas árabes (Al-Khowarizmi).<br>Trabajo en grupos de 3 personas. | CM, CL, CEC |
| 1,2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 5<br>1h | Lenguaje algebraico.<br>La evolución de las letras: Pacioli, Viéte y Descartes. | Pizarra digital<br>Hoja de ejercicios<br>Portal de juegos | Narración de la evolución histórica de las letras como símbolo de las incógnitas.<br>Explicación sobre el concepto de expresión algebraica.<br>Realización de ejercicios (Anexo IV).<br>Juego sobre lenguaje algebraico.<br>Trabajo individual | CM, CL, CEC |
| 3 | Est.MA.2.6.2. | 6<br>1h | Valor numérico - juego con tarjetas. | Pizarra digital<br>Juego: "Valor numérico con tarjetas. Álgebra" | Juego con tarjetas para trabajar el valor numérico de una expresión algebraica (Anexo V).<br>Trabajo individual. | CM |

| Objetivo didáctico | Estándar | Sesión/ Tiempo | Actividades | Recursos | Tipo de actividad | Competencias |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | Est.MA.2.6.3.<br>Est.MA.1.5.1. | 7<br>1h | Monomios, igualdad y ecuaciones.<br>Balanza de ecuaciones. | Pizarra digital<br>Hoja de ejercicio<br>Ordenador para cada alumno<br>Balanza de ecuaciones | Explicación del concepto de igualdad y ecuación.<br>Realización de ejercicio partiendo de problemas históricos (Anexo VI).<br>Explicación de las propiedades de las igualdades.<br>Trabajo con la balanza de ecuaciones y posterior realización de informe.<br>Trabajo individual y discusión en parejas. | CM, CD, CL, CSC |
| 5 | Est.MA.2.7.1. | 8<br>1h | Resolución de ecuaciones de primer grado. Dominó. | Pizarra digital<br>Juego: "Dominó de ecuaciones"<br>Portal de juegos | Debate y puesta en común sobre procedimiento para resolución de ecuaciones.<br>Resolución de ecuaciones planteadas con problemas históricos.<br>Juego de dominó de ecuaciones (Anexo VII).<br>Trabajo en parejas. | CM, CAA, CEC |
| 6 | Est.MA.2.7.2.<br>Est.MA.1.2.4.<br>Est.MA.1.6.2. | 9<br>1h | Problemas de la vida cotidiana. Batalla de problemas | Pizarra digital<br>Hoja de problemas | Resolución de problemas (Anexo VIII).<br>Discusión de estrategias para resolver problemas.<br>Batalla de problemas.<br>Trabajo individual y en grupos de 4 personas. | CM, CAA, CSC, CL |
| 1, 2, 3, 4, 5 | | 10<br>1h | Evaluación final | Examen | Realización de prueba individual (Anexo IX). | CM, CAA, SIEE |

Fuente: elaboración propia

**Sesión 1: Introducción**

La primera sesión de la propuesta se comenzará con un debate abierto sobre la pregunta: ¿qué es el álgebra? Para ello se hará una lluvia de ideas en la que los alumnos podrán dar sus opiniones, aportaciones y comentarios. A continuación, tras haber captado la atención de los alumnos, se expondrán los objetivos de la unidad didáctica, propocionandole a los alumnos una guía para el aprendizaje.

**Sesión 1 y 2: WebQuest Historia del Álgebra**

Tras la introducción se describirá la primera actividad a realizar, consistente en una WebQuest sobre la historia del álgebra. A partir de ella los alumnos investigarán sobre los primeros pasos en la historia de esta rama de las matemáticas y elaborarán un mural didáctico que refleje las respuestas a las preguntas planteadas. La información recabada servirá de guía para la metodología que se va a seguir en la propuesta. El objetivo que se pretende con la Webquest es motivar a los alumnos y darles unos conocimientos básicos para poder abordar el temario del álgebra, sin tener que profundizar más en la historia.

El enlace de la WebQuest es https://sites.google.com/site/wqhistoriadelalgebra/. Los apartados que la componen se recogen en el propio enlace, o bien en el Anexo III.

**Sesión 3: Lenguaje algebraico. Los egipcios. Los babilonios.**

En esta sesión se abordará de cerca la evolución del lenguaje algebraico en la historia. Para ello se iniciará con los egipcios y los problemas con una incógnita que se tratan en sus papiros. Tras un breve resumen de la actividad tratada en las últimas sesiones, se retoma el álgebra en la época de los egipcios, su concepto de incógnita como "montón" o "cantidad" y el uso que le daban para resolver problemas de reparto de tierras entre otros. Tras los egipcios se hará un pequeño repaso a los babilonios, que, al no haber prestado mucha atención a las ecuaciones lineales, aparentemente por considerarlas demasiado elementales, no disponen apenas de ejemplos en sus tablilla de este tipo de problemas. Toda la actividad planteada se realizará sin emplear el lenguaje algebraico actual, sirviéndose únicamente de palabras y operaciones aritméticas.

*Problemas del papiro de Rhind*

Para analizar la forma que tenían los egipcios de resolver los problemas algebraicos, nos serviremos de algunos de los que se han encontrado en el papiro de Rhind (López, 2017).

*Problema 26:* "Una cantidad y su cuarto se convierten en 15, y se pide calcular la cantidad."

Tras plantear el problema los alumnos en parejas deberán intentar resolverlo. Después de 5 minutos de reflexión, se hará una puesta en común de la metodología empleada por los alumnos. Finalmente se expondrá de forma simplificada la resolución de este problema por medio de tanteos y después se expondrá la forma original de resolución de los egipcios:

- Solución simplificada: Tanteo

  Al tener la fracción, tanteamos cantidades múltiplos de 4 para anular la fracción.

  Tomamos la cantidad de 4. Obtenemos que ¼ de 4 es 1. En total tenemos 5.

  Tomamos la cantidad de 8. Obtenemos que ¼ de 8 es 2. En total tenemos 10.

  Tomamos la cantidad de 12. Obtenemos que ¼ de 12 es 3. En total tenemos 12+3=15, que es nuestra solución. La cantidad buscada es por tanto 12.

- Solución original: método de "regula falsi" (López, 2017)

  1.- "Toma el 4 y entonces se obtiene 1/4 de él en 1, en total 5"

  2.- "Divide entre 5 15 y obtienes 3"

  Ahora para averiguar el valor real hay que encontrar un número N tal que al multiplicarlo por el resultado de aplicar el valor estimado nos de 15, es decir $5*N = 15$, $N=15/5 = 3$

  3.- "Multiplica 3 por 4 obteniendo 12"

  El valor buscado es el resultado de multiplicar la N anterior por el valor estimado inicial, esto es 3 * 4 que es la cantidad buscada.

  Ahmes sigue después: "cuyo (referido al 12 anterior) 1/4 es 3, en total 15"

Para afianzar esta forma de resolución de problemas, se propone otro problema de similares características:

*Problema:* Una cantidad y su mitad se convierten en 9. Calcula la cantidad.

- Solución simplificada: Tanteo

  Al tener la fracción, tanteamos cantidades múltiplos de 2 para anular la fracción.

Tomamos la cantidad de 2. Obtenemos que ½ de 2 es 1. En total tenemos 3.
Tomamos la cantidad de 4. Obtenemos que ½ de 4 es 2. En total tenemos 6.
Tomamos la cantidad de 6. Obtenemos que ½ de 6 es 3. En total tenemos 6+3=9 que es nuestra solución. La cantidad buscada es por tanto 9.

- Solución egipcia: método de "regula falsi"
  1.- Toma el 2 y entonces se obtiene 1/2 de él en 1, en total 3.
  2.- Divide 9 entre 3 y obtienes 3.
  3.- Multiplica 3 por 2 obteniendo 6.
  La solución de la cantidad es 6.

En resumen, como hemos podido comprobar, los egipcios no tenían una manera de calcular lo desconocido. Lo que hacían eran suposiciones de la cantidad. "La imposibilidad de calcular con lo desconocido para resolver el problema conduce a hacer una suposición sobre cuál es el resultado." (Puig, 2006)

*Problemas Babilonios:*
Los enunciados de los problemas babilonios estaban disfrazados con terminología geométrica, por algo designaban a las incógnitas a través de las palabras "longitud", "anchura", "área" y "volumen". Los babilonios trabajaron en la resolución de ecuaciones de segundo grado mediante "el método akadio", o método de completar el cuadrado (Puig, 2006). Los problemas de ecuaciones con una sola incógnita son escasos, a continuación trabajaremos uno de los encontrados en sus tablillas.
"Cinco veces una longitud da un total de 8"
Tras plantear el problema volvemos a proceder de igual manera que en los problemas egipcios. Después de 5 minutos de debate en parejas, se analiza la solución en la pizarra aportando ideas entre todos.

- Solucion simplificada:
  Buscamos el inverso de 5, que es 1/5. Multiplicamos 8 por el inverso de 5, resultando 8 x 1/5=8/5. La longitud buscada es 8/5 ó 1,6.
- Solución babilonia: tablas sexagesimales
  En las tablas en base sexagesimal hallaban el reciproco de cinco que era 12/60 y en la tabla de multiplicar por 8, encontramos 8 x 12/60 = 1 36/60

**Sesión 4. Lenguaje algebraico. Diofanto. Los árabes**

Como continuación de la actividad de la sesión 3, se retomará el recorrido histórico del lenguaje algebraico. Para esta actividad los alumnos trabajarán en grupos de 3.

*Problemas de Diofanto:*

Para comenzar se debatirá el problema de la vida de Diofanto, conocido como Epigrama de Metrodoro. (Requena, 1998).

> Esta es la tumba que guarda las cenizas de Diofanto.
> Es verdaderamente maravillosa, porque, gracias a un artificio aritmético,
> descubre toda su existencia.
> Dios le permitió ser niño durante un sexto de su vida;
> luego de un doceavo sus mejillas se poblaron de barba;
> después de un séptimo se encendió en él la llama del matrimonio,
> del que a los cinco años tuvo un hijo;
> pero ese niño, desgraciado aunque amado apasionadamente,
> murió apenas llegado a la mitad de vida alcanzada por su padre.
> Cuatro años más vivió Diofanto
> engañando su pena con investigaciones
> sobre la ciencia de los números.

Para resolver el problema los alumnos se podrán valer del símbolo ς, el cual era utilizado por Diofanto para designar a la incógnita *aritmo*. Los alumnos disponen de toda la simbología aritmética que ya conocen, por lo que obviamente, no resolverán el problema como lo hubiese formulado Diofanto, el cual no utilizaba los signos de suma ni de la igualdad. Es de esperar que los alumnos formulen la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{6}\varsigma + \frac{1}{12}\varsigma + \frac{1}{7}\varsigma + 5 + \frac{1}{2}\varsigma + 4 = \varsigma$$

Para resolverla se propondrá utilizar el mínimo común denominador para poder operar con fracciones, tema que ya deberán manejar los alumnos para poder desarrollar la actividad. De esta manera obtendrán:

$$\frac{14}{84}\varsigma + \frac{7}{84}\varsigma + \frac{12}{84}\varsigma + \frac{42}{84}\varsigma + 5 + 4 = \varsigma$$

$$\frac{75}{84}\varsigma + 9 = \varsigma$$

Para resolver la formulación final, es probable que los alumnos utilicen el tanteo, o método de regula falsi, utilizado con los problemas egipcios. Para eliminar la fracción tomarán 84 como supuesta incógnita, siendo ésta precisamente la solución, ya que 75+9=84.

Para comprobar la correcta comprensión del problema se lanzarán preguntas relacionadas con el problema mismo, por ejemplo: ¿Cuántos años duró la niñez de Diofanto?, ¿A qué edad se casó?, ¿Con cuántos años tuvo a su hijo?, etc.

*Problema Aritmética, I.1:* "Descomponer un número en dos partes cuya diferencia sea dada. Sea 100 el número dado y 40 la diferencia." (Requena, 1998).

Tras intentar su solución, se discutirá en la pizarra la solución de Diofanto:

- Suponemos que la parte menor es un *aritmo*.
- La mayor es 1 *aritmo* más 40 unidades.
- La suma de ambas es 2 *aritmos* más 40 unidades.
- La cual suma 100.
- Restando los términos semejantes, es decir, 40 unidades de 100 y 40 unidades de 2 *aritmos* y 40 unidades.
- Los dos *aritmos* que quedan valdrán 60 unidades.
- Y cada *aritmo* 30.
- Que será la parte menor y la mayor 30 más 40, o sea. 70 unidades.

*Problemas árabes. Al-Khowarizmi:*

Los árabes empleaban el álgebra para muchos fines, entre otros para calcular herencias, tal y como se presenta en el problema de los camellos. El problema se expone mediante el visionado del video "El problema del reparto de los camellos" (Rodriguez en Youtube, 2014). Mediante los métodos empleados anteriormente los alumnos deberán intentar solucionar el problema en cuestión.

Centrando la atención en Al-Khowarizmi, de los tipos de ecuaciones que categoriza, estudiando la metodología de solución, los del tipo "Cosas igual a número" son los que se ajustan al nivel inicial de introducción de los alumnos de 1º de la ESO.

Para la resolución de los problemas algebraicos árabes nos centraremos en las operaciones que propone Al-Khowarizmi:

- "al-jabr" (restaurar) que es una operación mediante la cual se eliminan cantidades negativas de una ecuación sumando la misma cantidad a cada lado. Esto solo ocurre con cantidades negativas, ya que no se concebían los números negativos.
- "al-muqabala" (reducir) que es la operación por la que se agrupan cantidades semejantes a un mismo lado de la ecuación

Tras la explicación del algoritmo que propone Al-Khowarizmi procedemos a aplicar ambas operaciones en ejemplos:

Ejemplo 1: cosa menos tres dirhams resultan cuatro dírhams. Para visualizar la operación usaremos la letra "c" para la cosa.

$$c-3=4$$

Para modificar la ecuación a la forma canóniga es necesario "restaurar" la cosa de los tres dírhams substraídas y sumarlos a los cuatro

$$x-3+3=4+3 \longrightarrow c=7$$

Ejemplo 2: doble de cosa y triple de cosa resulta diez dírhams.

$$2c+3c=10$$

En este caso sería necesario "reducir" (*al'muqâbala*) operando cantidades semejantes:

$$5c=10$$

Y finalmente reducir a una sola cosa dividiendo por 5 a cada lado. $c=2$

**Sesión 5. La evolución de las letras: Pacioli, Viéte y Descartes.**

La sesión comenzará con el relato de la siguiente historia:

Un día, en el siglo XV, en pleno Renacimiento, un monje y matemático italiano tuvo una idea. ¿Por qué no designar una incógnita a través de una abreviatura, en lugar de escribir siempre la palabra "cosa"? Será mucho más fácil operar así, se dijo. Entonces escribió *"co"* en lugar de cosa, *"ce"* para su cuadrado y *"cu"* para su cubo. La idea de Luca Pacioli era ingeniosa, pero, ¿y si existían dos incógnitas?

Entonces en la transición del Renacimiento al mundo moderno un matemático francés recordó a Diofanto. ¿Por qué no volver a emplear solo letras para las incógnitas? ¿Y qué hacer en el caso de tener una cantidad conocida que se quisiera parametrizar? La idea de François Viète fue genial. Decidió usar una consonante para representar una cantidad conocida (parámetro) y una vocal para la cantidad desconocida (incógnita).

Ya en el siglo XVII un matemático francés, René Descartes, se propuso mejorar la simbología de Viéte. Fue él el que decidió nombrar "*x*", "*y*" o "*z*" a las incógnitas, y "*a*", "*b*" o "*c*" a las cantidades conocidas.

Y así llegamos después de este viaje en el tiempo a la *"x"*, la letra que usamos comúnmente para simbolizar nuestra cantidad desconocida.

Una vez aclarada la historia del actual lenguaje algebraico, se define el concepto de expresión algebraica: "Una expresión algebraica es una combinación de números y letras unidos o ligados por las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división. "

Posteriormente se trabajan los ejercicios recogidos en el Anexo IV. Como tarea para casa los alumnos realizarán el juego "Lenguaje algebraico" del portal de juegos Celebriti (Cerebriti Technologies S.L., s.f.).

**Sesión 6. Valor numérico – juego con tarjetas.**

Tras haber analizado la historia y haber adquirido nociones básicas sobre las expresiones algebraicas, se propone trabajar el valor numérico de una expresión algebraica a través de un juego. La actividad se plantea con el fin de familiarizar al alumno con la sustitución de variables, el manejo de las letras y las operaciones entre términos, especialmente en el caso de operaciones con el signo menos.

El juego que se propone es el ideado por Ana García Azcarate, publicado en su página web "Pasatiempos y juegos en las clase de matemáticas" (García, 2011). El juego en cuestión se llama "Valor numérico con tarjetas. Álgebra". Las indicaciones del juego, así como el tablero y las tarjetas se recogen en el Anexo V.

La actividad se llevará a cabo de forma individual, de manera que el profesor pueda comprobar el avance de cada alumno y detectar las dificultades existentes.

**Sesión 7. Monomios, igualdad y ecuaciones.**

Antes de introducir las ecuaciones se debe realizar una explicación del trato de los monomios para afianzar las operaciones entre éstos, posteriormente se definen los conceptos de igualdad y ecuación, detallando las partes y características de esta última.

*Suma y resta de monomios*

Como ya abordó en la sesión 5, los términos en x se componen de un coeficiente y una parte literal. En una expresión algebraica los monomios que tienen la misma parte literal se denominan monomios o términos semejantes. Los monomios semejantes se pueden operar o "reducir" (al'muqâbala) como lo llamaba Al-Khowarizmi, te acuerdas?
Para sumar o restar monomios semejantes se suman o se restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

*Igualdad*

El signo "=", como pudimos comprobar con nuestro viaje en el tiempo, no se introdujo hasta el siglo XVI. Viéte no llegó por ejemplo a usarlo, usando todavía la abreviatura *ae* de la palabra *aequalis*. La introducción del signo igual simplificó el lenguaje algebraico, pudiendo usarse para designar una igualdad numérica o una algebraica.

- Una igualdad numérica está formada por dos expresiones numéricas separadas por el signo =.
- Una igualdad algebraica se tiene cuando en alguna de las expresiones intervienen letras o incógnitas.
    - Si la igualdad algebraica se verifica para cualquier valor de la variable hablamos de una IDENTIDAD.
    - Si la igualdad algebraica se cumple sólo para algunos valores de la variable hablamos de ECUACIÓN.

*Ecuaciones*

Seguro que las ecuaciones te son familiares. Los problemas de los matemáticos que estudiamos al inicio de la propuesta se pueden expresar mediante ecuaciones, que lo que consiguen, es simplificar su lenguaje y agilizar la forma de su resolución.

- Lo que en la historia se ha llamado "montón", "aritmo" o "cosa", hoy en día se conoce como incógnita.
- A los valores que toma la incógnita para que se cumpla la igualdad se les llama soluciones de la ecuación.
- A la expresión a la izquierda del signo igual se le llama primer miembro, a la de la derecha, segundo miembro.

Una vez expuestos todos los conceptos se realiza un ejercicio, en el que los alumnos deben completar una tabla con los conceptos aprendidos, partiendo de los problemas que se han expuesto en las primeras sesiones. El ejercicio se recoge en el Anexo VI.

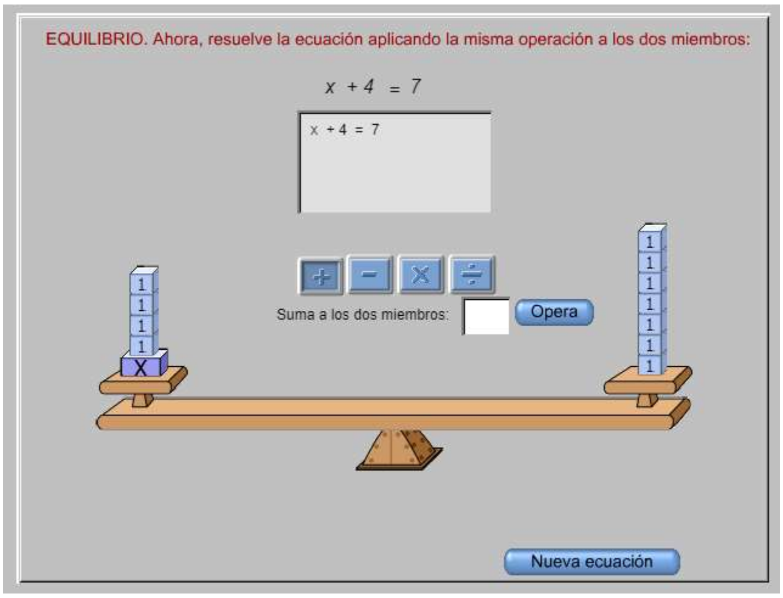
A continuación se expondrá la importancia de las propiedades de las igualdades para obtener una ecuación equivalente, es decir, con la misma solución.

- *Suma*: si se suma o resta un número o una expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

- *Producto*: si se multiplica o divide los dos miembros de una ecuación por el mismo número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

La igualdad se puede ejemplificar con una balanza en equilibrio, en la que, lo que hagamos en un lado, lo tenemos que hacer en el otro, para que el equilibrio se mantenga. Para comprender mejor este concepto los alumnos trabajarán con la balanza de ecuaciones por medio de los ordenadores (IES Pravia - Educastur, s.f.), la cual se refleja en la siguiente imagen.

Ilustración 1: Balanza de ecuaciones




Fuente: (IES Pravia - Educastur, s.f.)

Los alumnos podrán experimentar con la balanza, observando qué sucede cuando mueven algún término, cuando realizan una operación en los dos miembros, y cómo terminan resolviendo la ecuación. Trabajarán individualmente, pero irán comentando en parejas, las observaciones hechas. Como resultado de esta actividad los alumnos deberán entregar un informe, en el que detallen el procedimiento que, bajo su punto de vista, se debe seguir para resolver una ecuación.

**Sesión 8. Resolución de ecuaciones de primer grado.**

Para abordar la explicación sobre la solución de ecuaciones, se hará una puesta en común de los procedimientos a los cuales los alumnos han llegado después de la actividad de la balanza. De esta manera, entre todos, se describirá el algoritmo a seguir para resolver una ecuación de primer grado:

1. Quitar paréntesis aplicando la propiedad distributiva (en el caso de que los haya)
2. Eliminar denominadores multiplicando por el m.c.m. de los denominadores.
3. Operar, teniendo en cuenta las propiedades de la igualdad, para conseguir dejar en el primer miembro los términos con x, y en el segundo miembro los términos independientes.
4. Reducir los términos semejantes.
5. Obtener el valor de la incógnita.

Para practicar este algoritmo se resolverán, siguiendo estos pasos, las ya trabajadas ecuaciones que se han tratado en la evolución histórica.

En este punto es importante echar la vista atrás y recordar cómo se solucionaron las ecuaciones en un principio. Se pretende crear una especie de debate, en el que los alumnos puedan discutir qué tanto se facilita la resolución de las ecuaciones con los métodos modernos. En el caso de Al-Khowarizmi por ejemplo, es interesante observar, que su método de resolución no dista mucho del actual.

Para finalizar la sesión, se resolverán una serie de ecuaciones, algunas de ellas con soluciones negativas, para avanzar un paso más en su correcta comprensión. Las ecuaciones se solucionarán a modo de juego, en parejas, a través de un dominó. Para conseguir la siguiente ecuación se debe resolver correctamente la ecuación de partida y obtener así la siguiente ficha. La dificultad de las ecuaciones va aumentando, para conseguir un asentamiento del contenido. El dominó a trabajar se recoge en el Anexo VII.

Como tarea opcional para casa los alumnos podrán realizar los juegos "Ecuaciones de primer grado con una incógnita" y "La ciudad de las ecuaciones" del portal de juegos Celebriti (Cerebriti Technologies S.L., s.f.).

**Sesión 9. Problemas de la vida cotidiana.**

Para finalizar la unidad didáctica se propone una sesión de resolución de problemas, con el fin de cerrar el círculo, y terminar con lo que precisamente se comenzó.

Los problemas además son una herramienta muy importante en el aprendizaje del álgebra, ya que para resolverlos "se necesita desarrollar el concepto de incógnita, hacer determinadas generalizaciones, establecer relaciones cuantitativas entre datos e incógnitas del problema, utilizar adecuadamente los símbolos, y finalmente establecer la ecuación o ecuaciones adecuadas y resolverlas, interpretando después las soluciones obtenidas" (Azarquiel, 1993 citado en Serres, 2008)

Para comenzar la sesión se comentará la actividad de la sesión anterior y se resolverán dudas. Seguidamente se trabajarán individualmente 3 problemas, los cuales se exponen en el Anexo VIII. Tras la resolución del primer problema se discutirá el procedimiento que se ha llevado a cabo y se planteará entre todos una estrategia a seguir, la cual podría ser:

1. Leer bien el enunciado del problema, procurar entenderlo.
2. Buscar una estrategia para resolverlo, plantear una ecuacion que resuelva el problema.
3. Desarrollar estrategia, resolver la ecuación.
4. Comprobar el resultado e interpretarlo.

Después de solucionar todos los problemas propuestos se hará la actividad "Batalla de problemas". Para ello los alumnos se repartirán en grupos de cuatro, en los cuales deberán idear un problema por grupo, que necesite de la solución de una ecuación de primer grado para su resolución. Una vez definido el problema, cada uno expondrá el suyo ante la clase, para que los demás grupos puedan intentar resolverlo.

Para finalizar la actividad cada grupo le pondrá una nota a los grupos restantes. La batalla la ganará el grupo que haya obtenido la nota más alta por parte de sus compañeros.

**Sesión 10. Evaluación**

En la última sesión de la unidad didáctica, se realizará una prueba final individual que durará toda la sesión. La evaluación, como parte del proceso de aprendizaje, servirá para comprobar el nivel de adquisición de competencias y de comprensión del contenido estudiado a lo largo de las 9 sesiones. La prueba en cuestión se recoge en el Anexo IX.

## 3.8 Recursos

Los siguientes recursos didácticos contribuyen a lograr los objetivos didácticos planteados y a facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje previsto para esta propuesta de intervención.

Materiales:
- Bibliográficos: dependiendo del libro de texto que se utilice en el centro, éste servirá como material complementario.
- De cálculo: calculadora personal
- De escritura: bolígrafos de distintos colores, lápices, goma de borrar y cuaderno

Recursos:
- *Humanos:*

Profesor: recurso motivador, orientador y evaluador
Alumno: sujeto activo de las experiencias de aprendizaje
Profesionales especialistas: orientadores, psicólogos, pedagogos,...
- *Físicos:*

Aula específica equipada
Aula de informática
Zonas de trabajo común: salón de actos, biblioteca, laboratorios,...
- *Informáticos y nuevas tecnologías:*

Pizarra digital
Ordenador en el aula
Ordenadores de sobremesa en el aula de informática
Recursos Web: Google Sites, Padlet, balanza de ecuaciones, portal de juegos, etc). (Ver webgrafía).

## 3.9 Evaluación

La evaluación permitirá valorar el grado de adquisición de competencias de los alumnos, en base a lo recogido en la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, del Gobierno de Aragón. Se realizará por tanto una evaluación continua, formativa e integradora. La evaluación continua, se realizará a lo largo de todo la unidad didáctica, recogiendo la información a través de diversas evidencias de evaluación, de forma que en todo momento se puedan detectar dificultades y realizar acciones correctoras, si fueran necesarias. La evaluación será formativa, ya que la información recogida durante el proceso servirá de guía para ajustar el diseño de aprendizaje según el grupo de alumnos. Durante todo el proceso de aprendizaje que se desarrolla en la propuesta de intervención, se tiene en cuenta la consecución de los objetivos establecidos para la etapa, en especial el objetivo j) referente al conocimiento y respeto de la historia propia. Se tiene en cuenta además el desarrollo de las competencias clave, garantizando así una evaluación integradora del proceso de aprendizaje del alumnado

En general se establecen tres fases en la evaluación:

1. *Evaluación inicial*: con el objetivo de conocer el nivel de conocimientos previo de cada alumno y también como grupo. Al tratarse de un tema totalmente nuevo para los alumnos, la evaluación inicial se va a realizar a través de la observación de la actividad de la WebQuest. Los contenidos previos de los alumnos en aritmética, se evaluarán a través de las unidades didácticas precedentes. Esta evaluación no computará para la calificación.

2. *Evaluación formativa*: realizada a lo largo de la unidad didáctica, teniendo en cuenta tanto el progreso individual como los trabajos en grupo. Los trabajos grupales realizados en clase (WebQuest y batalla de problemas), así como las actividades que requieran la entrega de un informe, serán evaluados a través de rúbricas que definan claramente el resultado esperado. La participación de los alumnos en clase, el trabajo de los problemas, ejercicios y juegos planteados en clase se evaluarán a través de una rúbrica, que servirá como plantilla de seguimiento del profesor, de manera que tanto los alumnos como el docente, puedan comprobar la evolución del proceso. Las rúbricas de evaluación se recogen en el Anexo X. Se proporcionará a los alumnos evaluaciones escritas en los trabajos entregados, de manera que reciban un feedback constante sobre el proceso de aprendizaje y los puntos mejorables.

3. *Evaluación final*: para comprobar si los alumnos han aprendido los conceptos y han adquirido las competencias objetivo. La evaluación final se realizará a través del examen de la unidad didáctica y de la evaluación del cuaderno de clase. Esta nota computará a su vez en la evaluación continua de la asignatura.

Criterios de calificación:

Para calificar las evaluaciones se tendrán en cuenta los instrumentos de evaluación descritos anteriormente. Los porcentajes que implica cada uno, y que determinarán la nota del alumno, se recogen en la siguiente tabla:

**Tabla 5:** Evaluación, instrumentos y porcentajes

| Objetivo didáctico | Estándar | Sesión | Actividades | Competencias | Evidencias de evaluación | Instrumentos | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1. Est.MA.1.12.1. | 1, 2 | Introducción: ¿Qué es el álgebra? WebQuest Historia del Álgebra | CM, CL, CSC, CAA, SIEE, CD, CEC | Mural didáctico. Plantilla de seguimiento. | Rúbrica 1 | 10% |
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1. Est.MA.2.6.1. | 3 | Lenguaje algebraico. Los egipcios - tanteo. Los babilonios. | CM, CL, CEC | Plantilla de observación | Rúbrica 2 | 15% |
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1. Est.MA.2.6.1. | 4 | Lenguaje algebraico. Los griegos - Diofanto. Los árabes - Al-Khowarizmi. | CM, CL, CEC | Plantilla de observación | Rúbrica 2 | |
| 1,2 | Est.MA.1.3.1. Est.MA.2.6.1. | 5 | Lenguaje algebraico. La evolución de las letras: Pacioli, Viéte y Descartes. | CM, CL, CEC | Plantilla de observación | Rúbrica 2 | |
| 3 | Est.MA.2.6.2. | 6 | Valor numérico - juego con tarjetas. | CM | Resultados del juego | Rúbrica 2 | 5% |
| 4 | Est.MA.2.6.3. Est.MA.1.5.1. | 7 | Monomios, igualdad y ecuaciones. Balanza de ecuaciones. | CM, CD, CL, CSC | Informe | Rúbrica 3 | 5% |
| 5 | Est.MA.2.7.1. | 8 | Resolución de ecuaciones de primer grado. Dominó. | CM, CAA, CEC | Resultados del juego | Rúbrica 2 | 5% |
| 6 | Est.MA.2.7.2. Est.MA.1.2.4. Est.MA.1.6.2. | 9 | Problemas de la vida cotidiana. Batalla de problemas | CM, CAA, CSC, CL | Coevaluación de problemas | Rúbrica 4 | 5% |
| 1, 2, 3, 4, 5 | | 10 | Evaluación final | CM, CAA, SIEE | Examen | | 50% |
| | | | | | Cuaderno | Rúbrica 5 | 5% |
| | | | | | | **TOTAL** | **100%** |

Fuente: elaboración propia

## 3.10 Evaluación de la propuesta

Mediante la presente propuesta de intervención se pretende realizar la introducción del álgebra recorriendo los pasos de los grandes matemáticos, para conseguir sortear las dificultades que se pueden encontrar los alumnos, que no son otras que las que se encontraron a lo largo de la historia. Con ello se busca una comprensión del álgebra de una forma más intuitiva, consiguiendo un aprendizaje profundo que siente unas bases sólidas para la etapa de secundaria. Con el fin de evaluar la efectividad de la propuesta en cuanto a los objetivos planteados, se proponen tres puntos a llevar a cabo:

1. *Evaluación de los resultados académicos:*
   Se propone hacer una comparación entre los resultados obtenidos en el control de la unidad didáctica a través del método tradicional y a través del

método genético desarrollado en la propuesta de intervención. A comparación se puede realizar entre dos años académicos diferentes, en los que se hayan utilizado los dos métodos. Si bien al tratarse de diferentes grupos y de alumnado de diferentes características, los resultados académicos han de esperarse diferentes, este tipo de evaluación permite comprobar a priori, si el aprendizaje a través del método genético mejora los resultados obtenidos por los alumnos.

2. *Evaluación de los alumnos*
   Para evaluar la motivación de los alumnos y su implicación en las actividades propuestas, se propone realizar una encuesta a los alumnos al término de la unidad didáctica. A partir de la encuesta se podrá valorar además la aceptación de los alumnos hacia esta metodología y su propia percepción de las ventajas de ésta. La opinión de los alumnos es una gran herramienta para identificar mejoras que se podrían instaurar en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La encuesta para los alumnos se recoge en el Anexo XI.

3. *Evaluación de los docentes*
   El docente, como ejecutor en primera línea de la propuesta didáctica, es el que más información puede proporcionar sobre la calidad de ésta. Es él el que sabe cuál fue la evolución de la propuesta en clase, cuáles fueron las actitudes que mostraron los alumnos y qué resultados tuvo en su clase. En definitiva, es capaz de reconocer debilidades y fortalezas de la propuesta. Para conseguir recoger la opinión de los docentes que instauren la presente propuesta en sus aulas, se propone realizar una encuesta, la cual se incluye en el Anexo XI.

# 4. Conclusiones

Tal como se expuso en la introducción, las matemáticas son presentadas a los alumnos hoy en día como un producto de conocimientos y procedimientos cerrados. El caso de la introducción a la rama del álgebra en 1º de ESO no suele ser la excepción, de manera que los alumnos adquieren el concepto de variable pasando primero por un proceso de simbolización antes de uno de generalización.

Partiendo de este panorama educativo, se perseguía a lo largo de este trabajo un objetivo general que permitiera mejorar esta problemática y que consiguiera dar una experiencia a los alumnos mucho más enriquecedora. Para conseguir alcanzar el objetivo principal propuesto, se pretendía conseguir a lo largo del trabajo una serie de objetivos específicos, cuya consecución se analiza en el presente apartado.

El primer objetivo planteado ha sido la identificación de las principales dificultades en el aprendizaje del álgebra que experimentan los alumnos. El análisis realizado a diferentes estudios y literatura existente sobre el tema, han permitido reconocer cuales son los principales obstáculos que encuentran los alumnos en el aprendizaje del álgebra y los errores que cometen. Dichas dificultades y errores se han tenido en cuenta la hora de diseñar las actividades de la propuesta, procurando evitar su aparición a través de la metodología empleada.

El segundo objetivo planteado ha sido el análisis de la historia del álgebra. Para ello se ha analizado la evolución de esta rama de las matemáticas desde los egipcios hasta el álgebra moderna, haciendo especial hincapié en las primeras fases de desarrollo de las ecuaciones de primer grado. El estudio de los principales pasos que dieron los grandes matemáticos para llegar a la formulación actual, establece el núcleo de la propuesta didáctica, permitiendo a los alumnos seguir estos pasos marcados para llegar al objetivo propuesto.

La secuenciación de actividades, se ha desarrollado siguiendo el siguiente objetivo planteado, es decir, permitiendo el paso por las fases históricas del desarrollo del álgebra. Tras un breve repaso por la historia, a partir de la WebQuest, las actividades van siguiendo un orden cronológico en el tiempo, avanzando de lo concreto a lo abstracto, del lenguaje general al simbolismo, creando una transición cuidada en el lenguaje algebraico. En la secuenciación de actividades se ha procurado comenzar con un problema situado en la realidad, tras generalizar e intentar resolverlo con los conocimientos existentes, se han ido formalizando los conceptos, hasta volver a retomar los problemas de partida para conseguir resolverlos de una manera más eficiente, dando sentido a la solución obtenida. De esta manera se consigue cerrar el ciclo para que tenga lugar un proceso de institucionalización del saber en el alumno, lo que garantiza un aprendizaje profundo.

El objetivo planteado respecto a las competencias clave se ha cumplido satisfactoriamente, al incluir actividades diversas que potenciaban la adquisición de éstas. De esta manera, mediante la introducción de las TIC, del aprendizaje colaborativo y de la historia de las matemáticas, no se trabajan únicamente conceptos matemáticos, sino que se pretende conseguir una formación integral de personas, que las prepare para su vida futura. El trabajo colaborativo planteado en diversas actividades, fomenta a su vez la participación de todo el alumnado, impulsando el debate, la investigación y la creatividad entre ellos.

Por último, y como culminación de los objetivos, la introducción de los conceptos algebraicos a través de la historia por medio de las actividades propuestas, debería conseguir sortear las dificultades que existen en la introducción del álgebra, cuestión sin embargo que sólo se puede comprobar, una vez se haya puesto en práctica la presente propuesta. No obstante, la introducción escalonada del concepto de variable, pasando primero por una generalización, permite evitar la dificultad en la comprensión del significado de las letras. El énfasis puesto en el proceso histórico de los signos y las actividades trabajadas, especialmente la de la balanza, permiten evitar la dificultad derivada de la dualidad del signo de igualdad, y en general diversas dificultades en cuanto a las operaciones. Partir en las actividades de métodos primitivos como el tanteo, para ir avanzando en complejidad y destreza en los métodos de resolución de ecuaciones, permiten a los alumnos identificar lo mucho que se facilita el trabajo al emplear los métodos adecuados, evitando así las dificultades derivadas de usar precisamente estos métodos primitivos.

En síntesis, se considera que el desarrollo del presente trabajo, compuesto por un marco teórico de referencia y una propuesta adaptada a las necesidades del aula, ha posibilitado la elaboración de una propuesta de intervención en el aula fundamentada en información fiable y verídica, consiguiendo un resultado razonado y acorde al alumnado al que va dirigido, a la vez que innovador. La propuesta por tanto puede contribuir a evitar obstáculos cognitivos, didácticos y epistemológicos en el aprendizaje del álgebra, así como evitar la aparición de errores con origen en la ausencia de sentido o en las actitudes afectivas, aumentando así el interés por la materia, en particular por la rama del álgebra, y consiguiendo mejorar el rendimiento de los alumnos.

## 5. Limitaciones y prospectiva

Una de las limitaciones encontradas en la elaboración del presente trabajo, ha sido la escasez de fuentes existentes que recojan experiencias vividas en el aula usando el método genético en la asignatura de matemáticas. Si bien se dispone de bibliografía que describa las ventajas de este método, no existen apenas registros de la efectividad de este método en clase.

La principal limitación que presenta esta propuesta de intervención es la imposibilidad de su evaluación, al no haberse podido poner en marcha en el aula. Por este motivo, la propuesta no ha podido ser comprobada y analizada dentro del contexto para el cual se ha desarrollado, y por ende no se dispone de información acerca de su acogida tanto por parte de los alumnos como de los docentes. Tampoco se ha podido comprobar la consecución de uno de los objetivos específicos, concretamente, el de la disminución de las dificultades en el aprendizaje del álgebra, para lo cual se necesitaría no solo de la implantación de la propuesta en el aula, sino de la observación y seguimiento del aprendizaje del álgebra de éstos alumnos en las etapas más avanzadas.

El factor motivacional juega también un importante papel en la puesta en marcha de esta propuesta, y en caso de no trabajarse de una manera adecuada, puede llegar a ser una limitación en la consecución de los objetivos. La historia no suele gozar de la aceptación por parte del alumnado, siendo común la percepción de ella como algo irrelevante y desactualizado. Es por ello que la disposición y motivación del docente es clave en este punto, debiendo transmitirles a sus alumnos la importancia que tiene la historia en el estado actual de nuestras vidas, y en particular en el campo de las matemáticas, para lograr la motivación del propio alumnado.

Es por ello que como prospectiva, se plantea el uso de la historia de las matemáticas más allá de la presente unidad didáctica, incorporándola en las demás unidades didácticas. La utilización de la historia de las matemáticas puede realizarse de diferentes maneras: bien a través de una pequeña introducción al inicio de cada unidad didáctica como exposición de cada tema, por medio de indicaciones, resúmenes o notas históricas a entregar en los apuntes, o bien mediante indicaciones sobre la corriente matemática a la que se debe la introducción de un concepto determinado. Al familiarizar al alumno con la historia de las matemáticas, se conseguirá que se muestre con una actitud más abierta a ésta, que identifique su utilidad en el aprendizaje de las matemáticas y que comprenda la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana.

Como líneas de investigación futuras, se propone continuar con el uso del método genético en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra en el primer ciclo de educación secundaria. La introducción de las ecuaciones de segundo grado siguiendo el orden de evolución de los conceptos dentro de la historia, podría resultar de gran interés para los alumnos, tras haber trabajado esta propuesta de intervención. Descubrir la forma de resolverlas por parte de los babilonios, de los árabes, en especial de Al-Khowarizmi y de los matemáticos modernos, facilitaría la comprensión profunda de los contenidos. De forma análoga se propone continuar con la enseñanza de la resolución de ecuaciones de mayor grado, y en general en la introducción de conceptos algebraicos de mayor complejidad.

## 6. Referencias bibliográficas

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Boyer, C. B. (2010). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Cerebriti Technologies S.L. (s.f.). *Celebriti*. Recuperado el 15 de noviembre de 2017 de https://www.cerebriti.com/

Corbalán, F. (2000). *Galois: Revolución y matemáticas*. Madrid: Nivola.

Esquinas, A. M. (2008). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense, Madrid. Recuperada de http://eprints.ucm.es/8283/

Gallardo, A. y Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición de lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(2), 155-188.

García, A. (2011). *Pasatiempos y juegos en la clase de matemáticas*. Recuperado el 15 de noviembre de 2017 de https://anagarciaazcarate.wordpress.com

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18/1*(52), 7-33.

Godino, J. D. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Recuperado el 15 de noviembre de 2017 de http://www.ugr.es/~jgodino/

González, P. M. (1991). Historia de las matemáticas: integración cultural de las matemáticas, génesis de conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las ciencias revista de investigación y experiencias didácticas*, *9*(3), 281-289.

González, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*, *45*, 17-28.

IES Pravia - Educastur. (s.f.). Recuperado el 13 de noviembre de 2017, de http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/recursos_2005/interactivos/balanza/balanza1.htm

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *7*(3), 229-240.

Kline, M. (1998). *El fracaso de la matemática moderna - Por qué Juanito no sabe sumar*. Madrid: Siglo XXI Editores S.A.

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial.

López, F. (2017). *La tierra de los faraones*. Recuperado el 14 de Noviembre de 2017 de http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

Moreno, R. (2010). *Al-Jwarizmi: El algebrista de Bagdad*. Madrid: Nivola.

Palarea, M. M. y Socas, M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Revista Suma*, *16*, 91-98.

Puig, L. (1997). Capítulo 3: Análisis fenomenológico. En L. Rico, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori: Universitat de Barcelona, Instituto de Ciencias de la Educación.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En J. Aymerich, y S. Macario, *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57). Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Requena, Á. (1998). *El álgebra: del arte de la cosa a las estructuras abstractas*. Madrid: Santillana.

Rodríguez-Vásquez, F., Romero-Valencia, J. y Henao-Saldarriaga, S. (2015). Concepciones de profesores de nivel medio superior sobre el uso de la historia de la matemática. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 469-475). Alicante: SEIEM.

Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En E. Castro (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 311-322). Granada: Universidad de Granada.

Ruiz, N., Bosch, M.y Gascón, J. (2015). El problema didáctica del álgebra elemental: un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT*, *4*(2), 106-131. Recuperado de http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2015.1386

Serres, Y. (2008). Ejercicios, problemas y modelos en la enseñanza del álgebra. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 175-191). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. - Díaz de Santos.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación, 12* (1), 122-142.

Socas, M. M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77,* 5-34. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Apertura.pdf

Socas, M. M. (2012). El Análisis del Contenido Matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la Investigación y al Desarrollo Curricular en Didáctica de la Matemática. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez y A. Maz (Eds), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

*Webgrafía*

Cerebriti Technologies S.L. (s.f.). *Celebriti. Ecuaciones de primer grado con una incógnita*. Recuperado el 15 de noviembre de 2017 de https://www.cerebriti.com/juegos-de-matematicas/ecuaciones-de-primer-grado-con-una-incognita#.Wgq3LcbibIU

Cerebriti Technologies S.L. (s.f.). *Celebriti. La ciudad de las ecuaciones*. Recuperado el 15 de noviembre de 2017 de https://www.cerebriti.com/juegos-de-matematicas/la-ciudad-de-las-ecuaciones

Cerebriti Technologies S.L. (s.f.). *Celebriti. Lenguaje algebraico*. Recuperado el 15 de noviembre de 2017 de https://www.cerebriti.com/juegos-de-matematicas/lenguaje-algebraico#.Wgq208bibIU

*El problema del reparto de los camellos*. Rodriguez, J.L. (Publicador). (2014). [Video]. Recuperado el 14 de noviembre de 2017 de: https://www.youtube.com/watch?v=70pRNnBhwwM

García, A. (2011). *Pasatiempos y juegos en la clase de matemáticas. Valor numérico con tarjetas. Algebra*. Recuperado el 15 de noviembre de 2017 de https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2011/09/10/valor-numerico-con-tarjetas-juego/

IES Pravia - Educastur. (s.f.). Recuperado el 13 de noviembre de 2017, de http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/recursos_2005/interactivos/balanza/balanza1.htm

Loewenstein, C. (2017). *WQ Historia del Álgebra*. https://sites.google.com/site/wqhistoriadelalgebra/

*Legislación*

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, 295, de 10 de diciembre de 2013.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, 106, de 4 de mayo de 2006.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, núm. 25, de 29 de enero de 2015, pp 6986 – 7003.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, del Gobierno de Aragón, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón, núm. 105, de 2 de junio de 2016, pp. 12640-13458.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, núm.3, de 3 de enero de 2015, pp.169-546

# ANEXOS

# ANEXO I

TABLA OBJETIVOS, ESTÁNDARES Y CONTENIDOS

| Objetivos didácticos | Estándares de aprendizaje evaluables | Contenidos |
|---|---|---|
| **1.** Reconocer la utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos | Est.MA.1.3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.<br><br>Est.MA.1.12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. | Iniciación al lenguaje algebraico. Comprensión de la evolución de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico. |
| **2.** Conocer la nomenclatura relativa a las expresiones algebraicas y sus elementos a lo largo de la historia y utilizarlas. | Est.MA.2.6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas. | El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. |
| **3.** Calcular el valor numérico de operaciones algebraicas sencillas | Est.MA.2.6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. | Valor numérico de una expresión algebraica. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. |

| | | |
|---|---|---|
| **4.** Conocer y comprender los conceptos y la nomenclatura relativa a las ecuaciones y sus elementos a lo largo de la historia y utilizarlos. | Est.MA.2.6.3. Utiliza las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.<br><br>Est.MA.1.5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico. | Reconocimiento de las características de las ecuaciones. Transformación y equivalencias. |
| **5.** Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. | Est.MA.2.7.1. Comprueba, dada una ecuación, si un número es solución de la misma. | Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución. Interpretación de la solución. Ecuaciones sin solución. |
| **6.** Utilizar los contenidos estudiados para resolver problemas de la vida real. | Est.MA.2.7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer grado, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.<br><br>Est.MA.1.2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.<br><br>Est.MA.1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. | Resolución de problemas |

# ANEXO II

TABLA ACTIVIDADES DE LAS SESIONES, OBJETIVOS, ESTÁNDARES Y EVIDENCIAS DE EVALUACIÓN

| Objetivo didáctico | Estándar de aprendizaje | Sesión | Actividades | Tiempo | Competencias | Evidencias de evaluación |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.1.12.1. | 1, 2 | Introducción: ¿Qué es el álgebra?<br>WebQuest Historia del Álgebra | 2h | CM, CL, CSC, CAA, SIEE, CD, CEC | Mural didáctico<br>Plantilla de seguimiento |
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 3 | Lenguaje algebraico. Los egipcios - tanteo. Los babilonios. | 1h | CM, CL, CEC | Plantilla de observación |
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 4 | Lenguaje algebraico. Los griegos - Diofanto. Los árabes - Al-Khowarizmi. | 1h | CM, CL, CEC | Plantilla de observación |
| 1,2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 5 | Lenguaje algebraico. La evolución de las letras: Pacioli, Viéte y Descartes. | 1h | CM, CL, CEC | Plantilla de observación |
| 3 | Est.MA.2.6.2. | 6 | Valor numérico - juego con tarjetas. | 1h | CM | Resultados del juego |
| 4 | Est.MA.2.6.3.<br>Est.MA.1.5.1. | 7 | Monomios, igualdad y ecuaciones. Balanza de ecuaciones. | 1h | CM, CD, CL, CSC | Informe |
| 5 | Est.MA.2.7.1. | 8 | Resolución de ecuaciones de primer grado. Dominó. | 1h | CM, CAA, CEC | Resultados del juego |
| 6 | Est.MA.2.7.2.<br>Est.MA.1.2.4.<br>Est.MA.1.6.2. | 9 | Problemas de la vida cotidiana. Batalla de problemas | 1h | CM, CAA, CSC, CL | Coevaluación de problemas |
| 1, 2, 3, 4, 5 | | 10 | Evaluación final | 1h | CM, CAA, SIEE | Examen |

# ANEXO III

WEBQUEST

WQ HISTORIA
DEL ÁLGEBRA

Buscar en este sitio

Portada | Introducción | Tarea | Proceso | Evaluación | Conclusión | Guía didáctica

## Portada

# HISTORIA DEL ÁLGEBRA

## UN VIAJE A TRAVÉS DE LA EVOLUCIÓN DEL LENGUAJE ALGEBRAICO

Autor: Claudia Loewenstein
Titulación: Máster en Educación Secundaria
Curso: 1º ESO

TFM Claudia Loewenstein - UNIR 2017

iciar sesión | Actividad reciente del sitio | Informar de uso inadecuado | Imprimir página | Con la tecnología de Google Si

# WQ HISTORIA DEL ÁLGEBRA

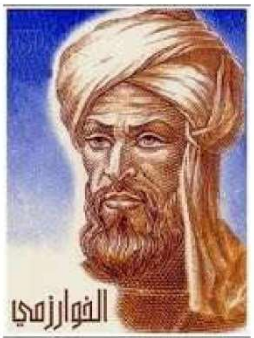
Buscar en este sitio

Portada | Introducción | Tarea | Proceso | Evaluación | Conclusión | Guía didáctica

## Introducción

El álgebra está presente en prácticamente todos los aspectos de la vida cotidiana, aunque no seamos conscientes de ello. Esta rama de las matemáticas emplea números, letras y signos para hacer referencia a múltiples operaciones aritméticas. Sin embargo esto no ha sido siempre así...

¿Te animas a introducirte en el mundo del álgebra y descubrir sus orígenes?




A través de esta webquest descubriremos de dónde viene el álgebra, y repasaremos el camino que se ha recorrido a lo largo de la historia para llegar a las formulaciones que existen hoy en día.

Visitaremos diversos pueblos en diferentes épocas, para comprobar cómo intentaban resolver sus problemas diarios, mediante el uso de las matemáticas.

¡Embárcate en este viaje con nosotros!

### Comentarios

No tienes permiso para añadir comentarios.

TFM Claudia Loewenstein - UNIR 2017

Iniciar sesión | Actividad reciente del sitio | Informar de uso inadecuado | Imprimir página | Con la tecnología de Google Si

# WQ HISTORIA DEL ÁLGEBRA

Buscar en este sitio

Portada | Introducción | Tarea | Proceso | Evaluación | Conclusión | Guía didáctica

## Tarea

La tarea, a llevar a cabo en grupos de 4 personas, consiste en elaborar un mural didáctico sobre la historia del álgebra, en el que al menos deberás incluir las aportaciones a esta rama de las matemáticas por parte de:
- los egipcios
- los babilonios
- los griegos: Diofanto de Alejandría
- los árabes

El mural deberá ser elaborado a través de la herramienta online Padlet (https://es.padlet.com/). Al finalizar el trabajo, los murales de todos los grupos serán impresos y expuestos en el aula.

### Comentarios

No tienes permiso para añadir comentarios.

TFM Claudia Loewenstein - UNIR 2017

ıiciar sesión | Actividad reciente del sitio | Informar de uso inadecuado | Imprimir página | Con la tecnología de Google Si

WQ HISTORIA DEL ÁLGEBRA

Buscar en este sitio

Portada | Introducción | Tarea | Proceso | Evaluación | Conclusión | Guía didáctica

## Proceso

Vamos a adentrarnos pues en la historia del álgebra. Para ello tenemos que retroceder unos 3700 años a la época de los egipcios e ir avanzando en el tiempo...

Los egipcios

Los primeros problemas algebraicos que resolvieron los egipcios han llegado a nosotros gracias a los papiros.

¿Cuál es el nombre de los papiros más famosos?

¿Para qué utilizaban los egipcios el álgebra?

¿De qué signo o palabra se servían para designar la incógnita en sus problemas?

Recursos para las preguntas:

http://egiptologia.org/?page_id=147

https://www.tarracogest.com/los-antiguos-egipcios-ya-usaban-las-matematicas-para-revolver-problemas-practicos/

http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/html/babiegipt/babiegipto.html

Los babilonios

El pueblo que se asentó en el valle de Mesopotamia no empleaba papiros para escribir sus problemas, sino que lo hacían en tablillas de arcilla.

¿Qué tipo de escritura empleaban en estas tabillas?

¿Para qué utilizaban los babilonios el álgebra?

¿De qué signo o palabra se servían para designar la incógnita en sus problemas?

¿Qué tipo de ecuación lograron resolver sin dificultades?

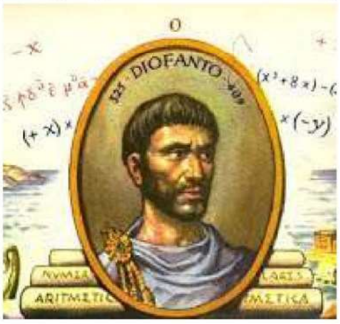
Recursos para las preguntas:

https://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/babilonia/babilon.htm

http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/html/babiegipt/babiegipto.html#Babilonia

http://ieslagunatollon.blogspot.com.es/2011/11/la-matematica-en-mesopotamiael-algebra.html

Los griegos: Diofanto de Alejandría




Los griegos le dieron otro punto de vista al álgebra, creando un álgebra de tipo geométrico. Si bien los trabajos de los griegos se centraron en la geometría, uno de los grandes matemáticos de la época estudió a fondo las ecuaciones algebraicas, su nombre: Diofanto de Alejandría.

¿Cuál es el nombre de la gran obra de Diofanto?

¿De qué trata esta obra y por qué es tan importante?

¿Para qué utilizaban los griegos el álgebra?

¿De qué signo o palabra se servía Diofanto para designar la incógnita en sus problemas?

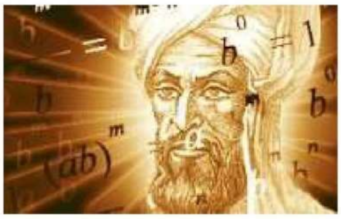
Recursos para las preguntas:

https://www.clubensayos.com/Historia/Algebra-En-La-Antigua-Grecia/615256.html

https://xaviermasabandar.wordpress.com/category/algebra/el-algebra-en-la-antiguedad/

https://javierdelpino.wordpress.com/2008/04/19/diofanto-de-alejandra/

Los árabes



Con los árabes el álgebra tuvo un verdadero resurgimiento, siendo los artífices de las bases que llevaron al desarrollo del álgebra europea moderna.

¿Cuál es el nombre del matemático árabe, de cuyo nombre proviene la palabra “algoritmo”?

¿Cuál es el nombre su gran obra y qué gran legado nos ha dejado?

¿Para qué utilizaban los árabes el álgebra?

¿De qué signo o palabra se servían los árabes para designar la incógnita en sus problemas?

¿Qué tipo de ecuaciones lograron resolver?

Recursos para las preguntas:

http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte2

https://www.biografiasyvidas.com/biografia/k/khwarizmi.htm
https://www.jw.org/es/publicaciones/revistas/g201505/al-juarismi-padre-del-algebra/

http://paginasarabes.com/2011/12/13/los-arabes-y-la-matematica/

Una vez hayáis analizado los recursos propuestos y tengáis la información necesaria, debéis pasar a realizar el mural didáctico con la herramienta online Padlet. Para ello tendréis que meteros en este link https://es.padlet.com/ y daros de alta como usuarios. Podéis daros de alta todos, y así podréis trabajar simultáneamente en línea. Para trabajar simultáneamente en grupo debéis crear primero el padlet, seleccionar la opción de muro y luego en la pestaña compartir tenéis que añadir los colaboradores que participaran en la creación de éste.

¡Ahora ya podéis empezar a viajar en el tiempo!

**Comentarios**

No tienes permiso para añadir comentarios.

TFM Claudia Loewenstein - UNIR 2017

ıiciar sesión | Actividad reciente del sitio | Informar de uso inadecuado | Imprimir página | Con la tecnología de Google Si

# WQ HISTORIA DEL ÁLGEBRA

Buscar en este sitio

Portada | Introducción | Tarea | Proceso | Evaluación | Conclusión | Guía didáctica

## Evaluación

La evaluación de la actividad se realizará a partir de la rúbrica que se expone a continuación:

| Aspectos a evaluar | Nivel de logro alcanzado | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Excelente | Bien | Satisfactorio | Insatisfactorio |
| Identifica los aspectos fundamentales y sintetiza la información | Identifican perfectamente los aspectos principales, sintetizan correctamente la información y establecen relaciones entre las diferentes partes del mural. | Identifican los aspectos principales, saben sintetizar la información correctamente, pero no establecen relaciones entre las diferentes partes. | Identifican varios aspectos fundamentales, pero la forma de sintetizar la información no es correcta. | No identifican los aspectos principales en el mural. |
| Presentación de los contenidos en el mural | La presentación de los contenidos es estructurada, clara y muy creativa. | La presentación de los contenidos es estructurada y clara. | La presentación de los contenidos es desestructurada y confusa. | La presentación de los contenidos no se ajusta a los requisitos especificados. |
| Gestión y responsabilidades del grupo | Han sabido organizarse muy bien dentro del grupo. Cada uno de los integrantes | En general se han organizarse bien dentro del grupo. Cada uno de los integrantes | Han tenido algún problema para organizarse dentro del grupo. No todos los integrantes | No ha habido ninguna organización en el grupo, provocando que nadie tuviera claro |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | tenía claro lo que había que hacer, o como se debía resolver la actividad. | tenía claro lo que había que hacer, o como se debía resolver la actividad. | tenía claro lo que había que hacer, o como se tenía que resolver la actividad. | lo que tenía que hacer. |
| Ayuda en el equipo | En todo momento el grupo ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando las dudas. | En general casi todo el grupo ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando las dudas. | Solo parte del grupo ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando las dudas. | El grupo no ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando no las dudas. |
| Presentación del trabajo | El trabajo elaborado se presenta ayudándose de las TIC, captando la atención de los compañeros. Los contenidos se presentan de una forma estructurada y clara. | El trabajo elaborado se presenta ayudándose de las TIC. Los contenidos se presentan de una forma clara. | El trabajo elaborado se presenta sin apoyo de las TIC, de una forma confusa. | No se presenta el trabajo elaborado. |

## Comentarios

No tienes permiso para añadir comentarios.

TFM Claudia Loewenstein - UNIR 2017

iciar sesión | Actividad reciente del sitio | Informar de uso inadecuado | Imprimir página | Con la tecnología de Google Si

WQ HISTORIA
DEL ÁLGEBRA

Buscar en este sitio

Portada | Introducción | Tarea | Proceso | Evaluación | Conclusión | Guía didáctica

## Conclusión

Habéis llegado al final de este viaje en el tiempo. Por medio de esta WebQuest habéis podido comprobar que el álgebra ha ido cambiando considerablemente a lo largo de los años, conforme a las necesidades de los humanos.

¿Os llamado la atención la forma en la que los antiguos pueblos designaban las incógnitas? Pues esto es precisamente lo que aprenderemos en clase a partir de ahora, un nuevo lenguaje: el lenguaje algebraico. ¿Estás dispuesto a descubrirlo?

Vuestros murales en todo caso nos servirán de referencia para las próximas clases. ¡Muchas gracias por vuestro trabajo!

### Comentarios

No tienes permiso para añadir comentarios.

TFM Claudia Loewenstein - UNIR 2017

iciar sesión | Actividad reciente del sitio | Informar de uso inadecuado | Imprimir página | Con la tecnología de Google Si

# WQ HISTORIA DEL ÁLGEBRA

Buscar en este sitio

Portada | Introducción | Tarea | Proceso | Evaluación | Conclusión | Guía didáctica

## Guía didáctica

**Asignatura:** Matemáticas

**Nivel :** 1ºESO

**Contenidos:** Bloque 2 - Números y álgebra: .iniciación al lenguaje algebraico.

**Metodología:** la actividad se realizará en grupos para, a través del aprendizaje cooperativo, fomentar la expresión oral, contribuir al respeto, mejorar las habilidades sociales y facilitar la atención a la diversidad. Los grupos estarán compuestos por 4 alumnos, procurando hacer formaciones heterogéneas que garanticen un equilibrio en el grupo.

**Temporalización:** la actividad se realizará en 2 sesiones en el aula. En la primera sesión se introducirá brevemente la temática y el funcionamiento de la actividad, pasando a formar los grupos de trabajo. El resto de la primera sesión, asi como la segunda, se emplearán por completo para la realización de la actividad. En caso de no terminar los murales en este tiempo, los alumnos deberán terminarlos en el horario fuera de clase. En la tercera sesión se realizará una presentación breve del trabajo realizado.

A través de esta WebQuest se trabajan las siguientes **competencias clave**:

*Competencia lingüística:* Los alumnos deberán saber comunicarse con sus compañeros de forma adecuada, efectuando un reparto de roles y tareas dentro del grupo. Para ello deberán practicar la escucha con atención e interés. A través del dialogo deberán hacer valer sus opiniones, así como conseguir evaluar el trabajo de los demás de una forma crítica, constructiva y responsable.

*Competencia digital:* El aprendizaje a través de la WebQuest esta basado en herramientas tecnológicas, teniendo que hacer una búsqueda responsable de la información a través de internet, y teniendo que plasmar los conceptos principales mediante una herramienta online.

*Aprender a aprender:* Al trabajar en grupo los alumnos deberán tomar decisiones respecto a la organización, planificación y ejecución de la actividad.

*Competencia social y cívica:* Los alumnos deberán ser capaces de comunicarse de una manera constructiva, respetando los distintos puntos de vista de sus compañeros.

*Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor:* Plasmar las ideas y conceptos analizados en un mural didáctico requiere de creatividad y originalidad, que deberán demostrar los alumnos.

*Conciencia y expresiones culturales:* A través del recorrido histórico estudiado, los alumnos podrán conocer, comprender y apreciar el legado de varios pueblos al álgebra.

### Comentarios

No tienes permiso para añadir comentarios.

TFM Claudia Loewenstein - UNIR 2017

iciar sesión | Actividad reciente del sitio | Informar de uso inadecuado | Imprimir página | Con la tecnología de Google Si

# ANEXO IV

EJERCICIOS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

**PROPUESTA DIDÁCTICA INICIACIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO**
**EXPRESIONES ALGEBRAICAS**

EJERCICIOS

1. Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:
   El doble de un número ________________________________
   Un número más cinco ________________________________
   La suma de dos números consecutivos ________________
   El tripe de la suma de dos números ____________________
   Un número menos su mitad ___________________________
   La edad de una persona hace 5 años ____________________
   El anterior de un número _____________________________

2. Expresa las siguientes expresiones algebraicas con frases:
   $2x+1$ _____________________________________________
   $3(x-1)$ ___________________________________________
   $5x$ _______________________________________________
   $4(x^2+2)$ __________________________________________

Una expresión algebraica puede estar formada por uno o varios términos o monomios, los cuales están separados por los signos de suma o resta.

$$3x+2x^2+4-\frac{1}{2}x$$

La anterior expresión algebraica está formada por 4 términos o monomios $3x$, $2x^2$, $4$ y $-\frac{1}{2}x$.

Los términos que dependen del valor de la incógnita son llamados *términos en x*.
Los términos que no dependen del valor de la incógnita son los *términos independientes*.

Los términos en x se componen de un coeficiente y una parte literal. Así por ejemplo en el término $3x$, el coeficiente es $3$ y la parte literal es $x$.

❖ Ten en cuenta que en estos términos el coeficiente multiplica a la parte literal, pero el signo x de multiplicación se suprime o se indica con el signo $\cdot$.

# ANEXO V

JUEGO VALOR NUMÉRICO

**JUEGO: CALCULANDO EL VALOR NUMÉRICO**

**OBJETIVOS**

Los objetivos que se quieren conseguir con este juego son:
- Practicar la sustitución de variables en un nivel muy inicial.
- Trabajar el problema de los signos **"-"** que representan a la vez operaciones y signo del número entero. En particular queremos incidir en los errores muy frecuente de nuestros alumnos que se equivocan al sustituir variables que llevan un signo negativo en una expresión algebraica.

**Nivel:** 1º-2º de ESO

**Material necesario:**
- Un tablero
- 16 cartas con expresiones algebraicas.
- 16 cartas con un valor numérico

**Reglas del juego**
- Juego individual
- Se trata de obtener los 16 números del tablero sustituyendo alguno de los valores numéricos de las 16 fichas en las 16 expresiones algebraicas de las cartas.
- Al empezar la partida, cada alumno tiene delante de él los 16 posibles valores numéricos para sustituir y las 16 cartas con expresiones algebraicas.
- Va cogiendo una a una las 16 cartas con expresiones algebraicas e intentando obtener los números del tablero.
- Cada vez que se obtiene un valor del tablero, se coloca sobre la casilla correspondiente la ficha del valor numérico y la carta de la expresión algebraica utilizada.
- El ganador del grupo es el que consigue obtener primero los 16 valores o en su caso el que obtiene más valores del tablero en un tiempo prefijado.

El juego además tiene una estrategia ganadora sencilla. A lo largo del juego, los alumnos se van dando cuenta de que no se trata de utilizar sus 16 fichas de valores al azar, sino que hay ciertos valores que sólo pueden ser utilizados con ciertas expresiones si se quiere conseguir los números del tablero que son todos enteros.

Por ejemplo:
A/2 +7 , 5A/2 + 12 sólo se intentará valores pares.
2A/3 -3 sólo valdrá para múltiplos de 3
A/4 +5 sólo servirán múltiplos de 4
7A/6 +2 sólo se tomará múltiplos de 6.
(2A +5)/5 y 8 - A/5 sólo darán valores enteros con múltiplos de 5.
A/7 + 3 sólo se podrá tomar múltiplos de 7.
Otra estrategia debe ser también que para conseguir números elevados del tablero, hay que recurrir a expresiones con una potencia alta del valor, como $A^3+1$.

**Posibles soluciones**

| Expresión algebraica | Ficha con valor numérico | Resultado obtenido |
|---|---|---|
| $A^3+1$ | -4 | -63 |
| A/2 +7 | 2 | 8 |
| 4A - 2 | -1 | -6 |
| 2A/3 -3 | 6 | 1 |
| 3 - 7A | 3 | -18 |
| A/4 +5 | -8 | 3 |
| 2A + 5 | 1 | 10 |
| 6 - 2A | -3 | 12 |
| 7A/6 +2 | -6 | -5 |
| 8A +4 | -2 | -4 |
| 5A/2 + 12 | 4 | 22 |
| A/7 + 3 | 7 | 4 |
| 2 - 2A | -7 | 16 |
| (2A +5)/5 | 5 | 7 |
| 8 - A/5 | -5 | 9 |

## TABLERO

| | | | |
|---|---|---|---|
| -63 | 4 | 12 | 5 |
| -4 | 9 | 4 | -6 |
| 16 | -5 | 8 | 3 |
| 1 | 22 | 10 | -18 |

TARJETAS CON LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

| | |
|---|---|
| $A^3+1$ | $6 - 2A$ |
| $A/2 +7$ | $7A/6 +2$ |
| $4A - 2$ | $8A +4$ |
| $2A/3 - 3$ | $5A/2 + 12$ |

| | |
|---|---|
| 3 - 7A | A/7 + 3 |
| A/4 +5 | 2 - 2A |
| 2A + 5 | (2A +5)/5 |
| | 8 - A/5 |

TARJETAS CON LOS VALORES NUMÉRICOS

| | |
|---|---|
| -4 | -6 |
| 2 | -2 |
| -1 | 4 |
| 6 | 7 |
| 3 | -7 |
| -8 | 5 |
| 1 | -5 |
| -3 | |

# ANEXO VI

EJERCICIO CON ECUACIONES

**PROPUESTA DIDÁCTICA INICIACIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO ECUACIONES**

EJERCICIOS

Expresa los siguientes problemas en lenguaje algebraico y completa la tabla.

1. *Problema 26:* "Una cantidad y su cuarto se convierten en 15, y se pide calcular la cantidad."
2. Una cantidad y su mitad se convierten en 9. Calcula la cantidad.
3. Cinco veces una longitud da un total de 8.
4. Epigrama de Metrodoro (Diofanto).
5. Descomponer un número en dos partes cuya diferencia sea dada. Sea 100 el número dado y 40 la diferencia.
6. Problema de los camellos.
7. Cosa menos tres dirhams resultan cuatro dírhams
8. Doble de cosa y triple de cosa resulta diez dírhams

| Ecuación | Primer miembro | Segundo miembro | Términos semejantes | Incógnitas |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

# ANEXO VII

EJERCICIOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

**PROPUESTA DIDÁCTICA INICIACIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO RESOLUCIÓN DE ECUACIONES**

1. Resuelve las siguientes ecuaciones para poder completar el dominó:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Empezamos | $9-6x=1$ | $x=4/3$ | $-5-2x=-4$ |
| $x=-1/2$ | $-1-6x=13$ | $x=-7/3$ | $-2x+2=1$ |
| $x=1/2$ | $-x=7x+14$ | $x=-7/4$ | $2x=-15-3x$ |
| $x=-3$ | $6x+1=7x$ | $x=1$ | $2x+16=8x$ |
| $x=8/3$ | $-6-x=2\cdot(3x-1)$ | $x=-4/7$ | $3\cdot(-x+4)=3x$ |
| $x=2$ | $3x+8=2\cdot(2x-3)$ | $x=14$ | $2(x+2)=x+7$ |
| $x=3$ | $\frac{1}{2}(x-9)=\frac{3}{2}$ | $x=12$ | $x-\frac{5}{3}=\frac{5}{2}+\frac{x}{6}$ |
| $x=5$ | $\frac{x}{15}-\frac{8}{12}=\frac{4}{3}+\frac{2x}{5}$ | $x=-6$ | $\frac{4(x-2)}{3}=x-\frac{8}{6}$ |
| $x=4$ | ENHORABUENA Lo has conseguido! | | |

# ANEXO VIII

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**PROPUESTA DIDÁCTICA INICIACIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

1. En una clase hay 28 alumnos y el número de chicos es inferior en 4 al número de chicas. ¿Cuántos chicos y cuantas chicas hay en la clase?

2. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 30 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

3. Un montañero hace una ruta de 48 km en tres etapas. El segundo día recorre 10 km más que el primero y el tercer día recorre 7 km más que el segundo. ¿Cuánto recorre cada día?

4. Ana ha sacado un 7 en un examen de 10 preguntas. En la primera sacó un punto, y en la última, que dejó en blanco por falta de tiempo, un cero. La profesora le ha dicho que en todas las preguntas centrales ha obtenido la misma puntuación- ¿Cuál ha sido esa puntuación?

# ANEXO IX

EVALUACIÓN FINAL

**PROPUESTA DIDÁCTICA INICIACIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO**
**EVALUACIÓN FINAL**

1. ¿Qué beneficios ha tenido la introducción del actual lenguaje algebraico para las matemáticas? Argumenta tu respuesta. (1 punto)

2. Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico: (2 puntos)
   a) La suma de la edad de Marta y la de su hermano Jaime, que es la tercera parte de la de Marta_________________
   b) El triple de un número menos su doble_________________
   c) La cuarta parte de un número más el doble de su siguiente ____________
   d) El producto de un número con su consecutivo ____________

3. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas: (2 puntos)
   a) $5x-8$
      Para x=5
      Para x=7
   b) $7-\frac{1}{3}x$
      Para x=6
      Para x=9

4. Resuelve las siguientes ecuaciones: (3 puntos)
   a) $2x+4=x+7$
   b) $\frac{x+5}{2}=\frac{2x+3}{3}$
   c) $5(x-3)+8x=6x-5+x$

5. Resuelve el siguiente problema: (1 punto)
   Halla las edades de tres hermanos sabiendo que suman 52 años, que los dos pequeños se llevan dos años, y que el mayor tiene tantos años como los otros dos juntos.

6. Inventa un problema a partir de la siguiente ecuación:
   $x+2x-16=20$

# ANEXO X

RÚBRICAS DE EVALUACIÓN

| Objetivo didáctico | Estándar | Sesión | Actividades | Competencias | Evidencias de evaluación | Instrumentos | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.1.12.1. | 1, 2 | Introducción: ¿Qué es el álgebra?<br>WebQuest Historia del Álgebra | CM, CL, CSC, CAA, SIEE, CD, CEC | Mural didáctico.<br>Plantilla de seguimiento. | Rúbrica 1 | 10% |
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 3 | Lenguaje algebraico. Los egipcios - tanteo. Los babilonios. | CM, CL, CEC | Plantilla de observación | Rúbrica 2 | 15% |
| 1, 2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 4 | Lenguaje algebraico. Los griegos - Diofanto. Los árabes - Al-Khowarizmi. | CM, CL, CEC | Plantilla de observación | Rúbrica 2 | |
| 1,2 | Est.MA.1.3.1.<br>Est.MA.2.6.1. | 5 | Lenguaje algebraico. La evolución de las letras: Pacioli, Viéte y Descartes. | CM, CL, CEC | Plantilla de observación | Rúbrica 2 | |
| 3 | Est.MA.2.6.2. | 6 | Valor numérico - juego con tarjetas. | CM | Resultados del juego | Rúbrica 2 | 5% |
| 4 | Est.MA.2.6.3.<br>Est.MA.1.5.1. | 7 | Monomios, igualdad y ecuaciones. Balanza de ecuaciones. | CM, CD, CL, CSC | Informe | Rúbrica 3 | 5% |
| 5 | Est.MA.2.7.1. | 8 | Resolución de ecuaciones de primer grado. Dominó. | CM, CAA, CEC | Resultados del juego | Rúbrica 2 | 5% |
| 6 | Est.MA.2.7.2.<br>Est.MA.1.2.4.<br>Est.MA.1.6.2. | 9 | Problemas de la vida cotidiana. Batalla de problemas | CM, CAA, CSC, CL | Coevaluación de problemas | Rúbrica 4 | 5% |
| 1, 2, 3, 4, 5 | | 10 | Evaluación final | CM, CAA, SIEE | Examen | | 50% |
| | | | | | Cuaderno | Rúbrica 5 | 5% |

| | |
|---|---|
| **TOTAL** | **100%** |

**Rúbrica 1: Webquest**

| **Aspectos a evaluar** | **Nivel de logro alcanzado** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *4. Excelente* | *3. Bien* | *2. Satisfactorio* | *1. Insatisfactorio* |
| Identifica los aspectos fundamentales y sintetiza la información | Identifican perfectamente los aspectos principales, sintetizan correctamente la información y establecen relaciones entre las diferentes partes del mural. | Identifican los aspectos principales, saben sintetizar la información correctamente, pero no establecen relaciones entre las diferentes partes. | Identifican varios aspectos fundamentales, pero la forma de sintetizar la información no es correcta. | No identifican los aspectos principales en el mural. |
| Presentación de los contenidos en el mural | La presentación de los contenidos es estructurada, clara y muy creativa. | La presentación de los contenidos es estructurada y clara. | La presentación de los contenidos es desestructurada y confusa. | La presentación de los contenidos no se ajusta a los requisitos especificados. |
| Gestión y responsabilidades del grupo | Han sabido organizarse muy bien dentro del grupo. Cada uno de los integrantes tenía claro lo que había que hacer, o como se debía resolver la actividad. | En general se han organizarse bien dentro del grupo. Cada uno de los integrantes tenía claro lo que había que hacer, o como se debía resolver la actividad. | Han tenido algún problema para organizarse dentro del grupo. No todos los integrantes tenía claro lo que había que hacer, o como se tenía que resolver la actividad. | No ha habido ninguna organización en el grupo, provocando que nadie tuviera claro lo que tenía que hacer. |
| Ayuda en el equipo | En todo momento el grupo ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando las dudas. | En general casi todo el grupo ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando las dudas. | Solo parte del grupo ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando las dudas. | El grupo no ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando no las dudas. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Presentación del trabajo | El trabajo elaborado se presenta ayudándose de las TIC, captando la atención de los compañeros. Los contenidos se presentan de una forma estructurada y clara. | El trabajo elaborado se presenta ayudándose de las TIC. Los contenidos se presentan de una forma clara. | El trabajo elaborado se presenta sin apoyo de las TIC, de una forma confusa. | No se presenta el trabajo elaborado. |

**Rúbrica 2: Trabajos en clase**

| | Aspectos a evaluar | Nivel de logro alcanzado | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *4. Excelente* | *3. Bien* | *2. Satisfactorio* | *1. Insatisfactorio* |
| **Sesiones 3, 4 y 5** | 1. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos | Reconoce perfectamente la utilidad de la simbolización y sigue correctamente su evolución histórica. | Reconoce de manera adecuada la utilidad de la simbolización y sigue su evolución histórica. | Reconoce con dificultades la utilidad de la simbolización y le cuesta seguir su evolución histórica. | No reconoce la utilidad de la simbolización y no sigue su evolución histórica. |
| | 2. Utilización de nomenclatura relativa a las expresiones algebraicas | Reconoce perfectamente la nomenclatura usada a lo largo de la historia y la emplea correctamente en el cálculo de problemas. | Reconoce la nomenclatura usada a lo largo de la historia y la emplea en el cálculo de problemas. | Reconoce con dificultad la nomenclatura usada a lo largo de la historia y la emplea con errores en el cálculo de problemas. | No reconoce la nomenclatura usada a lo largo de la historia y no la emplea en el cálculo de problemas. |
| **Sesión 6** | 3. Lenguaje algebraico | Identifica eficazmente las propiedades de procesos numéricos y los expresa perfectamente mediante el lenguaje algebraico. | Identifica las propiedades de procesos numéricos y los expresa correctamente mediante el lenguaje algebraico. | Identifica con dificultades las propiedades de procesos numéricos y los expresa con errores mediante el lenguaje algebraico. | No identifica las propiedades de procesos numéricos y no los expresa mediante el lenguaje algebraico. |
| | 4. Cálculo del valor numérico | Demuestra una comprensión excepcional del concepto de valor numérico y realiza el cálculo de éste de una manera excelente. | Demuestra una comprensión buena del concepto de valor numérico y realiza el cálculo de éste de una manera correcta. | Demuestra una comprensión deficiente del concepto de valor numérico y realiza el cálculo de éste de una manera satisfactoria. | Demuestra una comprensión insuficiente del concepto de valor numérico y realiza el cálculo de éste de una manera insatisfactoria. |
| **Sesión 8** | 5. Resolución de ecuaciones de primer grado | Resuelve correctamente todas las ecuaciones, llegando al final del dominó. | Resuelve correctamente la mayoría de ecuaciones, llegando hasta un punto avanzado del dominó. | Resuelve correctamente pocas ecuaciones, precisando de ayuda para poder avanzar en el juego. | No resuelve correctamente las ecuaciones, precisando de ayuda constante para poder avanzar en el juego. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6. Propiedades de las operaciones | Utiliza de manera excelente las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. | Utiliza de manera adecuada las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. | Utiliza con dificultades las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. | Utiliza deficientemente las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. |
| | 7. Comprobación de las ecuaciones | Comprueba siempre si el número obtenido es solución de la ecuación. | Comprueba la mayor parte de las veces si el número obtenido es solución de la ecuación. | Comprueba en pocas ocasiones si el número obtenido es solución de la ecuación. | Nunca comprueba si el número obtenido es solución de la ecuación. |
| **Trabajo en clase** | 8. Predisposición e interés | Realiza la actividad con gran interés, mostrándose muy motivado y trabajando de manera continua. | Realiza la actividad con interés, atento a los nuevos retos y trabajando de manera regular. | Realiza la actividad con poco interés, escéptico a los nuevos retos y trabajando de manera irregular. | Realiza la actividad sin interés alguno, indiferente, desmotivado, y sin trabajar apenas en clase. |
| | 9. Participación | Siempre ofrece su opinión e ideas para conseguir los objetivos planteados. | Ofrece muchas veces su opinión e ideas para conseguir los objetivos planteados. | Ofrece pocas veces su opinión e ideas para conseguir los objetivos planteados. | Nunca ofrece su opinión e ideas para conseguir los objetivos planteados. |

**Rúbrica 3: Ecuaciones - balanza**

| **Aspectos a evaluar** | **Nivel de logro alcanzado** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *4. Excelente* | *3. Bien* | *2. Satisfactorio* | *1. Insatisfactorio* |
| Concepto y nomenclatura relativa a las ecuaciones | Identifica eficazmente las propiedades de procesos numéricos y los expresa perfectamente mediante el lenguaje algebraico. | Identifica las propiedades de procesos numéricos y los expresa correctamente mediante el lenguaje algebraico. | Identifica con dificultades las propiedades de procesos numéricos y los expresa con errores mediante el lenguaje algebraico. | No identifica las propiedades de procesos numéricos y no los expresa mediante el lenguaje algebraico. |
| Propiedades de las operaciones | Utiliza de manera excelente las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. | Utiliza de manera adecuada las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. | Utiliza con dificultades las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. | Utiliza deficientemente las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. |
| Exposición del proceso mediante el lenguaje algebraico | Expone y defiende con gran claridad el proceso seguido utilizando de manera excelente el lenguaje algebraico | Expone y defiende con claridad el proceso seguido utilizando de manera correcta el lenguaje algebraico | Expone correctamente el proceso seguido utilizando de manera deficiente el lenguaje algebraico | Expone con dificultad el proceso seguido utilizando de manera insatisfactoria el lenguaje algebraico |
| Predisposición e interés | Realiza la actividad con gran interés, mostrándose muy motivado y trabajando de manera continua. | Realiza la actividad con interés, atento a los nuevos retos y trabajando de manera regular. | Realiza la actividad con poco interés, escéptico a los nuevos retos y trabajando de manera irregular. | Realiza la actividad sin interés alguno, indiferente, desmotivado, y sin trabajar apenas en clase. |
| Participación | Siempre ofrece su opinión e ideas para conseguir los objetivos planteados. | Ofrece muchas veces su opinión e ideas para conseguir los objetivos planteados. | Ofrece pocas veces su opinión e ideas para conseguir los objetivos planteados. | Nunca ofrece su opinión e ideas para conseguir los objetivos planteados. |

**Rúbrica 4: Problemas**

| **Aspectos a evaluar** | **Nivel de logro alcanzado** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *4. Excelente* | *3. Bien* | *2. Satisfactorio* | *1. Insatisfactorio* |
| Formulación de problemas mediante ecuaciones de primer grado | Formula algebraicamente todos los problemas planteados mediante ecuaciones de primer grado de una manera. | Formula algebraicamente la mayoría de problemas planteados mediante ecuaciones de primer grado de una manera. | Formula algebraicamente la mitad de los problemas planteados mediante ecuaciones de primer grado de una manera. | Formula algebraicamente un solo problema de los planteados mediante ecuaciones de primer grado de una manera. |
| Resolución e interpretación de resultados | Resuelve e interpreta la solución de todos los problemas planteados. | Resuelve e interpreta la solución de la mayoría de problemas planteados. | Resuelve e interpreta la solución de la mitad de los problemas planteados. | Resuelve e interpreta la solución un solo problema de los planteados. |
| Estrategias heurísticas | Siempre utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. | Muchas veces utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. | Pocas veces utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. | Nunca utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. |
| Conexiones entre el mundo real y el mundo matemático | Siempre establece conexiones entre problemas del mundo real y el mundo matemático. | Muchas veces establece conexiones entre problemas del mundo real y el mundo matemático. | Pocas veces establece conexiones entre problemas del mundo real y el mundo matemático. | Nunca establece conexiones entre problemas del mundo real y el mundo matemático. |
| Gestión y responsabilidades del grupo | Han sabido organizarse muy bien dentro del grupo. Cada uno de los integrantes tenía claro lo que había que hacer, o como se debía resolver la actividad. | En general se han organizarse bien dentro del grupo. Cada uno de los integrantes tenía claro lo que había que hacer, o como se debía resolver la actividad. | Han tenido algún problema para organizarse dentro del grupo. No todos los integrantes tenía claro lo que había que hacer, o como se tenía que resolver la actividad. | No ha habido ninguna organización en el grupo, provocando que nadie tuviera claro lo que tenía que hacer. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ayuda en el equipo | En todo momento el grupo ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando las dudas. | En general casi todo el grupo ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando las dudas. | Solo parte del grupo ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando las dudas. | El grupo no ha ayudado al alumno que lo requería, solucionando o aclarando no las dudas. |

**Rúbrica 5: Cuaderno**

| **Aspectos a evaluar** | **Nivel de logro alcanzado** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *4. Excelente* | *3. Bien* | *2. Satisfactorio* | *1. Insatisfactorio* |
| Presentación | El cuaderno muestra una excelente presentación en cuanto a limpieza y claridad | El cuaderno muestra una buena presentación en cuanto a limpieza y claridad | El cuaderno muestra una presentación poco correcta en cuanto a limpieza y claridad | El cuaderno muestra una incorrecta presentación en cuanto a limpieza y claridad |
| Contenidos | El cuaderno presenta todos los contenidos trabajados en clase, con notas, ejercicios y tareas. | El cuaderno presenta la mayor parte de los contenidos trabajados en clase, con notas, ejercicios y tareas. | En el cuaderno falta gran parte de los contenidos trabajados en clase, con algunas notas, ejercicios y parte de las tareas. | El cuaderno no presenta los contenidos trabajados en clase, no incluye notas, y faltan casi todos los ejercicios y tareas. |
| Organización | La organización del cuaderno es muy ordenada, incluyendo todas las fechas. | La organización del cuaderno es ordenada, incluyendo la mayoría de las fechas. | La organización del cuaderno desordenada, incluyendo muy pocas fechas. | La organización del cuaderno es muy desordenada, no incluye ninguna fecha. |

| Grado de desarrollo alcanzado | Sesiones 1 y 2 | Sesiones 3, 4 y 5 | | | Sesión 6 | | | Sesión 7 | Sesión 8 | | | | Sesión 9 | Trabajo en clase | | | Examen | Cuaderno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Rúbrica 1 | Rúbrica 2 | | | Rúbrica 2 | | | Rúbrica 3 | Rúbrica 2 | | | | Rúbrica 4 | Rúbrica 2 | | | | Rúbrica 5 |
| **Alumno** | | 1. | 2. | 1+2 | 3. | 4. | 3+4 | | 5. | 6. | 7. | 5+6+7 | | 8. | 9. | 8+9 | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# ANEXO XI

CUESTIONARIOS DE EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA

**ENCUESTA PARA ALUMNOS**

Este cuestionario es anónimo, anímate a expresar tu opinión con libertad. Tu ayuda es esencial para por poder mejorar.

**<u>Sobre la introducción de la historia en la asignatura de matemáticas</u>**

| Pregunta | Nunca | Casi nunca | A veces | Siempre |
|---|---|---|---|---|
| La introducción de la historia en esta asignatura te ha resultado interesante. | | | | |
| Los contenidos históricos se ajustaban a los contenidos estudiados. | | | | |
| El aprendizaje a través de la historia te ha facilitado la comprensión de los conceptos. | | | | |
| Has conseguido identificar posibles dificultades que podrías cometer a la hora de resolver ecuaciones, gracias al paralelismo histórico. | | | | |
| Te gustaría que se siguiera utilizando la historia de las matemáticas en años siguientes. | | | | |

**<u>Sobre las actividades propuestas</u>**

| Pregunta | Nunca | Casi nunca | A veces | Siempre |
|---|---|---|---|---|
| Las actividades desarrolladas a lo largo de la unidad didáctica han sido variadas. | | | | |
| El grado de dificultad de las actividades ha sido adecuado. | | | | |
| La metodología de trabajo colaborativo ha sido motivante. | | | | |
| Los juegos introducidos han sido de interés. | | | | |
| Las actividades realizadas te han ayudado a consolidar los conceptos aprendidos. | | | | |

¿Cuál de las actividades desarrolladas te ha gustado más?

| Webquest | Problemas en la historia | Juego de tarjetas | Balanza de ecuaciones | Dominó de ecuaciones | Batalla de problemas |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

¿Qué aspecto destacarías de esta unidad didáctica?

**ENCUESTA PARA LOS DOCENTES**

Cuestionario dirigido al profesorado de matemáticas que implante la propuesta didáctica en su aula de 1º de ESO como introducción al álgebra. La evaluación es esencial para poder mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

## Sobre la introducción de la historia en la asignatura de matemáticas

| Pregunta | Nunca | Casi nunca | A veces | Siempre |
|---|---|---|---|---|
| La introducción de la historia en esta asignatura y en particular en el álgebra resulta satisfactoria | | | | |
| Los contenidos históricos se ajustan a los contenidos estudiados. | | | | |
| La secuenciación histórica resulta adecuada. | | | | |
| El aprendizaje a través de la historia facilita la comprensión de los conceptos. | | | | |
| La introducción del álgebra a partir de la historia permite sentar unas bases más sólidas. | | | | |

## Sobre la unidad didáctica

| Pregunta | Nunca | Casi nunca | A veces | Siempre |
|---|---|---|---|---|
| Los objetivos de aprendizaje están claramente definidos. | | | | |
| Los objetivos y los contenidos encajan en la programación didáctica del curso. | | | | |
| Los contenidos son adecuados para la edad y el nivel educativo de los estudiantes. | | | | |
| La extensión de la unidad didáctica, así como su temporalización, es adecuada. | | | | |

**Sobre las actividades propuestas**

| Pregunta | Nunca | Casi nunca | A veces | Siempre |
|---|---|---|---|---|
| Las actividades desarrolladas se ajustan a los contenidos. | | | | |
| Las actividades ayudan a desarrollar las siete competencias clave. | | | | |
| Se plantean actividades significativas para diversas capacidades y estilos de aprendizaje. | | | | |
| La participación en la WebQuest por parte de los alumnos ha sido satisfactoria. | | | | |
| El nivel de dificultad de los problemas históricos trabajados es adecuado. | | | | |
| Los juegos introducidos resultan de interés para los alumnos. | | | | |
| Los agrupamientos propuestos para las actividades favorecen el trabajo colaborativo. | | | | |

¿Cuál de las actividades desarrolladas ha resultado más adecuada?

| Webquest | Problemas en la historia | Juego de tarjetas | Balanza de ecuaciones | Dominó de ecuaciones | Batalla de problemas |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

¿Qué aspecto destacarías de esta unidad didáctica?

______________________________________________

¿Qué aspecto mejorarías de esta unidad didáctica?

______________________________________________