



**Universidad Internacional de La Rioja**  
**Facultad de Educación**

**Trabajo fin de máster**

# Geometría analítica usando arquitectura y GeoGebra en 4º de ESO.

**Presentado por:** Francisco Samper Peñalver.

**Tipo de trabajo:** Propuesta de intervención.

**Director/a:** Pablo Baztán.

**Ciudad:** Alicante

**Fecha:** 22 de Junio 2017



## RESUMEN

El presente Trabajo Fin de Master tiene como objeto principal presentar una propuesta didáctica, basada en una metodología que aumente la motivación y el interés en aprender de los estudiantes. Se centra en favorecer la comprensión de la geometría plana, vectores y rectas, en 4º de ESO en matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. La combinación entre el software *GeoGebra* y una obra relevante de la arquitectura contemporánea, como es el edificio “*Veles e Vents*” de la ciudad de Valencia, usando como elemento contextualizador, servirán para conseguir el objetivo marcado. Se afrontará el trabajo desde dos vertientes:

En un primer lugar, se desarrollará un marco teórico, que permitirá indagar en las dificultades que afronta el alumnado a la hora de enfrentarse a los conceptos matemáticos relativos a vectores y rectas. Se estudiarán las ventajas que aportan las TIC en el proceso enseñanza-aprendizaje (en especial el software *GeoGebra*) y se analizará una obra arquitectónica singular que contribuya a alcanzar un aprendizaje contextualizado.

En segundo lugar, se presenta una propuesta didáctica fundamentada en lo expuesto previamente, mediante la cual se establecerán una serie de actividades con la herramienta *GeoGebra* aplicada sobre el elemento arquitectónico seleccionado. La metodología busca facilitar un aprendizaje significativo de los conceptos relativos a vectores y rectas.

Como conclusión principal del presente trabajo veremos que el uso de *GeoGebra* como herramienta apoyada en los elementos arquitectónicos, favorece un aprendizaje significativo de la materia estudiada e incrementa la motivación y el interés de los alumnos que se enfrentan a ella.

Finalmente, se indicarán las limitaciones encontradas al desarrollar la propuesta y las posibles líneas de investigación futura que permitan evaluar y promover la metodología propuesta.

**Palabras clave:** Software, arquitectura, Geogebra, TIC, aprendizaje significativo,

## **ABSTRACT.**

This Master's Thesis has as main objective, to present a didactic proposal, based in a methodology that will increase motivation and interest in learning from students. It focuses on promoting the understanding of flat geometry, vectors and lines, in 4<sup>o</sup> of ESO in mathematics oriented to the academic teachings.

The combination of GeoGebra software and a relevant contemporary architectural work, such as the “Veles e Vents” building in the city of Valencia, using as a contextualizing element, will serve to achieve the objective. Work will be dealt with from two perspectives:

In the first place, a theoretical framework will be developed, which will allow to investigate the difficulties that the students face when confronting the mathematical concepts related to vectors and lines. It will study the advantages provided by ICT in the teaching-learning process (especially the GeoGebra software), and will analyze a unique architectural work that contributes to contextualized learning.

Secondly, a didactic proposal based on the above is presented, through which a series of activities will be established with the GeoGebra tool applied to the selected architectural element. The methodology seeks to facilitate a meaningful learning of concepts related to vectors and lines.

As a principal conclusion of the present work we will see that using GeoGebra as a tool supported by the architectural elements, promotes meaningful learning of the studied material and increases the motivation and interest of students who face it.

Finally, it will indicate the limitations encountered in developing the proposal and possible future lines of research that allow to evaluate and promote the proposed methodology.

**Keywords:** Software, architecture, Geogebra, ICT, meaningful learning.

# ÍNDICE.

1.	INTRODUCCIÓN.....	7
1.1.	JUSTIFICACIÓN .....	8
1.2.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	8
1.3.	OBJETIVOS.....	9
1.3.1.	Objetivos específicos .....	10
2.	MARCO TEÓRICO .....	10
2.1.	ESTADO DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ACTUALIDAD .....	10
2.2.	LAS COMPETENCIAS CLAVE.....	12
2.2.1.	Competencia en comunicación lingüística .....	13
2.2.2.	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología .....	14
2.2.3.	Competencia digital .....	14
2.2.4.	Competencia para aprender a aprender .....	14
2.2.5.	Competencias sociales y cívicas.....	15
2.2.6.	Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.....	15
2.2.7.	Conciencia y expresiones culturales.....	15
2.3.	COMPETENCIA MATEMÁTICA .....	15
2.4.	GEOMETRÍA ANALÍTICA .....	17
2.4.1.	Bloque de Geometría analítica en 4º de la E.S.O. ....	17
2.4.2.	Dificultades en la enseñanza de la geometría analítica .....	19
2.4.3.	Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.....	19
2.5.	LAS TIC COMO HERRAMIENTA EDUCATIVA .....	20
2.6.	SOFTWARE PARA ENSEÑAR LA GEOMETRIA ANALITICA .....	22
2.6.1.	Cabri.....	23
2.6.2.	Geogebra.....	24
2.7.	ARQUITECTURA COMO CONTEXTO MOTIVADOR.....	26
3.	PROPUESTA DE INTERVENCIÓN .....	27
3.1.	INTRODUCCIÓN.....	27
3.2.	CONTEXTO.....	29
3.3.	OBJETIVOS DE LA PROPUESTA .....	30
3.3.1.	Objetivos generales de etapa de ESO .....	30
3.3.2.	Objetivos específicos de la unidad didáctica .....	30
3.4.	COMPETENCIAS.....	30
3.5.	CONTENIDOS .....	31
3.6.	CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE .....	32
3.7.	METODOLOGÍA.....	32
3.8.	TEMPORALIZACIÓN.....	33
3.9.	DESARROLLO DE ACTIVIDADES .....	34
3.10.	RECURSOS.....	57
3.11.	ATENCION A LA DIVERSIDAD.....	58

3.12.EVALUACIÓN.....	58
4. EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA.....	61
5. CONCLUSIONES .....	62
6. LIMITACIONES Y PROSPECTIVA.....	64
7. BIBLIOGRAFÍA.....	66
ANEXOS.....	69
ANEXO I.....	70
Objetivos generales de etapa, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.....	70
ANEXO II.....	73
Recopilación de las sesiones de la propuesta didáctica.....	73

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Países y desempeño en matemáticas PISA. Fuente: OCDE (2015).....	10
Figura 2 Comparativa países participantes informe PISA 2015. Fuente: OCDE (2015).....	11
Figura 3. Comparativa CCAA informe PISA 2015. Fuente: OCDE (2015).....	12
Figura 4. Pirámide de la educación matemática. Fuente Alsina (2010) .....	16
Figura 5. Captura de pantalla entorno de trabajo Cabri. Fuente: Elaboración propia.....	23
Figura 6. Entorno de trabajo GeoGebra. Fuente: Elaboración propia.....	24
Figura 7. Esquema del enfoque realista en matemáticas. Fuente: Gómez-Chacón (2005) .....	27
Figura 8. Edificio Veles e Vents. Fuente: Piquer (2016) .....	28
Figura 9. Índice de páginas ordenadas por niveles y bloques. Fuente: Sada (2015).....	35
Figura 10. Actividades de trabajo para 4º ESO de geometría analítica. Fuente: Sada (2015). .....	35
Figura 11. Propuesta de carpeta compartida grupo clase. Fuente: Elaboración propia.....	36
Figura 12. Captura de pantalla So0A01.ggb. Fuente: elaboración propia.....	38
Figura 13. Vectores equipotenciales. So1To1.ggb. Fuente: elaboración propia.....	40
Figura 14. Suma y resta gráfica de vectores. Fuente: elaboración propia.....	41
Figura 15. Producto de un vector por un escalar (ejemplos). Fuente: elaboración propia.....	41
Figura 16. Captura de pantalla plantilla archivo So1A01.ggb. Fuente: elaboración propia....	42
Figura 17. Captura de pantalla plantilla archivo So1A02.ggb. Fuente: elaboración propia. ..	43
Figura 18. Visualización del punto medio con vectores. Fuente: elaboración propia.....	44
Figura 19. Captura de pantalla, archivo So2A01.ggb. Fuente: elaboración propia.....	46
Figura 20. Paralelogramo a partir de 3 puntos. Fuente: elaboración propia.....	47
Figura 21. Plantilla ejercicio 1. Fuente: elaboración propia.....	48
Figura 22. Pendiente de la recta. Fuente: elaboración propia.....	50
Figura 23. Plantilla archivo So4A01.ggb. Fuente: elaboración propia.....	51
Figura 24. <i>Rectas secantes paralelas y coincidentes. Fuente: elaboración propia.</i> .....	52
Figura 25. Plantilla archivo So5A01.ggb. Fuente: elaboración propia.....	53
Figura 26. Captura de pantalla archivo So5A02.ggb. Fuente: elaboración propia.....	54
Figura 27. Construcción gráfica distancia punto-recta. Fuente: elaboración propia.....	55
Figura 28. Captura de pantalla archivo So6A01.ggb. Fuente: elaboración propia.....	55
Figura 29. Captura de pantalla archivo So7A01.ggb. Fuente: elaboración propia.....	57

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Contenidos y aplicaciones de la unidad didáctica. Fuente: Elaboración propia.....	18
Tabla 2. Competencias. Fuente: Elaboración propia. ....	31
Tabla 3. Contenidos. Fuente: Elaboración propia a partir de RD 1100/2014, de 26 de diciembre (BOE, 2015).....	31
Tabla 4. Definición de la sesión 0 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia. ....	34
Tabla 5. Enlace para el fomento de la motivación. Fuente: GSAPP AD+R animación. ....	37
Tabla 6. Enlaces para descarga del software. Fuente: Elaboración propia.....	38
Tabla 7. Enlaces de tutoriales y videotutoriales. Fuente: Elaboración propia.....	39
Tabla 8. Definición de la sesión 1 y de su contenido Fuente: Elaboración propia.....	39
Tabla 9. Definición de la sesión 2 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia. ....	44
Tabla 10. Definición de la sesión 3 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia. ....	47
Tabla 11. Definición de la sesión 4 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia. ....	49
Tabla 12. Definición de la sesión 5 y de su contenido 6. Fuente: Elaboración propia.....	51
Tabla 13. Resumen Posición relativa de rectas en el plano. Fuente: Elaboración propia. ....	52
Tabla 14. Definición de la sesión 6 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia. ....	54
Tabla 15. Definición de la sesión 7 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia. ....	56
Tabla 16: Tabla de evaluación. Fuente: elaboración propia.....	59
Tabla 17. Criterios de observación del trabajo en grupo. Fuente: elaboración propia. ....	60
Tabla 18. Rúbrica de evaluación Ejercicio final. Fuente: Elaboración propia. ....	61
Tabla 19: Matriz DAFO. Fuente: elaboración propia .....	62
Tabla 20. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje. Fuentes: RD 1105/2014 (BOE, 2015) .....	72
Tabla 21. Compilación de sesiones de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia....	75



# **1. INTRODUCCIÓN**

## **1.1. JUSTIFICACIÓN**

La dificultad en el aprendizaje de las matemáticas ha sido, por lo general, la piedra con la que muchos estudiantes tropiezan en España a lo largo de su camino educacional. Este hecho, que se puede apreciar en los centros educativos en general, queda patente en los últimos Informes PISA 2015 (PISA, 2015) (Program for International Student Assessment, Programa Internacional para la Evaluación de los Estudiantes) y TIMSS 2015 (TIMSS, 2015) (Trends in International Mathematics and Science Study, Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias de la IEA). Ambos estudios sitúan a nuestro país por debajo de la media de la OCDE y de la UE. De forma más acotada, he podido observar que queda patente esta dificultad en el Centro Educativo donde he estado realizando las prácticas para el Master en Formación del Profesorado.

La última reforma educativa (LOMCE, 2013) incentiva al uso de las TIC en el aula como herramientas de ayuda por un lado al profesorado a la hora de impartir la docencia y principalmente como ayuda a los alumnos para que alcance un aprendizaje significativo. A pesar de lo anterior, como atestiguan recientes estudios entre los que destacamos los realizados por de Pablos, Colás y González (2010) la descentralización de la educación y con ello las diversas políticas educativas en clave autonómica, dibujan un panorama educativo algo heterogéneo en materia de integración escolar de las TIC. Este panorama, da lugar a centros educativos donde se está incrementando el uso efectivo de las TIC en el currículo escolar, pero también tenemos otros centros donde estas innovaciones pedagógicas no se han generalizado.

Lo mismo ocurre con la contextualización de los contenidos, por lo que el presente trabajo aporta una propuesta de intervención para intentar paliar el déficit tanto en uso conjunto de nuevas tecnologías como en la contextualización de los contenidos. La propuesta que se desarrollará en posteriores apartados de este documento, se centrará en el aprendizaje de la geometría analítica en el 4º curso de la ESO.

## **1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Hoy en día la sociedad está cada vez más inmersa en el mundo de las TIC, cuyo papel en la vida cotidiana es una realidad en los países desarrollados, motivo

fundamental por el que la integración de los recursos TIC en el sistema educativo se hace imprescindible. La formación debe conducir a personas competentes en este campo que sean capaces de incorporar las rutinas TIC a su vida diaria y sean capaces de obtener el máximo aprovechamiento de las mismas de acuerdo a sus necesidades individuales.

Los centros docentes cada día procuran nutrirse de más infraestructura y recursos tecnológicos. Ahora bien, el tener los recursos y no tener la capacitación por parte del personal docente para su utilización de forma adecuada, puede hacer que el potencial de las herramientas las TIC queden en meros aportes testimoniales como demostró el estudio de Moreira (2010) donde se constataba en los centros de secundaria estudiados, tendían a organizar microactividades que se desarrollan a través de software específico de distintas materias muy similares a las actividades que se plantean en los libros de texto. Teniendo presente que en general el alumnado está más habituado al uso de estas tecnologías que el profesorado, ya que estas herramientas forman parte de las señas de identidad generacional, se hace necesario que el profesorado mantenga un proceso de formación constante que permita concienciar a los alumnos que el uso educativo de las TIC tiene tanta fuerza como su uso fuera de ámbitos escolares.

Por otro lado, desde la segunda mitad del siglo XX, la geometría parece tener una pérdida progresiva de su posición formativa en la enseñanza de las matemáticas como atestiguaron autores como Hernández y Villalba (2001) y aunque en años recientes ha habido un retorno hacia los contenidos más clásicos de la geometría euclidiana, el material es usualmente presentado a los estudiantes como el producto final y ya terminado. De cualquier modo, sea cual sea la modalidad educativa aplicada para el estudio de la geometría, según Vargas Vargas y Gamboa Araya (2013) en la mayoría de los casos tiene un factor en común: se brinda una enseñanza basada en lápiz y papel, o de pizarra y tiza. Esta metodología, que ha sido válida hasta el momento, no deja de serlo, pero puede beneficiarse mucho con el uso de las TIC, aprovechando las múltiples posibilidades que ofrecen tanto para el docente en el proceso de enseñanza, como para el estudiante, en el proceso de captar los conceptos y “manipularlos” de una forma más dinámica facilitando nuevos caminos para su desarrollo.

### **1.3. OBJETIVOS**

El objetivo principal de este trabajo es aportar una propuesta de intervención en forma de unidad didáctica destinada a implantar el bloque de geometría analítica

relativa a los vectores y la rectas a alumnos de 4º de la E.S.O. ayudándonos del software GeoGebra y contextualizando con el uso elementos significativos de la arquitectura de la Comunidad Valenciana.

### 1.3.1. Objetivos específicos

- **Objetivo 1:**

Escoger edificios emblemáticos de la ciudad de Valencia como base para el trabajo contextualizado.

- **Objetivo 2:**

Analizar los contenidos del bloque de geometría de 4º de la ESO susceptibles de ser trabajados a partir de los edificios escogidos.

- **Objetivo 3:**

Generar actividades contextualizadas con el programa *GeoGebra*, aplicando los resultados de los objetivos 1 y 2.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1. ESTADO DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ACTUALIDAD

La situación de la asignatura de matemáticas en nuestro país actualmente, si atendemos a las evaluaciones periódicas realizadas por distintos organismos como pueden ser los informes PISA (2015) o los informes TIMSS (2015), es a todas luces

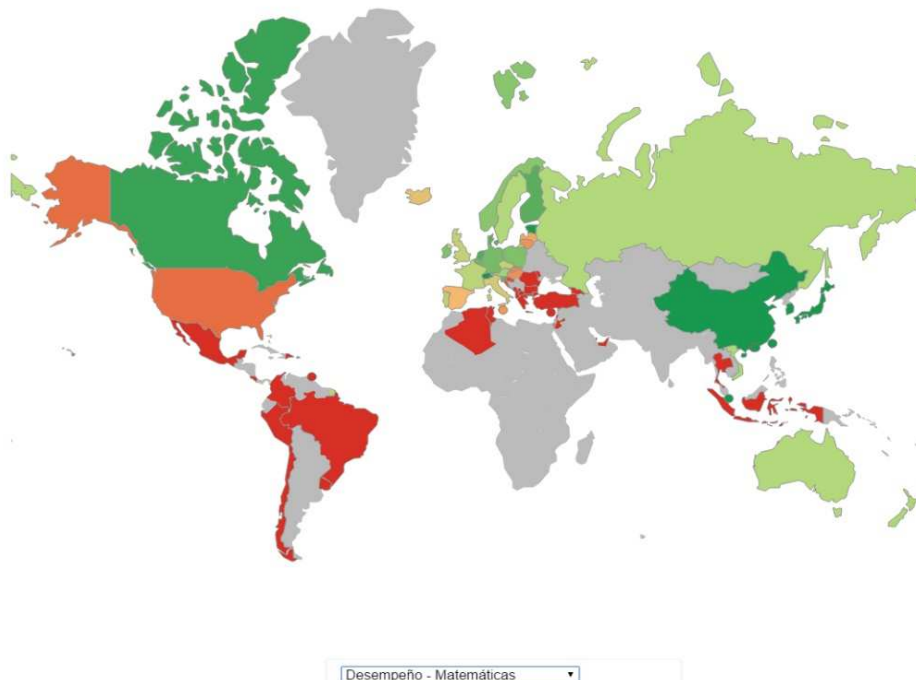


Figura 1. Países y desempeño en matemáticas PISA. Fuente: OCDE (2015)

mejorable. Aunque este último informe España sólo ha participado en la prueba relativa a educación primaria, por lo que no puede tomarse como indicador por sí mismo a la hora de valorar el estado actual de las matemáticas, si puede utilizarse en combinación con el informe PISA, donde también utilizan las matemáticas como área de evaluación, junto con las ciencias, la lectura y la resolución colaborativa de problemas. Los datos de PISA abarcan a unos 29 millones de jóvenes de 15 años de las escuelas de 72 países participantes, incluidos los 35 países miembros de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos). Un primer acercamiento a los resultados lo encontramos en la figura 1:

El informe PISA tiene como objetivo evaluar la formación de los alumnos cuando llegan al final de la etapa de enseñanza obligatoria, para que sus conclusiones puedan ser utilizadas por los países miembros a la hora de adoptar decisiones y políticas públicas adecuadas para mejorar los niveles educativos. En España, aunque en los últimos años se ha producido una mejora de los resultados en las evaluaciones de matemáticas, rompiendo así con una tendencia estable o ligeramente bajista, sigue levemente por debajo de la media de resultados obtenida por los países miembros de la OCDE, lo que demuestra que aunque vamos por el buen camino todavía hay que seguir trabajando en la mejora de los resultados en matemáticas con los que acaban los alumnos de educación secundaria.

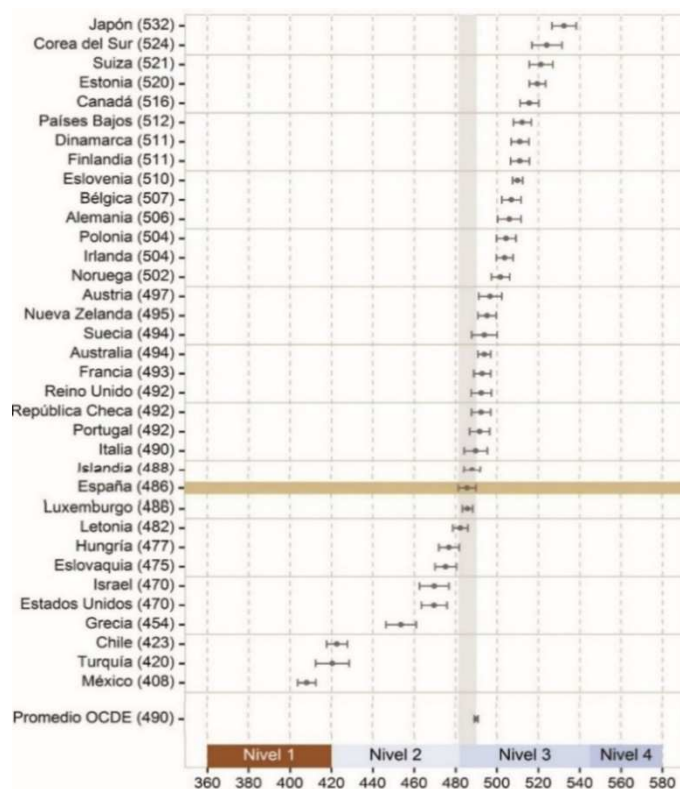


Figura 2. Comparativa países participantes informe PISA 2015. Fuente: OCDE (2015)

La figura 2 sitúa la posición de los diferentes países participantes en el último Informe PISA 2015, en relación con los resultados obtenidos específicamente en matemáticas, y observamos a España (486) próxima pero algo por debajo de la media de la OCDE (490) aunque muy alejada de los países que ocupan los puestos altos de la tabla como son Japón (532), Corea del Sur (524) o más cercano Suiza (521) o Estonia (520) sólo por citar los primeros.

Dentro del propio país, las 17 comunidades autónomas que se presentaron a PISA 2015, también muestran muchas diferencias desde las que mejor valoración obtienen: Navarra (518) o Castilla y León (506), hasta las que peores resultados alcanzan: Canarias (452) o Andalucía (466). Once comunidades se encuentran en la media o por encima de la media de la media española (485) y 10 de las cuales por encima de la media de la OCDE.

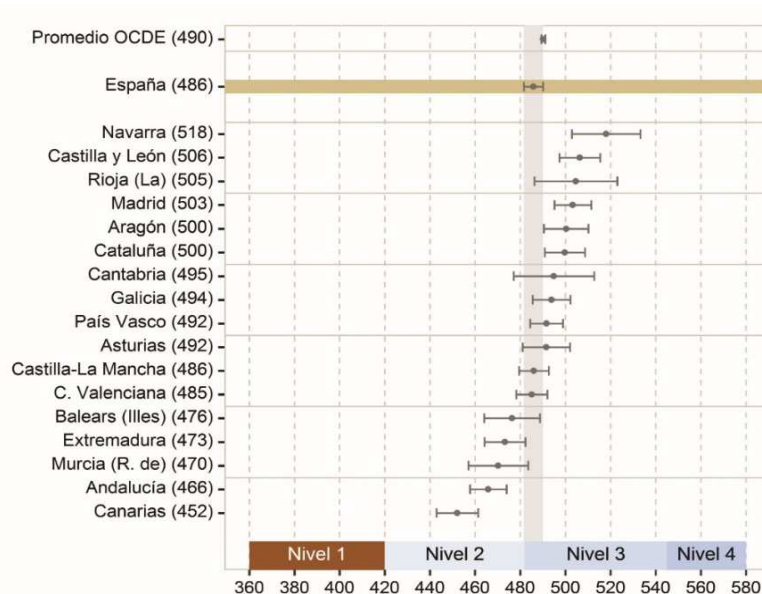


Figura 3. Comparativa CCAA informe PISA 2015. Fuente: OCDE (2015)

La comunidad autónoma en la que se centra el presente Trabajo Fin de Máster es la Comunidad Valenciana en la que, como bien se aprecia en la figura 3, parece evidente que queda trabajo por hacer, ya que se sitúa en la posición número 12 de las 17 comunidades autónomas.

## 2.2. LAS COMPETENCIAS CLAVE

Desde la Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE), el sistema educativo español habla en términos de competencias. La inclusión en el currículo de estas competencias supuso que en la enseñanza dejara de ser predominante el contenido, en favor de los

objetivos generales y finales del currículo que permitan al alumnado afrontar situaciones de la vida cotidiana. Tales competencias son definidas como sigue:

“Capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos” (BOE 106, Ley 2/2006, p. 18)

La implantación de las competencias en el currículo implica que los aprendizajes que adquiere el alumno deben ser significativos y adaptados a las condiciones y características de la sociedad actual. En esta misma línea se encuentra García (2011) quien aboga por que los alumnos sean capaces de aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones que se les plantean fuera del entorno escolar o académico a situaciones reales.

La LOE definía 8 competencias básicas (no evaluables), que con la posterior Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) redujo a 7 competencias (evaluables) divididas en dos grupos: competencias básicas (2) y competencias clave (5):

- 1- Competencia en comunicación lingüística (CCL)
- 2- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)
- 3- Competencia digital (CD)
- 4- Competencia para aprender a aprender (CAA)
- 5- Competencias sociales y cívicas (CSC)
- 6- Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIE)
- 7- Conciencia y expresiones culturales (CEC)

Las distintas competencias son descritas en la Orden ECD/65/2015, (BOE, 2015) de 21 de enero, recogen las relaciones entre competencias, los contenidos y criterios de evaluación de la educación primaria, educación secundaria obligatoria y el bachillerato, y responden a lo establecido según Recomendación 2006/962/EC, del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente.

Las competencias clave recogidas en la orden ECD/65/2015 (BOE, 2015), son definidas haciendo una síntesis de cada una de ellas de la siguiente manera:

### **2.2.1. Competencia en comunicación lingüística**

Resultado de la acción comunicativa dentro de prácticas sociales determinadas, en las cuales el individuo actúa con otros interlocutores y a través de textos en

múltiples modalidades, formatos y soportes. Estas situaciones y prácticas pueden implicar el uso de una o varias lenguas, en diversos ámbitos y de manera individual o colectiva (BOE, 2015, núm. 25, 6991-6992)

### **2.2.2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología**

La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto. Requiere de conocimientos sobre números, medidas y estructuras, así como de las operaciones y las representaciones matemáticas y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos. Su adecuado desarrollo necesita que se aborden las áreas relativas a los números, el álgebra, la geometría y la estadística, interrelacionadas de formas diversas.

Las competencias básicas en ciencia y tecnología, son aquellas que proporcionan un acercamiento al mundo físico y a la interacción responsable con él desde acciones tanto individuales como colectivas, orientadas a la conservación y mejora del medio natural. Contribuyen al desarrollo del pensamiento científico. (BOE, 2015, núm. 25, p.6993-6995)

### **2.2.3. Competencia digital**

Implica el uso creativo, crítico y seguro de las tecnologías de la información y la comunicación para alcanzar los objetivos relacionados con el trabajo, la empleabilidad, el aprendizaje, el uso del tiempo libre, la inclusión y participación en la sociedad. (BOE, 2015, núm. 25, p.6995-6996)

### **2.2.4. Competencia para aprender a aprender**

Habilidad para iniciar, organizar y persistir en el aprendizaje. Esto exige, en primer lugar, la capacidad para motivarse por aprender. Esto exige, en primer lugar, la capacidad de motivarse por aprender, en segundo lugar, conocer y controlar los propios procesos de aprendizaje para ajustarlos a los tiempos y las demandas de las tareas y actividades que conducen al aprendizaje. La competencia aprender a aprender desemboca en un aprendizaje cada vez más autónomo y eficaz. (BOE, 2015, núm. 25, p.6997-6998)

### **2.2.5. Competencias sociales y cívicas**

Habilidad y capacidad para utilizar los conocimientos y actitudes sobre la sociedad, en su concepción dinámica, cambiante y compleja para interpretar fenómenos y problemas sociales en contextos cada vez más diversificados, para elaborar respuestas, tomar decisiones y resolver conflictos, así como para interactuar con otras personas y grupos conforme a las normas basadas en el respeto mutuo y en convicciones democráticas. (BOE, 2015, núm. 25, p.6998-6999)

### **2.2.6. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor**

Capacidad de transformar las ideas en actos: adquirir conciencia de la situación a intervenir o resolver y saber elegir, planificar y gestionar los conocimientos, destrezas o habilidades y actitudes necesarios con criterio propio, con el fin de alcanzar el objetivo previsto. (BOE, 2015, núm. 25, p.6999-7000)

### **2.2.7. Conciencia y expresiones culturales**

Implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos. (BOE, 2015, núm. 25, p. 7001-7002)

## **2.3. COMPETENCIA MATEMÁTICA**

De entre todas las competencias que hemos enumerado y que están presentes en la legislación española, tomaremos como referencia la competencia matemática y su definición según el informe PISA 2015:

“Capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a remitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan” (OCDE, 2015, p. 5)



Según Rico (2007) el desarrollo de una buena competencia matemática en los escolares al término de la educación obligatoria, se convierte en la finalidad principal de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La importancia de las matemáticas nos conduce a tener la necesidad de formar alumnos que no dominen únicamente una serie de contenidos, sino que además sepan reflejar lo aprendido en la vida cotidiana, esto supone un cambio sustancial respecto al concepto previo de matemáticas basado en aprender una serie de algoritmos y definiciones totalmente descontextualizados. Ahora bien, esto, de entrada tampoco es garantía de nada, porque supone sacudir algunas creencias o estereotipos muy arraigados en nuestra cultura respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje como sostiene Alsina (2010) se hace necesario implantar nuevas metodologías desde los primeros años de enseñanza para poder desarrollar la “competencia matemática”.



Figura 4. Pirámide de la educación matemática. Fuente Alsina (2010)

La educación es una necesidad básica, como lo es la alimentación, símil utilizado por Alsina (2010) para construir la Pirámide de la educación matemática, la cual toma su origen en la conocida Pirámide de la nutrición saludable. La pirámide de educación matemática (figura 4) indica de forma sencilla el tipo de recursos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable. No descarta ningún recurso (igual que la pirámide de la nutrición saludable no descarta ningún alimento), sólo informa sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional, como puede ocurrir con el libro de texto.

En la base del diagrama piramidal se sitúan los recursos que según Alsina (2010) son imprescindibles para desarrollar el pensamiento matemático, en general, y la competencia matemática, en particular. En la cúspide se encuentran los recursos que deberían usarse solo de forma ocasional, como puede ser el libro de texto, aunque en

la realidad de las aulas, éste suele cobrar un papel predominante en el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas.

## **2.4. GEOMETRÍA ANALÍTICA**

El objeto matemático que se ha seleccionado para desarrollar una propuesta didáctica es el de geometría analítica: vectores y rectas, destinado al curso 4º de ESO de enseñanzas académicas.

Conocemos la geometría como el estudio de las propiedades y de las magnitudes de las figuras en el plano o en el espacio, y particularizando, conocemos la geometría analítica como el estudio de figuras que utiliza un sistema de coordenadas y métodos del análisis matemático.

La Geometría Analítica, menciona González (2007), es un poderoso instrumento que utiliza como herramienta básica el álgebra, una geometría de la cual Pierre Fermat (1601-1655) y René Descartes (1596-1650) fueron los verdaderos artífices.

Descartes publica en 1637 “La Geometría”, junto con “La Dióptrica” y “Los Meteoros” y el mismo año, Fermat envía al Padre Mersenne sus investigaciones de alrededor de 1629 contenidas en la memoria “*Introducción a los Lugares Planos y Sólidos (Ad Locos Planos et Solidos Isagoge)*”. Estas obras contienen los fundamentos de lo que posteriormente se denominaría Geometría Analítica.

Sin embargo, al igual que la mayoría de aspectos o ramas de las matemáticas no pueden asignarse al trabajo de un único individuo, la geometría analítica de “Descartes y Fermat” tampoco es una excepción a esto, es decir, no fue un producto exclusivo de sus investigaciones, sino más bien, la síntesis de varias tendencias matemáticas convergentes en los siglos XVI y XVII. Entre otros autores que contribuyeron a las tendencias citadas pueden contarse a Apolonio, Oresme, Vieta y muchos otros matemáticos, como se afirma en Hernández (2002). Tanto Descartes como Fermat deben mucho de su trabajo al Análisis Algebraico, en el que Vieta había transformado el Análisis Geométrico de los griegos, así como al Álgebra de Diofanto y la Latitud de las formas de Oresme.

### **2.4.1. Bloque de Geometría analítica en 4º de la E.S.O.**

El Decreto 87/2015 (DOGV, 2015) de 5 de junio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Valenciana, en su Artículo 2, remite al Real decreto

1105/2014 (BOE, 2015), en lo que se refiere a contenidos comunes, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de las asignaturas troncales, entre las que se encuentra la asignatura de matemáticas.

El Real Decreto 1105/2014 (BOE, 2015), de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, divide los contenidos de las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de ESO en 5 bloques distribuidos como sigue:

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Bloque 2: Números y Álgebra.

Bloque 3: Geometría.

Bloque 4: Funciones.

Bloque 5: Estadística y probabilidad.

Dentro los contenidos del bloque “Geometría” si nos atenemos al RD 1105/2014 (BOE, 2015), de aplicación para el curso 4º de ESO encontramos los que se van a desarrollar en este documento: “Iniciación a la geometría analítica en el plano: coordenadas, vectores, ecuaciones de la recta, paralelismo y perpendicularidad”

En este bloque volvemos a ver las ecuaciones de cursos anteriores, pero desde un punto de vista geométrico al tratar nociones de posición relativa de dos rectas en el plano, sin embargo, aparece un concepto nuevo, como es el concepto de vector, por lo que se hace necesario comenzar por definirlo y tener claro cómo utilizar los vectores antes de profundizar en la geometría. Con ello vamos a establecer unos contenidos mínimos que se desarrollarán a lo largo de la unidad didáctica y que quedan expuestos en la Tabla 1.

CONTENIDOS MÍNIMOS	APLICACIONES
Vectores y puntos en el plano	Obtener el/los puntos que dividen un segmento en dos, tres o más segmentos.
Operaciones con vectores	
Distancia entre dos puntos, dos rectas y un punto y una recta.	Obtener paralelogramos a partir de 3 puntos definidos.
Punto medio de un segmento	Calcular el perímetro de una figura dados sus vértices.
Punto simétrico	
Comprobación si 3 puntos están alineados	Obtener distancias entre rectas paralelas.
Ecuaciones de la recta	Obtener rectas a partir de su pendiente y obtener la pendiente a partir de vectores.
Posición relativa de dos rectas en el plano	
Obtener la pendiente de la recta	

Tabla 1. Contenidos y aplicaciones de la unidad didáctica. Fuente: Elaboración propia

### **2.4.2. Dificultades en la enseñanza de la geometría analítica**

La enseñanza de la geometría analítica supone mostrar la unificación del álgebra y la geometría. Una de las dificultades principales que se presentan en el proceso de enseñanza de los conceptos de geometría analítica, como señalan Villarreal, Carmona y Arango (2013) es que por la automatización de procedimientos la memorización de ecuaciones los problemas tipo y repetitivos, se termina perdiendo la esencia de la geometría. Los estudiantes resuelven ejercicios sin tener claro el motivo y el por qué se elige un camino determinado para llegar a la resolución definitiva.

Conviene no perder de vista, las peculiaridades de cada alumno, las cuales hacen que no todos sean capaces de aprender con el uso de una misma metodología de enseñanza, con lo que conviene tener una flexibilidad de recursos para que todos los alumnos alcancen el conocimiento pretendido.

No son pocas las ocasiones en las que el proceso de enseñanza se hace en base únicamente a un libro de texto, que como previamente hemos comentado y defendía Alsina (2010) conduce a aprendizajes poco significativos.

Utilizar la arquitectura como elemento de contextualización, unido al uso del software GeoGebra, puede suponer tanto una motivación extra por parte del alumno como un mayor interés en el aprendizaje dentro de un contexto. Lo que se debe evitar es utilizar una imagen arquitectónica con el fin de distraer y un software donde el fin sea aprender a usar el software por encima de aprender los conceptos de geometría analítica que se pretenden inculcar.

### **2.4.3. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas**

El desarrollo de habilidades de pensamiento es un elemento esencial en el aprendizaje de los conceptos geométricos. No tener en cuenta esto y presionar para que las cosas se aprendan, implica que los aprendizajes acaben siendo memorísticos, faltos de significatividad y no contribuye a aumentar la motivación del estudiante, cuando un elemento básico para el aprendizaje, es sin duda la motivación intrínseca (Villarreal et al, 2013).

Si la enseñanza se hace dando la importancia fundamental a la memorización de una serie de conceptos y técnicas, sin preocuparse de que el alumno comprenda las estructuras que justifican estas reglas, apunta Font, (1994) que el alumno tendrá un aprendizaje de tipo mecánico, basado en repetir una serie de procedimientos algorítmicos, ejecutados con mayor o menor rapidez.

El alumno necesita una motivación intrínseca positiva para enfrentarse a las nuevas dificultades de forma proactiva, buscando nuevas estrategias o preguntando al profesor. Si en cambio, esta motivación no existe, ante las dificultades que pueda encontrar en su proceso de aprendizaje, adoptará una actitud pasiva con un comportamiento radicalmente opuesto al anterior, optará con toda probabilidad por no hacer nada, no preguntar e intentará copiar la respuesta (Font, 1994)

Existen una serie de características de la acción docente que resultan motivadoras para la mayoría de alumnos según estudio de Alonso Tapia, (2005) independientemente de sus motivaciones personales. Se incluyen en esta categoría: el uso de situaciones que estimulan la curiosidad, así como el uso de imágenes y ejemplos.

Tomando como punto de partida el citado estudio de Alonso Tapia, la pretensión de la unidad didáctica que se presentará en puntos sucesivos, pretende fomentar esa curiosidad por parte del alumnado, mediante imágenes y ejemplos tangibles y reales de su vida cotidiana.

Según el citado estudio (Alonso Tapia, 2005), la motivación es un elemento fundamental a la hora de afrontar cualquier actividad porque la dota de significado de cara a quien se enfrenta a ella, asimismo, una mayor motivación contribuye a una percepción del esfuerzo necesario para realizar la actividad, mucho menor. Obviamente, es una apreciación subjetiva por parte de quien se enfrenta a la actividad en cuestión, pero que supone una ayuda para la consecución de los objetivos pretendidos.

Se busca que por un lado aumente su motivación en el proceso de aprendizaje y al mismo tiempo que el aprendizaje sea realmente significativo.

## **2.5. LAS TIC COMO HERRAMIENTA EDUCATIVA**

La aparición de las “Nuevas Tecnologías” a finales del siglo XX ha ido derivando a lo que hoy conocemos como “Tecnologías de la Información y la comunicación” (TIC). Tal ha sido el auge de estas tecnologías que se ha creado una nueva sociedad llamada “Sociedad de la Información” y se caracteriza por la posibilidad de acceder a mucha información y de conectarse con otros colectivos o ciudadanos fuera de los límites del espacio y del tiempo como lo define Abahonza y Holman (2014).

Podemos considerar que la educación no es un ente ajeno a la sociedad en que vivimos, por lo que la aparición y uso de forma cada vez más extendida de las TIC han

supuesto, o al menos están en camino de suponer un cambio en el modelo de enseñanza tradicional.

El uso de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje como apunta Keller (2007), no sólo incrementa el rendimiento de los estudiantes sino también su la motivación. La motivación entendida como deseo de una persona de perseguir una meta o realizar una tarea, la cual se manifiesta por la elección de metas y esfuerzo en perseguir la meta. En este mismo sentido también se decantan Bakar, Ayub, Luan y Tarmizi (2010) quienes afirman que con los recursos multimedia, los estudiantes son capaces de visualizar conceptos matemáticos que serían difícil de imaginar usando métodos tradicionales de enseñanza. Es por ello que la utilización de las TIC cobra cada vez mayor importancia como herramienta en la educación, concretamente en la asignatura de matemáticas, que es la que nos ocupa en el presente documento y más si cabe con la disponibilidad de múltiples softwares gratuitos que se pueden descartar a través de internet.

Asumiendo que estamos en un mundo en el que la competencia digital es una exigencia para todos los ciudadanos, se ha hecho imprescindible el mostrar mucho interés en trasladar las TIC a la educación, y con ellas enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, aprovechando así las herramientas tecnológicas con las que se cuentan en la actualidad, como atestigua Ortiz Hernández y Arias Madriz (2012). Ahora bien, hay que tener presente que la integración de las TIC en el aula es responsabilidad de los profesores, por lo que antes de introducirlas, es necesario plantearse por parte del profesor, el modo de utilizarlas eficazmente para que su uso sea beneficioso en para ese proceso de enseñanza-aprendizaje y no un aporte puntual que no aporta calidad al proceso enseñanza-aprendizaje.

El marco de Competencia Digital Europea para todos los ciudadanos, también conocido como DigComp (Ferrari, 2013) establece 5 áreas que conforman los componentes clave de la competencia digital y que se pueden enumerar como sigue:

- 1- Tratamiento de la información.
- 2- Creación de contenido.
- 3- Comunicación.
- 4- Resolución de problemas.
- 5- Seguridad.

En esta misma línea, podemos encontrar a la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2008) sostiene que la educación en las Tecnologías de la Información y la Comunicación pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar las capacidades necesarias para llegar a ser:

- Competentes para utilizar tecnologías de la información.

- Buscadores, analizadores y evaluadores de la información.
- Solucionadores de problemas y tomadores de decisiones.
- Usuarios creativos y eficaces de herramientas de productividad.
- Comunicadores, colaboradores, publicadores y productores.
- Ciudadanos informados, responsables y capaces de contribuir a la sociedad.

Actualmente son varios los estudios (Ruiz Vahos, Ávila Mejía y Villa-Ochoa, 2012) que han demostrado que el uso de recursos tecnológicos en el aula de clase permiten la creación de ambientes de aprendizaje en que los estudiantes pueden producir conocimiento matemático de una forma alternativa donde se resalten aspectos de los conceptos no siempre explícitos en el modelo tradicional de presentación expositiva. Estos autores consideran que el software GeoGebra, que es el que trataremos de incorporar en el desarrollo de la unidad didáctica que se aporta en puntos sucesivos, integra el trabajo en las áreas de geometría, álgebra y análisis matemático en un ambiente dinámico potenciando entre otros el desarrollo del pensamiento variacional. En esta misma línea se decanta el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) el que sostiene que cuando las herramientas tecnológicas están disponibles, los estudiantes pueden enfocar su atención en proceso de toma de decisiones, reflexión, razonamiento y resolución de problemas.

## **2.6. SOFTWARE PARA ENSEÑAR LA GEOMETRIA ANALITICA**

Durante siglos, la geometría ha sido uno de los pilares de la formación académica para estudiantes de todo el mundo, convirtiéndose en un elemento formador del razonamiento lógico y, sin embargo, durante la segunda mitad del siglo XX perdió presencia en los planes de estudio, una presencia que los actuales currículos de matemáticas de todos los niveles educativos están recuperando.

Los recientes cambios en las TIC han permitido a los profesores, dar pasos hacia la integración de los ordenadores en la educación, siendo en muchos aspectos los instrumentos preferidos para su uso en la enseñanza frente a otras tecnologías disponibles según Akkaya, Tatar y Kagizmanli (2011) y en la asignatura de matemáticas, es importante que los alumnos muestren interés y sobre todo, que les resulte atractivo y vean el interés que puede tener su estudio para la vida diaria.

Analizamos ahora alguno de los programas existentes para el estudio de la geometría.

### 2.6.1. Cabri

Es un software comercial de geometría interactiva, que permite construir objetos geométricos, visualizarlos de forma dinámica manipularlos y realizar medidas sobre ellos. Es un software sencillo, que permite un procedimiento de construcción similar al que se tiene con una hoja de papel, lápiz, goma de borrar, regla y compás, ayudando de esta manera a los alumnos a realizar sus primeras construcciones matemáticas. De esta forma, el alumno explora las matemáticas de forma activa e interactiva. Una ecuación o una figura geométrica se convierten en elementos de experimentación donde el alumno puede ver su comportamiento al aplicar diferentes acciones sobre los mismos.

Con estas premisas, Cabri es un software al que se le puede sacar mucho partido en su uso en educación primaria, pero cuenta con un inconveniente: es un producto comercial, por lo que su uso está sometido al pago de una licencia de uso. En este sentido podemos distinguir 4 tipos de licencias de uso según quien y para qué vaya a utilizar el programa:

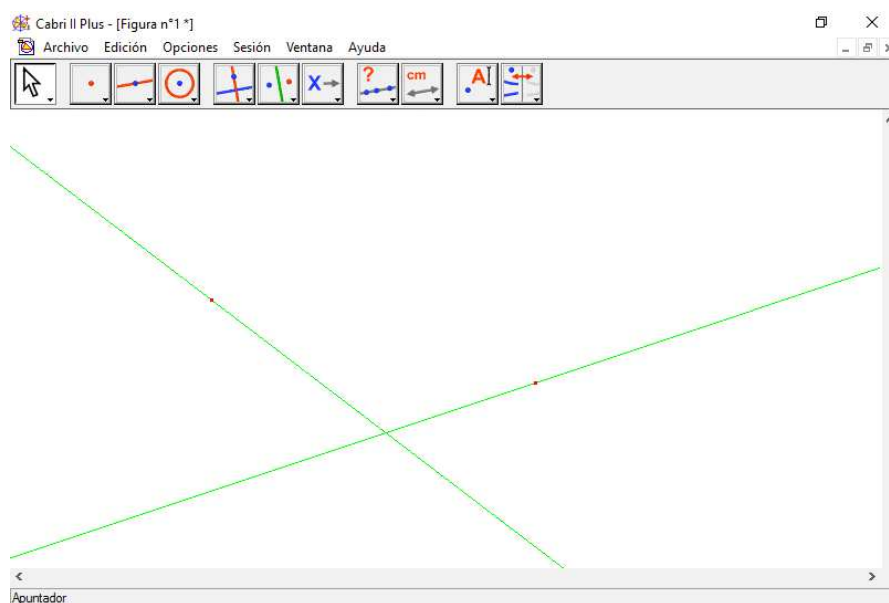


Figura 5. Captura de pantalla entorno de trabajo Cabri. Fuente: Elaboración propia.

Licencia individual: el software se puede utilizar únicamente en un ordenador con un coste de 100€ para usar indefinidamente.

Licencia de aula: el software puede ser instalado y utilizado hasta en 10 ordenadores como máximo en un mismo centro y con una única dirección, con un coste de 275€ para usar indefinidamente.



Licencia de centro: el software puede instalarse y utilizarse por un número ilimitado de ordenadores en un mismo centro con la misma dirección, además de hasta un máximo de 10 profesores que pueden instalar el programa en su ordenador personal, con un coste de 570€ para usar indefinidamente.

Licencia de alumno: los alumnos de un centro dotado de una licencia Centro, pueden adquirir la licencia alumno.

Licencia para uso monopuesto durante un año, con un coste de 25€ para usar indefinidamente.

### 2.6.2. Geogebra

*GeoGebra* es un software de matemáticas dinámicas (DGS) para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un sólo programada que actualmente se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo.

El creador de GeoGebra y actual director es Markkus Hohnwarter, quien comenzó el proyecto de este software en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y su primera versión salió un año después en inglés y Alemán. Desde su primera versión (*GeoGebra 1.0*) a la versión actual (*GeoGebra 5.0*) ha sufrido sucesivas actualizaciones, la más destacable de la última versión es el soporte para 3 dimensiones (vista 3D). Actualmente se encuentra disponible en diversas plataformas (Windows, Mac, Chrome OS, Linux, Android, iOS) y está traducido a 50 idiomas.

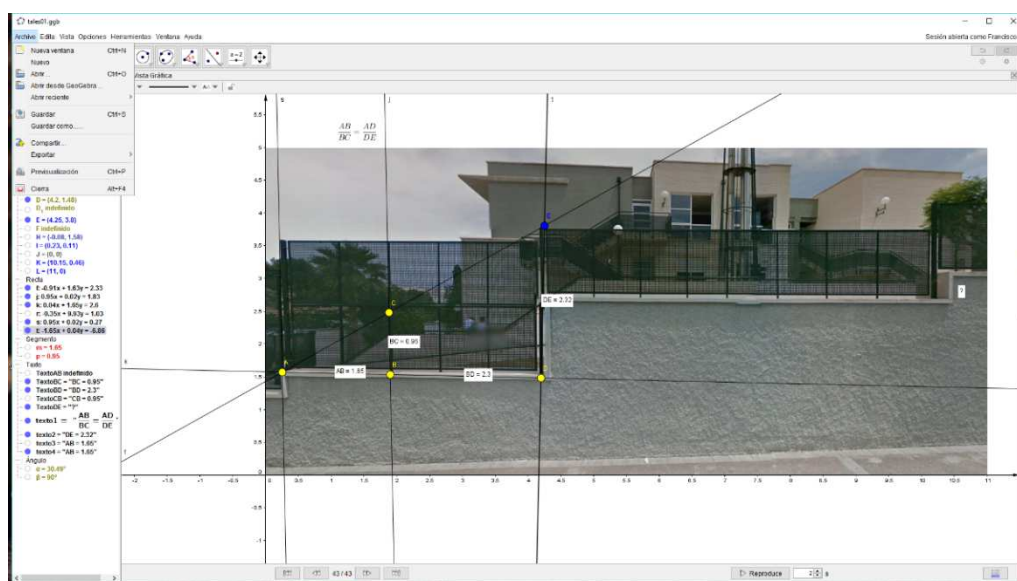


Figura 6. Entorno de trabajo GeoGebra. Fuente: Elaboración propia.

El carácter abierto y gratuito de este software siempre y cuando no sea para uso comercial, lo convierte en una herramienta que puede ser aplicada en cualquier centro educativo con fines docentes además de ser accesible a cualquier alumno en su domicilio para seguir practicando e indagando sobre los contenidos vistos previamente en clase tanto en línea como descargado en su ordenador para trabajar offline siempre que se quiera.

Muchas investigaciones indican las ventajas de la utilización de procesadores geométricos para la enseñanza de esta disciplina, ya que permiten abordar la geometría de forma dinámica e interactiva como bien comenta Santana Zerpa (2010) y demuestra un estudio de Ruiz López y Atrio Cerezo (2013) *“Influencia del nivel de competencia digital en la adquisición de competencias geométricas en un entorno GeoGebra”* pone de manifiesto que los estudiantes prefieren usar GeoGebra frente a lápiz y papel para investigar y conjeturar en procesos de resolución de problemas abiertos. Asimismo, alumnos de nivel medio y alto mejoran sus competencias didáctico-geométricas de forma análoga, en el mismo sentido se destaca que el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD) en la enseñanza produce cambios en la actuación docente en el aula y en las características del conocimiento que construye el alumno.

Entre las características destacables de GeoGebra podemos nombrar:

- Es un recurso para la docencia de las matemáticas basada en las TIC, útil para toda la educación secundaria.
- Permite realizar acciones matemáticas como demostraciones, supuestos, análisis, experimentaciones, deducciones, etc.
- Combina geometría, álgebra y cálculo, además de derivar, integrar y hacer representaciones.
- Permite construir figuras con puntos, segmentos, rectas, vectores, cónicas y genera gráficas de funciones que pueden ser modificadas de forma dinámica utilizando el ratón.
- Trabaja con objetos. Cualquier modificación realizada dinámicamente sobre el objeto afecta a su expresión matemática y viceversa, cualquier cambio en su expresión matemática modifica su representación gráfica.
- Puede ser utilizado tanto online (<https://www.geogebra.org/cms/es/download>) como instalado en el ordenador (off line) desde <http://www.geogebra.org/cms/es/installers>.
- Para utilizarlo on line se requiere tener instalado Java 1.4.2 superior.

El Instituto Nacional de Tecnologías y de Formación del Profesorado (INTEF) desarrolló el proyecto Gauss, el cual ofrece al profesorado varios centenares de ítems

didácticos y applets de GeoGebra, quedando cubiertos todos los niveles de matemáticas de Primaria a Secundaria. Además, estos ítems están diseñados para ser utilizados tanto en pizarra digital como en dispositivos móviles

## **2.7. ARQUITECTURA COMO CONTEXTO MOTIVADOR**

En todo proceso de aprendizaje, dicho proceso será mucho más rápido, efectivo y satisfactorio si la persona que desea aprender, se siente realmente motivada a ello.

La motivación puede nacer de una necesidad que se genera de forma espontánea (motivación interna) o bien puede ser inducida de forma externa (motivación externa) según clasificación de Gómez-Chacón (2005). Desde este punto de vista la motivación la clasificamos en:

- Motivación intrínseca: cuando la persona fija su interés por el estudio o trabajo por el mero placer y satisfacción que experimenta mientras aprende, explora o trata de entender algo nuevo.
- Motivación extrínseca: cuando el alumno sólo trata de aprender por las ventajas o beneficios que puede obtener, no tanto porque guste la asignatura.

La propuesta que busca introducir este documento, es el uso de la arquitectura construida, conocida y cercana como elemento que fomente la motivación interna o intrínseca del estudiante, al contextualizar el contenido a aprender partiendo de elementos que son cercanos a la vida cotidiana del alumno, con los que van a poder experimentar, tiene la oportunidad verlos in situ, o los ha visto, y puede aplicar lo que aprende sobre el modelo que toma como referencia.

Para que un aprendizaje sea efectivo y perdure en el tiempo, debe ser significativo, lo que desde un punto de vista docente, supone aprovechar los problemas de la vida diaria o elementos cercanos al día a día para enseñar matemáticas, aprendiendo mediante su aplicación en estos contextos referidos. En este sentido, PISA pone en énfasis el medir la capacidad de los alumnos para aplicar conocimientos y habilidades en la vida diaria.

El uso de elementos arquitectónicos, como punto de partida para el estudio de la geometría analítica que se desarrollará en este trabajo, pretende seguir los principios del enfoque realista de la educación matemática como los enumera Gómez-Chacón (2005): prestar mucha atención, por parte del alumnado, a la reinención, progresar gradualmente entre diferentes niveles de abstracción, guiarse por el desarrollo histórico-genético y a partir de situaciones reales para desarrollar el aprendizaje matemático.

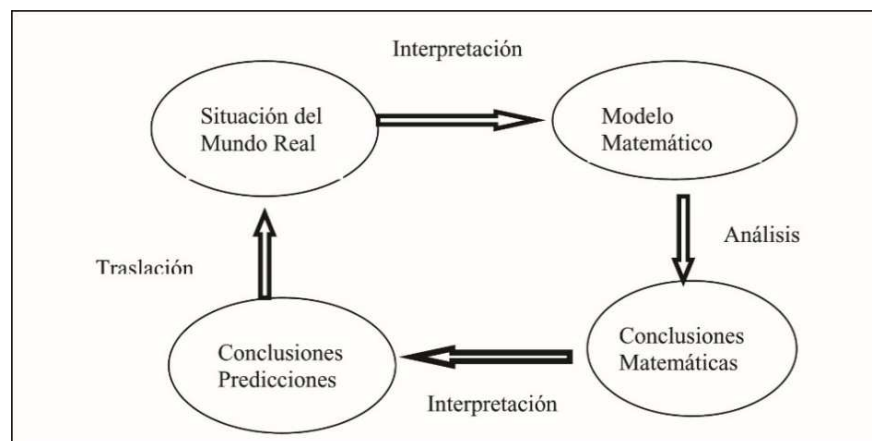


Figura 7. Esquema del enfoque realista en matemáticas. Fuente: Gómez-Chacón (2005)

### 3. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

El planteamiento que busca la unidad didáctica que se presenta, no pretende seguir al pie de la letra los principios comentados en un enfoque realista de la educación matemática, pero sí pretende quedarse con el fondo del planteamiento, al ubicar al alumnado en un contexto real, y utilizar ese contexto, como punto de partida mediante el cual desarrollar el proceso de aprendizaje.

La utilización como punto de partida, de imágenes de edificios (principalmente en imágenes de exterior, pero sin descartar el formato de planos de plantas y alzados) reconocidos y reconocibles por los estudiantes, que por su singularidad y estética puedan aportar las características requeridas para el estudio de la Unidad Didáctica basada en el estudio de los vectores y las rectas.

Como posibles edificios candidatos a ser susceptibles del estudio, podríamos tener, entre otros edificios relevantes en el ámbito de la Comunidad Valenciana:

- El edificio “Veles e Vents”, de los prestigiosos arquitectos David Chipperfield y Fermín Vázquez, que nació con el objeto de albergar a los invitados y espectadores de la 32ª America’s Cup, y que se ha convertido en un icono de la ciudad de Valencia.
- El edificio “ADDA”, nuevo Auditorio de la Diputación de Alicante, diseñado por el prestigioso arquitecto Javier García Solera, que a pesar de ser un edificio joven, ya se ha convertido en un referente de la ciudad de Alicante para albergar tanto eventos musicales y artísticos como congresos y conferencias.

Entre las diferentes opciones para comenzar el proceso de enseñanza-aprendizaje, utilizaremos el edificio “Veles e Vents”.



Figura 8. Edificio Veles e Vents. Fuente: Piquer (2016)

Los motivos para su selección son los siguientes:

- Su singular estética, que hace posible su utilización como modelo para el desarrollo de la unidad didáctica aportando amplias posibilidades gracias a su diseño arquitectónico las cuales, pueden ser explotadas desde la visión de la geometría analítica: vectores y rectas, que nos ocupa.
- Su reconocimiento social tanto en la ciudad de Valencia, como en toda la Comunidad Valenciana en el ámbito social, y a nivel nacional e internacional en el ámbito de la arquitectura.
- Por su cercanía geográfica, que permite ser observarlo en directo por los educandos en el proceso de aprendizaje y por las amplias posibilidades que aporta su diseño arquitectónico y pueden ser explotadas en una propuesta educativa en el ámbito de la geometría anal

La presente unidad didáctica está dirigida para la asignatura de matemáticas de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO)

El marco legislativo que desarrolla el currículo oficial para esta etapa educativa es el Decreto 87/2015, de 5 de junio (DOGV, 2015) del Consell, por el que se establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Valenciana.

En los aspectos que no desarrolla la ley autonómica anterior, somos remitidos al Real Decreto 1105/2014 (BOE, 2014), de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

El artículo 2 del mencionado Decreto 87/2015 (DOGV, 2015) establece que los contenidos comunes, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables que conforman el currículo básico de las materias del bloque de asignaturas troncales, serán los recogidos en el anexo I del Real Decreto 1105/2014 (BOE, 2015)

Los contenidos y criterios de evaluación para cada curso, las relaciones entre las competencias y los contenidos y criterios de evaluación, así como las recomendaciones de metodología didáctica, serán los establecidos en el propio documento autonómico.

En el Decreto 87/2015 (DOGV, 2015) artículo 15, “Objetivos y fines” insta a los centros educativos, a que las concreciones curriculares que establezcan en su programación, garanticen la consecución de los objetivos establecidos en el artículo 11 del Real Decreto 1105/2014.

Esta unidad didáctica, siguiendo las especificaciones de la normativa autonómica, recurrirá a la normativa estatal para desarrollar los objetivos y los fines que se pretenden conseguir.

### **3.2. CONTEXTO**

La unidad didáctica va dirigida a un centro ubicado en la Comunidad Valenciana, concretamente en la provincia de Alicante, más específicamente, el centro Ángel de la Guarda, centro católico ubicado en la localidad de Alicante, capital de provincia con una población de 334.418 habitantes. Es un centro pequeño, con dos grupos por curso, que no llega a sumar 200 estudiantes entre todos los niveles de Educación Secundaria Obligatoria.

En nivel socioeconómico de los estudiantes es medio-alto, y el nivel de cohesión de los grupos es bueno y tienen buenos hábitos de trabajo.

La metodología didáctica en la asignatura de matemáticas, hasta la fecha no contempla el uso de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y la docencia se basa únicamente en la metodología tradicional.

Para el trabajo con TIC, el centro dispone de pizarra digital en todas las aulas y un aula de informática equipada con un ordenador por alumno.

### **3.3. OBJETIVOS DE LA PROPUESTA**

#### **3.3.1. Objetivos generales de etapa de ESO**

Los objetivos generales de etapa quedan establecidos en el Real Decreto 1105/2014 (BOE, 2015), artículo 11 y se describen en el Anexo I del presente documento.

#### **3.3.2. Objetivos específicos de la unidad didáctica**

Los objetivos específicos pretendidos en esta unidad didáctica se obtienen a partir de los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables descritos en el RD 1105/2014 de 26 de diciembre (BOE, 2015).

- a) Saber representar puntos en el plano
- b) Saber representar vectores en el plano
- c) Saber representar rectas en el plano
- d) Conocer las operaciones básicas a realizar con los vectores
- e) Saber representar rectas en el plano.
- f) Conocer las distintas formas de representar una recta.
- g) Saber calcular la distancia entre dos puntos, entre un punto y una recta y entre dos rectas paralelas.
- h) Saber calcular la ecuación algebraica de la recta a partir de la representación gráfica, dados dos puntos, un punto y una recta o un punto y la pendiente de la recta.

### **3.4. COMPETENCIAS**

La LOMCE establece las competencias básicas y las competencias clave que forman parte de las enseñanzas en Educación Secundaria Obligatoria.

Las competencias básicas que pretenden ser tratadas en esta unidad didáctica y el modo en que se trabajarán se describe a continuación:

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CM): competencia principal en el estudio de las matemáticas. Se desarrollará durante toda la unidad didáctica mediante la resolución de ejercicios y asimilación de nuevos conceptos matemáticos.

- Competencia en comunicación lingüística (CL): se desarrolla paralelamente a la competencia matemática. Deben leer, comprender lo leído y expresarse para poder resolver y exponer los problemas propuestos.
- Competencia digital (CD): se desarrolla cuando los alumnos trabajan en soporte informático *GeoGebra*.
- Competencia de aprender a aprender (CAA): se desarrolla al apoyar el conocimiento nuevo en el aprendido con anterioridad y tener capacidad de ser auto-suficientes en el aprendizaje.
- Competencias sociales y cívicas (CSC): se desarrolla a lo largo de las actividades a realizar en grupo, demostrando capacidad para dialogar y llegar a entendimiento entre los compañeros.
- Conciencia y expresiones culturales (CEC): Utilizar los conocimientos adquiridos para describir o crear distintos elementos artísticos.

TABLA DE COMPETENCIAS	
CL	Comunicación lingüística.
CM	Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología
CD	Competencia digital
CAA	Aprender a aprender
CSC	Competencias sociales y cívicas
SIE	Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor
CEC	Conciencia y expresiones culturales

Tabla 2. Competencias. Fuente: Elaboración propia.

### 3.5. CONTENIDOS

Los contenidos mínimos para la asignatura de matemáticas vienen recogidos en el Real Decreto 1105/2014 (BOE, 2015). La propuesta didáctica presentada, estará regida por los siguientes contenidos recogidos de dicha norma estatal que se desglosarán más adelante:

CONTENIDOS
1. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. 2. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. 3. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

Tabla 3. Contenidos. Fuente: Elaboración propia a partir de RD 1100/2014, de 26 de diciembre (BOE, 2015)



### **3.6. CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE**

Para los criterios de evaluación, al igual que los estándares de aprendizaje evaluables para las asignaturas troncales, la normativa autonómica remite a los recogidos el Real Decreto 1105/2014 (BOE, 2015) y se recoge en la tabla 20 recogida en el Anexo I de este documento.

### **3.7. METODOLOGÍA**

La metodología que seguirá esta propuesta didáctica, pretende fomentar la autonomía de los estudiantes, el buen uso de las nuevas tecnologías (TIC), con el objeto de convertir al alumno en protagonista de su propio aprendizaje.

Se buscará una relación entre los conceptos previos y los nuevos, con el objeto de alcanzar un aprendizaje constructivista basado en la participación activa del alumno en su propio aprendizaje.

La adaptación a las necesidades de todos los estudiantes, sean cuales sean sus particularidades (déficit de atención, hiperactividad, altas capacidades) se tendrá en cuenta en todas las actividades, profundizando más en aquellos alumnos con mayor facilidad de aprendizaje y permitiendo el ritmo individual de acuerdo a las capacidades de cada estudiante.

El aprendizaje tanto individual como colectivo tratará de favorecer la adquisición de las competencias básicas, especialmente las relacionadas con la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

Se emplearán diversas estrategias metodológicas:

- Exposición del profesorado utilizando diversos soportes. Antes de comenzar la exposición, se deben conocer las ideas previas y las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.
- Utilización de *GeoGebra* para entender mejor los contenidos, para comprobar las actividades realizadas y, en general, como soporte y recurso facilitador de la construcción de ideas.
- Como elemento motivador y contextualizador de la materia en el mundo real, se abordará la temática de la unidad didáctica utilizando el edificio “Veles e Vents” sito en el puerto de la ciudad de Valencia como nexo de unión entre el conocimiento y su aprendizaje.
- Trabajo reflexivo personal en el desarrollo de las actividades individuales y de proyectos para investigar y descubrir.

- Trabajo en grupo cooperativo de 2 o 3 estudiantes en el desarrollo de las actividades y proyectos propuestos.
- Puesta en común después de los trabajos, tanto individuales como colectivos.

La unidad didáctica se dividirá en 9 sesiones, siendo la primera (sesión 0) y la última (sesión 8) peculiares respecto al resto de sesiones.

La secuenciación de las sesiones 1 a 7, siempre será la misma:

1. INTRODUCCIÓN: Contenidos y objetivos de la sesión:
2. BREVE EXPLICACIÓN TEÓRICA: Explicación por parte del docente del contenido de la sesión en curso.
3. APLICACIÓN PRÁCTICA: Trabajo individual o en grupo de los contenidos explicados en el punto anterior.

Las sesiones 0 y 8 no seguirán la misma metodología de trabajo por su peculiaridad en cuanto

- Sesión 0: Introducción a GeoGebra, a la metodología de trabajo con el software y en el transcurso de la unidad didáctica.
- Sesión 7: trabajo individual durante toda la sesión con un peso importante en la evaluación del estudiante.

### **3.8. TEMPORALIZACIÓN**

El Decreto 87/2015, establece que la asignatura de matemáticas se imparta durante un periodo de 4 días semanales, o lo que es lo mismo, 4 sesiones de aproximadamente cincuenta minutos de duración por cada sesión.

Los centros que cuenten con aulas equipadas con equipo informático para los estudiantes podrán llevar a cabo la unidad didáctica de forma continua. El contexto particular que se ha propuesto al inicio de la unidad didáctica carece de estos recursos, por lo que la unidad didáctica se desarrollará a lo largo de dos días a la semana en el aula de informática. Los otros dos días se impartirá otra unidad didáctica en el aula habitual.

Los contenidos de la unidad didáctica y las distintas actividades que se desarrollarán en la misma, se dividen en 8 sesiones que se concretan a continuación.

### 3.9. DESARROLLO DE ACTIVIDADES

Cada una de las 8 sesiones que comprenden la presente unidad didáctica quedan descritas de la forma que se indica en el siguiente apartado.

SESIÓN 0		
Introducción a GeoGebra y metodología de trabajo		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"><li>• Introducción y planteamiento de objetivos.</li><li>• Presentación edificio Veles e Vents.</li><li>• Presentación software <i>GeoGebra</i>.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>-Conocer los contenidos de la nueva unidad didáctica.</li><li>-Adquirir la motivación para afrontar la unidad.</li><li>-Conocer en introducirse en el software GeoGebra.</li></ul>	CM, CD

Tabla 4. Definición de la sesión 0 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia.

#### SESIÓN 0: Introducción a GeoGebra y metodología de trabajo

##### 1. INTRODUCCIÓN: Contenidos y objetivos de la sesión:

Esta sesión no tiene como objeto iniciar el contenido de la materia que se va a impartir en la unidad didáctica, sino que pretende acercar a los estudiantes a un software que no conocen y a una metodología de trabajo diferente a la que están acostumbrados y al elemento contextualizador con el que los estudiantes enlazarán con la realidad los contenidos tratados.

Se facilitará a los estudiantes una relación de páginas web, donde se desarrollan ejercicios matemáticos desarrollados con fines educativos, los cuales utilizan del software GeoGebra para su resolución para que se familiaricen de forma autónoma con el software y puedan aprender su funcionamiento.

Una de las webs más interesantes en lo que se refiere a educación secundaria, es la elaborada por Sada (2015), quien nos aporta multitud de posibilidades en lo que a ejercicios se refiere para trabajar a través de GeoGebra, tanto por parte del docente como del alumnado y que se organizan por niveles y áreas a través de enlaces a los que se puede clicar y acceder directamente como se puede ver en la figura 9.

	Álgebra	Geometría	Funciones	Estadística y Probabilidad	Resolución de Problemas
1º ESO		<a href="#">Áreas</a> <a href="#">Medidas de ángulos</a> <a href="#">Puntos y Rectas notables de un triángulo</a> <a href="#">Con regla y compás</a>			
2º ESO		<a href="#">Teorema de Pitágoras</a> <a href="#">Con regla y compás</a>			
3º ESO	<a href="#">Igualdades Notables</a>	<a href="#">Áreas</a> <a href="#">Medidas de ángulos</a> <a href="#">Puntos y Rectas notables de un triángulo</a> <a href="#">Movimientos y transformaciones en el plano</a> <a href="#">Teorema de Pitágoras</a> <a href="#">Con regla y compás</a>	<a href="#">Función de proporcionalidad</a> <a href="#">Función afín</a>	<a href="#">Media y desviación típica</a> <a href="#">Problemas de Azar</a>	<a href="#">Problemas</a>
4º ESO		<a href="#">Geometría analítica</a>	<a href="#">Familias de Funciones elementales</a>		
1º Bach.		<a href="#">Cónicas</a> <a href="#">Trigonometría</a>	<a href="#">Transformaciones de funciones</a>	<a href="#">Problemas de Azar</a>	
2º Bach.			<a href="#">Derivadas e Integrales</a> <a href="#">Problemas de Optimización</a>	<a href="#">Distribuciones de probabilidad</a> <a href="#">Problemas de Azar</a>	
Otros		<a href="#">Disecciones</a> <a href="#">Cicloides y Trocoides</a> <a href="#">Tesselaciones de Escher</a>			
<a href="#">Miscelánea</a>					

Figura 9. Índice de páginas ordenadas por niveles y bloques. Fuente: Sada (2015).

Entre las actividades presentadas, se recomendará para el nivel de 4º de ESO y dentro del bloque Geometría analítica, que es el que nos ocupa, la propuesta de actividades destinada a vectores y rectas (figura 10)

### Vectores

	<a href="#">Vectores y sus coordenadas</a>		<a href="#">Resta de vectores</a>
	<a href="#">Producto de un número por un vector</a>		<a href="#">Combinación lineal</a> <a href="#">Figura 1</a> <a href="#">Figura 2</a> <a href="#">Figura 3</a>
	<a href="#">Suma de vectores</a>		<a href="#">Producto escalar</a>

### Rectas

	<a href="#">Determinación lineal de una recta</a>		<a href="#">Ecuación explícita: pendiente y ordenada en el origen</a> <a href="#">Rectas con la misma pendiente</a> <a href="#">Rectas con la misma ordenada en el origen</a>
	<a href="#">Ecuación vectorial de la recta</a>		<a href="#">Paralelismo y perpendicularidad</a>
	<a href="#">Ecuaciones de la recta</a>		<a href="#">Recta por dos puntos</a>
	<a href="#">Recta por dos puntos</a>		<a href="#">Ejercicios y sus Soluciones</a>

Figura 10. Actividades de trabajo para 4º ESO de geometría analítica. Fuente: Sada (2015).

Por último, como herramienta de trabajo a lo largo de la unidad didáctica, se creará por parte del docente, un espacio compartido en la nube, donde tanto docente como alumnado compartirán información de forma bidireccional: el docente podrá acceder a los documentos creados por los estudiantes, valorarlos y evaluarlos para favorecer la evaluación continua y los estudiantes podrán acceder a la documentación que el docente suba con fines pedagógicos, ya sean ejercicios a realizar por los estudiantes, documentación de interés o información teórica para el desarrollo de las clases.

El alumnado accederá a los documentos de trabajo y guardarán sus actividades en una plataforma compartida entre docente y alumnos.

A modo de ejemplo se ha creado una plataforma ex profeso para esta propuesta, a la que se puede acceder a través del siguiente enlace:

[https://drive.google.com/drive/folders/oB9VKlaoO11\\_gdkhZNHRTOUpPY28?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/oB9VKlaoO11_gdkhZNHRTOUpPY28?usp=sharing)

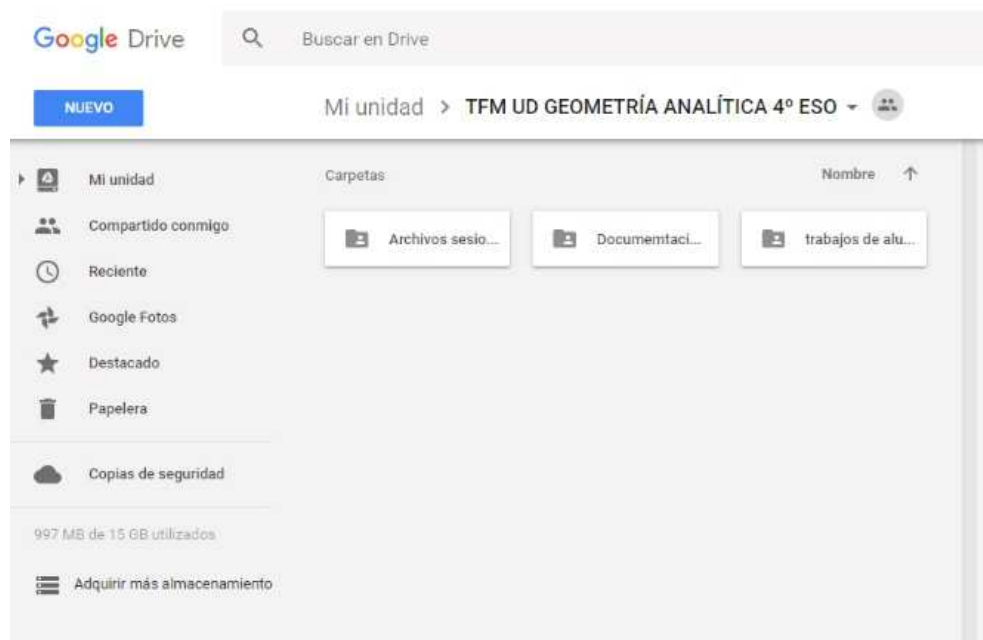


Figura 11. Propuesta de carpeta compartida grupo clase. Fuente: Elaboración propia.

El enlace remite a una plataforma on line, cuya imagen se puede ver en la Figura 11. Esta plataforma contiene todos los documentos en soporte informático que se han propuesto para llevar a cabo la unidad didáctica, en la totalidad de los apartados, tanto teóricos como prácticos destinados al trabajo de los estudiantes.

La plataforma se organiza en los siguientes apartados.

- “Archivos sesiones”: estarán los archivos que utilice el docente para impartir la clase.
- “Documentación teórica”: el docente colgará información que considere relevante para el aprendizaje del alumnado (pdf, enlaces web, etc).

- “Trabajo de alumnado”: esta carpeta estará formada por una subcarpeta para cada estudiante, donde cada uno irá subiendo su trabajo diario. Es la carpeta que el docente utilizará para comprobar la evolución de los estudiantes y llevar a cabo la evaluación continua.

Los alumnos descargarán los archivos de trabajo, y posteriormente podrán guardar los ejercicios en su carpeta personal, personalizando el nombre del archivo como se indica:

(Nombre original del archivo)\_apellidos\_nombre.ggb

Ejemplo: Ao1Po1\_SAMPER\_FRANCISCO.GGB

## 2. EXPLICACIÓN TEÓRICO/PRÁCTICA

2.1- Actividad para incentivar la motivación de los estudiantes, que consistirá en la proyección de un video a través de la pizarra digital relativos al edificio “Veles e Vents”

ENLACE	DURACIÓN
<a href="https://www.youtube.com/watch?v=6gID837_t94">https://www.youtube.com/watch?v=6gID837_t94</a>	37 segundos

Tabla 5. Enlace para el fomento de la motivación. Fuente: GSAPP AD+R animación.

2.2- Como introducción al software Geogebra, a través de la pizarra digital, el docente ejecutará un ejercicio sencillo de geometría analítica, y el alumnado seguirá sus pasos (cada estudiante en un ordenador).

Hallar una recta “g” paralela y otra recta “h” perpendicular a otra recta dada que pasen el punto P (2,1).

$$r: 2x - 3y + 5 = 0$$

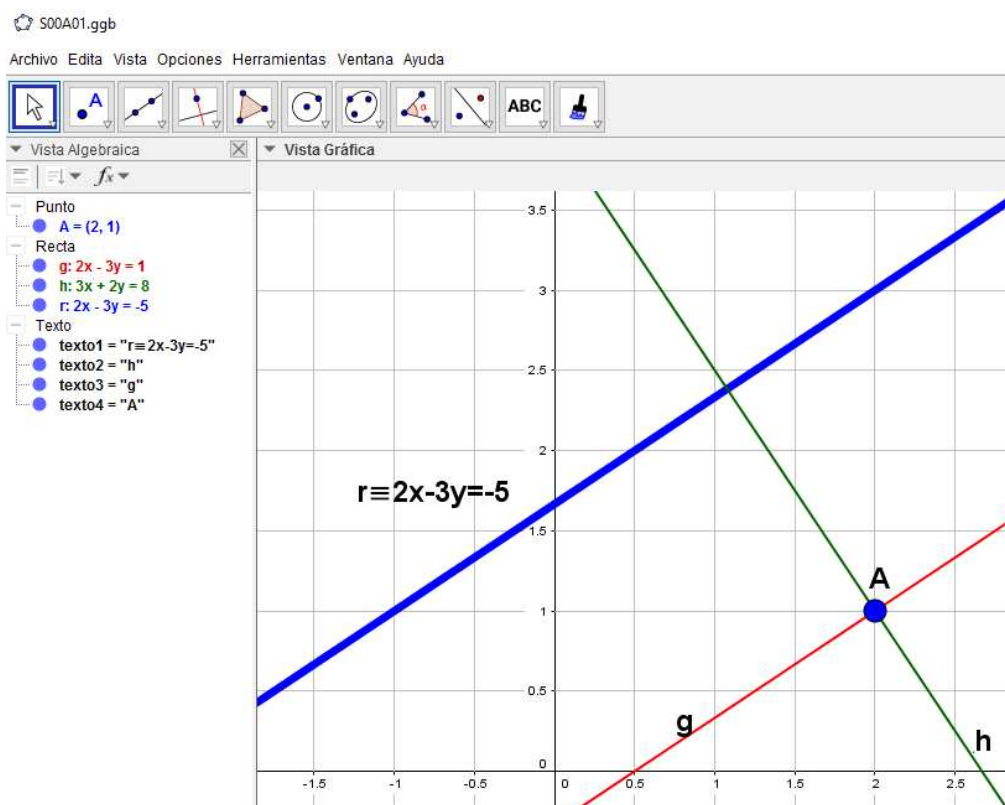


Figura 12. Captura de pantalla So0A01.ggb. Fuente: elaboración propia.

El ejercicio no pretende avanzar contenidos, simplemente busca que los estudiantes entren en contacto con el software y con la forma de trabajar con mismo de forma sencilla.

Se trabajará de forma individual, cada estudiante con su ordenador, para que todos puedan seguir los pasos y realizar el ejercicio siguiendo los pasos con los que el docente ejecuta el ejercicio. Lo que se pretende es que los estudiantes conozcan una serie de aspectos del software *GeoGebra* como son:

- 1- Formas de introducir datos: con el teclado o con el ratón usando la barra de herramientas.
- 2- Formas de representar objetos matemáticos: gráfica (en la zona gráfica) y simbólica (en la ventana de álgebra)
- 3- Observar que cada nuevo objeto tiene un nombre y un “valor” asociados.

Al finalizar la sesión se facilitará a los estudiantes los enlaces donde podrán descargar o utilizar el GeoGebra online:

Web descarga de GeoGebra	<a href="https://www.geogebra.org/download?lang=es">https://www.geogebra.org/download?lang=es</a>
Geogebra online	<a href="https://www.geogebra.org/apps/">https://www.geogebra.org/apps/</a>

Tabla 6. Enlaces para descarga del software. Fuente: Elaboración propia.

Y otra serie de enlaces desde los cuales podrán iniciarse de forma autónoma en el manejo del software:

Tutoriales	<a href="https://wiki.geogebra.org/es/Tutoriales">https://wiki.geogebra.org/es/Tutoriales</a>
Videotutoriales de Rafael Pérez Laserna	<a href="http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/videos/index.htm">http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/videos/index.htm</a>
Videotutoriales de Manuel Sada Allo	<a href="http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/videos/index.htm">http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/videos/index.htm</a> <a href="https://sites.google.com/site/bideotutorialak/geogebra">https://sites.google.com/site/bideotutorialak/geogebra</a>

Tabla 7. Enlaces de tutoriales y videotutoriales. Fuente: Elaboración propia.

SESIÓN 1		
Introducción a los vectores.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concepto de vector</li> <li>• Operaciones con vectores</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Conocer el concepto de vector fijo.</li> <li>-Analizar las componentes de un vector: módulo, dirección y sentido.</li> <li>-Conocer las operaciones con vectores gráfica y analíticamente.</li> <li>-Conocer las operaciones con puntos y vectores gráfica y analíticamente.</li> </ul>	CM,CD, CAA, CL, CEC, CSC

Tabla 8. Definición de la sesión 1 y de su contenido Fuente: Elaboración propia.

## - SESIÓN 1: Introducción a los vectores

### 1. INTRODUCCIÓN: Contenidos y objetivos de la sesión:

Concepto de vector y operaciones con vectores. Conoceremos qué es un vector, sus propiedades y componentes así como las operaciones que podemos hacer con ellos, siempre combinando la representación gráfica con la resolución analítica.

### 2. BREVE EXPLICACIÓN TEÓRICA.

El docente explicará el concepto de vector y sus propiedades elementales:

**Vector:** segmento  $\overline{AB}$  determinado por dos puntos A ( $a_1$ ,  $a_2$ ), origen del vector y B ( $b_1$ ,  $b_2$ ), extremo del vector.

**Coordenadas** del vector  $\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

**Módulo:**  $|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

**Dirección** de un vector es la recta sobre la que está situada el vector



**Sentido** de un vector es la forma de recorrer el segmento AB (desde el origen al extremo)

**Vectores equipolentes** son aquellos que tienen igual módulo, dirección y sentido, lo único que cambia es el origen del vector.

**Vector libre** es el conjunto de todos los vectores equipolentes. Se suele denotar con una letra minúscula.

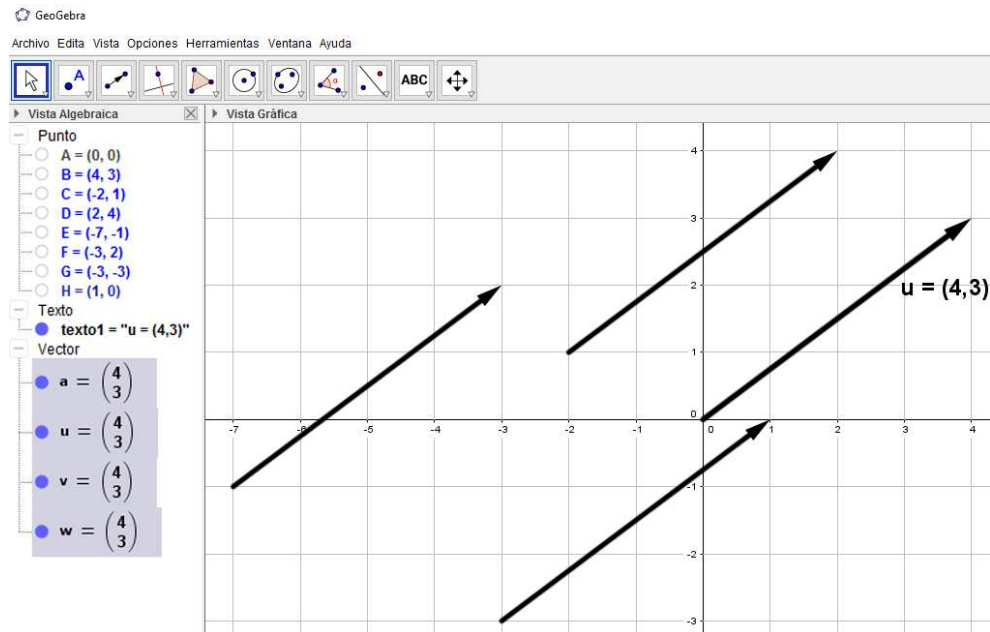


Figura 13. Vectores equipotenciales. So1To1.ggb. Fuente: elaboración propia.

#### a) Realizar operaciones con vectores.

Para sumar/restar dos vectores analíticamente, se suman/restan sus coordenadas que ocupan la misma posición: Siendo  $\vec{u}$  ( $u_1, u_2$ ), y  $\vec{v}$  ( $v_1, v_2$ ),

**Suma:**  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

**Resta:**  $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Para sumar gráficamente dos vectores, se toma uno de ellos  $\vec{u}$  y con origen en su extremo se dibuja un vector equivalente a  $\vec{v}$ , o bien se traza el paralelogramo formado por los dos vectores con el mismo origen.

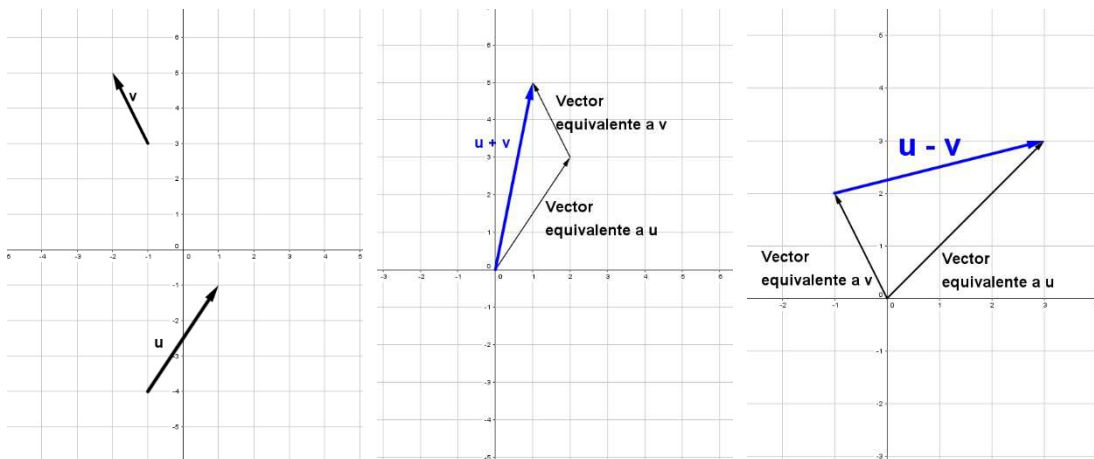


Figura 14. Suma y resta gráfica de vectores. Fuente: elaboración propia.

$$\vec{u} = (2,3) \quad \vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), 3 + 2) = (1, 5)$$

$$\vec{v} = (-1,2) \quad \vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), 3 - 2) = (3, 1)$$

Para restar gráficamente dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , se toman vectores equivalentes a ambos que tengan el mismo origen, y la diferencia es otro vector que tiene como origen el extremo de  $\vec{v}$  y como extremo, el extremo de  $\vec{u}$

El **Producto** de un número real ( $\lambda$ ) por un vector libre  $\vec{u} = (x, y)$  es otro vector libre  $\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda x, \lambda y)$  con la misma dirección y mismo sentido si  $\lambda > 0$ , o sentido opuesto si  $\lambda < 0$

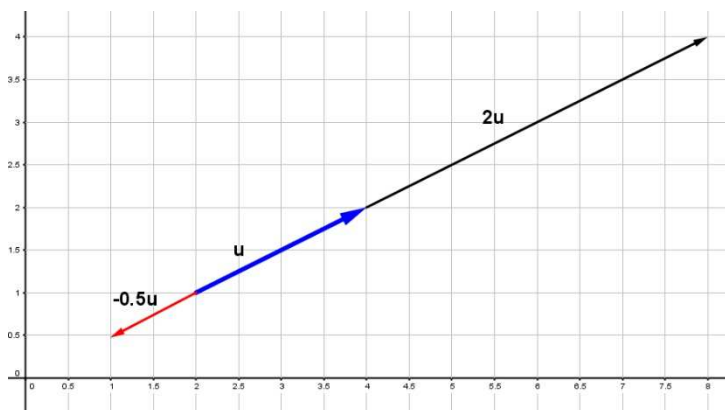


Figura 15. Producto de un vector por un escalar (ejemplos). Fuente: elaboración propia.

### 3. APLICACIÓN PRÁCTICA

#### Ejercicio. 1

Agrupamiento: grupos de 3

Sonia, Juan y Pedro, han ido al puerto de Valencia y han quedado en la primera planta del edificio “Veles e Vents”, Pedro ha llegado el primero y está esperando, mientras que Juan y Sonia han llegado por acceso diferentes.

Abre en tu ordenador el archivo de clase de nombre “S01A01.ggb” que encontraras en la carpeta de clase en Drive

En el archivo encontrarás 3 vectores que representan el desplazamiento de Juan, Pedro y Sonia para encontrarse. Responde a las siguientes cuestiones:

- 1- ¿son equipolentes los vectores? ¿Cuántos de ellos?
- 2- ¿Cuál es el módulo de cada uno?
- 3- Sabiendo que los puntos origen son fijos y no se pueden mover, desplaza los puntos del extremo del vector para que los tres sean equipolentes. Puedes mover uno dos o los tres vectores.
- 4- Dibuja dos opciones más de vectores equipolentes partiendo del mismo origen de los dados. Recuerda que puedes salirte de los límites de la planta del edificio grafiada.
- 5- ¿Cuáles son los módulos de los vectores que has dibujado?

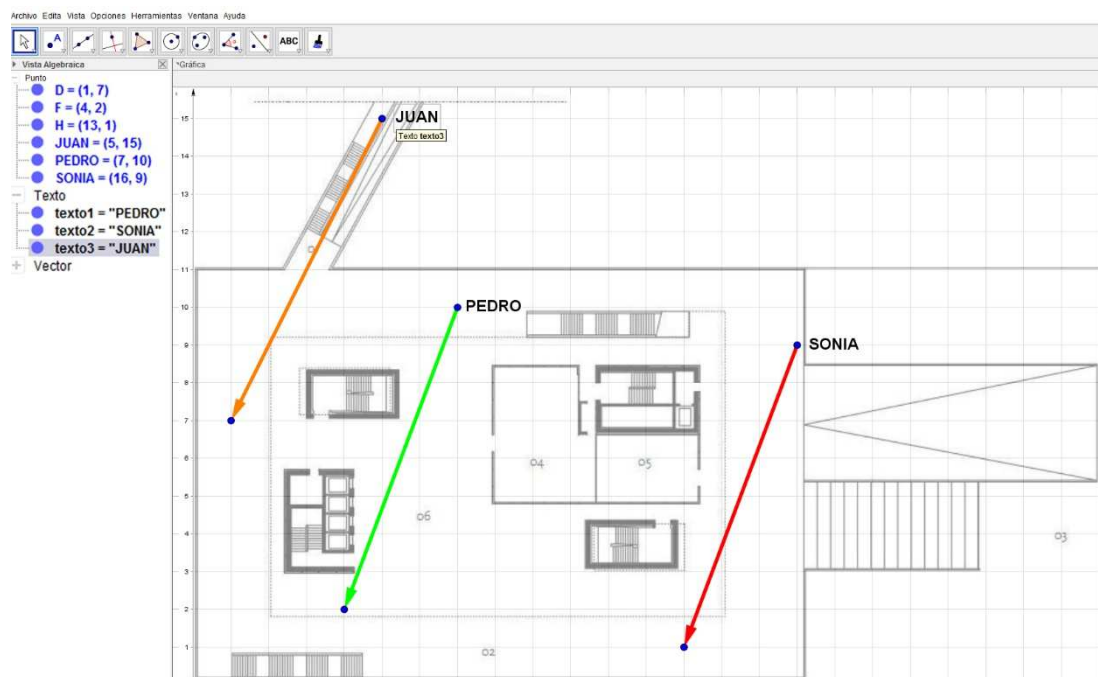


Figura 16. Captura de pantalla plantilla archivo S01A01.ggb. Fuente: elaboración propia.

## Ejercicio. 2

Agrupamiento: grupos de 3

Sonia, Juan y Pedro, después de haberse encontrado, deciden ir a tomar un refresco a la playa de la Malvarrosa, y cuando está fuera del edificio observan los voladizos que son como puntas de flecha. Abre el archivo *S01A02.ggb* encontraras en la carpeta de clase en Drive

- 1- ¿Sabrías obtener gráficamente la suma de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ?

- 2- ¿Y analíticamente?
- 3- Y si en vez de sumar los vectores los restamos, ¿qué construcción obtendríamos? ¿Cómo lo resolvemos analíticamente?
- 4- ¿Cuál es el módulo de los vectores resultantes?
- 5- Si tenemos el vector  $\vec{w} = (-2, 2)$  ¿qué vector tendríamos que sumarle para obtener un valor equivalente al resultado de la suma anterior? ¿sabrías obtenerlo analíticamente y gráficamente?

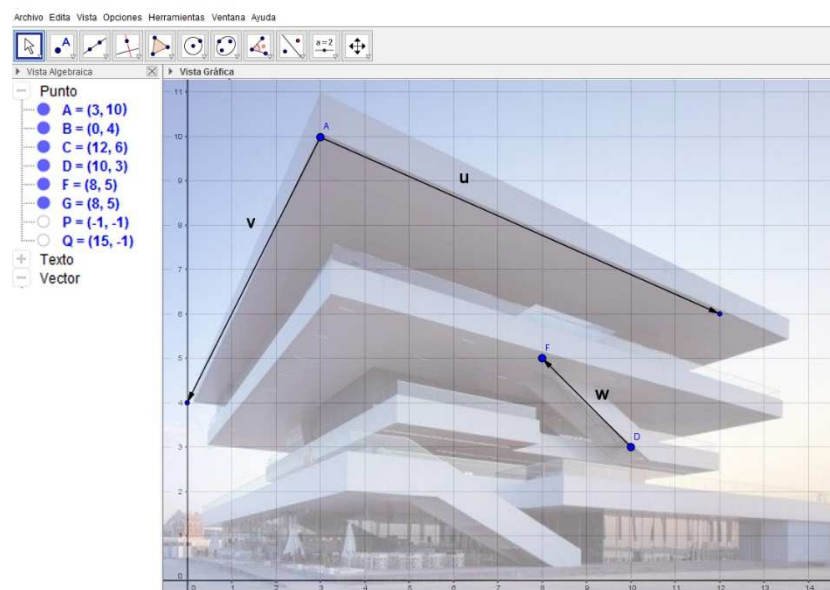


Figura 17. Captura de pantalla plantilla archivo So1A02.ggb. Fuente: elaboración propia.

### Ejercicio. 3

Agrupamiento: individual

Elabora un nuevo archivo de GeoGebra, representa los siguientes puntos: A (1,3), B (4,-2) y C (3,1)

- a) Representar y halla las coordenadas de los vectores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$  y  $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$
- b) Representar  $\vec{u} + \vec{v}$  y obtener las coordenadas analíticamente.
- c) Representar y hallar las coordenadas de  $3\vec{v}$ ,  $-2\vec{u}$  y  $0\vec{w}$
- d) Representar y hallar las coordenadas de  $3\vec{u} + 4\vec{v} - 2\vec{w}$

Recuerda guardar el archivo con tus apellidos y nombre en la carpeta de clase en Drive.

Los ejercicios o parte de ellos que no sean terminados en el transcurso de la sesión quedarán como tarea para casa.

SESIÓN 2		
División de vectores en partes iguales.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Módulo de un vector.</li> <li>• Distancia entre dos puntos.</li> <li>• Punto medio de un vector.</li> <li>• Dividir un vector en tres partes iguales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Saber dividir un segmento en dos o más partes iguales.</li> <li>- Encontrar puntos significativos para construir figuras planas.</li> </ul>	CM,CD, CAA,

Tabla 9. Definición de la sesión 2 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia.

## - SESIÓN 2. División de vectores en partes iguales

### 1. INTRODUCCIÓN: Contenidos y objetivos de la sesión:

Recordatorio por parte del profesor del concepto de vector y las operaciones de suma y resta de vectores y producto de un vector por un escalar. Avance del contenido de esta sesión que se basará en dividir un segmento en dos o tres partes iguales.

### 2. BREVE EXPLICACIÓN TEÓRICA:

El docente explicará cómo dividir un segmento en dos o tres partes iguales a partir de la suma de vectores:

Para **dividir** un segmento en **DOS** partes iguales, tendremos en cuenta que un vector es igual a la suma de sus dos mitades.

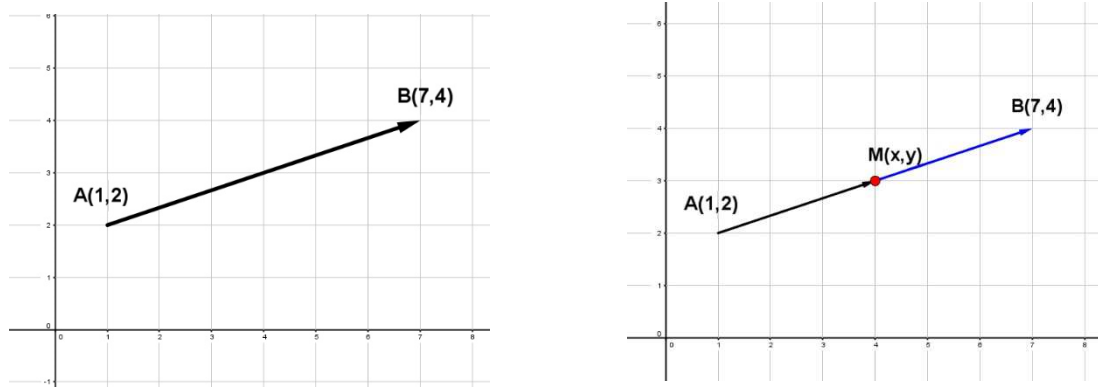


Figura 18. Visualización del punto medio con vectores. Fuente: elaboración propia.

Sea  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  y  $M(x, y)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$$

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = 2 \cdot (x - a_1, y - a_2) \rightarrow \begin{cases} b_1 = a_1 + 2(x - a_1) \\ b_2 = a_2 + 2(y - a_2) \end{cases}$$

$$x = \frac{a_1 + b_1}{2}; \quad y = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

Con *GeoGebra* podemos obtener el punto medio de un segmento con su opción: “Punto medio o Centro”.

El mismo proceso se sigue si queremos dividir en tres partes iguales, pero en vez de dos segmentos mitad, tendremos tres vectores, cada uno será un tercio del segmento  $\overrightarrow{AB}$

$$x = \frac{a_1 + b_1}{3}; \quad y = \frac{a_2 + b_2}{3}$$

La **distancia** entre dos puntos A y B,  $d(A,B)$ , coincidirá con el módulo del vector  $\overrightarrow{AB}$  porque si recordamos, el módulo media el tamaño del vector, es decir la distancia entre el origen A y el extremo B del vector.

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

## 1. APLICACIÓN PRÁCTICA

### Ejercicio. 1

Agrupamiento: grupos de 2

Sonia y Juan han decidido dar un paseo en barco por la dársena del puerto de Valencia, y cuando están en frente del edificio “Veles e Vents”, Juan comenta con Sonia lo curiosa que es la escalera que sube de planta segunda a planta tercera porque sube hasta terminar justo a la mitad de la planta. Sonia no está de acuerdo y le dice que no acaba justo a la mitad, que hay un lado más largo. Utilizando como base el archivo de Drive: *So2Ao1.GGB*

- ¿Quién de los dos tiene razón?
- Si no llegan a la mitad, ¿qué coordenada debería tener el punto “M” para que fuera cierto?
- ¿Cuál es el punto medio del segmento dibujado en planta segunda (AB)? ¿y su longitud?
- Si el arquitecto hubiera hecho una escalera con origen en el punto medio de la planta 2 y fin en el punto medio de la planta 3 ¿sería una escalera cómoda? Dibújala y calcula las coordenadas del vector que une los dos puntos medios y obtén su longitud.
- Si quisiéramos unir los extremos de los voladizos superiores con los inferiores, ¿necesitaríamos la misma cuerda en los dos extremos del edificio?

NOTA: Utiliza las coordenadas de los puntos que aparecen en el archivo *GeoGebra*

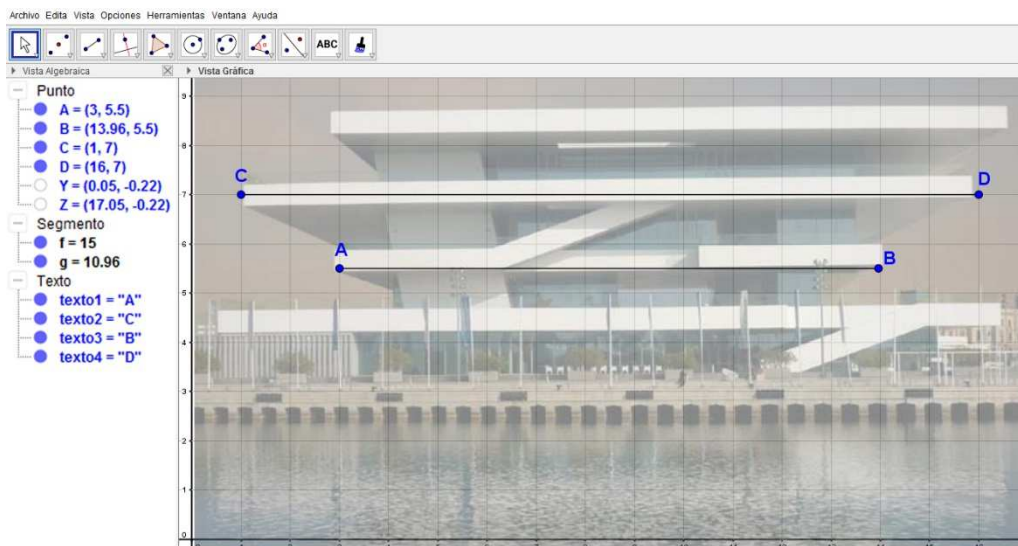


Figura 19. Captura de pantalla, archivo So2Ao1.ggb. Fuente: elaboración propia.

## Ejercicio. 2

Agrupamiento: individual.

Crea un archivo en blanco de Geogebra.

- Representa el segmento  $\overline{AB}$  y halla su punto medio si tiene como vértices A (2,2) y B (10,4). Divide el mismo segmento en 3 partes iguales.
- Si M (x,y) es el punto medio del segmento anterior. Representar y calcular  $\vec{v} = 2\overline{AB} - 3\overline{AM}$
- ¿cómo podríamos denominar al segmento resultante con los datos que tenemos?

## Ejercicio. 3

Agrupamiento: individual.

Crea un nuevo archivo GeoGebra y representa un triángulo de vértices A (0,0), B (2,-2) y C (3,0).

- Determina si es un triángulo isósceles, equilátero o escaleno.
- ¿Cuál sería el área del triángulo?
- Si desplazamos el punto B en horizontal, dibuja dos opciones de triángulo rectángulo calcula sus áreas. ¿son diferentes al área calculada inicialmente?

Recuerda guardar el archivo con tus apellidos y nombre en la carpeta de clase en Drive.

SESIÓN 3		
Puntos singulares y aplicaciones.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Punto simétrico respecto a otro punto.</li> <li>• Paralelogramos conocidos 3 puntos.</li> <li>• Comprobación de que tres puntos están alineados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Representar puntos y figuras planas a partir de los datos iniciales.</li> <li>-Conocer, la posición relativa de tres puntos y la distancia entre ellos.</li> </ul>	CM,CD, CAA, CL, CEC, CS

Tabla 10. Definición de la sesión 3 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia.

## - SESIÓN 3. Puntos singulares y aplicaciones

### 1. INTRODUCCIÓN: Contenidos y objetivos de la sesión:

Recordatorio por parte del profesor del concepto de dividir un vector en partes iguales y obtener la distancia de un segmento. Avance del contenido de esta sesión que se basará trabajar con puntos singulares y crear figuras según su posición, así como hallar punto simétrico respecto a otro.

### 2. BREVE EXPLICACIÓN TEÓRICA:

El docente explicará cómo construir un **paralelogramo a partir de 3 puntos**, hará un ejemplo rápido usando GeoGebra con las distintas opciones de paralelogramo

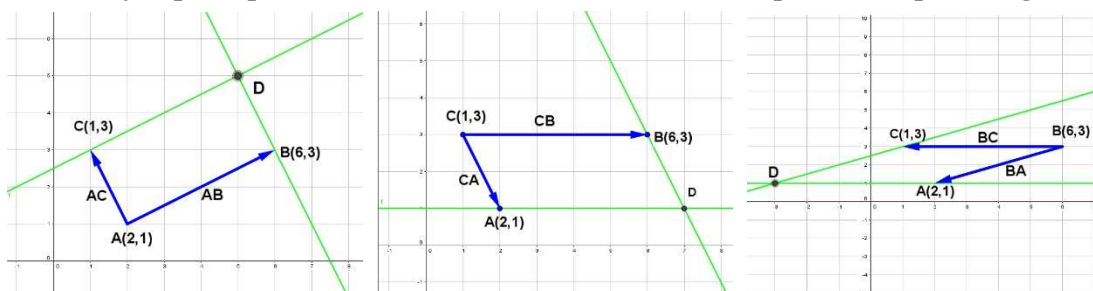
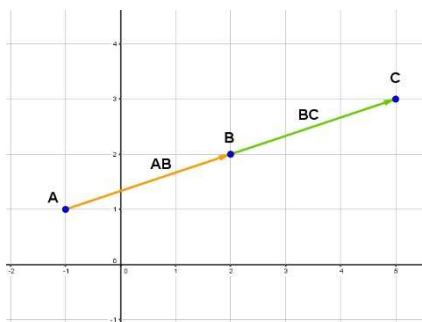


Figura 20. Paralelogramo a partir de 3 puntos. Fuente: elaboración propia.

**3 puntos** están **alineados**, siendo  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  y  $C(c_1, c_2)$ , si los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{BC}$  tienen la misma dirección. Esto ocurrirá cuando sus coordenadas sean proporcionales:

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - b_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - b_2}$$





Sean los puntos A (-1, 1), B (2,2) y C (5,3)

$$\frac{2 - (-1)}{5 - 2} = \frac{2 - (1)}{3 - 2}$$

$$\frac{3}{3} = \frac{1}{1}$$

## Ejercicio. 1

Agrupamiento: grupos de 2

Dado el archivo con la sección del edificio Veles e Vents, que puedes encontrar en Drive: S03A01.GGB donde tenemos 3 puntos A (17,10), B (16,13) y C (14,16).

- ¿Están alineados los puntos?, justifica la respuesta.
- ¿Qué coordenada “x” debería tener el punto B para que estuvieran alineados? Mueve el punto al lugar correcto y dibuja el segmento que los une.
- Sabiendo que los puntos sólo se desplazan en horizontal, indica otra posición para que los tres puntos estén alineados. Demuéstralo gráfica y analíticamente. Puedes elegir los puntos que quieras.
- Selecciona un punto de cada nivel para que los 4 estén alineados.

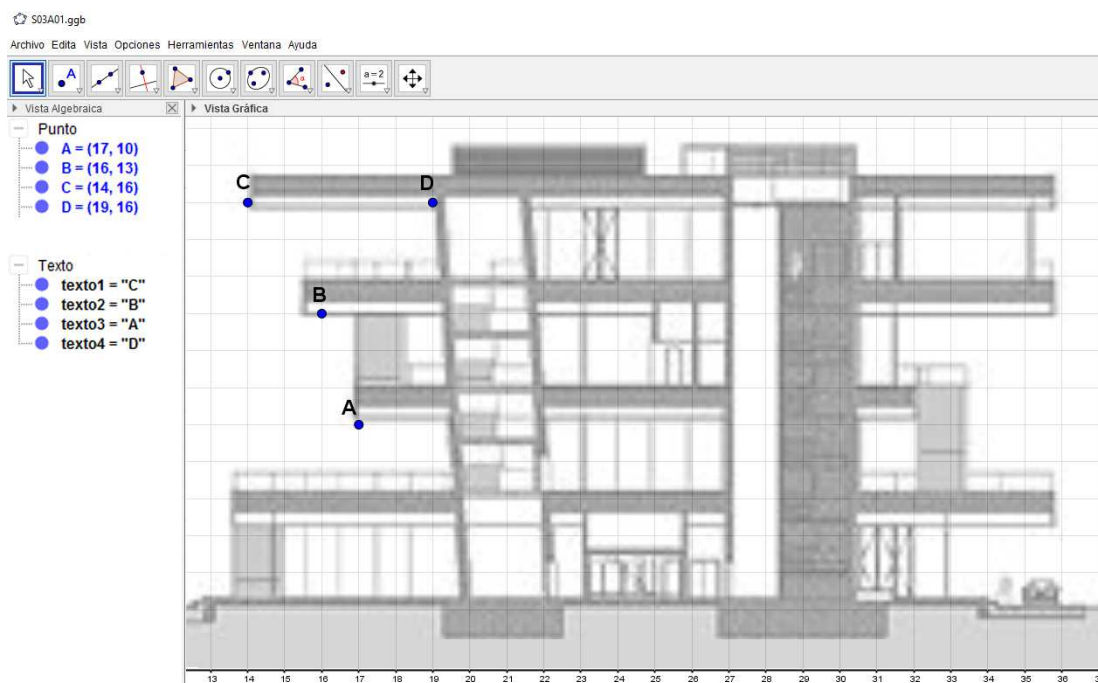


Figura 21. Plantilla ejercicio 1. Fuente: elaboración propia.

## Ejercicio. 2

Agrupamiento: individual

Utilizando el mismo archivo del ejercicio 1, genera los paralelogramos que obtendríamos de considerar los puntos A (17,10), C (14,16) y D (19,16) obteniendo el punto E del extremo que no conocemos. Repite el ejercicio utilizando los puntos C, D y B de forma gráfica y analítica.

SESIÓN 4		
Ecuaciones de la recta.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
• Ecuaciones de la recta.	-Conocer las diferentes ecuaciones de la recta. -Obtener el vector director, la pendiente, la ordenada en el origen de una recta.	CM,CD, CAA,

Tabla 11. Definición de la sesión 4 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia.

### - SESIÓN 4. Ecuaciones de la recta

#### 1. INTRODUCCIÓN: Contenidos y objetivos de la sesión:

Recordatorio por parte del profesor cómo se comprobaba si 3 puntos estaban alineados y cómo obtener puntos a partir de otros dados. Avance del contenido de esta sesión que introducirá el concepto de recta y sus ecuaciones general e implícita. A pesar de existir más ecuaciones de la recta en

#### 2. BREVE EXPLICACIÓN TEÓRICA:

El docente explicará la forma de construir las ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua, implícita y general, para lo cual será necesario conocer un punto P y un vector, que llamaremos vector director  $\vec{v}$ , o en su defecto, dos puntos P y Q, o bien la pendiente de la recta "m".

Conocidos el punto P(a,b) y el vector director de la recta  $\vec{v} = (v_x, v_y)$

**Ecuación Explícita:**  $y = mx + n$

$m = \frac{v_y}{v_x}$  es la pendiente de la recta

$n = b - \frac{v_x}{v_y}$  es la ordenada en el origen

**Ecuación General:**  $Ax + By + C = 0$  donde A, B y C son números reales.

El vector director de la recta:  $\vec{v} = (B, -A) \rightarrow \begin{cases} A = -v_y \\ B = v_x \end{cases}$

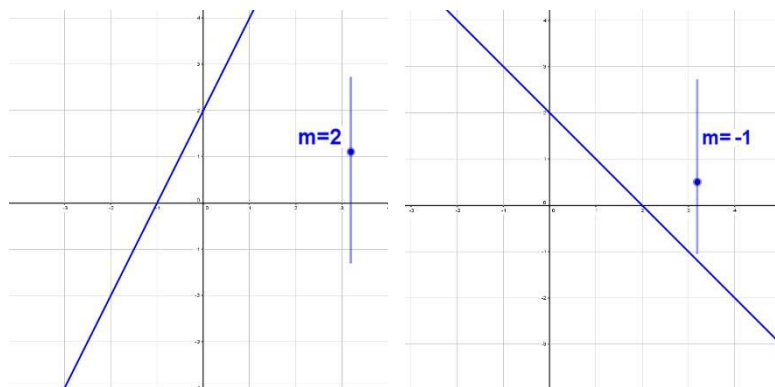


Figura 22. Pendiente de la recta. Fuente: elaboración propia.

### 3. APLICACIÓN PRÁCTICA

#### Ejercicio. 1

Agrupamiento: grupos de 3

Sonia, en el primer ejercicio había quedado con sus amigos Juan y Pedro en el edificio Veles e Vents. Subió al tercer piso por la escalera de puntos rojos definida por el vector  $\overrightarrow{GH} = (-2, 2)$  y el punto J (20,13). Abrid el archivo de referencia como plantilla de trabajo: So4Ao1.GGB, que encontrareis en la carpeta de clase.

- ¿Sabrías sacar la ecuación de la recta definida por ese vector y ese punto?
- ¿Y si la recta la definen los tres puntos verdes del tercer piso D (29,11), E (22,13) y F (11,16)? Expresa la ecuación en forma general y la explícita.
- En el piso de cubierta tenemos la ecuación de la recta s:  $10x + 23y - 242$ , ¿sabrías calcular la ecuación implícita de esta recta?
- ¿Puedes escribir la ecuación de la recta r grafiada entre los puntos A (9,24) y B (3,11)?, si te faltan datos obtenlos a partir del archivo de GeoGebra.
- Con la ecuación del apartado a) en forma explícita, crea un deslizador para la pendiente y observa su variación cuando cambie la pendiente “m”

- f) Utilizando la retícula crea alguna recta más que consideres significativa en el edificio e identifica los elementos que serían necesarios para que quedara bien definida.

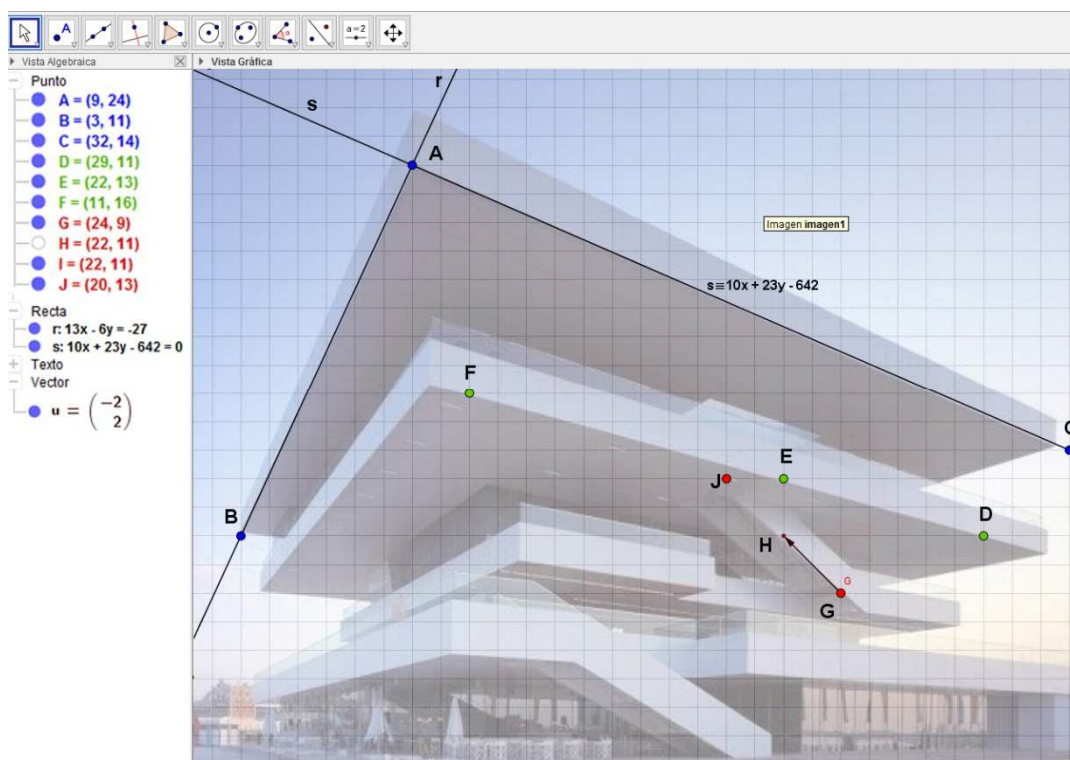


Figura 23. Plantilla archivo So4Ao1.ggb. Fuente: elaboración propia.

## Ejercicio. 2

Agrupamiento: individual.

- Abre un documento en blanco de Geogebra y crea una recta que pase por los puntos A (-4,0) y B (4,2). ¿Cuál es su pendiente? ¿Y su vector director?
- Dibuja otra recta que tenga pendiente  $m=3$  y crea un deslizador. Observa cómo cambia su inclinación con  $m<0$  y  $m>0$ . ¿Qué pasa cuando  $m=0$ ? ¿y cuando  $m=1$ ?

SESIÓN 5		
Posición relativa de rectas en el plano.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"> <li>Posición relativa de dos rectas en el plano: paralelas, coincidentes o secantes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estudiar la posición relativa de dos rectas en el plano.</li> <li>Identificar rectas paralelas a los ejes de coordenadas.</li> </ul>	CM, CD, CAA, CL, CEC, CS

Tabla 12. Definición de la sesión 5 y de su contenido 6. Fuente: Elaboración propia.

## - SESIÓN 5: Posición relativa de rectas en el plano

### 1. INTRODUCCIÓN: Contenidos y objetivos de la sesión:

Recordatorio por parte del profesor de las ecuaciones de la recta general e implícita. Avance del contenido de esta sesión que tratará de averiguar la posición relativa de dos rectas en el plano.

### 2. BREVE EXPLICACIÓN TEÓRICA:

El docente explicará las distintas posiciones que pueden tener las rectas en el plano, dependiendo de si los vectores directores son proporcionales o no lo son.

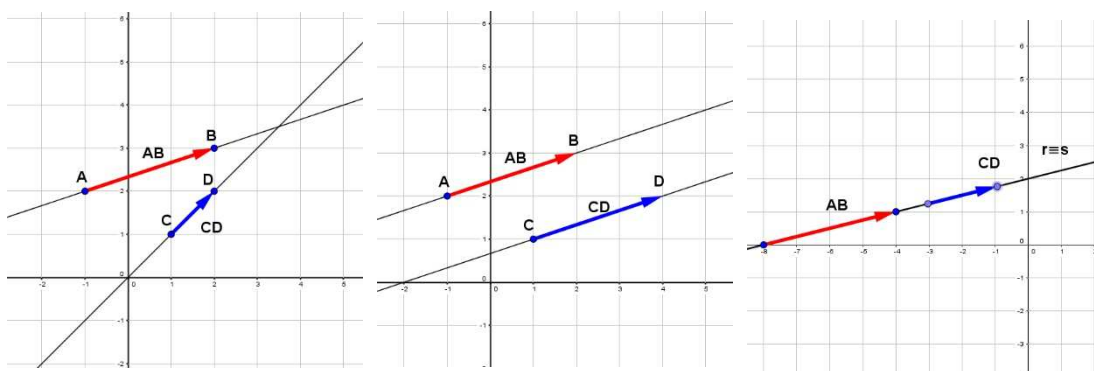


Figura 24. Rectas secantes paralelas y coincidentes. Fuente: elaboración propia.

**Rectas secantes:** tendrán vectores directores que no son proporcionales entre sí.

**Rectas paralelas:** tendrán sus vectores directores proporcionales entre sí, pero no tendrán ningún punto de paso en común.

**Rectas coincidentes:** tendrán sus vectores directores proporcionales y además tendrán todos los puntos de paso en común.

POSICIONES	VECTORES DIRECTORES	PENDIENTES	EC. GENERAL
Paralelas (misma dirección sin puntos comunes)	Proporcionales $\frac{v_y}{v_x} = \frac{u_y}{u_x}$	Iguales $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Coincidentes (misma dirección y todos los puntos comunes)	Proporcionales $\frac{v_y}{v_x} = \frac{u_y}{u_x}$	Iguales $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
Secantes (distinta dirección y un punto en común)	No proporcionales $\frac{v_y}{v_x} \neq \frac{u_y}{u_x}$	Distintas $m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

Tabla 13. Resumen Posición relativa de rectas en el plano. Fuente: Elaboración propia.

### 3. APLICACIÓN PRÁCTICA

#### - Ejercicio. 1

Agrupamiento: grupos de 2

Tomando como base el archivo de GeoGebra que encontrarás en la carpeta de clase de Drive: SO5A01.ggb

- Halla la ecuación de la recta “r” que pasa por los puntos A (4,12) y B (7,11)
- Dibuja una recta paralela a la anterior por el forjado inferior que pase por el punto C (18,9), demuestra que es paralela.
- Si hacemos las rectas que pasen por los puntos A, B y por B, C, ¿qué posición relativa tendrán entre sí?
- Encuentra en el edificio alguna arista que represente una recta paralela a alguno de los ejes coordenados. Escribe su ecuación.

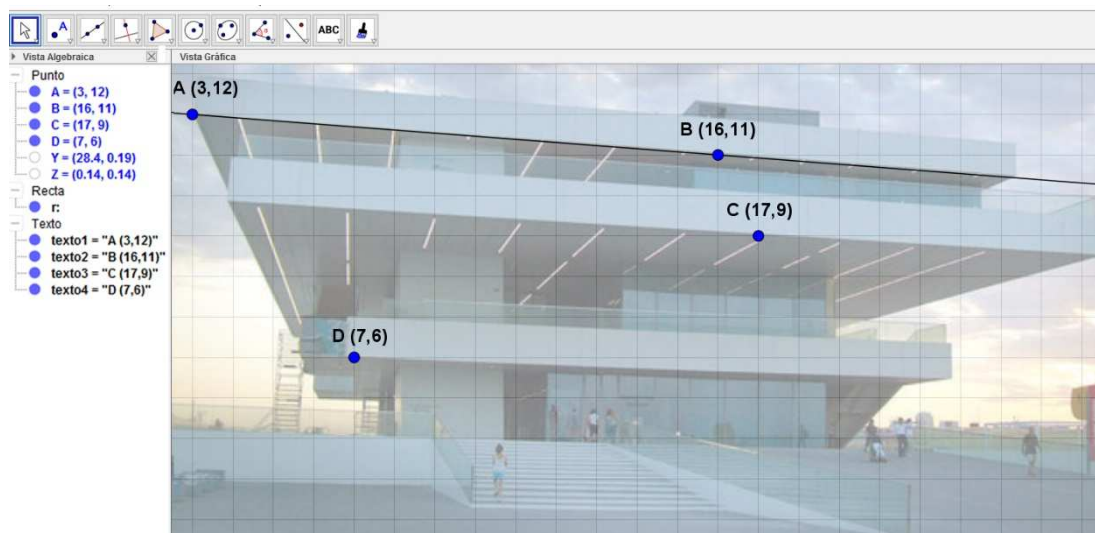


Figura 25. Plantilla archivo SO5A01.ggb. Fuente: elaboración propia.

#### - Ejercicio. 2

Agrupamiento: individual.

Crea un nuevo archivo de GeoGebra “SO5A02.GGB” y responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Son paralelas las dos escaleras que se ven? Tienes un punto en cada una como referencia. Justifica la respuesta
- Escribe la ecuación de la recta que une los puntos A (21,6) y B (9,8) en forma general y explícita.
- ¿Es paralelo el vector  $\overrightarrow{DE}$  a la recta anterior? Obtén las coordenadas de los puntos D y E para ser paralelos a la recta.

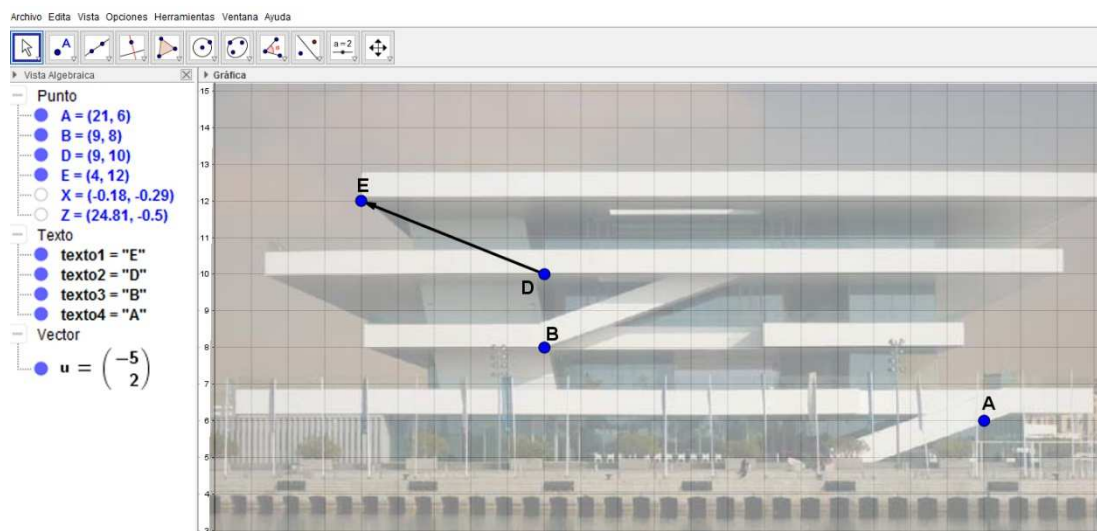


Figura 26. Captura de pantalla archivo So5Ao2.ggb. Fuente: elaboración propia.

SESIÓN 6		
Distancias.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Distancia entre punto y recta.</li> <li>• Distancia entre dos rectas paralelas.</li> </ul>	Hallar las distancias entre punto-punto, punto-recta y recta-recta.	CM, CD, CAA, CL, CEC, CS

Tabla 14. Definición de la sesión 6 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia.

## - SESIÓN 6. Distancias

### 1. INTRODUCCIÓN: Contenidos y objetivos de la sesión:

Recordatorio por parte del profesor de las distintas posiciones que podía tener las rectas en el plano. Avance del contenido de esta sesión a través de la cual se obtendrán distancias entre un punto y una recta y entre dos rectas.

### 2. BREVE EXPLICACIÓN TEÓRICA:

El docente explicará brevemente la forma de calcular la distancia entre una recta de vector director  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  y punto de paso P  $(p_x, p_y)$ , con un punto cualquiera Q  $(q_x, q_y)$ .

- Analíticamente:

$$d(r, Q) = \frac{|A \cdot x_q + B \cdot y_q + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Gráficamente:



Dibujaremos una recta perpendicular a la recta dada que pase por el punto externo, calcularemos la intersección entre las dos rectas perpendiculares y sólo nos quedará hallar la distancia entre el punto Q y el punto intersección

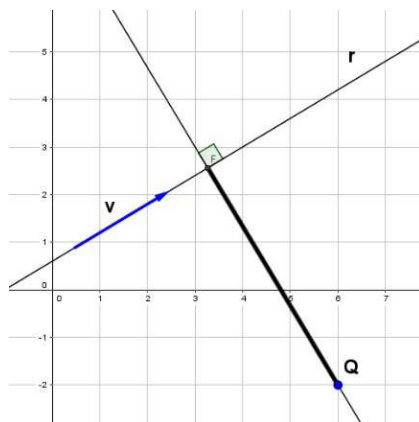


Figura 27. Construcción gráfica distancia punto-recta. Fuente: elaboración propia.

Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas “r y s” se procederá calculando la distancia desde un punto perteneciente a una de las rectas hasta la otra recta.

### 3. APLICACIÓN PRÁCTICA

#### - Ejercicio. 1

Agrupamiento: grupos de 2

Juan y Pedro han salido a navegar, y a la vuelta discuten sobre si las bandejas que forman los distintos pisos del edificio “Veles e Vents” están todas a la misma distancia o hay alguna más separada que el resto. Ayúdales a resolver la discusión. Utiliza la imagen de la figura 20 que podrás encontrar en el archivo de Drive: *So6Ao1.GGB*. Deberás dibujar las rectas, obtener las ecuaciones y calcular las distancias entre ellas usando los puntos que consideres.

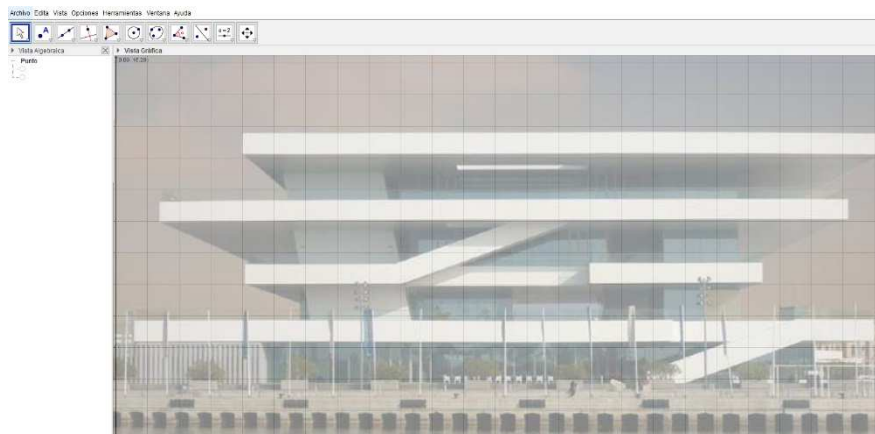


Figura 28. Captura de pantalla archivo *So6Ao1.ggb*. Fuente: elaboración propia.



- **Ejercicio. 2**

Agrupamiento: individual

Tomando como referencia el archivo del ejercicio anterior y tomando como referencia los puntos de la cuadrícula:

- a) ¿podrías calcular la distancia entre las escaleras que podemos ver?
- b) ¿Y la longitud de cada escalera?

SESIÓN 7		
Prueba final		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
• Problemas de aplicación práctica.	-Aplicar los conocimientos adquiridos a problemas contextualizados.	CM, CD, CAA, CEC.

Tabla 15. Definición de la sesión 7 y de su contenido. Fuente: Elaboración propia.

- **SESIÓN 7. Prueba final**

Esta sesión al igual que la inicial (sesión 0) no siguen la metodología general. En esta ocasión nos centraremos en comprobar la adquisición de los contenidos impartidos a lo largo de la unidad didáctica.

**1. APLICACIÓN PRÁCTICA**

Este ejercicio tendrá mayor peso en la evaluación que el resto de ejercicios trabajados en las sesiones previas.

- **Ejercicio final**

Agrupamiento: individual.

Resolver de forma individual y utilizando el archivo S07A01.GGB como plantilla para la resolución de las siguientes cuestiones:

- a) Dada la recta  $r \equiv 4x + 27y = 255$  que contiene los puntos A y B. Hallar la ecuación explícita de la recta y un vector director de la misma.
- b) Escribe una recta que defina cada uno de los niveles, tomando como referencia los puntos D, C y E definidos en el archivo.
- c) Comprobar si los puntos BDC están alineados. Si no lo están indica las coordenadas que deberían tener el punto D o C para estar alineados.

- d) ¿Cuál es la pendiente de la escalera? ¿Qué significa su signo? Dibuja un segmento con pendiente de distinto signo
- e) ¿Cuál es el punto intersección entre la recta que define la escalera y los niveles inferior y superior?
- f) Calcula la distancia entre el punto D y la recta “r”.
- g) ¿El punto D coincide con el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ ? Si no lo es, ¿Cuáles deberían ser sus coordenadas para que lo fueran?

A partir de los puntos D, C y E, obtener los paralelogramos que obtendría con las coordenadas del punto que falta.

NOTA: Se puede dividir el ejercicio en varios archivos (uno por apartado).

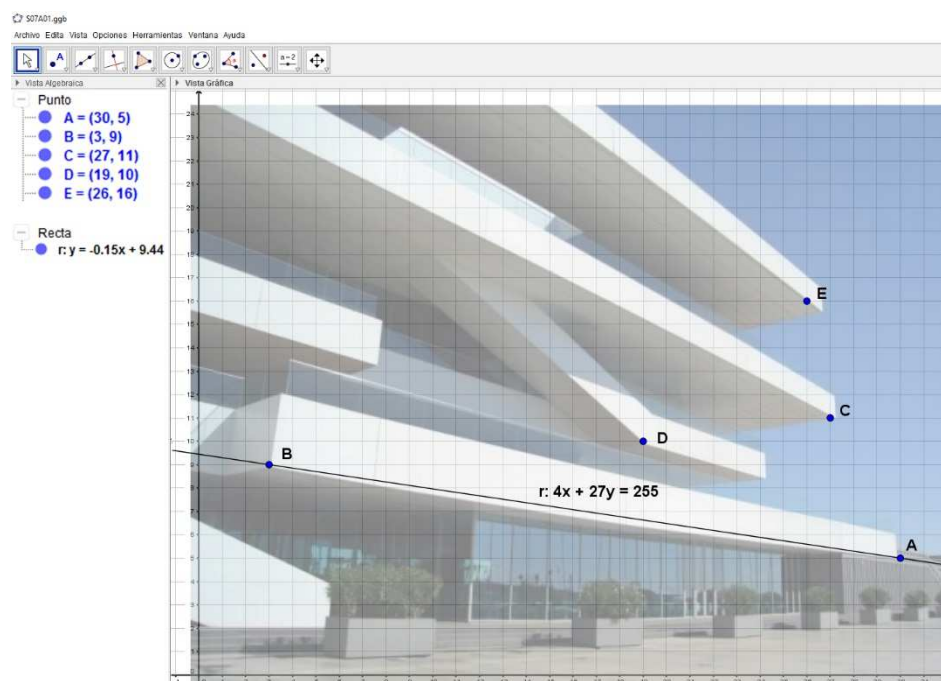


Figura 29. Captura de pantalla archivo So7Ao1.ggb. Fuente: elaboración propia.

### 3.10. RECURSOS

- Aula de informática, para que los estudiantes se instruyan y trabajen con el software *GeoGebra*, equipada con un ordenador por alumno. En caso de centros educativos donde las aulas de trabajo ordinario consten de sistema informático para el alumnado, no sería necesario el desplazamiento al aula de informática.
- Plataforma on line para el seguimiento de la unidad didáctica por parte de alumnos y docentes.
- Material diseñado por el docente, que será entregado a cada alumno para que sirva de introducción a los conceptos a trabajar a lo largo de la unidad didáctica.

- Software GeoGebra, como elemento evaluativo, autoevaluativo y comparativo que ayudará al estudiante a generar su propio conocimiento sin necesidad de contar con el concepto de profesor como fuente del conocimiento.
- Diario de observación del docente.
- Cuaderno de apuntes del alumno.
- Conexión a internet.
- Lápices, tizas, reglas, etc.

### **3.11. ATENCION A LA DIVERSIDAD**

La educación es uno de los derechos fundamentales recogido en el Artículo 27 de la constitución española de 1978. Con ello, debemos garantizar una educación de calidad a todos los estudiantes, sea cual sea su bagaje cultural, su capacidad y ritmo de aprendizaje.

Las diferentes sesiones propuestas en esta unidad didáctica, son capaces de atender a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado. Las sesiones de mayor dificultad o que precisan de un mayor tiempo para su desempeño se organizan con metodología de trabajo grupal, mientras que los ejercicios que requieren un nivel de desempeño menor, se organizan de forma individual. Estos ejercicios individuales sirven al profesor para evaluar el avance de los estudiantes y poder centrarse en los que necesitan de mayor ayuda.

Los alumnos con más facilidad de aprendizaje siempre pueden desarrollar los ejercicios planteados en mayor profundidad, aportando más soluciones, habida cuenta de que en todos los ejercicios la solución no es única. Incluso los enlaces aportados por el profesor en la sesión 0, sirven a los estudiantes con mayor capacidad para profundizar en la materia que se está tratando en clase.

### **3.12. EVALUACIÓN**

La sesión 0 estará exenta del proceso de evaluación, el resto de las sesiones centrales (sesión 1 a sesión 6), el profesor irá realizando una evaluación continua de los alumnos, con el objeto de detectar los problemas que pudieran estar teniendo en la adquisición de un punto concreto de la unidad y si el método empleado para la enseñanza es el correcto.

**EVALUACIÓN: CALIFICACIÓN FINAL.**

Actividades individuales:	25%
Actividades con agrupamiento:	15%
Cuaderno de observación profesor:	10%
Actividad final:	45%
Cuaderno del alumno	5%

Actividad	Instrumento de evaluación	Porcentaje de calificación
SESIÓN 1		
Ejercicio 1*. So1Ao1.ggb	Documento Drive + observación	
Ejercicio 2*. So1Ao1.ggb	Documento Drive + observación	
Ejercicio 3.	Documento Drive	
SESIÓN 2		
Ejercicio 1*. So1Ao1.ggb	Documento Drive + observación	
Ejercicio 2.	Documento Drive	
Ejercicio 3.	Documento Drive	
SESIÓN 3		
Ejercicio 1*. So1Ao1.ggb	Documento Drive + observación	
Ejercicio 2.	Documento Drive	
SESIÓN 4		
Ejercicio 1*. So1Ao1.ggb	Documento Drive + observación	
Ejercicio 2.	Documento Drive	
SESIÓN 5		
Ejercicio 1*. So1Ao1.ggb	Documento Drive + observación	
Ejercicio 2.	Documento Drive	
SESIÓN 6		
Ejercicio 1*. So1Ao1.ggb	Documento Drive + observación	
Ejercicio 2.	Documento Drive	
SESIÓN 7		
Ejercicio final. So1Ao1.ggb	Rúbrica	45%

Tabla 16: Tabla de evaluación. Fuente: elaboración propia.

\* Son actividades con algún tipo de agrupamiento. Se valorara el documento subido a Drive, pero tendrá mayor peso el cuaderno de anotaciones del docente que seguirá la siguiente estructura:

ALUMNO: \_\_\_\_\_

FECHA: \_\_\_\_\_

ACTIVIDAD: \_\_\_\_\_

CRITERIOS	1	0,5	0	COMENTARIOS
1. Documento de trabajo grupal.				
2. Participa activamente de la actividad.				
3. Escucha los compañeros y comparte el esfuerzo.				
4. Asume roles y colabora.				
5. Proporciona ideas y alternativas.				
<b>TOTAL</b>				

Tabla 17. Criterios de observación del trabajo en grupo. Fuente: elaboración propia.

Para la actividad de la sesión 7: “Ejercicio final” se seguirá la siguiente rúbrica:

Aspectos evaluables.	Niveles de desempeño.			
	1 (suspense)	2 (aprobado)	3 (notable)	4 (sobresaliente)
Establece las relaciones entre coordenadas de puntos y vectores.	No establece relaciones y no sabe interpretar un vector.	Establece las relaciones pero comete errores.	Establece y comprueba las de puntos y vectores, pero no determina si son correctas o no.	Establece y comprueba las de puntos y vectores, determinando si son correctas o no.
Conoce el significado de la pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.	No conoce el significado de la pendiente de la recta ni sabe obtenerla ni utilizarla.	Conoce el significado de la pendiente pero comete errores al obtenerla o utilizarla.	Conoce el significado de la pendiente pero comete algún error al obtenerla o utilizarla.	Conoce el significado de la pendiente y la obtiene y opera con ella sin errores.
Calcula la ecuación de una recta de diferentes formas.	En general no obtiene las ecuaciones de la recta y no sabe cambiar de una ecuación a otra.	Obtiene la ecuación de la recta, pero comete errores al cambiar de una ecuación a otra.	Casi siempre obtiene la ecuación de la recta y comete pocos errores al cambiar de una ecuación a otra.	Obtiene la ecuación de la recta y no comete errores al cambiar de una ecuación a otra.
Calcula distancias entre puntos y punto y recta.	No sabe calcular distancias entre puntos, punto-recta y entre rectas paralelas.	Calcula las distancias entre puntos, punto-recta y rectas paralelas pero comete muchos errores.	Calcula las distancias entre puntos, punto-recta y rectas paralelas pero comete algún error.	Calcula las distancias entre puntos, punto-recta y rectas paralelas sin cometer errores.

Obtiene puntos significativos y construye figuras geométricas relevantes.	No sabe calcular puntos significativos y no obtiene figuras geométricas relevantes de forma correcta.	Calcula puntos significativos y construye figuras geométricas relevantes aunque pero comete errores graves.	Calcula puntos significativos y construye figuras geométricas relevantes. Comete errores puntuales.	Calcula puntos significativos y construye figuras geométricas relevantes sin cometer errores.
Utiliza los recursos tecnológicos con eficiencia y destreza	No utiliza los recursos tecnológicos con soltura y no acaba la mayoría de ejercicios.	Utiliza los recursos tecnológicos, le falta soltura y no acaba muchos ejercicios.	Utiliza los recursos tecnológicos con soltura, le falta acabar algún ejercicio.	Utiliza los recursos tecnológicos con soltura y acaba todos los ejercicios.

Tabla 18. Rúbrica de evaluación Ejercicio final. Fuente: Elaboración propia.

## 4. EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA

Es de interés contar con una evaluación de la propuesta didáctica, dado que ésta no se ha llevado a la práctica. Se plantea un diagnóstico inicial, que indique sus posibilidades, puntos débiles y puntos fuertes de la misma, con objeto de mejorar el planteamiento original y obtener mejores resultados.

Un elemento para el diagnóstico comentado lo podemos encontrar en una matriz DAFO, que se procede a redactar y analizar, cuyo contenido responderán los profesores que pongan en práctica la propuesta.

Observando la matriz DAFO (tabla 19), podemos ver que los principales puntos negativos residen en el nivel de compromiso que pueda desarrollar tanto los propios docentes, como el propio centro educativo a la hora de apoyar los cambios metodológicos.

Todo proceso de cambio, y en este caso, la introducción de una metodología basada en TIC de forma contextualizada, supone una modificación de la metodología tradicional, lo que supone salir de la zona de confort a los agentes implicados en el cambio. Si los cambios surgen por iniciativa propia del centro educativo en connivencia con los docentes, los resultados se pueden vislumbrar positivos. Si el cambio se produce por modas o imposiciones burocráticas, no generará confianza ni motivación tanto en el grupo docente, como en el propio centro educativo.

ANÁLISIS DAFO	
DEBILIDADES	AMENAZAS
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Falta de formación de profesorado en recursos TIC.</li> <li>- Escasa motivación del profesorado.</li> <li>- Falta de recursos del centro educativo.</li> <li>- Limitación del tiempo según normativa.</li> <li>- Rigidez en aplicación de la normativa del centro.</li> <li>- Ejercicios demasiado evidentes para el alumnado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Uso de GeoGebra de forma puntual en metodologías tradicionales.</li> <li>- Uso de las TIC por imposición de la administración.</li> <li>- Modas</li> <li>- Centro no comprometido con el cambio.</li> <li>- Los estudiantes se centran en el programa y no en el contenido.</li> </ul>
FORTALEZAS	OPORTUNIDADES
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se promueve la participación y la motivación.</li> <li>- Evaluación de resultados a corto plazo.</li> <li>- Aprendizaje contextualizado y motivado.</li> <li>- Promueve el autoaprendizaje del alumno.</li> <li>- Las actividades incitan al alumnado a profundizar y elaborar otras actividades similares.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- La administración educativa lo promueve.</li> <li>- Es necesario un cambio de metodología educativa.</li> <li>- Posibilita un mayor interés por parte del alumnado.</li> <li>- Multitud de edificios pueden ser trabajados como elementos contextualizadores.</li> </ul>

Tabla 19: Matriz DAFO. Fuente: elaboración propia

Centrándose en los aspectos positivos que se aprecian. Tenemos delante una oportunidad de mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje inmejorable. La propuesta no solo incrementa la motivación de los estudiantes al permitirles trabajar con elementos que les son muy familiares, como el soporte informático, sino que responde a las demandas de la administración de introducir en la enseñanza herramientas TIC y proporcionar un contexto al proceso de enseñanza para lograr un aprendizaje significativo de la materia estudiada.

Cuando los estudiantes están motivados frente a los nuevos retos, su nivel de interés y desempeño es mucho más elevado, así como su interés por aprender más y aprender por sí mismos.

## 5. CONCLUSIONES

El objetivo principal planteado al inicio de este documento era el de aportar una propuesta de intervención para desarrollar el bloque de geometría analítica en 4º de ESO: “vectores y rectas en el plano” aprovechando las múltiples ventajas de trabajar de forma digital con el software GeoGebra y al mismo tiempo, trabajar de forma contextualizada, tomando como base de las actividades propuestas el edificio “Vesles e Vents” de la ciudad de Valencia. La propuesta pretende ser motivadora, dinámica y

servir de punto de partida para una profundización en otros bloques de la asignatura de matemáticas.

En el proceso de enseñanza de las matemáticas, se sigue utilizando en gran medida las metodologías tradicionales, basadas en clases magistrales y repetición de ejercicios por parte del alumnado. Es por ello que los objetivos de esta propuesta eran ayudarnos del software GeoGebra, contextualizando los contenidos en la arquitectura construida.

La consecución de los objetivos, evitarán un trabajo repetitivo donde en muchos casos no conoce el motivo por el que se realiza de una determinada manera, no se aporta al alumnado esa motivación necesaria, que se convierte en un elemento crucial para el aprendizaje, en tanto que un alumno motivado aprende más fácilmente y su percepción del esfuerzo necesario para desarrollar las actividades es mucho menor que en un alumno poco o nada motivado.

La contextualización de las actividades, es un elemento que favorece la motivación al insertar el contenido que se aprende en la vida real haciéndolo más cercano al alumnado.

El trabajo de la propuesta didáctica sobre un elemento arquitectónico emblemático de la Ciudad de Valencia, reconocido y reconocible por los estudiantes, no sólo en el ámbito de la ciudad de Valencia, sino en el de toda la Comunidad Valenciana y quizás en menor medida en un ámbito a nivel nacional, aporta esa dosis de contextualización con el mundo real que ayuda a un crecimiento de la motivación intrínseca por parte de los estudiantes y con ella, un aprendizaje significativo más eficaz.

Actualmente estamos en contexto donde los adultos, a pesar de no haber nacido en un mundo digital e incluso habiendo pasado gran parte de su vida ajenos a este mundo, se acaba sucumbiendo y las nuevas tecnologías se hacen poco menos que imprescindibles en el día a día.

Si extrapolamos el actual contexto a los actuales estudiantes de nuestros colegios e institutos, que son nacidos en un mundo digital, donde las TIC son parte intrínseca de ellos, parece bastante evidente que estas TIC deben estar presentes también en el contexto docente.

Trabajar con las TIC, hemos visto que mejora el proceso enseñanza-aprendizaje, favorece el rendimiento y aumenta la motivación de los estudiantes. Al mismo tiempo, el uso de recursos tecnológicos permite que el aprendizaje sea más fluido, y se pueda construir un conocimiento que con los métodos tradicionales sería mucho más complicado sino imposible en determinados casos.



El uso de las TIC, no supone una eliminación absoluta del trabajo en papel para resolver determinados conceptos de forma manual, pero si supone una mejora y una facilidad en el aprendizaje de esos conceptos.

El fácil manejo de un software como GeoGebra, que permite trabajar conceptos sobre un contexto determinado, une dos elementos que consiguen que la motivación del alumno se mantenga en unos niveles que favorezcan la adquisición de los contenidos del bloque de geometría analítica en 4º de ESO. De esta forma, se cumplen los tres objetivos específicos planteados en el apartado 1.3.1 “Objetivos específicos” de este documento.

Se ha previsto una evaluación de la propuesta, a través de una matriz DAFO que responderán los profesores que lleven a cabo la propuesta.

## **6. LIMITACIONES Y PROSPECTIVA**

La propuesta didáctica para desarrollar la geometría analítica de 4º de ESO, desde un punto de vista contextualizado y con el apoyo del software GeoGebra, cuenta con una de las limitaciones más relevantes en la disponibilidad de ordenadores para poder llevar a cabo la unidad didáctica de forma continua.

La propuesta que desarrolla el presente documento que se enfocaba inicialmente para un centro educativo concreto observadas las limitaciones del centro en cuestión, pero el planteamiento puede llevarse a cabo de forma generalizada de una forma más efectiva, cuanto mayor sea la disponibilidad de recursos informáticos con los que cuente el centro, permitiendo llevar a cabo la unidad didáctica de forma continuada en el tiempo sin interrupciones temporales.

Aspecto limitante también ha resultado el tiempo. La disponibilidad de tiempo favorece la profundización en la materia tratada, no sólo en esta propuesta, sino en general, pero concretamente en la metodología que propone este documento, donde no se puede impartir la materia de forma continuada, sino que su contenido se imparte de forma alterna con otras unidades didácticas dentro de las clases de la misma semana, acaba dilatándose demasiado en el tiempo como para profundizar más en los contenidos de una forma generalizada por todos los estudiantes.

Parece interesante un estudio comparativo que sea capaz de evaluar si sería más eficiente llevar a cabo la unidad didáctica de forma continuada o si el intercalar sesiones con otras unidades didácticas en el aula convencional, resulta más útil. Para futuras investigaciones sería un campo interesante de desarrollar.

De la misma manera resultaría interesante otro estudio comparativo entre alumnado que es instruido en la materia de vectores y rectas dentro de la geometría

analítica, mediante la metodología tradicional, y entre aquel otro alumnado que es instruido con la metodología presentada en este documento.

Aspecto importante a tener en cuenta a la hora de poner en práctica la metodología propuesta, es el evitar que el desarrollo de la unidad didáctica, se convierta en un curso sobre el software *GeoGebra*. Se debe tener en cuenta que *GeoGebra* es una herramienta con la que trabajar, la unidad didáctica de geometría analítica: vectores y rectas, y no al contrario, que nos llevaría a usar la geometría analítica como herramienta para aprender a manejar *GeoGebra*.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- Abahonza, D., y Holman, E. (2014). El Uso De Las TIC's Como Medio Didáctico Para La Enseñanza De La Geometría. Estudio De Caso: Grados Segundos De Básica Primaria De La Institución Educativa Seminario (Ipiales-Nariño). Recuperado el 16 de abril de 2017 de: <http://www.bdigital.unal.edu.co/43056/1/8413024.2014.pdf>
- Akkaya, A., Tatar, E., y Kağızmanlı, T. B. (2011). Using dynamic software in teaching of the symmetry in analytic geometry: The case of GeoGebra. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 15, 2540-2544. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.04.141>
- Alonso Tapia, J. (2005). Motivación para el aprendizaje: La perspectiva de los alumnos. En Ministerio de Educación y Ciencia (ed), *La Orientación Escolar En Centros Educativos*, (pp. 209-242). Madrid, España: MEC.
- Alsina, A. (2010). La “pirámide de la educación matemática”: Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula De Innovación Educativa*, (189), 12-16.
- Área Moreira, M. (2010). El proceso de integración y uso pedagógico de las TIC en los centros educativos un estudio de casos. *Revista de educación*, 352, 77-97.
- Bakar, K. A., Ayub, A. F. M., Luan, W. S., & Tarmizi, R. A. (2010). Exploring secondary school students' motivation using technologies in teaching and learning mathematics. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 4650-4654. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.744>
- Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunitat Valenciana. Diario Oficial de la Comunidad valenciana, 7611, de 10 de junio de 2015.
- de Pablos Pons, J., Colás Bravo, P., & González Ramírez, T. (2010). Factores facilitadores de la innovación con TIC en los centros escolares. Un análisis comparativo entre diferentes políticas educativas autonómicas. *Revista De Educación*, 352, 23-51.
- Ferrari, A. (2013). DIGCOMP: A Framework for Developing and Understanding Digital Competence in Europe. *European Commission*, 4-6. Doi: 10.2788/52966

- Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *SUMA*, 17, 10-16. Recuperado el 17 de abril de 2017 en: <http://revistasuma.es/IMG/pdf/17/010-016.pdf>.
- González Urbaneja, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Revista Sigma*, 30, 205-236.
- García, María del Mar (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula* (Tesis doctoral). Universidad de Almería, (Almería). Recuperado el 14 de abril de 2017 de: <http://funes.uniandes.edu.co/1768/2/Garcia2011Evolucion.pdf>
- Gómez-Chacón, I. M. (2005). Motivar a los alumnos de secundaria para hacer matemáticas. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado el 17 de abril de 2017 en: <http://www.mat.ucm.es/~imgomez/almacen/pisa-motivar>
- Hernández, V. M. (2002). La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿Y Apolonio? *Apuntes De Historia De Las Matemáticas*, 1(1), 32-45.
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, Boletín Oficial del Estado, 106, de 4 de mayo de 2006.
- Muntañola, J. (2004). Arquitectura, educación y dialogía social. *Revista Española De Pedagogía*, 221-227.
- NCTM, (2000). National Council of Teachers of Mathematics. Principles and Standards of Mathematics 287-306.
- Ortiz Hernández, A. y Arias Madriz, R. (2012). GeoGebra como herramienta para la enseñanza de la matemática: Resultados de un curso de capacitación. En M. Murillo (presidencia), VIII Festival Internacional de Matemáticas. Festival llevado a cabo en Liberia, Guanacaste, Costa Rica.
- OCDE/PISA 2015. Programa para la Evaluación Internacional de los alumnos. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- OCDE (2015). PISA 2015, Draft mathematics framework. Recuperado el 20 de abril de 2007 de: <https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf>
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 25, de 29 de enero de 2015, p. 6991-7001.
- Piquer Pons, V. (2016). *Edifici Veles e Vents. Aproximació arquitectónica y análisis estructural*. (Trabajo final de Grado). Universidad Politécnica de Valencia

- (Valencia). Recuperado el 14 de abril de 2017 de: <http://hdl.handle.net/10251/73834>
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3 de 3 de enero de 2015.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. Pna, 1(2), 47-66. Recuperado el 15 de abril de 2017 de: <http://funes.uniandes.edu.co/529/1/RicoL07-2777.pdf>
- Ruiz López, N., y Atrio Cerezo, S. A. (2013). Influencia del nivel de competencia digital en la adquisición de competencias geométricas en un entorno GeoGebra. *Sistemas e Tecnologías De Información*, 1, 1009-1013.
- Ruiz Vahos, H. M., Ávila Mejía, P. E., y Villa Ochoa, J. A. (2012). Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. En Córdoba Gómez (Compilador), *Desarrollo y uso didáctico de GeoGebra*. Conferencia llevada a cabo en el Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro departamental de matemáticas, Medellín, Colombia. Recuperado el 14 de abril de 2017 de <http://funes.uniandes.edu.co/2187/1/ruizavilavillaochoa.pdf>
- Santana Zerpa, M. E. (2010). Geometría analítica plana con GeoGebra. *Números*, (75), 131-142
- UNESCO (2008). Estándares de competencia en TIC para docentes. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), París, Recuperado el 14 de abril de 2017 de: <http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/UNESCOEstandaresDocentes.pdf>
- Vargas G., y Gamboa Araya, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.
- Villareal, J. E., Carmona, J. A., y Arango, C. M. (2013). La enseñanza aprendizaje de la geometría analítica: Una propuesta de desarrollo del pensamiento a partir del modelo de van hiele y la metodología de aula taller. En VII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Uruguay.

# **ANEXOS**

# **ANEXO I.**

## **Objetivos generales de etapa, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.**

En este anexo con objeto de descargar de normativa el desarrollo de la unidad didáctica, se recoge la normativa recogida en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en lo relativo a:

- Objetivos generales de etapa de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.
- Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

- **Objetivos generales de etapa de ESO**

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural e intercultural; y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana, y si lo hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura y desarrollar el hábito y el gusto por la lectura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e



incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social así como conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación. (BOE 3, Real Decreto 1105/2014, p. 176-177)

- **Criterios de Evaluación y Estándares de aprendizaje evaluables.**

<b>Criterios de evaluación.</b>	<b>Estándares de aprendizaje evaluables.</b>
3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	<p>3.1. Establece correspondencias analíticas entre coordenadas de puntos y vectores.</p> <p>3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.</p> <p>3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.</p> <p>3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas en función de datos conocidos.</p> <p>3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.</p> <p>3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.</p>

Tabla 20. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje. Fuentes: RD 1105/2014 (BOE, 2015)

## **ANEXO II**

### **Recopilación de las sesiones de la propuesta didáctica presentada.**

Este anexo recoge en una única tabla, el conjunto de sesiones que se desarrollarán a lo largo de la propuesta y que están incluidas de forma independiente en el cuerpo del trabajo.

SESIÓN 0		
Introducción a GeoGebra y metodología de trabajo		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introducción y planteamiento de objetivos.</li> <li>• Presentación edificio Veles e Vents.</li> <li>• Presentación software <i>GeoGebra</i>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Conocer los contenidos de la nueva unidad didáctica.</li> <li>-Adquirir la motivación para afrontar la unidad.</li> <li>-Conocer en introducirse en el software <i>GeoGebra</i>.</li> </ul>	CM, CD
SESIÓN 1		
Introducción a los vectores.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concepto de vector</li> <li>• Operaciones con vectores</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Conocer el concepto de vector fijo.</li> <li>-Analizar las componentes de un vector: módulo, dirección y sentido.</li> <li>-Conocer las operaciones con vectores gráfica y analíticamente.</li> <li>-Conocer las operaciones con puntos y vectores gráfica y analíticamente.</li> </ul>	CM,CD, CAA, CL, CEC, CSC
SESIÓN 2		
División de vectores en partes iguales.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Módulo de un vector.</li> <li>• Distancia entre dos puntos.</li> <li>• Punto medio de un vector.</li> <li>• Dividir un vector en tres partes iguales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Saber dividir un segmento en dos o más partes iguales.</li> <li>-Encontrar puntos significativos para construir figuras planas.</li> </ul>	CM,CD, CAA,
SESIÓN 3		
Puntos singulares y aplicaciones.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Punto simétrico respecto a otro punto.</li> <li>• Paralelogramos conocidos 3 puntos.</li> <li>• Comprobación de que tres puntos están alineados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Representar puntos y figuras planas a partir de los datos iniciales.</li> <li>-Conocer, la posición relativa de tres puntos y la distancia entre ellos.</li> </ul>	CM,CD, CAA, CL, CEC, CS
SESIÓN 4		
Ecuaciones de la recta.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ecuaciones de la recta.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Conocer las diferentes ecuaciones de la recta.</li> <li>-Obtener el vector director, la pendiente, la ordenada en el origen de una recta.</li> </ul>	CM,CD, CAA,
SESIÓN 5		
Posición relativa de rectas en el plano.		
Conceptos contenidos	Objetivos	Competencias

• Posición relativa de dos rectas en el plano: paralelas, coincidentes o secantes.	- Estudiar la posición relativa de dos rectas en el plano. - Identificar rectas paralelas a los ejes de coordenadas.	CM,CD, CAA, CL, CEC, CS
<b>SESIÓN 6</b>		
<b>Distancias.</b>		
<b>Conceptos contenidos</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Competencias</b>
• Distancia entre punto y recta. • Distancia entre dos rectas paralelas.	- Hallar las distancias entre punto-punto, punto-recta y recta-recta.	CM,CD, CAA, CL, CEC, CS
<b>SESIÓN 6</b>		
<b>Distancias.</b>		
<b>Conceptos contenidos</b>	<b>Objetivos</b>	<b>Competencias</b>
• Problemas de aplicación práctica.	- Aplicar los conocimientos adquiridos a problemas contextualizados.	CM, CD, CAA, CEC.

Tabla 21. Compilación de sesiones de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia.