



**Universidad Internacional de La Rioja**  
**Facultad de Educación**

**Trabajo fin de máster**

# La Alhambra como espacio didáctico para la enseñanza de geometría en 3º de ESO

**Presentado por:** Laura Dobaño Martínez

**Tipo de trabajo:** Propuesta de intervención

**Directora:** Blanca Arteaga

**Ciudad:** Girona

**Fecha:** Junio de 2017

## RESUMEN

El aprendizaje de las matemáticas y concretamente de la geometría presenta unos resultados deficientes entre los estudiantes españoles que ponen de manifiesto la necesidad de diseñar unas estrategias de intervención que enriquezcan y mejoren el proceso de enseñanza-aprendizaje de este ámbito. La motivación de este trabajo es la de diseñar una propuesta didáctica para el curso de 3ª de la ESO contextualizada en la arquitectura y el arte como recurso didáctico con la intención de facilitar a los estudiantes un aprendizaje significativo que les motive y fomente una actitud activa frente su propio aprendizaje. La Alhambra de Granada, declarada Patrimonio de la Humanidad en 1984, es el espacio didáctico escogido para la enseñanza de la geometría de esta unidad didáctica por la presencia continua de las matemáticas en el diseño de sus elementos arquitectónicos y artísticos de descendencia árabe, corroborando la importancia de comprender las matemáticas para interpretar el mundo que nos rodea e interactuar con él. La implementación de las TIC en el aula ofrece un cambio de metodología en la manipulación de la geometría, fomentando un tratamiento dinámico de ésta que facilita la adquisición significativa de los procesos y razonamientos matemáticos.

**Palabras clave:** *matemáticas, geometría, Alhambra, aprendizaje significativo, recursos didácticos.*

## ABSTRACT

The process of learning mathematics or geometry more specifically, presents some deficient results when it comes to Spanish students, which shows the need to design new intervention strategies that enhance and improve the learning-teaching process in this area. The goal behind this project is to design a teaching method for 3rd ESO students, contextualizing it in the area of architecture and art as a learning method, with the intention to facilitate the students with a significant learning method that will motivate them and incentivize an active attitude towards their own learning process. The Alhambra in Granada, declared as World Heritage in 1984, is the place that has been chosen for the geometry teaching. That is because of all the mathematics used in the design of many of its architectural and artistic elements, dating from the Arabic times. This backs up the need of understanding math in order to interpret the world that surrounds us and be able to interact with it. The implementation of TIC in classrooms provides a change in the geometry manipulation methodology ; this incentivizes a dynamic treatment of it, that facilitates the acquisition of the processes and mathematic reasoning.

**Keywords:** Mathematics, geometry, Alhambra, meaningful learning, didactic resources.

## ÍNDICE

<b>Introducción</b> .....	<b>5</b>
<b>Justificación de la propuesta</b> .....	<b>5</b>
<b>Objetivos</b> .....	<b>6</b>
<b>Marco teórico</b> .....	<b>7</b>
<i>Informe PISA</i> .....	<i>7</i>
<i>Prueba de evaluación de 4º de E.S.O. de Cataluña</i> .....	<i>9</i>
<b>El proceso de enseñanza-aprendizaje en geometría</b> .....	<b>11</b>
<b>Obstáculos y errores</b> .....	<b>17</b>
<b>Arquitectura, arte y geometría</b> .....	<b>20</b>
<b>La Alhambra de Granada</b> .....	<b>22</b>
<i>Los mosaicos de la Alhambra</i> .....	<i>23</i>
<b>Marco legislativo</b> .....	<b>25</b>
<b>La Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)</b> .....	<b>25</b>
<i>Competencia matemática</i> .....	<i>26</i>
<i>Competencia en Conciencia y expresiones culturales</i> .....	<i>26</i>
<b>Contenidos del bloque de geometría de 3º de la ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)</b> .....	<b>27</b>
<b>Propuesta de intervención</b> .....	<b>30</b>
<b>Contextualización</b> .....	<b>30</b>
<b>Objetivos, criterios de evaluación, contenidos clave, competencias básicas específicas del ámbito y competencias clave</b> .....	<b>31</b>
<b>Recursos</b> .....	<b>33</b>
<b>Cronograma</b> .....	<b>33</b>
<b>Actividades</b> .....	<b>34</b>
<i>00. Contextualización previa</i> .....	<i>34</i>
<i>01. Un poco de historia</i> .....	<i>35</i>
<i>02. Punto de partida</i> .....	<i>36</i>
<i>03. De un lado a otro</i> .....	<i>37</i>
<i>04. Simetrías</i> .....	<i>39</i>
<i>05. Rotando y cambiando</i> .....	<i>41</i>
<i>06. Artistas por un día</i> .....	<i>45</i>
<b>Evaluación</b> .....	<b>46</b>
<i>Evaluación del estudiante</i> .....	<i>47</i>
<i>Evaluación de la propuesta</i> .....	<i>49</i>
<b>Conclusiones</b> .....	<b>51</b>
<b>Limitaciones y prospectiva</b> .....	<b>53</b>
<b>Referencias bibliográficas</b> .....	<b>54</b>
<b>Anexos</b> .....	<b>57</b>
<b>Anexo 1: Rúbrica de evaluación</b> .....	<b>57</b>

## Índice de tablas

Tabla 1	Evaluación competencia matemática .....	10
Tabla 2	Principios didácticos para la enseñanza-aprendizaje de la geometría.....	13
Tabla 3	Niveles de razonamiento matemático del modelo Van Hiele .....	15
Tabla 4	Fases de aprendizaje del modelo Van Hiele .....	17
Tabla 5	Categorización de los errores en matemáticas según diversos autores.....	19
Tabla 6	Categorización de los errores en geometría .....	20
Tabla 7	Conceptos geométricos relacionados con la arquitectura y el diseño .....	21
Tabla 8	Contenidos del bloque de geometría para 3º de la ESO .....	27
Tabla 9	Dimensiones del ámbito matemático y sus competencias.....	28
Tabla 10	Relación entre los contenidos clave y las competencias del ámbito matemático ....	29
Tabla 11	Resumen de los objetivos, competencias específicas, contenidos claves, competencias básicas y criterios y estándares de evaluación .....	32
Tabla 12	Secuenciación de las actividades .....	34
Tabla 13	Rúbrica de evaluación .....	48

## Índice de figuras

Figura 1.	Tendencia de los resultados en competencia matemática de España, Catalunya y la media de la OCDE. ....	8
Figura 2.	Porcentajes de distribución del alumnado en los diferentes niveles de rendimiento de la competencia matemática de la OCDE, España y Catalunya. ....	9
Figura 3.	Porcentajes de distribución del alumnado en los diferentes niveles de rendimiento de la competencia matemática en Catalunya.....	11
Figura 4.	Mosaicos de la Alhambra. ....	36
Figura 5.	Mosaico del Palacio de Comares.....	38
Figura 6.	Actividad "De un lado a otro" en Geogebra. ....	39
Figura 7.	Mosaico nazarí de la Alhambra.....	40
Figura 8.	Plano general de la Alhambra. Hoja nº 2. Sector Plaza de los Aljibes a Jardines del Partal.....	40
Figura 9.	Patio de los Arrayanes.....	41
Figura 10.	Mosaico de la Sala de los Embajadores del Palacio de Comares. ....	42
Figura 11.	Alhambra. Estudio de la Fuente de los Leones. Planta y sección de la fuente.....	42
Figura 12.	Cúpula de la Sala de Dos Hermanas. ....	43
Figura 13.	Planta, alzados y secciones de la Torre de Comares y el Patio de Arrayanes. ....	43
Figura 14.	Mosaico nazarí del Mexuar. ....	45
Figura 15.	Matriz DAFO. ....	50

## Introducción

En esta sección se exponen los argumentos que han motivado la realización de este Trabajo Final de Máster y se describe la estructura organizativa empleada para la obtención de las metas fijadas, descritas al final de este apartado, que impulsan el cuerpo del trabajo.

### **Justificación de la propuesta**

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, particularmente de la geometría, objeto de estudio de este trabajo, sigue generando deficientes resultados por parte del alumnado español según el Informe del Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos PISA 2015 (Ministerio de educación, cultura y deporte, 2016).

La priorización por parte de los docentes de otras áreas matemáticas frente a la geometría, desplaza los contenidos de ésta hacia final de curso, en algunos casos, lo que supone que sea atendida de manera superficial. Al déficit organizativo de esta especialidad se adhiere el empleo de metodologías tradicionales en las aulas que abordan la enseñanza de las matemáticas mediante recurrentes procesos mecanizados que se fundamentan en la memorización de fórmulas, definiciones y propiedades descontextualizadas (Gamboa y Ballester, 2010)

En contraposición a estas ideas Barrantes (2003, citado por Barrantes y Balletbo, 2012,) señala la razón de la utilidad del aprendizaje de la geometría, no únicamente para aspectos escolares sino para la comprensión del entorno, afirmando que esta disciplina conexas al estudiante con el mundo que le rodea, proporcionándole herramientas y destrezas para desenvolverse en la vida cotidiana.

La geometría es una parte de la matemática ligada íntimamente a las diversas disciplinas artísticas. Partiendo de ese punto de vista, el presente trabajo realiza una aproximación a la Arquitectura y el Arte como recurso didáctico con el objetivo de establecer una dinámica motivadora que despierte el interés por la adquisición de los saberes matemáticos. Concretamente, se establece la arquitectura y el arte de la Alhambra de Granada como espacio didáctico en el que apoyar la enseñanza del bloque de geometría para el nivel de 3º de la ESO, con el objetivo de establecer una enseñanza dinámica y contextualizada a través de la historia y la evolución del conjunto, donde las matemáticas presentan un papel influyente en el diseño y la construcción de éste.

## Objetivos

El principal objetivo del presente trabajo es:

- Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje del bloque de geometría en el nivel de 3º de ESO, fundamentada en la arquitectura y el arte de la Alhambra.

El logro del objetivo principal recae en la concreción de unos objetivos específicos como son:

- Analizar la situación de la enseñanza en secundaria de las matemáticas, concretamente en los aspectos de la geometría.
- Conocer y analizar, en base a experiencias previas, las mejoras y las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría.
- Seleccionar y describir los contenidos curriculares referentes al bloque de Geometría para 3º de la ESO.
- Utilizar los elementos de la arquitectura y el arte islámicos de la Alhambra como procedimiento didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la geometría.

El logro de los objetivos expuestos previamente requiere una estructuración organizada del trabajo. Para ello, se han definido cuatro capítulos:

- Marco teórico: donde se analizan los resultados que enmarcan la situación actual de los estudiantes españoles y se investiga sobre las dificultades y oportunidades de mejora del proceso. Se estudia también las posibilidades que ofrecen la arquitectura y el arte como recurso didáctico significativo.
- Marco legislativo: donde se establecen los elementos definidos en el currículo por la legislación vigente, necesarios para el posterior planteamiento de la unidad.
- Propuesta de intervención: se programa y desarrolla una unidad didáctica para la enseñanza de la geometría en 3º de ESO utilizando la Alhambra como espacio didáctico.
- Cierre: donde se establecen las conclusiones obtenidas con el desarrollo del trabajo, las limitaciones que se han detectado y prospectiva de mejora posible.

## Marco teórico

En el primer punto del marco teórico, se examina la actualidad de la enseñanza de las matemáticas observando los resultados del informe PISA y la Prueba de Evaluación de Secundaria realizada en Cataluña (comunidad en la que se contextualiza la unidad didáctica) relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en secundaria.

Una vez examinado el contexto matemático español, se profundiza en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y su relación con la arquitectura y el arte. Se presenta la Alhambra de Granada, al tratarse del espacio escogido como escenario de la propuesta didáctica, enfatizando en su arte nazarí y los mosaicos decorativos que contiene.

### ***Informe PISA***

Enmarcado dentro de un contexto internacional, el Informe del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) evalúa y observa, las competencias, habilidades y aptitudes de los estudiantes, para difundir buenas prácticas y establecer mejoras en los puntos débiles detectados que constituyan una guía para las políticas educativas (Ministerio de educación, cultura y deporte, 2016).

PISA es un estudio trienal desarrollado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). PISA evalúa a los estudiantes de 15 años, centrándose en las competencias de ciencia, lectura y matemáticas y evaluando un ámbito innovador (en 2015, se evaluó la resolución colaborativa de problemas). La prueba examina además de la reproducción de lo aprendido, su capacidad para aplicar lo que saben en un contexto desconocido.

En el año 2015, España evaluó una muestra de 37.205 estudiantes pertenecientes a las diferentes comunidades autónomas españolas. El aumento de implicación estatal coincide con el incremento de países partícipes en el programa, alcanzando los 72 participantes.

PISA establece unos niveles de rendimiento, articulados en una escala de 6 niveles, para interpretar los resultados obtenidos que presentan unos descriptores de nivel correspondientes a los conocimientos que deben haber adquirido así como las competencias y destrezas necesarias.

La puntuación media obtenida por España en matemáticas es de 486 puntos. Este promedio se encuentra por debajo de los conseguidos por la OCDE y la UE, que fijan su media en 490 puntos y 493 puntos, respectivamente. Analizando los resultados obtenidos por comunidades autónomas, donde la participación ha aumentado en

cada una de ellas, la Comunidad Foral de Navarra se sitúa en la delantera, obteniendo la puntuación estatal más alta, 518 puntos. La comunidad de Cataluña, marco territorial de implementación de la unidad didáctica objeto de este trabajo, obtuvo un resultado de 500 puntos, un resultado significativamente superior a la media de los países de la OCDE (490 puntos).

A continuación se muestra una gráfica (véase Figura 1) con la evolución en competencia matemática de los resultados obtenidos por la OCDE, España y Cataluña entre PISA 2009, PISA 2012 y PISA 2015.

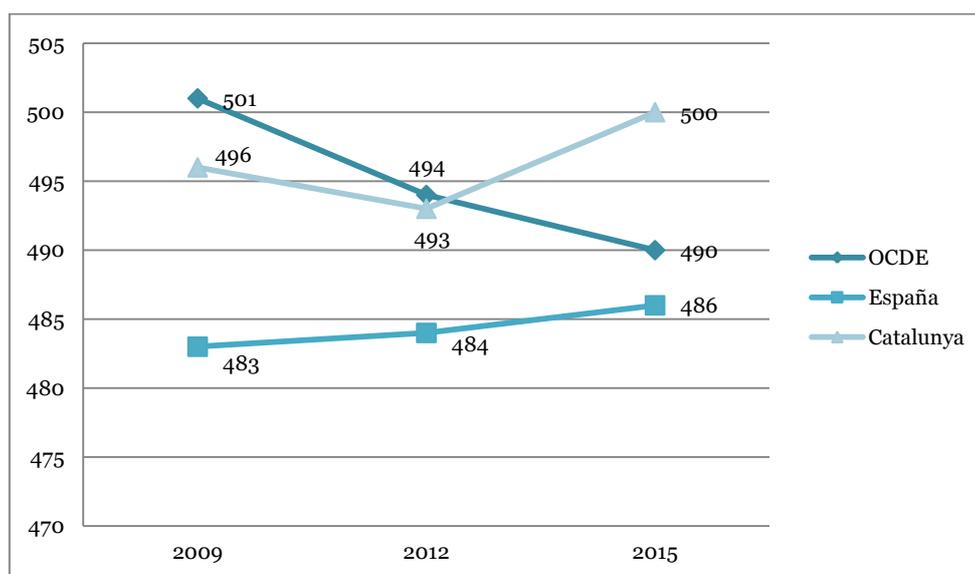


Figura 1. Tendencia de los resultados en competencia matemática de España, Cataluña y la media de la OCDE.

Fuente: Elaboración propia a partir de PISA 2015, PISA 2012 y PISA 2009 (Ministerio de educación, cultura y deporte).

La gráfica (véase Figura 1) muestra como en 2012 España fue la única muestra que mejoró los resultados obtenidos en 2009 aumentando la puntuación en un punto. En 2015 Cataluña mejoró los resultados obtenidos en siete puntos y España en dos puntos. La OCDE continuó con una línea decreciente hasta alcanzar los 490 puntos correspondientes.

El informe PISA 2015 establece, como se ha explicado anteriormente, unos niveles de rendimiento inscritos en una escala del 1 al 6 que definen los conocimientos y destrezas que se deben alcanzar en cada uno de ellos y las tareas a ejecutar para solucionar los problemas planteados en las cuatro áreas evaluadas por el informe: cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad e incertidumbre y datos.

En la siguiente gráfica (véase Figura 2) se expone la distribución del alumnado según los niveles establecidos por PISA en España, Cataluña y la media de la OCDE.

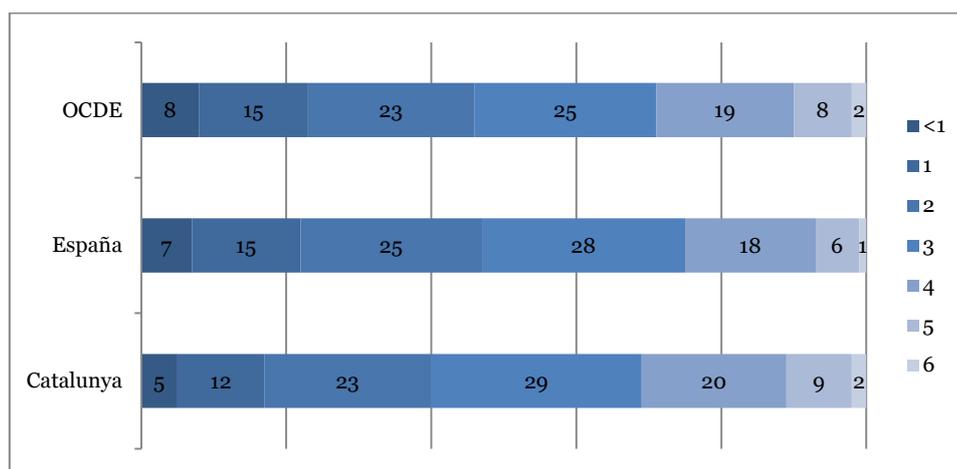


Figura 2. Porcentajes de distribución del alumnado en los diferentes niveles de rendimiento de la competencia matemática de la OCDE, España y Catalunya.

Fuente: Elaboración propia a partir de PISA 2015 (Ministerio de educación, cultura y deporte, 2016).

Se constata que tanto la proporción de los alumnos españoles en niveles inferiores como la de alumnos situados en niveles de mayor rendimiento se mantienen por debajo de la media de la OCDE. Cuanto a Cataluña, esta comunidad presenta, también, un porcentaje ligeramente situado por debajo del promedio de la OCDE tanto en las cotas inferiores de alumnado rezagado como en las superiores de alumnado excelente.

Los resultados se mantienen estables en comparación con las ediciones anteriores, denotando una tendencia de evolución positiva.

### ***Prueba de evaluación de 4º de E.S.O. de Cataluña***

La prueba de evaluación de 4º de ESO se realiza anualmente a los estudiantes de todos los centros catalanes para medir las competencias y conocimientos adquiridos durante esta etapa educativa. El *Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu de Catalunya* es el órgano encargado de diseñar la mentada prueba de acuerdo con los estándares de evaluación del sistema educativo.

Los resultados obtenidos se analizan particularmente para cada centro de la comunidad, convirtiendo la prueba en un instrumento de información y mejora para conocer las oportunidades de mejora del alumnado perteneciente al centro en concreto.

Durante el curso 2015-2016 las competencias evaluadas fueron: la competencia comunicativa en lengua catalana, castellana y extranjera, la competencia matemática y la competencia científico-tecnológica, introducida como novedad en esta edición de la prueba.

La competencia matemática evalúa los bloques de numeración y cálculo, espacio, forma y medida, cambio y relaciones y estadística (véase Tabla 1) incidiendo sobre los procesos matemáticos de reproducción, conexión y reflexión.

**Tabla 1**

*Evaluación competencia matemática*

<b>COMPETENCIA MATEMÁTICA</b>	Numeración y cálculo	Utilizar porcentajes y fracciones	- Sentido de los números y de las operaciones
		Resolver problemas con cálculos directos	- Razonamiento proporcional - Cálculos estimativos
	Espacio, forma y medida	Obtener medidas de superficies y longitudes	- Estimar medidas - Magnitudes y medidas
		Relaciones y características de figuras	- Relaciones métricas - Representación de figuras
	Cambio y relaciones	Utilizar modelos matemáticos	- Representación de funciones - Lenguaje algebraico
		Comprender relaciones matemáticas	- Patrones, relaciones y funciones
Estadística	Interpretar los datos a partir de información gráfica y tablas	- Datos, tablas y gráficos estadísticos	
	Obtener medidas estadísticas y de probabilidad	- Sentido de la estadística y de la probabilidad	

Fuente: Elaborado a partir de *Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu* (2016).

Las puntuaciones obtenidas se transforman en una escala de 0 a 100 puntos, estableciendo cuatro niveles de rendimiento: nivel alto (80-90 puntos), nivel medio-alto (60-80 puntos) nivel medio-bajo (50-60 puntos) y nivel bajo (no se adquieren las habilidades y destrezas de la competencia). Los niveles toman como referencia la puntuación media, la mediana y la desviación típica.

Durante la prueba realizada en 2016 el alumnado catalán obtuvo una puntuación media de 68,1, manteniendo una tendencia estable, aunque con una mínima disminución, respecto a los años anteriores donde se obtuvo en 2015 una puntuación de 68,7, en 2014 de 69,1 y en 2013 de 68,3.

Cuanto la distribución del alumnado según los niveles de rendimiento de la competencia global de matemáticas, el nivel bajo presenta un 15% de la muestra y el nivel alto un 27,8%. El objetivo marcado para el 2018 es obtener un porcentaje inferior al 15% en el nivel bajo y superior al 30% en el nivel alto. La tendencia de la evolución de los resultados obtenidos indica un logro factible del mentado objetivo si

observamos que entre 2012 y 2016 el porcentaje del nivel bajo ha disminuido en un 9% y el nivel alto ha aumentado un 2,6%.

La siguiente gráfica (véase Figura 3) muestra los porcentajes de distribución del alumnado según los niveles de rendimiento y los cuatro bloques que componen la competencia matemática.

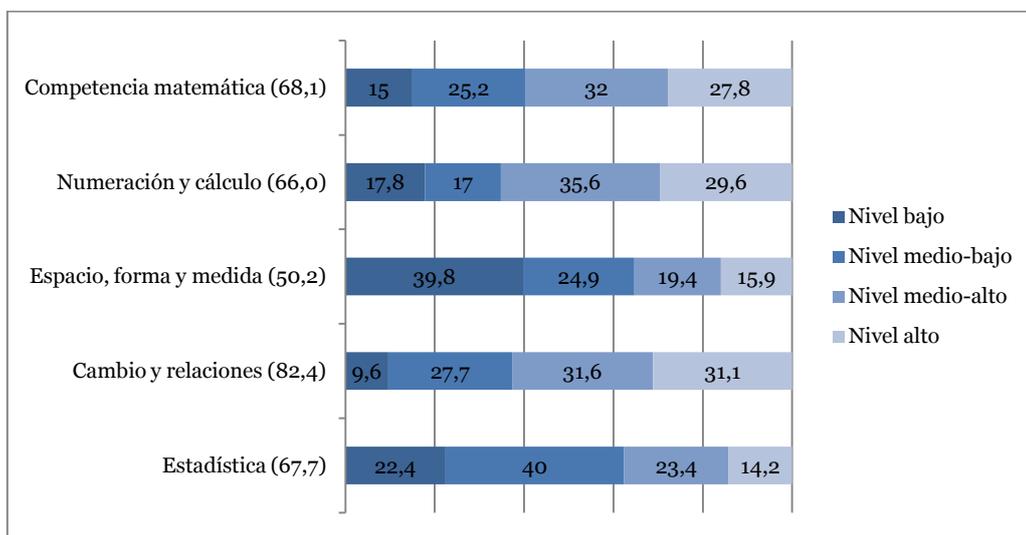


Figura 3. Porcentajes de distribución del alumnado en los diferentes niveles de rendimiento de la competencia matemática en Catalunya.

Fuente: Elaborado a partir de los datos del *Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu* (2016).

La dimensión de cambio y relaciones obtiene la puntuación media más alta (82,4 puntos) de las cuatro evaluadas, situándose 14,3 puntos por encima de la media global de la competencia. La dimensión de espacio, forma y medida presenta los resultados más bajos obtenidos (50,2 puntos) en la competencia matemática, colocándose 17,9 puntos por debajo de la media global, manteniendo la tendencia observado en los años anteriores y situándose lejos de los objetivos marcados para 2018 si tenemos en cuenta que un 39,8% del alumnado presenta un nivel bajo en las capacidades y contenidos correspondientes a esta dimensión.

### El proceso de enseñanza-aprendizaje en geometría

Las matemáticas nos permiten comprender e interpretar el entorno que nos rodea y los procesos que se desarrollan en él desde las primeras civilizaciones babilónicas hasta la actualidad. Como señaló Bacon (citado en Rodríguez y Zuazua, 2002, p.241), "sin matemáticas, las ciencias no pueden ser entendidas, no se pueden enseñar, no se pueden aprender".

Los orígenes de la matemática y en particular la geometría, respondían a la necesidad de solventar las cuestiones y problemáticas agrícolas y arquitectónicas

como la división de campos o cálculo de volúmenes. Los babilónicos y los egipcios consideraban la geometría como una herramienta práctica, haciéndose patente desde sus fundamentos la conexión de la geometría con los problemas cotidianos y prácticos del entorno más cercano.

La existencia de la geometría en diferentes tramas humanas implica la necesidad de conectar al alumnado y el proceso de enseñanza-aprendizaje con el mundo y el desarrollo de la vida cotidiana.

Hernández y Villalba (2001, citado en Vargas y Gamboa, 2013, p.78) describen la geometría como la ciencia del espacio sobre la que construir y analizar patrones, modelos y fenómenos del mundo físico y el mundo real, resultando el punto de encuentro entre la teoría y los modelos reales.

El *National Council of Teachers of Mathematics* (2000, citado en Gamboa y Ballester, 2010, p.126) justifica la necesidad de un "re-direccionamiento de los procesos de enseñanza hacia el logro de una visión contextualizada de la geometría la cual [...] se oriente a potenciar su aplicabilidad y utilidad en la vida del ser humano". El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría debe permitir al educando adquirir las destrezas y herramientas necesarias, relacionadas con los conocimientos geométricos, que le permitan entender, conocer y modificar el entorno desde un pensamiento crítico y creativo. "La geometría favorece y desarrolla en los alumnos una serie de capacidades como la percepción visual, la expresión verbal, el razonamiento lógico y la aplicación a problemas concretos de otras áreas de matemáticas o materias" (Barrantes y Balletbo, 2012, p. 26). Según Castiblanco et al. (2004, citado en Gamboa y Ballester, 2010) para lograr el desarrollo de las mentadas habilidades la teoría geométrica debe estar intrínsecamente relacionada con prácticas perceptibles que construyan un aprendizaje significativo en el alumnado, a la vez que las habilidades visuales deben estar apoyadas en un discurso teórico para conseguir una argumentación precisa.

De acuerdo con estas competencias Báez e Iglesias (2007, citado en Gamboa y Ballester, 2010) citan los seis principios didácticos considerados como fundamentales dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría y que recogemos en la Tabla 2.

**Tabla 2***Principios didácticos para la enseñanza-aprendizaje de la geometría*

<b>PRINCIPIO</b>	<b>DESCRIPCIÓN</b>
<b>Interdisciplinar</b>	Aproximación a la realidad mediante la conexión de todos los elementos que la componen.
<b>Integración del conocimiento</b>	Incorporación de los objetivos, contenidos, metodología y evaluación como partes de un saber integrado.
<b>Contextualización del conocimiento</b>	El conocimiento se adapta a la realidad cercana de los estudiantes.
<b>Flexibilidad</b>	El proceso educativo tiene que asegurar la consecución de unos logros ajustándose a las necesidades y particularidades de cada educando.
<b>Aprendizaje por descubrimiento</b>	Promover un actitud activa frente al aprendizaje que fomente la reflexión y exploración del conocimiento.
<b>Innovación de estrategias metodológicas</b>	Investigar y experimentar diversas metodologías que estimulen la iniciativa y la motivación del alumnado hacia el descubrimiento del conocimiento.

Fuente: Elaborado a partir de Gamboa y Ballesteros (2010)

Los principios propuestos por Báez e Iglesias desarrollan la enseñanza de la geometría desde una vertiente innovadora, alejada de la metodología tradicional donde el principal recurso didáctico era el discurso magistral del profesor. Este sistema educativo formal presenta los contenidos matemáticos y geométricos como un producto final acabado que fomentaba la memorización y aplicación de fórmulas, definiciones, teoremas y propiedades de manera descontextualizada.

"La enseñanza de la geometría debe centrarse en desarrollar, en el estudiantado, habilidades para la exploración, visualización, argumentación y justificación, donde más que memorizar puedan descubrir, aplicar y obtener conclusiones" (Gamboa y Ballesteros, 2010, p. 140), aplicando metodologías activas basadas en la manipulación y la observación. Es fundamental el papel activo del estudiante en la adquisición del conocimiento matemático para propiciar un aprendizaje significativo y deductivo que fomenten la creatividad y la intuición sin limitar el nivel cognitivo de éste al uso de una fórmula de manera irreflexiva. Así mismo, los docentes deben romper con las estrategias conocidas y explotar las posibilidades que ofrece la geometría, actuando como orientador y guiando la enseñanza a la generación de situaciones que potencien el desarrollo social y personal del estudiante.

En los últimos tiempos, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría se ha visto favorecido por el uso de metodologías innovadoras. La implicación de una metodología activa capaz de desarrollar una estrategia dinámica frente al proceso y

el aumento de los recursos tecnológicos (TIC) utilizados en el aula, permiten enriquecer el aprendizaje significativo del alumnado. Ramírez y Burgos (2012) señalan la necesidad de adaptar las prácticas docentes en conformidad con las tendencias que motivan y estimulan a los estudiantes a los que se dirigen apreciando que la sociedad actual ha contribuido a la digitalización nativa de los estudiantes. Aplicaciones como el Cabri o el Geogebra contribuyen al desarrollo de actividades activas y dinámicas que facilitan los procesos de visualización, exploración y modelización al escolar, ofreciendo una mayor versatilidad y cambio de acción. El uso de las tecnologías estimula la autonomía del alumnado en su propio aprendizaje, influyendo en los escenarios educativos desde una doble vertiente transmisora y generadora de información y conocimiento. La integración adecuada de las TIC en la enseñanza recae en la metodología utilizada para implementarla en el proceso de aprendizaje más que en las herramientas utilizadas, el uso pedagógico debe facilitar la adquisición significativa de los contenidos y fomentar la autonomía y el sentido crítico del alumnado (García-Valcárcel y Domingo, 2011).

Concretamente en la geometría, las TIC permiten crear conexiones dinámicas con los conceptos abstractos de la matemática mediante la visualización y la manipulación virtual. La simulación de fenómenos reales facilita el entendimiento del proceso y las variaciones que éste presenta, facilitando un nivel cognitivo superior de los conceptos matemáticos que intervienen.

Para Goncalves (2006), los docentes deben buscar nuevas estrategias didácticas que les permitan hacer que los estudiantes descubran con mayor facilidad que la geometría es una herramienta para la vida. Menciona, además, la importancia de conocer, aplicar y especializarse en el Modelo de Van Hiele (Vargas y Gamboa, 2013, p. 80).

El Modelo de Van Hiele, justifica el progreso y desarrollo del razonamiento geométrico en los estudiantes. Establece cinco niveles de razonamiento, "(...) para saber en cada momento el lugar que ocupa el estudiante posibilitando así un correcto aprendizaje" (Arrieta, 1992, p.13). Conocer el nivel de los destinatarios de las actividades a proponer permite diseñar actividades adecuadas a la edad de los alumnos y sus competencias.

Se presenta una síntesis (véase Tabla 3) de la caracterización realizada por Corberán, Gutiérrez, Huerta, Margarit, Peñas y Ruiz (1994) de los niveles de razonamiento matemático propuestos por Van Hiele complementada con la breve definición de cada nivel de Arrieta (1992).

**Tabla 3**

*Niveles de razonamiento matemático del modelo Van Hiele*

NIVEL	SÍNTESIS	CARACTERÍSTICAS
1. Reconocimiento	Reconocimiento global de las figuras	Percepción global de las figuras geométricas.
		No reconoce propiedades matemáticas de las figuras. No generalizan ni usan el lenguaje apropiado. Usan propiedades imprecisas de las figuras.
2. Análisis	Análisis de los elementos que componen las figuras y de sus propiedades de forma intuitiva y experimental	Perciben los componentes de las figuras y sus propiedades por separado. Utilizan un vocabulario adecuado para describir los componentes y sus propiedades. Comparan figuras usando las propiedades de los componentes. Realzan las definiciones propias. Utilizan la experimentación para obtener deducciones generalizadas.
3. Clasificación	Clasificación y relación de figuras de modo lógica mediante razonamientos sencillos pero sin organización deductiva	Inicio del desarrollo de su aptitud en razonamiento matemático. Comprenden el proceso de razonamiento lógico formal. No construyen demostraciones por sí solos, aunque pueden entenderlas. Pueden clasificar lógicamente diferentes familias de figuras. Sus razonamientos lógicos se apoyan en la manipulación. Comprenden y establecen definiciones correctas. Demostraciones de tipo informal.
4. Deducción formal	Comprensión de la organización deductiva con falta de rigor	Comprenden y realizan razonamientos lógico formales. Entiende que se pueden construir diferentes demostraciones para obtener un mismo resultado. Dan argumentos deductivos formales. Comprenden la estructura axiomática de la matemática.
5. Rigor	Capacidad de razonamiento deductivo	Aprecia sistemas axiomáticos diferentes y los compara entre sí. Captan la geometría en forma abstracta.

Fuente: Elaborado a partir de Corberán et al. (1994, p. 15-20) y Arrieta (1992, p. 13).

Los niveles de razonamiento siguen una estructura jerárquica. La adquisición de un nivel superior de razonamiento supone haber alcanzado el nivel de razonamiento inferior, que sirve de base en el nivel posterior, de forma consciente y voluntaria. La

adquisición de un nivel de razonamiento matemático se conseguirá en tanto que el estudiante es capaz de acumular una cantidad suficiente de experiencias útiles que les permita desarrollar la capacidad de razonamiento. Existe una fase de acomodación en la que el estudiante conjuntará los razonamientos de ambos niveles hasta superar el nivel actual.

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele plantea un modelo educativo para interpretar los diferentes tipos de pensamiento que van alcanzando los alumnos a medida que se desarrolla el proceso de aprendizaje, de modo que el niño se mueve secuencialmente desde el nivel inicial o básico, donde el espacio es simplemente observado y las propiedades de las figuras no se reconocen explícitamente, hasta el último nivel relativo a la deducción de aspectos formales y abstractos de la geometría (Morales y Camacho, 1994, p. 88).

Por otro lado, la relación existente entre los niveles y el lenguaje utilizado por el alumnado es de suma importancia para el modelo de Van Hiele. El vocabulario usado para comunicar los razonamientos y justificaciones matemáticas es un reflejo de las capacidades adquiridas del mismo modo que lo es la metodología utilizada para resolver de las actividades planteadas.

El modelo de los Van Hiele establece cinco fases que definen la estructura para el diseño de las unidades didácticas. Las fases de aprendizaje pueden desarrollarse fuera del ámbito escolar si existen las experiencias adecuadas para construir la red de conocimientos, aunque es función de la escuela y del docente proporcionar al alumno experiencias significativas y guiarlo en el proceso de aprendizaje.

"Las fases de aprendizaje son unas etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento" (Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 57). El modelo presenta una estrategia de enseñanza cíclica por la que en cada nivel de razonamiento geométrico se comienza por la primera fase y continua hasta la quinta fase. Jaime (2013, citado en Coberán, 1994, p. 25) describe las características de las fases de aprendizaje del modelo Van Hiele recogidas en la siguiente tabla (véase Tabla 4).

**Tabla 4***Fases de aprendizaje del modelo Van Hiele*

FASE	CARACTERÍSTICAS
<b>1. Información</b>	Identificación de los conocimientos adquiridos previamente por parte del alumnado. Exposición de los contenidos, la metodología, las actividades, etc.
<b>2. Orientación dirigida</b>	Instrucción guiada a los estudiantes. Guiar evitando dar la solución.
<b>3. Explicitación</b>	Intercambio de experiencias entre el grupo que favorece el análisis del razonamiento y de las justificaciones matemáticas. Consolidación un lenguaje técnico
<b>4. Orientación libre</b>	Aplicación y consolidación de los conocimientos en la resolución de actividades abiertas. Utilización de un razonamiento y lenguaje cada vez más preciso.
<b>5. Integración</b>	Incorporación global de los contenidos y métodos adquiridos relacionando los nuevos conceptos con anteriores.

Fuente: Elaborado a partir de Corberán et al.(1994).

El paso del estudiante por las diferentes fases, debe permitirles construir una red mental entre los conocimientos matemáticos que ya habían adquirido y los nuevos conceptos presentados. Los alumnos deben comprender los conceptos básicos necesarios con los que deben trabajar para una vez interiorizados poder utilizarlos y combinarlos, por lo que es indispensable conocer en cada momento el nivel de razonamiento en el que se encuentra el educando para diseñar unas actividades adecuadas para que alcance los logros propuestos. Jaime y Gutiérrez (1990) identifican el carácter local de los niveles de razonamiento, dado que un mismo individuo puede situarse en diferentes niveles dependiendo del área matemática tratada.

Para evaluar el nivel de razonamiento de cada estudiante, se debe tener en cuenta la manera de contestar de los alumnos y el porqué de sus respuestas, que pondrán de manifiesto las ideas y conceptos adquiridos así como su manera de razonar matemáticamente. Una misma actividad puede ser resuelta por alumnos que se encuentran en distintos niveles de razonamiento, y por consiguiente, el proceso de resolución y argumentación es donde residirá la diferencia.

### **Obstáculos y errores**

La geometría es un ámbito de las matemáticas percibido por los estudiantes como una materia teórica y abstracta, donde su fundamento radica en almacenar fórmulas y saber en qué momento hay que aplicar cada una de ellas (Barrantes y Blanco,

citado en Gamboa y Ballester, 2010). Las creencias del grupo estudiantil sobre la propia educación matemática, sobre sí mismos y sobre el contexto influyen en el propio proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado y en su rendimiento. El docente debe entender las creencias de cada estudiante contextualizándolas en un marco individual y colectivo para determinar el motivo desencadenante de éstas y proponer una intervención educativa en la dimensión afectiva de las matemáticas Gómez-Chacón, Op't Eynde y De Corte (2006). La organización curricular de las matemáticas supone un obstáculo en la enseñanza de la geometría puesto, en la realidad acaba siendo un bloque matemático relegado a las últimas sesiones de curso, lo que conlleva que los contenidos no lleguen a darse en su totalidad o se atiendan de manera superficial (Gamboa y Ballester, 2010).

La metodología utilizada puede presentar por ella misma dificultades en la adquisición del conocimiento por parte del alumno y en la formación de los esquemas conceptuales individuales. Según Barrantes y Zapata (2008) la tendencia tradicional en la enseñanza obstaculiza el desarrollo del proceso de abstracción y la adquisición de agilidad y competencias matemáticas, por el enfoque deductivo que prioriza la memorización de los conceptos y teoremas (Barrantes, Balletbo y Fernández, 2014). Goncalves (2006, citado en Gamboa y Ballester, 2010) señala la dificultad añadida en la comprensión de los contenidos al desarrollar las unidades y explicaciones de manera abstracta, sin ofrecer ejemplos contextualizados y reales que favorezcan el entendimiento de los conceptos matemáticos. Los alumnos tienden a saber desenvolverse en situaciones concretas y reconocibles, pero el mismo problema planteado en un contexto diferente supone un obstáculo para ellos (Galindo, 1996).

En la enseñanza-aprendizaje de la geometría aparecen errores permanentemente que presentan distinta naturaleza generados en el propio proceso o incluso antes. "Los errores forman parte del proceso de construcción y elaboración del conocimiento humano (...), son parte legítima de los procesos de construcción de conocimiento matemático" (Rico, 1997, p. 2).

La visión constructivista de la enseñanza, donde el alumno se convierte en el protagonista, dio un nuevo sentido al concepto de error, presentándolo como una oportunidad de mejora para el alumno y de reflexión para el docente, que deberá reorganizar las estrategias para desarrollar un aprendizaje más efectivo. La investigación de los errores generados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas ha generado numerosos desarrollos teóricos y categorizaciones de éstos, de las cuáles se presentan algunas en la siguiente tabla (véase Tabla 5).

**Tabla 5**

*Categorización de los errores en matemáticas según diversos autores*

<b>AUTOR</b>	<b>CATEGORIZACIÓN</b>
<b>Radatz (1979)</b>	Errores debido a dificultades de lenguaje Errores debido a dificultades para obtener información espacial Errores debido a deficiencias en las destrezas y conceptos previos Errores debidos a asociaciones incorrectas Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes
<b>Davis (1984)</b>	Errores inducidos por el lenguaje Errores por recuperación de un esquema previos Errores producidos por una representación inadecuada Reglas que reproducen reglas
<b>Booth (1984)</b>	Errores por la naturaleza y significado de los símbolos Errores en la comprensión del objetivo de la actividad Errores de comprensión e interiorización de los conceptos Errores por el uso inapropiado de fórmulas
<b>Mosvshovitz -Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)</b>	Errores debidos a datos mal utilizados Errores de interpretación del lenguaje Errores de razonamiento Errores por deformación de los teoremas o definiciones Errores por falta de verificación de los resultados Errores técnicos
<b>Esteley y Villarreal (1996)</b>	Errores al operar con números reales Errores al emplear la información y transcribirla Errores por falta de verificación de los resultados Errores por emplear incorrectamente las propiedades y definiciones Errores en la elección del teorema a aplicar Errores de lógica
<b>Azcárate et al. (1996)</b>	Errores estructurales Errores arbitrarios Errores ejecutivos
<b>Astolfi (1999)</b>	Errores por la redacción y comprensión de las instrucciones Errores resultado de los hábitos escolares y otras disciplinas Errores como resultado de las concepciones alternativas Errores en los procesos Errores debidos a la sobrecarga cognitiva Errores causados por la complejidad del contenido

Fuente: Engler, Gregorini, Müller, Vrancken, y Hecklein (2004, p.27-30).

Se debe motivar al estudiante para que sea consciente de sus propios errores y participe de manera activa en la superación de las ideas erróneas tratando de lograr una integración adecuada de los conocimientos matemáticos.

En cuanto a los errores de la geometría en concreto, Barrantes y Zapata (2008) presentan un análisis de los errores más frecuentes que contribuyen a un desarrollo incompleto de los esquemas internos en los conceptos geométricos (véase Tabla 6).

**Tabla 6**

*Categorización de los errores en geometría*

<b>CATEGORIA</b>	<b>DESCRIPCIÓN</b>
<b>Esquema conceptual</b>	Errores por la asociación de ciertos significados a un concepto
<b>Simbología visual</b>	Errores por la construcción de esquemas conceptuales estándares alejados de la verdadera definición
<b>Distractores de orientación</b>	Errores por la inclusión de unas propiedades que no caracterizan el concepto
<b>Distractores de estructuración</b>	Errores por la inclusión de ideas erróneas en los conceptos
<b>Nombres</b>	Errores derivados de la nomenclatura y las clasificaciones
<b>Imágenes reales</b>	Errores por la abstracción de objetos geométricos a la realidad
<b>Definiciones</b>	Errores derivados de la concepción teórica de la geometría y la dificultad ante la aplicación de la práctica
<b>Clasificaciones</b>	Errores derivados de la clasificación de los conceptos geométricos

Fuente: Elaborado a partir de Barrantes y Zapata (2008).

El docente debe generar conflictos en los estudiantes para orientarlos a reflexionar y mejorar las habilidades y conocimientos geométricos. El diagnóstico y análisis de la realidad de cada educando permitirá dirigir y guiar la sustitución de las ideas erróneas adquiridas. Cabe mencionar la importancia de diferenciar entre los errores sistemáticos, producidos reiteradamente en los procesos matemáticos y geométricos desarrollados por los estudiantes y los errores puntuales derivados de una distracción o descuido.

### **Arquitectura, arte y geometría**

La transferencia a los escolares de la importancia de la geometría como herramienta para comprender el mundo cotidiano que nos rodea debe suponer un reto y un objetivo para los docentes. Andonegui (2006, citado en Vargas y Gamboa, 2013, p 78) señala que "la geometría nos ayuda a reconocer y comprender el mundo en el que habitamos al hacer representaciones que imitan nuestro entorno y permitir, con

eso, el análisis de objetos geométricos". Las actividades interdisciplinarias relacionadas con otros ámbitos como el Arte deben ser un recurso utilizado el profesorado en el proceso de enseñanza para favorecer un aprendizaje más significativo (Barrantes y Zapata, 2008)

La historia y la evolución del edificio matemático, las curiosidades matemáticas, la relación con otras materias o con las mismas matemáticas, son poderosos instrumentos motivadores y harán que el alumnado tenga interés por la adquisición de los conocimientos matemáticos (Barrantes y Balletbo, 2012, p. 143).

Alsina (2005) incide en la importancia de la geometría como herramienta matemática que ofrece la oportunidad de conocer el espacio tridimensional, representarlo y transformarlo y desarrollar la creatividad necesaria para abordar estos aspectos. En la siguiente tabla (véase Tabla 7), se presentan algunos conceptos geométricos relacionados con la arquitectura y el diseño:

**Tabla 7**

*Conceptos geométricos relacionados con la arquitectura y el diseño*

CATEGORIA	DESCRIPCIÓN
<b>Orientación geográfica</b>	Orientar el edificio de manera eficaz
<b>Modelización</b>	Realización de maquetas para fomentar la creatividad
<b>Representación</b>	Elaboración de modelos gráficos
<b>Modularidad</b>	Repetición de elementos en la construcción y diseño
<b>Proporción</b>	Búsqueda de la armonía entre las partes
<b>Fractalidad</b>	Principio de dividir iterativamente
<b>Forma</b>	Utilización de figuras geométricas
<b>Simetría</b>	Utilización de las transformaciones en el plano

Fuente: Elaborado a partir de Alsina (2005)

Alsina, Burgués y Fortuny (1989) citan tres tipos de actividades para trabajar la geometría a partir del entorno artístico o arquitectónico:

- Observación directa: visitar edificios con particularidades singulares o ofrecer material gráfico sobre ellos que permitan descubrir elementos geométricos globales de la realidad.
- Observación indirecta: descubrir mediante fotografías, planos o otras representaciones gráficas la estructura y el patrón geométrico intrínseco que genera el diseño en particular.
- Creación artística: aplicación creativa de la geometría en creaciones artísticas como maquetas, mosaicos, esbozos, etc.

Para conseguir que los estudiantes asimilen los conocimientos abstractos de la geometría, difíciles de interiorizar desde un aprendizaje teórico, la contextualización

de los contenidos es una estrategia idónea para el logro del mentado objetivo (Vallejo, 2011). La arquitectura y el arte permiten enseñar y aprender la geometría significativamente, relacionando las propiedades matemáticas y los conceptos geométricos desde una experiencia motivadora cercana al contexto real del alumnado.

### **La Alhambra de Granada**

La Alhambra de Granada, también conocida como "el Castillo Rojo", fue declarada Patrimonio de la Humanidad en 1984. El expediente de catalogación expone la siguiente justificación: "El bien incluye logros artísticos únicos. Es un testimonio excepcional de la España musulmana del siglo XIV. Ofrece un ejemplo valioso de las residencias árabes del Medioevo" (Pérez, 2004, p. 81).

La Alhambra, emplazada en el levante granadino, sobre la colina de la Sabika, es una de las obras más emblemáticas de arte islámico en el sur de la España medieval, un verdadero paradigma y símbolo de la dinastía nazarí." El periodo nazarí comenzó con el reinado de Alhamar hacia 1232. Éste transformó la primitiva Alhambra con una gran construcción, la Acequia Real, que llevó el agua hasta aquella colina palatina" (Gámiz 2016, p.139). Muhámad II, heredero de Alhamar - Hijo Rojo- Muhámad I, construyó el Generalife. La posterior reforma de más envergadura se desarrolló bajo el mandato de Yusuf I entre 1333 y 1354 cuando se construyó la Torre de Cadí o el Torreón de Comares entre otros. La autoría del Palacio de Comares se atribuye a su hijo Muhámad V, pues fue quien terminó la obra.

La Alhambra presenta una refinada manera de expresar la luz, los espacios y la geometría. La mirada geométrica del artista islámico reproduce la belleza del mundo, convirtiendo la geometría en una herramienta de la arquitectura. Las proporciones áureas y pitagóricas se manifiestan en los trazados del conjunto islámico, otorgándole a la estética arquitectónica una belleza matemática. El diseño nazarí estaba compuesto por fórmulas y esquemas que se adaptaban al lugar y a las necesidades del momento. Existen varios recursos representativos de la lógica arquitectónica nazarí: los patios que acostumbraban a conformarse mediante un eje de simetría, y alguna escasa vez dos ejes ortogonales, la qubba, un espacio prismático bajo una cúpula superior, que reflejaba la composición de un espacio perfecto en la representación de la Tierra (prisma) y el Cielo (cúpula) o los pórticos situados en los ejes de los patios eran formulados a partir de simetrías. En el Palacio de Comares, los diferentes elementos que lo conforman se organizan en un eje central donde la Torre de Comares, de 45 metros de altura, se alza como punto focal de éste. La fachada del mismo está diseñada utilizando rectángulos que responden a

una proporción áurea entre ellos. En la Torre del Salón del Trono, el elemento generador de la planta es un cuadrado pitagórico.

### ***Los mosaicos de la Alhambra***

El arte nazarí se vio influenciado por la prohibición del Corán de representar figuraciones de Allah que derivó en un arte abstracto y geométrico en la decoración de la arquitectura religiosa y del poder. La ornamentación ostentosa y cuidada que decoraba la arquitectura nazarí pretendía enmascarar la pobreza de los materiales utilizados en sus construcciones.

La creatividad en la ornamentación geométrica islámica, ligada a sus creencias, denota un elaborado control de la geometría en la plasmación de su sentido estético tanto en la ornamentación con motivos vegetales, geométricos o caligráficos.

El principio de conservación del área se manifiesta en el arte nazarí mediante la transformación de polígonos regulares en otros polígonos irregulares con la misma área, aunque no es un criterio omnipresente en todos los mosaicos. Los polígonos nazarís más conocidos que siguen este procedimiento son: el avión, el pez volador y el hueso, que parten del cuadrado y la pajarita y el pétalo que parten el primero de un triángulo equilátero y el segundo de un rombo conformado por dos triángulos equiláteros.

En las composiciones geométricas, representativas del arte islámico, la tesela básica es la unidad de la forma geométrica, o en algunos casos la región poligonal, que conforma el patrón de repetición para rellenar el plano mediante el uso de traslaciones, giros y simetrías. El proceso desarrollado en la creación de estos mosaicos caracteriza los mosaicos periódicos. "Las tramas ornamentales y caligráficas provocaban sugerentes efectos espaciales al percibirse de forma distinta según la distancia del observador o la iluminación" (Gámiz 2016, p.139).

Los estudios matemáticos desarrollados entorno a los mosaicos de la Alhambra determinaron que los artistas nazarís utilizaron todas las combinaciones básicas posibles. Los nazarís desarrollaron un conocimiento intuitivo en la decoración geométrica de su arquitectura, un alarde de ingenio y creatividad, que necesitaría del transcurso de varios siglos para establecer una clasificación científica de los conocimientos desarrollados. Los muros de la Alhambra contienen los 17 grupos de cristalográficos planos definidos posteriormente por Fedorov en el s. XIX, convirtiéndose en una importante muestra artística y cultural con valor científico (Pérez, 2004)

Las inscripciones incluidas en la arquitectura de la Alhambra plasman la influencia de la proporción en el diseño de la caligrafía (geometría del verso) que recubre la arquitectura de la fortaleza granadina.

Los mosaicos de la Alhambra de Granada y el diseño arquitectónico de sus patios, torres y palacios ofrecen una gran variedad de posibilidades para que el alumnado se familiarice con los movimientos en el plano de traslación, giro, simetría y semejanza. La manipulación de estos elementos permitirá al educando descubrir las oportunidades que existen en el entorno real para experimentar con la geometría, alejándola de la tradicional visión abstracta. Ante la aplicación real de estos conceptos, el alumno explorará y construye una sucesión de movimientos y nuevos conceptos de forma espontánea y natural mediante la observación indirecta de estos elementos y la creación artística de nuevos.

## Marco legislativo

El marco legislativo presenta las diferentes leyes, órdenes y decretos que intervienen en el proceso de concreción de la propuesta de intervención didáctica acotando el currículo, los contenidos mínimos, los objetivos y estándares de evaluación, etc. para el adecuado diseño didáctico centrado en la enseñanza-aprendizaje de la geometría para el curso de 3º de la ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

### **La Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)**

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) es una modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOE), que integra las propuestas de la OCDE referentes a las buenas prácticas observadas en sistemas educativos eficientes (BOE núm. 295, 2013).

La nueva Ley reorganiza la Educación Secundaria en dos ciclos, estableciendo tres cursos escolares para el primer ciclo y uno de carácter propedéutico para el segundo, con opción de enseñanzas académicas o enseñanzas aplicadas. La nueva estructuración fija los objetivos educativos por etapas. Las asignaturas se estructuran en materias troncales, específicas y de libre configuración autonómica. Se incorporan en la Educación Secundaria los Programas de mejora del aprendizaje y el rendimiento en los cursos de 2º y 3º (primer ciclo), sustituyendo a los Programas de diversificación curricular.

La superación de una evaluación externa final individualizada de etapa se establece como un criterio obligatorio para la promoción de los estudiantes, donde la calificación final tendrá en cuenta la media aritmética de cada una de las asignaturas cursadas (70%) y la nota de la evaluación final (30%).

Referente al currículo, la LOMCE introduce un nuevo elemento: los estándares de aprendizaje evaluables, entendidos como concreciones de los criterios de evaluación. Las competencias básicas introducidas por la LOE, reducen su número de 8 a 7 competencias y pasan a denominarse competencias clave, indispensables para el desarrollo personal, social y profesional del estudiante como ciudadano. La orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato, establece las siguientes competencias clave en el currículo escolar:

- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

- Competencia digital.
- Competencia de aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.
- Competencia en sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresiones culturales.

La propuesta de intervención desarrollada en el marco de este trabajo, propone la Alhambra de Granada como espacio didáctico para la enseñanza de la geometría. Se contextualiza el aprendizaje matemático en una realidad arquitectónica permitiendo trabajar el proyecto de manera transversal al abordar la competencia matemática en relación a la conciencia y expresión cultural nazarí presentes en el desarrollo histórico y artístico de nuestra sociedad.

### ***Competencia matemática***

La Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, define la competencia matemática como "la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto" .

La consecución de las habilidades competenciales en matemáticas requiere conocimientos sobre cuatro bloques: los números, el álgebra, la geometría y la estadística. Se pretende que utilicen los conceptos, procedimientos y herramientas de estas sub-áreas para la resolución de problemas y poder la influencia de las matemáticas en la vida cotidiana y el entorno (BOE, núm. 25, 2015).

La Orden ECD/65/2015, de 21 de enero y el informe PISA 2015, presenta el área de geometría como la base fundamental del espacio y la forma para entender los fenómenos hallados en el mundo visual y físico que nos rodea, manteniendo una estrecha implicación con otras áreas matemáticas.

### ***Competencia en Conciencia y expresiones culturales***

La Orden ECD/65/2015, de 21 de enero define la competencia en conciencia y expresión cultural como la capacidad de distinguir, comprender y valorar de manera crítica las expresiones culturales y artísticas, reconociéndolas como patrimonio cultural y artístico y valerse de ellas para el enriquecimiento personal.

Comprende la concreción de la cultura en las artes y las manifestaciones artístico-culturales del entorno cotidiano.

Desarrolla las capacidades necesarias para acrecentar el sentido creativo, la imaginación y la iniciativa en la producción de creaciones artísticas de diversa índole.

## Contenidos del bloque de geometría de 3º de la ESO (Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas)

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato y el *Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'Educació Secundària Obligatòria*, en la Comunidad de Cataluña, establecen los contenidos mínimos correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en el territorio español y en Cataluña respectivamente. Ambos organizan el currículo de esta asignatura mediante 5 bloques: números y álgebra, geometría, funciones, estadística y probabilidad y procesos, métodos y actitudes en matemáticas que se desarrolla de modo transversal al resto de bloques.

El *Decret 187/2015*, de 25 de agosto, de Cataluña, comunidad a la que pertenece la muestra de alumnos para los que se diseña la propuesta didáctica, establece para el ámbito matemático dieciséis contenidos clave que se distribuyen en función de su relación con cada dimensión.

Los contenidos clave numerados en el *Decret 187/2015*, de 25 de agosto, relacionados con el bloque de geometría de la unidad didáctica son:

- CC8. Sentido espacial y representación de figuras tridimensionales.
- CC9. Figuras geométricas, características, propiedades y procesos de construcción.
- CC10. Relaciones y transformaciones geométricas.

La siguiente tabla (véase Tabla 8) recoge los contenidos del bloque de geometría, objeto de este trabajo:

**Tabla 8**

*Contenidos del bloque de geometría para 3º de la ESO*

CONTENIDOS	ESPECIFICACIONES DE CONTENIDO
<b>Proporcionalidad y semejanza (CC8, cc9, c10)</b>	Ampliaciones y reducciones; factor escala.
<b>Transformaciones geométricas (c10)</b>	Traslaciones, giros y simetrías. Programas de geometría dinámica.

Fuente: Elaborado a partir del Real Decreto 1105/2014 y el *Decret 187/2015*.

Los contenidos del bloque 1 de "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas" se trabajan de manera transversal en los diferentes bloques que componen la asignatura de matemáticas. Por consiguiente, se tendrán en consideración para el diseño de la intervención didáctica propuesta en el presente trabajo.

El *Decret 187/2015*, de 25 de agosto, de dictamina las competencias básicas referidas al ámbito matemático que se clasifican en 4 dimensiones: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones y comunicación y representación (véase Tabla 9).

**Tabla 9**

*Dimensiones del ámbito matemático y sus competencias*

<b>DIMENSIÓN</b>	<b>COMPETENCIAS</b>
<b>Resolución de problemas</b>	<p>CC1. Traducir un problema lenguaje matemático o a una representación matemática.</p> <p>CC2. Utilizar conceptos, herramientas y estrategias matemáticas.</p> <p>CC3. Mantener una actitud de búsqueda frente a un problema utilizando diferentes estrategias.</p> <p>CC4. Generar preguntas de ámbito matemático y plantear problemas.</p>
<b>Razonamiento y prueba</b>	<p>CC5. Construir, expresar y contrastar argumentaciones para justificar y validar las afirmaciones matemáticas.</p> <p>CC6. Utilizar el razonamiento matemático en entornos no matemáticos.</p>
<b>Conexiones</b>	<p>CC7. Utilizar las relaciones que hay entre las diferentes partes de las matemáticas para analizar situaciones y razonar.</p> <p>CC8. Identificar las matemáticas implicadas en contextos cercanos y crear situaciones para relacionarlas con ideas matemáticas concretas.</p>
<b>Comunicación y representación</b>	<p>CC9. Representar un concepto o relación matemática de diferentes maneras y usar el cambio de representación como estrategia.</p> <p>CC10. Expresar ideas matemáticas con claridad y precisión.</p> <p>CC11. Utilizar la comunicación y el trabajo colaborativo para compartir y construir conocimiento.</p> <p>CC12. Seleccionar y usar diferentes tecnologías para gestionar y mostrar información, y visualizar y estructurar ideas y procesos.</p>

Fuente: Elaborado a partir del *Decret 187/2015*.

Las competencias específicas del ámbito matemático establecidas por el *Decret 187/2015*, de 25 de agosto (véase Tabla 9), se relacionan con los contenidos clave del bloque de geometría de la unidad. La relación existente se recoge en la siguiente tabla (véase Tabla 10).

**Tabla 10**

*Relación entre los contenidos clave y las competencias del ámbito matemático*

CONTENIDOS CLAVE	COMPETENCIAS DEL ÁMBITO MATEMÁTICO											
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
CC8	x		x	x		x		x	x			x
CC9					x				x	x		x
CC10			x	x	x		x			x	x	

Fuente: Elaborado a partir del *Decret 187/2015*.

El *Decret 187/2015*, de 25 de agosto, en el marco de la propuesta realizada por la Unión Europea establece 8 competencias básicas que se asocian a los diferentes objetivos y actividades de la propuesta didáctica:

- Competencias Transversales:

*Competencias Comunicativas:*

C1. Competencia comunicativa lingüística y audiovisual.

C2. Competencia artística y cultural.

*Competencias Metodológicas:*

M3. Tratamiento de la información y competencia digital.

M4. Competencia matemática.

M5. Competencia de aprender a aprender.

*Competencias Personales:*

P6. Competencia de autonomía e iniciativa personal.

- Competencias específicas centradas en convivir y habitar el mundo.

H7. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.

H8. Competencia social y ciudadana.

## Propuesta de intervención

El diseño de la intervención propuesta se desarrolla teniendo en cuenta los objetivos presentados al inicio de este trabajo y se apoya en los marcos teóricos y legislativos descritos anteriormente.

El presente documento recoge la unidad: "Movimientos en el plano y semejanza" de la asignatura de matemáticas aplicadas a la enseñanza de 3º de la ESO. Esta unidad didáctica pretende asentar los conocimientos de los movimientos en el plano y la semejanza entre figuras mediante la conexión de los conceptos con el arte y la arquitectura de la Alhambra de Granada. Se pretende que el alumno adquiera actitudes de razonamiento y justificación adecuadas para interpretar y entender el entorno y las manifestaciones artísticas presentes en la vida cotidiana. El uso de la Alhambra como espacio didáctico busca desarrollar un aprendizaje significativo para el alumno, contextualizado en experiencias reales alejadas de las estrategias tradicionales de memorización y sistematización de los conceptos matemáticos.

La práctica didáctica se engloba dentro de un proyecto interdisciplinar a partir de la lectura del libro "El señor del cero" de M<sup>a</sup> Isabel Molina. Los matices ofrecidos en la lectura de la historia de José, un niño mozárabe de la Córdoba del siglo X, permite la intervención de los diferentes departamentos didácticos en el desarrollo del proyecto.

La propuesta presenta los contenidos, objetivos, criterios y estándares de evaluación y competencias que intervienen en la unidad. Se detalla también los recursos y metodología empleados en el desarrollo de las actividades, así como la evaluación tanto de los alumnos como del proceso y del docente que permitan un análisis global y reflexivo para la mejora continua de la propuesta y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

### Contextualización

La unidad didáctica planteada está diseñada para los alumnos de los grupos de 3º de la ESO pertenecientes a cualquier centro de educativo, independientemente de la titularidad o el nivel socioeconómico de este, de la Comunidad Autónoma de Cataluña.

El diseño de la unidad didáctica se ha llevado a cabo teniendo en cuenta el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato y el *Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'Educació Secundària Obligatoria*.

## **Objetivos, criterios de evaluación, contenidos clave, competencias básicas específicas del ámbito y competencias clave**

Los objetivos didácticos específicos de la unidad didáctica de "Movimientos en el plano y semejanza, de acuerdo con la legislación autonómica, son:

- Identificar transformaciones isométricas o movimientos en el plano.
- Aplicar translaciones, simetrías y giros a figuras en el plano.
- Utilizar programas de geometría dinámica para trabajar los movimientos en el plano
- Reconocer y construir figuras proporcionales aplicando criterios de semejanza.
- Utilizar escalas gráficas y numéricas para interpretar planos y dibujos.
- Apreciar, en el arte y la arquitectura, fenómenos que se pueden describir mediante la geometría

En la siguiente tabla se muestra la relación entre los objetivos, las competencias básicas específicas del ámbito matemático, los contenidos clave, las competencias transversales y los criterios de evaluación (véase Tabla 11):

**Tabla 11**

*Resumen de los objetivos, competencias específicas, contenidos claves, competencias básicas y criterios y estándares de evaluación*

<b>OBJETIVOS</b>	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS ESPECÍFICAS DEL ÁMBITO</b>	<b>CONTENIDOS CLAVE</b>	<b>COMPETENCIAS BÁSICAS</b>	<b>CRITERIOS DE EVALUACIÓN</b>	<b>ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE</b>
O1. Investigar la implicación de la cultura árabe en las matemáticas	C8-c11-c12		C1-C2-M3-M4-M5-P6-H7-H8	Identificar las aportaciones relevantes de la cultura árabe a las matemáticas.	Reconoce las aportaciones arábigas a las matemáticas y su importancia en el desarrollo matemático.
O2. Identificar transformaciones isométricas o movimientos en el plano	C3-C5-C6-C7-C8-C10-C11	CC10	C1-C2-M3-M4-M5-P6-H7-H8	Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimientos en el plano.	Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseño cotidianos u obras de arte.
O3. Aplicar translaciones, simetrías y giros a figuras en el plano	C3-C5-C6-C7-C8-C10-C11	CC10	C1-C2-M3-M4-M5-P6-H7-H8	Aplica los movimientos en el plano para la transformación de figuras.	Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos en el plano.
O4. Utilizar programas de geometría dinámica para trabajar los movimientos en el plano	C3-C5-C6-C10-C11-C12	CC10	C1-C2-M3-M4-M5-P6-H7-H8	Utiliza las TIC de modo habitual en el proceso de aprendizaje.	Analiza, diseña y recrea entornos y objetos geométricos para comprender las propiedades geométricas. Utiliza los medios tecnológicos para estructurar y mejorar sus proceso de aprendizaje.
O5. Reconocer y construir figuras proporcionales aplicando criterios de semejanza	C1-C3-C5-C6-C8-C9-C10-C11-C12	CC8 - CC9 - CC10	C1-C2-M3-M4-M5-P6-H7-H8	Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes en contextos diversos.	Reconoce figuras semejantes y en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.
O6. Utilizar escalas gráficas y numéricas para interpretar planos y dibujos	C1-C3-C6-C8-C9-C10-C11-C12	CC8 - CC9 - CC10	C1-C2-M3-M4-M5-P6-H7-H8	Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.
O7. Apreciar en el arte y la arquitectura fenómenos que se pueden describir mediante la geometría	C6-C8-C10	CC8 - CC9 - CC10	C2-H7-H8	Reconocer y valorar fenómenos geométricos en expresiones artísticas y arquitectónicas.	Identifica y comprende los fenómenos geométricos presentes en diseños cotidianos u obras de arte.

Fuente: Elaboración propia a partir del *Decret 187/2015*.

## **Recursos**

Los recursos que intervienen en esta propuesta didáctica se diferencian en dos categorías: recursos personales y recursos materiales.

- Recursos personales: se consideran dentro de esta categoría todos los docentes que intervienen en la programación e implementación de la propuesta didáctica diseñada. De acuerdo con el marco interdisciplinario del proyecto, además de los integrantes del departamento de matemáticas y el docente responsable de dirigir la unidad en el curso correspondiente, conformarán estos recursos el profesorado de los departamentos didácticos que colaboran en el diseño y programación del proyecto y que lo ponen en funcionamiento en las respectivas asignaturas.
- Recursos materiales: el diseño de las actividades de esta unidad didáctica requiere el uso de las TIC, concretamente del programa Geogebra, por lo que se requerirá un mínimo de un ordenador por cada grupo de trabajo. En caso de no disponer de ordenadores portátiles en el aula convencional, el desarrollo de la unidad se trasladará al aula de informática. La contextualización de la unidad en el espacio didáctico de la Alhambra de Granada requiere material fotográfico y planos del complejo que se detallan en cada una de las actividades a realizar. La construcción de una maqueta y la realización artística de un mosaico geométrico requerirán materiales específicos que se concretarán desde la asignatura de plástica. El aula deberá contar con una pizarra digital para la explicación de los conceptos matemáticos y la exposición de las resoluciones de los alumnos para la evaluación conjunta, así como el material necesario para cada alumno para asegurar un adecuado desarrollo de la unidad matemática (mobiliario, instrumentos de medición, calculadora, bolígrafos y lápices, etc.). La distribución del aula se modifica en función de la metodología de trabajo dispuesta para la actividad.

## **Cronograma**

La secuenciación de actividades se ha diseñado teniendo en cuenta los objetivos, las competencias, clave y del ámbito matemático, los contenidos y los criterios de evaluación descritos en el anterior apartado del presente trabajo (véase Tabla 11). La interdisciplinariedad de la propuesta obliga a desarrollar la organización de la unidad en consonancia con el resto de departamentos didácticos que participan en la implementación del proyecto.

Se exponen a continuación (véase Tabla 12) las actividades dispuestas para el progreso de la unidad relacionándolas con los objetivos previstos y la temporalidad para cada una de ellas.

**Tabla 12**

*Secuenciación de las actividades*

ACTIVIDAD	TEMPORALIDAD	CONTENIDOS	OBJETIVOS
Un poco de historia	120 minutos	Aportaciones árabes a las matemáticas	O1
Punto de partida	60 minutos		Conocimientos previos
De un lado a otro	90 minutos	Vector y traslación	O2-O3-O4-O7
Simetrías	90 minutos	Simetría central y axial	O2-O3-O4-O7
Rotando y cambiando	120 minutos	Giro y semejanza	O2-O3-O4-O5-O6-O7
Artistas por un día	120 minutos	Movimientos en el plano Composiciones	O2-O3-O4-O5-O6-O7

Fuente: Elaboración propia.

## Actividades

### **oo. Contextualización previa**

La unidad didáctica se desarrolla en el marco de un proyecto interdisciplinar a partir de la lectura de "El señor del cero" de M<sup>a</sup> Isabel Molina. La propuesta engloba los departamentos de matemáticas, lengua castellana y literatura, geografía e historia y artes plásticas.

El libro relata la historia de José Ben Alvar, un chico mozárabe de la Córdoba del s. X que tiene gran facilidad por el cálculo y que es obligado a abandonar su ciudad natal por las envidias desatadas ante su don. El relato ofrece una oportunidad didáctica desde diferentes puntos vista:

- Matemáticas: historia y avances de las aportaciones islámicas al mundo matemático, resolución de los problemas planteados en el libro, sistemas y unidades de medición, mosaicos, etc.
- Lengua castellana y literatura: fomento de la lectura, comprensión y expresión oral y escrita, métrica de los poemas, recursos literarios, etc.
- Geografía e historia: estudio del momento histórico en España, la situación política, geografía española, etc.

- Artes plásticas: estudio del arte y la arquitectura islámicas, creaciones artísticas importantes, influencias artísticas, etc.
- Ética y valores: el papel de la mujer en el mundo, la interculturalidad presente en la sociedad recreada y la actual, la tolerancia y respeto ante la diversidad de creencias, etc.

La multitud de posibles matices sobre los que trabajar a partir de la narración deberán quedar especificados en una programación didáctica adecuada que interrelacionará todas las materias participantes.

El punto de partida, claro está, será la lectura por parte de los alumnos de este relato promovido por la asignatura de lengua castellana y literatura. La actividad de comprensión posterior a la lectura enfatizará los temas a tratar de manera interdisciplinar por los diversos departamentos didácticos.

### ***01. Un poco de historia***

La unidad didáctica utiliza la Alhambra de Granada como espacio didáctico para la enseñanza de la geometría. El complejo arquitectónico granadino es un testimonio crucial de la España musulmana medieval, por lo que esta actividad pretende enmarcar y contextualizar las matemáticas en relación a las aportaciones y contribuciones de la cultura árabe en este ámbito. La historia de las matemáticas como recursos didáctico permite comprender los conceptos actuales desde una evolución histórica y no como un producto acabado, revelando su carácter cultural y artístico y su influencia en el desarrollo del pensamiento científico (González, 2004). El departamento de artes plásticas e historia profundizará en las características del arte y la arquitectura árabe.

#### Recursos

Libro "El señor del cero", ordenador portátil con conexión a internet y Microsoft Word o similar.

#### Agrupamientos

La actividad se desarrollará por parejas. Se llevará a cabo en el aula en el caso de disponer de ordenadores portátil suficientes o en el aula de informática en caso contrario.

#### Contenidos

Apreciar y comprender las aportaciones matemáticas realizadas por los árabes y su influencia en la evolución de los conceptos.

#### Desarrollo

A partir de la lectura del libro de "El señor del cero" (realizada en la asignatura de "Lengua castellana y literatura") se presentan a los alumnos los siguientes conceptos

clave para que investiguen las aportaciones arábigas en relación a las matemáticas: sistema de numeración árabe e hindú, quadrivium, Al-khwarizmi, ábaco y cuadro árabe de multiplicación.

Los estudiantes, por parejas, realizarán una búsqueda de los mentados conceptos (sistema de numeración árabe e hindú, quadrivium, Al-khwarizmi, ábaco y cuadro árabe de multiplicación) en internet durante la primera sesión de la unidad en el aula. Deberán analizar y seleccionar la información adecuada y realizarán un informe cronológico de los resultados obtenidos. Los trabajos se presentarán en el aula para reflexionar sobre los datos obtenidos y elaborar un mural final de manera grupal. Se coordinará la elaboración del mural con la asignatura de artes plásticas e historia y geografía.

## ***02. Punto de partida***

Los conocimientos previos adquiridos por los alumnos en experiencias anteriores son un factor importante para la construcción y organización de nuevas estructuras y esquemas de conocimiento que incorporen los recientes conceptos. El aprendizaje significativo implica una reestructuración de los esquemas internos para subsanar el conflicto entre lo que el alumno ya sabe y lo que debería saber (Díaz-Barriga y Hernández, 2002). Esta actividad pretende poner de manifiesto los diferentes puntos de partida de los alumnos que conforman el grupo.

### Recursos

Figuras de cartulina, cuadrícula DIN-A3, dispositivo móvil.



Figura 4. Mosaicos de la Alhambra.

Fuente: [http://matematicasmundo.ftp.catedu.es/FOTOGRAFIAS/fotografia\\_mosaicos\\_alhambra.htm](http://matematicasmundo.ftp.catedu.es/FOTOGRAFIAS/fotografia_mosaicos_alhambra.htm)

### Agrupamientos

La actividad se desarrollará por parejas en el aula. Se llevará a cabo en el aula en el caso de disponer de ordenadores portátil suficientes o en el aula de informática en caso contrario.

### Contenidos

Descubrir los conocimientos previos adquiridos por los alumnos con anterioridad.

### Desarrollo

Se presenta a los alumnos la unidad didáctica de "Movimientos en el plano y semejanza". Se les expone los conceptos que vamos a trabajar, la metodología, las actividades y la evaluación que se llevarán a cabo.

Se distribuye a los alumnos por parejas y se les reparte a cada una de ellas una figura geométrica, en este caso serán los motivos más conocidos en los mosaicos de la Alhambra (véase Figura 4) y que trabajarán posteriormente en otra actividad, y una cuadrícula.

A partir de los conocimientos que poseen, los alumnos deberán utilizar la figura que se les ha dado y representar:

- 2 simetrías con ejes diferentes
- 2 traslaciones con diferente desplazamiento
- 2 giros con diferente punto de aplicación
- 1 figura semejante

Los alumnos harán una fotografía de cada situación presentada y la colgarán en una plataforma. Durante la segunda mitad de la sesión, se presentarán las diferentes imágenes obtenidas y serán debatidas para reflexionar sobre la idoneidad del proceso .

### ***03. De un lado a otro***

La actividad introduce el concepto de transformaciones isométricas, partiendo de la traslación y el concepto de vector como segmento orientado.

### Recursos

Imagen del mosaico del Palacio de Comares (véase Figura 5), imagen de la figura de la pajarita (véase Figura 6), aplicación Geogebra, pizarra digital y rúbrica de evaluación (véase Anexo 1).

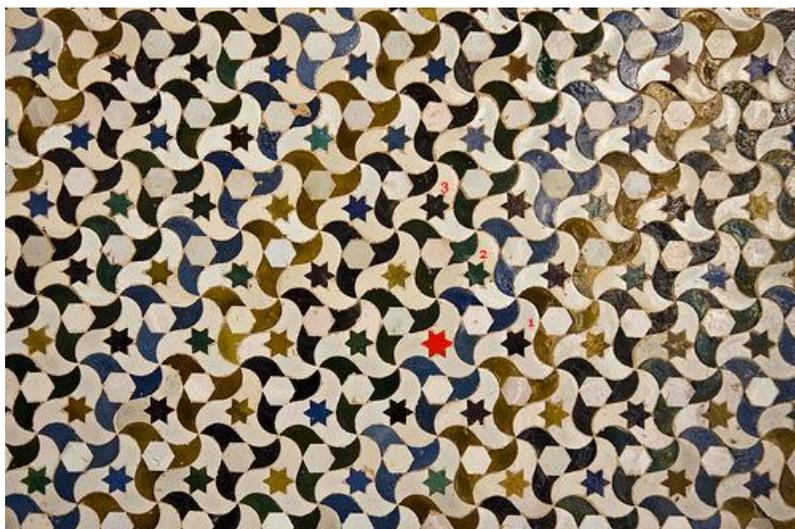


Figura 5. Mosaico del Palacio de Comares.

Fuente: <http://somosloquesabemos.blogspot.com.es/2010/04/matematicas-en-la-alhambra.html>

### Contenidos

Identificar y aplicar translaciones en el plano. Utilización del Geogebra para trabajar las translaciones.

### Agrupamientos

La actividad se desarrollará por parejas. Se llevará a cabo en el aula en el caso de disponer de ordenadores portátil o en el aula de informática en caso contrario.

### Desarrollo

Se presenta a los alumnos, en la pizarra digital, el concepto general de transformaciones isométricas y se explican las características de la translación (vector, dirección, sentido y figuras homólogas).

Se facilita a los alumnos la imagen del mosaico del Palacio de Comares y la imagen de figura de la pajarita para que realicen los siguientes puntos mediante el uso de Geogebra:

Mosaico del Palacio de Comares (véase Figura 5)

- Indica los vectores de traslación entre la estrella coloreada y las estrellas numeradas (figuras homólogas).
- Define en la imagen los siguientes vectores:
  - Un vector con la misma dirección y sentido que los vectores determinados en el apartado anterior.
  - Un vector con la misma dirección pero sentido contrario a los vectores del apartado anterior.
  - Un vector con diferente dirección.

Pajarita (véase Figura 6, donde se muestra el trabajo con Geogebra de la segunda parte de la actividad "De un lado a otro"):

- Traslada la pajarita según los vectores indicados. Las coordenadas del punto B de la pajarita son (6,2).
- Determina el vector de translación sabiendo que el punto C' de la figura homóloga es (12,8).

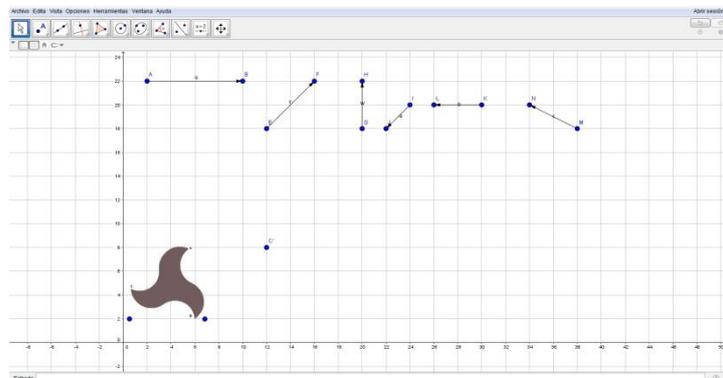


Figura 6. Actividad "De un lado a otro" en Geogebra.

Fuente: Elaboración propia.

Los alumnos entregarán un documento por pareja. Los informes se distribuirán aleatoriamente entre los alumnos para que sean evaluados por ellos mismos, a modo de coevaluación, aprendiendo de los procesos de sus compañeros, mientras se exponen de manera grupal los resultados y reflexiones obtenidas. Para facilitar este proceso, los alumnos dispondrán de una rúbrica (véase Anexo 1) con los elementos a evaluar. Se tendrá en cuenta el informe entregado, la coevaluación realizada así como las anotaciones tomadas por el profesor en el diario de observación durante el transcurso de la actividad.

#### **04. Simetrías**

La actividad pretende trabajar el concepto de simetría distinguiendo entre la simetría central y axial.

##### Recursos

Imagen mosaico nazarí (véase Figura 7), planta del complejo arquitectónico (véase Figura 8), Geogebra, ordenador portátil y rúbrica de evaluación (véase Anexo 1).

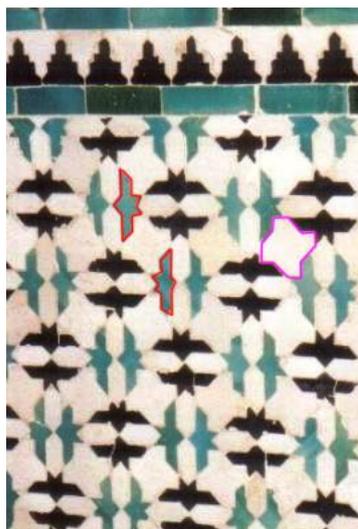


Figura 7. Mosaico nazarí de la Alhambra.

Fuente:

[http://maticasmundo.ftp.catedu.es/FOTOGRAFIAS/fotografia\\_mosaicos\\_alhambra.htm](http://maticasmundo.ftp.catedu.es/FOTOGRAFIAS/fotografia_mosaicos_alhambra.htm)

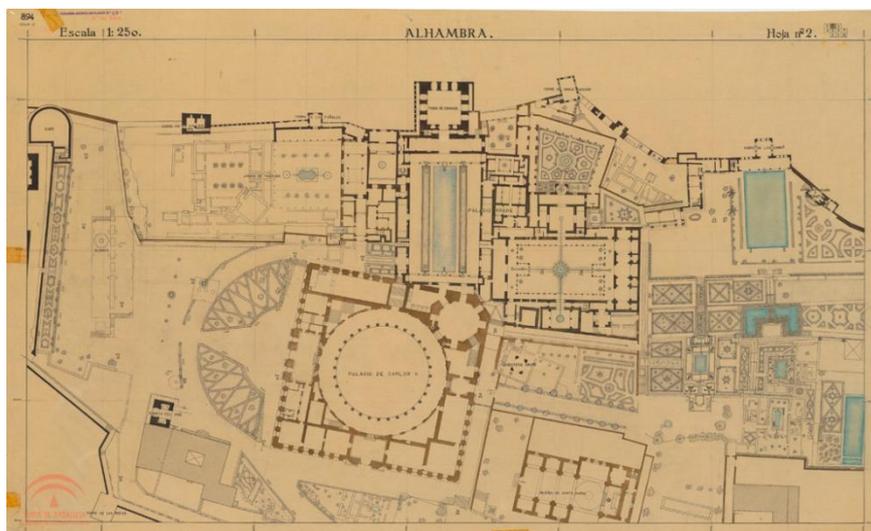


Figura 8. Plano general de la Alhambra. Hoja nº 2. Sector Plaza de los Aljibes a Jardines del Partal.

Fuente: Patronato de la Alhambra y Generalife, 1948.

## Contenidos

Identificar y aplicar simetrías en el plano. Utilización del Geogebra para trabajar las simetrías.

## Agrupamientos

La actividad se desarrollará por parejas. Se llevará a cabo en el aula en el caso de disponer de ordenadores portátil suficientes o en el aula de informática en caso contrario.

## Desarrollo

Se presenta a los alumnos, en la pizarra digital, los conceptos de simetría central y axial. (vector, dirección, sentido y figuras homólogas).

Se facilita a los alumnos la imagen del mosaico nazarí (véase Figura 7) para que mediante el uso de Geogebra determinen:

- El centro de la simetría central que origina los motivos marcadas en rojo.
- Si existe un centro de simetría en el motivo morado. Es necesario que justifiquen la respuesta.

Seguidamente se les facilita un plano del complejo arquitectónico de la Alhambra (véase Figura 8) en el que deberán señalar las simetrías axiales de los distintos escenarios arquitectónicos. Se complementará con una imagen buscada en internet que muestre la existencia de tal simetría en la realidad. Se valorará que trabajen las simetrías en planta y con las imágenes de las fachadas. Por ejemplo, en el Palacio de Comares (véase Figura 9) al trabajar en fachada aparece una nueva simetría por el reflejo del agua.



*Figura 9.* Patio de los Arrayanes.

Fuente: Patronato de la Alhambra y Generalife.

Los alumnos entregarán un documento por pareja. Se expondrán de manera grupal los resultados y reflexiones obtenidos. Los propios alumnos evaluarán su informe, a modo de autoevaluación, anotando en caso de ser necesario las modificaciones precisas para que tomen conciencia de su propio aprendizaje y las oportunidades de mejora. Para facilitar este proceso, los alumnos dispondrán de una rúbrica (véase Anexo 1) con los elementos a evaluar. Se tendrá en cuenta el informe entregado, la autoevaluación realizada así como las anotaciones tomadas por el profesor en el diario de observación durante el transcurso de la actividad.

### ***05. Rotando y cambiando***

La actividad trabaja el concepto de rotación y el de semejanza, en el que se repasa la aplicación del teorema de Tales.

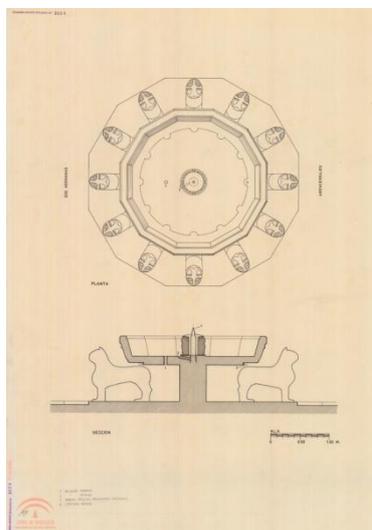
#### **Recursos**

Imagen del mosaico de la Sala de los Embajadores del Palacio de Comares (véase Figura 10), plano de la Fuente de los Leones (véase Figura 11), imagen de la cúpula de la Sala de Dos Hermanas (véase Figura 12), planos de la Torre de Comares y el Patio de Arrayanes (véase Figura 13), aplicación Geogebra, pizarra digital y rúbrica de evaluación (véase Anexo 1).



*Figura 10.* Mosaico de la Sala de los Embajadores del Palacio de Comares.

Fuente: <http://matemolivares.blogia.com/2013/011801-la-alhambra-la-mas-bella-joya-geometrica-y-arquitectonica..php>



*Figura 11.* Alhambra. Estudio de la Fuente de los Leones. Planta y sección de la fuente.

Fuente: Patronato de la Alhambra y el Generalife.

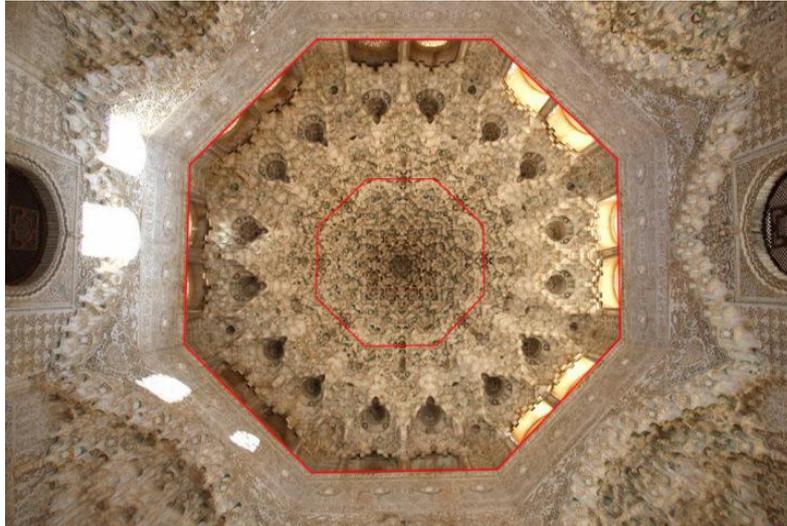


Figura 12. Cúpula de la Sala de Dos Hermanas.

Fuente: [http://2.bp.blogspot.com/-b-28obcMARY/Uw49-IQ2QQI/AAAAAAAAADg/AA\\_7Xn3exuk/s1600/arte4.jpg](http://2.bp.blogspot.com/-b-28obcMARY/Uw49-IQ2QQI/AAAAAAAAADg/AA_7Xn3exuk/s1600/arte4.jpg)

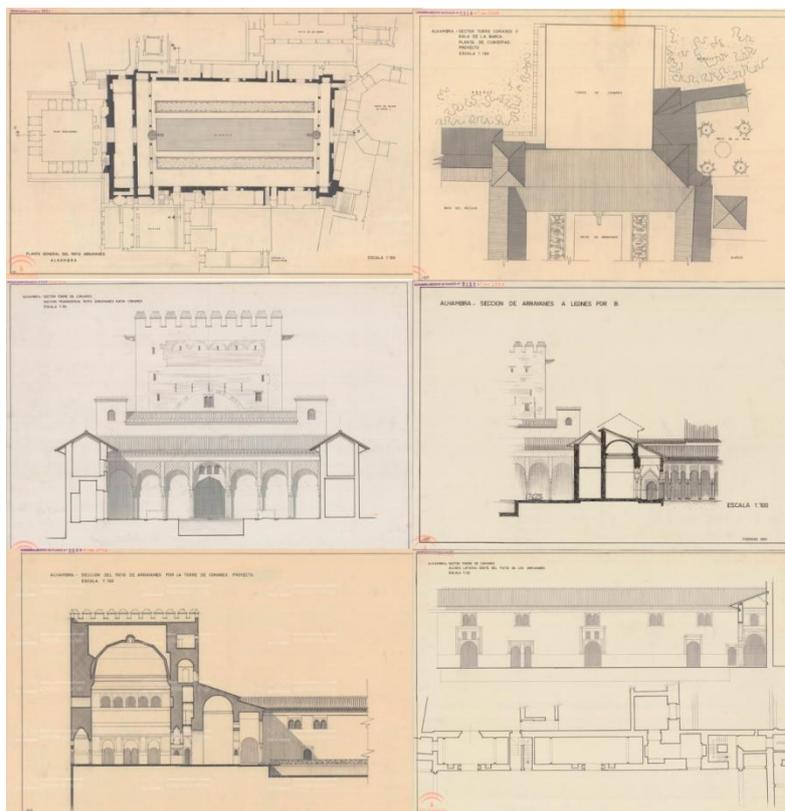


Figura 13. Planta, alzados y secciones de la Torre de Comares y el Patio de Arrayanes.

Fuente: Patronato de la Alhambra y Generalife

### Contenidos

Identificar y aplicar giros en el plano. Utilización del Geogebra para trabajar los giros.

Identificar y aplicar semejanzas. Utilización de escalas gráficas.

### Agrupamientos

La actividad se desarrollará por parejas. Se llevará a cabo en el aula en el caso de disponer de ordenadores portátil suficientes o en el aula de informática en caso contrario. La última parte de la actividad se llevará a cabo en grupos de 4 o 5 estudiantes, en el aula y en el aula de plástica.

### Desarrollo

Se presenta a los alumnos, en la pizarra digital, los conceptos de giro y semejanza en el plano. Se repasa la aplicación del teorema de Tales para la construcción y resolución de figuras semejantes. Se facilita a los alumnos la imagen del mosaico nazarí del Palacio de Comares (véase Figura 10) para que mediante el uso de Geogebra determinen a partir del punto central (centro de rotación) del cuadrilátero:

- Los giros necesarios y el ángulo de éstos para la construcción de la estrella de ocho puntas a partir de la figura inicial.
- El ángulo de giro para la transformación de las estrellas.
- El ángulo de giro para la transformación de las flechas independientemente del color.
- El ángulo de giro para la transformación de las flechas según el color de cada una.

A continuación, resolverán las siguientes cuestiones a partir del plano de la Fuente de los Leones (véase Figura 11):

- Determina el ángulo de giro para el diseño de la posición de los leones.
- Teniendo en cuenta la escala gráfica del plano, determina el perímetro real y el área del dodecágono que configura la fuente.
- Si tuviéramos que dibujar un plano de esta fuente a escala 1:500, cuánto mediría el lado del polígono? Y a escala 1:200?

Seguidamente resolverán la siguiente cuestión sobre semejanza a partir de la imagen de la cúpula de la Sala de Dos Hermanas:

- Determina la razón de semejanza entre los dos octágonos sabiendo que:
  - La anchura de la Sala es de 7,25 m.
  - El lado del octágono mayor mide 3m.
  - El área del octágono menor es de 7,55 m<sup>2</sup>.
  - El perímetro del octágono menor es de 9,6m.

Por último, se les presentarán los planos correspondientes a la planta, alzados y secciones de la Torre de Comares y el Patio de Arrayanes. Los alumnos formarán grupos de cuatro o 5 estudiantes. Deberán tomar las medidas correspondientes y

planificar la construcción de una maqueta a escala 1:100 que se trabajará conjuntamente con las asignaturas de tecnología y artes plásticas.

Los alumnos entregarán un documento por pareja. Los informes se distribuirán aleatoriamente entre los alumnos para que sean evaluados por ellos mismos, a modo de coevaluación, aprendiendo de los procesos de sus compañeros, mientras se exponen de manera grupal los resultados y reflexiones obtenidas. Para facilitar este proceso, los alumnos dispondrán de una rúbrica (véase Anexo 1) con los elementos a evaluar. Se tendrá en cuenta el informe entregado, la coevaluación realizada así como las anotaciones tomadas por el profesor en el diario de observación durante el transcurso de la actividad.

### ***06. Artistas por un día***

Durante esta actividad se pretende que los alumnos utilicen todos los recursos y conocimientos adquiridos en las actividades anteriores.

#### Recursos

Imagen del mosaico nazari del Mexuar (véase Figura 14), aplicación Geogebra, pizarra digital y el vídeo "La geometría se hace arte" (Fuente: <https://www.youtube.com/watch?v=fiDfFR1o8U>).



*Figura 14.* Mosaico nazari del Mexuar.

Fuente: <https://hiveminer.com/Tags/alhambra,mosaico>

#### Contenidos

Identificar y aplicar los movimientos en el plano. Utilización del Geogebra para trabajar los giros.

#### Agrupamientos

La actividad se desarrollará en grupos de cuatro la primera parte de análisis y individualmente la segunda parte de creación. Se llevará a cabo en el aula en el caso

de disponer de ordenadores portátil suficientes o en el aula de informática en caso contrario. La última parte de la actividad se llevará a cabo en el aula y en el aula de plástica.

### Desarrollo

Antes de dar lugar a las actividades de consolidación, se destinará el inicio de la clase a repasar las dudas que puedan tener los alumnos para que puedan subsanarlas y enfrentarse de manera idónea a las actividades planteadas.

Seguidamente, se les mostrará el video de "La geometría se hace arte" donde se explica el sistema de composición de los mosaicos y la estructuración modular de los motivos, ya utilizados durante el transcurso de la unidad. El video introduce también la figura de Maurtis Escher, artista holandés influenciado por el arte y la matemática de la Alhambra tras sus visitas al complejo.

Una vez finalizado la visualización del video se propone a los alumnos dos actividades:

- Realizar un análisis geométrico completo del mosaico del Mexuar (véase Figura 14), que estudie tanto las figuras utilizadas y como los movimientos aplicados mediante el uso del Geogebra.
- Crear un mosaico utilizando los recursos aprendidos en la unidad. Deberán entregar un informe detallado de todas las transformaciones necesarias para el desarrollo de la estructura diseñada. El uso del Geogebra facilitará la composición del mosaico. Durante la asignatura de artes plásticas, el alumno dará vida a su creación con la técnica artística que crea más conveniente y se ajuste a la materialización de su idea.

Los alumnos deberán entregar un informe individualizado en ambos casos. Se evaluará el trabajo mediante heteroevaluación. La creación propia se evaluará desde las dos asignaturas.

### **Evaluación**

En esta parte del trabajo se presenta la evaluación de la unidad didáctica desde una doble vertiente. Por un lado, se determinan los criterios e instrumentos de evaluación que permitirán valorar el proceso de aprendizaje de los estudiantes que desarrollan la unidad didáctica y por el otro se reflexiona sobre la necesidad de una evaluación sobre la práctica educativa como ocasión de mejoría para el proceso de enseñanza.

### ***Evaluación del estudiante***

La evaluación se llevará a cabo a partir de los criterios y estándares de aprendizaje fijados para los diferentes contenidos de la unidad didáctica. Los criterios se han definido en consonancia a lo establecido por el *Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'Educació Secundària Obligatòria*.

A continuació se enumeran dichos criterios:

- Reconoce las aportaciones arábigas a las matemáticas y su importancia en el desarrollo matemático.
- Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseño cotidianos u obras de arte.
- Reconoce figuras semejantes y utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.
- Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.
- Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos en el plano.
- Analiza, diseña y recrea entornos u objetos geométricos para comprender las propiedades geométricas.
- Identifica y comprende los fenómenos geométricos presentes en diseños cotidianos u obras de arte.
- Utiliza los medios tecnológicos para estructurar y mejorar sus procesos de aprendizaje.
- Planifica y utiliza procesos de razonamiento matemático y estrategias de resolución y justificación.
- Expresa verbal y oralmente, razonamientos e informaciones matemáticas utilizando el lenguaje matemático de manera precisa.
- Analiza y evalúa las estrategias y el pensamiento matemático de los demás mediante el trabajo cooperativo o la puesta en común con todo el grupo.

La evaluación para determinar el nivel de logro de los objetivos se desarrollará en tres formatos distintos:

- Evaluación inicial: pretende determinar los conocimientos previos de los alumnos referentes a los contenidos a desarrollar en la unidad didáctica, por lo tanto no será computable. sino que únicamente pretende informar y contextualizar los conocimientos de cada alumno para adaptar la metodología y la práctica.
- Evaluación formativa: Se llevará a cabo durante todo el transcurso de la unidad didáctica. Se emplea para obtener información sobre el nivel de

comprensión de los estudiantes, de su evolución y de su progreso. La información obtenida debe considerarse una guía para reforzar, ajustar y dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje teniendo en cuenta los logros y dificultades de los alumnos y así establecer una estrategia adecuada para ofrecer oportunidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje que aseguren el dominio de un nivel de aprendizaje concreto.

- Evaluación sumativa: Se emplea para dictaminar información a los profesores y los propios alumnos sobre el nivel de logro en un contenido de aprendizaje concreto. Se evalúa el aprendizaje del estudiante comparando sus resultados con un estándar, se califica en función de de un rendimiento, otorgando una certificación.

A continuación se presenta la rúbrica de las actividades propuestas y los instrumentos de evaluación previstos (véase Tabla 13) para determinar el grado de consecución de los objetivos y las habilidades competenciales:

**Tabla 13**

*Rúbrica de evaluación*

ACTIVIDAD	INSTRUMENTO	% CALIFICACIÓN
Un poco de historia	Diario de observación: 15% Documento grupal: 85 %	5 %
Punto de partida	Diario de observación Documento individual	No computable
De un lado a otro	Diario de observación: 15% Documento grupal: 75% Coevaluación: 10%	15%
Simetrías	Diario de observación: 15% Documento individual: 75% Autoevaluación: 10%	15%
Rotando y cambiando	Diario de observación: 15% Documento grupal: 60% Maqueta: 15% Coevaluación: 10%	15 %
Artistas por un día	Diario de observación: 15% Documento grupal: 30% Documento individual: 35% Creación propia: 15%	25%
Actitud	Diario de observación: 100%	25%

Fuente: Elaboración propia

La evaluación de la maqueta y la creación propia de un mosaico se valorarán en colaboración con la asignatura de Artes Plásticas.

### ***Evaluación de la propuesta***

La evaluación de la propuesta didáctica debe ofrecer al profesorado la oportunidad de reflexionar sobre la práctica educativa y mejorar las estrategias adoptadas en el proceso de enseñanza.

La práctica educativa lleva implícitos en su proceso diversos aspectos organizativos y didácticos como la interacción entre los agentes participantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje y el clima generado en el aula, la organización tanto de los recursos materiales como de los agrupamientos, las actividades propuestas en relación al logro de los objetivos establecidos, la temporización de las sesiones, la metodología o los instrumentos de evaluación diseñados. Valorar la idoneidad de la propia práctica docente permitirá razonar sobre las estrategias necesarias para ajustarse a las necesidades de aprendizaje de los alumnos y favorecer la reflexión sobre las dificultades y problemas de la práctica docente.

Para este proceso de mejora es importante favorecer la participación reflexiva del docente de manera individual y colectiva, teniendo en cuenta las aportaciones de los componentes del departamento didáctico y del claustro de profesores. Los alumnos, como protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje, también deben manifestar sus opiniones e impresiones sobre la práctica docente, siempre en pro del beneficio y oportunidad de mejora del proceso.

Los instrumentos de evaluación deben facilitar una evaluación continua del proceso. Es conveniente que se apliquen de manera regular, por lo que llevarla a cabo después de la unidad didáctica ofrecerá fiabilidad en los resultados al no verse influidos por otras experiencias didácticas posteriores.

Los cuestionarios de evaluación con indicadores determinados que evalúan diferentes aspectos con el fin de enriquecer la unidad didáctica y el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, realizados por alumnos y docentes, son un instrumento adecuado para valoración del proceso. La realización de una matriz DAFO realizada por el docente responsable de la implementación, donde se analicen las debilidades y fortalezas internas y las amenazas y oportunidades externas, permitirá reflexionar sobre la idoneidad de las estrategias utilizadas y adaptarlas para lograr una mejora del proceso.

A continuación se presenta la matriz DAFO (véase Figura 15) referente a la unidad didáctica desarrollada en el presente trabajo:

<p style="text-align: center;"><b>DEBILIDADES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Falta de recursos TIC en el Aula</li> <li>• Secuenciación poco flexible</li> <li>• Inexperiencia del alumnado en coevaluación y autoevaluación</li> </ul>	<p style="text-align: center;"><b>AMENZAS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Falta de coordinación entre el profesorado del centro</li> <li>• Falta de formación TIC del profesorado</li> <li>• Leyes de educación cambiantes</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>FORTALEZAS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Proyecto interdisciplinar</li> <li>• Práctica docente contextualizada y significativa</li> <li>• Metodología activa</li> <li>• Motivación del alumnado ante nuevas propuestas educativas</li> <li>• Uso de herramientas TIC</li> </ul>	<p style="text-align: center;"><b>OPORTUNIDADES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Implantación de nuevas metodologías y recursos en el aula</li> <li>• Concienciar al alumnado de la importancia de las matemáticas para comprender el entorno</li> <li>• Trabajo colaborativo entre departamentos</li> </ul>

Figura 15. Matriz DAFO.

Fuente: Elaboración propia

La unidad didáctica planteada propone un proyecto interdisciplinar que fomente en los alumnos un aprendizaje significativo de la geometría para favorecer la comprensión del mundo real y físico que nos rodea. La interdisciplinariedad planteada conlleva la necesidad de una actitud colaborativa entre los diferentes departamentos en favor de una organización y programación adecuados de los objetivos del proyecto. La metodología propuesta, con actividades contextualizadas en el arte y arquitectura de la Alhambra de Granada, junto con la integración de las TIC en el aula pretende motivar al alumnado y promover una actitud activa en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las conceptos matemáticos.

Atendiendo a las debilidades y amenazas de la unidad planteada, las actividades diseñadas requieren de recursos TIC para su desarrollo, por lo que la falta de recursos tecnológicos del centro podría requerir un reajuste de la programación expuesta en cuanto a agrupamientos o metodología a seguir. Del mismo modo será necesario que el grupo docente tenga la formación y habilidades necesarias para desarrollar de manera adecuada y/o una actitud participativa frente a la formación en nuevas metodologías. Las diferentes tipologías de evaluación planteadas, coevaluación y autoevaluación, pretenden inducir la oportunidad de aprendizaje que surge ante el error. La disposición y actitud del alumno ante esta oportunidad y la orientación del docente en la realización de las evaluaciones será fundamental para lograr la mejora en la estructura de conocimiento adquirida. Finalmente, la programación diseñada presenta un carácter compacto, donde la implementación de la misma daría información sobre los ajustes temporales necesarios para poder desarrollar adecuadamente la totalidad de las actividades y contenidos propuestos.

## Conclusiones

El desarrollo del presente trabajo ha estado enmarcado por la consecución de los objetivos, específicos y principal, definidos al principio del mismo. A continuación se exponen las conclusiones obtenidas durante el transcurso de realización de este documento, motivado en el logro de éstos.

El primer objetivo pretendía analizar la situación de la enseñanza en secundaria de las matemáticas, centrándose en el ámbito de la geometría o del espacio y forma. El análisis del informe internacional PISA referido al ámbito matemático, así como el informe autonómico catalán de la Prueba de Evaluación de Secundaria, ponen de manifiesto los deficientes resultados obtenidos por los estudiantes españoles y catalanes participantes con respecto al rendimiento académico en su formación matemática. El promedio obtenido por la muestra de estudiantes españoles se mantiene por debajo de la media de la OCDE y de la UE, corroborando una tendencia inmóvil en ese aspecto desde los últimos informes, aun habiendo aumentado su promedio paulatinamente. Cabe mencionar, que en las últimas pruebas PISA, en el año 2015, los alumnos pertenecientes a la comunidad catalana superaron significativamente el promedio de la OCDE, sin embargo disminuyeron puntualmente los resultados de la prueba autonómica. Los resultados obtenidos, sin embargo, ratifican la necesidad de un cambio estratégico y metodológico para afianzar la mejora en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Centrándonos en el bloque de espacio y forma, los informes muestran como en esta dimensión los alumnos consiguen los peores resultados, situándose lejos de los objetivos previstos para la consecución de unas competencias y habilidades matemáticas adecuadas.

El segundo objetivo específico perseguía el análisis de las dificultades y mejoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en base a experiencias previas. El estudio abordado de diferentes artículos y libros, ratifica la necesidad de un redireccionamiento de los procesos de enseñanza hacia la consecución de una educación geométrica contextualizada y significativa que facilite al alumno la adquisición de competencias, habilidades y destrezas que les permitan comprender y relacionarse con el mundo real con una actitud crítica y creativa. El nuevo rumbo debe centrarse en una visión constructivista en la que el alumno mantenga una actitud activa frente al proceso de aprendizaje. El docente debe responder a un nuevo rol, actuando como guía en el proceso, facilitando situaciones que motiven y potencien el desarrollo del educando. La incorporación de las TIC en el Aula, facilita el aprendizaje significativo al enfocar la geometría desde una perspectiva dinámica

que permite visualizar, explorar y manipular los fenómenos matemáticos y abstractos. Los errores, presentes en los procesos de construcción del conocimiento, también adquieren una nueva dimensión al ser entendidos como una oportunidad de mejora de los estudiantes y de reflexión para los docentes, en pro de una reorganización de las estrategias y metodologías para desarrollar un aprendizaje significativo.

El tercer objetivo específico pretendía seleccionar y describir los contenidos curriculares referentes al bloque de geometría para 3º de la ESO. Para el desarrollo de este objetivo se ha tenido en cuenta la legislación vigente, estatal y autonómica, que interviene en la definición curricular: el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre y el *Decret 187/2015*, de 25 de agosto. El mentado objetivo está íntimamente ligado con el cuarto, que proponía la utilización de elementos de la arquitectura y el arte islámicos de la Alhambra como recurso didáctico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Las características artísticas del complejo arquitectónico concordaban intrínsecamente con los contenidos de movimientos en el plano definidos en el currículo. El uso de actividades interdisciplinares que enfatizan la relación de la geometría con el mundo que habitamos favorece un aprendizaje significativo y despiertan el interés del alumnado por la adquisición de conocimientos matemáticos. Como hemos citado anteriormente, la contextualización de los conocimientos abstractos de la geometría agiliza y facilita la asimilación de éstos al permitir una aplicación real de los procesos matemáticos mediante actividades de observación indirecta o directa y creaciones artísticas. La disciplina artística aporta una interdisciplinariedad a la dimensión matemática, permitiendo al alumnado conocer la incidencia y la importancia de la competencia en conciencia y expresiones culturales como vehículo de enriquecimiento y desarrollo personal y creativo.

El logro de los cuatro objetivos específicos sostiene y reafirma la consecución del objetivo principal del trabajo que ansiaba diseñar una propuesta didáctica basada en la arquitectura y el arte de la Alhambra para trabajar los contenidos de geometría en el nivel de 3º de la ESO. La propuesta está fundamentada en las oportunidades y herramientas que ofrece la arquitectura y el arte para enseñar geometría, así como en un diseño contextualizado y significativo que facilite el desarrollo de las destrezas matemáticas y geométricas en el alumnado.

## **Limitaciones y prospectiva**

El diseño de la unidad didáctica propuesta es en primera instancia adecuada para la enseñanza del bloque de geometría de 3º de la ESO. Sin embargo, la no implementación de la unidad en el aula relega la propuesta hacia un fundamento teórico complementado con una mínima experiencia docente desarrollada durante el período de prácticas del presente Máster de Formación de Profesorado.

La puesta en marcha de esta unidad didáctica permitiría percibir desde una experiencia real la idoneidad de la propuesta así como las oportunidades de mejora en la adecuación de las actividades, contenidos y materiales propuestos para su desarrollo. La evaluación de la propuesta didáctica por parte del profesorado y de los alumnos devendría un instrumento de reflexión adecuado para la adaptación de la metodología y de las estrategias propuestas en consonancia a las necesidades presentes en un contexto auténtico de aprendizaje.

La concreción temática necesaria para el desarrollo del trabajo ha limitado la investigación y diseño didáctico a unos contenidos curriculares específicos, por lo que queda patente el amplio abanico de contenidos y niveles sobre los que sería interesante explorar la idoneidad del uso de la arquitectura y el arte como recurso didáctico en pro de un aprendizaje significativo. La futura línea de investigación debería además de intentar aplicarse a no sólo al bloque de geometría, sino al resto de bloques que conforman la competencia matemática.

De la misma manera que los contenidos se han visto limitados, la propuesta se ciñe únicamente a un único complejo arquitectónico y artístico. La búsqueda de otros referentes culturales, que permitan ampliar la interdisciplinariedad en la formación continua del alumnado es también una dimensión prospectiva que se podría abordar.

En el presente trabajo que nos atiende, en el marco autonómico de *Catalunya*, la visita al complejo de la Alhambra ha supuesto una limitación al requerir ciertos recursos económicos no asequibles para todo el tipo de alumnado. El diseño de una práctica de observación directa, en la que los alumnos puedan relacionarse en primera persona con los elementos culturales utilizados como recurso o espacio didáctico en el aula ofrecería otra oportunidad significativa para fomentar el interés y motivación de los alumnos.

## Referencias bibliográficas

- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Alsina, C. (2005). Los secretos geométricos en diseño y arquitectura. *Horizontes matemáticos. Servicio de Publicaciones de la Universidad de la Laguna*. Recuperado de <http://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3lp/3/calsina.pdf>.
- Arrieta, M. (1992). Bases para un planteamiento actual de la Geometría en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (10), 9-14.
- Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto. Revista de Educación*, 27(1), 55-71.
- Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, 8(1), 25-42.
- Barrantes, M., Balletbo, I. y Fernández, M. (2014). Enseñar geometría en secundaria. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Buenos Aires, Argentina. Recuperado de: [www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/54.pdf](http://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/54.pdf)
- Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M.P., Margarit, J.B., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.
- Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu (2016). *L'avaluació de quart d'ESO 2016. Quaderns d'Avaluació*, 34. Catalunya: Departament d'Ensenyament.
- Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'Educació Secundària Obligatoria. Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, 6945, de 28 de agosto de 2015. Catalunya.
- Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: Mcgraw-hill.
- Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Boletín de la SOAREM*, 6, 23-32.

- Gamboa, R, y Ballester, E. (2010) La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, 14(2), 125-142.
- Gámiz, A. (2016). Entre paisaje y formas arquitectónicas. La Alhambra nazarí. *Arte y ciudad. Revista de Investigación*, (9), 135-154.
- Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la Geometría. *Revista Ema*, 2(1), 49-58.
- García-Valcárcel, A. y González, A. D. (2011). Integración de las TIC en la práctica escolar y selección de recursos en dos áreas clave: lengua y matemática. *La práctica educativa en la Sociedad de la Información. Innovación a través de la investigación. La pratica educativa nella Società dell'Informazione. L'innovazione attraverso la ricerca* (pp. 129-144). Alcoy-Brescia: Marfil & La Scuola Editrice.
- Gómez-Chacón, I. M., Op't Eynde, P. y De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 24(3), 309-324.
- González, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, (45), 17-28.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 55-70.
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (EDS), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). Boletín Oficial del Estado 295, de 10 de diciembre de 2013, 97858-97921. España.
- Morales, A. y Camacho, M. (1994). Algunas características del Currículum de Geometría en la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Sugerencias didácticas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, (21), 83-94.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2016). *PISA 2015. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.
- Orden ECD/65/2015 de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación

- primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato*. Boletín Oficial del Estado 25, de 29 de enero de 2015, 6986-7003. España.
- Pérez, R. (2004). Un matemático pasea por la Alhambra. *Número, formas y volúmenes en el entorno del niño*, (pp. 81-94). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ramírez, M. S. y Burgos, J. V. (2012). *Movimiento Educativo Abierto: Acceso, colaboración y movilización de recursos educativos abiertos*. México: Lulu.com.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, *por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado 3, de 3 de enero de 2015, 169-546. España.
- Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. *Epsilon*, 38, 185-198.
- Rodríguez, R. y Zuazua, E. (2002). Enseñar y aprender matemáticas. *Revista de Educación*, (329), 239-256.
- Vallejo, F. (2011). Las matemáticas en el arte: su didáctica. *Revista Digital Ciencia y Didáctica*, 50, 73-83.
- Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.

## Anexos

### Anexo 1: Rúbrica de evaluación

Actividad: Estudiante/s evaluador/es:

Estudiante/s evaluado/s:

CATEGORÍAS	4	3	2	1
Presentación y orden	El trabajo sigue el guión explicado. Presentación clara y ordenada.	El trabajo sigue parcialmente el guión explicado. Presentación generalmente organizada.	El trabajo se aleja del guión explicado. Presentación poco organizada.	El trabajo no cumple el guión explicado. Presentación desorganizada.
Desarrollo de los contenidos	El trabajo afronta todos los contenidos planteados.	El trabajo descuida algunos aspectos planteados.	El trabajo descuida aspectos importantes de la actividad.	El trabajo no afronta los contenidos planteados.
Estrategia de resolución	El trabajo presenta una estrategia eficaz en la resolución planteada.	El trabajo presenta generalmente una estrategia eficaz en la resolución planteada.	El trabajo presenta una estrategia eficaz en algunos apartados.	El trabajo no presenta una estrategia efectiva en la resolución planteada.
Cumplimiento de los objetivos	Los objetivos planteados se logran correctamente.	Los objetivos planteados se logran parcialmente.	Los objetivos planteados se logran superficialmente.	Los objetivos planteados no se logran adecuadamente.
TIC	Utiliza las herramientas TIC con destreza y de manera eficaz y precisa.	Utiliza las herramientas TIC de manera adecuada y hábil.	Utiliza las herramientas TIC de manera básica, presentando algunos fallos.	Utiliza las herramientas TIC de manera incorrecta y sin coherencia.
Debate grupal	Muestra una actitud participativa y activa con intervenciones coherentes, claras y precisas.	Muestra una actitud frecuentemente participativa con intervenciones generalmente coherentes.	Muestra una actitud puntualmente participativa con intervenciones poco claras.	Muestra una actitud escasa e insuficiente de participación con intervenciones erróneas.
Trabajo en equipo (Evaluar en caso de autoevaluación)	Todos los miembros han colaborado activamente y de manera organizada.	Todos los miembros han colaborado, pero sin la misma actitud y participación.	Hay miembros del grupo que no han realizado sus tareas.	Los miembros del grupo no han colaborado entre ellos.
	YO   GRUPO	YO   GRUPO	YO   GRUPO	YO   GRUPO
Autonomía (Evaluar en caso de autoevaluación)	El grupo se ha organizado de manera autónoma.	El grupo ha necesitado la ayuda del profesor en ocasiones.	El grupo ha necesitado generalmente la ayuda y orientación del profesor.	El grupo no ha tomado la iniciativa en ningún momento.
	YO   GRUPO	YO   GRUPO	YO   GRUPO	YO   GRUPO