



**Universidad Internacional de La Rioja
Facultad de Educación**

Trabajo fin de máster

**Metodología para enseñar derivadas en
1º de Bachillerato de Ciencias, basada en
la teoría de las inteligencias múltiples de
Gardner**

Presentado por: Virginia Orcos Espinosa
Línea de investigación: Métodos pedagógicos
Director/a: Beatriz Elena Marcano Larez

Ciudad: Logroño (La Rioja)
Fecha: 6 de mayo de 2016

No existe ningún libro sin profesor, sin bibliotecario, sin documentalista. Se ha podido creer que se iba a modificar esa estructura gracias a la televisión ayer y a Internet hoy. Siempre estamos ante el mismo error: creer que la tecnología puede sustituir al hombre. Las nuevas tecnologías no tocan la muerte de los profesores, sino más bien lo contrario, el principio de su revalorización.

Dominique Wolton

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo exponer y fundamentar una metodología didáctica innovadora para enseñar *las derivadas* a los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa de Calahorra, basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner. Para ello, en el marco teórico se analiza el currículo de la asignatura atendiendo tanto a la legislación estatal como a la legislación autonómica de La Rioja. Además, se lleva a cabo una revisión de la literatura existente respecto a la enseñanza de las matemáticas, las dificultades en el aprendizaje del análisis y, por último, un breve resumen sobre la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner. A continuación se lleva a cabo un estudio de campo en el que, por una parte, se realiza un test de las inteligencias múltiples a los alumnos de este aula concreta para conocer las capacidades e intereses más desarrollados entre sus alumnos. Al mismo tiempo, se entrevista a tres profesores de matemáticas del centro para conocer su experiencia y poder proponer una metodología didáctica lo más adecuada posible para estos alumnos. Como resultado inmediato se pretende conseguir la mejora en la enseñanza-aprendizaje de las derivadas. Además, se busca mejorar la capacidad de los alumnos a la hora de resolver problemas, aumentar el trabajo cooperativo y potenciar los conocimientos matemáticos basados en la reflexión y la comprensión de los mismos, sin olvidarse del desarrollo de las siete inteligencias múltiples propuestas por Gardner.

Palabras clave: derivadas, Gardner, inteligencias múltiples, análisis, matemáticas.

Abstract

The purpose of this project is to present and support an innovative teaching methodology for the 11th grade students (1º Bachiller) in the Science branch at Santa Teresa School. This school is located in Calahorra, La Rioja, which is in the north of Spain. It is specifically focussed on the unit “derivatives” and it is based on Howard Gardner’s Theory of Multiple Intelligences. The curriculum related to this subject, taking into account both, the state and the regional legislation of La Rioja, is analysed through the theoretical frame. In the first part, a review of the literature related to the teaching of Mathematics is carried out. Moreover, a research for the difficulties students usually encounter when they try to learn the analysis part of Mathematics is conducted. Last but not least, a brief summary of Gardner’s Theory of Multiple Intelligences is described. In the second part of the project, a field study is performed. It consists of a multiple-intelligence test conducted among the students of that very class. The aim of this test is to assess the most developed skills and interests in the classroom. At the same time, three different Mathematics teachers from this educational centre are interviewed in order to be able to propose a teaching methodology as suitable as possible for these students. As a result, the intention of this project is to achieve an improvement of the learning-teaching of the unit “derivatives”. Furthermore, it is hoped that students’ ability to solve problems will improve, as well as an enhancement in team work and an increase of students’ mathematical knowledge. And not leaving out the development of the seven intelligences proposed by Gardner among the students.

Keywords: derivatives, Gardner, multiple intelligences, analysis, mathematics.

Índice de contenidos

Resumen.....	3
Índice de contenidos.....	4
Índice de tablas.....	6
Índice de figuras.....	6
1. Introducción.....	7
1.1. Presentación.....	7
1.2. Planteamiento del problema.....	8
1.3. Justificación.....	9
1.4. Objetivos.....	10
1.5. Descripción de los apartados.....	11
2. Marco teórico.....	13
2.1. Ley Orgánica de Educación (LOE, 2006).....	13
2.2. Ley Orgánica de Mejora en la Calidad Educativa (LOMCE, 2012).....	14
2.3. Diferencias principales entre LOE y LOMCE.....	16
2.4. El currículo de matemáticas de Bachillerato en la normativa estatal y en la normativa autonómica de La Rioja.....	17
2.5. La enseñanza de las matemáticas.....	18
2.5.1. Informe TIMSS.....	18
2.5.2. Informe PISA.....	18
2.5.3. Informe PIAAC.....	19
2.5.4. Informe <i>Education at a glance</i>	19
2.6. Las dificultades en el aprendizaje del análisis.....	20
2.7. La teoría de las inteligencias múltiples de Gardner.....	21
3. Propuesta de intervención para la mejora educativa.....	24
3.1. Estudio de campo.....	24
3.1.1. Análisis de la situación.....	24
3.1.2. Objetivos del trabajo de campo.....	25
3.1.3. Metodología y recursos empleados.....	26
3.1.4. Marco contextual y destinatarios.....	27
3.1.5. Resultados.....	28
3.1.6. Análisis de los resultados.....	31
3.2. Propuesta práctica.....	32
3.2.1. Introducción.....	32
3.2.2. Objetivos de la propuesta práctica.....	32
3.2.2.1. Objetivos generales del Bachillerato.....	32
3.2.2.2. Objetivos de la materia de Matemáticas.....	33

3.2.2.3. Objetivos didácticos.....	35
3.2.3. Competencias básicas o clave.....	36
3.2.4. Metodología.....	37
3.2.5. Actividades y temporalización.....	39
3.2.6. Forma de evaluación prevista.....	46
3.2.7. Recursos empleados.....	47
3.2.8. Resultados previstos.....	48
 4. Discusión.....	49
 5. Conclusiones.....	50
 6. Limitaciones del trabajo.....	52
 7. Prospectiva: líneas de acción futura.....	53
 8. Bibliografía.....	54
8.1. Referencias bibliográficas.....	54
 9. Anexos.....	56
9.1. Anexo I: Test inteligencias múltiples de Gardner.....	56
9.2. Anexo II: Resultados test de las inteligencias múltiples en el aula de 1º de Bachillerato Modalidad Ciencias.....	58
9.3. Anexo III: Entrevistas a profesores de matemáticas.....	60
9.3.1. Entrevista docente nº1.....	60
9.3.2. Entrevista docente nº2.....	62
9.3.3. Entrevista docente nº3.....	64
9.4. Anexo IV: Reglas de derivación de funciones elementales y compuestas.....	66
9.5. Anexo V: Ejemplos de actividades de cada sesión.....	67
9.5.1. Sesión 1_Búsqueda en el periódico.....	67
9.5.2. Sesión 2_Problema T.V.M. y T.V.I.....	68
9.5.3. Sesión 7_Relación entre representaciones gráficas.....	69
9.5.4. Sesión 10_Construye tu propia caja.....	70
9.5.5. Sesión 11_Problemas de optimización.....	71
9.6. Anexo VI: Trabajo individual puntuable.....	72

Índice de tablas

Tabla 1. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del Análisis en Matemáticas I de 1º Bachillerato de Ciencias.....	17
Tabla 2. Características de las inteligencias múltiples de Howard Gardner.....	23
Tabla 3. Respuestas obtenidas de las entrevistas realizadas a tres profesores de matemáticas del colegio Santa Teresa.....	29
Tabla 4. Objetivos específicos de las derivadas y sus aplicaciones de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.....	35
Tabla 5. Objetivos específicos de la metodología de enseñanza de las derivadas y sus aplicaciones en 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.....	35
Tabla 6. Objetivos y competencias de las derivadas y sus aplicaciones en 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.....	36
Tabla 7. Propuesta de actividades, materiales e instrucciones basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner.....	38
Tabla 8. Sesiones, contenidos, actividades e inteligencias relacionadas con las actividades propuestas para la UD de las derivadas de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa.....	40
Tabla 9. Porcentajes de los criterios de evaluación según la metodología propuesta.....	46
Tabla 10. Resultados de los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias encuestados del colegio Santa Teresa.....	59
Tabla 11. Resumen de los resultados obtenidos de las encuestas.....	60

Índice de figuras

Figura 1. Resultados Test de las Inteligencias Múltiples en el aula de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa de Calahorra.....	28
Figura 2. Gráfica espacio-tiempo problema T.V.M. y T.V.I.....	69
Figura 3. Gráficas de funciones y sus derivadas.....	70

1. Introducción

1.1. Presentación

Muchos autores reflejan en sus escritos la necesidad de buscar y encontrar distintas y novedosas estrategias de enseñanza que aumenten y desarrollen el rendimiento académico de los alumnos en matemáticas. Todas estas teorías y las conclusiones a las que llegan coinciden en que hoy en día es requisito indispensable hallar metodologías en las que sea el propio alumno el que participe y se involucre en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los alumnos deben presentar una actitud activa en la construcción de su propio conocimiento (Chambers y Timlim, 2013).

Como explican Jacobs, Lamb y Philipp (2010), una de las tareas relevantes para el profesor en las situaciones de enseñanza es interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes. Jacobs et al. (2010) definen esta competencia considerando tres destrezas estrechamente relacionadas:

- *Reconocer* las distintas estrategias que cada estudiante emplea en su estudio.
- *Analizar* las comprensión matemática que cada estudiante manifiesta.
- *Determinar* la mejor respuesta en base a la interpretación de lo anterior.

Para ello, se debe partir de la opinión y de las convicciones que los alumnos tienen acerca de las matemáticas y, considerando éstas como punto de partida, trabajar con distintas estrategias y metodologías para lograr cambiar su actitud y su motivación sobre dicha asignatura.

Hoy en día es posible discernir entre dos distintas y extremas visiones acerca de la concepción de las matemáticas. La primera de ellas entiende que el alumno debe adquirir una base matemática axiomática primeramente para, a posteriori, poder resolver los distintos problemas de la vida real. La otra concepción de las matemáticas es considerada como la “concepción constructivista”, ya que defiende que debe existir una relación directa entre las matemáticas y sus aplicaciones en la vida cotidiana a lo largo de todo el currículo (Godino, Batanero y Font, 2003).

La consecuencia inmediata acerca de la primera visión es que los alumnos tengan un alto nivel de respeto y miedo frente a esta asignatura, considerando las matemáticas en muchas ocasiones innecesarias para la vida cotidiana. Los estudiantes conciben las matemáticas como una materia ardua, repleta de razonamientos teóricos, desprovista de creatividad y destinada exclusivamente a lo más alumnos más inteligentes (Gómez-Chacón, 2000). De este modo, es necesario hacer ver a los alumnos una concepción distinta acerca de las matemáticas, mostrándoles el papel tan importante que juega esta asignatura para poder resolver los problemas que a menudo se presentan en la vida cotidiana (Godino, Batanero y Font, 2003).

Los profesores de matemáticas tienen en sus manos una tarea clave y fundamental en la enseñanza de esta asignatura, pues deben llevar a cabo metodologías novedosas

que permitan a los alumnos tanto la adquisición de los conocimientos propios de esta asignatura como de las competencias y habilidades fundamentales para sus vidas.

Por todo esto, la propuesta del presente trabajo va a consistir en desarrollar una metodología didáctica para enseñar uno de los temas dentro de las matemáticas de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias, concretamente el tema de las derivadas. La elección de este tema es debida a que, durante las prácticas correspondientes al máster del profesorado, se ha detectado una gran dificultad de los alumnos para comprender tanto el concepto en sí de derivada como su aplicación en la vida práctica.

1.2. Planteamiento del problema

Como muestran reconocidos estudios e informes, muchos alumnos tienen dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, tanto en la educación secundaria como en el bachillerato. Esto provoca que, en muchas ocasiones, los alumnos lleguen a cursos superiores sin llegar a haber comprendido muchos de los conceptos matemáticos básicos y necesarios para esta nueva etapa. En particular, el concepto de derivada y sus numerosas aplicaciones, constituyen una fuente constante de dificultades para los alumnos y una situación difícil de enfrentar para los profesores.

El problema principal que concierne al presente trabajo es que el motivo de estos negativos resultados es la inadecuada metodología utilizada en la mayoría de los centros de este país. Por una parte, los alumnos no son capaces de relacionar los conceptos matemáticos vistos con su aplicación en la vida cotidiana; y por otro lado, el profesor sigue siendo el protagonista, ya que los alumnos no cooperan ni participan entre ellos.

Ante este dilema se plantea la pregunta sobre si la puesta en práctica de la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner sería apropiada para enseñar las derivadas a los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias. Para ello se plantean las siguientes cuestiones:

- ¿Sería posible fomentar la inteligencia lógico matemática a través de actividades que promuevan la cooperación entre los alumnos?
- ¿Ante qué dificultades se encuentran los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias en el análisis?
- ¿Sería posible determinar los intereses y las capacidades de cada uno de los alumnos? Y con ello, ¿cuáles serían las actividades más apropiadas para desarrollar al máximo el potencial intelectual de estos?

1.3. Justificación

Los resultados de algunos estudios internacionales como el informe TIMSS de 2011 (*Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias o Trends in Mathematics and Science Study*), el informe PISA de 2012 (*Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes o Programme for International Student Assessment*) y el informe PIAAC de 2013 (*Programa Internacional para la Evaluación de las Competencias de la Población Adulta*), muestran claramente que España debe mejorar en materia de enseñanza, concretamente en matemáticas, ya que nuestro país se sitúa por debajo de la media de la OCDE. Estos resultados obtenidos invitan a la reflexión e insinúan la necesidad de investigar sobre posibles alternativas de la enseñanza matemática.

En concreto, uno de los bloques matemáticos en el que los alumnos encuentran mayores dificultades y obstáculos es el del Análisis. Esto es debido principalmente a que, para enfrentarse a este bloque, deben tenerse presentes a la vez y completamente claros mucho conceptos estudiados en cursos anteriores. Si a esto le sumamos que la metodología empleada por los docentes no ayuda a que los alumnos relacionen las definiciones y conceptos matemáticos explicados en clase con la realidad de la vida cotidiana y su utilización inmediata en la misma, esto incrementa tanto su dificultad como su falta de motivación por la asignatura.

A través de este presente trabajo se pretende realizar una propuesta metodológica para poder mejorar progresivamente el aprendizaje de los alumnos en el bloque de Análisis de las matemáticas, concretamente para el aprendizaje de las derivadas de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.

Esta memoria sugiere una metodología didáctica y novedosa basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner. La elección concreta de esta teoría se debe a que su autor, Gardner (2012, p.38) afirma que “esta teoría se organiza a la luz de orígenes biológicos de capacidad para resolver problemas”, siendo precisamente la resolución de problemas una de las finalidades fundamentales de las matemáticas, tal y como comenta Goñi (2011, 9.16).

El prototipo de escuela basado en esta teoría se fundamenta en la escuela cognitiva (mediante el estudio de la mente) y la neurociencia (mediante el estudio del cerebro), y sus objetivos principales son: el desarrollo de las distintas inteligencias, y mostrar a los alumnos sus fines vocacionales de acuerdo a su particular, único y exclusivo espectro de inteligencia. De este modo, el alumno se siente más seguro de sí mismo y, como consecuencia inmediata, más implicado y competente a la hora de realizar sus funciones de forma constructiva dentro de la sociedad (Gardner, 2012). En definitiva, si se trabajan las destrezas de cada alumno partiendo de sus propias capacidades e intereses, el proceso de aprendizaje será mucho más activo, ameno y productivo. Y esto traerá consigo la mejora inmediata del su rendimiento académico.

El modelo de la escuela ideal según Gardner (2012) se basa en dos conjeturas: la primera es que no existen dos personas iguales, y por la tanto, cada alumno posee

distintos intereses y distintas capacidades; la segunda hipótesis dice que es imposible aprender en la vida de un ser humano todas las cosas existentes en el universo. Y como consecuencia, la elección sobre el camino que tomar en la vida es necesario e inevitable. De este modo, la escuela debe centrarse en la evaluación exhaustiva de las distintas capacidades y tendencias de cada alumno individualmente, y asociar a los estudiantes con las áreas curriculares y con el modo concreto de impartir y llevar a cabo las distintas materias (Gardner, 2012).

Como consecuencia de lo expuesto en los anteriores párrafos, esta teoría se considera válida y adecuada para poder mejorar la enseñanza del análisis matemático, ya que favorece la educación personalizada, la atención a la diversidad y el desarrollo de la creatividad. Además, tiene como finalidad principal la resolución de problemas, siendo éste el primer y último objetivo de las matemáticas (Goñi, 2011).

1.4. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es:

Exponer y fundamentar una metodología didáctica innovadora para explicar el bloque de análisis “derivadas y sus aplicaciones” a los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias, basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner.

A partir del objetivo principal expuesto se derivan una serie de objetivos específicos, objetivos más concretos y minuciosos para llevar a cabo el primero. Estos son:

1. Analizar y exponer los contenidos del bloque de análisis de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.
2. Determinar y detallar las principales dificultades ante las que se encuentran los alumnos en el aprendizaje de las derivadas y sus aplicaciones durante el Bachillerato.
3. Averiguar y formular las inteligencias múltiples más desarrolladas en el aula de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias, y relacionarlas con las actividades que mejor se adecúen para la comprensión de los conceptos y de los procedimientos matemáticos por parte de estos.
4. Investigar y detallar las características de la teoría de Howard Gardner de las inteligencias múltiples para el currículo concreto de las matemáticas en Bachillerato.

1.5. Descripción de los apartados

La metodología concreta que se ha seguido para realizar este trabajo es el resultado de la combinación de una investigación bibliográfica, en virtud de la cual se pretende elaborar el marco teórico del trabajo, y de un estudio de campo. En la investigación bibliográfica se analiza detalladamente la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner y se lleva a cabo la realización de un marco teórico, en el cual se exponen tanto las características más destacadas de esta teoría como sus aplicaciones prácticas dentro del aula. En el estudio de campo, se elabora y se efectúa un test de las inteligencias múltiples de Gardner en el aula específica de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias en el colegio Santa Teresa de Calahorra. Además, se entrevista a distintos profesores de matemáticas del centro de esta etapa, para poder conocer de este modo su experiencia docente.

Finalmente, cuando sean conocidos los resultados de las encuestas, será posible determinar los intereses y las capacidades más desarrolladas de cada uno de los alumnos, así como las principales dificultades ante las que se enfrentan.

Además, se podrá observar el nivel que poseen estos alumnos en el bloque concreto del análisis matemático, lo que será determinante para establecer la propuesta más adecuada de las actividades didácticas.

La composición de este trabajo ha sido desarrollado en las siguientes etapas:

1. Primera etapa: Marco legal de las Matemáticas en Bachillerato.

En este primer nivel del trabajo se consulta y se profundiza en el currículo que todo alumno de Bachillerato debe adquirir en la asignatura de Matemáticas (concretamente en el bloque del Análisis), establecido por la actual ley de educación que afecta a este curso, la LOMCE (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre de 2013, para la Mejora de la Calidad Educativa).

2. Segunda etapa: Estudio del marco teórico.

En esta segunda etapa se investiga sobre las dificultades ante las que se enfrentan los alumnos a la hora de aprender el concepto de derivada en un punto. Además, se consultan distintos informes para poder conocer cuál es su nivel de conocimiento en la asignatura de Matemáticas, así como las dificultades que tienen los docentes ante la enseñanza de la misma, y en concreto ante la enseñanza de las derivadas.

3. Tercera etapa: Estudio de campo.

En esta fase se realiza un test de las inteligencias múltiples de Howard Gardner a los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa de Calahorra. Con él se pretende conocer tanto las capacidades como los intereses de los alumnos. Los resultados de este test serán de gran ayuda a la hora de seleccionar las actividades para la propuesta metodológica, pues se desea llevar a cabo una propuesta lo más personalizada posible para estos alumnos en concreto. Por otro lado, se realizan distintas entrevistas a tres profesores de matemáticas del centro para conocer de

primera mano las dificultades de los alumnos, su nivel y la metodología que utilizan, y poder averiguar de este modo cuáles son los errores más frecuentes desde su experiencia. De este modo, se podrá realizar una propuesta lo más cercana posible a las necesidades de los alumno y del centro en sí.

4. Cuarta etapa: Propuesta práctica.

En esta fase se propone una metodología didáctica para la enseñanza de las derivadas teniendo en cuenta: los resultados del test llevado a cabo en el aula concreta, las respuestas obtenidas en las entrevistas a los profesores, las dificultades más comunes de los alumnos en el aprendizaje de las derivadas, la utilización de las TIC, y la puesta en práctica de la teoría de las inteligencias múltiples por parte de los docentes.

5. Quinta etapa: Conclusiones finales, limitaciones y posibles líneas de investigación futuras.

En la última etapa se recogen los resultados finales obtenidos tras la realización de la propuesta didáctica. Además, se comentan las limitaciones encontradas durante el proceso de elaboración del trabajo y, para concluir, se señalan posibles líneas de investigación futuras para desarrollar en trabajos posteriores.

2. Marco teórico

2.1. Ley Orgánica de Educación (LOE, 2006)

La Ley Orgánica de Educación (LOE), aprobada en mayo de 2006, aparece ante los negativos resultados de distintos estudios internacionales, y se constituye como una necesidad de reformar y renovar el sistema educativo español existente.

En esta ley se recalcan los principios y los derechos recogidos en la Constitución Española, y se defiende una nueva ley de calidad con igualdad para todos. Destaca por imprimir un carácter inclusivo de la educación.

Los objetivos principales de la LOE son: conseguir una mejora tanto de la educación como del rendimiento académico, lograr el éxito de todos los alumnos dentro de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato, incrementar la escolarización tanto en infantil como en bachillerato y en los ciclos formativos profesionales, instruir para la ciudadanía democrática, impulsar y avivar la formación educativa a lo largo de la vida, fortalecer la igualdad del sistema educativo y confluir con los países pertenecientes a la Unión Europea.

Esta ley establece además que la enseñanza básica se desarrolla a lo largo de diez años, entre los seis y los dieciséis años de edad, y se divide en dos períodos: educación primaria y educación secundaria obligatoria. Del mismo modo, plantea todos los aspectos relativos al funcionamiento y a la organización de los centros, promoviendo sus competencias y su autonomía. Destaca también la importancia de la colaboración entre familia y colegio, incentivando una mayor participación por ambas partes, alumnos y padres.

Finalmente, la LOE presta una especial atención a la figura del profesorado. Considera indispensable al cuerpo docente dentro del sistema educativo para que este funcione correctamente. Por ello, impulsa su formación permanente para poder innovarse a medida que el mundo y las nuevas tecnologías avanzan constantemente.

2.2. Ley Orgánica de Mejora en la Calidad Educativa (LOMCE, 2012)

El 28 de noviembre de 2013 fue aprobada la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), la cual fue publicada en el Boletín Oficial del Estado el 10 de diciembre de 2013 como Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre.

Esta nueva ley se considera como una modificación de la LOE (Ley Orgánica de Educación), a través de una serie de medidas que buscan mejorar las condiciones necesarias para que todos y cada uno de los alumnos puedan alcanzar y exteriorizar sus talentos individuales, así como lograr su completo desarrollo personal y profesional, siempre en base a la equidad de oportunidades.

La LOMCE intenta abordar de la mejor manera posible los problemas principales detectados en el sistema educativo español existente, con el fin último de confluir con los objetivos europeos programados para el año 2020 en materia de educación.

Los problemas más importantes detectados, según los indicadores de la OCDE, son:

Gasto público y ratios

- En España se invierte de gasto público por cada alumno al año, en educación pública, un 21% más que la OCDE y la UE.
- La ratio de alumnos por profesor es inferior que en la OCDE (10,1 en España frente a 13,7 en la OCDE).

Puntos débiles del Sistema

El porcentaje medio de titulados en educación secundaria de entre 25 y 34 años es del 65%, frente al 82% de la OCDE.

Abandono educativo a una temprana edad

El porcentaje en España es del 25,5%, mientras que en la UE es del 13,5%. Es decir, España la duplica, tan sólo siendo superada por Malta, con un 33,5%.

Paro juvenil y educación

El porcentaje de paro juvenil en España es uno de los más elevados dentro de Europa. Desde el año 2008 esta tasa ha aumentado en 11,4 puntos (entre aquellos con estudios de la ESO o inferiores) y en 4,6 (entre aquellos con educación superior).

Limitada elección de ciclos de Formación Profesional

El porcentaje de graduados en programas de Formación Profesional es del 40,8%, casi quince puntos por debajo de la media europea, que es del 53,5%.

Resultados obtenidos en pruebas internacionales

En el estudio PISA del año 2012, los alumnos españoles de 15 años obtuvieron unos resultados negativos, situándose por debajo de la media de la OCDE:

- En comprensión lectora obtuvieron 488 puntos, 8 puntos por debajo.
- En Matemáticas obtuvieron 484 puntos, 10 puntos por debajo de la media.
- En Ciencias obtuvieron 496 puntos, 5 puntos por debajo de la OCDE.

Resultados obtenidos en personas adultas

Los resultados de las personas entre los 16 y los 65 años de edad también resultaron estar por debajo de la media de la OCDE:

- En comprensión lectora obtuvieron 252 puntos, 21 puntos por debajo de la media OCDE y 19 puntos por debajo de la media UE.
- En Matemáticas obtuvieron 246 puntos, 23 puntos por debajo de la media de la OCDE y 22 puntos por debajo de la media UE.

Limitada autonomía en los centros docentes

- Según el Informe PISA de 2009: La autonomía de los centros españoles es bastante inferior a la de los promedios de la OCDE. Además, la OCDE afirma que a mayor autonomía de los centros, mejores son los resultados académicos obtenidos.
- Según el Panorama de la Educación de 2012: La capacidad de toma de decisiones dentro de los centros educativos españoles es menor que la de los promedios de la OCDE y de la UE. Esta distinción es mayor aún en los siguientes casos: la gestión del personal, la planificación y las distintas estructuras. En España, los centros educativos poseen muy pocas competencias en general.

Bajo nivel en materia de lenguas extranjeras

Según el Estudio Europeo de Competencia Lingüística de 2012, España se sitúa a la cola en cuanto al primer idioma extranjero, que es el inglés (consigue el puesto 10 de 14 países europeos). La comprensión oral es la parte donde se obtienen los peores resultados con diferencia.

Una vez vistos todos estos problemas, los objetivos principales de la LOMCE son:

- Reducir la desigualdad de exigencias y de requisitos del sistema educativo español dentro de todo su territorio.
- Reducir el porcentaje de abandono escolar temprano.
- Aumentar el porcentaje de titulaciones dentro de la educación secundaria obligatoria.
- Incrementar el nivel de conocimientos en las materias consideradas como prioritarias: lengua y matemáticas.
- Proponer y llevar a cabo objetivos claramente planificados.
- Aumentar la autonomía de los centros escolares en todos los aspectos.
- Incorporar, potenciar y hacer uso de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación).
- Incentivar la Formación Profesional.
- Mejorar y cambiar el sistema de enseñanza-aprendizaje de las lenguas extranjeras, especialmente el inglés.

2.3. Diferencias principales entre LOE y LOMCE

Podría decirse que la LOMCE no es una nueva ley como tal. Se trata más bien de una modificación de algunos artículos de la LOE.

Las diferencias generales a destacar son:

- Da una mayor importancia al nivel de cada curso.
- Crea los equipos de nivel.
- Los contenidos de las materias aumentan de nivel en cada curso.
- Varía la duración de las distintas sesiones.
- Fomenta y potencia el plurilingüismo, el uso de las TIC y el trabajo colaborativo.
- Atiende a las competencias básicas, sin nombrar los objetivos.
- La realización de las pruebas finales serán realizadas en el centro, pero serán corregidas por técnicos competentes en la materia, externos al propio centro.
- En FP básica, las subvenciones son de carácter general.
- Cada centro deberá incluir los aspectos propios del mismo centro.

Otras diferencias a destacar son:

- Los cursos de Formación Profesional básica se engloban en la educación elemental.
- Las competencias son siete en lugar de ocho, y se denominan simplemente *competencias* o *competencias clave*.
- Aparecen los estándares de aprendizaje dentro del currículo, que son concreciones de los criterios de evaluación.
- Nueva distribución de las asignaturas en: troncales, específicas y de libre configuración autonómica.
- Varían los bloques de contenido, tanto en la ESO como en Bachillerato.
- La ESO se organiza en dos ciclos. El primer ciclo consta de los cursos 1º, 2º y 3º de la ESO, y el segundo ciclo comprende tan solo el curso de 4º de la ESO.
- Repetición: durante el primer ciclo de la ESO solo se admitirá repetir una vez el mismo curso, y un máximo de dos veces durante todo el ciclo. Los alumnos del segundo ciclo (4º de la ESO), solo podrán repetir una vez, excepto si nunca se han repetido en los cursos anteriores de la ESO, que se les permitirá repetir dos veces este curso. Además, no se podrá promocionar de curso si las materias de Lengua y Matemáticas están suspensas. Sin embargo, si se tienen dos materias suspensas que no sean troncales si que se permitirá pasar de curso.
- En 3º ESO, la asignatura de matemáticas es una materia troncal de opción.
- En 4º ESO hay que elegir entre: enseñanzas aplicadas y enseñanzas académicas.
- La evaluaciones externas que se realizarán son:
 - Al finalizar 4º ESO, los alumnos tendrán que realizar una prueba diseñada por el correspondiente Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Aprobar esta prueba es indispensable para obtener el Graduado en ESO y poder cursar posteriormente el Bachillerato.
 - Al finalizar 2º de Bachillerato, los alumnos tendrán que realizar una prueba diseñada por el correspondiente Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Aprobar esta prueba es indispensable para poder obtener la titulación y acceder a la universidad.

2.4. El currículo de matemáticas de Bachillerato en la normativa estatal y en la normativa autonómica de La Rioja

Dentro del currículo de matemáticas de Bachillerato nos vamos a centrar en el bloque de Análisis, pues la propuesta didáctica está basada en el trabajo de campo llevado a cabo en el grupo de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa de Calahorra. El currículo es el mismo en ambas normativas.

Tabla 1. *Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del Análisis en Matemáticas I de 1º Bachillerato de Ciencias.*

Bloque 3. Análisis	
Contenidos	
<ul style="list-style-type: none"> - Funciones reales de variable real. - Funciones básicas: polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, raíz, trigonométricas y sus inversas, exponenciales, logarítmicas y funciones definidas a trozos. - Operaciones y composición de funciones. Función inversa. Funciones de oferta y demanda. - Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Cálculo de límites. Límites laterales. Indeterminaciones. - Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades. - Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal. - Función derivada. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena. - Representación gráfica de funciones. 	
Criterios de evaluación	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar funciones elementales, dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real, y analizar, cualitativa y cuantitativamente sus propiedades, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan. 2. Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo. 3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos. 4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global. 	
Estándares de aprendizaje evaluables	
<ol style="list-style-type: none"> 1.1. Reconoce analíticamente y gráficamente las funciones reales de variable real elementales. 1.2. Selecciona de manera adecuada y razonada ejes, unidades, dominio y escalas, y reconoce e identifica los errores de interpretación derivados de una mala elección. 1.3. Interpreta las propiedades globales y locales de las funciones, comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas concretos. 1.4. Identifica información derivada del estudio y análisis de funciones en contextos reales. 2.1. Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos y aplica los procesos para resolver indeterminaciones. 2.2. Determina la continuidad de la función en un punto a partir del estudio de su límite y del valor de la función, para extraer conclusiones en situaciones reales. 2.3. Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. 3.1. Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas. 3.2. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena. 3.3. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto. 4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis. 4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones. 	

Nota: Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del Análisis en Matemáticas I de 1º de Bachillerato de Ciencias.

Fuente: Elaboración propia a partir de la legislación vigente, la LOMCE.

2.5. La enseñanza de las matemáticas

Para abordar el estado actual de la matemáticas en España se hace referencia a tres informes publicados recientemente en los últimos años, cuyos resultados muestran el nivel de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en nuestro país con respecto a los países que forman la OCDE. Dichos informes son el informe TIMSS, del año 2011; el informe PISA, del año 2012; y el informe PIAAC, del año 2013. También se hará una breve referencia respecto al informe *Education at a Glance*, de 2015.

2.5.1. Informe TIMSS.

El informe TIMSS (*Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias o Trends in Mathematics and Science Study*) se trata de una evaluación sobre los conocimientos adquiridos en las asignaturas de matemáticas y ciencias. Es realizado cada cuatro años a los alumnos de 4º de primaria y 2º de la ESO.

La IEA (*Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo*) es el organismo encargado de llevar a cabo este informe. Está formado por agencias gubernamentales e instituciones que se dedican al estudio e investigación de los aproximadamente setenta países que componen esta asociación.

Tras los resultados obtenidos en este informe, se concluye que España se sitúa por debajo de la media de la OCDE; mientras que casi la mitad de los países que han realizado dicha evaluación se encuentran por encima de la media. Como consecuencia inmediata, se concluye que España debe mejorar en la enseñanza de esta materia.

2.5.2. Informe PISA.

El informe PISA (*Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes o Programme for International Student Assessment*) es un estudio realizado cada tres años a alumnos de 15 años, en el que se analiza, mediante una serie de pruebas estandarizadas, su rendimiento en las competencias claves: lectora, matemática y científica.

La OCDE (*Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico*) es el organismo que se encarga de llevar a cabo este estudio.

En el año 2012, los resultados de España en la competencia matemática fueron de 484 puntos frente a los 494 puntos del promedio de la OCDE. De este modo, España se situaba en el puesto número 25 de los 34 países componentes.

2.5.3. Informe PIAAC.

Al mismo tiempo que el informe PISA, se realiza otra evaluación para comprobar la realidad educativa de los países, pero esta vez dirigido a adultos de entre 16 y 65 años de edad. Este estudio denominado PIAAC (*Programa Internacional para la Evaluación de las Competencias de la Población Adulta*) nos ayuda a ver los resultados de los alumnos de Bachillerato en nuestro país.

Este estudio da una gran importancia a las matemáticas, pues evalúa competencias sumamente importantes relacionadas con esta materia. Su fin último es comprobar si las personas son capaces de relacionar toda la información recibida sobre esta materia con la realidad de la vida cotidiana, así como la disminución de sus habilidades matemáticas con el paso del tiempo.

A través este estudio se puede observar que España se encuentra a la cola de las puntuaciones medias, ya que obtiene en matemáticas 246 puntos, 23 puntos por debajo del promedio de la OCDE y 22 puntos por debajo del promedio de la Unión Europea.

2.5.4. Informe *Education at a glance*.

Por último, la OCDE presenta año tras año una amplia colección de datos estadísticos e indicadores del sistema educativo de los 34 países miembros de esta asociación. Su objetivo es poder examinar tanto la evolución de los distintos sistemas educativos como su financiación e impacto en el mundo laboral.

Este informe, denominado *Education at a Glance*, expone la realidad educativa del sistema español en relación a otros sistemas educativos. Uno de los datos que más llama la atención es la gran cantidad de tiempo invertido en la enseñanza del primer ciclo de la Educación Secundaria. Pero lo más impactante de todo es que se dedica más tiempo a la enseñanza de las matemáticas consiguiendo peores resultados. En otros países, sin embargo, invirtiendo menos tiempo se logran mejores resultados, como sucede en el caso de Japón.

Todos estos datos recopilados nos llevan a la conclusión de que el sistema educativo español debe cambiar, haciendo frente a la negativa realidad existente en estos momentos. Es preciso intentar mejorar la didáctica de enseñanza en este país si se pretende que estos resultados no se queden paralizados en el tiempo o, peor aún desciendan todavía más en los próximos años.

2.6. Las dificultades en el aprendizaje del análisis

A los estudiantes les resulta complicado adentrarse y comprender el campo conceptual del Análisis matemático. Durante más de 15 años han sido realizadas numerosas investigaciones relacionadas con este área, y todas ellas demuestran la gran dificultad de esta temática (Artigue et al. 1998). Estos estudios llevados a cabo permiten comprender mejor la naturaleza en que radican las principales dificultades encontradas por los alumnos. Además, exponen las razones de las fallidas estrategias de enseñanza que utilizan los docentes normalmente, tanto aquellas que reducen el Análisis a una serie de algoritmos, como las aproximaciones excesivamente teóricas y formales.

Los principales obstáculos que los alumnos encuentran al estudiar el Análisis matemático podemos agruparlos en tres categorías:

- Problemas asociados a la complejidad de los conceptos matemáticos básicos de este campo: los número reales, las funciones y las sucesiones. El problema está en que estos conceptos se encuentran siempre a mitad de aprendizaje cuando se comienza con la enseñanza del bloque del Análisis.
- Problemas asociados a la noción de límite, concepto principal de este campo que conviene manejar con soltura.
- Problemas asociados a la necesaria desligación con los modelos de pensamiento del cálculo algebraico.

A estos obstáculos hay que añadir que, las secuencias didácticas basadas en presentaciones sucesivas de definiciones y técnicas, y en colecciones de derivadas automáticas a modo de recetario sin ninguna justificación, suele provocar que haya “dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático” (Artigue, 1998). Es importante construir adecuadamente este concepto ya que “la construcción de un significado parcial del concepto durante los primeros años puede generarles dificultades en su desempeño en los cursos de cálculo” (Sánchez Matamoros, García, Llinares, 2008).

Algunos ejemplos de estas carencias se detectan en estudiantes que, si bien saben resolver sin ningún tipo de problemas los ejercicios de derivadas mediante la aplicación de la regla correspondiente, a la hora de trabajar con el concepto de derivada en sí (ya sea mediante su expresión gráfica o analítica), no entienden su significado (Artigue, 1998).

Para evitar estos problemas, se debería empezar por introducir las derivadas siguiendo la idea de que “una de las formas para empezar a conocer un concepto es: a través de conexiones con otros conceptos; a través de sus diversos modos de representación; y a través de conocer sus diferentes propiedades y procesos” (Harel et al., 2006). De este modo, se conectaría el lenguaje algebraico y funcional (propio del análisis) con el razonamiento aritmético y geométrico a través de su interpretación.

2.7. La teoría de las inteligencias múltiples de Gardner

Los primeros estudios del estadounidense Howard Gardner datan de 1983, con la publicación de *Frames of Mind* (Estructuras de la mente). Esta obra desemboca más adelante en su teoría sobre las inteligencias múltiples. *Frames of Mind* fue el resultado de un conjunto de estudios e investigaciones con niños y adultos que poseían daño cerebral, y cuyas capacidades relacionadas con la música y con el conocimiento de sí mismos, resultaron convertirse en fuentes de estudio tan importantes como aquellas que hasta la fecha eran detectadas y medidas mediante una serie de pruebas de cociente intelectual (CI).

El objetivo primordial de la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner era mejorar el concepto de inteligencia que se tenía hasta entonces. Esta teoría sirve para defender que no sólo poseen inteligencia aquellas personas cuyo cociente intelectual es elevado.

De acuerdo a esta premisa, Gardner y Binet (2012) pusieron en duda la fiabilidad de los test de inteligencia que se utilizaban por aquel tiempo. Afirman los siguientes:

Creo que deberíamos abandonar tanto los test como las correlaciones entre los test y, en lugar de eso, deberíamos observar fuentes de información más naturales, acerca de cómo la gente en todo el mundo desarrolla capacidades que son importantes para su modo de vida. (p. 24).

Según el propio Gardner, los test de inteligencia tan sólo sirven miden dos tipos de inteligencia: la inteligencia lingüística y la inteligencia lógico-matemática. Es por ello que pone en duda la validez de los test de inteligencia porque, según él, existen siete tipos de inteligencias, cinco más aparte de las anteriormente mencionadas. Una de las menciones que realiza Gardner (2012) sobre este tema es:

Queremos ser capaces de observar las habilidades espaciales, las habilidades personales, etcétera, específica y directamente, y no a través del prisma habitual de las inteligencias lingüística y lógico-matemática. Hasta el momento todo ha dependido indirectamente de la medición de esas habilidades. (p.28).

En su obra *Inteligencias múltiples. La teoría en práctica* (2012), Gardner distingue en un principio entre dos tipos de inteligencia: la inteligencia como habilidad para responder a las distintas cuestiones que se plantean en un test de inteligencia; y la inteligencia como habilidad para resolver los problemas de la vida cotidiana que se plantean día a día, así como para elaborar soluciones de gran importancia en un contexto cultural determinado.

La inteligencia o capacidad para abordar y resolver los problemas persigue siempre un objetivo, y para conseguirlo, debe elegir el camino más apropiado. La creación de soluciones culturales es fundamental tanto para la adquisición y la transmisión del conocimiento como para la expresión de las distintas opiniones y de los sentimientos (Gardner, 2012).

Gardner describe la facultad cognitiva del hombre como un conjunto de habilidades, talentos o capacidades mentales que el propio Gardner denomina *inteligencias*. Afirma que todo individuo posee las siete inteligencias, en mayor o menor grado, pero cada uno las combina y las desarrolla de un modo diferente. Por lo tanto, es fundamental valorar a todas las personas como poseedoras de distintas capacidades y no de una sola aptitud (Gardner, 2012).

Según Gardner (2012), todos los seres humanos conocen el mundo a través de estos siete tipos de inteligencia: lingüística, lógico-matemático, espacial, musical, cinética-corporal, interpersonal (comprensión de los demás), e intrapersonal (comprensión de nosotros mismos).

Este nuevo planteamiento que realiza Gardner implica grandes cambios en la enseñanza-aprendizaje de los centros educativos, pues hasta el momento se creía que todas las personas podían aprender las distintas materias mediante el mismo procedimiento, y que bastaba con una única metodología pedagógica para lograr el aprendizaje de todos los estudiantes.

Desde su punto de vista, “el objetivo de la escuela debería ser el de desarrollar armónicamente las inteligencias y ayudar a la gente a alcanzar los fines vocacionales y aficiones que se adecuen a su particular espectro de inteligencias” (Gardner 2012, p.30).

Una escuela centrada en el individuo tendría que ser rica en la evaluación de las capacidades y las tendencias individuales (...) El maestro entonces debería ser un especialista evaluador y su misión intentar comprender las habilidades y los intereses de sus estudiantes. Si se lograra reconocer esto, como mínimo habrá mayor oportunidad de enfrentarse a los problemas y comprometerse con el nivel de desarrollo personal y social.

De este modo se deduce que no basta con una única metodología igual para todos, sino que, para que el aprendizaje de los alumnos sea lo más provechoso posible, es necesario disponer de distintas metodologías personalizadas que se adecúen a cada uno de los alumnos. Solamente así los estudiantes se encontrarán más agusto con ellos mismos y, como consecuencia, podrán mejorar sus resultados académicos.

La metodología propuesta en el presente trabajo está basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner, ya que está considerada como instrumento idóneo para atender a la diversidad del alumnado y para poder diseñar y desarrollar actividades que respondan mejor a las distintas capacidades de cada uno en concreto.

Por último cabe destacar que, en este trabajo, se va a trabajar con el modelo inicial que propuso Gardner, ya que en el año 1995 se añadió una nueva inteligencia, la *inteligencia naturalista*. E incluso hoy en día se habla de nueve inteligencias múltiples en lugar de siete, pues se ha incorporado a la lista la *inteligencia existencial*. Pero, puesto que estas dos nuevas aportaciones no se relacionan directamente con el aprendizaje y el desarrollo de las matemáticas, se trabajará exclusivamente con su propuesta inicial.

A continuación se describe resumidamente cada una de las inteligencias según el modelo inicial de Howard Gardner:

Tabla 2. Características de las inteligencias múltiples de Howard Gardner.

Inteligencia lingüística
Capacidad de utilizar las palabras de manera eficaz, ya sea oralmente o por escrito. Incluye la capacidad de manejar la sintaxis o la estructura del lenguaje, la fonología o los sonidos del lenguaje, la semántica o los significados de las palabras, la dimensión pragmática o usos prácticos del lenguaje. Algunos de estos son la retórica (uso del lenguaje para convencer a otros de que realicen una acción determinada), la mnemotecnia (uso del lenguaje para recordar información), la explicación (uso del lenguaje para informar) y el metalenguaje (uso del lenguaje para hablar del propio lenguaje).
Inteligencia lógico-matemática
Capacidad de utilizar los números con eficacia y razonar bien. Incluye la sensibilidad a patrones y relaciones lógicas, afirmaciones y proposiciones (si...entonces, causa-efecto), funciones y otras abstracciones relacionadas. Incluye los procesos de categorización, clasificación, deducción, generalización, cálculo y prueba de hipótesis.
Inteligencia espacial
Capacidad de percibir el mundo visoespacial de manera precisa y de llevar a cabo transformaciones basadas en esas percepciones. Implica sensibilidad al color, las líneas, la forma, el espacio y las relaciones entre estos elementos. Incluye la capacidad de visualizar, de representar gráficamente ideas visuales o espaciales y de orientarse correctamente en una matriz espacial.
Inteligencia cinético-corporal
Dominio del propio cuerpo para expresar ideas o sentimiento y facilidad para utilizar las manos en la creación o transformación de objetos. Incluye habilidades físicas como la coordinación, el equilibrio, la destreza, la fuerza, la flexibilidad y la velocidad, además de capacidades propioceptivas, táctiles y hápticas.
Inteligencia musical
Capacidad de percibir, discriminar, transformar y expresar las formas musicales. Incluye la sensibilidad al ritmo, al tono o a la melodía, y al timbre o color de una pieza musical. Se puede entender la música desde una perspectiva global e intuitiva, desde una perspectiva analítica o técnica o desde ambas.
Inteligencia interpersonal
Capacidad de percibir y distinguir los estados anímicos, las intenciones, las motivaciones y los sentimientos de otras personas. Incluye la sensibilidad hacia las expresiones faciales, voces y gestos; la capacidad de distinguir entre numerosos tipos de señales interpersonales, y la de responder con eficacia y de modo pragmático a esas señales.
Inteligencia intrapersonal
Autoconocimiento y capacidad para actuar según ese conocimiento. Incluye la imagen precisa de uno mismo (puntos fuertes y puntos débiles), la conciencia de los estados de ánimo, intenciones, motivaciones y deseos interiores, y la capacidad de autodisciplina, autocomprendión y autoestima.

Nota: Características de las inteligencias múltiples de Howard Gardner.

Fuente: Elaboración propia a partir de Armstrong (2006).

3. Propuesta de intervención para la mejora educativa

3.1. Estudio de campo

3.1.1. Análisis de la situación

Durante la realización del Máster del profesorado en Educación Secundaria y Bachillerato, y en concreto durante el desarrollo de las prácticas correspondientes al mismo, se ha podido observar la gran dificultad de los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias en comprender y analizar el concepto de derivada en un punto. El principal motivo detectado ha sido que la metodología utilizada por los docentes de este centro es demasiado tradicional y quizás, no la más apropiada.

Algunas de las cuestiones que se han planteado como consecuencia han sido:

- ¿Cómo comprende el alumno la realidad a través del modo de enseñanza?
- ¿Se presta atención al perfil intelectual concreto de cada alumno para que estos se encuentren motivados por su propio aprendizaje?
- ¿Qué entienden por *inteligencia* tanto alumnos como profesores y qué papel se le atribuye a la escuela para su desarrollo?
- ¿Cuáles son las estrategias que emplean los docentes para desarrollar la inteligencia de sus alumnos?
- ¿Se hace uso de metodologías que favorezcan la participación?

La imagen que la mayoría de los alumnos tienen sobre las clases de matemáticas es que son frías y distantes a la realidad. Sin embargo, la realidad de esta asignatura es que tiene una conexión directa con todos los ámbitos de la vida: ámbito social, industrial, tecnológico, económico, laboral y científico. Los alumnos a menudo preguntan “¿y eso para qué sirve?”, cada vez que sus profesores introducen un tema nuevo. Además, lo que estos quieren saber es la utilidad de lo que están aprendiendo; pero no mañana ni en un futuro cercano, sino hoy y ahora. Es por ello que el docente debe adelantarse a este tipo de preguntas por parte de los alumnos, haciendo las matemáticas más notables y cercanas para ellos, consiguiendo que se interesen por esta materia. La labor del docente debe ser la de enseñar a sus alumnos los conceptos y los procedimientos, y adaptarlos según sus necesidades.

Del mismo modo que Gardner era consciente de que existen distintas inteligencias generales, en matemáticas se puede decir que también existen diferentes inteligencias. Encontramos alumnos que están mejor capacitados para pensar geométricamente, otros cuyas destrezas numéricas son las más desarrolladas. La fortaleza de algunos se encuentra en resolver rompecabezas; mientras que no faltan los que disfrutan más con los temas de estadística y probabilidad.

Encontrar cuáles son las fortalezas y los intereses concretos de cada estudiante es una manera segura de acertar a la hora de decidir qué metodología emplear y cómo llevarla a cabo en el aula. Todo esto supone abandonar de algún modo la clase magistral tradicional que tanto sigue utilizándose e intentar realizar en su lugar una especie de laboratorio matemático, en el que puedan formarse diferentes grupos para trabajar distintos experimentos matemáticos relacionados con la vida cotidiana.

La matemática es una ciencia experimental, y es precisamente ese ambiente experimental el que hay que intentar reproducir dentro del aula fomentando el trabajo en equipo, como sucede en la vida real. Este trabajo en equipo permite, además, que las distintas inteligencias de todos sus componentes se complementen para la solución exitosa de cada proyecto concreto. Además, permiten que los estudiantes aprendan los unos de los otros durante el proceso mucho más de lo que aprenderían de un profesor que se dedica a copiar y resolver problemas en la pizarra. En este último caso lo que ocurriría con el estudiante es que se convertiría en un elemento completamente pasivo, y dejaría de estar interesado por la materia.

Con el propósito de mejorar tanto la didáctica como la metodología para enseñar a los alumnos del colegio Santa Teresa de Calahorra, será imprescindible, lo primero de todo, conocer las capacidades y los intereses de los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias, para poder así personalizar al máximo posible la propuesta de actividades que se plantee. Además, también será importante conocer tanto las dificultades como los conocimientos de estos alumnos respecto al bloque de análisis, a través de la experiencia de los propios docentes de matemáticas del centro.

3.1.2. Objetivos del trabajo de campo

El objetivo principal que se pretende lograr a través del trabajo de campo es recoger información concreta sobre los alumnos a quienes está orientada esta propuesta didáctica. Para conseguirlo, se proponen los objetivos específicos que se describen a continuación:

- Recopilar información de las capacidades, aptitudes e intereses más desarrollados entre los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.
- Recopilar información sobre las dificultades y los conocimientos previos de estos alumnos, respecto al análisis en general y sobre las derivada en particular, a través de entrevistas a los docentes de matemáticas del centro.

3.1.3. Metodología y recursos empleados

Los instrumentos utilizados para llevar a cabo el estudio de campo han sido dos: el cuestionario y la entrevista.

La encuesta, considerada la herramienta de recogida de datos más efectiva, ha sido elegida como método de investigación para realizar este trabajo. La comodidad que esta estrategia de trabajo ofrece a la hora de contestar, y la facilidad del posterior tratamiento estadístico de los datos para la extracción de conclusiones, hacen de la encuesta un instrumento idóneo para su utilización.

En cuanto al cuestionario propuesto a los estudiantes, se trata de una serie de preguntas extraídas de un registro de rasgos característicos que el propio Gardner expuso. En él aparecen distintos items relacionados con las siete inteligencias múltiples planteadas por el autor. En el cuestionario propuesto se han recogido 35 rasgos mezclados, 5 de cada una de las inteligencias (Anexo I). Los alumnos debían contestar V (verdadero) a los rasgos destacables en su personalidad, y F (falso) a los que no la describían. De este modo, analizando los datos obtenidos, se ha conseguido generalizar cuáles son las destrezas más destacadas dentro de la clase, así como sus inteligencias asociadas.

Para la realización de la misma, primero de todo se pidió permiso a la tutora de prácticas del centro para llevar a cabo la encuesta. Posteriormente, se acordó fecha y hora para su realización en el aula concreta de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias. Por último, la tutora fue informada sobre los datos obtenidos y sobre el anonimato de las respuestas para su total confidencialidad.

Por otra parte, se ha llevado a cabo una entrevista sobre las dificultades y los obstáculos que encuentran los alumnos durante el estudio del bloque de Análisis, tanto durante la Educación Secundaria Obligatoria como en el Bachillerato. Dicha entrevista ha sido planteada a tres profesores de matemáticas del colegio Santa Teresa, para poder conocer la situación actual de los alumnos y los errores más comunes ante los que se enfrentan. De este modo, con todos estos datos obtenidos, se ha realizado una propuesta de actividades y mejora del aprendizaje de los alumnos (Anexo III).

3.1.4. Marco contextual y destinatarios

Este trabajo de campo ha sido desarrollado en el aula de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa de Calahorra (La Rioja).

Calahorra, perteneciente concretamente a la comarca de la Rioja Baja, es el segundo municipio y ciudad más grande de la Comunidad Autónoma de La Rioja. Su población es de aproximadamente 25.000 habitantes y destaca por su producción agrícola, sus viñedos y su antigüedad.

Dentro de la ciudad, la zona donde se encuentra ubicado este colegio queda caracterizada por ser una zona urbana de poder adquisitivo medio-alto. El carácter del centro es concertado y cristiano, formando parte de la obra educativa de la Compañía de Santa Teresa de Jesús, fundada por San Enrique de Ossó. Su fin principal es brindar una educación cristina teresiana. Es por ello que este centro presta la misma importancia a la formación académica que a la formación en valores.

En cuanto al aula concreta en la que se realiza el trabajo, cabe destacar que el grupo de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias de este centro se caracteriza por su gran capacidad intelectual. La gran mayoría de sus alumnos son responsables en el cumplimiento de sus deberes y trabajan y se esfuerzan en el día a día. Durante las explicaciones del profesor están atentos y trabajan correctamente en la realización de ejercicios y problemas, preguntando todo tipo de dudas que les puedan surgir relacionadas con lo que están estudiando.

Para la realización de los cuestionarios a los alumnos, el día y la hora ha sido fijada previamente con la tutora. Se ha aprovechado el final de una de las clases de matemáticas para entregar a los estudiantes las hojas con las distintas cuestiones, y se les ha pedido que la entreguen para el día siguiente. La forma de contestar al cuestionario, anónima y reflexionando sobre la veracidad de sus contestaciones, ha sido claramente explicada cuando se les ha hecho entrega de la misma.

Por otra parte, para la realización de las entrevistas a los tres profesores, se ha hecho uso del correo electrónico para concertar con ellos una cita para llevarla a cabo. Los tres profesores han aceptado sin ningún tipo de impedimento y han sido claros y concisos en sus contestaciones.

3.1.5. Resultados

El siguiente gráfico muestra los datos recogidos en el cuestionario que se ha pasado a los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa. Es decir, quedan reflejadas cuáles son las capacidades más desarrolladas en estos alumnos en concreto, dentro de las siete inteligencias múltiples que propone Gardner.



Figura 1: Resultados Test de las Inteligencias Múltiples en el aula de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa de Calahorra.

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos en los cuestionarios.

Según los datos obtenidos, se puede observar que la inteligencia más desarrollada en este aula es la inteligencia intrapersonal (20,20%), seguida de la inteligencia interpersonal (17,10%). Del lado opuesto tenemos que la menos desarrollada es la inteligencia espacial (9,30%). En cuanto a la inteligencia lógico-matemática, que es la que nos importa realmente analizar para la elaboración de la propuesta didáctica, ésta se sitúa en una cuarta posición (14,50%).

En la siguiente página se muestran unas tablas con los resultados extraídos a través de las entrevistas realizadas a los tres profesores de matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato del colegio Santa Teresa de Calahorra.

Tabla 3. *Respuestas obtenidas de las entrevistas realizadas a tres profesores de matemáticas de colegio Santa Teresa.*

Preguntas	Docente nº 1	Docente nº 2	Docente nº 3
1. Tipos de centro: público, privado o concertado.	Centro concertado.	Centro concertado.	Centro concertado.
2. ¿En qué niveles imparte clases de matemáticas?	ESO y Bachillerato.	ESO y Bachillerato.	ESO y Bachillerato.
3. ¿Cuántos años lleva en la enseñanza de matem.?	6 años.	31 años.	12 años.
4. ¿Los alumnos están motivados para estudiar matemáticas?	No demasiado, sólo algunos.	Regular.	En general no, son pocos los motivados. Es nuestra labor motivarles.
5. ¿Qué bloque de las matemáticas cree que genera mayor dificultad?	El análisis. Las cuentas y el cálculo numérico les cuesta mucho.	El análisis, ya que requiere tener presentes bastante conceptos a la vez.	El álgebra y el análisis, hasta que desarrollan la abstracción y ven analogías con otras áreas.
6. ¿Qué metodología emplea en sus clases? Tradicional, participativa..	Mezclo clase magistral con trabajo cooperativo.	Mezclo clase magistral y participativa.	Tradicional y trabajo cooperativo, PBL...
7. ¿Utiliza los recursos TIC en sus clases ? ¿ Cuáles?	Sí, la Pizarra Digital Interactiva y los ordenadores.	No, sólo el cañón cuando lo necesito para una actividad.	Sí, proyecto presentaciones y navegamos juntos por webs interativas.
8. ¿Cree que el aprendizaje del Análisis genera grandes dificultades? ¿Qué UD resulta más difícil?	Sí, les genera mucha dificultad. En especial los temas de derivadas e integrales.	Sí, sobre todo las integrales.	Creo que los límites y las derivadas les cuesta mucho. Muchos alumnos lo hacen mecánicamente sin entender nada.
9. Puntúa las siguientes dificultades del bloque de Análisis según las dificultades que generen en los alumnos, del 0 al 5 (de menor a mayor dificultad).	<ul style="list-style-type: none"> -Relación entre la expresión analítica y la representación gráfica de una función: (5) -Concepto de límite: (4) -Concepto de infinito: (4) -Derivación y sus aplicaciones prácticas: (4) -Integración y sus aplicaciones prácticas: (5) 	<ul style="list-style-type: none"> -Relación entre la expresión analítica y la representación gráfica de una función: (1) -Concepto de límite: (3) -Concepto de infinito: (4) -Derivación y sus aplicaciones prácticas: (4) -Integración y sus aplicaciones prácticas: (5) 	<ul style="list-style-type: none"> -Relación entre la expresión analítica y la representación gráfica de una función: (3) -Concepto de límite: (2) -Concepto de infinito: (2) -Derivación y sus aplicaciones prácticas: (4) -Integración y sus aplicaciones prácticas: (4)

10. ¿Cuál es el nivel de conocimiento de los alumnos de 1º de Bachillerato en el cálculo de derivadas y sus aplicaciones?	Nivel medio.	Nivel medio.	Nivel medio.
11. ¿Son conscientes los alumnos de lo que están calculando al derivar una función o lo tienen por algo mecánico?	No, lo tienen por algo completamente mecánico.	Lo tienen por algo mecánico.	Lo tienen por algo mecánico en general.
12. ¿Resuelven las representaciones gráficas de funciones correctamente?	Mecánicamente sí, pero no saben interpretar los resultados.	Mecánicamente sí.	Mecánicamente sí.
13. ¿Son capaces de aplicar las derivadas en la resolución de problemas? ¿Cuáles son los errores más comunes?	No, si no es mecánico y los problemas son diferentes a los vistos en clase. No saben encontrar bien los máximos y los mínimos.	En general sí. Derivar un cociente, cómo derivar numerador y denominador.	El error más común es no leer correctamente los enunciados de los problemas, lo que les lleva a un mal planteamiento del mismo,
14. ¿Conoce la teoría de las IM de Gardner? ¿La aplicaría para la enseñanza de las derivadas?	Sí, pero nunca me he planteado cómo usarla.	Sí, pero no sabría cómo.	Sí, a través de la interpretación física de la derivada y sus múltiples aplicaciones físicas. Lo podemos plasmar, por ejemplo, en actividades de diferente desarrollo de cada inteligencia múltiple.
15. Alguna aportación que desee realizar.	Hay conceptos matemáticos más fáciles de interpretar y llevar a la vida real que el concepto de derivada.	Ninguna, gracias.	Creo que la mejora de la comprensión y aprendizaje de las matemáticas pasa por que el profesorado hagamos descubrir muchas aplicaciones prácticas de esta misma materia.

Nota: Respuestas obtenidas de las entrevistas realizadas a tres profesores de matemáticas del colegio Santa Teresa de Calahorra.

Fuente: Elaboración propia.

3.1.6. Análisis de los resultados

Según los objetivos expuestos al principio de este apartado, como primer objetivo específico se pretendía recopilar información de las capacidades, aptitudes e intereses más desarrollados en los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa de Calahorra. Esta información nos serviría para poder aplicar una metodología didáctica lo más personalizada posible para este grupo concreto de alumnos.

Tras los resultados obtenidos en los tests puede afirmarse que, tanto las destrezas más presentes en estos alumnos como sus intereses principales, están estrechamente relacionados con las inteligencias intrapersonal e interpersonal. En tercer y cuatro lugar, con casi un empate en las puntuaciones obtenidas, se encuentran las inteligencias musical y lógico-matemática. Esta última será la más importante a la hora de desarrollar la propuesta didáctica.

De este modo, interpretando los datos obtenidos, se puede concluir que los alumnos de este aula se caracterizan por pensar en sus necesidades, sentimientos y objetivos, pero al mismo tiempo transmiten sus sentimientos a los demás, se relacionan y les gusta realizar actividades en grupo. Además, disfrutan escuchando música, y tocando distintos instrumentos. En cuanto a la inteligencia lógico-matemática, que ocupa un cuarto puesto seguida de la musical, con apenas diferencia entre los porcentajes obtenidos, se deduce que una gran parte de estos alumnos razona adecuadamente y se le da bien experimentar, resolver acertijos, realizar cálculos, etc.

Como segundo objetivo específico, se pretendía en este caso recopilar información directa de los profesores sobre las obstáculos y los conocimientos previos de los alumnos, respecto al análisis en general y sobre las derivadas en particular. Las conclusiones obtenidas son las siguientes:

- Los alumnos no se encuentran motivados para estudiar matemáticas.
- El bloque de Análisis es el que mayores dificultades les genera.
- La metodología empleada por los docentes consiste en mezclar la clase magistral con clases de tipo participativo, cooperativo, PBL...
- No hacen un gran uso de las herramientas TIC, tan solo para algunas clases.
- Dentro del bloque de Análisis, las derivadas y las integrales son los dos campos que más dificultades generan en los alumnos.
- El nivel de conocimiento de los alumnos de 1º de Bachillerato en cuanto a la resolución de derivadas y sus aplicaciones es de tipo medio.
- Los alumnos tienen por algo completamente mecánico el tema de derivadas.
- A pesar de que, por regla general, son capaces de resolver derivadas adecuadamente y representar gráficamente funciones, no saben interpretar los resultados obtenidos.
- En cuanto a la resolución de problemas en los que es preciso la aplicación de las derivadas, si el enunciado cambia mucho respecto a los ejemplos vistos en clase, no son capaces de resolverlos.

3.2. Propuesta práctica

3.2.1. Introducción

El tema seleccionado para llevar a cabo la propuesta didáctica es “Cálculo de derivadas. Aplicaciones”, perteneciente al bloque de contenidos “Análisis”. El principal objetivo del estudio de las derivadas será su aplicación para la resolución de problemas. Esta unidad didáctica está pensada para los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias de colegio Santa Teresa de Calahorra (La Rioja).

El principal propósito de esta propuesta es mejorar los resultados académicos de estos alumnos. Para ello, se plantea una metodología basada en las inteligencias múltiples de Howard Gardner, ya que resulta idónea por prestar especial atención a la diversidad y al perfil concreto de cada alumno. Las actividades propuestas intentan ser lo más acorde posible a los intereses de los alumnos, para poder así conseguir exitosamente los objetivos descritos con anterioridad. Además, se pretende poder orientar a los estudiantes tanto en su elección de estudios superiores como en su formación.

Conviene aclarar en este punto que la voluntad de esta propuesta que se presenta a continuación es plasmar una posible metodología, no el diseño exhaustivo de una unidad didáctica específica como tal. De este modo, las actividades y las temporalizaciones que se especifican pueden servir como ejemplo para comprender mejor la metodología que se pretende llevar a cabo.

3.2.2. Objetivos de la propuesta

3.2.2.1. Objetivos generales del Bachillerato.

Según el Anteproyecto del Decreto de abril de 2015, por el que se establece el currículo de Bachillerato y se regularizan distintos aspectos sobre su organización, evaluación, promoción y titulación del alumnado de la Comunidad Autónoma de La Rioja, el Bachillerato contribuirá al desarrollo de distintas destrezas en los alumnos, de tal modo que les permita:

- a) Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española, así como por los derechos humanos, que fomente la construcción de una sociedad justa y equitativa y que favorezca la sostenibilidad.
- b) Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.

- c) Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades existentes e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.
- d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- e) Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.
- f) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.
- h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos, y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.
- i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
- j) Comprender los procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.
- k) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.
- l) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.
- m) Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.
- n) Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.

3.2.2.2. Objetivos de la materia de Matemáticas.

Según el citado Anteproyecto, la finalidad de la enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato será el desarrollo de las destrezas que se definen a continuación:

1. Conocer, comprender y aplicar los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de otras ciencias, en la resolución razonada de problemas procedentes de actividades cotidianas y diferentes ámbitos del saber, así como desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas y adquirir una formación científica general.
2. Considerar las argumentaciones razonadas y la existencia de demostraciones rigurosas sobre las que se basa el avance de la ciencia y la tecnología, mostrando una actitud flexible, abierta y crítica ante otros juicios y razonamientos.

3. Utilizar las estrategias características de la investigación científica y los procedimientos y destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación, aplicación de la inducción y deducción, formulación y aceptación o rechazo de las conjeturas, comprobación de los resultados obtenidos) para realizar investigaciones y en general explorar situaciones y fenómenos nuevos.
4. Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber.
5. Emplear razonablemente los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas.
6. Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, adquirir cierto rigor en el pensamiento científico, encadenar coherentemente los argumentos, comunicarse con eficacia y precisión, detectar incorrecciones lógicas y cuestionar aseveraciones carentes de rigor científico.
7. Mostrar actitudes asociadas al trabajo científico y a la investigación matemática que favorezcan la adquisición de hábitos de trabajo, tales como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el gusto por el rigor, el interés por el trabajo cooperativo y los distintos tipos de razonamiento, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la apertura a nuevas ideas, la creatividad y la confianza en sí mismo.
8. Expresarse verbalmente y por escrito en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, adquiriendo, comprendiendo y manejando términos, notaciones y representaciones matemáticas.
9. Comprender la forma de organización de los conocimientos propios de la matemática: estableciendo definiciones precisas, demostración lógico-deductiva de propiedades, enunciación y demostración de teoremas y justificación de procedimientos, técnicas y fórmulas.
10. Analizar y valorar la información proveniente de diferentes fuentes, utilizando herramientas matemáticas para formarse una opinión que les permita expresarse críticamente sobre problemas actuales.

3.2.2.3. Objetivos didácticos.

El concreto, la unidad didáctica “Cálculo de derivadas. Aplicaciones” propone, a su vez, los siguientes objetivos didácticos específicos:

Tabla 4. *Objetivos específicos de las derivadas y sus aplicaciones de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.*

Objetivos específicos de la UD: “Cálculo de derivadas. Aplicaciones”
1. Saber utilizar la variación media de una función para interpretar situaciones de la vida cotidiana.
2. Conocer y aplicar la definición de derivada de una función en un punto e interpretarla gráficamente.
3. Utilizar la derivación para hallar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, obtener los puntos singulares y los intervalos de crecimiento.
4. Integrar todas las herramientas básicas del análisis en la representación de funciones y dominar la representación de funciones polinómicas y racionales.
5. Resolver problemas de optimización de funciones.

Nota: Objetivos específicos de las derivadas y sus aplicaciones de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.

Fuente: Elaboración propia.

Además de estos objetivos específicos descritos, en la siguiente tabla se exponen los objetivos inherentes a la metodología propuesta:

Tabla 5. *Objetivos específicos de la metodología de enseñanza de las derivadas y sus aplicaciones en 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.*

Objetivos específicos de la metodología de enseñanza
1. Plantear actividades que desarrollen las siete inteligencias múltiples propuestas por Howard Gardner.
2. Ayudar a los alumnos a alcanzar sus fines vocacionales y sus aficiones.
3. Capacitar a los alumnos en la resolución de problemas, teniendo en cuenta las dificultades que ello conlleva.
4. Realizar estudios de supuestos prácticos o bien de casos reales, ya sea de forma individual o en grupo mediante debates, intercambiando opiniones e ideas.
5. Aplicar actividades adecuadas para los alumnos, basadas en los resultados obtenidos en el estudio de campo.
6. Asegurar que los alumnos reciban una educación que maximice su potencial intelectual en la medida de lo posible.
7. Fomentar el trabajo cooperativo.
8. Hacer uso de las nuevas tecnologías, como puede ser el software matemático GeoGebra
9. Aumentar la motivación de los alumnos por la asignatura.

Nota: Objetivos específicos de la metodología de enseñanza de las derivadas y sus aplicaciones en 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.

Fuente: Elaboración propia.

3.2.3. Competencias básicas o clave

En el Anexo I de la Orden ECD/65/2015, la LOMCE establece siete competencias básicas en lugar de las ocho propuestas por la LOE. Cabe destacar aquí que la competencia matemática se encuentra fusionada con la competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico, cambiando su nombre por el de “competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología”.

Las siete competencias que propone la LOMCE son:

1. Competencia lingüística.
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
3. Competencia digital.
4. Aprender a aprender.
5. Competencias sociales y cívicas.
6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
7. Conciencia y expresiones culturales.

La siguiente tabla relaciona los objetivos específicos descritos anteriormente con las competencias que se pretenden alcanzar con la propuesta didáctica.

Tabla 6. *Objetivos y competencias de las derivadas y sus aplicaciones en 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.*

Objetivos	Competencias
1. Saber utilizar la variación media de una función para interpretar situaciones de la vida cotidiana.	- Competencia lingüística. - Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. - Aprender a aprender
2. Conocer y aplicar la definición de derivada de una función en un punto e interpretarla gráficamente.	- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. - Aprender a aprender
3. Utilizar la derivación para hallar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, obtener los puntos singulares y los intervalos de crecimiento.	- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
4. Integrar todas las herramientas básicas del análisis en la representación de funciones y dominar la representación de funciones polinómicas y racionales.	- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. - Competencia digital. - Aprender a aprender
5. Resolver problemas de optimización de funciones.	- Competencia lingüística. - Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. - Competencia digital. - Aprender a aprender

Nota: Objetivos y competencias de las derivadas y sus aplicaciones en 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.

Fuente: Elaboración propia.

3.2.4. Metodología

La metodología empleada para la realización de la propuesta didáctica está fundamentada en la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner.

Las actividades que se plantean deben partir de la base de que, las distintas inteligencias dentro de cada individuo se encuentran combinadas unas con otras. Es por ello que cada inteligencia no se desarrolla por separado del resto en tiempos concretos o de manera secuencial, sino que el alumno debe enfrentarse a una serie de procesos dentro de una misma experiencia. Este hecho es fundamental tenerlo presente para poder lograr el aprendizaje significativo de cada alumno.

El trabajo por proyectos (trabajo cooperativo) y la organización del aula en grupos es la manera en que mejor se pueden trabajar estas inteligencias múltiples. Es decir, los alumnos deben asumir determinados papeles dentro de cada grupo, y será el profesor el que asigne dichos papeles a sus alumnos según crea más conveniente en cada caso. Pero estos grupos no deben ser organizados por habilidades intelectuales, sino que lo que se busca es la interacción heterogénea y el enriquecimiento académico.

Las pautas a seguir para poner en marcha esta metodología dentro del aula de bachillerato deben partir de situaciones reales de la vida cotidiana y del análisis de distintos acontecimientos o fenómenos reales. A continuación, se debe hacer hincapié en los conceptos matemáticos involucrados en los mismos, para posteriormente poder formular una serie de cuestiones sobre ellos. Finalmente, deben exponerse las conclusiones y opiniones correspondientes.

Teniendo siempre en mente la base fundamental de la teoría de las inteligencias múltiples en la clase de matemáticas, el docente debe exponer al grupo la utilización de distintas técnicas tales como la visualización de gráficos o dibujos, el debate entre los compañeros para analizar problemas y encontrar posibles soluciones, etc., de modo que sea capaz de interrelacionar a su vez las distintas subcategorías dentro de la inteligencia matemática. La expresión oral y escrita también pone de manifiesto en los alumnos el uso del pensamiento lógico y de la imaginación. Por otra parte, la confección de piezas musicales y la realización de distintas artes plásticas y visuales estimulan el desarrollo de las inteligencias cinético-corporal, espacial y musical.

Armstrong, en su libro *Las inteligencias múltiples en el aula* (2006), expone un modo de programar, desarrollar y llevar a cabo las clases partiendo de la base de las inteligencias múltiples. Plantea ejercicios, estilos de clases y excelente información que puede servir de ayuda a los docentes.

En la tabla que se muestra a continuación se expone un resumen de distintas actividades, materiales e instrucciones para la puesta en práctica docente de dicha teoría del mejor modo posible. Esta información ha sido obtenida a través de distintas propuestas planteadas por Armstrong (2006) y Gilbert (2005).

Tabla 7. Propuesta de actividades, materiales e instrucciones basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner.

Tipo de Inteligencia	Armstrong	Gilbert
Lingüística	Mediante debates, juegos de palabras, la narración, tormenta de ideas, grabaciones de voz, etc.	Mediante debates, cuentos, exposiciones orales, poemas, ensayos, juegos de palabras, sinónimos, antónimos, rimas, anuncios radiofónicos, eslóganes para camisetas, posters comerciales, discursos, diarios, etc.
Lógico-matemática	A través de rompecabezas, pensamiento crítico, resolución de problemas, pensamiento científico, etc.	A través de puzzles, tablas, gráficos, análisis, conclusiones, predicciones, previsiones, secuencias, consecuencias, trabajo estadístico, deducción de reglas generales, etc.
Espacial	Mediante visualización de ideas imaginarias, utilización de gráficos, diagramas, mapas, señales de colores, bocetos de ideas, símbolos gráficos, etc.	Mediante mapas, posters, redes de conocimientos, utilización de colores y rotuladores, símbolos, iconos, visualización, exposiciones instructivas, etc.
Cinético-corporal	A través de juegos teatrales, objetos para manipular, utilización del lenguaje corporal, actividades manuales, etc.	A través de juegos de simulación, construyendo maquetas, utilizando el movimiento, actuando, ejercicios prácticos, personificación del aprendizaje, cortando y pegando rompecabezas, realizando gimnasia cerebral, etc.
Musical	Mediante ritmos, canciones, poniendo música en el aula que cree un ambiente adecuado para la lección correspondiente, etc.	Mediante poemas, ritmos, golpes, canciones, tintineos, canciones, música de fondo, etc.
Interpersonal	A través del trabajo en grupo, grupos de cooperación, juegos de mesa, haciendo simulaciones de un entorno, etc.	A través del trabajo en grupo (colaborativo), trabajo en equipo (competitivo), entrevistas, teatro, enseñando a los demás, liderazgo de grupo, coordinación de grupo, etc.
Intrapersonal	Facilitando el estudio independiente, dando tiempo para reflexionar, juegos individuales, sesiones para establecer objetivos realistas, ofreciendo opiniones a los alumnos, relaciones personales entre profesor-alumno, etc.	Mediante la empatía, inteligencia emocional, definición de metas y objetivos, ensoñaciones, afirmaciones y preguntas del estilo: "Me pregunto..."; "Me parece que..."; "¿Qué te parecería si...?"; etc.

Nota: Propuesta de actividades, materiales e instrucciones basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner.

Fuente: Elaboración propia a partir de Armstrong (2006) y Gilbert (2005).

3.2.5. Actividades y temporalización

Para impartir la unidad didáctica “Cálculo de derivadas. Aplicaciones”, se emplearán 12 sesiones distribuidas a lo largo de tres semanas completas. Cada sesión tendrá una duración de aproximadamente 50 minutos.

En la primera semana de clase, se trabajará el concepto de derivada partiendo de las definiciones de tasa de variación media (TVM) y de tasa de variación instantánea (TVI). Se darán las reglas de derivación (álgebra de derivadas), y los alumnos se dedicarán a hacer ejercicios guiados por el profesor.

Todo ello contribuirá a que en la segunda semana, los alumnos estén preparados para realizar estudios de funciones, completando así lo que aprendieron en las unidades anteriores (características generales de las funciones, límites y continuidad).

En la tercera semana, se trabajarán los problemas de optimización y se repasará lo estudiado anteriormente, dando a los alumnos una visión global de todo el Análisis estudiado hasta el momento.

Tras los resultados de las encuestas realizadas a los alumnos del aula concreta de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa de Calahorra, se pudo observar que sus destrezas e intereses están asociados principalmente con las inteligencias intrapersonal e interpersonal, seguidas de la musical y la lógico-matemática. Por lo tanto, se intentará realizar ejercicios y actividades que estén lo más vinculadas posible con dichas inteligencias. Lo que se pretende con ello es que los alumnos se mantengan motivados durante las clases de matemáticas y que consecuentemente, saquen mayor provecho de su capacidad intelectual, mejorando con ello su rendimiento académico.

En la siguiente tabla se exponen los contenidos, distintos ejemplos de actividades para llevar a cabo en cada sesión y las inteligencias asociadas a dichas actividades.

Tabla 8. Sesiones, contenidos, actividades e inteligencias relacionadas con las actividades propuestas para la UD de las derivadas de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa.

Sesión	Contenidos	Actividades	Inteligencias
1	- Repaso de conocimientos previos a tener en cuenta (funciones, dominio, límites, continuidad, asíntotas). - Introducción histórica del tema y relación con la vida cotidiana.	- Preguntas sobre Análisis a tener en cuenta para el estudio de las derivadas, haciendo al alumno reflexionar sobre las mismas. - En la sala de ordenadores, los alumnos buscarán por parejas información sobre el concepto de derivada , su historia y sus aplicaciones en la vida cotidiana. - Pequeño debate con las conclusiones extraídas. - Actividad: "Búsqueda en el periódico".	- Lingüística - Lógico-matemática - Espacial - Interpersonal - Intrapersonal
2	- Tasa de variación media (T.V.M.) de una función en un intervalo. -Tasa de variación instantánea (T.V.I.) de una función en un punto (definición de derivada).	- Cálculo de la tasa de variación media. - Cálculo de la recta tangente de una función en un punto. - Derivación de distintas funciones aplicando la definición.	- Lógico-matemática - Espacial - Interpersonal - Intrapersonal
3	- Reglas de derivación: derivadas de funciones elementales.	- Derivación de distintas funciones elementales aplicando las reglas de derivación correspondientes.	- Lógico-matemática - Intrapersonal
4	- Reglas de derivación: derivadas de funciones compuestas. -Regla de la cadena.	- Derivación de distintas funciones compuestas aplicando las reglas de derivación correspondientes.	- Lógico-matemática - Intrapersonal
5	- Reglas de derivación: suma o diferencia, producto por un número, producto de funciones, cociente de funciones, inversa de una función.	- Derivación de funciones más complejas aplicando la regla de la cadena. - Resolución de derivadas complejas en parejas.	- Lógico-matemática - Interpersonal - Intrapersonal
6	- Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos (máximos y mínimos).	- Mediante el estudio del signo de la primera derivada, hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de distintas funciones.	- Lógico-matemática - Espacial - Intrapersonal
7	- Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.	- Mediante el estudio del signo de la segunda derivada, hallar los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de distintas funciones.	- Lógico-matemática - Espacial - Intrapersonal
8	- Representación gráfica: funciones polinómicas.	- Representación gráfica de una función polinómica paso a paso en la pizarra. - Resolución de la misma función con GeoGebra. - Relación entre la representación gráfica de una función y su función derivada.	- Lógico-matemática - Espacial - Intrapersonal

9	- Representación gráfica: funciones racionales.	- Representación gráfica de una función racional paso a paso en la pizarra. - Resolución de la misma función con GeoGebra. - Relación entre la representación gráfica de una función y su función derivada.	- Lógico-matemática - Espacial - Intrapersonal
10	- Introducción a los problemas de optimización.	- Actividad: "Construye tu propia caja"	- Lingüística - Lógico-matemática - Espacial - Cinético-corporal - Interpersonal - Intrapersonal
11	- Problemas de optimización.	- Resolución de problemas de optimización relacionados con la vida real.	- Lingüística - Lógico-matemática - Espacial - Interpersonal - Intrapersonal
12	- Repaso completo de la unidad.	- Exposición en Power Point al resto de la clase, en grupos de 5 personas, de un resumen práctico de todo lo visto en la unidad. - Actividades de refuerzo y de ampliación. - Resolución de dudas. - Explicación del trabajo individual puntuable. - Entrega trabajo individual puntuable: ejercicios y problemas.	- Lingüística - Lógico-matemática - Espacial - Cinético-corporal - Interpersonal - Intrapersonal - Lingüística - Lógico-matemática - Espacial - Interpersonal - Intrapersonal
Al co- mienzo de la siguiente semana			

Nota: Sesiones, contenidos, actividades e inteligencias relacionadas con las actividades propuestas para la UD de las derivadas de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias del colegio Santa Teresa.

Fuente: Elaboración propia.

A continuación se explica el desarrollo de cada sesión, teniendo presente en todo momento tanto el marco teórico como los resultados obtenidos del trabajo de campo:

- Sesión 1: *Introducción a las derivadas* (1 hora)

El profesor lanza preguntas al resto de la clase sobre nociones y conceptos del Análisis visto hasta el momento, y que los alumnos deben tener muy claros y presentes para el nuevo tema que se les propone. Tras lanzar las preguntas se les da a los alumnos unos minutos de reflexión individual (inteligencias lógico-matemática e intrapersonal). A continuación, varios alumnos explican las respuestas en alto y otros las escriben en la pizarra (inteligencias lingüística y cinético-corporal).

Posteriormente a esta actividad, se lleva a los alumnos a la sala de ordenadores para que busquen, por parejas, información sobre el concepto de derivada, su historia y sus aplicaciones en la vida cotidiana (inteligencias visual e interpersonal).

Por último, se llevará a cabo un breve debate entre los alumnos sobre las conclusiones extraídas, actuando el docente como moderador (inteligencias lingüísticas e interpersonal).

Mientras los alumnos realizan la búsqueda en los ordenadores, el aula permanece ambientada con música de fondo adecuada para la situación (inteligencia musical).

Possible actividad adicional: “Búsqueda en el periódico” (Anexo V).

- Sesión 2: *Tasa de variación media (T.V.M.) y Tasa de variación instantánea (T.V.I.)* (1 hora)

El profesor comienza la clase explicando las definiciones de tasa de variación media de una función en un intervalo y tasa de variación instantánea de una función en un punto (definición de derivada). Para ello se ayudará de dibujos que él mismo irá dibujando en la pizarra (inteligencia lógico-matemática y espacial).

A continuación se proponen distintos ejercicios relacionados con la teoría explicada para que los alumnos reflexionen sobre los mismo e intenten resolverlos de modo individual (Anexo V) (inteligencias lógico matemática e intrapersonal). Mientras realizan los ejercicios, el docente se pasea por la clase para poder resolver las dudas que les vayan surgiendo a los alumnos (inteligencia interpersonal).

- Sesión 3: *Cálculo de derivadas* (1 hora)

El profesor empieza la clase realizando un repaso de los conceptos vistos en la sesión anterior, los cuales va a ir relacionando progresivamente con los nuevos conceptos.

En esta sesión se explican detalladamente las distintas derivadas de funciones elementales que existen (Anexo IV), poniendo distintos ejemplos de cada tipo. A continuación, se proponen una serie de ejercicios sobre este tipo de derivadas para que los alumnos trabajen en clase individualmente (inteligencias lógico matemática e intrapersonal).

El trabajo será amenizado con música de fondo apropiada (inteligencia musical).

- Sesión 4: *Cálculo de derivadas* (1 hora)

En esta sesión se explican detalladamente las distintas derivadas de funciones compuestas que existen (Anexo IV), poniendo distintos ejemplos de cada tipo. Para ello, será necesario explicar a los alumnos cómo derivar haciendo uso de la regla de la cadena. A continuación, se proponen una serie de ejercicios sobre este tipo de derivadas para que los alumnos trabajen en clase individualmente (inteligencias lógico matemática e intrapersonal).

El trabajo será amenizado con música de fondo apropiada (inteligencia musical).

- Sesión 5: *Cálculo de derivadas* (1 hora)

Una vez vistos todos los tipos de derivadas, el profesor explica las distintas operaciones posibles con las derivadas (Anexo IV): suma o diferencia, producto por un número, producto de funciones, cociente de funciones e inversa de una función. Finalmente, se proponen una serie de funciones complejas para que los alumnos las resuelvan en parejas (inteligencias lógico-matemática e interpersonal). Al terminarlas, cada una de las parejas saldrá a la pizarra a resolver una, explicando detalladamente el porqué de su resolución (inteligencias lingüística e interpersonal).

- Sesión 6: *Aplicaciones de las derivadas* (1 hora)

En esta sesión se explican los conceptos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos (máximo y mínimos) a través del estudio del signo de la primera derivada. El profesor realizará su explicación con la ayuda del software GeoGebra (inteligencias lógico-matemática y espacial). Seguidamente, se proponen una serie de funciones para hallar en ellas los conceptos explicados anteriormente de manera individual (inteligencias lógico-matemática e intrapersonal).

El trabajo individual será amenizado con música de fondo apropiada (inteligencia musical).

- Sesión 7: *Aplicaciones de las derivadas* (1 hora)

El profesor empieza la clase realizando un repaso de los conceptos vistos en la sesión anterior. A continuación se explican en detalle los conceptos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión mediante el estudio del signo de la segunda derivada en este caso. El profesor realizará su explicación con la ayuda del software GeoGebra (inteligencias lógico-matemática y espacial). Seguidamente, se proponen una serie de funciones para hallar en ellas los conceptos explicados anteriormente de manera individual (inteligencias lógico-matemática e intrapersonal).

El trabajo individual será amenizado con música de fondo apropiada (inteligencia musical).

- Sesión 8: *Representación gráfica de funciones: función polinómica* (1 hora)

El profesor explica en la pizarra de tiza tradicional la resolución de la representación gráfica de una función polinómica, teniendo en cuenta todos los conceptos vistos hasta el momento y explicando detalladamente cada paso. Durante su explicación, lanzará preguntas a los alumnos para comprobar si los alumnos están siguiendo el proceso y, en caso contrario, poder detenerse para resolver las dudas que haya (inteligencias lógico-matemática, espacial e interpersonal). A continuación resolverá la misma función pero ahora con la ayuda del programa GeoGebra (inteligencia espacial).

Finalmente, el docente entregará a los alumnos unas fichas (Anexo V) para que, individualmente, intenten relacionar la representación gráfica de una serie de funciones con su correspondiente representación de su función derivada (inteligencias lógico-matemática, espacial e intrapersonal).

- Sesión 9: *Representación gráfica de funciones: función racional* (1 hora)

El profesor explica en la pizarra de tiza tradicional la resolución de la representación gráfica de una función racional, teniendo en cuenta todos los conceptos vistos hasta el momento y explicando detalladamente cada paso. Durante su explicación, lanzará preguntas a los alumnos para comprobar si los alumnos están siguiendo el proceso y, en caso contrario, poder detenerse para resolver las dudas que haya (inteligencias lógico-matemática, espacial e interpersonal). A continuación resolverá la misma función pero ahora con la ayuda del programa GeoGebra (inteligencia espacial).

Finalmente, el docente corregirá en voz alta las fichas entregadas el día anterior sobre la relación entre representación gráfica de una función y de su función derivada, resolviendo las dudas que pueda haber (inteligencias lingüística e interpersonal).

- Sesión 10: *Problemas de optimización* (1 hora)

El profesor comienza la clase explicando en qué consisten los problemas de optimización y sus múltiples aplicaciones en la vida cotidiana. A continuación, para que los alumnos lo entiendan mejor, se les propone la siguiente actividad: “Construye tu propia caja” (Anexo V), la cual realizarán en grupos de 3 personas (inteligencias lingüística, lógico-matemática, espacial, cinético-corporal e interpersonal).

- Sesión 11: *Problemas de optimización* (1 hora)

En esta sesión el profesor propone a los alumnos distintos problemas de optimización relacionados con distintas áreas de la vida cotidiana (Anexo V). A continuación, divide la clase en grupos heterogéneos de 3 personas y entrega cada problema a un grupo distinto, según su buen juicio. Los alumnos deberán resolver un problema por grupo y, al finalizar la clase, deberán exponerlo al resto de la clase, explicando todos y cada uno de los pasos que han seguido para su resolución (inteligencias lingüística, lógico-matemática, cinético-corporal e interpersonal).

- Sesión 12: *Repaso* (1 hora)

Esta sesión se utilizará para realizar un repaso general de la unidad. Para ello, los alumnos realizarán una presentación en Power Point al resto de la clase, formando grupos de 5 personas cada uno. Los alumnos que expongan tendrán que hacerlo del mejor modo posible, cuidando a la vez sus palabras y sus gestos y expresiones corporales (inteligencias lingüística, espacial, cinético-corporal e interpersonal). Para ayudar a preparar las distintas presentaciones, el docente: encaminará y aconsejará a los alumnos, aclarará todas las dudas que les surjan, se encargará de crear un buen clima del aula y evaluará tanto la participación como el trabajo final realizado por los mismos.

Al finalizar las exposiciones el profesor repartirá a los alumnos actividades de refuerzo y de ampliación, según considere necesario en cada caso (inteligencias lógico-matemática e intrapersonal).

Finalmente, se explicará el trabajo individual puntuable que los alumnos deberán realizar de modo individual en casa y entregar en la próxima sesión (inteligencias lógico-matemática e intrapersonal).

Nota 1: Mientras los alumnos realizan los ejercicios, el docente se paseará por la clase para poder resolver las dudas que les vayan surgiendo.

Nota 2: Todas las actividades propuestas para trabajar en el aula se corregirán al final de cada sesión. El docente utilizará su ordenador junto con el proyector y la pizarra digital para corregir gráfica y visualmente las distintas actividades.

La propuesta desarrollada está basada en la resolución de problemas. Esto es debido a que, según las conclusiones extraídas de las entrevistas a los tres profesores de matemáticas del centro, esto es lo que más les cuesta entender a los alumnos en general. Finalmente, se ha intentado desarrollar una metodología basada en actividades que desarrolle tanto la comprensión como la reflexión matemática, para posibilitar con ello el aprendizaje más óptimo posible de la materia.

3.2.6. Forma de evaluación prevista

En cuanto a la evaluación, Gardner sugiere una evaluación exenta de exámenes. Este autor argumenta que los controles no ayudan a los alumnos a comprender las materias, sino que lo que consiguen es que los estudiantes memoricen un montón de conceptos o procedimientos el día previo al examen, sin ningún tipo de reflexión sobre los mismos, para poder salir exitosos. Y además, tan pronto como los memorizan los olvidan. De este modo, lo que valora su propuesta es el desarrollo de las capacidades productivas y reflexivas, las cuales sólo pueden ser desarrolladas en proyectos a largo plazo. Por lo tanto, Gardner propone una evaluación lo más discreta posible a través del trabajo y de las actividades realizadas diariamente por los alumnos (Gardner, 2012).

Siguiendo el pensamiento de este autor, la evaluación de esta propuesta consistirá en una evaluación continua, donde la labor del docente será recoger información para poder evaluar todas y cada una de las sesiones, tanto individual como colectivamente. Al finalizar cada clase, los alumnos deberán mostrar al profesor su trabajo desarrollado, lo cual supondrá un 40% de la nota. Pero el docente no sólo evaluará los ejercicios realizados por los alumnos en cada una de las sesiones, sino también su participación y su actitud cooperativa. La técnica de evaluación de esta parte será la observación, y supondrá un 30% de la nota final. Además, para que también se le pueda valorar a cada alumno de un modo más individual, cada uno deberá entregar un trabajo individual (una serie de ejercicios y problemas propuestos por el profesor) al día siguiente de la finalización de la unidad correspondiente. Este trabajo (Anexo VI) contará el 30% de la nota final. Por último, para poder aprobar la asignatura, el alumno deberá conseguir un mínimo de 6 puntos sobre 10 en cada una de estas partes.

La siguiente tabla muestra los criterios de evaluación descritos anteriormente.

Tabla 9. Porcentajes de los criterios de evaluación según la metodología propuesta.

Criterios de evaluación	Porcentajes
- Realización de las distintas actividades en cada una de las sesiones.	40%
- Participación, colaboración en los grupos.	
- Actitud de los alumnos en la realización de las actividades.	30%
- Faltas de material.	
- Faltas de asistencia.	
- Trabajo individual (resolución de ejercicios y problemas).	30%

Nota: Porcentajes de los criterios de evaluación según la metodología propuesta.
Fuente: Elaboración propia.

3.2.7. Recursos empleados

La metodología diseñada necesitará hacer uso de los siguientes recursos:

a) Recursos materiales:

- Libro de texto: Colera Jiménez, J., Oliveira González, M.J., Colera Cañas, R., Santaella Fernández, E. (2015). *Matemáticas I*. Madrid: ANAYA.
- Cuaderno del alumnado para realizar las actividades propuestas.
- Fichas de refuerzo y ampliación para el tratamiento de la diversidad.
- Calculadora para realizar los cálculos necesarios.
- Pizarra tradicional.
- Pizarra digital con conexión a internet.
- Proyector.
- Un ordenador por cada dos alumnos con software GeoGebra.

b) Recursos humanos:

- Profesor titular de la asignatura Matemáticas I.
- Participación activa de los alumnos.

c) Recursos espaciales:

- Aula habitual de clase.
- Aula de informática.

3.2.8. Resultados previstos

Tras haber estudiado la teoría de las inteligencias múltiples del matemático Howard Gardner, se puede concluir que puede resultar muy beneficiosa para el aprendizaje de las matemáticas, siempre y cuando se aplique correctamente. Esto es debido fundamentalmente a que esta teoría promueve el trabajo cooperativo de la clase y el desarrollo de cada una de las capacidades individuales de los alumnos. Al introducir cambios en el modo de desarrollar las clases, trabajar con casos de la vida cotidiana y hacer uso de distintas herramientas informáticas, se consigue atraer la atención de los alumnos y, al mismo tiempo, aumentar su motivación por las matemáticas.

Esta propuesta está pensada para enseñar las derivadas a los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias. Para lograrlo, se ha estudiado previamente cuáles son los intereses y las capacidades más destacadas entre estos alumnos, obteniendo como resultado su gran inclinación hacia el trabajo en grupo. Además, otra de las conclusiones extraídas de este estudio ha sido su gran apego por la música en general. De este modo, lo que se pretende con esta propuesta didáctica es potenciar al máximo la inteligencia lógico-matemática a través de distintas actividades relacionadas con las inteligencias interpersonal (trabajo cooperativo), intrapersonal (trabajo reflexivo) y musical (trabajo acompañado por música apropiada según el contexto).

Lo que se busca con esta propuesta concreta es conseguir que los alumnos sepan desenvolverse con soltura a la hora de resolver problemas matemáticos relacionados directamente con la vida cotidiana. Para lograrlo, se proponen una serie de actividades lo más acorde posible a su personalidad y que, al mismo tiempo, posibiliten su desarrollo intelectual, basándose en la reflexión matemática principalmente.

Para poder desarrollar con éxito la propuesta, es necesario encontrar un método de evaluación que determine el desarrollo y el progreso de cada una de las inteligencias presentes en los alumnos. Según Gardner (2012), la valoración de una inteligencia en concreto debería resolver los problemas que se dan en contextos relacionados con dicha inteligencia. Es decir, la inteligencia lógico-matemática será evaluada en contextos matemáticos a través de distintos problemas y ejercicios vinculados con cada caso en cuestión.

Además de la citado anteriormente, se pretende mejorar el compañerismo entre los estudiantes. Para ello, la realización de trabajos en grupo y las presentaciones orales, ayudarán a potenciar satisfactoriamente la inteligencia interpersonal de los alumnos, la cual es de vital importancia para la vida en general.

Finalmente, se pretende acabar con el tradicional sistema de evaluación, en el cual los alumnos se dedican a estudiar el día anterior al examen una gran cantidad de conceptos sin ningún tipo de reflexión por su parte, con la única finalidad de poder aprobar la asignatura. Es por ello que en esta propuesta se propone un sistema de evaluación diferente, basado en la observación diaria de los alumnos, donde se valora tanto su desarrollo intelectual como su actitud, participación y trabajo realizado en el aula.

4. Discusión

Durante la enseñanza de las matemáticas es de vital importancia llevar a cabo una metodología que desarrolle no sólo la comunicación matemática, sino también la comprensión, la reflexión, la simbolización y la representación. Además, los alumnos deben ser capaces de conjeturar, argumentar y realizar procesos de probar (Goñi, 2011). Sin embargo, conseguir el desarrollo satisfactorio de todas estas destrezas no resulta tan fácil, ya que, como consecuencia de la gran diversidad existente dentro de cada clase, acertar con una metodología concreta que asegure el éxito de los objetivos planteados puede resultar una tarea bastante complicada para el docente.

En la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner, éste determina el concepto de *inteligencia* como la habilidad necesaria e imprescindible para resolver los posibles problemas que puedan surgir en los distintos contextos culturales. Esta teoría involucra la necesidad de actuar y evaluar conforme a las capacidades, intereses y vocaciones de los alumnos, para lo cual es indispensable la aplicación de una metodología personalizada que garantice el desarrollo al máximo del potencial de cada alumno (Gardner 2012). Sin embargo, el resultado de esta teoría no puede ser rebatida ni confirmada, ya que no ha sido posible llevar a cabo su puesta en práctica. Tampoco se puede concluir su eficacia, ya que también va a depender de otros factores contextuales que, bien pueden mejorarla, bien pueden empeorarla según cada caso.

En este punto cabe destacar que, el tiempo es un factor clave a la hora de escoger una metodología concreta. Es decir, cada docente debe conseguir un equilibrio lo más igualado posible entre los contenidos a impartir en cada sesión y la mejor manera de llevarlos a cabo, escogiendo las actividades que, a su buen juicio, mejor se lo permitan. Precisamente ésta es una de las tareas de mayor dificultad para el propio docente, pues no debe estancarse en metodologías tradicionales por comodidad, sino que debe intentar siempre que le sea posible innovar y crear nuevas experiencias para ayudar a los alumnos a conseguir sus metas.

Por último, conviene señalar el sistema de evaluación que propone el propio Gardner, pues se sale de lo visto hasta el momento en el campo de la educación y puede llegar a crear numerosas líneas de discusión diferentes. Gardner plantea un sistema de evaluación que consiste en la observación directa del progreso de cada alumno, un sistema en el que el concepto de examen desaparecen como tal. En su razonamiento argumenta que, hoy en día, la única preocupación de los alumnos es estudiar para aprobar el examen, es decir, sin ningún tipo de interés por el aprendizaje reflexivo de las materias. Para ello, memorizan conceptos con escasa reflexión sobre los mismos y, frecuentemente, con la misma rapidez con que los memorizan los olvidan. Sin embargo, el sistema planteado en la nueva propuesta didáctica puede resultar a veces de gran dificultad para el docente. Las razones de estos impedimentos pueden ser varias, pero cabe destacar principalmente que, la ratio de alumnos por clase es cada vez mayor y no resulta fácil diseñar actividades en las que todos los alumnos tengan la posibilidad de participar por igual.

5. Conclusiones

Tras la realización de este trabajo, las conclusiones obtenidas en función de los objetivos planteados inicialmente son:

- En relación al objetivo principal del trabajo: *Exponer y fundamentar una metodología didáctica innovadora para explicar el bloque de análisis “derivadas y sus aplicaciones” a los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias, basada en la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner.* Se puede concluir que ha sido llevado a cabo con éxito. Para lograrlo, se ha llevado a cabo primeramente un estudio de la literatura vinculada con este campo de las matemáticas, en concreto con el bloque del análisis y las derivadas en particular. Por otro lado, se ha realizado un estudio de la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner. A continuación, se ha llevado a cabo un estudio de campo para poder obtener información acerca de las capacidades de los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias, así como de las dificultades más comunes que genera el estudio del Análisis. Con toda esta información se ha podido lograr este primer propósito.

- En cuanto al primer objetivo específico: *Analizar y exponer los contenidos del bloque de análisis de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.* Para lograrlo, se ha estudiado la legislación vigente tanto estatal como de la Comunidad Autónoma de La Rioja. De este modo, se han podido conocer cuáles son los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables exigidos por la LOMCE para este curso y bloque concreto. Por lo tanto, se puede afirmar que este objetivo ha sido cumplido con éxito también.

- El segundo objetivo específico planteado era: *Determinar y detallar las principales dificultades ante las que se encuentran los alumnos en el aprendizaje de las derivadas y sus aplicaciones durante el Bachillerato.* Para ello, se ha entrevistado a tres profesores de matemáticas de colegio Santa Teresa, confiando en su larga experiencia como docentes de esta materia. De este modo, se ha podido recoger información sobre los errores más comunes que presentan los alumnos en este bloque concreto, así como los obstáculos más importantes ante los que se enfrentan. De nuevo, este objetivo ha sido superado.

- El tercer objetivo específico decía lo siguiente: *Averiguar y formular las inteligencias múltiples más desarrolladas en el aula de 1º de Bachillerato y relacionarlas con las actividades que mejor se adecúen a los alumnos para la comprensión de los conceptos y de los procedimientos matemáticos.* A través del estudio de campo, se ha conseguido que los alumnos del aula concreta contesten a un test de las inteligencias múltiples y, mediante la interpretación de los resultados obtenidos, se han podido conocer tanto los intereses como las capacidades más destacadas entre ellos: intrapersonal, interpersonal, musical y lógico-matemática. En consecuencia, se han propuesto actividades relacionadas con dichas facetas para lograr que los alumnos se encuentren motivados por la asignatura y obtener el mayor provecho de sus capacidades intelectuales. Este objetivo también se ha logrado con éxito.

- En cuanto al último objetivo específico propuesto: *Investigar y detallar las características de la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner para el currículo concreto de las matemáticas en Bachillerato.* Se ha investigado sobre la relación existente entre las distintas actividades docentes y las siete inteligencias que propone Gardner. Consecuentemente, se ha podido diseñar una propuesta metodológica para enseñar las derivadas en la aula de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias acorde con lo anterior. Este último objetivo también ha sido superado.

Para finalizar comentar que, mediante el cumplimiento de estos objetivos se han podido obtener los fundamentos tanto teóricos como prácticos para poder diseñar una propuesta didáctica lo más acorde posible a la metodología planteada. Por lo tanto, se puede concluir que el objetivo final de este presente trabajo ha sido alcanzado con éxito.

6. Limitaciones del trabajo

Durante el desarrollo de este Trabajo Final de Máster se han encontrado ciertas limitaciones que han dificultado la propia investigación.

En cuanto al desarrollo del marco teórico, se ha encontrado ciertas dificultades a la hora de acceder a determinadas obras, ya sea por no estar disponibles en la biblioteca de Logroño o en distintas bases de datos consultadas. Aún así, se ha intentado acceder al mayor número de documentos posible para poder redactar un marco teórico lo más representativo posible. En relación con este tema, se puede entender además que el marco teórico propuesto carezca de un número de puntos de vista suficiente, al no contrastar con las opiniones de otros autores sobre la teoría de las inteligencias múltiples que Gardner propone.

Por otra parte, el trabajo de campo se ha realizado en tan sólo 22 alumnos, por lo que quizás los resultados obtenidos no puedan hacer referencia a toda la realidad del conjunto de los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias existentes. Del mismo modo, debido al escaso tiempo disponible para la realización del trabajo, sólo ha sido posible realizar el estudio en un centro y un aula concreta, pudiendo haberlo desarrollado también en otros centros y aulas dentro de la comunidad autónoma de La Rioja si hubiese sido viable. Y extrapolando la metodología propuesta un poco más allá, podría haberse planteado además en otras unidades didáctica a parte de la propuesta dentro de las Matemáticas.

Por último, sin la aplicación práctica de la propuesta didáctica planteada no se pueden conocer los resultados que se lograrían, así como comprobar las virtudes y los inconvenientes que se encontrarían durante su proceso. Además, la aplicación de esta metodología en un currículo demasiado tradicionalista resulta muy complicado, dada la cantidad de cambios que supondría realizar, sobre todo en lo que concierne al sistema de evaluación propuesto. De este modo, hasta que esta propuesta no sea probada en distintas aulas, resultará complicado mostrar su efectividad.

7. Prospectiva: Líneas de acción futura

Teniendo en cuenta posibles futuras investigaciones sobre este mismo tema, lo más interesante de todo sería poder poner en práctica la metodología propuesta en este trabajo. De este modo, podríamos disponer de las herramientas necesarias para poder evaluarla a posteriori adecuadamente. Se podría además comprobar si el tiempo previsto en cada sesión y el tiempo real necesario para llevarlo a cabo se corresponden, así como constatar el grado de dificultad de las actividades planteadas, el aprendizaje logrado por parte de los alumnos y, en definitiva, la validez de la evaluación propuesta. Una vez realizado esto, se debería modificar todos aquellos apartados que fuesen necesarios con el fin de conseguir la mejora del aprendizaje de las derivadas en el aula de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.

Otro aspecto interesante sobre el cual se podría llevar a cabo una investigación es desarrollar un modelo de evaluación para este tipo concreto de metodología. Su finalidad principal sería poder facilitar el trabajo de evaluación diario que supone la misma, ya que requiere de un alto nivel de concentración para poder observar, controlar y tomar nota de todos y cada uno de los alumnos a diario por parte del docente. La principal dificultad de este sistema de evaluación radica en la elevada ratio de alumnos por aula existente, así como en la diversidad dentro de las mismas. Además, para futuros trabajos, se podría proponer desarrollar un sistema de evaluación concreto para poner en práctica esta teoría, y poder así estudiar las posibles ventajas e inconvenientes encontrados en su realización.

Teniendo en cuenta estas líneas de investigación futura como primordiales, a continuación se exponen otras posibles áreas o campos a las cuales puede ampliarse la metodología didáctica propuesta en este presente trabajo:

- Primero de todo, es posible extraer dicha metodología para la enseñanza-aprendizaje de otras unidades didácticas dentro de la asignatura Matemáticas I de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias.

- Además, una vez comprobada su validez en el curso específico de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias, es posible llevarla a cabo en cualquier otro curso de la ESO o de Bachillerato. Y no sólo dentro de la asignatura de Matemáticas, sino para la enseñanza-aprendizaje de cualquier asignatura en general.

- También sería interesante realizar un estudio sobre la posibilidad de agrupar a los alumnos de una misma etapa de acuerdo a sus inquietudes personales, e intentar desarrollar esta metodología con cada uno de los grupos; siempre y cuando se tenga la certeza de que al finalizar dicha etapa, todos y cada uno de los alumnos hayan adquirido el mismo grado de conocimiento, es decir, posean el mismo nivel curricular.

- Por último, una última línea de investigación sería analizar en profundidad las limitaciones que presenta esta nueva metodología planteada dentro de los diferentes curso y materias.

8. Bibliografía

8.1. Referencias bibliográficas

Anteproyecto del Decreto de abril de 2015, por el que se establece el currículo de Bachillerato y se regulan determinados aspectos sobre su organización así como la evaluación, promoción y titulación del alumnado de la Comunidad Autónoma de La Rioja.

Armstrong, T. (2006). *Inteligencias múltiples en el aula: Guía práctica para educadores*. Barcelona: Paidós.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. *Revisita Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40-55.

Borrador currículo básico de Bachillerato según LOMCE, Anexo I, en la Comunidad Autónoma de La Rioja. Recuperado de:
https://www.larioja.org/npRioja/cache/documents/885718_Borrador_Curriculos_Bachillerato.pdf?idtab=766508

Chambers, P. y Timlim, R. (2013). *Teaching Mathematics in the Secondary School* (2º Ed.). Londres: SAGE Publications.

Colera, J., Oliveira, M.J., Colera, R. y Santaella, E. (2015). *Matemáticas I*. Madrid: ANAYA.

Decreto 45/2008, de 27 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato de la Comunidad Autónoma de La Rioja. Recuperado de:
<https://www.larioja.org/npRioja/default/defaultpage.jsp?idtab=724659&tipo=2&fecha=2008/07/03&referencia=702015-1-HTML-385033-X>

Gardner, H. (2012). *Inteligencias múltiples. La teoría en práctica*. Barcelona: Paidós.

Gilbert, J. (2005). *Catching the Knowledge Wave: the Knowledge Society and the Future of Education*. Wellington, NZ: New Zealand Council for Educational Research.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros* (7-154). Recuperado de.
http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Gómez-Chacón, I.M. (2000). *Matemática emocional: Los efectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Goñi, J.M. (coord.) (2011). *Didáctica de las matemáticas*. Barcelona: Graó.

Grupo Cero (1977). *Matemáticas de Bachillerato*. Valencia: Roberto Guillén. D.L.

Harel, G. et al. (2006). *Advanced mathematical thinking*. Handbook of research on the psychology of mathematic education: past, present and future (147-172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41 (2), 169-202.

MECD (2011). PIRLS-TIMS 2011. Obtenido del Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemática y ciencias. Vol. I Informe Español. Recuperado de:
<http://www.mecd.gob.es/dctm/innee/internacional/pirlstimss2011vol1-1.pdf?documentId=0901e72b81825be4>

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). Presentación explicativa del Proyecto LOMCE. Recuperado de:
<http://www.mecd.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/dms/mecd/servicios-al-ciudadano-mecd/participacion-publica/lomce/20130517-aprobacion-proyecto-de-ley-nota.pdf>

Ministerio de la Presidencia. Boletín oficial del Estado. Recuperado de:
<http://www.boe.es/buscar/pdf/2006/BOE-A-2006-7899-consolidado.pdf>

OCDE (2013). *ESPAÑA-Nota País-Resultados PISA 2012*. Recuperado de:
<http://estaticos.elmundo.es/documentos/2013/12/03/pisa-espana.pdf>

OCDE (2013). *ESPAÑA-Nota País-Panorama de la Educación 2013*. Recuperado de:
[http://www.oecd.org/edu/Spain_EAG2013%20Country%20Note%20\(ESP\).pdf](http://www.oecd.org/edu/Spain_EAG2013%20Country%20Note%20(ESP).pdf)

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, publicado en el BOE núm. 3 del 3 de enero de 2015. Recuperado de:
<http://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.

9. Anexos

9.1. Anexo I: Test inteligencias múltiples de Gardner

INSTRUCCIONES: Lee atentamente cada una de las afirmaciones. Si expresan características fuertes en tu persona y te parece que la afirmación es veraz, entonces coloca una “V” y si no lo es, coloca una “F”.

1.Prefiero hacer un mapa que explicarle a alguien cómo tiene que llegar.
2.Si estoy enfadado/a o contento/a generalmente sé exactamente por qué.
3.Sé tocar (o antes sabía tocar) un instrumento musical.
4.Asocio la música con mis estados de ánimo.
5.Puedo sumar o multiplicar mentalmente con mucha rapidez.
6.Puedo ayudar a un amigo a manejar sus sentimientos porque yo lo pude hacer antes en relación a sentimientos parecidos.
7.Me gusta trabajar con calculadoras y ordenadores.
8.Aprendo rápido a bailar un ritmo nuevo.
9.No me es difícil decir lo que pienso en el curso de una discusión o debate.
10.Disfruto de una buena charla, discurso o sermón.
11.Siempre distingo el norte del sur, esté donde esté.
12.Me gusta reunir grupos de personas en una fiesta o en un evento especial.
13.La vida me parece vacía sin música.
14.Siempre entiendo los gráficos que vienen en las instrucciones de equipos o instrumentos.
15.Me gusta hacer rompecabezas y entretenerte con juegos electrónicos.
16.Me fue fácil aprender a andar en bicicleta (o en patines).
17.Me enfado cuando escucho una discusión o una afirmación que parece totalmente ilógica.

18.Soy capaz de convencer a otros para que sigan mis planes.
19.Tengo buen sentido de equilibrio y coordinación.
20.Con frecuencia veo configuraciones y relaciones entre números con más rapidez y facilidad que otros.
21.Me gusta construir modelos o hacer esculturas.
22.Tengo agudeza para encontrar el significado de las palabras.
23.Puedo mirar un objeto de una manera y con la misma facilidad verlo.
24.Con frecuencia hago la conexión entre una pieza musical y algún evento de mi vida.
25.Me gusta trabajar con números y figuras.
26.Me gusta sentarme silenciosamente y reflexionar sobre mis sentimientos íntimos.
27.Con sólo mirar la forma de construcciones y estructuras me siento a gusto.
28.Me gusta tararear, silbar y cantar en la ducha o cuando estoy solo/a.
29.Soy bueno/a en atletismo.
30.Me gusta escribir cartas detalladas a mis amigos.
31.Generalmente me doy cuenta de la expresión que tengo en la cara.
32.Me doy cuenta de las expresiones en la cara de otras personas.
33.Me mantengo “en contacto” con mis estados de ánimo. No me cuesta identificarlos.
34.Me doy cuenta de los estados de ánimo de otros.
35.Me doy cuenta bastante bien de lo que otros piensan de mí.

9.2. Anexo II: Resultados test inteligencias múltiples en el aula de 1º de Bachillerato Modalidad Ciencias.

Tabla 10. *Resultados de los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias encuestados del Colegio Santa Teresa.*

Alum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	To tal	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
Item 1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	6
Item 2	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	18
Item 3	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	10
Item 4	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	13
Item 5	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	16
Item 6	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	18
Item 7	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	18
Item 8	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	8
Item 9	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	13
Item 10	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	12
Item 11	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	8
Item 12	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	18
Item 13	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	17
Item 14	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	11
Item 15	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	11
Item 16	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	19
Item 17	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	14
Item 18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	17
Item 19	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	14
Item 20	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	10
Item 21	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
Item 22	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	14

Item 23	1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 13
Item 24	1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 11
Item 25	1 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 12
Item 26	1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 11
Item 27	0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 5
Item 28	1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 17
Item 29	1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 9
Item 30	0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 5
Item 31	1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 14
Item 32	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 21
Item 33	1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 18
Item 34	1 0 21
Item 35	1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 16

Nota: Resultados de los alumnos de 1º de Bachillerato de la modalidad Ciencias encuestados del colegio Santa Teresa.

Fuente: Elaboración propia.

Inteligencia lingüística: ítems 9, 10, 17, 22 y 30.

Inteligencia lógico-matemática: ítems 5, 7, 15, 20 y 25.

Inteligencia espacial: ítems 1, 11, 14, 23 y 27.

Inteligencia cinético-corporal: ítems 8, 16, 19, 21 y 29.

Inteligencia musical: ítems 3, 4, 13, 24 y 28.

Inteligencia interpersonal: ítems 2, 6, 26, 31 y 33.

Inteligencia intrapersonal: ítems 12, 18, 32, 34 y 35.

Tabla 11. Resumen de los resultados obtenidos de las encuestas.

Tipo de inteligencia	Resultado obtenido
Inteligencia lingüística	58
Inteligencia lógico-matemática	67
Inteligencia espacial	43
Inteligencia cinético-corporal	53
Inteligencia musical	68
Inteligencia interpersonal	79
Inteligencia intrapersonal	93

Nota: Resumen de los resultados obtenidos de las encuestas.

Fuente: Elaboración propia.

9.3. Anexo III: Entrevistas a profesores de matemáticas.

9.3.1. Entrevista docente nº 1.

1. Tipo de centro: público, privado o concertado.
En centro concertado.
2. ¿En qué niveles imparte clases de matemáticas?
ESO y Bachillerato.
3. ¿Cuántos años lleva en la enseñanza de matemáticas de secundaria/bachillerato?
Llevo enseñando matemáticas 6 años.
4. ¿Los alumnos están motivados para estudiar matemáticas en general?
No demasiado, sólo algunos.
5. ¿Qué bloque de las matemáticas cree que es de mayor dificultad para los alumnos?
El análisis. Las cuentas y cálculo numérico les cuesta mucho.
6. ¿Qué metodología emplea en sus clases? *Tradicional, participativa, etc.*
Mezclo clase magistral con trabajo cooperativo.
7. ¿Utiliza los recursos TIC en sus clases? ¿Cuáles?
Sí, la Pizarra Digital Interactiva y los ordenadores.
8. ¿Cree que el aprendizaje del análisis genera grandes dificultades en los alumnos?
¿Qué unidad didáctica del análisis cree que es la que más dificultades genera?
Sí, les genera mucha dificultad. En especial los temas de derivadas e integrales.
9. Puntúa las siguientes dificultades del bloque de análisis según las dificultades que generan en los alumnos de secundaria/bachillerato; de 0 a 5 (*o no generan dificultades y 5 generan muchas dificultades*).

- Relación que se establece entre la expresión analítica y la representación gráfica de una función5.....
- Concepto de límite4.....
- Concepto de infinito4.....
- Derivación y sus aplicaciones4.....
- Integración y sus aplicaciones5.....
10. ¿Cuál es el nivel de conocimiento de los alumnos de 1º de BTO en el cálculo de derivadas y sus aplicaciones? (*Muy bajo, bajo, medio, alto, avanzado*).
Nivel medio.
11. ¿Son conscientes los alumnos de lo que están calculando al derivar una función o lo tienen por algo mecánico?
No, lo tienen por algo completamente mecánico.

12. ¿Resuelven las representaciones gráficas de funciones correctamente?

Mecánicamente sí, pero no saben interpretar los resultados.

13. ¿Son capaces de aplicar las derivadas en la resolución de problemas? ¿Cuáles son los errores más comunes en este sentido?

No, si no es mecánico y los problemas son diferentes a los vistos en clase.

No saben encontrar bien los máximos y los mínimos.

14. ¿Conoce la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner? ¿La aplicaría para la enseñanza de las derivadas? ¿Cómo?

Sí, pero nunca me he planteado cómo usarla.

15. Alguna aportación que desee realizar.

Hay conceptos matemáticos más fáciles de interpretar y llevar a la vida real que el concepto de derivada.

9.3.2. Entrevista docente nº 2.

1. Tipo de centro: público, privado o concertado.
En centro concertado.
2. ¿En qué niveles imparte clases de matemáticas?
ESO y Bachillerato.
3. ¿Cuántos años lleva en la enseñanza de matemáticas de secundaria/bachillerato?
Llevo enseñando matemáticas 31 años.
4. ¿Los alumnos están motivados para estudiar matemáticas en general?
Regular.
5. ¿Qué bloque de las matemáticas cree que es de mayor dificultad para los alumnos?
El análisis, ya que requiere tener presentes bastantes conceptos a la vez.
6. ¿Qué metodología emplea en sus clases? *Tradicional, participativa, etc.*
Mezclo clase magistral y participativa.
7. ¿Utiliza los recursos TIC en sus clases? ¿Cuáles?
No, sólo el cañón cuando lo necesito para alguna actividad en concreto.
8. ¿Cree que el aprendizaje del análisis genera grandes dificultades en los alumnos?
¿Qué unidad didáctica del análisis cree que es la que más dificultades genera?
Sí, sobre todo las integrales.
9. Puntúa las siguientes dificultades del bloque de análisis según las dificultades que generan en los alumnos de secundaria/bachillerato; de 0 a 5 (*o no generan dificultades y 5 generan muchas dificultades*).

- Relación que se establece entre la expresión analítica y la representación gráfica de una función1.....
- Concepto de límite3.....
- Concepto de infinito4.....
- Derivación y sus aplicaciones3.....
- Integración y sus aplicaciones5.....
10. ¿Cuál es el nivel de conocimiento de los alumnos de 1º de BTO en el cálculo de derivadas y sus aplicaciones? (*Muy bajo, bajo, medio, alto, avanzado*).
Nivel medio.
11. ¿Son conscientes los alumnos de lo que están calculando al derivar una función o lo tienen por algo mecánico?
Lo tienen por algo mecánico.
12. ¿Resuelven las representaciones gráficas de funciones correctamente?
Mecánicamente sí.

13. ¿Son capaces de aplicar las derivadas en la resolución de problemas? ¿Cuáles son los errores más comunes en este sentido?
En general sí.
Derivar un cociente, cómo derivar numerador y denominador.
14. ¿Conoce la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner? ¿La aplicaría para la enseñanza de las derivadas? ¿Cómo?
Sí, pero no sabría cómo.
15. Alguna aportación que desee realizar.
Ninguna, gracias.

9.3.3. Entrevista docente nº 3.

1. Tipo de centro: público, privado o concertado.
En centro concertado.
2. ¿En qué niveles imparte clases de matemáticas?
ESO y Bachillerato.
3. ¿Cuántos años lleva en la enseñanza de matemáticas de secundaria/bachillerato?
Llevo enseñando matemáticas 12 años.
4. ¿Los alumnos están motivados para estudiar matemáticas en general?
En general no, son pocos los motivados. Es nuestra tarea motivarlos.
5. ¿Qué bloque de las matemáticas cree que es de mayor dificultad para los alumnos?
El álgebra y el análisis, hasta que desarrollan la abstracción y ven analogías con otras áreas.
6. ¿Qué metodología emplea en sus clases? *Tradicional, participativa, etc.*
Tradicional a la hora de presentarles temas completamente nuevos para ellos. Y para temas algo conocidos por los alumnos utilizo el trabajo cooperativo, PBL...
7. ¿Utiliza los recursos TIC en sus clases? ¿Cuáles?
Sí. Proyecto presentaciones sobre todo para el área de geometría, y a veces se realizan ejercicios de repaso. También navegamos por webs interactivas.
8. ¿Cree que el aprendizaje del análisis genera grandes dificultades en los alumnos?
¿Qué unidad didáctica del análisis cree que es la que más dificultades genera?
Creo que el aprendizaje de límites y derivadas les cuesta mucho. Muchos alumnos lo hacen mecánicamente sin comprender nada.
9. Puntúa las siguientes dificultades del bloque de análisis según las dificultades que generan en los alumnos de secundaria/bachillerato; de 0 a 5 (*0 no generan dificultades y 5 generan muchas dificultades*).

- Relación que se establece entre la expresión analítica y la representación gráfica de una función3.....
- Concepto de límite2.....
- Concepto de infinito2.....
- Derivación y sus aplicaciones4.....
- Integración y sus aplicaciones4.....
10. ¿Cuál es el nivel de conocimiento de los alumnos de 1º de BTO en el cálculo de derivadas y sus aplicaciones? (*Muy bajo, bajo, medio, alto, avanzado*).
Nivel medio.
11. ¿Son conscientes los alumnos de lo que están calculando al derivar una función o lo tienen por algo mecánico?
Lo tienen por algo mecánico en general.

12. ¿Resuelven las representaciones gráficas de funciones correctamente?

Mecánicamente sí.

13. ¿Son capaces de aplicar las derivadas en la resolución de problemas? ¿Cuáles son los errores más comunes en este sentido?

El error más común es no leer correctamente los enunciados de los problemas, lo que les lleva a un mal planteamiento del mismo.

14. ¿Conoce la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner? ¿La aplicaría para la enseñanza de las derivadas? ¿Cómo?

Sí, a través de la interpretación física de la derivada y sus múltiples aplicaciones físicas. Lo podemos plasmar, por ejemplo, en actividades de diferente desarrollo de cada inteligencia múltiple.

15. Alguna aportación que desee realizar.

Creo que la mejora de la comprensión y aprendizaje de las matemáticas pasa porque el profesorado hagamos descubrir muchas aplicaciones prácticas de esta misma materia.

9.4. Anexo IV: Reglas de derivación de funciones elementales y compuestas.

OPERACIONES

- | | |
|------------------------|--|
| 1.- SUMA | $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ |
| 2.- PRODUCTO POR UN N° | $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ |
| 3.- PRODUCTO | $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ |
| 4.- COCIENTE | $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ |
| 5.- INVERSA | $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ |
| 6.- REGLA DE LA CADENA | $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ |

FUNCIONES ELEMENTALES

- 1.- $(k)' = 0$
- 2.- $(x)' = 1$
- 3.- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- 4.- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- 5.- $(e^x)' = e^x$
- 6.- $(a^x)' = a^x \ln a$
- 7.- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- 8.- $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
- 9.- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
- 10.- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$
- 11.- $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- 12.- $(\operatorname{cot} g x)' = -(1 + \operatorname{cot} g^2 x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$
- 13.- $(\operatorname{arc sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 14.- $(\operatorname{arccos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 15.- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

FUNCIONES COMPUESTAS

- 2.- $(f(x))' = f'(x)$
- 3.- $(f^n(x))' = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
- 4.- $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$
- 5.- $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x)$
- 6.- $(a^{f(x)})' = a^{f(x)} f'(x) \ln a$
- 7.- $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- 8.- $(\log_a f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
- 9.- $(\operatorname{sen} f(x))' = f'(x) \cos f(x)$
- 10.- $(\cos f(x))' = -f'(x) \operatorname{sen} f(x)$
- 11.- $(\operatorname{tg} f(x))' = f'(x) (1 + \operatorname{tg}^2 f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
- 12.- $(\operatorname{cot} g f(x))' = -f'(x) (1 + \operatorname{cot} g^2 f(x)) = \frac{-f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$
- 13.- $(\operatorname{arc sen} f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
- 14.- $(\operatorname{arccos} f(x))' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
- 15.- $(\operatorname{arctg} f(x))' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

Función elevada a función $(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$

9.5. Anexo V: Ejemplos de actividades de cada sesión.

9.5.1. Sesión 1_Búsqueda en el periódico.

Cada grupo debe llevar a clase recortes de periódicos o papeles impresos de periódicos digitales (tanto nacionales como regionales) en los que aparezcan datos sobre el paro en el último año. A continuación, cada grupo expondrá su recorte con los datos del paro que haya encontrado.

Los alumnos deberán hacerse preguntas acerca de qué les sugieren los datos que observan. Se realizará un debate entre cada grupo analizando los datos. Las preguntas sobre las que se pueden realizar el debate son:

- ¿Cuál ha sido la variación del paro en total?
- ¿Cuándo fue mayor la disminución del paro? ¿Por qué crees que ha ocurrido?
- ¿Con qué acontecimiento coincide? (Con esta pregunta pueden extraer conclusiones diferentes dependiendo de la región escogida)
- ¿Cuál es la variación media total?
- ¿Cuál fue el peor mes para el desempleo? ¿Por qué crees que ha ocurrido?

Finalmente, cada grupo expondrá sus conclusiones acerca de los resultados obtenidos y se abrirá un debate que permita llegar a nuevas hipótesis, lo cual enriquecerá la actividad aún más.

9.5.2. Sesión 2_Problema T.V.M y T.M.I.

La gráfica siguiente muestra la trayectoria recorrida por un coche desde Sabadell hasta Blanes. La distancia viene dada en km y el tiempo en minutos. La distancia es función del tiempo.

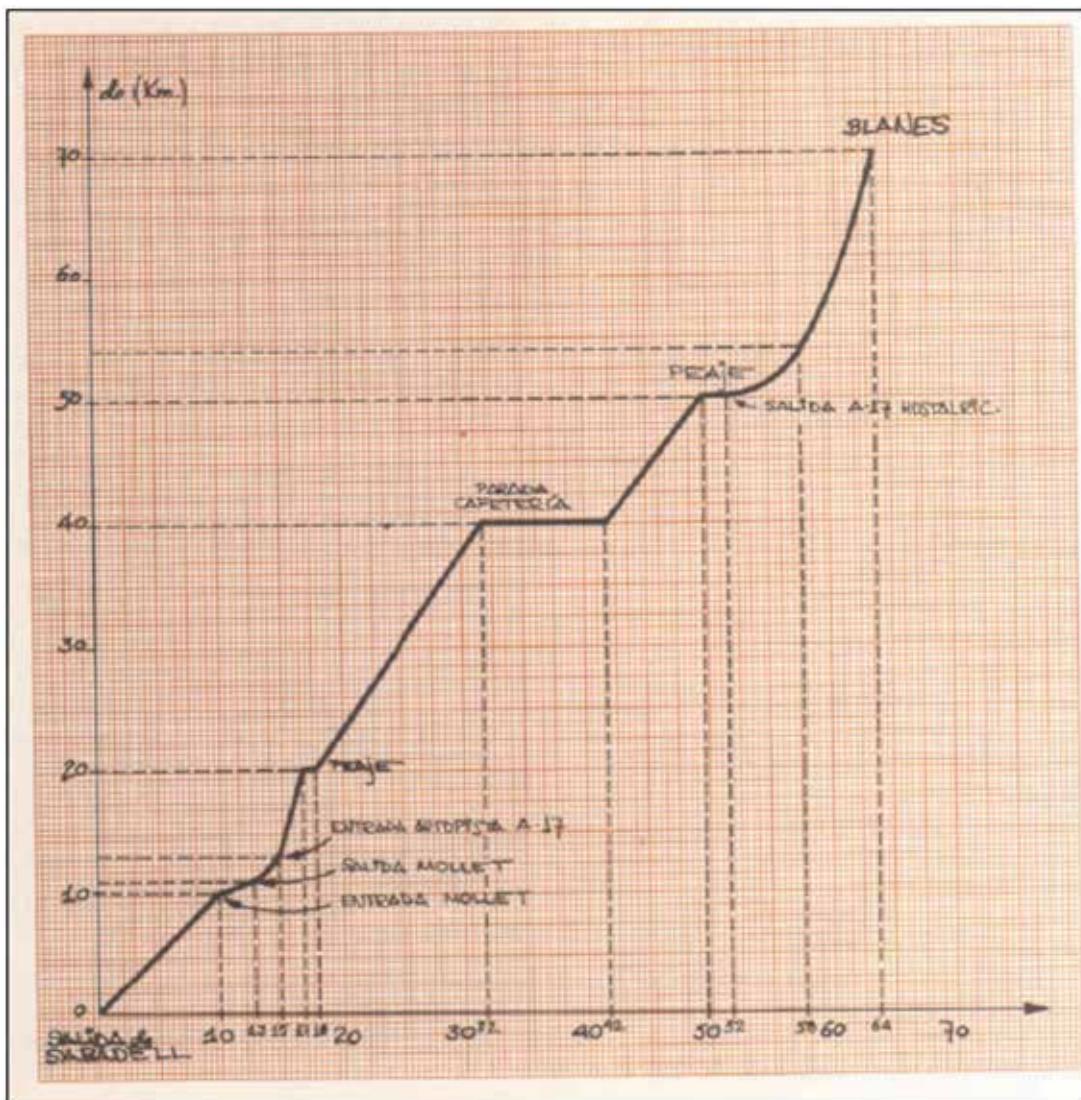


Figura 2: Gráfica espacio-tiempo problema T.V.M. y T.V.I.
Fuente: Elaboración propia a partir de Grupo Cero (1997).

Con los datos conocidos, contesta a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche durante el trayecto?
- ¿Cuál ha sido la velocidad media que ha llevado por la autopista? Si no tenemos en cuenta el tiempo perdido en las paradas en la autopista, ¿cuál es la velocidad media en ella?
- ¿Cuál es la velocidad media de Hostalric a Blanes?
- ¿Cuál es la velocidad media entre el instante $t=52$ m y $t=64$ m?
- ¿Cuánto marcará el velocímetro del coche cuando se lleven 45 minutos de viaje?
- ¿Cuánto marcará en el instante 58 minutos? Aunque no puedas saberlo con precisión, indica el valor aproximado de la velocidad en el instante 58 minutos y justifica dicha aproximación realizada.

9.5.3. Sesión 7_Relación entre representaciones gráficas.

Relaciona cada una de las siguientes funciones con la representación gráfica de su función derivada correspondiente.

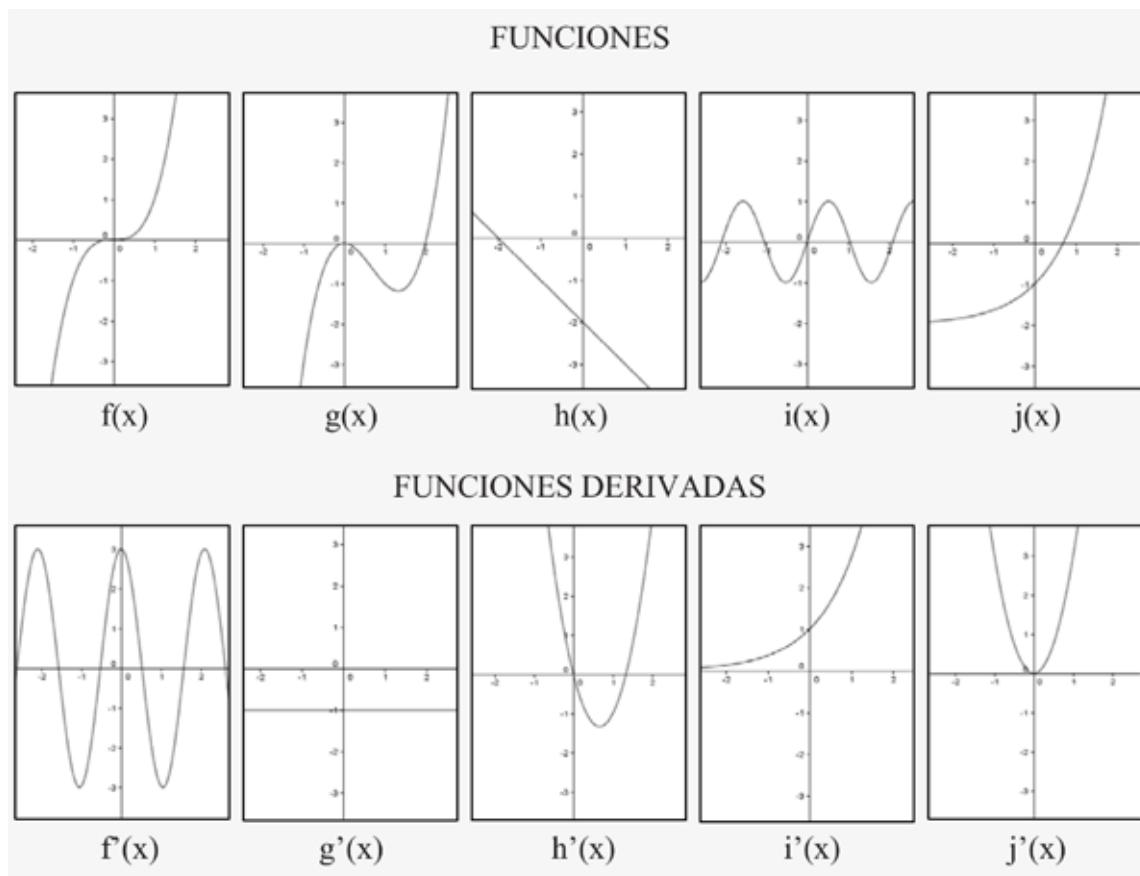


Figura 3: Gráficas de funciones y sus derivadas.
Fuente: Libro *Matemáticas I* (2015).

9.5.4. Sesión 10_Construye tu propia caja.

Cada alumno deberá construir una caja a partir de unas láminas de plástico duro tamaño DIN-A4 que el mismo profesor entregará. Para ello, los alumnos deberán realizar cortes cuadrados en las esquinas y posteriormente doblar las solapas que se generan.

Se pretende que la capacidad de la caja sea lo mayor posible. Mediante distintas pruebas, los alumnos deberá hacer una estimación de los centímetros de los cuadrados que deben cortar para que la capacidad de la caja obtenida sea la mayor posible.

¿Cuántos centímetros deberán cortar en cada esquina para conseguirlo?

a) Una vez tenga cada alumno las cajas formadas, sin hacer ningún cálculo previo y solamente utilizando la intuición deberán:

- Estimar cuál debe ser el tamaño de los cortes.
- Comprobar con agua qué cantidad le cabe a cada uno en dentro de la caja.
- Dar una solución aproximada.

b) A continuación deberán resolver el problema algebraicamente.

c) Con la ayuda del software GeoGebra deberán representar gráficamente el problema anterior y extraer las conclusiones que se desprendan del dibujo generado.

d) Por último, se comprobarán los resultados obtenidos en cada apartado.

9.5.5. Sesión 11_Problemas de optimización.

Resuelve los siguientes problemas de optimización relacionados con la vida cotidiana.

1. Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 €/m y la de los otros lados 10 €/m, halla el área del mayor campo que puede cercarse con 28.800 €.
2. Las páginas de un libro deben medir cada una 600 cm² de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 2 cm. y el superior mide 3 cm. Calcular las dimensiones de la página que permitan obtener la mayor área posible.
3. El propietario de un edificio tiene alquilados los 40 pisos del mismo a un precio de 600 € cada uno. Por cada 60 € que el propietario aumenta el precio, observa que pierde un inquilino. ¿A qué precio le conviene alquilar los pisos para obtener la mayor ganancia posible? (Ayuda: llamar $x=n^o$ de 60 € que aumenta o lo que es lo mismo, n^o de inquilinos perdidos).
4. El consumo de un barco navegando a una velocidad de x nudos (millas/hora) viene dada por la expresión $C(x) = (x^2/60) + (450/x)$. Calcular la velocidad más económica y el coste equivalente.
5. Se quiere construir depósitos cilíndricos, con la condición de que la altura más el perímetro de la circunferencia valgan 100 m. Comprobar que el volumen de los depósitos viene dado por la expresión $V=100 \cdot \pi \cdot r^2 - 2 \cdot \pi^2 \cdot r^3$ y determinar las dimensiones del que tiene volumen máximo.
6. Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 10 cm., calcula las dimensiones del que tenga área máxima.

9.6. Anexo VI: Trabajo individual puntuable.

1.- Calcula las siguientes derivadas. (3 puntos)

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 2}{e^x - 2}\right)^3$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

$$y = \cos^4(3x + 1)$$

2.- Representa gráficamente la siguiente función. (4 puntos)

a) $y = -x^4 + x^2$

b) $y = \frac{x^2}{x^2 + 2x - 4}$

3.- Lee atentamente y realiza el siguiente problema de optimización. (3 puntos)

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible.