



**Universidad Internacional de La Rioja**  
**Facultad de Educación**

**Trabajo fin de máster**

Cómo enseñar la Geometría de las figuras planas en 1º de la ESO para facilitar su aprendizaje

**Presentado por:** Carlos Collados Carretero  
**Línea de investigación:** No experimental  
**Directora:** Elena Almaraz Luengo

**Ciudad:** Madrid  
**Fecha:** 07 de julio de 2015

## Resumen

Las dificultades de aprendizaje que encuentran los alumnos de 1º de la ESO en las Matemáticas, con respecto a la Geometría de las figuras planas, es el punto de partida de este trabajo de investigación. A lo largo del periodo de prácticas del máster de formación de profesorado, se ha tenido la oportunidad de observar e intervenir en un grupo de alumnos de 1º de la ESO, con el fin de comprobar la realidad de esta situación en el aula. Una vez conocidos los principales problemas de los alumnos, se han buscado soluciones para cada uno de ellos, que les ayuden a mejorar sus dificultades en este campo.

El trabajo termina exponiendo las diferentes propuestas educativas que minimizan los problemas que encuentran los alumnos y les facilitan la comprensión en cuanto a los conceptos, propiedades y aplicaciones de todos los aspectos relacionados con las figuras planas dentro del bloque de la Geometría.

*Palabras clave:* Matemáticas, Dificultades, Geometría, Figuras Planas, Aprendizaje, Propuesta Didáctica.

## Abstract

Learning difficulties encountered by students of 1st ESO in Mathematics, regarding to the Geometry of plane figures, it is the starting point of this research. During the internship period of the master of teacher training, we have had the opportunity to observe and participate in a group of students of 1<sup>st</sup> ESO, in order to verify the reality of the situation in the classroom. Once known the main problems of the students, we have searched for solutions for each of them, which help them to improve their difficulties in this field.

The work ends up exposing the different educational proposals that minimize the problems faced by students and facilitates their understanding about the concepts, properties and applications of all aspects of plane figures within the block of Geometry.

*Key words:* Mathematics, Difficulties, Geometry, Plane Figures, Learning, Didactic Proposal.

# Índice

---

## Índice de contenidos

1. Introducción.....	5
1.1. Justificación.....	5
1.2. Planteamiento .....	5
1.3. Objetivos.....	5
1.4. Aspectos metodológicos .....	6
1.5. Fuentes bibliográficas .....	6
2. Marco teórico.....	7
2.1. Estudio conceptual.....	7
2.2. Marco histórico .....	8
2.3. Contenidos curriculares.....	9
2.4. Dificultades de aprendizaje .....	9
3. Propuesta didáctica .....	11
3.1. Metodología.....	11
3.1.1. Diseño .....	11
3.1.2. Adecuación con los objetivos.....	12
3.1.3. Muestra.....	12
3.1.4. Instrumentos de recogida de datos .....	13
3.1.5. Tratamiento de los datos .....	13
3.2. Investigación.....	13
3.3. Análisis de los resultados.....	13
3.3.1. Análisis cuantitativo .....	13
3.3.2. Análisis cualitativo .....	19
3.4. Soluciones .....	22
4. Conclusiones.....	29
5. Limitaciones .....	32
6. Prospectiva .....	33
7. Bibliografía .....	34
7.1. Referencias bibliográficas.....	34
7.2. Bibliografía de imágenes.....	35
7.3. Bibliografía de tablas .....	35
8. Anexos .....	36
8.1. Anexo I: Encuesta .....	36
8.2. Anexo II: Examen escrito .....	38
8.3. Anexo III: Ampliación de la encuesta.....	41

## Índice de figuras

Figura 1: Características de un problema geométrico. (De Paz, 2015) .....	23
Figura 2. Demostración del área de un paralelogramo. Elaboración propia. ....	24
Figura 3. Demostración del área de un trapecio. Elaboración propia. ....	24

## Índice de tablas

Tabla 1. Relación objetivos-metodología.....	12
Tabla 2: De los siguientes bloques de las Matemáticas, ¿cuál de ellos se te da mejor? ..	14
Tabla 3: ¿Y cuál se te da peor?.....	15
Tabla 4: ¿Has tenido dificultades con las Matemáticas en cursos anteriores? .....	15
Tabla 5: ¿Has tenido dificultades con el resto de asignaturas durante este curso? .....	16
Tabla 6: Dentro del bloque de Geometría, señala el tema que más dificultades te ha presentado. .....	16
Tabla 7: Dentro de las figuras planas, señala la que has encontrado más complicada...	17
Tabla 8: En el círculo y la circunferencia, ¿has encontrado dificultades al manejar el número $\pi$ ?.....	17
Tabla 9: ¿Dónde has encontrado más dificultades en relación al Teorema de Pitágoras? .....	18
Tabla 10: ¿Has entendido mejor las fórmulas del Área de las figuras planas, con su demostración en clase?.....	18
Tabla 11: ¿Cómo te pareció el examen de la parte de áreas y perímetros de las figuras planas?.....	19
Tabla 12. Calificación del examen en la clase de 1ºB.....	21
Tabla 13. Calificación del examen en la clase de 1ºC.....	21

## 1. Introducción

---

En este apartado vamos a presentar la relevancia de realizar una investigación relacionada con las dificultades de aprendizaje que conllevan muchos conceptos matemáticos dentro del ámbito de la Geometría de las figuras planas en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Asimismo iniciaremos tanto el planteamiento del problema como los principales objetivos a lograr dentro de este trabajo de investigación. Por último esbozaremos los principales aspectos metodológicos que se seguirán a lo largo del mismo.

### 1.1. Justificación

De un tiempo a esta parte el bloque de la Geometría ha ido perdiendo fuerza dentro del temario de las Matemáticas a nivel general. En la etapa de Secundaria, el hecho de que exista un currículo demasiado extenso, unido a que es un bloque que suele ir al final del curso, han podido influir en esta paulatina pérdida de importancia. Esto se ve aún más potenciado ya que en muchas ocasiones se llega a esta etapa sin tener unos conocimientos básicos afianzados sobre el tema, y hace que los alumnos encuentren muchas dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales, y como consecuencia se produzca un bajo rendimiento académico y aumente la desmotivación.

La elección del primer curso de la ESO para esta investigación se debe a que es en esta nueva etapa donde se deben empezar a afianzar todos los conceptos que se utilizarán a lo largo de la vida, y aunque la Geometría ya se ha comenzado a introducir al final de la etapa de Primaria, es en Secundaria donde se profundiza de forma significativa y empiezan a surgir las mayores dificultades.

### 1.2. Planteamiento

Se pretende con este trabajo ahondar en los diferentes problemas que encuentran los alumnos de 1º de la ESO relacionados con la Geometría de las figuras planas, y analizar diversas alternativas para mejorar la comprensión de los conceptos y la resolución de problemas relacionados con este tema.

### 1.3. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es presentar y fundamentar soluciones viables que se adapten a una mejor propuesta didáctica orientada a facilitar la resolución de problemas y el aprendizaje de las fórmulas y propiedades relativas a las figuras planas dentro del bloque de Geometría.

Los objetivos específicos que se pretenden conseguir en el trabajo son:

- 1) Conocer el contenido del bloque de Geometría relacionado con las figuras planas en 1º de la ESO, y sus conceptos básicos fundamentales a desarrollar en este curso.
- 2) Encontrar y explicar las principales dificultades que se encuentran los alumnos de 1º de la ESO en el aprendizaje de las fórmulas y propiedades de las figuras planas.
- 3) Encontrar y explicar las principales dificultades que se encuentran los alumnos de 1º de la ESO en la resolución de problemas relacionados con las figuras planas.
- 4) Averiguar y exponer las principales soluciones y adaptar diferentes metodologías a cada tipo de problema de aprendizaje encontrado.

## **1.4. Aspectos metodológicos**

La metodología de trabajo que vamos a llevar a cabo será combinación de una investigación bibliográfica con un estudio de campo. Con lo primero pretendemos conocer los estudios realizados sobre esta cuestión, mientras que con lo segundo, aprovechar la oportunidad que nos brinda el periodo de prácticas de este máster para comprobar la realidad de esta cuestión directamente en el aula.

## **1.5. Fuentes bibliográficas**

Las fuentes bibliográficas utilizadas en este trabajo siguen los criterios recomendados por la Universidad Internacional de La Rioja (2015):

- **Relevancia.** La fuente ha de estar directamente relacionada con el tema y debe tratarlo en el mismo contexto.
- **Prestigio de la publicación.** Directamente relacionado con el prestigio de sus autores. Debe usar un registro académico adecuado, citar de forma rigurosa y tener un buen índice de impacto.
- **Autoridad del autor.** Deben ser expertos en el campo a tratar, con experiencia previa, trayectoria académica y reconocimiento.
- **Actualidad.** Debe informar del estado actual de la cuestión.

Al final del documento hay un apartado exclusivo donde se mencionan todas las obras citadas en el mismo. Las obras, además de ser relevantes para el tema de investigación, cuentan con el prestigio que da la UNIR, ya que todas ellas son citadas en varias de las asignaturas de este máster durante el presente curso, por lo que también habría que añadir la actualidad de las mismas como criterio reseñable.

## 2. Marco teórico

---

En este apartado vamos a exponer la información teórica relativa al contexto donde vamos a realizar nuestro trabajo de investigación. Comenzaremos realizando un estudio conceptual e histórico de la Geometría, para seguir con la indicación de los contenidos de la asignatura de Matemáticas dentro del ámbito del primer curso de la ESO, y finalmente indicaremos las principales dificultades con las que se encuentran estos alumnos.

### 2.1. Estudio conceptual

Según la Real Academia Española (2014), la palabra Geometría, etimológicamente viene del latín *geometria*, y esta del griego *γεωμετρία*, y significa “medida de la tierra”, y la define como “estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio”.

Asimismo la trata como una rama de las Matemáticas y la clasifica en diferentes tipos:

- Algorítmica: Aplicación del Álgebra a la Geometría para resolver por medio del cálculo ciertos problemas de la extensión.
- Analítica: Estudio de figuras que utiliza un sistema de coordenadas y los métodos del análisis matemático.
- Del espacio: Parte de la Geometría que considera las figuras cuyos puntos no están todos en un mismo plano.
- Descriptiva: Parte de las Matemáticas que tiene por objeto resolver los problemas de la Geometría del espacio por medio de operaciones efectuadas en un plano y representar en él las figuras de los sólidos.
- Plana: Parte de la Geometría que considera las figuras cuyos puntos están todos en un plano.
- Proyectiva: Rama de la Geometría que trata de las proyecciones de las figuras sobre un plano.

A la hora de clasificar los diferentes tipos de Geometrías, podemos tener en cuenta varios aspectos, y por lo tanto, hacer diferentes clasificaciones según estos. Así, una de las más notables que podemos mencionar también es:

- Euclidianas, basada en el cumplimiento del quinto postulado de Euclides, que dice que por un punto exterior a una recta dada sólo se puede trazar una paralela.
- No euclidianas, aquella que no cumple con alguno de los postulados de Euclides.

En el ámbito de este proyecto, nos centraremos en la Geometría plana eucliana.

## 2.2. Marco histórico

La Geometría siempre ha tenido una especial importancia ya desde las épocas prehelénicas. En las civilizaciones egipcia y mesopotámica, la Geometría era simplemente una colección de recetas con ejemplos y ejercicios prácticos, basados en la experiencia, pero ya existía ese interés por encontrar unas reglas de medida para aplicarlas a casos concretos.

Aunque adquirió especial relevancia en la época griega, alrededor del siglo V a. C., (Montesinos, 2010), caracterizada ya por un enfoque más racional y científico. Se pasa a una estructura más deductiva y lógica, justificando todas las proposiciones de forma rigurosa, y es cuando aparecen las verdades matemáticas basadas en la demostración, no en la experiencia. El hecho más importante de la transición de esta época a la Geometría Racional es la idealización de los entes geométricos, tanto en el sentido de considerar las figuras como entes inmateriales, como hacerlo de forma racional. Fue entonces cuando se empezó a considerar el punto sin dimensiones, la línea sin anchura y la superficie sin espesor.

De especial importancia se pueden considerar varios autores griegos, que en muchos casos siguen estando muy presentes en el ámbito de la Geometría de las Matemáticas en Secundaria. Desde Tales o Pitágoras, famosos entre otras cosas por sus teoremas relacionados con las semejanzas y la relación entre los lados de un triángulo rectángulo respectivamente, pasando por Hipócrates, primero en cuadrar una figura curvilínea con la cuadratura de sus lúnulas, o Zenón, con sus paradojas sobre el espacio y el tiempo, hasta Euclides, autor de los Elementos, considerado el texto más influyente de todos los tiempos, y fundamental por sus postulados para clasificar la Geometría, y Arquímedes, con grandes aportaciones a la Geometría, sobre todo en cuanto a su metodología, que le llevó a realizar diferentes demostraciones desconocidas hasta entonces.

Habrá que esperar hasta mediados del milenio pasado, con el nacimiento de la ciencia moderna, para volver a ver avances y descubrimientos significativos. Galileo y Descartes serían los principales autores destacados de esta época. Obras como “La Geometría”, de este último, dieron un nuevo impulso y otro enfoque a la misma. Fermat, inventor de la Geometría analítica, y otros autores, también aportaron sus contribuciones a la Geometría durante la época.

Y ya en una época más reciente, autores como Bolzano, Gauss o Riemann, también realizaron contribuciones importantes en el campo de las Matemáticas, y más en concreto en la rama de la Geometría diferencial y no euclíadiana.

## 2.3. Contenidos curriculares

Hay unos bloques de contenidos bien diferenciados dentro del currículo de las Matemáticas. Estos vienen determinados por la legislación tanto a nivel estatal, como a nivel autonómico, que en concreto, para la Comunidad de Madrid, y para el curso de 1º de la ESO, el marco legal aplicable es el siguiente:

- Ámbito estatal:
  - Ley Orgánica 2/2006, 2006
  - Real Decreto 1631/2006, 2007
- Ámbito autonómico de la Comunidad de Madrid:
  - Real Decreto 23/2007, 2007
  - Resolución de 30 de septiembre de 2009, 2009

Aquí se nos indican los siguientes bloques de contenidos:

- 1) Contenidos comunes
- 2) Números
- 3) Álgebra
- 4) Geometría
- 5) Funciones y gráficas
- 6) Estadística y probabilidad

Y particularizando en el bloque de la Geometría, podríamos dividir su contenido en:

- Rectas y ángulos
- Figuras geométricas
- Áreas y perímetros

En donde, además de ver los elementos enumerados arriba, es importante la mención que hacen estas leyes sobre el empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.

## 2.4. Dificultades de aprendizaje

Ciertos contenidos de la Aritmética, el Álgebra y la Geometría, son considerados como las partes de las Matemáticas que más dificultades presentan tanto a profesores como a alumnos.

La introducción de los números enteros que se realiza en 1º de la ESO es uno de los ejemplos donde se manifiestan estas dificultades. Estudios, como el llevado a cabo por Bruno & García (2004), confirmaron la relación existente entre las dificultades encontradas y la estructura del enunciado.

En cuanto a las dificultades con el Álgebra, estas radican principalmente en el carácter novedoso de su contenido. Los alumnos de 1º de la ESO, que es cuando se introduce este bloque, no están acostumbrados a tratar con letras y mucho menos a realizar operaciones aritméticas con ellas. Concluyen algunos autores, Vergnaud y Cortés (1987, como se dice en De Paz, 2015), que se debe buscar una ruptura con la Aritmética, para que el Álgebra tenga sentido.

Por último, en cuanto a las dificultades de aprendizaje relacionadas con la Geometría, cabrían destacar varios aspectos, que sumados, confirman a la Geometría como bloque con importantes dificultades para los alumnos de 1º de la ESO. Por un lado, es considerada la gran ausente de las aulas. Las razones pueden ser lo extenso de los currículos, unido al hecho de ir al final del curso, pero la verdad es que cada vez se da menos importancia a la Geometría, y esto hace que cuando se llega a la etapa de Secundaria, se tengan serias dificultades para adquirir los conceptos básicos fundamentales para la comprensión de conceptos, fórmulas o demostraciones relacionadas con las figuras planas. Y por otro lado, existen ciertas características de la Geometría, como las relacionadas con el espacio físico, o las relacionadas con sus diferentes tipos de registros, que hay que tener muy en cuenta para poder solucionar o minimizar estas dificultades. No podemos olvidar la rigidez conceptual de las propiedades de las figuras planas, y que éstas muchas veces nos entran por los ojos de forma no estricta, lo que nos lleva a una interpretación errónea de la situación.

Estos y otros problemas relacionados con la Geometría son los que vamos a tratar de encontrar para presentar soluciones en el ámbito didáctico orientadas a facilitar la resolución de problemas y el aprendizaje de las fórmulas y propiedades relativas a las figuras planas dentro del bloque de Geometría.

### **3. Propuesta didáctica**

---

En este apartado vamos a indicar la investigación que hemos realizado, con la intención de descubrir las principales dificultades que los alumnos de 1º de la ESO se encuentran, relacionadas con las figuras planas dentro del bloque de Geometría.

Posteriormente realizaremos un análisis de los resultados de dicha investigación, y así poder determinar los principales problemas que afectan a los alumnos.

Finalmente expondremos las mejores soluciones que se puedan adaptar a los alumnos para mejorar sus dificultades y facilitar la comprensión y aplicabilidad de todos los conceptos relacionados con las figuras planas, como el aprendizaje de sus fórmulas y propiedades o la ayuda en la resolución de problemas relacionados con ellas.

#### **3.1. Metodología**

El objetivo principal de este trabajo es aportar soluciones viables que faciliten a los alumnos el aprendizaje de algunos conceptos relacionados con las figuras planas dentro del bloque de Geometría. Para ellos nos planteamos los siguientes interrogantes que guiarán la temática de la investigación:

- ¿Qué contenidos del bloque de Geometría se imparten en 1º de la ESO relacionados con las figuras planas?
- ¿Cuáles son las dificultades más habituales respecto a esos contenidos, con las que se enfrentan los alumnos de este curso?
- ¿Por qué éstas, y no otras, son las que más problemas presentan?
- ¿Cómo se les puede facilitar la introducción de estos conceptos?
- ¿Qué técnicas pueden mejorar el aprendizaje de los alumnos?

Estas preguntas nos han servido como punto de partida para diseñar nuestra investigación.

##### **3.1.1. Diseño**

Primeramente llevamos a cabo una revisión bibliográfica con la que pretendemos conocer los estudios realizados sobre la cuestión y poder identificar entornos de investigación que nos ayuden a orientar las soluciones que buscamos.

Esta investigación la complementamos con las experiencias vividas a lo largo del periodo de prácticas en las dos clases de 1º de la ESO a las que pudimos observar durante un trimestre y a las que impartimos la unidad didáctica completa de “Áreas y perímetros” dentro del bloque de Geometría.

Asimismo elaboramos una encuesta sobre estos alumnos con el objetivo de conocer de primera mano sus conocimientos, inquietudes y dificultades sobre diversos temas relacionados con la investigación.

### **3.1.2. Adecuación con los objetivos**

La relación entre los objetivos y la metodología, la podemos plasmar en la siguiente tabla:

*Tabla 1. Relación objetivos-metodología.*

Objetivos	Metodología
Conocer el contenido del bloque Geometría de 1º de la ESO, relacionado con las figuras planas	Investigación de la legislación estatal y autonómica aplicable, indicada anteriormente
Encontrar las principales dificultades de los alumnos de 1º de la ESO con el aprendizaje de fórmulas y propiedades de las figuras planas	Realización de una encuesta y observación e intervención en el aula
Encontrar las principales dificultades de los alumnos de 1º de la ESO con la resolución de problemas relacionados con las figuras planas	Realización de una encuesta y observación e intervención en el aula
Averiguar las mejores soluciones para cada tipo de problema encontrado	Ánálisis de los datos de la encuesta e intervención en el aula

Así, adecuamos la utilización de diferentes metodologías en función de cada objetivo específico.

### **3.1.3. Muestra**

Los elementos que forman la población teórica de este estudio son todos los alumnos de 1º de la ESO. Al ser una población tan grande, llegar a todos ellos sería imposible, por lo que nos hemos tenido que centrar en la población accesible, es decir, un conjunto de elementos de fácil acceso a nuestro estudio.

Por lo tanto, el muestreo o espacio muestral de nuestra investigación son los 26 alumnos de 1º de la ESO del SIES Doctor Marañón de Paracuellos de Jarama, Madrid. Es, por consiguiente, un tipo de muestreo no probabilístico, denominado casual o incidental. Dentro de esta limitación, la muestra escogida es bastante homogénea, y por lo tanto, una parte representativa de la población.

Estos 26 alumnos, 11 chicas y 15 chicos, todos ellos entre los 12 y los 14 años, estaban divididos en 2 clases de 13 alumnos cada una. Dentro de cada clase había bastante diversidad. No había ningún alumno diagnosticado con altas capacidades, pero sí había varios de ellos a los que se les daban bien las Matemáticas y entendían los conceptos rápidamente, a la vez que resolvían los ejercicios con bastante soltura. La mayoría de ambos grupos entraban dentro de lo que podemos considerar la media, aunque sí

teníamos 3 alumnos que eran repetidores, y 4 diagnosticados con trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH).

### **3.1.4. Instrumentos de recogida de datos**

La recogida de información se ha realizado a través de 3 vías principalmente:

- La observación directa a lo largo del periodo de prácticas durante el tercer trimestre del curso, del 7 de abril al 19 de junio de 2015.
- La intervención práctica de la unidad didáctica de “Áreas y perímetros” durante 2 semanas completas, del 11 al 24 de mayo de 2015.
- La realización de una encuesta voluntaria y anónima sobre los alumnos a los que impartimos las clases.

### **3.1.5. Tratamiento de los datos**

Se ha realizado un tratamiento de los datos cuantitativo, en cuanto a las respuestas dadas por los alumnos a través de la encuesta, y cualitativo en cuanto a la observación e intervención durante el periodo de prácticas.

## **3.2. Investigación**

Como ya hemos comentado, para conocer la realidad de los alumnos de 1º de la ESO frente a las dificultades que se encuentran con el bloque de la Geometría, y poder tomar las medidas adecuadas para tratar de solucionarlas, hemos ido al origen, a los propios alumnos de las dos clases de 1º de la ESO a las que hemos tenido acceso.

El periodo de observación y de intervención, fue realizado en 26 alumnos, aunque para la encuesta, a uno de ellos fue imposible hacérsela llegar, y de los 25 restantes, 24 sí quisieron colaborar en la investigación. Esto ha supuesto un 96% de colaboración por parte de los alumnos, por lo que tengo que estarles muy agradecido por su buena predisposición. La encuesta está disponible al final del documento en el apartado de anexos.

Todas estas actuaciones nos servirán para determinar los problemas más habituales de los alumnos con la Geometría de las figuras planas, conocer su situación real y su nivel de conocimientos, y así, poder tomar las medidas más adecuadas enfocadas a mejorar sus dificultades de aprendizaje sobre el tema.

## **3.3. Análisis de los resultados**

### **3.3.1. Análisis cuantitativo**

En esta primera parte vamos a realizar un análisis cuantitativo de las respuestas de la encuesta para la muestra de 24 alumnos ya comentada.

En algunas de las preguntas se indicó específicamente que se podía marcar más de una opción, pero la verdad es que hubo de todo. Respuestas únicas en aquellas preguntas que se había indicado la posibilidad de varias respuestas, y respuestas múltiples en aquellas que no se había especificado tal opción. No fueron muchos los que se salieron de las recomendaciones dadas, pero finalmente hemos optado por recoger todas las respuestas marcadas por los alumnos tal y como las dieron, para no manipular la información recogida, y que la encuesta sea lo más ajustada a las respuestas de los alumnos.

Indicamos ahora el recuento de respuestas dadas a cada pregunta por parte de los alumnos:

*Tabla 2: De los siguientes bloques de las Matemáticas, ¿cuál de ellos se te da mejor?*

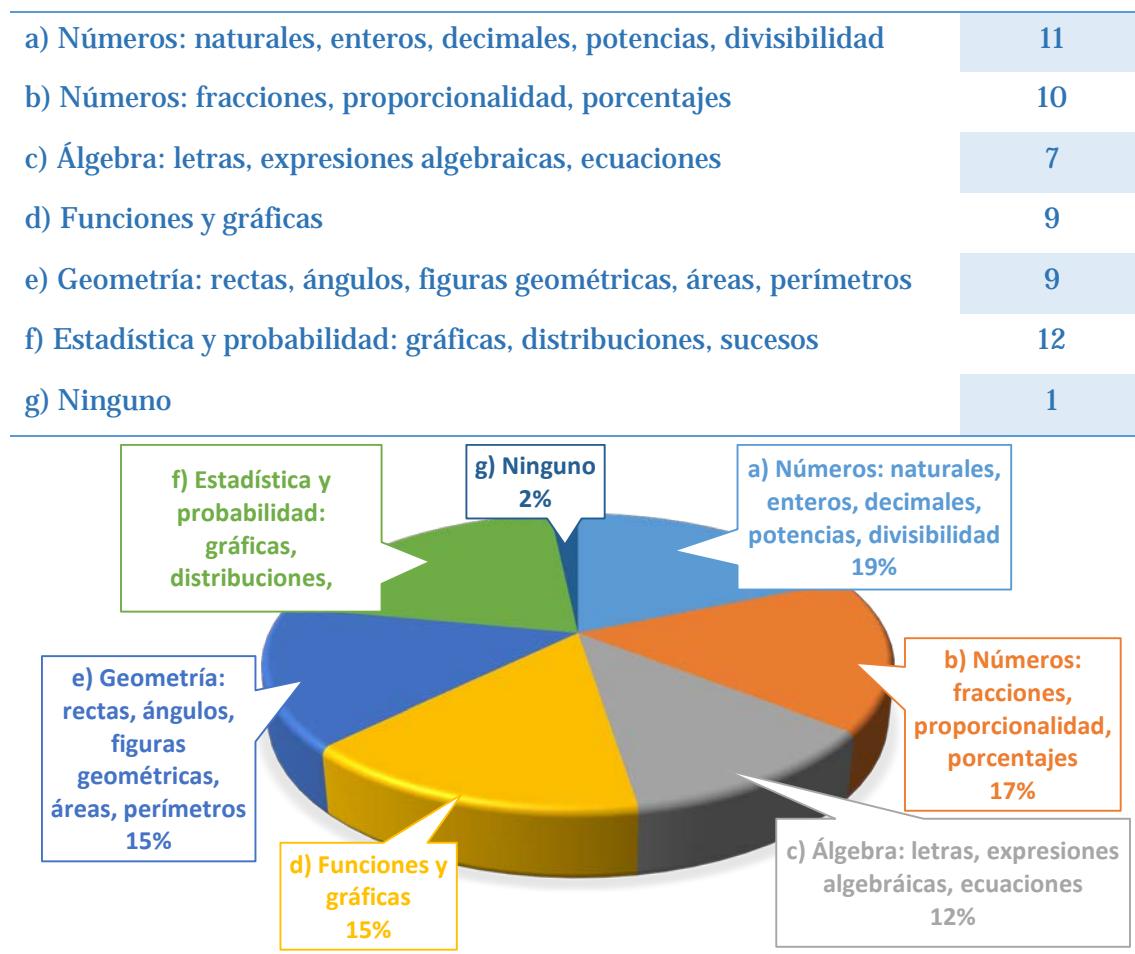


Tabla 3: ¿Y cuál se te da peor?

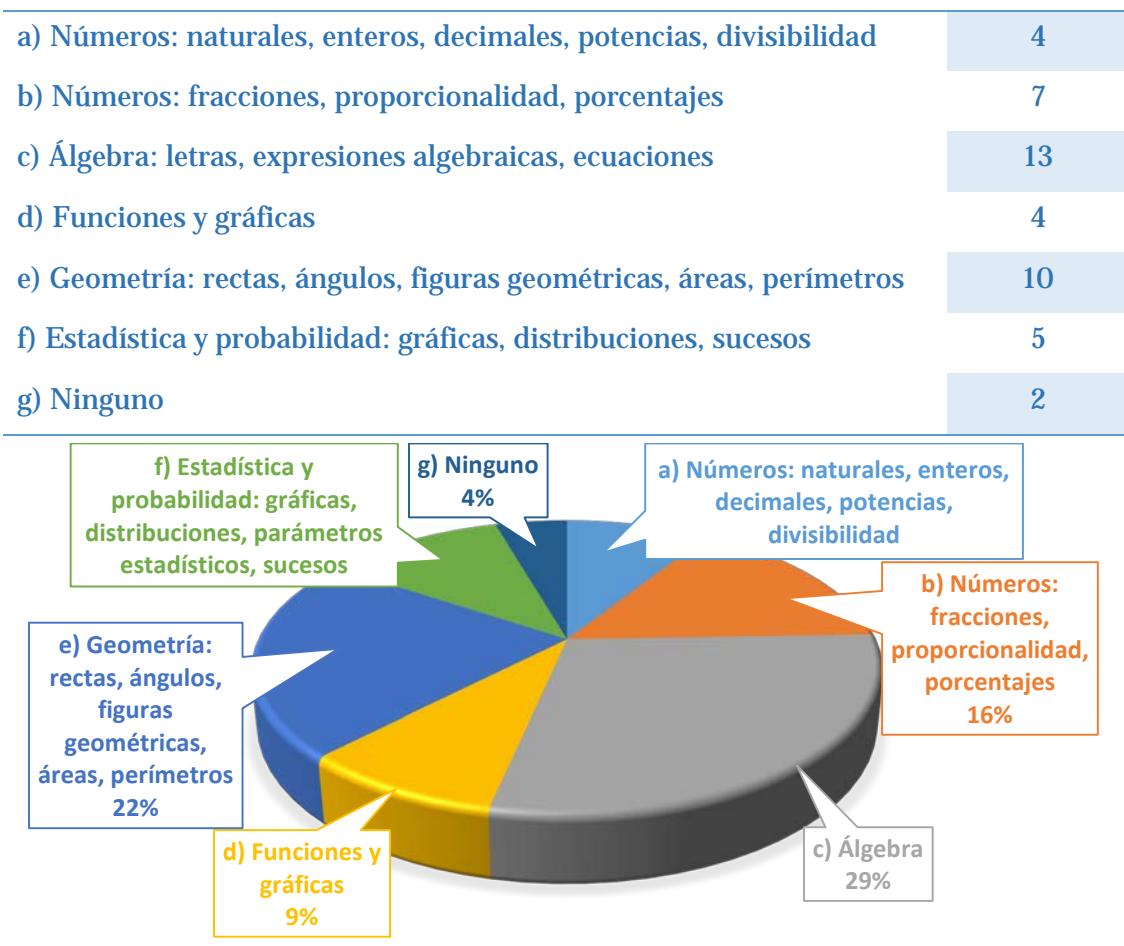


Tabla 4: ¿Has tenido dificultades con las Matemáticas en cursos anteriores?

a) Sí, muchas dificultades	1
b) Bastantes dificultades	3
c) Pocas dificultadas	5
d) No, nunca	15



Tabla 5: ¿Has tenido dificultades con el resto de asignaturas durante este curso?

a) Sí, en 2 o más asignaturas	8
b) Sí, en una asignatura	9
c) No, en ninguna asignatura	7



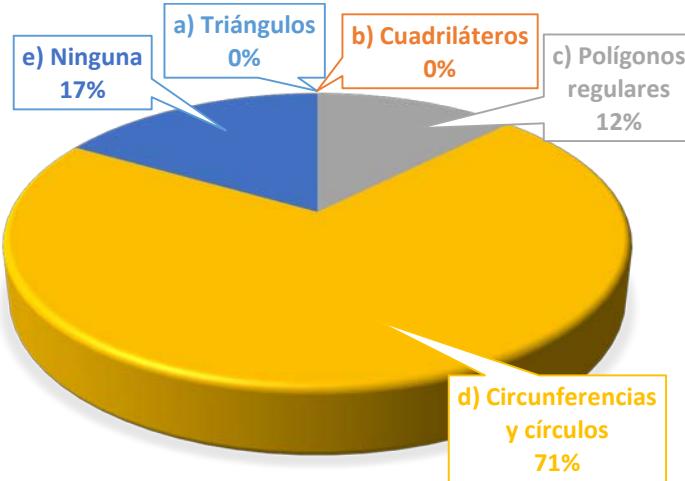
Tabla 6: Dentro del bloque de Geometría, señala el tema que más dificultades te ha presentado.

a) Rectas y ángulos	3
b) Figuras geométricas planas	0
c) Cuerpos geométricos tridimensionales	10
d) Áreas y perímetros	5
e) Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones	10



Tabla 7: Dentro de las figuras planas, señala la que has encontrado más complicada.

a) Triángulos	0
b) Cuadriláteros	0
c) Polígonos regulares	3
d) Circunferencias y círculos	17
e) Ninguna	4

Tabla 8: En el círculo y la circunferencia, ¿has encontrado dificultades al manejar el número  $\pi$ ?

a) Siempre	2
b) A veces	6
c) Casi nunca	5
d) Nunca	11

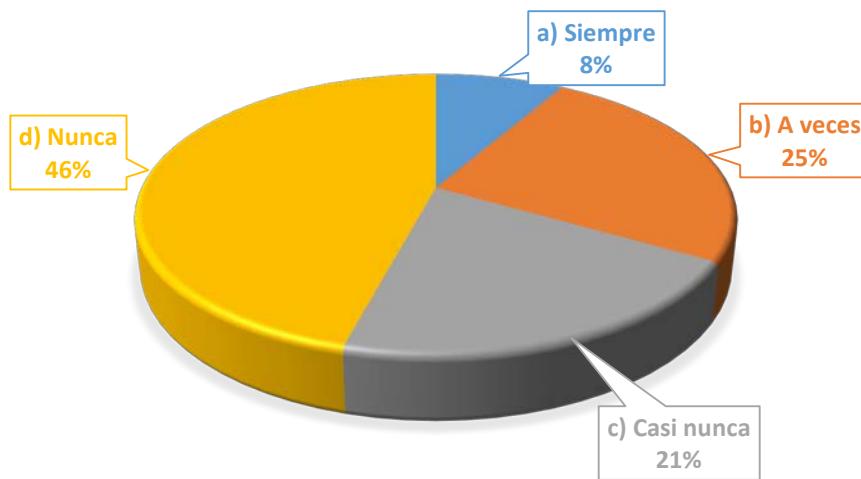


Tabla 9: ¿Dónde has encontrado más dificultades en relación al Teorema de Pitágoras?

a) En sus aplicaciones	6
b) En sus diferentes fórmulas para despejar la hipotenusa o los catetos	9
c) En descomponer otras figuras para buscar un triángulo rectángulo	3
d) En operar con números elevados al cuadrado o raíces cuadradas	5
e) No he encontrado dificultades	8

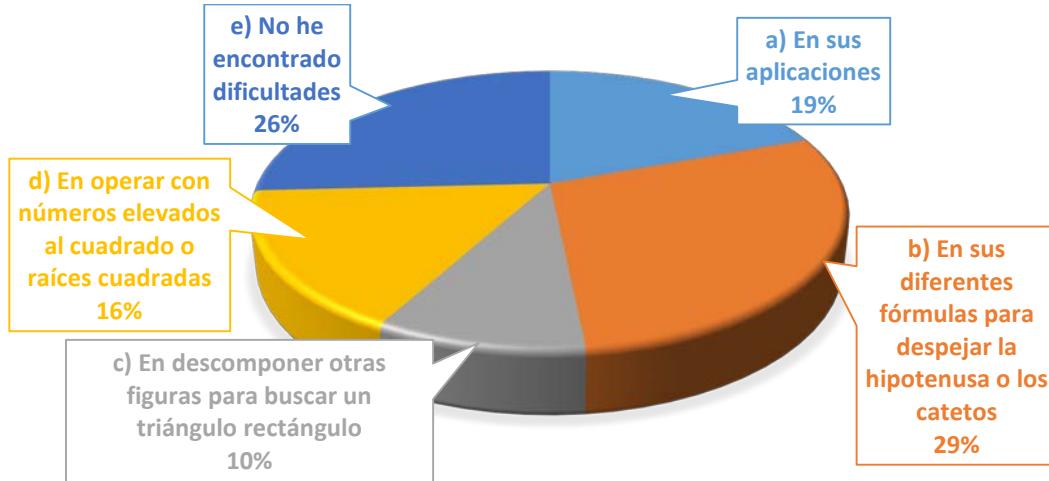


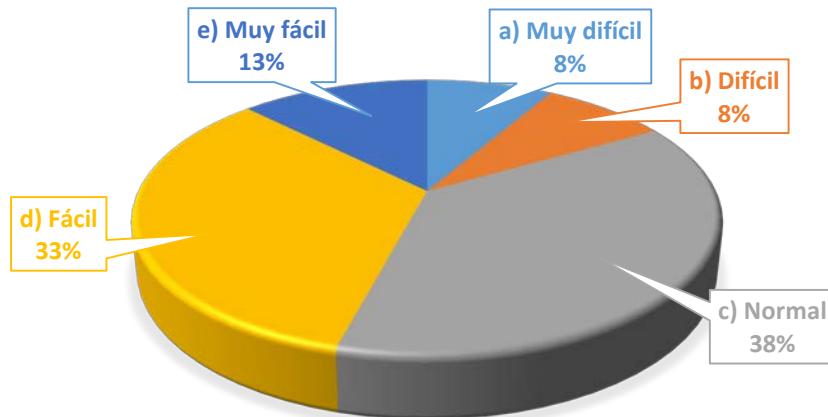
Tabla 10: ¿Has entendido mejor las fórmulas del Área de las figuras planas, con su demostración en clase?

a) Sí	15
b) Casi siempre	5
c) Casi nunca	3
d) No	1



Tabla 11: ¿Cómo te pareció el examen de la parte de áreas y perímetros de las figuras planas?

a) Muy difícil	2
b) Difícil	2
c) Normal	9
d) Fácil	8
e) Muy fácil	3



### 3.3.2. Análisis cualitativo

Una vez vistas las respuestas obtenidas con la encuesta, junto con su recuento estadístico, vamos a proceder ahora a realizar un análisis cualitativo de la misma, para poder sacar conclusiones que nos permitan mejorar algunas de las dificultades encontradas. Es difícil saber a partir de qué porcentaje de alumnos se puede considerar que un tema presenta serias dificultades a nivel general, pero tras los resultados, hemos considerado las siguientes como las más significativas:

- Los bloques que mayores dificultades presentan a los alumnos son los del Álgebra (54%) y la Geometría (42%). Esto, como ya apuntamos anteriormente, es lo más habitual en el primer curso de la etapa de Secundaria. Es en este curso donde se ve por primera vez el Álgebra, y los alumnos no están acostumbrados a tratar con letras operaciones aritméticas. La Geometría, aunque los alumnos ya han tenido contacto con ella, éste ha sido muy básico y es ahora cuando se enfrentan a ella de forma completa, viendo todas sus propiedades, fórmulas y aplicaciones.
- Dentro del bloque de la Geometría, hay dos temas que destacan los alumnos como los más problemáticos a la hora de su comprensión. Estos han sido los cuerpos geométricos tridimensionales y el Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones,

ambos con un 42%, aunque tampoco es para desmerecer el tema de áreas y perímetros de figuras planas con un 21%.

- En cuanto al Teorema de Pitágoras, este parece ser un tema que conlleva problemas de varios tipos, ya que las respuestas se han repartido bastante entre todas las posibles dificultades. El 38% encuentra dificultades con sus fórmulas y en despejar la hipotenusa o los catetos, el 25% con sus aplicaciones, el 21% en operar con raíces o números elevados al cuadrado, y el 13% en descomponer otras figuras en busca del triángulo rectángulo.
- Dentro del tema de áreas y perímetros de figuras planas, destaca especialmente la percepción problemática que tienen sobre el círculo y la circunferencia, ya que un 71% de los alumnos los encuentran la parte más complicada. Resulta también significativo, que la siguiente en dificultad esté a más de 58 puntos porcentuales de diferencia (13%) con respecto a esta, lo que acentúa aún más su especial dificultad.
- Parece ser que hay una estrecha relación entre las dificultades con el círculo y la circunferencia, y la aparición en sus fórmulas del área y el perímetro del número  $\pi$ , ya que tan solo el 46% de los alumnos afirma que nunca han tenido dificultades con este número.
- En algo que sí parecen coincidir los alumnos en cuanto a que lo consideran de utilidad, es en que realizar la demostración de las áreas de las diferentes figuras planas, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y círculos, les ayuda a aprenderse mejor dichas fórmulas, ya que el 83% de los alumnos confirma que esto ha sido así siempre o casi siempre.
- Y por último, para hacernos una idea del nivel general de los alumnos encuestados, podemos aportar que alrededor del 38% han tenido dificultades con las Matemáticas en cursos anteriores, y, en el resto de asignaturas durante este curso, el 38% ha tenido dificultades con una asignatura, y el 33% con dos o más.

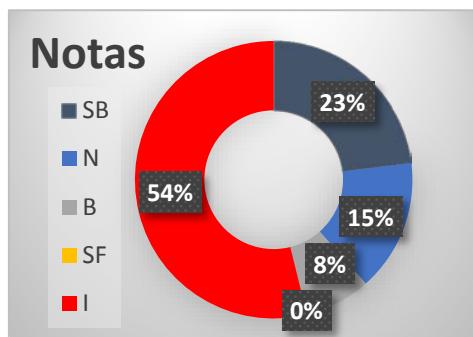
Este último dato se confirma también con el porcentaje de aprobados y suspensos tras la realización del examen de esta parte de la asignatura. El examen completo se incluye al final del documento en el apartado de anexos.

El examen se compuso de 6 ejercicios, algunos formados por varios apartados, de los cuales dos pertenecían a la unidad de “Figuras geométricas”, por indicación de la tutora, y el resto a la unidad de “Áreas y perímetros” impartida por nosotros. De esta última parte se incluyeron todos los temas con posibles dificultades vistos en clase, fórmulas de áreas y perímetros, búsqueda de triángulos rectángulos, Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones, y el número  $\pi$ .

Los resultados se dividieron de la siguiente forma:

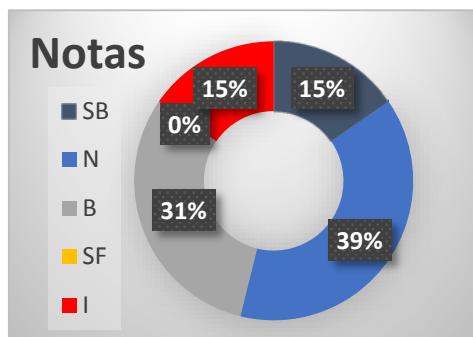
*Tabla 12. Calificación del examen en la clase de 1ºB.*

Notas	Total	%
SB	3	23%
N	2	15%
B	1	8%
SF	0	0%
I	7	54%
	13	100%



*Tabla 13. Calificación del examen en la clase de 1ºC.*

Notas	Total	%
SB	2	15%
N	5	38%
B	4	31%
SF	0	0%
I	2	15%
	13	100%



Descontando a 2 personas que no se presentaron, de los otros 24 alumnos, el porcentaje de aprobados resultó algo superior al 70%, similar, aunque un poco por encima de la media que ambos cursos han mantenido en la asignatura de Matemáticas durante este curso.

### 3.4. Soluciones

La mayoría de las dificultades que los alumnos han mencionado a través de la encuesta, las hemos podido observar y ser testigos directos durante la fase de intervención dentro del periodo de prácticas de este máster.

Es por esto que pudimos experimentar en primera persona, no solo las dificultades que los alumnos se iban encontrando, sino la mejor manera de vencerlas en cada caso, utilizando diferentes técnicas que vamos a detallar a continuación.

En cuanto a las figuras geométricas en general, es importante para los alumnos que su representación gráfica o dibujo, en un primer momento, sea lo más aproximado a la realidad posible. Nos referimos a sus propiedades y proporcionalidad en comparación a los datos numéricos de la figura.

Un ejemplo de esta circunstancia lo podemos ver en un enunciado de un problema donde nos hablan de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm respectivamente. A la hora de realizar su representación gráfica debemos tratar de dibujar un ángulo recto lo más parecido a  $90^\circ$  posible, y que sus catetos tengan una relación lo más cercana a la realidad, es decir, de aproximadamente  $\frac{3}{4}$  entre ellos.

Los alumnos, generalmente, suelen dar más importancia a la figura que al dato numérico del enunciado, por lo que si representamos la figura de forma desproporcionada, se corre un riesgo mayor de equivocar al alumno y frenar su avance en el aprendizaje.

Es significativo también el hecho de que los alumnos “exijan” al profesor esa congruencia perfecta entre datos y dibujo, cuando luego son ellos los primeros que, teniendo mayor facilidad por el hecho de tener un cuaderno con cuadrículas, no representan la figura de forma consecuente con los datos del problema. Esto es otro síntoma más de la gran dificultad a la que se enfrentan los alumnos en este tema.

Aunque es importante recalcar que esta situación debemos tenerla en cuenta sobre todo al principio, ya que, tal y como nos lo confirma De Paz (2015), poco a poco hay que hacerles ver a los alumnos que los objetos geométricos son objetos teóricos que obedecen a ciertas propiedades y características propias de las matemáticas, y que establecen una relación muy estrecha con el espacio físico que nos rodea.

Por lo tanto debemos ver esto como un proceso, que comienza en la etapa de Primaria donde se debe trabajar con las figuras, manipulándolas y trabajando en su percepción, para que se establezcan las primeras relaciones elementales entre los distintos elementos de las figuras, y continuar en la etapa de Secundaria, donde se siga avanzando con las

relaciones más complejas, para poder ir introduciendo el desarrollo de la argumentación deductiva.

Con esta argumentación deductiva nos referimos a que nuestra labor como profesor debe orientarse más a que los alumnos resuelvan los problemas basándose en las propiedades de las figuras y los datos numéricos exactos, más que en la percepción del objeto y su medición para llegar a la respuesta. Debemos hacerles que confien más en los datos y las propiedades de las figuras, que en la evidencia del propio dibujo.

Para ayudarnos en este propósito, los problemas geométricos que expongamos a nuestros alumnos deben reunir estas características (De Paz, 2015):

#### Características que debe reunir un problema geométrico:

- Para resolver el problema se ponen en juego las propiedades de los objetos geométricos.
- El problema pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al **espacio físico**, sino a un espacio conceptualizado al cual las figuras-dibujos trazadas por este sujeto no hacen más que representar.
- La función que cumplen los dibujos en la resolución del problema no es la de permitir llegar a la respuesta por simple constatación sensorial.
- La validación de la respuesta dada al problema, es decir, la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de su respuesta, no se establece empíricamente sino que se apoya en las **propiedades de los objetos geométricos**. Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras, producen nuevo conocimiento sobre los mismos.

*Figura 1: Características de un problema geométrico. (De Paz, 2015)*

Esta argumentación deductiva nos lleva al siguiente punto a tratar, la introducción de las demostraciones, tal y como se entienden en las matemáticas. Esto es un proceso lento que el alumno debe ir poco a poco asimilando y aceptando como método intrínseco a las matemáticas. Además, debemos aprovechar que los propios alumnos, según han confirmado en la encuesta, entienden mejor las fórmulas de las áreas de las figuras planas, cuando estas van acompañadas de su demostración geométrica.

Por lo tanto, es el momento perfecto para empezar a introducirlas y a la vez ayudar a los alumnos a comprender mejor las fórmulas de las áreas. Son demostraciones sencillas, basadas en las figuras y sus propiedades, pero en más de una ocasión he podido comprobar que un alumno no se acordaba de una fórmula concreta, y ayudándose en cómo habíamos llegado a ella a través de la demostración, la pudo deducir él solo de manera correcta.

Ejemplos de lo que acabamos de mencionar, que a la vez sirven de actividades para su realización en clase, son las demostraciones del área de un paralelogramo a partir del área de un rectángulo, o la demostración del área de un trapecio a partir de la de un paralelogramo.

El área de un rectángulo, es conocida por todos los alumnos debido a su sencillez y, sobre todo, a que es muy intuitiva: base x altura. Sabido esto, el área de un paralelogramo cualquiera es fácilmente demostrable si transformamos dicho paralelogramo en un rectángulo, del que sí sabemos su área:

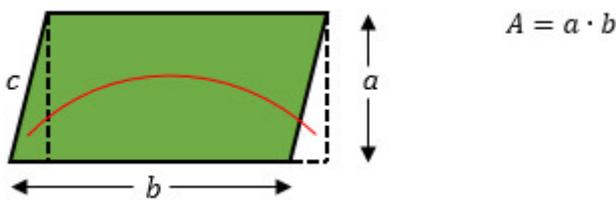


Figura 2. Demostración del área de un paralelogramo. Elaboración propia.

De la misma manera, una vez conocida el área de un paralelogramo cualquiera, es fácil la demostración del área de un trapecio, haciéndolo girar sobre sí mismo para transformarlo en un paralelogramo:

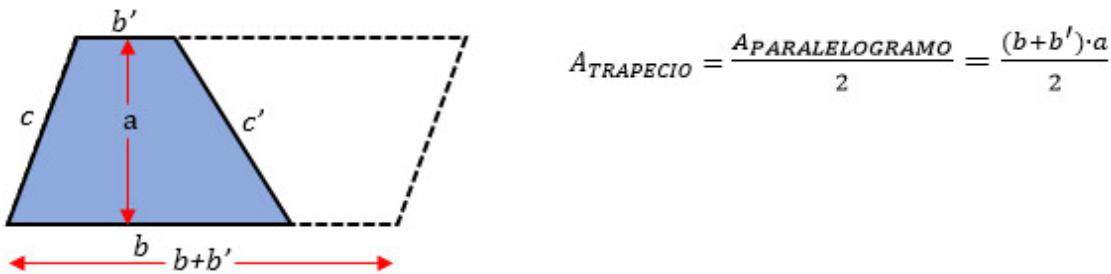


Figura 3. Demostración del área de un trapecio. Elaboración propia.

De esta forma es sencillo y deductivo ir sacando las diferentes fórmulas de las áreas de los cuadriláteros, triángulos, polígonos regulares y círculos, partiendo de las fórmulas de las áreas de otras figuras ya conocidas.

Otro de los problemas a los que se enfrentan los alumnos es referente a los diferentes tipos de registros relacionados con la Geometría. Existen 3 principalmente, el registro figurativo, el lenguaje natural y el lenguaje simbólico.

En cuanto a los 2 últimos, no hemos detectado dificultades en su tratamiento, ya que al fin y al cabo, el lenguaje natural lo emplean directamente sobre las diferentes figuras sin ningún problema, y el lenguaje simbólico se introduce de forma muy simple, y siempre va acompañado del propio lenguaje natural, por lo que tampoco representa ninguna dificultad. Eso sí, durante las prácticas he podido observar cómo el lenguaje natural se

impone sobre el simbólico. Por ejemplo, se aprenden mejor las fórmulas de palabra, es decir, expresándola con palabras (área es igual a base por altura), que utilizando la fórmula con símbolos ( $A = b \cdot a$ ). Por lo tanto es útil para su mejor aprendizaje repetir las fórmulas utilizando el lenguaje natural, más que una fórmula escrita en la pizarra.

En cambio, el registro figurativo, constituye en los alumnos la relación entre los objetos teóricos y los objetos reales. Como ya hemos apuntado anteriormente, los estudiantes tienden a asignar más importancia a los datos del dibujo que a los del enunciado, pero esto se hace más evidente cuando en el enunciado nos referimos a una figura de forma general, como por ejemplo cuando el enunciado es del estilo: “dado un cuadrilátero cualquiera...” o “para todo trapecio...”. En estos casos, los alumnos toman como general el cuadrilátero o trapecio que se dibuje, en vez de tener en cuenta la generalidad de los mismos. Por lo tanto es nuestra labor hacer que traten el dibujo como una figura general, y enseñarles la diferencia entre el objeto y su representación.

En cuanto al Teorema de Pitágoras, como ya hemos apuntado anteriormente, es un tema que conlleva dificultades de varios tipos. Las más repetidas para los alumnos son las relacionadas con sus fórmulas y al despejar la hipotenusa o los catetos. Como todos sabemos, la fórmula más conocida para el Teorema de Pitágoras es la siguiente:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Donde ‘a’ representa la hipotenusa del triángulo rectángulo, y ‘b’ y ‘c’ los catetos. Tras realizar durante las prácticas diferentes problemas en los que había que utilizar dicha fórmula, confirmé con los alumnos que es más sencillo para ellos desglosar esta fórmula en 3 diferentes, dependiendo de si hay que hallar la hipotenusa o uno de los catetos, que no utilizar siempre ésta, y a partir de ella despejar la incógnita que piden en el problema. De esta forma, el Teorema de Pitágoras lo desglosaríamos así:

- Si en el problema se dan como datos los catetos y se pide hallar la hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- Si en el problema se dan como datos la hipotenusa y uno de los catetos, y se pide hallar el otro cateto:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Otras dificultades mencionadas por los alumnos en cuanto al Teorema de Pitágoras están relacionadas con sus aplicaciones, operar con cuadrados y raíces, y descomponer figuras en busca de triángulos rectángulos, aunque éstas en menor medida. Por lo que hemos podido observar, estas dificultades son más por la falta de práctica sobre este tipo de

problemas que por la dificultad de concepto de los mismos, por lo que la mejor forma de solventarlas es la práctica y la participación. Es importante que todos participen en la realización de este tipo de ejercicios, y que se acostumbren a buscar triángulos rectángulos dentro de otras figuras para poder apoyarse en ellos a la hora de buscar la solución final al problema.

Y por último los alumnos destacan la dificultad con el número  $\pi$ . Para la mayoría de los alumnos el problema es que ven una letra en lugar de un número. Es algo parecido al problema con el Álgebra. Se les hace raro operar con letras, por lo que tras varios intentos de hacer que manejen el número  $\pi$  a lo largo del desarrollo de un problema, lo más sencillo para ellos es sustituirlo cuanto antes por su valor numérico, con la aproximación más habitual o la que se considere adecuada, normalmente 3,14. Con esta sustitución el problema desaparece, pero ya vamos poco a poco introduciéndoles el número  $\pi$ , al que se irán acostumbrando y les dejará de crear dificultades con el paso del tiempo.

En este punto, nuestra idea en la investigación sobre cómo solucionar algunas dificultades relacionadas con la Geometría, incluía la experiencia de utilizar con los alumnos algún software educativo que pudiéramos ver en qué medida este recurso de las llamadas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), les ayudaba a comprender mejor los conceptos, las propiedades o las características de las figuras planas. Para ello programamos 2 sesiones en el aula de Nuevas Tecnologías del centro de prácticas con el programa GeoGebra (International GeoGebra Institute, 2015), pero lamentablemente, por problemas logísticos no pudimos impartir ninguna clase en dicha aula. De esta forma, incluiremos este punto como una de las posibles líneas de investigación futuras.

A pesar de no haber podido llevar a la práctica este estudio, sí hicimos un planteamiento teórico previo, con el fin de observar qué resultados positivos podía ofrecer esta experiencia en los alumnos. Así, vamos a indicar brevemente los aspectos más importantes del mismo.

En primer lugar, debíamos fijar la temporalización de las actividades a realizar teniendo en cuenta los aspectos más importantes que nos limitaban, como son el tiempo de uso del aula de Nuevas Tecnologías, y qué temas podíamos abordar que ayudaran al alumno a comprender mejor los conceptos más problemáticos para ellos.

Así, consideramos que las principales dificultades que los alumnos podían tener estaban relacionadas con el Teorema de Pitágoras y con el cálculo de áreas y perímetros de las diferentes figuras geométricas. De esta forma planificamos las siguientes actividades:

- Visualización de un video donde se realizara la demostración del Teorema de Pitágoras.
- Realización de actividades con el programa GeoGebra para el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.

Respecto a la primera actividad, existe una página web muy completa sobre el Teorema de Pitágoras (Teorema de Pitágoras, 2015) en la que se puede encontrar todo lo referente a él, su definición, fórmulas, demostraciones, ejemplos, ejercicios, aplicaciones y videos. De aquí podemos visualizar tanto las demostraciones geométricas que hicieron el propio Pitágoras o Euclides, o demostraciones más visuales como la del agua.

En cuanto a la realización de ejercicios con el programa GeoGebra, primero indicar que recurrimos a este software por varias razones. Se buscaba un software matemático multiplataforma, libre, interactivo y sencillo de manejar. Con este no solo conseguíamos todo esto, sino que además ya contábamos con su instalación en todos los ordenadores del aula de Nuevas Tecnologías del centro, y que incluso varios de los alumnos ya lo habían utilizado previamente. También seguimos la recomendación de nuestra tutora a este respecto, por lo que todo nos llevaba a la selección de este programa.

Este software es muy completo y permite a los alumnos ver, tocar y experimentar la Geometría, realizando diferentes actividades como construcciones de figuras, clasificación de las mismas o cálculos de áreas y perímetros.

La metodología durante la sesión incluiría una breve explicación y recordatorio de las funciones básicas del programa por parte del profesor, con la ayuda de la pizarra digital interactiva (PDI), junto con la realización de alguna actividad sencilla para que los alumnos se sintieran más seguros y se familiarizaran con la herramienta. Seguidamente formaríamos grupos de 2 personas por ordenador para que colaboraran entre ellos y compartieran responsabilidades, teniendo en cuenta la diversidad de los alumnos para que los grupos fueran lo más heterogéneos posibles. Así, realizarían los alumnos los ejercicios programados.

Incluiríamos actividades sencillas o de refuerzo, como por ejemplo:

- Construir una recta y un segmento de longitud 4 cm.
- Construir un triángulo y un cuadrilátero cualquiera.
- Construir un polígono regular de 6 lados y otro de 8.
- Dibujar una circunferencia de radio 3 cm.

También otras de nivel medio:

- Construir un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 3 cm.

- Hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 cm, y comprobar mediante el programa si el resultado es correcto.
- Construir un rombo cuyas diagonales miden 6 y 8 cm.
- Construir 2 circunferencias exteriores, 2 interiores, 2 secantes y 2 tangentes.
- Hallar el área de una circunferencia de radio 2 cm, y comprobar el resultado mediante la aplicación.

Y las complementaríamos con alguna de ampliación:

- Construir un triángulo equilátero de lado 4 cm.
- Construir un paralelogramo que tenga entre sus vértices los puntos A (1,1), B (4,1) y C (2,3).
- Dibujar un trapecio rectángulo cuyas bases miden 3 y 5 cm, y la altura 2'5 cm, y encontrar un triángulo rectángulo dentro de esa figura.

Con estas actividades dentro del marco de las TIC pretendíamos abordar objetivos como mejorar las capacidades de pensamiento reflexivo, utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos, o elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas.

Asimismo desarrollaríamos competencias nuevas como la del tratamiento de la información y competencia digital, a la vez que reforzaríamos otras como la competencia matemática, la cultural y artística, o la autonomía e iniciativa personal.

Con la realización de estas sesiones, la encuesta se hubiera completado con preguntas orientadas a conocer el nivel de aprovechamiento de estas tecnologías enfocado a la mejora del aprendizaje de los alumnos. Estas preguntas adicionales también se encuentran disponibles en el apartado de anexos al final del documento.

## 4. Conclusiones

---

El principal objetivo de este trabajo era presentar y fundamentar soluciones que se adaptaran a los alumnos de 1º de la ESO para facilitar su proceso de aprendizaje en todo lo relativo a las figuras planas dentro del bloque de la Geometría.

Para ello, ha sido necesario conocer primero los contenidos de este bloque para este curso, y posteriormente las principales dificultades que los alumnos han encontrado en ellos.

Tras los 3 meses de observación y las 2 semanas de intervención, completamos la recogida de información a través de una encuesta, y con todo ello pudimos establecer no solo las principales dificultades de los alumnos, sino las diferentes soluciones que mejor se adaptaban a ellos orientadas a facilitar su aprendizaje de esta parte de las Matemáticas.

En este sentido, podemos confirmar la consecución de los objetivos marcados como más específicos al comienzo del trabajo:

- 1) Conocer el contenido del bloque de Geometría relacionado con las figuras planas en 1º de la ESO, y sus conceptos básicos fundamentales a desarrollar en este curso.  
Esta parte se ha completado de forma satisfactoria gracias al estudio de las leyes estatales y autonómicas relativas a este curso.
- 2) Encontrar y explicar las principales dificultades que se encuentran los alumnos de 1º de la ESO en el aprendizaje de las fórmulas y propiedades de las figuras planas.  
Este objetivo se ha cumplido de forma parcial, ya que la investigación se ha limitado a 2 clases de 1º de la ESO de un mismo instituto, con un total de 26 alumnos como muestra.
- 3) Encontrar y explicar las principales dificultades que se encuentran los alumnos de 1º de la ESO en la resolución de problemas relacionados con la Geometría de las figuras planas.  
Al igual que en el apartado anterior, la consecución de este objetivo también ha sido parcial, por la limitación de la investigación a esos 26 alumnos mencionados anteriormente.
- 4) Averiguar y exponer las principales soluciones y adaptar diferentes metodologías a cada tipo de problema de aprendizaje encontrado.

Este objetivo se ha llevado a cabo de forma práctica en los alumnos estudio de la investigación, y los resultados se han podido comprobar durante el periodo de intervención de la unidad didáctica.

Las principales dificultades de aprendizaje de los alumnos, en cuanto a los bloques del curso, se ha confirmado que son el Álgebra y la Geometría, tal y como apuntaban los estudios previos.

Dentro del bloque de la Geometría, las dificultades se presentaban principalmente con los cuerpos geométricos tridimensionales, el Teorema de Pitágoras y el tema de áreas y perímetros de las figuras planas.

Y dentro de estos, destacaban los problemas de aprendizaje a la hora de despejar las incógnitas en el Teorema de Pitágoras, y el cálculo de áreas y perímetros del círculo y la circunferencia, a lo que en este caso se le añade la aparición del número  $\pi$  con el que no están aún muy familiarizados.

Como principales soluciones encontradas que ayudan a los alumnos en el proceso de aprendizaje, podemos destacar varias de ellas, dependiendo de cada problema encontrado.

En cuanto a las gráficas o dibujos de las diferentes figuras geométricas, la correcta representación de sus propiedades y proporcionalidad es fundamental, sobre todo al principio, para no equivocar al alumno ante la posible incongruencia frente a los datos numéricos, ya que los alumnos suelen dar más importancia a la representación que a los propios datos.

Aunque también es verdad que, según avanzamos, se debe hacerles ver la diferencia entre el objeto real y su representación. De esta forma, los alumnos irán poco a poco aprendiendo a resolver los problemas basándose en los datos y las propiedades de las figuras, más que en la percepción del objeto y su medición.

Asimismo, se les debe ir introduciendo la argumentación deductiva como parte fundamental de las Matemáticas, y se ha confirmado que a través de las demostraciones de las áreas de las figuras planas, no solo conseguimos ese objetivo, sino que aprenden de forma más fácil estas mismas fórmulas.

Más soluciones que facilitan la adquisición de los conceptos y las fórmulas geométricas son la de acompañar al lenguaje simbólico el lenguaje natural, ya que los alumnos a estas edades se aprenden mejor las fórmulas de palabra que a través de los símbolos propios de cada fórmula.

Y por último, y relacionados en parte con las dificultades que encuentran los alumnos con el Álgebra, se ha demostrado que el desglose del Teorema de Pitágoras en 3 fórmulas les ayuda a la hora de despejar las incógnitas, al igual que sustituir el número  $\pi$  por su valor de 3,14 en cuanto aparece, ya que se les sigue haciendo raro operar con letras en vez de números.

Todas estas propuestas, minimizan los problemas que encuentran los alumnos y les facilita la comprensión en cuanto a los conceptos y aplicaciones de todos los aspectos relacionados con las figuras planas dentro del bloque de la Geometría.

## 5. Limitaciones

---

La principal limitación de este trabajo es que la investigación se ha realizado en tan solo 2 clases de 1º de la ESO de un mismo instituto, con un total de 26 alumnos como muestra, cuando los resultados serían más representativos si esta misma investigación se hubiera podido realizar en todos los alumnos del curso de 1º de ese instituto, o incluso en los otros institutos de la zona, ampliando la muestra a alumnos de institutos concertados y privados.

Otra de las limitaciones es que la intervención como profesor en estos alumnos solo se pudo realizar en la unidad didáctica de “Áreas y perímetros”, cuando hubiera sido más completo un análisis de todo el bloque de la Geometría, incluyendo “Rectas y ángulos” y “Figuras geométricas”, de ahí que la investigación se tuviera que centrar en este contenido.

Y por último, ha existido durante el trabajo la limitación ya comentada en cuanto a los recursos TIC del centro. Las aulas solo estaban dotadas con pizarra tradicional, y para poder utilizar los recursos tecnológicos había que hacer uso del aula de Nuevas Tecnologías. Al ser única y estar muy demandada, tuvimos una serie de problemas que impidió finalmente el desarrollo de alguna sesión en ella.

Todas estas limitaciones abren un camino para futuros trabajos que completen esta investigación.

## 6. Prospectiva

---

En cuanto a las futuras líneas de investigación abiertas, se podría ampliar la muestra relativa al estudio, como hemos comentado en las limitaciones, ya sea ampliando el número de alumnos del mismo instituto, o ampliando el número de institutos de una misma zona.

Asimismo, el trabajo se podría también ampliar incluyendo el resto del temario del bloque de la Geometría de 1º, abordando las dificultades de las unidades de “Rectas y ángulos” y “Figuras geométricas”.

También se puede utilizar como punto de partida para otros trabajos enfocados en las dificultades que aparecen con respecto a la Geometría en otros cursos de la ESO o del Bachillerato.

Y por último, en nuestra investigación pretendíamos incluir la experiencia de utilizar con los alumnos algún software educativo que pudiéramos ver en qué medida dicho recurso TIC les ayudaba a comprender mejor los conceptos, las propiedades o las características de las figuras planas, pero por motivos ajenos a nuestra voluntad no se pudo llevar a cabo. Por lo tanto, se abren varias líneas de investigación en cuanto a qué programas ayudarían a los alumnos en este aspecto, y dentro de la amplia gama de programas que existen en Geometría, cuáles de ellos serían los mejores y por qué.

## 7. Bibliografía

---

### 7.1. Referencias bibliográficas

Bruno, A. y García, J. A. (2004). Futuros profesores de Primaria y Secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. *Relime, volumen* (7), 25 – 48. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33570102>

De Paz Santana, Y. R. (2015). *Recursos para la didáctica del Álgebra y del análisis matemático. Recursos para la didáctica de la Geometría.* Material no publicado. Recuperado el 11 de febrero de 2015 de [http://msec.unir.net/cursos/msec07\\_mat\\_PER29/uploads/bibliografia/11022015\\_173540RDMAT\\_T2,3\\_P29\\_S3.pdf](http://msec.unir.net/cursos/msec07_mat_PER29/uploads/bibliografia/11022015_173540RDMAT_T2,3_P29_S3.pdf)

International GeoGebra Institute (2015). *GeoGebra.* Recuperado el 1 de mayo de 2015 de <http://www.geogebra.org/>

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de *Educación.* Boletín Oficial del Estado (4 de mayo de 2006), núm. 106, pp. 17158-17207. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>

Montesinos, J.L. (2010). *Historia de las Matemáticas en la enseñanza Secundaria.* Madrid: Síntesis.

Real Academia Española. (2014). Geometría. *Diccionario de la lengua española* (23<sup>a</sup> ed.). Recuperado de <http://lema.rae.es/drae/?val=geometr%C3%ADA>

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* Boletín Oficial del Estado (5 de enero de 2007), núm. 5, pp. 677-773. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf>

Real Decreto 23/2007, de 10 de mayo, *del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.* Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid (29 de mayo de 2007), núm. 126, pp. 48-139. Disponible en: [http://www.madrid.org/dat\\_capital/loe/pdf/curriculo\\_secundaria\\_madrid.pdf](http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/curriculo_secundaria_madrid.pdf)

Resolución de 30 de septiembre de 2009, *de la Dirección General de Educación Secundaria y Enseñanzas Profesionales, por la que se establecen los estándares o conocimientos esenciales de la materia de Matemáticas para los tres primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Madrid.* Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid (21 de octubre de 2009), núm. 250, pp. 52-58. Disponible en:

[http://www.bocm.es/boletin/CM\\_Orden\\_BOBCM/2009/10/21/2009-10-21\\_16102009\\_0142.pdf](http://www.bocm.es/boletin/CM_Orden_BOBCM/2009/10/21/2009-10-21_16102009_0142.pdf)

Teorema de Pitágoras (2015). *La más completa información sobre el Teorema de Pitágoras.* Recuperado el 1 de mayo de 2015 de <http://teoremadepitagoras.net/>

Universidad Internacional de La Rioja (2015). *Contextualizar la investigación para un Trabajo Fin de Máster.* Recuperado el 2 de mayo de 2015 de [http://msec.unir.net/cursos/lecciones/ARCHIVOS\\_COMUNES/versiones\\_para\\_imprimir/msdemo\\_ii2012/tema3.pdf](http://msec.unir.net/cursos/lecciones/ARCHIVOS_COMUNES/versiones_para_imprimir/msdemo_ii2012/tema3.pdf)

## 7.2. Bibliografía de imágenes

Figura 1: De Paz Santana, Y. R. (2015). *Recursos para la didáctica del Álgebra y del análisis matemático. Recursos para la didáctica de la Geometría.* Material no publicado. Recuperado el 11 de febrero de 2015 de [http://msec.unir.net/cursos/msec07\\_mat\\_PER29/uploads/bibliografia/11022015\\_173540RDMAT\\_T2.3\\_P29\\_S3.pdf](http://msec.unir.net/cursos/msec07_mat_PER29/uploads/bibliografia/11022015_173540RDMAT_T2.3_P29_S3.pdf)

Figura 2: *Demostración del área de un paralelogramo.* Elaboración propia.

Figura 3: *Demostración del área de un trapecio.* Elaboración propia.

## 7.3. Bibliografía de tablas

Tabla 1: *Relación objetivos-metodología.* Elaboración propia.

Tablas 2 a 11: *Respuestas a la encuesta.* Elaboración propia.

Tabla 12: *Calificación del examen en la clase de 1ºB.* Elaboración propia.

Tabla 13: *Calificación del examen en la clase de 1ºC.* Elaboración propia.

## 8. Anexos

### 8.1. Anexo I: Encuesta

#### ENCUESTA

**1. De los siguientes bloques de las Matemáticas, ¿cuál de ellos se te da mejor? (Puedes marcar más de una opción)**

- a) Números: naturales, enteros, decimales, potencias, divisibilidad
- b) Números: fracciones, proporcionalidad, porcentajes
- c) Álgebra: letras, expresiones algebráicas, ecuaciones
- d) Funciones y gráficas
- e) Geometría: rectas, ángulos, figuras geométricas, áreas, perímetros
- f) Estadística y probabilidad: gráficas, distribuciones, parámetros estadísticos, sucesos
- g) Ninguno

**2. ¿Y cuál se te da peor? (Puedes marcar más de una opción)**

- a) Números: naturales, enteros, decimales, potencias, divisibilidad
- b) Números: fracciones, proporcionalidad, porcentajes
- c) Álgebra
- d) Funciones y gráficas
- e) Geometría: rectas, ángulos, figuras geométricas, áreas, perímetros
- f) Estadística y probabilidad: gráficas, distribuciones, parámetros estadísticos, sucesos
- g) Ninguno

**3. ¿Has tenido dificultades con las Matemáticas en cursos anteriores?**

- a) Sí, muchas dificultades
- b) Bastantes dificultades
- c) Algunas dificultades
- d) No, nunca

**4. ¿Has tenido dificultades con el resto de asignaturas durante este curso?**

- a) Sí, en 2 o más asignaturas
- b) Sí, en una asignatura
- c) No, en ninguna asignatura

**5. Dentro del bloque de Geometría, señala el tema que más dificultades te ha presentado**

- a) Rectas y ángulos
- b) Figuras geométricas planas: triángulos, cuadriláteros, polígonos, circunferencias
- c) Cuerpos geométricos tridimensionales: poliedros, cuerpos de revolución
- d) Áreas y perímetros: de triángulos, cuadriláteros, polígonos y círculos
- e) Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones

**6. Dentro de las figuras planas, señala la que has encontrado más complicada**

- a) Triángulos
- b) Cuadriláteros
- c) Polígonos regulares
- d) Circunferencias y círculos
- e) Ninguna

**7. En el círculo y la circunferencia, ¿has encontrado dificultades al manejar el número  $\pi$ ?**

- a) Siempre
- b) A veces
- c) Casi nunca
- d) Nunca

**8. ¿Dónde has encontrado más dificultades en relación al Teorema de Pitágoras?**

- a) En sus aplicaciones
- b) En sus diferentes fórmulas para despejar la hipotenusa o los catetos
- c) En descomponer otras figuras para buscar un triángulo rectángulo
- d) En operar con números elevados al cuadrado o raíces cuadradas
- e) No he encontrado dificultades

**9. ¿Has entendido mejor las fórmulas del Área de las figuras planas, con su demostración en clase?**

- a) Sí
- b) Casi siempre
- c) Casi nunca
- d) No

**10. ¿Cómo te pareció el examen de la parte de áreas y perímetros de las figuras planas?**

- a) Muy difícil
- b) Difícil
- c) Normal
- d) Fácil
- e) Muy fácil

## **8.2. Anexo II: Examen escrito**

## **EXAMEN MATEMÁTICAS 1º ESO**

Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

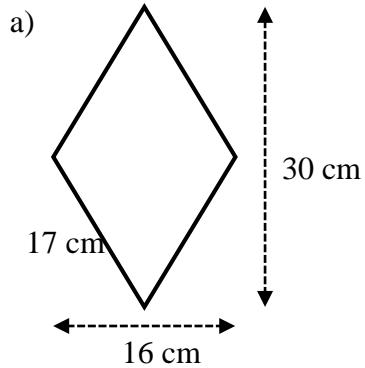
**EJERCICIO 1.** (1 punto) Nombra y pinta los cuadriláteros que poseen las siguientes características:

- a) Tiene los cuatro lados iguales y los ángulos no son rectos, pero son iguales dos a dos:
  - b) No tiene lados paralelos:
  - c) Tiene dos lados paralelos y los lados no paralelos son iguales:
  - d) Tiene los ángulos y los lados iguales dos a dos:

**EJERCICIO 2. (1 punto)** Teniendo en cuenta las posiciones relativas de circunferencias y rectas, dibuja:

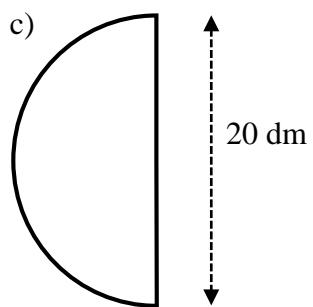
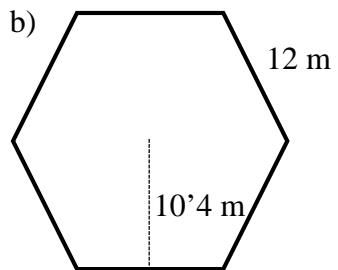
- a) Dos circunferencias tangentes interiores
  - b) Una recta tangente a las dos circunferencias
  - c) Otra recta tangente a una de las circunferencias y secante a la otra

**EJERCICIO 3. (3 puntos)** Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:

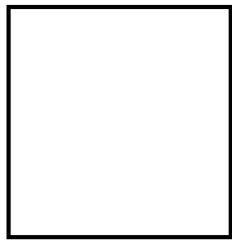


PERÍMETROS:

ÁREAS:



**EJERCICIO 4. (1 punto)** Calcula el área del siguiente cuadrado, sabiendo que su perímetro mide 80 metros.

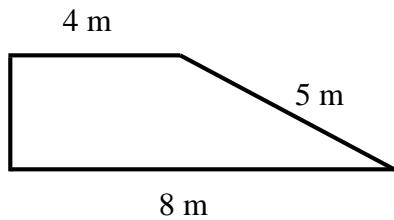


**EJERCICIO 5. (2 puntos)** Los lados de un triángulo rectángulo miden 5 mm, 12 mm y 13 mm.

a) Calcula el área del triángulo:

b) Calcula la altura sobre la hipotenusa:

**EJERCICIO 6. (2 puntos)** Ayudándote del teorema de Pitágoras, calcula el área del trapecio rectángulo de la figura:



NOTA: La parte del ejercicio 3 en la que se separa con una línea vertical la zona donde calcular el área de la zona donde calcular el perímetro, solo estaba en el examen para los alumnos con dificultades.

### 8.3. Anexo III: Ampliación de la encuesta

**11. ¿Habías utilizado anteriormente algún programa o software relacionado con las Matemáticas?**

- |       |  |
|-------|--|
| a) Sí |  |
| b) No |  |

**12. ¿Con qué grado de dificultad clasificarías el manejo del programa GeoGebra?**

- |                |  |
|----------------|--|
| a) Muy fácil   |  |
| b) Fácil       |  |
| c) Normal      |  |
| d) Difícil     |  |
| e) Muy difícil |  |

**13. ¿Has entendido mejor los conceptos geométricos vistos en clase con el uso de este software?**

- |                 |  |
|-----------------|--|
| a) Sí           |  |
| b) Casi siempre |  |
| c) Casi nunca   |  |
| d) No           |  |

**14. ¿Verías positivo para tu aprendizaje el aumento del uso de herramientas como el GeoGebra?**

- |                  |  |
|------------------|--|
| a) Muy positivo  |  |
| b) Algo positivo |  |
| c) Normal        |  |
| d) Algo negativo |  |
| e) Muy negativo  |  |